



FUNDAMENTOS DE MECÂNICA

2ª Edição

Cinemática / Leis de Newton



Volume 1

Renato Brito

Prof. Bormarodini - 2012
@gmail.com

O professor Renato Brito é cearense e atua no segmento IME ITA desde 1990, quando iniciou a sua preparação para o ITA (Instituto Tecnológico de Aeronáutica) nas turmas especiais do Colégio Geo Studio, em Fortaleza.

Foi aprovado no exame vestibular ITA 92, graduando-se engenheiro eletrônico em dezembro de 1997. A partir do segundo ano da faculdade, colaborou na preparação de vestibulandos IME ITA em um cursinho de São José dos Campos então recém fundado, o Poliedro, onde lecionou Física durante seis anos, retornando à sua cidade natal em janeiro de 1999.

Desde então, atua em Fortaleza, tanto na preparação de vestibulandos IME ITA, quanto na preparação de vestibulandos de Medicina e Odontologia - segmento muito concorrido nos exames das universidades brasileiras.

Inconformado com a carência de publicações de ensino médio em ciências exatas voltadas para os vestibulandos IME ITA, fundou a Livraria e Editora VestSeller em 2005, visando a resgatar, na medida do possível, a qualidade dos livros nesse segmento, fechando contratos com editoras e autores na Índia, na Rússia, Colômbia, Peru, e Estados Unidos, além de



É proibida a reprodução parcial ou total por quaisquer meios sem autorização prévia do autor. os transgressores serão punidos com base no artigo 7º, da lei 9.610/98. Denuncie o plágio ou cópias ilegais anonimamente através do correio eletrônico do autor :

profrenatobrito@gmail.com

Todo o conteúdo dessa obra encontra-se registrado
na Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro.

Sumário

- Prefácio
- Apresentação da 2ª Edição
- Sobre o autor
- Como usar este livro
- Agradecimentos
- Dedicatória

01 – Cinemática Geral

Cinemática Geral.....	03
-----------------------	----

02 – Dinâmica Retilínea no Referencial Inercial

2.1 – O Domínio de Validade das Leis de Newton	44
2.2 – Introdução ao Referencial Inercial	45
2.3 – O Referencial do Planeta Terra	48
2.4 – O Formato da Trajetória e o Par de Eixos-padrão	54
Problemas de Aplicação	62
Problemas que Envolvem Atrito	81

03 – Dinâmica do movimento Curvilíneo no Referencial Inercial

3.1 – Dinâmica do Movimento Curvilíneo	94
3.2 – As Componentes Tangencial e Centrípeta da Aceleração	97
3.3 – Força em Trajetória Curvilínea	100
3.4 – Estudo do Movimento de um Pêndulo Simples	102
3.5 – Dinâmica do MCU Plano Horizontal	105
Problemas de Aplicação	110

04 – Dinâmica Retilínea no Referencial Não inercial

4.1 – Revendo o Referencial Inercial – Generalizações	123
4.2 – O Referencial Não inercial	127
4.3 – O Princípio da Equivalência de Einstein	130
4.4 – Elevador Acelerado para Cima	132
4.5 – Elevador Acelerado para Baixo	133
4.6 – Vagão Acelerado Horizontalmente	134
4.7 – Forças de Interação e Forças de Inércia	139
Propriedade dos Equilíbrios de Corpos Rígidos	173
Problemas de Aplicação	180

05 – Dinâmica Curvilínea no Referencial Não inercial	
5.1 – Introdução	191
5.2 – A Força Centrífuga	192
Problemas de Aplicação	218
06 – Parábola de segurança – Tópico Especial 1	
6.1 – Introdução à Parábola de segurança	225
6.2 – Entendendo a Parábola de segurança	225
6.3 – Determinando a Equação da Parábola de segurança	227
6.4 – Atingindo um alvo usando velocidade mínima de disparo ...	232
6.5 – Otimizando o Ângulo de Disparo	235
6.6 – Generalizando as Equações do Movimento Parabólico por considerações de Simetria.....	237
6.7 – Generalizando o Alcance Máximo	242
07 – Vínculos Geométricos – Tópico Especial 2	
7.1 – Introdução aos Vínculos Geométricos	244
7.2 – Caso 1: Fios Inextensíveis, Polias Fixas	245
7.3 – Caso 2: Fios Inextensíveis, Uma Polia Móvel	247
7.4 – Caso 3: Fios Inextensíveis, Duas Polias Móveis	251
7.5 – Caso 4: Fio Inextensível, Variante com Duas Polias Móveis..	252
7.6 – Caso 5: Corpos Rígidos Deslizando – Caso Simples	253
7.7 – Caso 6: Corpos Rígidos Deslizando – Caso Avançado	254
08 – Respostas e Soluções	
Respostas e Soluções	256
09 – Apêndice sobre Cinemática	
Apêndice sobre Cinemática.....	492
10 – Apêndice sobre Infinitos	
Apêndice sobre infinitos.....	493
11 – Apêndice sobre rolamento	
Apêndice sobre rolamento.....	494
12 – Referências Bibliográficas	
Referências bibliográficas	495
13 – Referências na internet	
Referências na internet.....	497

Prefácio

Acredito que, ao se escrever um livro, pensa-se muito, aprende-se mais, aperfeiçoam-se métodos de exposição e coordenam-se melhor as idéias. O resultado se faz sentir nas próprias aulas, extraordinariamente facilitadas pelo livro texto e, como consequência, o melhor aprendizado e aproveitamento dos alunos e dos colegas professores.

O livro é uma revolução, pois imaginem a influência sobre o espírito, a alma, o coração de quem lê, adquirindo e armazenando idéias das idéias alheias.

O livro de Mecânica do Professor Renato Brito é o nosso anseio e a nossa recompensa pelo esforço por ele feito. Que maravilha absorver a experiência de tantos anos em preparação de vestibulandos do ITA e do IME, toda catalogada em teoria leve e bem elaborada, com a participação especial da aluna Claudete, além de exercícios fantásticos propostos e muitos resolvidos detalhadamente com o rigor que a Física requer.

Nós, professores dedicados ao ensinamento da Física, bem como os futuros alunos do ITA e do IME, que apreciamos uma Mecânica tratada de forma correta, com excelentes exercícios, temos em mãos uma obra única.

Finalmente, plagiando o filósofo e poeta Alexander Pope, poderíamos dizer :

“Deus fez Newton, que criou a Mecânica - o grande sustentáculo teórico da Física - e fez Renato para divulgá-la através desta obra maravilhosa.”

Marcos Haroldo Dantas Norões (*)

(*) Professor e Físico formado pela Universidade Federal do Ceará, o professor Marcos Haroldo é pioneiro na preparação do estudantes de Fortaleza que vão prestar vestibulares para o IME e para o ITA. Ele foi professor do autor em 1990 e 1991, na turma preparatória do Colégio Geo Studio. A partir do ano 2002, trabalhou com o autor tanto na turma ITA do Colégio Militar de Fortaleza, turma ITA do Colégio 7 de Setembro, quanto nas turmas preparatórias para medicina e odontologia do Curso Simétrico. Os notáveis resultados obtidos pelos vestibulandos cearenses nos exames do IME e do ITA, desde 1989 até os dias de hoje (com média de 30 aprovados por ano no ITA), devem-se, em grande parte, ao trabalho de alto padrão de qualidade desenvolvido pelo prof. Marcos Haroldo nas mais diversas escolas cearenses onde leciona.

Apresentação da 2ª Edição

Escrevi este livro motivado pela carência de material didático sobre essa temática num nível adequado tanto para vestibulandos IME ITA, quanto para estudantes dos cursos de graduação em Física e Engenharia.

Ele é o primeiro volume de uma coleção em três volumes intitulada *Fundamentos de Mecânica*, estruturada da seguinte forma:

- volume 1 – Cinemática geral e Leis de Newton;
- volume 2 – Energia, Sistemas de partículas, Dinâmica do centro de massa; Sistemas com massa variável.
- Volume 3 – Estática, Hidrostática, Gravitação e MHS.

O capítulo 1 traz uma seleção especial de problemas de Cinemática, desde os clássicos presentes nas provas de Física IME ITA, até os criativos problemas dos livros da editora russa Mir, incluindo alguns problemas originais de minha autoria.

Em geral, os problemas mais interessantes de Cinemática não são solucionáveis pela mera aplicação direta das funções horárias clássicas, pois requerem uma sagacidade que o estudante só adquire com a prática.

Por esse motivo, decidi não escrever uma teoria formal para o capítulo 1 por achar mais eficiente, para o aprendizado do leitor, o estudo direto das respectivas resoluções comentadas apresentadas ao final do livro. O capítulo 6 está vinculado ao capítulo 1 dessa obra e trata-se de um apêndice sobre Parábola de Segurança, onde descrevo e demonstro todas as fantásticas propriedades dessa fantástica ferramenta muito útil na resolução de problemas de máximo e mínimo envolvendo lançamento de projéteis.

Nos capítulos 2 e 3, faço uma análise teórica bastante crítica e detalhada do conceito de Referencial Inercial, discutindo em situações práticas o domínio de validade das leis de Newton do movimento. Em seguida, compartilho com o leitor as minhas estratégias pessoais de resolução de problemas de dinâmica retilínea e curvilínea no *Referencial Inercial*, através de uma sequência de exemplos resolvidos. Uma lista de problemas propostos correlatos é fornecida ao final do capítulo, com suas respostas/resoluções apresentadas ao final do livro. O capítulo 7 é um apêndice a esses capítulos 2 e 3 e trata sobre os Vínculos Geométricos. Nele, mostro ao leitor como inter-relacionar as velocidades e acelerações de corpos conectados entre si por cordas, polias etc. em função da geometria envolvida nas mais variadas situações físicas.

Os capítulos 4 e 5 são dedicados ao estudo do referencial não-inercial. **São talvez o grande diferencial desse livro.** Na parte teórica, faço uma rica explanação sobre os conceitos de referencial não-inercial e forças fictícias, incluindo a análise prática de vários problemas em cada um dos referenciais inercial e não-inercial. Uma lista de problemas propostos correlatos é fornecida ao final desse capítulo, com suas respostas/resoluções apresentadas no final do livro.

Além dos **30** Exemplos Resolvidos ao longo do seu texto teórico, o livro foi ampliado de **150** problemas propostos (na edição anterior) para mais de **330** problemas propostos (nessa edição), dos quais, **220** deles estão integralmente resolvidos ao final do livro (capítulo 8), muitas vezes com duas soluções distintas para um mesmo problema. Os **110** problemas propostos deixados para o treinamento do leitor são acompanhados de suas respostas ao final do livro.

O conteúdo teórico deste livro, somado à grande quantidade de exercícios resolvidos, **realmente** dá ao leitor todo o conhecimento suficiente para ele resolver todos os 110 problemas propostos deixados como exercício.

Ao longo de todo o livro, busquei usar uma linguagem simples e irreverente, utilizando-me da personagem Claudete, a fim de tornar a sua leitura leve e prazerosa, amenizando o alto nível técnico praticado.

Optei por concentrar as respostas e resoluções dos problemas propostos no final do livro, acreditando que essa forma de organizar o conteúdo torne a sua leitura mais clara.

Ao longo do livro, o leitor encontrará alguns códigos que o ajudarão a tirar o máximo proveito da obra. São eles:

Símbolo	Significado
cadeado (🔒)	A resolução completa dessa questão é apresentada ao final do livro.
lua "nova" (☾)	Essa questão é nova, não constava no livro na edição anterior, foi acrescentada nessa 2ª edição.
[12, 13, 14]	Esses números indicam que as questões 12, 13 e 14 são correlatas, isto é, são questões que tratam de um mesmo tema. Suas resoluções seguem uma linha de raciocínio comum.

Espero que a presente obra contribua para dar ao leitor uma compreensão mais sólida e profunda dos Princípios da Dinâmica.

Finalmente, gostaria de dizer que acho importante o contato do autor com os seus leitores, pois esse feedback permite que sejam detectadas as dificuldades do leitor, que sejam detectadas as partes do texto que podem ser melhor esclarecidas, enfim, tudo que pode ser melhorado no livro. Assim, o envio de **dúvidas**, críticas e sugestões, bem como de eventuais falhas que os leitores venha a encontrar, é bem-vindo pelo meu correio eletrônico pessoal:

profrenatobrito@gmail.com

Renato Brito Bastos Neto
Fortaleza, Maio de 2010

Sobre o autor

O professor Renato Brito é cearense e atua no segmento IME ITA desde 1990, quando iniciou a sua preparação para o ITA (Instituto Tecnológico de Aeronáutica) nas turmas especiais do Colégio Geo Studio, em Fortaleza.

Foi aprovado no exame vestibular ITA 92, graduando-se engenheiro eletrônico em dezembro de 1997. A partir do segundo ano da faculdade, colaborou na preparação de vestibulandos IME ITA em um cursinho de São José dos Campos então recém fundado, o Poliedro, onde lecionou Física durante seis anos, retornando à sua cidade natal em janeiro de 1999.

Desde então, atua em Fortaleza, tanto na preparação de vestibulandos IME ITA, quanto na preparação de vestibulandos de Medicina e Odontologia - segmento muito concorrido nos exames das universidades brasileiras.



Tomou contato com os livros da renomada editora Mir – Moscou, pela primeira vez, aos dezesseis anos de idade, ao adquirir os livros *Problemas Seleccionados de Física Elementar* (Saraeva) e *Problemas de Matematica Elementares* (V.Lidski e Otros) na Livraria Arte e Ciência orientado pelo amigo prof. Majela Guedes. Desde então, passou a integrar a família dos inúmeros docentes e estudantes dos quatro continentes aficcionados pelos livros daquela editora russa.

A Mir - Moscou, embora ainda esteja ativa até os dias de hoje, restringiu sua produção ao mercado russo desde 1990, com a desintegração da união soviética, quando passou a editar e publicar livros apenas no idioma local.

Inconformado com a carência de publicações de ensino médio em ciências exatas voltadas para os vestibulandos IME ITA, fundou a editora VestSeller em 2005, visando a resgatar, na medida do possível, a qualidade dos livros nesse segmento, fechando contratos com editoras e autores na Índia, na Rússia e no Brasil.

A editora VestSeller é uma empresa do segmento pontocom, atuando em todo Brasil pela internet, através do seu sítio www.vestseller.com.br. Patrocina iniciativas filantrópicas, como o site www.rumoaota.com.br, além de colaborar na maior comunidade do Orkut para estudantes que estão se preparando para as escolas militares, chamada Projeto IME ITA AFA EN, pertencente ao Júlio Sousa e Caio Guimarães:

www.fisicaju.com.br/projetoimeita

Importante - como usar este livro

Para que o leitor tire máximo proveito da presente obra, darei a seguir algumas instruções que serão muito úteis.

Antes de mais nada, afirmo que não é necessário o conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral para uma perfeita assimilação do conteúdo deste livro. Embora o livro seja repleto de problemas bastante avançados para o Ensino Médio, toda a Matemática aqui praticada é de Ensino Médio.


Mas profinho, é melhor eu tentar resolver o livro todo, fazendo o máximo possível para não ler as suas resoluções no final do livro, né verdade ?



Discordo, Claudete. O seu objetivo é apenas terminar esse livro o mais rápido possível ? Ou aprender o máximo possível com esse livro ?



Para que você não sinta muita dificuldade ao longo do livro, sugiro as seguintes estratégias:

Ao se deparar com as questões resolvidas (marcadas com o símbolo ) , não se torture horas e horas tentando resolvê-las pois pode ser bem desestimulante. Seja prático, leia diretamente o enunciado e, sem hesitar, vá direto a final do livro e leia a resolução do problema. Essas questões resolvidas funcionam como fonte de teoria/conhecimento para o leitor.

Professor, mas se eu fizer isso, como vou treiná-las ?

Se acalme pois duas ou três questões adiante, você vai se deparar com um problema semelhante mas que não está resolvido por mim lá atrás, pra servir como treinamento para o leitor. É quando ele vai aferir se de fato entendeu ou não a resolução dos 2 ou 3 exercícios resolvidos que antecedem o problema de treinamento.

Essa é a sequência das questões: Um(a)s 3 ou 4 resolvidas (para o leitor apenas ler a resolução) seguidas por um(a)s 2 ou 3 para o leitor tentar resolver e conferir a resposta no final do livro. Não salte questões, resolva na ordem.

Seguindo esses conselhos, você terá um salto de conhecimento enorme num curto intervalo de tempo sem muito sofrimento.

O leitor que deseja realmente tirar máximo proveito do livro deverá ler os comentários de todas as questões que estão resolvidas no final do livro, mesmo que ele tenha conseguido resolver a questão por conta própria.

Dessa forma, o leitor se beneficiará com toda a experiência e ensinamentos adquiridos pelo autor desde os 17 anos (quando iniciou seu treinamento para o ITA em 1989) até os dias de hoje. O leitor só tem a ganhar, ao ler todas as resoluções.

Não deixe de acessar esses sites de apoio ao seu livro

Acessando os sites abaixo, o leitor encontrará resoluções extras de questões não-resolvidas no livro, bem como pequenas correções de gabarito ou erratas já encontradas ao longo do livro após ele ter sido impresso.

- www.vesteseller.com.br/erratas/mecanica1
- www.vesteseller.com.br/erratas/mecanica2

Acredito que, seguindo essas instruções, mesmo um estudante com pouca experiência em Mecânica assimilará todo o conteúdo desta obra com sucesso, obtendo, em geral, um grande salto de conhecimento num espaço de tempo relativamente curto. Imaginem quanto tempo o autor, particularmente, levou para aprender todo esse conteúdo e sedimentá-lo, maturá-lo, conteúdo esse espalhado em inúmeros livros, muitos deles estrangeiros.

Este livro é um presente para todos os estudantes e professores brasileiros.

Apelo aos colegas “egoístas” 😊

Muitos colegas professores têm ficado tão empolgados e encantados com essa coleção de Mecânica que tratam rapidamente de escondê-la dos seus alunos e dos colegas professores, para que apenas ele seja o detentor desse conhecimento. Imaginem só se todas as pessoas do mundo pensassem dessa forma 😊 ? Imaginem se o próprio autor tivesse pensado assim antes de decidir escrever esse livro 😊 ? O livro teria ficado engavetado, nunca teria chegado até você.

Assim, peço aos colegas professores que mostrem os bons livros aos seus alunos, para que eles também possam beber diretamente da fonte do conhecimento. Levem o livro para a sua sala de aula, façam-no passar de mão em mão entre os alunos, estimulem-os a conhecer o livro, a possuí-lo se possível, ou a consultá-lo na biblioteca da sua escola.

Nós professores nada ganhamos ao tentarmos limitar o conhecimento dos nossos alunos, ao tentarmos ser a única fonte de conhecimento deles, o único ídolo deles. Na verdade, devemos cuidar para que nossa vontade de ensinar seja maior do que a nossa vaidade.

O nosso papel de professor não é diminuído quando apresentamos aos alunos nossas fontes de estudo, nossas fontes de conhecimento. Afinal, o professor é um facilitador do aprendizado do aluno, é um orientador e, aquele que conseguir guiar os alunos através da maior variedade possível de fontes de conhecimento, terá sido o mais eficaz em sua missão de professar o conhecimento.

Agradecimentos

Deus, pelo dom da vida e pela saúde;

Aos meus pais, que sempre me deram todo o apoio que precisei em minha vida e que nunca me deixaram faltar bons livros;

Meu irmão Remo pelo apoio diário;

A Giselly Dostoievski por ler e reler os originais, avaliando pacientemente a clareza da resolução de cada questão;

Meus amigos professor Daniel Leite, professor Diego Leitão, professor Vianey (UFC) e Wilson Guilherme Gonzaga pela revisão dos originais, além das inúmeras críticas e sugestões;

Meu amigo Prof. Ulisses Castro por ajudar na divulgação e aprimoramento dessa obra, em especial, por contribuir com a propriedade 5 da parábola de segurança, acrescentada nessa 2ª Edição, muito útil na solução de problemas de lançamentos de projéteis envolvendo máximo e mínimo;

Professor Marcos Haroldo por ter me iniciado na estrada da Física IME ITA.

Dedicatória

Este livro é dedicado a todos aqueles que **não** são movidos pela sedução do dinheiro e poder mas sim, por uma causa nobre, por um ideal.

Somente os idealistas podem mudar o mundo.

1 CINEMÁTICA GERAL



(foto por Andrew Davidhazy)

Questão 01 - 🎧🔊 - A Super-Mosca ✓

Um trem parte de São Paulo com destino ao Rio de Janeiro com velocidade de 60 Km/h. Ao mesmo tempo, parte do Rio de Janeiro, com destino a São Paulo, um segundo trem com velocidade de 40 Km/h. Na frente deste e ao mesmo tempo, parte nossa heroína, a super-mosca, com a velocidade de 70 Km/h. Ela vai ao encontro do trem que vem de São Paulo e, ao encontrá-lo, volta com destino ao Rio de Janeiro até encontrar o segundo trem, e assim sucessivamente até quando os dois trens se chocam. Admitindo que a distância São Paulo – Rio de Janeiro seja igual a 500 Km, pergunta-se qual distância total percorrida pela super-mosca nesse zig-zag até morrer esmagada, coitada (eca 😊) ?

Questão 02 - 🎧🔊 - Zenon de Eléia e o Paradoxo de Aquiles. ✓

Zenon de Eléia era um filósofo grego que viveu por volta do ano 500 A.C. Se você nunca ouviu falar dele, talvez conheça ao menos o paradoxo inventado por ele, conhecido como o Paradoxo de Aquiles, narrado a seguir.

Aquiles e uma tartaruga concordaram em apostar uma corrida à pé. A tartaruga argumentou que Aquiles tinha a vantagem da velocidade, portanto, ela precisava de alguma compensação. Aquiles deu à tartaruga 1000 m de vantagem inicial, isto é, a tartaruga iniciará a corrida num ponto A 1000 m à frente de Aquiles. Quando é dada a largada, Aquiles corre os primeiros 1000 m ao encaicho da tartaruga e ao atingir a posição inicial dela, o

cágado já se encontrava numa posição B 100 m adiante. Aquiles prossegue no enalço e ao atingir o ponto B, a tartaruga já se encontrava numa posição C 10 m adiante. Aquiles prossegue até atingir o ponto C e, lá chegando, vê que a tartaruga já se encontra um ponto D 1 m à frente, e assim sucessivamente. Pergunta-se:

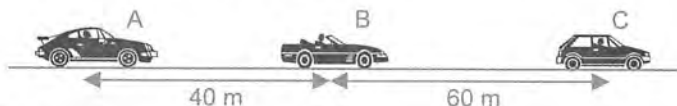


- Admitindo que Aquiles desenvolva uma velocidade de 5 m/s, conseguirá o jovem mancebo alcançar a tartaruga? Em caso afirmativo, após quanto tempo?
- Que distância Aquiles percorrerá até alcançar a tartaruga?
- Após quanto tempo Aquiles estará 12,5 m à frente do cágado?

Questão 03 -

[3, 4, 5]

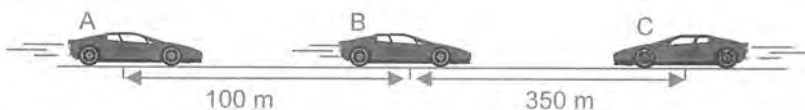
O esquema representa o instante inicial ($t = 0s$) da perseguição entre três veículos A, B e C, que se deslocam com velocidades 50 m/s, 20 m/s e 60 m/s, respectivamente. Determine após quanto tempo o veículo A se encontrará exatamente entre os veículos B e C, a meia distância deles.



Questão 04

[3, 4, 5]

No esquema a seguir, os móveis A, B e C deslocam-se com velocidades respectivamente 20 m/s, 40 m/s e 50 m/s, respectivamente, numa mesma rodovia, de mão-dupla:



A partir desse instante, quantos metros o móvel C deverá percorrer, para que se posicione exatamente entre os móveis A e B, a meia distância deles?

Questão 05 - ☉ - As Cruzadas

[3, 4, 5]

Quatro automóveis A, B, C, e D movem-se em uma estrada, todos com velocidade constante. A *ultrapassa* B às 8:00h, *ultrapassa* C às 9:00h e *cruza* com D às 10:00h. D *cruza* com B às 12:00h e com C às 14:00h. Determine a que horas B *ultrapassa* C.

- a) 10h 20min b) 10h 30 min c) 10h 40min d) 11h e) 11h 30min

Questão 06 - ☉ - Eco nas nuvens

[6 a 10]

A face inferior de uma camada de nuvens é plana e horizontal. Um rojão lançado para cima estoura entre o solo e a camada de nuvens. Um observador situado no solo, na mesma vertical do rojão, ouve o estouro t_1 segundos após ter visto o clarão da explosão e ouve o eco do som refletido na nuvem t_2 segundos após ter visto o clarão da explosão. Sendo V a velocidade do som no ar, determine a altura da nuvem.

Questão 07 - ☉

[6 a 10]

Um navio move-se com velocidade V_N se afastando do porto. Num certo instante, um sinal sonoro é emitido do porto simultaneamente no ar e na água. Ele se propaga no ar com velocidade V_R e na água com velocidade V_G (com $V_G > V_R$). No navio, os sons incidentes através do ar e da água são recebidos com um intervalo de tempo Δt entre eles. Determine a que distância do porto encontrava-se o navio ao receber o primeiro sinal.

Questão 08 - ☉ - O primeiro tiro

[6 a 10]

De um ponto A, dá-se um tiro em um alvo B. Um observador em C localizado entre A e B, muito próximo à reta AB, mede o intervalo de tempo Δt decorrido entre o instante em que ele ouve o tiro e o instante em que ele ouve o impacto do projétil no alvo. Sendo V_P e V_S as velocidades do projétil e do som, e d a distância entre os pontos A e C, determine a distância entre os pontos A e B.

Questão 09 - ☉ - O segundo tiro

[6 a 10]

Um atirador em A dispara um tiro de fuzil em direção a um alvo em B. A distância que separa esses pontos vale $d = 1200$ m. Admite-se que o projétil descreva uma trajetória retilínea com velocidade constante $v = 680$ m/s. A velocidade do som no ar vale $v_S = 340$ m/s. Determine a que distância do alvo B encontra-se um observador que ouve simultaneamente o som do disparo do fuzil e o som do impacto do projétil com o alvo, no seguintes casos:

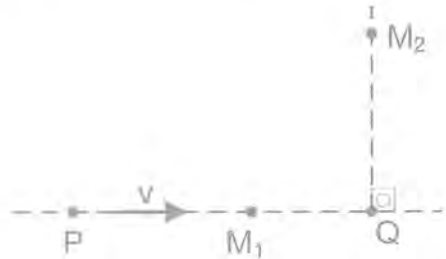
- a) o observador encontra-se sobre a reta AB;
b) o observador encontra-se sobre uma reta normal à reta AB que passa pelo ponto B.

Questão 10 - \odot - (ITA 2007) - O terceiro tiro

[6 a 10]

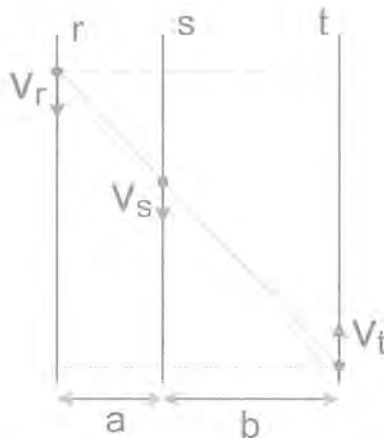
Considere que num tiro de revólver, a bala percorre uma trajetória retilínea com velocidade V constante, desde o ponto inicial P até o alvo Q mostrados na figura. O aparelho M_1 registra simultaneamente o sinal sonoro do disparo e o do impacto da bala no alvo, o mesmo ocorrendo com o aparelho M_2 . Sendo V_s a velocidade do som no ar, a razão entre as respectivas distâncias dos aparelhos M_1 e M_2 ao alvo Q é:

- a) $V_s \cdot (V - V_s) / (V^2 - V_s^2)$
 b) $V_s \cdot (V_s - V) / (V^2 - V_s^2)$
 c) $V \cdot (V - V_s) / (V_s^2 - V^2)$
 d) $V_s \cdot (V + V_s) / (V^2 - V_s^2)$
 e) $V_s \cdot (V - V_s) / (V^2 + V_s^2)$

**Questão 11 - \odot - Móveis alinhados**

[11 a 14]

Duas partículas r e t partem simultaneamente das posições mostradas na figura abaixo, em movimentos retilíneos e uniformes, com velocidades respectivamente iguais a \mathbf{vr} e \mathbf{vt} . Uma terceira partícula s , que se encontrava inicialmente alinhada às demais, deve se mover de tal forma a permanecer alinhada às partículas r e t , durante todo o movimento. Determine a velocidade \mathbf{vs} com que a partícula s deverá se mover, em função de \mathbf{vr} , \mathbf{vt} , \mathbf{a} e \mathbf{b} .

**Questão 12 - Cavalos alinhados**

[11 a 14]

Num jockey club, a corrida de cavalos é realizada numa pista composta por 10 raias paralelas, retilíneas e equidistanciadas. Ao ser dada a largada, os cavalos das raias 1 e 6 disparam com velocidades $V_1 = 6 \text{ m/s}$ e $V_6 = 11 \text{ m/s}$, respectivamente.

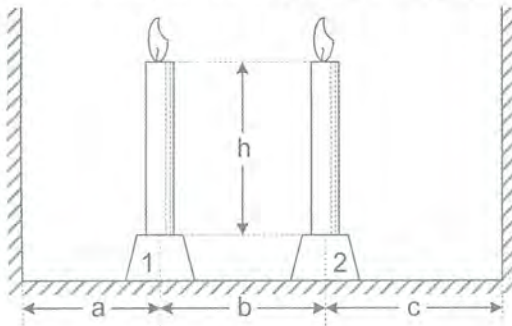


Com que velocidade V_3 deve se deslocar o cavalo da raia 3 para que os três cavalos permaneçam alinhados durante toda a prova ?

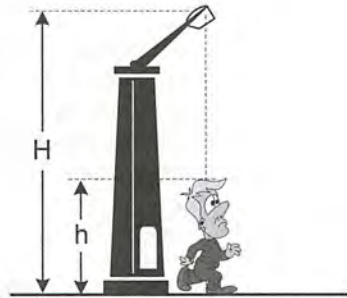
Questão 13 - ☉ - As sombras das velas

[11 a 14]

No instante inicial, duas velas tinham comprimentos iguais a h e estavam dispostas entre duas paredes verticais, distanciadas de acordo com a figura. Sabendo que a vela 1 é totalmente consumida em um tempo t_1 e a vela 2 é totalmente consumida num tempo t_2 , determine a velocidade das sombras das velas na parede esquerda e na parede direita.



Questão 13



Questão 14

Questão 14 - ☉ - A sombra do pedestre

[11 a 14]

Um pedestre de altura h , movendo-se com velocidade constante v , passa exatamente sob um poste de luz de altura H . Determine, a partir desse instante, a velocidade da sombra da cabeça do pedestre, projetada no chão.

Questão 15 - ☉ - Reduzindo após 2/3

A e B são duas estações de uma estrada de ferro de linha dupla. Num dado instante, passa pela estação A um trem T_1 que se dirige para B com velocidade de 54 km/h . Decorrido um certo intervalo de tempo, outro trem T_2 , que move-se a 72 km/h , passa por A rumo à estação B. O intervalo de tempo que separa as passagens de T_1 e T_2 pela estação A é tal que ambos passariam simultaneamente pela estação B. Acontece, entretanto, que após ter percorrido $2/3$ da distância que separa as duas estações, o trem T_1 reduz sua velocidade à metade e em conseqüência é ultrapassado por T_2 num ponto situado 10 km antes da estação B. Determinar a distância entre as duas estações.

Questão 16 - ♣ - O problema dos três turistas

Três turistas, que possuem uma única bicicleta, movem-se ao longo de uma avenida reta, desejando ir do hotel ao centro turístico *no menor espaço de tempo* (o tempo é contado até que o último turista chegue ao centro). A bicicleta consegue transportar apenas duas pessoas de cada vez, a uma velocidade de 20 km/h e, por isso, o terceiro turista precisa começar o deslocamento a pé. O ciclista leva o segundo turista até um determinado ponto do caminho, de onde este continua a andar a pé, a uma velocidade de 4 km/h, enquanto o ciclista regressa para transportar o terceiro. Se a distância do hotel ao centro turístico é de 8 km, determine:

- em quanto tempo conseguirão chegar ao centro turístico ?
- o segundo turista deverá ser transportado de bicicleta até faltar quantos km para chegar ao centro turístico ?

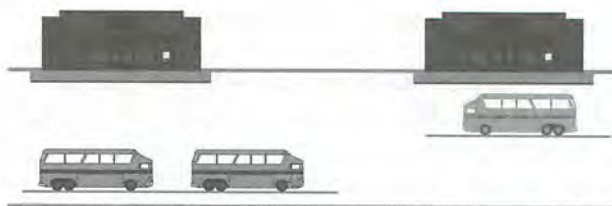
Questão 17 - ♣ - Empresário na estação ferroviária

Um empresário trabalha num banco que fica nos arredores da cidade. Diariamente, ao chegar à última estação ferroviária, um carro do banco transporta-o para o local de trabalho através de uma avenida reta (de mão dupla) que liga o banco à estação ferroviária. Certa vez, o empresário chegou à estação 1h antes do habitual e, sem esperar o carro, seguiu a pé rumo ao local de trabalho, fazendo o percurso habitual do carro. No caminho, encontrou-se com o veículo e chegou ao banco 20 min antes do horário de costume. Quanto tempo caminhou o empresário antes de se encontrar com o carro ?

**Questão 18 - ♣ - Linha de bondes**

[18 a 22]

Numa linha dupla que une duas estações A e B, movimentam-se bondes em ambos os sentidos, com velocidades escalares constantes e iguais em valor absoluto, de forma que, de 15 min em 15 min, em cada estação, dois bondes se cruzam. Um observador passa por uma das estações e presencia o cruzamento de dois bondes; em seguida, segue com movimento uniforme uma trajetória paralela aos trilhos e chega à outra estação no instante em que dois outros bondes se cruzam. Incluindo os 4 bondes vistos nas estações, pelo observador passaram 22 bondes em todo o percurso AB, sendo que 7 movimentando-se no mesmo sentido e 15 no sentido contrário ao observador.



Pede-se determinar :

- quanto tempo cada bonde gasta para ir de A a B.
- quanto tempo o observador gasta para ir de A a B.

Questão 19 - C - Linha de bondes generalizada

[19 a 22]

Numa linha dupla que une duas estações A e B, movimentam-se bondes em ambos os sentidos, com velocidades escalares constantes e iguais em valor absoluto, de forma que, de T em T minutos, em cada estação, cruzam-se dois bondes. Um observador passa por uma das estações e presencia o cruzamento de dois bondes; em seguida, segue com movimento uniforme uma trajetória paralela aos trilhos e chega à outra estação no instante em que dois outros bondes se cruzam. Durante a caminhada do pedestre, passaram por ele um total de $p+q$ bondes, incluindo os 4 bondes vistos nas estações. Desse total de bondes, p deles moviam-se no mesmo sentido do pedestre e os outros q bondes moviam-se no sentido contrário.

- Quanto tempo cada bonde gasta para ir de A a B ?
- Quanto tempo o observador gasta para ir de A a B ?

Questão 20 - O guarda na linha de bondes

[19 a 22]

Um guarda caminha todos os dias ao longo de uma linha de bondes até uma estação ferroviária, retornando ao entardecer. No seu percurso de ida, percebeu ser ultrapassado pelos bondes que trafegam pela linha a cada seis segundos. Chegando à estação, o guarda sentou para almoçar e notou que os bondes passavam pela estação a cada T segundos. Já ao entardecer, caminhando no percurso de volta com a mesma velocidade usual, o guarda percebeu que agora os bondes passavam por ele a cada três segundos. Admitindo que os bondes trafeguem pela linha sempre com a mesma velocidade escalar o tempo inteiro, determine T:

- 3,5 s
- 4 s
- 4,5 s
- 5 s
- 5,5 s

Questão 21 - A coluna de soldados

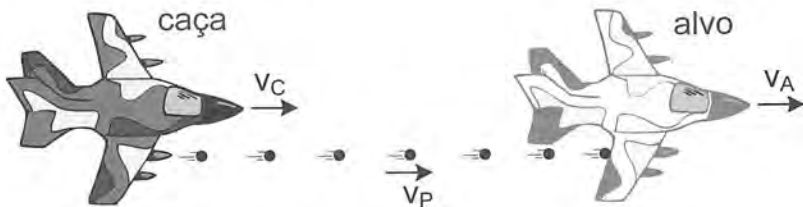
[19 a 22]

Uma coluna de soldados de 600 m de comprimento marcha ao longo de uma estrada com uma velocidade constante de 4,5 km/h. Na mesma direção da coluna, mas em sentido oposto, aproxima-se um oficial superior caminhando a uma velocidade constante de 3,0 km/h. Quando ele passa ao lado de cada soldado, ordena que estes se movam no sentido oposto. Cada soldado instantaneamente (tão logo recebe a sua ordem) inverte o sentido da sua marcha e continua com a mesma velocidade, mas no sentido oposto. Após

algum tempo, toda a coluna está se movendo no sentido contrário. Determine o novo comprimento da coluna de soldados.

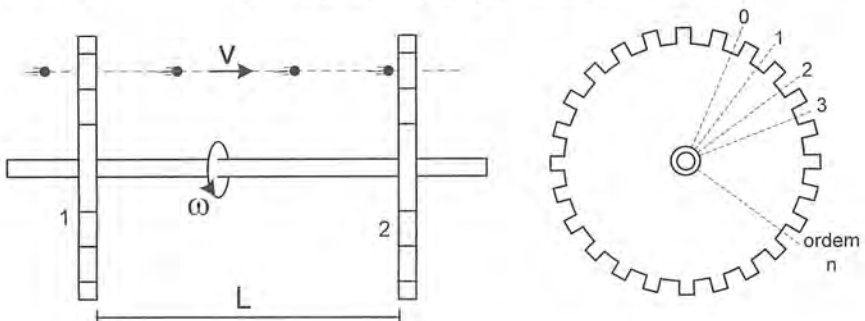
Questão 22 - ☉ - O problema dos caças – Efeito Doppler [19 a 22]

Pilotos de caça exercitam-se atirando em um alvo teleguiado. O caça percorre uma trajetória retilínea horizontal r com velocidade horizontal v_C e sua metralhadora dispara uma sucessão de projéteis com velocidade v_P , num ritmo de 1 projétil a cada T segundos. O alvo percorre a mesma trajetória retilínea r com velocidade v_A . Os projéteis percorrem sensivelmente a mesma trajetória retilínea r . Todas as velocidades são dadas em relação à Terra e são admitidas constantes. Determine o intervalo de tempo T' decorrido entre dois impactos sucessivos dos projéteis no alvo.



Questão 23 - ☾ - A roda dentada de Fizeau

O esquema abaixo mostra um sistema constituído por dois discos idênticos solidários a um mesmo eixo horizontal que gira com velocidade angular constante ω . A distância entre os discos vale L . Cada disco trata-se de uma roda dentada, constituída por dentes igualmente espaçados totalizando N dentes ao longo de toda a sua periferia. As rodas estão encaixadas de forma que os dentes da roda 1 e da roda 2 se correspondem segundo retas horizontais paralelas ao eixo do sistema. Uma partícula, movendo-se em movimento retilíneo e uniforme com velocidade v , passa pelo vão de ordem 0 (zero) na roda 1 e, em seguida, passa pelo vão de ordem n na roda 2. Determine a velocidade v da partícula em função de n , N , L , e ω . Essa roda dentada foi usada na primeira determinação da velocidade da luz sem usar métodos astronômicos, pelo francês Hippolyte Fizeau em 1849.



Questão 24 - ☉ - Rodas que parecem estar paradas

[24, 25 e 26]

Na tela de um cinema, vê-se uma carruagem em movimento. O raio das rodas dianteiras da carruagem é $r = 0,35 \text{ m}$ e o raio das rodas traseiras é $R = 1,5.r$. As rodas dianteiras têm $N_1 = 6$ raios. A câmera cinematográfica roda a fita com uma velocidade de 24 quadros por segundo. Considerando que as rodas da carruagem giram sem escorregamento, determine:

- a) a velocidade mínima da carruagem para que se tenha a impressão de que as rodas dianteiras da carruagem estão em repouso;
- b) o menor número de raios N_2 que as rodas traseiras devem ter, a fim de que as mesmas também pareçam estar em repouso, para a velocidade da carruagem determinada no item a.

Questão 25 - ☉ - Rodas que parecem girar ao contrário

[24, 25 e 26]

A figura mostra a roda de uma diligência usada num filme de bang-bang. A filmagem estava sendo projetada a uma taxa de 24 quadros por segundo e a diligência estava em disparada movendo-se para a direita, numa perseguição. Ainda assim as rodas davam a impressão de estarem girando para trás. Para que isso ocorra, as rodas podiam estar girando com qualquer frequência f (em Hz) no intervalo:

- a) $2,0 < f < 3,0$
- b) $4,0 < f < 5,0$
- c) $3,5 < f < 4,5$
- d) $6,5 < f < 7,0$
- e) $7,0 < f < 8,0$

**Questão 26 - ☉ - Rodas girando – Ilusão de óptica**

[24, 25 e 26]

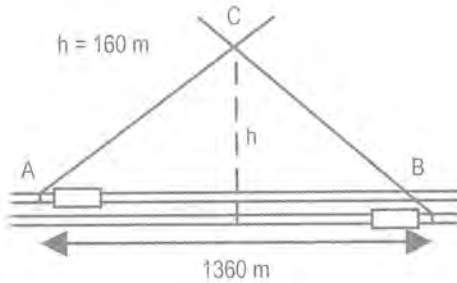
Um carro esportivo que usa rodas de magnésio com o aspecto mostrado na figura foi levado para fazer balanceamento. Lá chegando, as rodas foram encaixadas numa máquina que produz um giro de 900 RPM no sentido horário. Durante esse processo, a sala fica escura e uma lâmpada estroboscópica pisca rapidamente com uma frequência de 24 flashes por segundo. Durante esse processo, pergunta-se:

- a) As rodas parecerão girar no sentido horário ou anti-horário ?
- b) E vão girar com qual frequência aparente em RPM ?

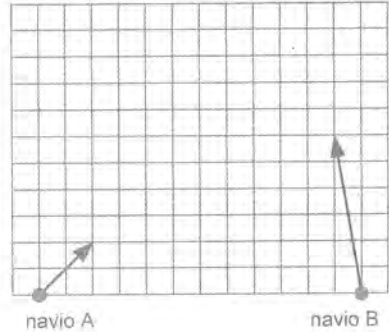


Questão 27 - ⚙ - (ITA 91) - Problema da velocidade do vento.

A figura representa a vista aérea de um trecho retilíneo de ferrovia. Duas locomotivas a vapor, A e B, deslocam-se em sentidos opostos com velocidades constantes de 50,4 km/h e 72 km/h, respectivamente. Uma vez que AC corresponde ao rastro da fumaça do trem A, BC ao rastro da fumaça de B e que $AC = BC$, determine a velocidade do vento. Despreze a distância entre os trilhos de A e B.



Questão 27



Questão 29

Questão 28 - ⚙

Um barco a motor, que ia subindo um rio, encontrou uma balsa que se movia no sentido da correnteza. Após uma hora do encontro, o motor do barco parou. O conserto do motor durou 30 min e durante esse tempo o barco moveu-se livremente no sentido da corrente. Depois do conserto, o barco começou a se mover na direção da corrente, seguindo rio abaixo com a mesma velocidade relativa à água e encontrou a balsa a uma distância de 7,5 km em relação ao primeiro encontro. Determine a velocidade da correnteza.

- a) 5 km/h b) 4 km/h c) 3 km/h d) 2 km/h e) 6 km/h

Questão 29 - ⚙ - Distância mínima entre dois móveis

[29 a 31]

A figura mostra em escala a velocidade vetorial de dois navios A e B que se movem com velocidade constante num oceano de águas paradas. Pede-se determinar qual a menor distância entre os navios durante essa travessia, em km. Cada célula quadrada tem lado 10 km

Questão 30 - ⚙ - Distância mínima entre dois móveis

[29 a 31]

Duas partículas 1 e 2 se movem com velocidades constantes v_1 e v_2 em trajetórias retilíneas perpendiculares entre si, se aproximando do ponto de cruzamento O. No instante $t = 0$, as partículas encontram-se a distâncias respectivamente iguais a L_1 e L_2 do cruzamento O. Determine:

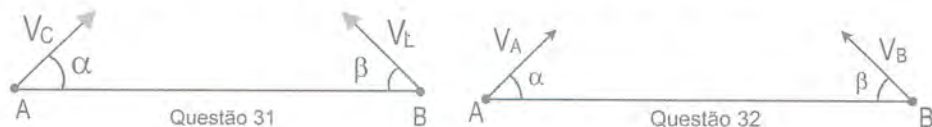
- a) o instante em que a distância entre as partículas será mínima;
b) a distância mínima atingida.

Questão 31 - Distância mínima entre dois móveis

[29 a 31]

No instante $t = 0$ s, uma canoa e uma lancha passam, respectivamente, pelos pontos A e B da água de um lago, movendo-se com velocidades constantes V_C e V_L conforme mostra a figura. Determine qual será a mínima distância entre a canoa e a lancha e após quanto tempo elas estarão em tal situação.

Dados: $\alpha = \beta = 60^\circ$, $V_C = 40$ km/h, $V_L = 80$ km/h, $\overline{AB} = 20$ km

**Questão 32**

Um torpedo é lançado do ponto A no instante em que o navio inimigo se encontra no ponto B e navega com velocidade $V_B = 50$ km/h, numa direção que forma ângulo $\beta = 30^\circ$ com a direção \overline{AB} . Sabendo que a velocidade do torpedo é $V_A = 100$ km/h, determine o ângulo α com o qual ele deve ser lançado para atingir o alvo.

Questão 33 - ☉ - Velocidade relativa e a direção do vento

Quando um trem viaja sobre trilhos retilíneos retilínea, de leste para oeste, a 80 km/h, um passageiro no interior do trem sente o vento soprando do norte. Quando o trem passa a se mover a 20 km/h, o passageiro no interior do trem sente o vento soprando proveniente do nordeste, numa direção que forma 45° com o eixo leste-oeste. O prof. Renato Brito pede que você determine a velocidade do vento.

Questão 34 - ☾

[34 a 40]

Um rio de margens paralelas tem uma correnteza de velocidade 6 m/s. Um piloto de uma lancha desejando ir de uma margem à outra, orienta o eixo do navio perpendicularmente às margens do rio e segue viagem, com o seu velocímetro indicando uma velocidade de 8 m/s. Se a distância de uma margem a outra é de 24 m, calcule:

- a rapidez da lancha em relação às margens do rio;
- o intervalo de tempo da travessia;
- a distância percorrida pela lancha;
- o deslocamento da lancha, rio abaixo.

Questão 35 - ☾

[34 a 40]

Um avião com eixo orientado no sentido sul-norte, sobrevoa um aeroporto com velocidade de 120 km/h, em relação ar. O aerômetro do aeroporto registra um vento de 50 km/h, soprando no sentido oeste-leste. Calcule:

- a rapidez do avião em relação ao solo;
- a distância percorrida pelo avião em 2h de vôo.

Questão 36 - C

[34 a 40]

A correnteza de um rio retilíneo e de margens paralelas tem velocidade de 6 m/s. O piloto de uma lancha deseja atravessar de uma margem à outra do rio, partindo de um ponto e atingindo o ponto "diametralmente oposto", na outra margem. Durante a travessia, a lancha desloca-se a uma rapidez de 10 m/s em relação à água. Se a distância entre as margens é de 40 m, determine:

- a) a velocidade do barco em relação à terra;
- b) o ângulo que o eixo do barco deve fazer com a direção perpendicular às margens;
- c) o tempo que dura a travessia;
- d) se o piloto mudasse de idéia e, em vez de de querer atingir o ponto "diametralmente oposto", desejasse chegar à outra margem no tempo mínimo, como deveria orientar o eixo da lancha;
- e) o tempo mínimo para essa travessia.

Questão 37 - C

[34 a 40]

Um homem imóvel sobre uma escada rolante leva 1 minuto para ir do subsolo ao térreo de um shopping Center. Nos dias em que a escada rolante está com defeito, o homem sobe essa escada rolante caminhando do subsolo o térreo em 3 minutos. Quanto tempo o homem gastaria para fazer o mesmo percurso se ele caminhasse sobre a escada rolante funcionando normalmente ?

Questão 38 - C

[34 a 40]

Um avião, cuja velocidade em relação ao ar é v , viaja de Recife à Fortaleza num tempo T , quando não há vento. Quanto tempo será gasto para essa mesma viagem, quando sopra um vento com velocidade u em relação ao solo, perpendicularmente à linha que liga as duas cidades ?

Questão 39 - C

[34 a 40]

Uma lancha que desenvolve uma velocidade de 5 km/h em águas paradas atravessou um rio de água corrente de 1 km de largura, ao longo da trajetória mais curta possível, em 15 min. A velocidade da correnteza desse rio vale:

- a) 1 km/h b) 3 km/h c) 4 km/h d) 5 km/h e) $\sqrt{41}$ km/h

Questão 40 - C

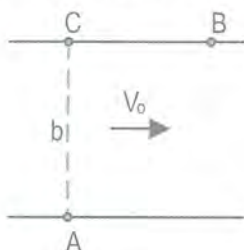
[34 a 40]

Um barco, com "propulsão" de 4 m/s, leva um tempo mínimo de 5 min para atravessar um rio, quando não existe correnteza. Num dia em que a correnteza tiver uma velocidade de 3 m/s, o mesmo barco levará, para atravessá-lo, no mínimo, quanto tempo ?

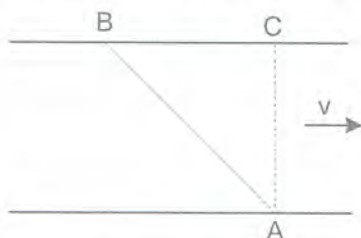
Questão 41 - ☉☾ - Travessia com velocidade mínima

[41 a 44]

Um homem em uma lancha deve sair do ponto A e chegar ao ponto B, que se encontra na margem oposta do rio. A distância BC é igual a a . A largura do rio AC é igual a b . Com que velocidade mínima u , relativa à água, deve se mover a lancha para chegar ao ponto B? A velocidade da correnteza é v_0 .



Questão 41



Questão 42

Questão 42 - ☉☾

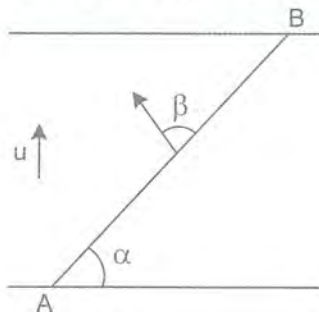
[41 a 44]

De um ponto A, situado na margem de um rio, é preciso chegar ao ponto B, movendo-se pela reta AB como na figura. A largura AC do rio vale 2 km, a distância BC é igual a 3 km e a velocidade desenvolvida pela lancha em relação à água vale $u = 5$ km/h. Sabendo que a velocidade da correnteza vale $v = 3$ km/h, determine a duração da travessia.

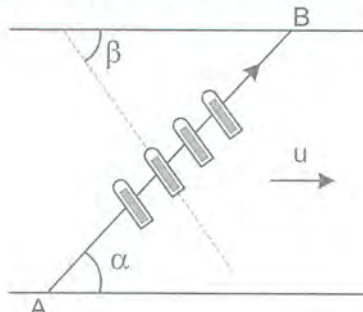
Questão 43 - ☉☾ - Travessia com vento na bandeira

[41 a 44]

Uma lancha sai do ponto A da margem de um rio com correnteza e navega na direção AB, que forma um ângulo α com a margem, até atingir o ponto B na margem oposta como na figura. A distância entre as margens do rio vale L . Durante a travessia, o vento sopra com velocidade u perpendicular às margens, fazendo com que a bandeira da lancha aponte numa direção que forma um ângulo β com a direção AB. Determine a duração da travessia.



Questão 43



Questão 44

Questão 44 - C

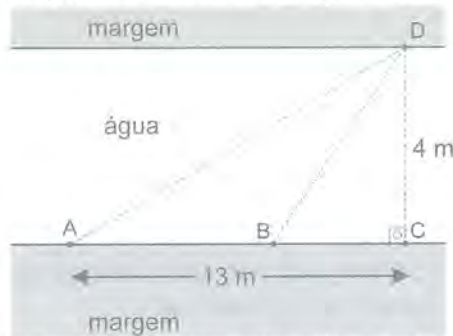
[41 a 44]

Uma lancha sai do ponto A da margem de um rio com correnteza e navega na direção AB, que forma um ângulo α com a margem, até atingir o ponto B na margem oposta como na figura. A distância entre as margens do rio vale L. Durante toda a travessia, a lancha aponta numa direção que forma um ângulo β com a margem do rio. Sabendo que a travessia total dura um tempo Δt , determine a velocidade u da correnteza.

Questão 45 - C - Biatlon Otimizado

[45, 46]

Um banhista localizado no ponto A da margem de um lago deve chegar ao ponto D da margem oposta no menor intervalo de tempo possível. Correndo pela margem, o banhista desenvolve uma velocidade $v_1 = 5$ m/s, ao passo que, nadando através do lago, sua velocidade cai para $v_2 = 3$ m/s.

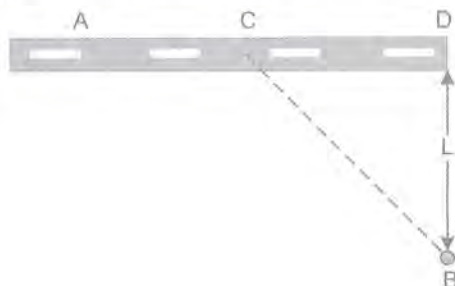


- a) Para atingir o seu objetivo, como deve proceder o banhista ? Nadar diretamente pelo trajeto AD ? Ou correr até o ponto C e, em seguida, nadar o trecho CD ? Ou correr uma distância AB e, em seguida, nadar o trecho BD ?
- b) Qual o mínimo tempo gasto nessa travessia (sem derivadas, claro ☺) ?

Questão 46 - C - Off Road

[45, 46]

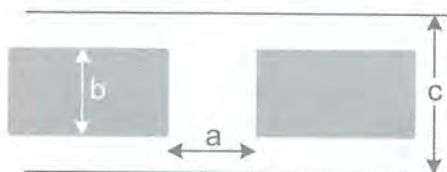
A partir de um ponto A situado numa estrada asfaltada, um homem deve ir de carro até um ponto B situado no terreno arenoso a uma distância L da estrada, no mínimo intervalo de tempo. Assuma que a velocidade do carro na estrada asfaltada é n vezes maior do que a velocidade dele através do terreno arenoso. A que distância do ponto D o motorista deve sair da estrada rumo ao ponto B ?



Questão 47 - ☉ - Travessia otimizada de uma avenida

[47, 48]

Numa avenida retilínea de largura c , trafegam carros com velocidade constante v . A largura dos carros vale b e a distância livre entre dois carros consecutivos sempre vale a . Um pedestre, movendo-se em trajetória retilínea, deseja atravessar essa avenida com a menor velocidade constante possível, sem ser atropelado ☺.

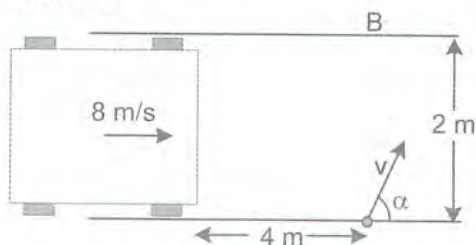


- Qual a menor velocidade possível para essa travessia ?
- Nas condições do item a, quanto tempo o pedestre gastará para atravessar essa avenida completamente ?

Questão 48 - ☾ - Travessia otimizada de uma avenida

[47, 48]

Um caminhão de 2 m de largura está se movendo a 8 m/s ao longo de uma estrada retilínea e estreita. Um pedestre começa a atravessar a estrada em movimento uniforme com velocidade v quando o caminhão se encontra a 4 m de distância. Determine:



- o menor valor de v para que o homem consiga atravessar a avenida em segurança;
- a tangente do ângulo α formado entre a direção a ser seguida pelo homem e a margem da estrada.

Questão 49 - ☉ - Perseguição de lanchas

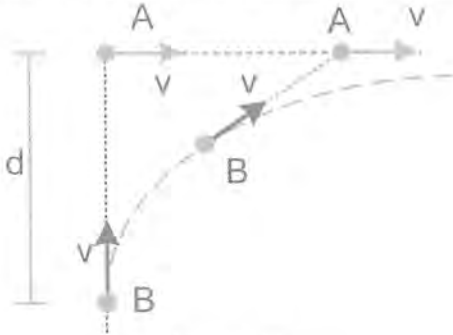
Da margem retilínea do porto do Pecém, partem duas lanchas A e B, que se encontram a uma distância inicial $d = 6$ km uma da outra como na figura. A lancha A se move numa trajetória perpendicular à margem, ao passo que a lancha B, desde o instante inicial, tomou um caminho constantemente dirigido à lancha A, tendo em cada momento a mesma velocidade da lancha A. Mantendo-se no encalço da primeira lancha durante muito tempo, a segunda lancha acabará em movimento retilíneo, acompanhando o movimento da primeira lancha, a uma certa distância constante atrás dela. Determinar essa distância.

Questão 50 - 🐢 - Three Crazy Turtles

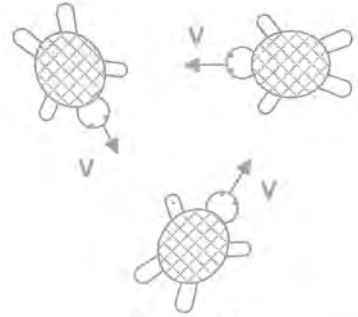
[50, 51]

Três tartarugas encontram-se nos vértices de um triângulo equilátero de lado L . Simultaneamente, elas começam a se movimentar com uma velocidade V , sendo que a primeira se dirige em direção à segunda, a segunda em direção à terceira e a terceira, em direção à primeira.

- Após quanto tempo as tartarugas vão se encontrar ?
- Qual a distância percorrida por uma tartaruga qualquer nesse episódio ?



Questão 49



Questão 50

Questão 51 - Four Crazy Turtles

[50, 51]

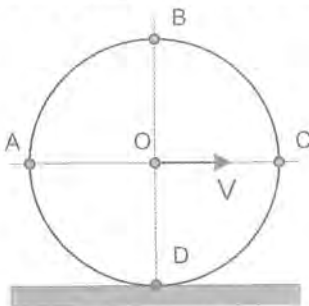
Quatro tartarugas encontram-se nos cantos de um quadrado de lado a . Simultaneamente, elas começam a se movimentar com uma velocidade constante em grandeza v , sendo que a primeira se dirige em direção à segunda, a segunda em direção à terceira, a terceira em direção à quarta e a quarta em direção à primeira.

- Após quanto tempo as tartarugas vão se encontrar ?
- Qual a distância percorrida por uma tartaruga qualquer nesse episódio ?

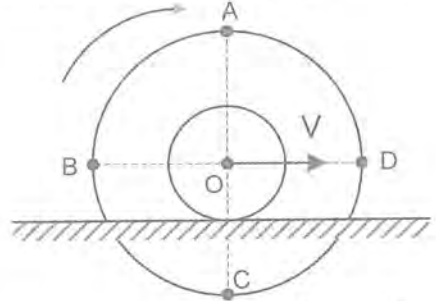
Questão 52 - 🌀 (Não deixe de ler a resolução dessa questão) ☺

[52 a 55]

Uma roda de raio R rola sem escorregar sobre um plano horizontal, com o seu centro se movendo a uma velocidade V em relação ao solo (veja figura). Determine a velocidade dos pontos A, B, C e D em relação ao solo.



Questão 52



Questão 53

Questão 53

[52 a 55]

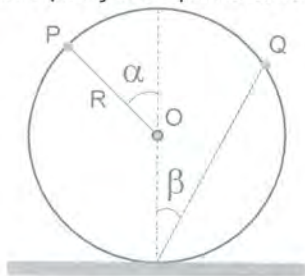
Uma roda de raio R rola sem escorregar sobre um plano horizontal, com o seu centro O movendo-se a uma velocidade V em relação ao solo (veja figura). O contato com o solo é feito por meio de um volante de raio $r < R$. Determine a velocidade dos pontos A , B , C e D .

Questão 54

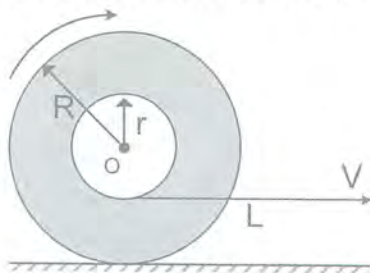
[52 a 55]

Uma roda de centro O e raio R rola sem escorregar sobre um plano horizontal estando seu centro O animado de velocidade $V \rightarrow$ em relação à Terra.

- a) Determine as velocidades dos pontos P e Q indicados na figura em relação ao solo.
 b) Qual a posição do ponto Q da roda que se move com máxima velocidade?



Questão 54



Questão 55

Questão 55

[52 a 55]

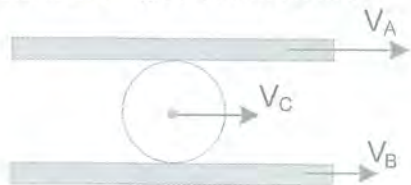
O esquema representa um carretel de linha sendo puxado sem escorregamento sobre um plano horizontal. No instante considerado, a extremidade da linha tem velocidade horizontal $v = 10$ cm/s para a direita, em relação ao solo (veja figura). Se o comprimento desenrolado da linha vale L , quanto tempo levará para que essa linha esteja totalmente enrolada no carretel?

Dado: $R = 40$ cm, $r = 30$ cm, $L = 120$ cm.

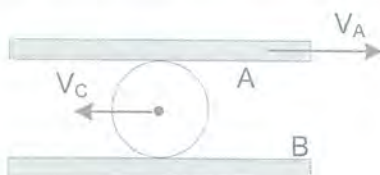
Questão 56

[56 a 58]

Duas tábuas A e B movem-se respectivamente com velocidades V_A e V_B em contato com uma tora cilíndrica como indica a figura. Admitindo que $V_A > V_B$ e que não ocorre deslizamento entre as tábuas e o cilindro, determine a velocidade V_C do centro da tora.



Questão 56



Questão 57

Questão 57

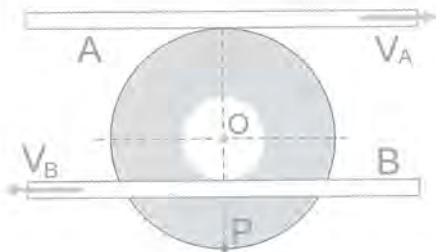
[56 a 58]

Um cilindro de madeira de 4 cm de diâmetro rola sem deslizar entre duas tábuas horizontais móveis A e B, como mostra a figura. Em determinado instante, a tábua A movimenta-se para a direita com velocidade de 40 cm/s e o centro do cilindro move-se para a esquerda com velocidade de 10 cm/s. Determine o sentido e o valor da velocidade da tábua B nesse instante.

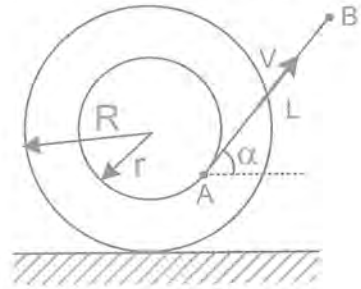
Questão 58

[56 a 58]

As rodas solidárias de raios $r = 4$ cm e $R = 6$ cm rolam sem deslizar sobre as placas A e B, que estão se movendo em sentidos contrários, como mostra a figura. Se $V_A = 10$ cm/s para a direita e $V_B = 5$ cm/s para a esquerda, determine as velocidades V_O e V_P , respectivamente, do centro O e do ponto P.



Questão 58



Questão 59

Questão 59 - ⚙ - Ⓢ (Veja apêndice 11 sobre rolamentos)

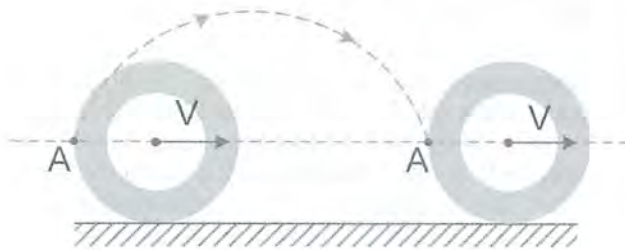
A figura mostra um carretel de raio interno r e raio externo R que rola sobre um solo horizontal liso. Um cordão que encontra-se enrolado no carretel é mantido tracionado apontando numa direção que forma um ângulo α com a horizontal, imprimindo ao ponto A da periferia do carretel uma velocidade cuja componente tangencial vale V .

- Determine a velocidade de translação horizontal do carretel ao longo do solo;
- Para quais valores de α o carretel transladaria para a esquerda?
- Com qual velocidade o trecho AB do cordão vai diminuindo de tamanho, à medida em que o carretel vai rolando para a direita?
- Se num certo instante o comprimento AB do cordão vale L , quanto tempo depois esse segmento AB estará completamente enrolado no carretel?

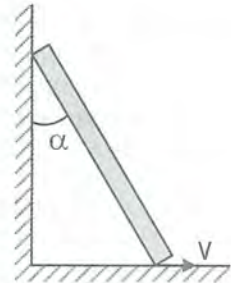
Questão 60 - ⚙ - Lançamento oblíquo no rolamento

[52, 60, 61]

Uma roda de raio R gira uniformemente por uma superfície horizontal, sem que haja deslizamento (veja figura). Do ponto A da roda se desprende uma gota de barro. Com que velocidade move-se a roda, se a gota, após se deslocar no ar, volta a cair no mesmo ponto A da roda, após esta ter dado n voltas? Despreze a resistência do ar.



Questão 60



Questão 62

Questão 61 - ⚙ - Lançamento oblíquo no rolamento assimétrico [52, 60, 61]

As rodas dianteiras e traseiras de um carro tem raios a e b respectivamente (com $b > a$) e a distância entre os eixos das rodas vale c . Quando o carro encontra-se em movimento, uma pedrinha enganchada na roda traseira é arremessada do ponto mais alto dessa roda e cai exatamente sobre o topo da roda dianteira. Se a gravidade local vale g , determine a velocidade desse carro.

Questão 62 - ⚙ - Problema da escada apoiada

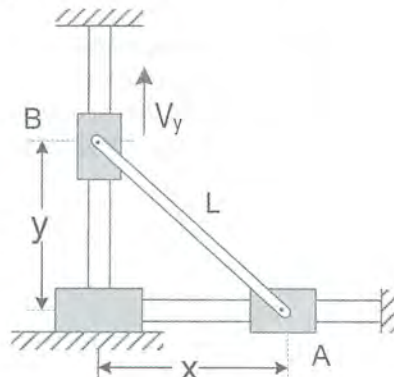
[62 a 69]

A figura mostra uma escada rígida que escorrega apoiada numa parede vertical. Num certo instante, a extremidade inferior da escada tem velocidade horizontal v perpendicular ao plano vertical da parede e a escada tem inclinação α em relação à parede. Determine a velocidade vertical da extremidade superior da escada no referido instante.

Questão 63

[62 a 69]

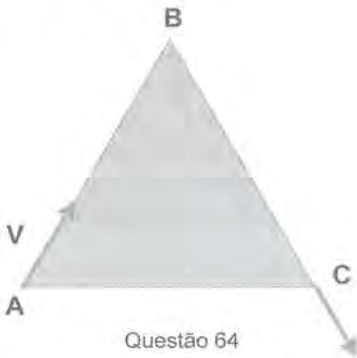
A figura mostra dois colares A e B, que podem deslizar ao longo de duas barras fixas em ângulo reto, conectados entre si por uma haste metálica de comprimento $L = 13$ cm. Sabendo que o colar B está subindo em movimento uniforme com velocidade $v_y = 24$ cm/s, pede-se determinar a velocidade v_x do colar A no instante em que $x = 12$ cm.



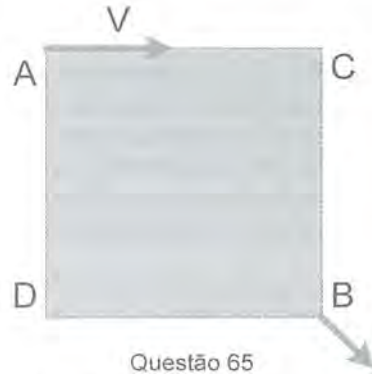
Questão 64 - ⚙ - O problema das três formigas

[62 a 69]

A figura mostra um fragmento de casca de árvore com o formato de um triângulo equilátero ABC, que está sendo carregado por três formigas A, B e C, respectivamente, localizadas nos vértices desse triângulo. As formigas movem-se num plano horizontal. O prof. Renato Brito conta que, num certo instante, a velocidade V da formiga A aponta na direção AB, ao passo que a velocidade da formiga C aponta na direção BC, como mostra a figura. Determine as velocidades das formigas B e C, no referido instante, em função de V .



Questão 64



Questão 65

Questão 65 - ☹ - O problema das quatro formigas

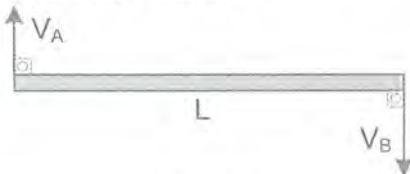
[62 a 69]

A figura mostra um fragmento de casca de árvore com o formato de um quadrado ABCD, que está sendo carregado por quatro formigas A, B, C e D, respectivamente, localizadas nos vértices desse quadrado. As formigas movem-se num plano horizontal. O prof. Renato Brito conta que, num certo instante, a velocidade V da formiga A aponta na direção AC, ao passo que a velocidade da formiga B aponta na direção AB, como mostra a figura. Determine as velocidades das formigas B, C e D, no referido instante, em função de V .

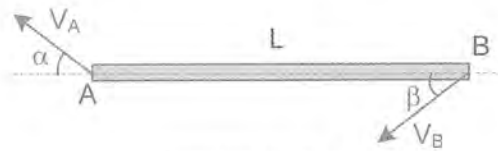
Questão 66 - ⚙☹ - Problema da rotação da barra

[62 a 69]

Uma barra de comprimento L gira de forma que, num certo instante, suas extremidades apresentam velocidades respectivamente iguais a V_A e V_B perpendiculares à barra como na figura. Qual a velocidade angular ω da barra no referido instante ?



Questão 66



Questões 67 e 68

Questão 67 - \odot - Problema da rotação + translação da barra [62 a 69]

Uma barra de comprimento L se move de forma que, num certo instante, suas extremidades apresentam velocidades iguais a V_A e V_B formando respectivamente ângulos α e β com o eixo da barra como mostra a figura.

Parte 1: interpretando o movimento da barra como sendo um movimento de translação superposto a um movimento de rotação simples, determine:

- a relação entre as velocidades V_A e V_B , tendo em vista o movimento de translação da barra;
- a distância AO , onde O é o centro de rotação simples da barra localizado sobre a própria barra;
- a velocidade angular ω da barra nesse instante nessa rotação simples em torno do ponto O ;

Parte 2: interpretando o movimento da barra como sendo, naquele instante, um movimento de rotação pura em torno de um centro de rotação instantâneo O' localizado fora da barra, determine:

- a distância desse centro de rotação instantâneo O' até a barra, ou seja, a distância OO' ;
- a velocidade angular ω' da barra nessa rotação pura instantânea em torno de O' .

Questão 68 - \odot - Problema da rotação + translação da barra [62 a 69]

Uma barra de comprimento $L = 20$ m se move de forma que, num certo instante, suas extremidades apresentam velocidades iguais a $V_A = 30$ m/s e V_B formando respectivamente ângulos $\alpha = 37^\circ$ e $\beta = 53^\circ$ com o eixo da barra como mostra a figura. ($\text{sen}\alpha = \text{cos}\beta = 0,6$; $\text{sen}\beta = \text{cos}\alpha = 0,8$).

Parte 1: interpretando o movimento da barra como sendo um movimento de translação superposto a um movimento de rotação simples em torno de um centro O localizado sobre a barra, determine:

- a velocidade V_B da extremidade B da barra;
- a distância $y = OB$, onde O é o centro de rotação simples da barra localizado sobre a própria barra;
- a distância $x = AO$;
- a velocidade angular ω da barra nesse instante nessa rotação simples em torno do ponto O ;
- a velocidade V_M do ponto M, o ponto médio da barra. Ela pode ser determinada pela resultante vetorial (Pitágoras) entre a velocidade de translação \rightarrow e a velocidade de rotação \downarrow de M em torno do centro O ;

Parte 2: interpretando o movimento da barra como sendo, naquele instante, um movimento de rotação pura em torno de um centro de rotação instantâneo O' localizado fora da barra, determine:

- a distância desse centro de rotação instantâneo O' até a barra, ou seja, a distância $c = OO'$;
- a distância $a = O'A$;

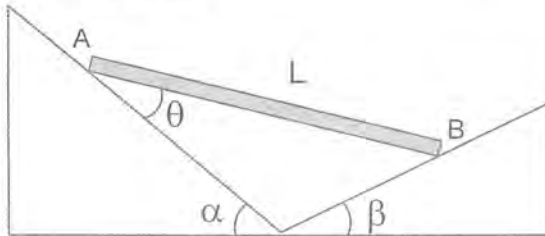
- h) a distância $b = O'B$;
 i) a distância $m = O'M$;
 j) verifique se os valores determinados anteriormente satisfazem a relação $\frac{V_A}{a} = \frac{V_B}{b} = \frac{V_M}{m}$;
 k) os quocientes $\frac{V_A}{a} = \frac{V_B}{b} = \frac{V_M}{m} = \omega'$ fornecem a velocidade angular ω' do movimento de rotação pura instantânea da barra em torno do ponto O' . Quanto vale essa velocidade angular ω' ?

Questão 69 - C - Problema da barra deslizante

[62 a 69]

A figura mostra uma barra AB rígida de comprimento L apoiada sobre duas rampas de inclinações α e β com a horizontal. Num certo instante, a barra AB está formando um ângulo θ com a superfície da rampa esquerda e está escorregando ao longo dessa superfície com velocidade V. Nesse referido instante, determine:

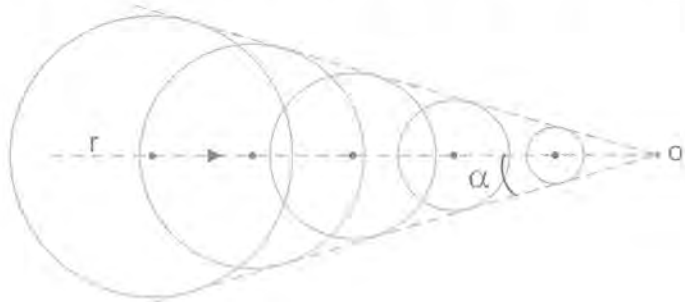
- a) a velocidade de escorregamento da extremidade B da barra;
 b) a velocidade angular da barra.



Questão 70 - D Cone de Mach (Não deixe de ler a resolução dessa questão)

[70 a 74]

A figura ilustra as frentes de onda esféricas emitidas por um caça supersônico da FAB, que se movimenta para a direita, ao longo da reta r, com velocidade horizontal constante. Sendo 340 m/s a velocidade de propagação do som nas condições da experiência e, $\alpha = 30^\circ$, o prof. Renato Brito pede que você determine a velocidade de vôo desse caça supersônico.



Questão 71 - Ⓜ - Cone de Mach

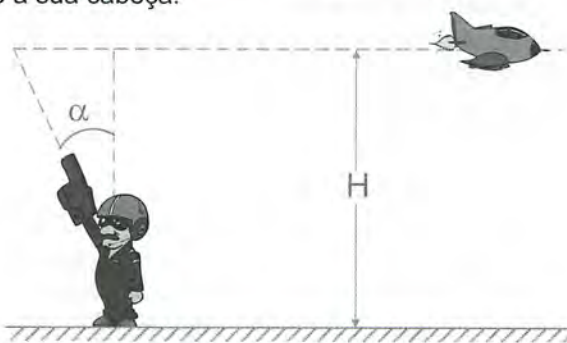
[70 a 74]

Um avião voa horizontalmente a uma velocidade V . Um observador ouve o barulho do avião T segundos após o aparelho ter passado sobre a sua cabeça. Se a velocidade do som no ar vale C , o prof. Renato Brito pede que você determine a que altura H voava a aeronave.

Questão 72 - Ⓜ - Cone de Mach

[70 a 74]

Um piloto da AFA participava de um treinamento em solo, quando um caça supersônico, voando em movimento uniforme em trajetória horizontal, passou exatamente sobre a sua cabeça. O ruído emitido pelo avião, entretanto, só foi ouvido pelo observador seis segundos após a passagem do avião sobre a sua cabeça.



Tão logo percebeu o ruído, o observador apontou para a direção de onde julgava estar vindo o ruído da aeronave, direção essa que fazia um ângulo $\alpha = 37^\circ$ com a vertical. O prof. Renato Brito pede que você determine:

- a) a velocidade do caça supersônico;
- b) a altura H em que o avião se encontrava.

Dados: Velocidade do som no ar = 330 m/s, $\sin 37^\circ = 0,6$, $\cos 37^\circ = 0,8$.

Questão 73 - Ⓞ - Cone de Mach

[70 a 74]

Um avião caça da força aérea brasileira passou voando em trajetória horizontal a 3300 m de altitude sobre um bairro residencial, desenvolvendo uma velocidade supersônica de 550 m/s. No exato instante em que um observador em terra ouviu o ruído emitido pelo caça, se deu conta de que a aeronave já havia passado exatamente sobre sua cabeça e rapidamente estimou que, naquele instante, a aeronave já estava a 5500 m de distância dele.

- a) O ruído emitido pelo avião só foi ouvido pelo observador quanto tempo após a aeronave ter passado exatamente sobre sua cabeça ?
- b) Qual a velocidade de propagação do som nesse episódio ?

Questão 74 - Cone de Mach

[70 a 74]

Um avião voa horizontalmente a uma altura h sobre a superfície da Terra, a uma velocidade supersônica. O ruído da turbina da aeronave só é ouvido por um observador na Terra depois de decorrido um tempo T da passagem do jato sobre a sua cabeça. Determine a velocidade do avião V , em função da velocidade do som v_s , h e T .

Questão 75 - ρ

Um trem deve partir de uma estação A e parar na estação B, distante 4000 m de A. A aceleração e a desaceleração podem ser, no máximo, de $5,0 \text{ m/s}^2$ e a maior velocidade que o trem atinge é 20 m/s . Determine o tempo mínimo para o trem completar o percurso de A a B, em segundos.

Questão 76 - ρ - Método da gravata

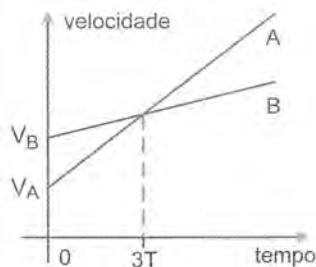
[76 a 78]

No instante inicial ($t = 0$), dois móveis A e B passam por um mesmo ponto movendo-se sobre uma mesma trajetória retilínea, de acordo com o gráfico. Assim, o prof. Renato Brito pede para você determinar o instante em que os móveis voltarão a se encontrar novamente.

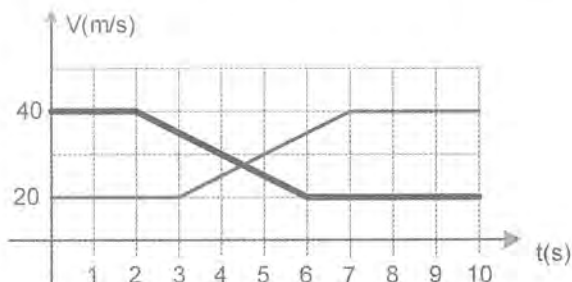
Questão 77 - ρ - Método da gravata

[76 a 78]

Quando o sinal vermelho passa a verde, um Porsche, que vem de trás, cruza o semáforo e prossegue seu movimento com velocidade constante. No mesmo instante, um Mondeo, que se encontrava parado no sinal, parte acelerando uniformemente, movendo-se ao encalço do Porsche. Sua aceleração é tal que a distância que o separa do Porsche, ao atingir a metade da velocidade deste, vale $3d$. O prof. Renato Brito pede que você determine a distância total percorrida pelo Mondeo até cruzar o Porsche, em função de d .



Questão 76



Questão 78

Questão 78 - (FUVEST)

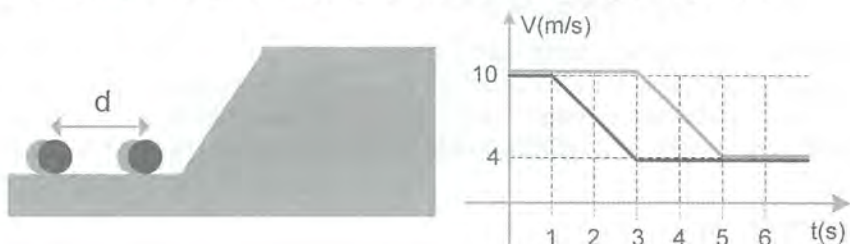
[76 a 78]

O gráfico da figura representa a velocidade de dois carros que se movem sobre uma mesma trajetória retilínea. Se os carros partem do mesmo ponto no instante $t = 0$, voltarão a se encontrar em qual instante?

Questão 79

O gráfico $V \times t$ da figura representa a velocidade de duas pequenas esferas que se deslocam sobre uma mesma trajetória retilínea, em direção a uma rampa. Pede-se determinar:

- a distância entre as esferas, antes de subirem a rampa;
- a distância entre as esferas, após terem atingido o piso superior.

**Questão 80 - \odot - Velocidade mínima para alcançar**

[80, 81]

Um móvel A partiu do repouso, em MRUV, animado de aceleração $a = 8 \text{ m/s}^2$. Um segundo depois, parte do mesmo ponto outro móvel B, em MRU, com velocidade v . Qual o menor valor de v de forma que B ainda consiga alcançar A?

Questão 81 - Correndo para não perder o trem

[80, 81]

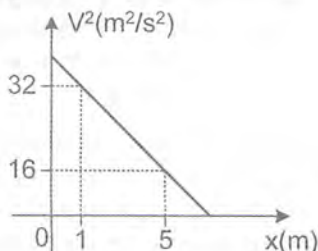
Um passageiro corre à velocidade máxima de 8 m/s para pegar um trem. Quando está à distância d da porta de entrada, o trem principia a rodar com a aceleração constante $a = 1,0 \text{ m/s}^2$, afastando-se.

- Se $d = 30 \text{ m}$ e se o passageiro continua a correr, conseguirá ou não pegar o trem?
- Para que distância crítica D_{crit} o homem ainda conseguiria alcançar a porta de entrada?
- Qual será a velocidade do trem, quando o passageiro alcançar a sua porta nas condições do item b.

Questão 82 - \odot

Um móvel que se desloca ao longo do eixo x inicia um processo de frenagem ao passar pela posição $x = 0$ no instante $t = 0 \text{ s}$, movendo-se de acordo com o gráfico a seguir. O prof. Renato Brito pede que você determine:

- a aceleração do móvel em $t = 2 \text{ s}$;
- a distância que ele percorre durante todo o processo de frenagem;
- o instante t em que o móvel pára.



Questão 83 - C

Um carro parte do repouso e se move com aceleração escalar constante α durante um certo tempo, depois do qual ele passa a retardar com aceleração constante de módulo β até parar. Se o tempo total gasto no percurso vale t , determine:

- a) a distância total percorrida pelo carro;
- b) a velocidade máxima atingida por ele.

Questão 84 - C - Bala penetrando o alvo

Uma bala, ao atingir um alvo fixo com uma velocidade inicial u , perde uma fração u/n da sua velocidade após ter penetrado uma distância d no interior do alvo. Qual distância adicional a bala ainda irá percorrer no interior do alvo até parar ?

Questão 85 - C

Dois carros iniciam uma corrida numa estrada retilínea, partindo de uma mesma posição, com velocidades iniciais iguais a v_1 e v_2 e acelerações escalares constantes respectivamente iguais a a_1 e a_2 . Sabendo que eles atingem a linha de chegada simultaneamente, determine o comprimento dessa pista de corrida.

Questão 86 - C - Problema das acelerações sucessivas

Um percurso de comprimento d é dividido em n partes iguais. Ao final de cada parte, a aceleração do móvel sofre um aumento a/n , onde a é a sua aceleração inicial dele ao partir do repouso do início desse percurso. Assim, após percorrer todo esse percurso, qual a velocidade atingida pelo móvel ?

Questão 87 - C - Lançando para cima

[87, 88]

Um garoto na calçada de um apartamento lança verticalmente para cima uma bola com velocidade inicial desconhecida no instante $t = 0$ s. Uma senhora, que está a uma altura H do solo, presencia a passagem da bola pela sua janela nos instantes t_1 e t_2 . Determine quanto vale a aceleração da gravidade local g em função de t_1 , t_2 e H .

Questão 88 - C - Lançando para cima de novo

[87, 88]

Um garoto na calçada de um apartamento lança verticalmente para cima uma bola com velocidade inicial desconhecida no instante $t = 0$ s. Uma senhora que está a uma altura H do solo, presencia a passagem da bola pela sua janela nos instantes t_1 e t_2 . O prof. Renato Brito pede para você determinar quanto vale a velocidade inicial V_0 com que a bola foi lançada, em função de t_1 , t_2 e H .

Questão 89 - C - Fração $1/n$ na queda livre

[89 a 92]

Abandona-se um corpo do repouso num campo gravitacional uniforme. Em sua queda livre, o móvel percorre uma certa fração $1/n$ da altura total da queda durante o último segundo. Determine o tempo de queda do móvel.

Questão 90 - MC - O n-ésimo metro de uma queda livre [89 a 92]

Qual o tempo necessário para um corpo, abandonado do repouso, em queda livre, percorrer o n-ésimo metro do seu trajeto ?

Questão 91 - MC - O n-ésimo segundo de um MUV [89 a 92]

Um móvel tem movimento uniformemente acelerado com velocidade inicial V_0 e aceleração a . Determine a distância percorrida pelo móvel no n-ésimo segundo do movimento.

Questão 92 - MC [89 a 92]

Um corpo, animado de movimento retilíneo uniformemente retardado com aceleração escalar de módulo a , passa por um ponto A com certa velocidade inicial e retarda uniformemente até parar num ponto B, tal que a distância AB vale d . Sabendo que a distância percorrida por ele no último segundo do movimento vale d/n (com $n > 1$), determine:

- a distância d ;
- a velocidade inicial.

Questão 93 - MC

Dois corpos são atirados de baixo para cima, a partir do solo, com a mesma velocidade inicial V_0 num local onde a gravidade vale g . Calcular quanto deve ser o intervalo de tempo decorrido entre o lançamento do primeiro e do segundo corpo para que este encontre aquele a uma altura H do solo.

Questão 94 - MC

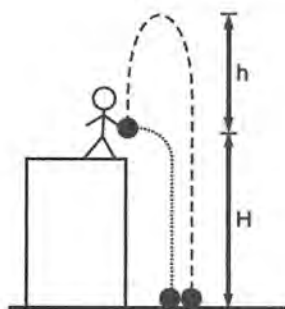
Uma pedra é abandonada do alto de um penhasco e n segundos depois, outra pedra é arremessada verticalmente pra baixo com velocidade u . A que distância do topo do penhasco a segunda pedra alcançará a primeira ? A gravidade local vale g .

Questão 95 - MC

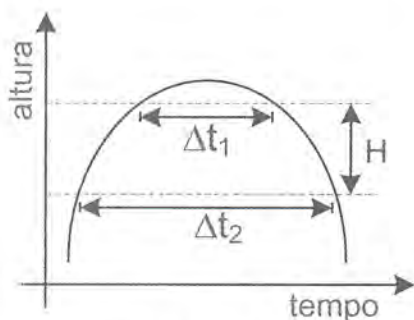
Uma bomba, ao explodir a uma certa altura, lança verticalmente dois fragmentos com velocidades iguais em módulo, mas de sentidos opostos. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$ e despreze a resistência do ar. O tempo que decorre entre a chegada de cada fragmento ao solo é de 6 s. Determine a velocidade com que os fragmentos foram expelidos, inicialmente.

Questão 96 - MC - ITA 2006 - À beira do precipício [96, 97]

À borda de um precipício de um certo planeta, no qual se pode desprezar a resistência do ar, um astronauta mede o tempo t_1 que uma pedra leva para atingir o solo, quando abandonada de uma altura H , como mostra a figura. A seguir, ele mede o tempo t_2 que uma pedra também leva para atingir o solo, após ser lançada para cima até uma altura h , como mostra a figura. Determine a altura H em função de t_1 , t_2 e h .



Questão 96



Questão 98

Questão 97 - C

[96, 97]

Um corpo lançado verticalmente para cima do alto de uma torre atinge o solo após t_1 segundos. Se esse mesmo corpo for lançado com essa mesma velocidade mas verticalmente para baixo, atinge o solo após t_2 segundos. Se esse corpo for apenas abandonado do repouso, dessa mesma altitude, atingirá o solo após quantos segundos ?

Questão 98 - C - Medindo a gravidade em Sobral *

No Laboratório Nacional de Física de Sobral, o prof. Ricardo Bastos realizou uma experiência a fim de medir a gravidade g atirando verticalmente para cima uma bola de vidro em um tubo sem ar e deixando-a retornar. O gráfico da altura da bola em função do tempo está representado na figura. Seja Δt_1 o intervalo de tempo entre duas passagens consecutivas da bola pelo nível superior, Δt_2 o intervalo de tempo entre duas passagens consecutivas da bola pelo nível inferior e h a distância entre dois níveis. Determine o valor de g obtido no laboratório, em função de H , Δt_1 e Δt_2 .

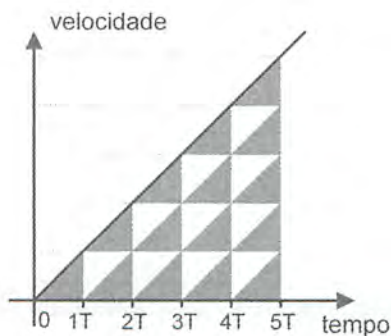
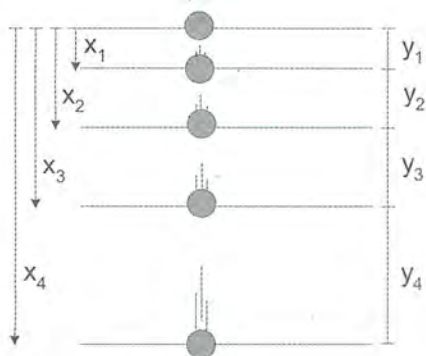
Questão 99 - C - As proporções de Galileu para a queda livre [99 a 104]

Galileu Galilei foi um dos primeiros cientistas a utilizar o método científico para estudar a queda dos corpos. Sobre esse movimento, considere o conjunto de fotografias, tiradas em intervalos de tempos iguais, que mostram o deslocamento em queda livre de um móvel, a partir do repouso.

Um dos princípios que Galileu estabeleceu para a queda dos corpos diz que valem as seguintes proporções entre as medidas na fotografia:

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{4} = \frac{x_3}{9} = \frac{x_4}{16} \dots = \frac{x_n}{n^2} \qquad \frac{y_1}{1} = \frac{y_2}{3} = \frac{y_3}{5} = \frac{y_4}{7} \dots = \frac{y_n}{2n-1}$$

A partir do gráfico $V \times t$ para a queda livre, verifique que as proporções de Galileu para a queda livre são verdadeiras. As questões a seguir são facilmente solucionadas utilizando-se essas proporções.



Questão 100 - ☉ - As proporções de Galileu para a queda livre [99 a 104]

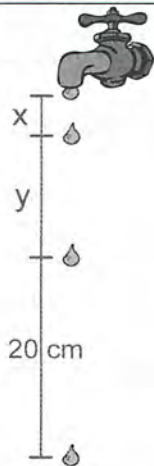
Num edifício pode-se notar um aparelho de ar-condicionado instalado a 80 m de altura. Esse aparelho goteja água periodicamente, em intervalos de tempos iguais. Percebe-se que a 1ª gota atinge o solo no exato momento em que a 5ª gota se desprende. O prof. Renato Brito pede para você determinar, no referido instante, a distância que separa a 3ª e a 4ª gota.

- a) 25 m b) 45 m c) 30 m d) 15 m e) 50 m

Questão 101 - ☾ - As proporções de Galileu para a queda livre [99 a 104]

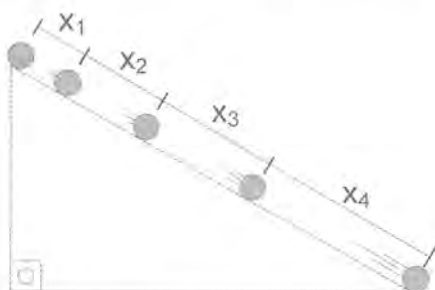
A torneira do chuveiro da Claudete está mal fechada e, por isso, goteja água periodicamente em intervalos de tempos iguais. A figura mostra o exato momento em que uma gota está se despreendendo e outras 3 gotas já estão em queda livre. Se distância indicada na figura vale 20 cm, então as distâncias x e y valem, respectivamente:

- a) 4 cm, 15 cm
b) 4 cm, 12 cm
c) 6 cm, 15 cm
d) 6 cm, 12 cm
e) 9 cm, 15 cm



Questão 102 - ☾ - As proporções de Galileu para a queda livre [99 a 104]

Uma rampa possui uma extensão de 64 m. Determine cada uma das sucessivas distâncias x_1 , x_2 , x_3 e x_4 percorridas em intervalos de tempos iguais por uma bola de sinuca abandonada do repouso do ponto mais alto da rampa.


Questão 103 - C - (Olimpíada de Física da Bolívia)

[99 a 104]

Deixa-se cair, a partir do repouso, cinco esferinhas intercaladas por intervalos de tempos iguais, desde o topo de um edifício de altura H num local onde $g = 10 \text{ m/s}^2$. Quando a primeira esferinha atinge o solo, a quinta está iniciando a sua queda e, nesse instante, a distância entre a segunda e a terceira esferinha vale 5 m. A altura H vale:

- a) 5 m b) 10 m c) 16 m d) 20 m e) 24 m

Questão 104 - C - As proporções de Galileu para a queda livre

[99 a 104]

Num planeta onde a gravidade vale g , pingam gotas de água do alto de um prédio de altura H , em intervalos de tempos iguais. No instante em que a 1ª gota que se desprende atinge o solo, a N -ésima gota começa a cair. Determine, nesse instante, a altura em que se encontra a k -ésima gota, medida em relação ao solo.

Questão 105 - C - As proporções de Galileu na subida

[105 a 108]

A partir das proporções de Galileu, verifique que quando um corpo é lançado verticalmente para cima num campo gravitacional uniforme g , as distâncias que ele percorre durante o último segundo da subida, durante o penúltimo segundo da subida, durante o antepenúltimo segundo da subida etc. são numericamente iguais a $1.g/2, 3.g/2, 5.g/2, \dots$ etc.

Questão 106 - C - As proporções de Galileu na subida

[105 a 108]

Em Cajúpiter, onde a gravidade vale g , Juquinha jogou uma pedra verticalmente para cima e esta levou 4 s para atingir a altura máxima. Sabendo que a pedra percorre 6 m durante o penúltimo segundo do movimento de subida, o prof Renato Brito pede para você determine :

- a) a gravidade nesse planeta;
 b) a distância percorrida pela pedra no último segundo da subida
 c) a velocidade inicial com que juquinha jogou a pedra para cima.

Questão 107 - ☉☾ - As proporções de Galileu na subida [105 a 108]

Em Cajúpiter, onde a gravidade vale g , Júlio Sousa jogou uma pedra verticalmente para cima e observou que, durante o penúltimo segundo do movimento de subida, ela percorre uma distância vertical 8 m maior que a distância percorrida durante o último segundo da subida. Desprezando a resistência do ar, a gravidade nesse planeta vale :

- a) 2 m/s² b) 4 m/s² c) 6 m/s² d) 8 m/s² e) 12 m/s²

Questão 108 - ☾ - As proporções de Galileu na subida [105 a 108]

Uma pequena esfera foi abandonada do repouso, de uma altura h em relação ao solo num local onde $g = 10 \text{ m/s}^2$. Sabendo-se que, durante o último segundo da queda, a esfera percorreu uma distância de 35 m, determine:

- a) a velocidade com que ela chegou ao solo;
b) a altura h .

Questão 109 - ☉ [109, 110]

Um projétil é lançado obliquamente, formando um ângulo α com a horizontal, passando por uma altura máxima de 20 m e atingindo um alcance A . Duplicando-se o ângulo de disparo, sem mudar a velocidade inicial de lançamento, o projétil atinge o mesmo alcance A . Determinar a altura máxima atingida pelo projétil, nesse último disparo.

Questão 110 [109, 110]

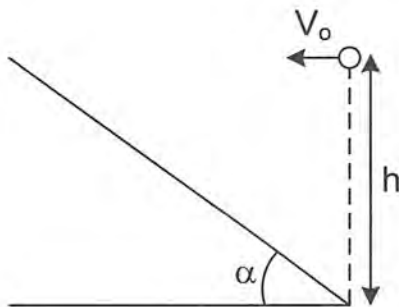
Um projétil é lançado obliquamente, formando um ângulo α com horizontal, passando por uma altura máxima H e atingindo um alcance A . Duplicando-se o ângulo de disparo, sem mudar a velocidade inicial de lançamento, o projétil tem o mesmo alcance A de antes mas, agora, atinge uma altura máxima 20 m maior do que antes. Determine a altura máxima atingida pelo projétil nesse último disparo.

Questão 111 - ☉

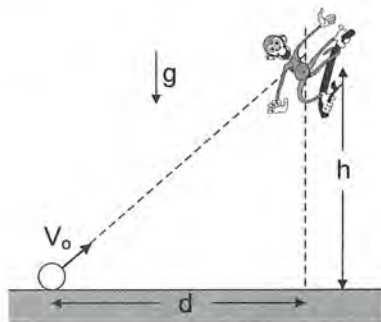
Quando lançado em um ângulo α com a horizontal, um projétil cai a uma distância a antes do alvo, enquanto, quando lançado em um ângulo β , ele cai a uma distância b após o alvo. Qual o ângulo θ com o qual ele deve ser lançado para que atinja o alvo ?

Questão 112 - ☉☾ - Lançamento com chegada perpendicular

Determine a velocidade horizontal com que deve ser arremessada uma pedra, a partir de uma altura h acima do pé de uma rampa, a fim de que a pedra colida com a rampa perpendicularmente a sua superfície cuja inclinação em relação a horizontal vale α . A gravidade local vale g .



Questão 112



Questões 113 e 114

Questão 113 - ☞ - Desligando a gravidade

[113 a 116]

Um caçador mira sua arma exatamente na direção em que se encontra um macaco, apoiado num galho de árvore, como mostra a figura, numa região onde a aceleração da gravidade vale $g = 10 \text{ m/s}^2$. No exato momento do disparo, o macaco se solta devido ao susto e passa a cair em queda livre vertical. Sendo $d = 12 \text{ m}$ e $h = 16 \text{ m}$, determine se o projétil atingirá o macaco nos seguintes casos:

- o projétil é disparado com uma velocidade $v_0 = 100 \text{ m/s}$;
- o projétil é disparado com uma velocidade $v_0 = 10 \text{ m/s}$.

Questão 114 - ☞ - Desligando a gravidade – Literal

[113 a 116]

Um caçador mira sua arma exatamente na direção em que se encontra um macaco, apoiado num galho de árvore, como mostra a figura dessa questão. No exato momento do disparo, o macaco se solta devido ao susto e passa a cair em queda livre vertical, sendo alvejado em seguida. Sabendo que a velocidade inicial do projétil vale V_0 e que a gravidade local vale g , determine, em função de g , d , h e V_0 :

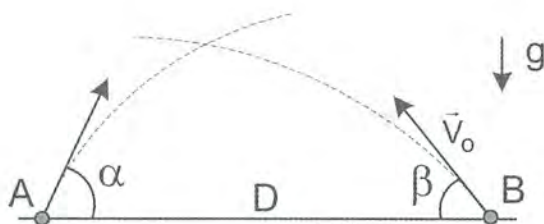
- quanto tempo após o disparo o macaco foi alvejado;
- a distância percorrida pelo macaco até ser alvejado.

Questão 115 - ☞ - Colisão de projéteis no ar – Parte 1

[113 a 116]

Dois lançadores A e B, localizados num solo horizontal a uma distância D entre si, disparam simultaneamente projéteis num mesmo plano vertical com velocidades iguais a V_A e V_B que formam respectivamente inclinações α e β com o solo horizontal. Sabendo a gravidade local vale g :

- Determine uma relação entre V_A , V_B , α e β necessária para que os projéteis sempre colidam entre si;
- A relação determinada no item anterior é necessária mas não suficiente para que os projéteis sempre colidam. Que condição adicional deve satisfazer a distância D que separa os lançadores a fim de garantir que os projéteis sempre colidirão ?

**Questão 116 - ☉ - Colisão de projéteis no ar – Parte 2**

[113 a 116]

Duas partículas A e B, localizadas nos pontos de coordenadas $(0, h)$ e $(2h, 0)$ respectivamente, são lançadas num mesmo plano vertical em direções que formam ângulos respectivamente iguais a α e β com a horizontal. Se as partículas colidem entre si, determine a razão v_A/v_B entre as velocidades iniciais de lançamento dos projéteis. A gravidade local vale g .

Questão 117 - ☉ - Colisão de projéteis no ar – Parte 3

[117, 118]

Um canhão dispara sucessivamente dois projéteis a partir de um mesmo ponto no solo, com velocidades iniciais iguais a v porém em direções que formam ângulos α e β com a horizontal, num local em que a gravidade vale g . Determine o intervalo de tempo que deve ocorrer entre os disparos a fim de que os projéteis colidam entre si.

Questão 118 - ☉

[117, 118]

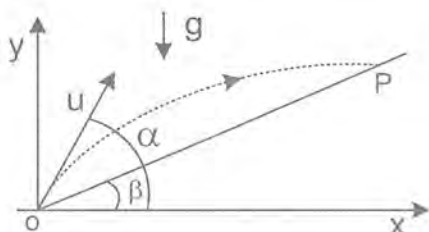
Duas partículas 1 e 2 foram lançadas obliquamente, de uma mesma posição no solo, com velocidades de u e v formando ângulos respectivamente iguais a α e β com a horizontal num local em que a gravidade vale g . Quanto tempo decorre entre a passagem de cada partícula pelo ponto de interseção de suas trajetórias parabólicas?

Questão 119 - ☉ - Lançamento oblíquo rampa acima

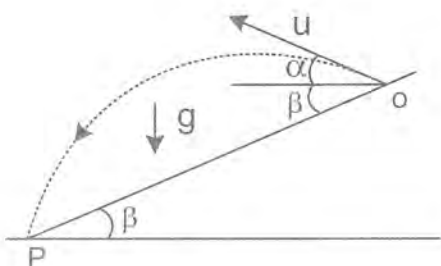
[119 a 123]

Um lançador dispara projéteis a partir da base O de uma rampa inclinada que forma um ângulo β com a horizontal como na figura. Os projéteis são disparados com velocidade u que formam um ângulo α com a horizontal. A gravidade local vale g .

- Determine o tempo de voo desse projétil;
- Determine o alcance OP do projétil ao longo da rampa;
- Dado o valor de β , para qual valor de α esse alcance OP será máximo?
- Determine o alcance máximo atingido ao longo da rampa.



Questão 119



Questão 120

Questão 120 - C - Lançamento oblíquo rampa abaixo

[119 a 123]

Um lançador dispara projéteis do topo O de uma rampa inclinada que forma um ângulo β com a horizontal como na figura. Os projéteis são disparados com velocidade u que formam um ângulo α com a horizontal. A gravidade local vale g .

- Determine o tempo de voo desse projétil;
- Determine o alcance OP do projétil ao longo da rampa;
- Dado o valor de β , para qual valor de α esse alcance OP será máximo?
- Determine o alcance máximo atingido ao longo da rampa.

Questão 121 - C

[119 a 123]

Mostre que o alcance máximo atingido pelo projétil na questão 119 é igual à altura que um corpo cairia, a partir do repouso, durante um tempo de queda igual ao tempo de voo do projétil ladeira acima.

Questão 122 - C

[119 a 123]

Um canhão está montado sobre uma rampa inclinada de inclinação 45° com a horizontal e dispara projéteis numa direção que forma um ângulo β com a superfície da rampa. Determine o valor de $\tan \beta$ a fim de que os projéteis colidam com a rampa horizontalmente.

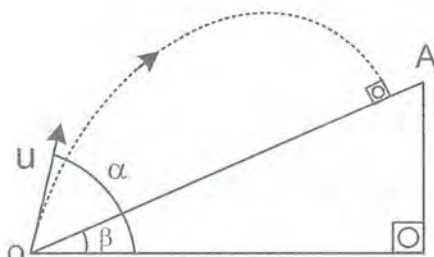
Questão 123 - C - Lançamento com chegada perpendicular

[119 a 123]

Uma partícula é lançada da base de uma rampa de inclinação β com a horizontal como mostra a figura. Para que a partícula colida com a rampa normalmente à sua superfície, deve ser lançada numa direção que forma um ângulo α com a horizontal. Determine o valor de $\tan \alpha$.

Questão 124 - C - Velocidades perpendiculares – Parte 1

Duas partículas são lançadas horizontalmente de um penhasco, a uma grande altitude, com velocidades v_1 e v_2 de mesma direção e sentidos opostos. Se a gravidade local vale g , determine a distância entre as partículas no instante em que suas velocidades forem perpendiculares entre si.



Questão 123

Questão 125 - ☉ - Velocidades perpendiculares – Parte 2

Um projétil é lançado com uma velocidade v formando um ângulo α com a horizontal num local em que a gravidade vale g . Quanto tempo após o disparo a velocidade do projétil apontará numa direção perpendicular à sua velocidade inicial ?

Questão 126 - ☉

Duas partículas são lançadas de um mesmo ponto, em uma grande altitude, com velocidades iniciais de mesmo módulo v que formam respectivamente ângulos α e β com a horizontal. Se a gravidade local vale g , determine a distância entre as partículas t segundos após o lançamento.

Questão 127 - ☉

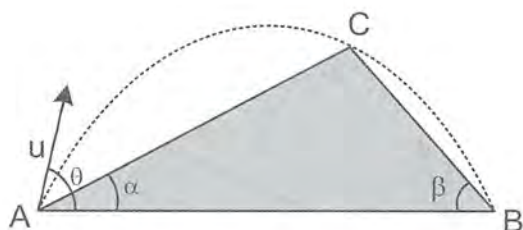
Uma partícula é lançada de um ponto a uma altura h do solo, com velocidade v formando um ângulo α com a horizontal. Outra partícula é lançada do mesmo ponto com a mesma velocidade v na mesma direção mas com sentido oposto ao da primeira partícula. Se a gravidade local vale g , determine a distância entre as posições de impacto dessas partículas com o solo.

Questão 128 - ☉

Um canhão localizado na origem $(0, 0)$ de um sistema de coordenadas cartesianas dispara projéteis sempre com a mesma velocidade e tem um alcance máximo A . Sejam α_1 e α_2 os dois ângulos de disparo que permitem atingir um alvo localizado nas coordenadas $(x, y) = (A/4, A/4)$ desse sistema cartesiano. Determine o valor de $\text{tg}\alpha_1 + \text{tg}\alpha_2$.

Questão 129 - ☉ - Saltando um triângulo

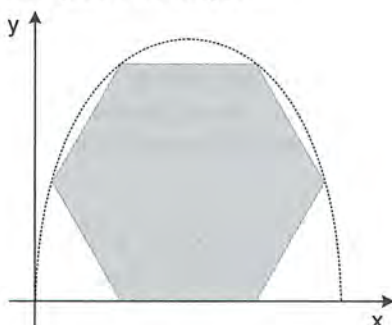
O triângulo ABC mostrado na figura, cujos ângulos das bases valem α e β , está localizado num plano vertical. Seja θ o ângulo segundo o qual deve ser lançado um projétil a partir do vértice A a fim de que sua trajetória passe pelo vértice C e atinja o solo no ponto B. Determine $\text{tg}\theta$.



Questão 130 - $\text{C} \bullet$ - Saltando um prisma hexagonal

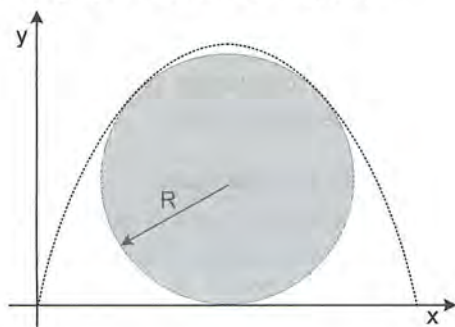
A figura mostra a secção transversal de um prisma reto de base hexagonal regular deitado sobre um solo horizontal. Um projétil lançado a partir do solo descreve uma trajetória parabólica que tangencia quatro dos seis vértices da secção transversal hexagonal de lado c . Se a gravidade local vale g , determine:

- a tangente de α , onde α é o ângulo de disparo do projétil;
- o alcance horizontal atingido pelo projétil.



Questão 131 - $\text{C} \bullet$ - Saltando um tronco cilíndrico usando V_{\min}

Um gafanhoto deseja saltar por cima de um tronco de árvore cilíndrico que encontra-se apoiado no solo. Se a gravidade local vale g e o raio da secção transversal circular vale R , qual a velocidade mínima para o salto do gafanhoto lhe permitirá galgar o tronco de árvore ?



Questão 132 - ☉ - Três projéteis alinhados

Três partículas são lançadas obliquamente a partir de um mesmo ponto, num mesmo plano vertical, com velocidades de disparo iguais a u , v e w e inclinações com a horizontal respectivamente iguais a α , β e γ . Mostre que a condição para que as três partículas se movam alinhadas em qualquer instante é que:

$$\frac{\text{sen}(\gamma - \beta)}{u} + \frac{\text{sen}(\alpha - \gamma)}{v} + \frac{\text{sen}(\beta - \alpha)}{w} = 0$$

Questão 133 - ☉ - Aumentando o alcance

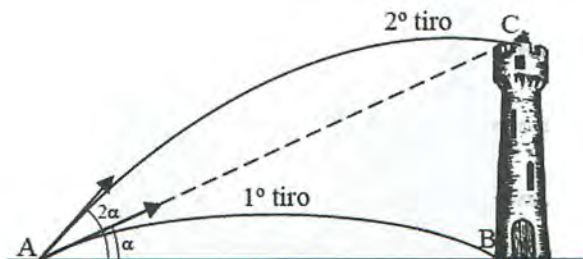
Um canhão situado ao nível do mar dispara projéteis com velocidade u numa direção que forma um ângulo α com a horizontal contra navios piratas que se aproximam da costa, atingindo um alcance horizontal A . Se o canhão for montado sobre uma plataforma de altura h , nas mesmas condições de disparo iniciais, qual acréscimo ΔA será obtido no alcance dos projéteis disparados?

Questão 134 - ☉ - Alcances iguais do alto da colina

Dois projéteis são disparados do alto de uma colina com mesmas velocidades iniciais iguais a u , porém, em duas direções distintas que formam ângulos respectivamente iguais a α e β com a horizontal. Sabendo que os projéteis atingem o mesmo alcance horizontal ao longo do solo plano horizontal, determine a altura da colina em relação ao solo horizontal. A gravidade local vale g .

Questão 135 - ☉ - Canhão atirando na torre

De um ponto A , dão-se dois tiros de canhão, com velocidades diferentes. No primeiro tiro, aponta-se o canhão para o ponto C no alto da torre e atinge-se a sua base B após o tempo t_1 . No segundo tiro, dobra-se o ângulo de disparo e atinge-se o ponto C no topo da torre após o tempo t_2 . Se a gravidade local vale g , determine a distância AB do canhão até a base da torre.



Questão 136 - ♣

Uma bola é arremessada em movimento oblíquo no ar. Em certo instante, a velocidade da bola faz um ângulo de 60° com a horizontal, em movimento ascendente. Quatro segundos depois, o ângulo é de 30° , em movimento descendente. Determine a distância percorrida pela bola na vertical durante este tempo. Dado: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

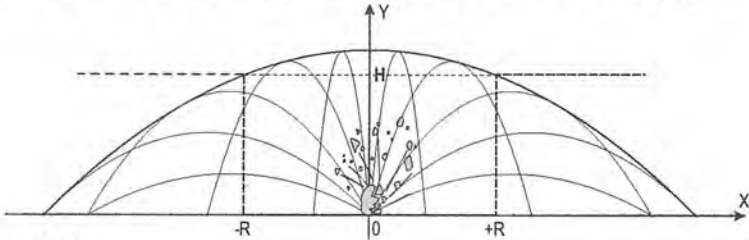


Para não entrar numa fria, não passe desse ponto sem antes ler o Tópico Especial 1 sobre Parábola de Segurança no Capítulo 6.

Questão 137 - ♣

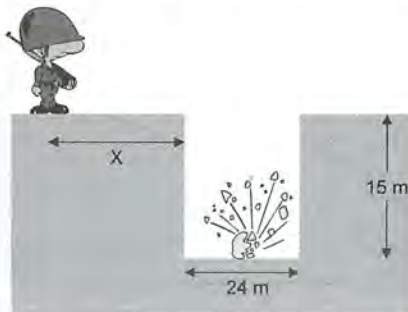
[137 a 148]

As provas do detonador de uma granada efetuam-se no centro do fundo de um poço cilíndrico de profundidade H . Os estilhaços da granada, produzidos pela explosão e cujas velocidades não ultrapassem v_0 , não devem cair na superfície da Terra. Qual deverá ser o diâmetro mínimo D do poço?

**Questão 138**

[137 a 148]

A figura mostra um poço onde estão ocorrendo os testes da incrível granada KJU-P52; inicialmente posicionada no centro da base do poço. Após a explosão, seus fragmentos atingem uma velocidade de 72 km/h e espalham-se em todas as direções. Pede-se determinar a menor distância X para a qual o inspetor de testes ainda está livre de ser atingido por qualquer fragmento. Considere que a granada esteja no centro da base do poço. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Questão 139 - Testando seus conhecimentos sobre a Parábola de Segurança

Julgue cada uma das sentenças abaixo sobre a Parábola de Segurança, assinalando verdadeiro ou falso:

- A parábola de segurança é a própria trajetória seguida pelo projétil que foi lançado obliquamente num campo gravitacional uniforme;
- A parábola de segurança é a envoltória de todas as trajetórias possíveis para um projétil que foi lançado sempre com a mesma velocidade, mas com ângulo de disparo variando entre 0° e 180° .
- A p.s. é útil para resolver qualquer problema relacionado com lançamento de projéteis;
- A p.s. é útil para resolver problemas de lançamento de projéteis envolvendo alcance máximo ou altura máxima;
- A p.s. é útil para resolver problemas de lançamento de projéteis envolvendo determinação da velocidade mínima para atingir um alvo fixo, conhecendo-se a posição do alvo;
- Além de determinar o alcance máximo possível para um projétil ao longo de uma direção, as propriedades da p.s. também permitem determinar o ângulo de disparo que levará àquele alcance máximo;
- Questões comuns de lançamento de projéteis que não envolvem máximos ou mínimos não são solucionáveis através da p.s.;
- Assim como o conceito de "derivadas", na maioria das vezes, só tem utilidade para a resolução de problemas de máximo e mínimo (e de tangências), a p.s. também só é útil para a resolução de problemas de máximos e mínimos envolvendo lançamento de projéteis, sem fazer uso de derivadas.

Questão 140 - ☪

[137 a 148]

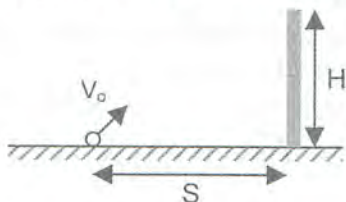
Um avião voando a uma altura contante H aproxima-se de um canhão anti-aéreo no solo que dispara projéteis com velocidade U num local onde a gravidade vale g . Sabendo que a trajetória seguida pelo avião e a bala do canhão estão contidos num mesmo plano vertical, pergunta-se:

- Qual a maior distância horizontal entre o canhão e o avião abaixo da qual o canhão já é capaz de abater o avião ?
- Sendo α o ângulo de disparo nessas condições, determine $\text{tg}\alpha$.

Questão 141

[137 a 148]

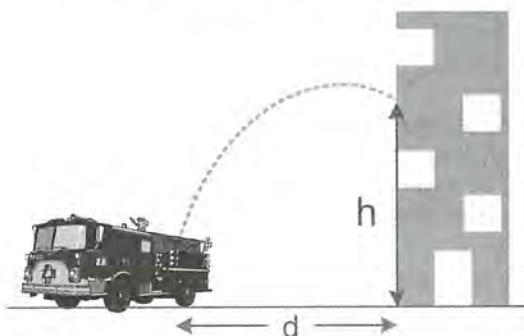
A figura mostra uma bola a uma distância $S = 6$ m de um muro de altura $H = 3,2$ m. Determine a mínima velocidade V_0 com que se deve arremessar a bola para que ela caia do outro lado do muro. Considere a gravidade local $g = 10 \text{ m/s}^2$



Questão 142

[137 a 148]

A figura mostra uma mangueira do corpo de bombeiros localizada a uma distância $d = 20$ m de um prédio de 40 m de altura em chamas. A água expelida pela mangueira chega a 72 km/h. Pede-se determinar a altura h da janela mais elevada possível de ser atingida pela água dessa mangueira ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

**Questão 143 - ♂**

[137 a 148]

Sob qual ângulo com a horizontal é necessário lançar uma pedra, da extremidade de um penhasco vertical de 20 m de altura, a fim de que ela caia a uma distância maior possível do paredão? A velocidade inicial da pedra é $v_0 = 14 \text{ m/s}$ e a gravidade local vale $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Questão 144 - ♀ ♂

[137 a 148]

Um projétil será disparado do alto de uma torre de altura H . Deseja-se atingir um alvo a uma distância H do pé da torre. A gravidade local vale g . Determine:

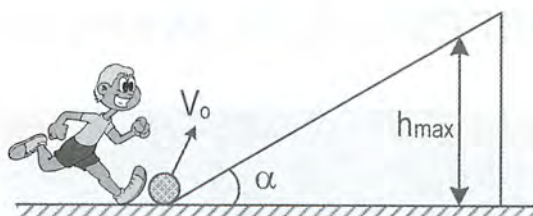
- a) a velocidade mínima com que se pode lançar o projétil de forma a atingir o alvo desejado;
- b) o ângulo de disparo em relação à vertical nas condições do item a.

Questão 145 - ♂

[137 a 148]

O jogador Roberto Carlos consegue disparar chutes com velocidade máxima $v_0 = 30 \text{ m/s}$. Se a bola está no pé de uma rampa inclinada $\alpha = 30^\circ$ com a horizontal (veja figura), numa região onde $g = 10 \text{ m/s}^2$, o prof. Renato Brito pede que você determine:

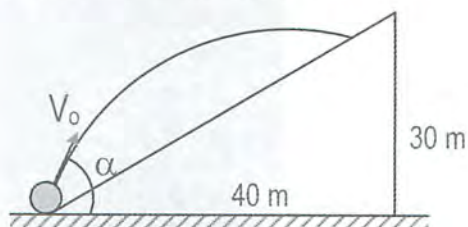
- a) a inclinação θ do chute, em relação à horizontal, para que a bola atinja alcance máximo ao longo da rampa;
- b) a altura máxima $H_{\text{máx}}$ que essa bola é capaz de atingir ao longo da rampa.

**Questão 146**

[137 a 148]

Um lançador dispara projéteis com velocidade $v_0 = 20 \text{ m/s}$ ao longo de uma colina inclinada, cujas dimensões são mostradas na figura abaixo. Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, o prof. Renato Brito pede que você determine:

- a) a altura máxima $H_{\text{máx}}$ que esse projétil é capaz de atingir ao longo da colina;
 b) o ângulo α de disparo do projétil com a horizontal nas condições do item a.

**Questão 147 - ☉**

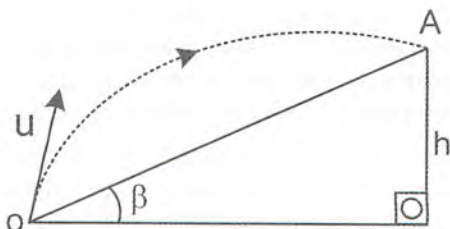
[137 a 148]

Um canhão encontra-se no alto de uma muralha de altura h acima de um solo plano horizontal e dispara projéteis com velocidade inicial v_0 . Sabendo que a gravidade local vale g , determine qual deve ser o ângulo de disparo dos projéteis, em relação à vertical, a fim de que os projéteis atinjam máximo alcance ao longo do plano horizontal.

Questão 148 - ☉

[137 a 148]

Qual a velocidade mínima com que se pode lançar um projétil da base de uma rampa de inclinação β com a horizontal, a fim de atingir um objeto A que se encontra sobre essa rampa a uma altura h do solo? A gravidade local vale g .



2 DINÂMICA RETILÍNEA NO REFERENCIAL INERCIAL



2.1 O DOMÍNIO DE VALIDADE DAS LEIS DE NEWTON

As leis de Newton são o pilar de sustentação da Mecânica. Elas descrevem o movimento dos corpos, tanto no céu como na Terra, descrevem as órbitas dos planetas, prevêm a existência de novos planetas e explicam o fenômeno das marés. Ainda assim, por mais brilhantes que sejam as três leis de Newton, é preciso cautela ao interpretá-las e aplicá-las.

A 1ª lei de Newton estabelece que todo corpo *livre da ação de forças* permanecerá em seu estado de repouso permanente ($v = 0$, $a_R = 0$) ou de movimento retilíneo e uniforme ($v \neq 0$, $a_R = 0$), até que alguma força atue sobre ele e altere seu estado de *equilíbrio*.

Esse repouso ao qual a lei da inércia se refere, entretanto, é em relação a quem? Afinal, sabemos que um móvel pode estar em repouso num referencial, mas em movimento em outro referencial. Você já havia pensado sobre isso?

A segunda lei de Newton, por sua vez, estabelece que a força resultante F_R , agindo sobre um corpo de massa m , proporciona a ele uma aceleração a tal que:

$$a = \frac{F_R}{m}$$

Sabemos, porém, que um móvel pode estar acelerado num referencial, mas estar não acelerado em outro referencial. A expressão da segunda lei de Newton fornece a aceleração do móvel em qual referencial? Você já havia pensado sobre isso?

Em geral, os livros-textos de Física não deixam bem claro para o estudante o fato de que as leis de Newton têm sua validade restrita ao chamado referencial inercial, cujo conceito é bastante sutil, requerendo atenção e concentração especiais por parte do leitor para assimilá-lo de forma eficaz.

Nesse capítulo, investigaremos o conceito de referencial inercial e faremos uma análise comparada entre os referenciais inerciais e não inerciais, buscando esclarecer de que maneira as leis de Newton falham nestes últimos.

No capítulo 4, aprenderemos o Princípio da Equivalência de Einstein, que nos ajudará a aplicar as leis de Newton com sucesso, mesmo nos referenciais não inerciais.

2.2 INTRODUÇÃO AO REFERENCIAL INERCIAL

Um referencial ou sistema de referência pode ser formalmente definido como um sistema de coordenadas cartesianas em relação ao qual são tomadas as medidas de posição XYZ , velocidade e aceleração de um móvel. Deixando de lado o formalismo matemático, podemos simplificar, considerando como referencial um simples observador que avaliará a cinemática e a dinâmica do móvel, medindo as grandezas físicas relevantes para o estudo do fenômeno em questão.

Por definição, um referencial é dito inercial quando nele se verifica a lei da inércia e, por extensão, a segunda lei de Newton.

Para verificar se um dado referencial é inercial, alguns testes experimentais diretos podem ser realizados em primeira aproximação.

Por exemplo, a Figura 1 mostra dois sistemas de coordenadas cartesianas: o sistema XYZ , fixo ao solo, e o sistema $X'Y'Z'$, fixo a um vagão, que pode se mover sobre trilhos retos e horizontais. O vagão, assim como a bola que se encontra sobre o seu piso, está inicialmente em repouso em relação à Terra (referencial XYZ). Sobre a bola agem apenas as forças peso P e normal N , visto que os atritos são desprezíveis. Qual será o comportamento da bola, no referencial da Terra, quando o vagão partir do repouso com aceleração a constante na direção horizontal X ?

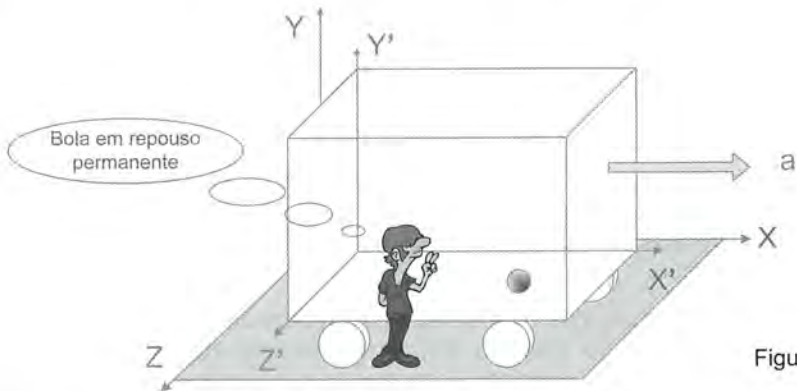


Figura 1

Ora, para o referencial da Terra (Figura 1), o vagão irá se mover acelerado para a direita, mas a bola permanecerá em repouso, isto é, suas coordenadas XYZ permanecerão inalteradas com o passar do tempo. Isso está de acordo com a lei da inércia. Afinal, se nenhuma força horizontal está agindo sobre a bola, ela deve permanecer indefinidamente em repouso nesse referencial. Dessa forma, dizemos que o referencial XYZ (referencial da Terra) é inercial, visto que a lei da inércia é verificada nesse referencial.

Por outro lado, qual será o comportamento da bola, no referencial do vagão, quando este partir do repouso com aceleração a constante na direção horizontal X ?

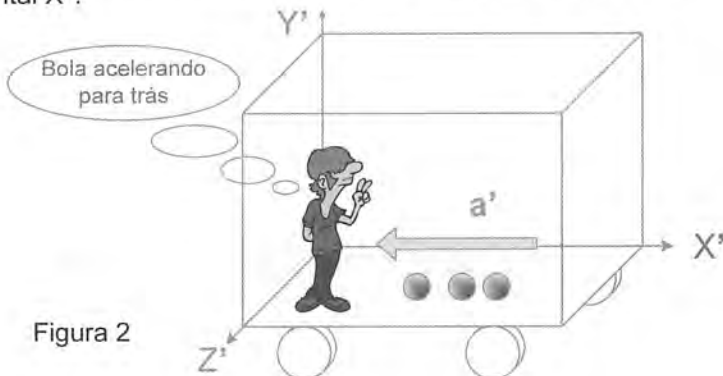


Figura 2

Ora, para o observador no referencial do vagão (Figura 2), a bola partirá do repouso e se moverá com aceleração $a' = a$ no sentido oposto ao do eixo X . Em outras palavras, a coordenada X' da bola irá diminuir aceleradamente, com o passar do tempo, no referencial $X'Y'Z'$.

Esse comportamento notavelmente *viola a Lei da Inércia*. Afinal, se nenhuma força (de interação) horizontal age sobre a bola, no referencial do vagão, como pode ela sair do repouso e passar a se mover aceleradamente para trás? Esse comportamento mostra que esse vagão acelerado em relação à

Terra (bem como o observador em seu interior) não se trata de um referencial inercial. Dizemos que ele é um referencial *não inercial*.

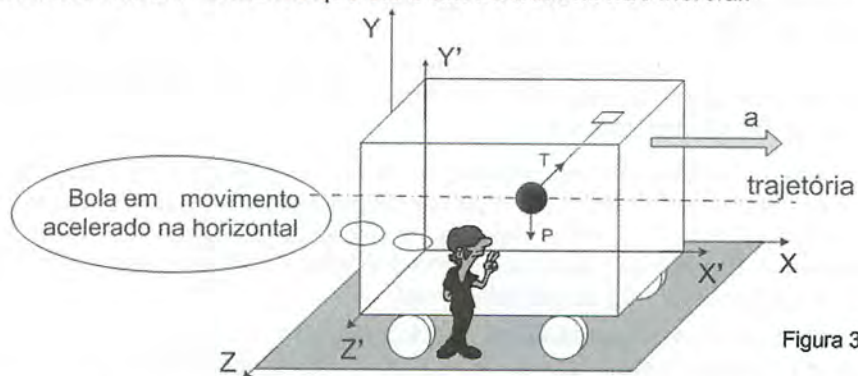


Figura 3

Outro teste simples pode facilmente confirmar o caráter não inercial do referencial do vagão: pendure um pêndulo simples ao teto desse vagão, enquanto este move-se com aceleração constante a no referencial XYZ da Terra (Figura 3). Ajuste convenientemente a inclinação do fio do pêndulo, de forma que ele não oscile, durante o movimento acelerado do vagão em trajetória retilínea horizontal.

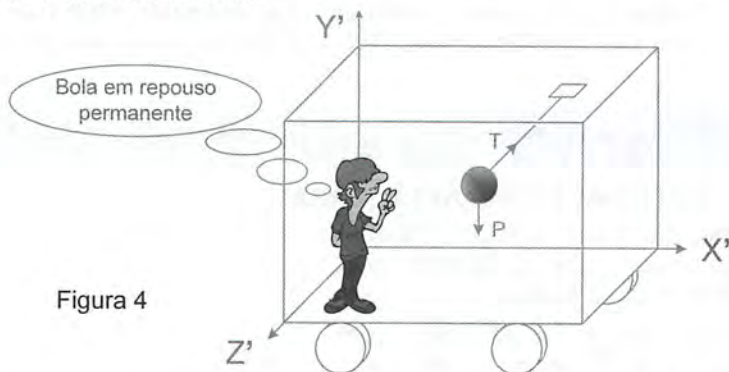


Figura 4

Qual será o comportamento da bola, no referencial da Terra, quando o vagão partir do repouso com aceleração a constante na direção horizontal X ?

Ora, no referencial da Terra (Figura 3), a bola estará se movendo para a direita, numa trajetória retilínea horizontal, compartilhando da mesma aceleração a do vagão nesse referencial. O observador da Figura 3 entende perfeitamente a dinâmica desse movimento da bola, com base nas forças que agem sobre ela:

- a bola move-se em trajetória retilínea horizontal, o que implica uma ausência de aceleração vertical, isto é, um equilíbrio de forças verticais. Assim, a componente vertical T_Y da tração deverá cancelar o peso, isto é : $T_Y \uparrow = P \downarrow$.

- a aceleração horizontal " $\rightarrow a$ " da bola é proporcionada pela componente horizontal $T_{X\rightarrow}$ da tração. A segunda lei de Newton permite escrever: $F_R = T_X = m \cdot a$.

Por outro lado, qual será o comportamento da bola no referencial do vagão, quando este partir do repouso com aceleração a constante em relação à Terra na direção horizontal X ?

Ora, para o observador no referencial do vagão (Figura 4), a bola, assim como o vagão, se encontra em repouso permanente $v' = 0$, $a' = 0$ (usaremos o símbolo linha " ' " para designar grandezas medidas no referencial acelerado). Em outras palavras, as coordenadas $X'Y'Z'$ da bola não mudam com o passar do tempo nesse referencial.

De acordo com a segunda lei de Newton ($F_R = m \cdot a'$), todavia, para que a bola do pêndulo esteja em equilíbrio ($a' = 0$), é necessário que a força resultante agindo sobre a bola seja nula, condição essa que não está sendo satisfeita, visto que a tração T e o peso P não possuem a mesma direção e sentidos opostos a fim de se cancelarem.

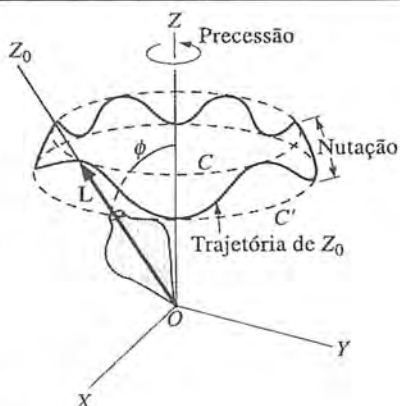
Assim, vemos que, embora a força resultante agindo sobre a bola não seja nula ($F_R \neq 0$), a aceleração a' da bola é nula no referencial do vagão, violando a segunda lei de Newton $F_R = m \cdot a'$. Desta forma, verificamos, mais uma vez, que o referencial do "vagão acelerado" não é inercial, visto que as leis de Newton não são satisfeitas nele. Dizemos que ele é um referencial *não inercial*.

Propriedade 1: as leis de Newton só são válidas em referenciais inerciais.

2.3 O REFERENCIAL DO PLANETA TERRA

A Terra move-se como um pião através do espaço sideral, executando uma série de movimentos simultâneos:

- 1) **translação** ao redor do Sol, com período de aproximadamente 365 dias;
- 2) **rotação** em torno do seu próprio eixo, com período aproximado de 24h;
- 3) **precessão** – o próprio eixo Z_0 da Terra executa uma rotação em torno do eixo Z , com período aproximado de 27.725 anos;
- 4) **nutação** – o ângulo ϕ formado entre os eixos Z_0 e Z oscila com amplitude de $9,2''$ de arco e período de oscilação de 19 anos.



Em meio a todos esses movimentos executados pelo nosso planeta em seu movimento pelo espaço sideral, lembramo-nos de que nossos laboratórios

terrestres encontram-se todos fixos à superfície da Terra, o que, automaticamente, suscita a seguinte pergunta:



A rigor, a Terra não é um referencial inercial. Esse fato decorre, principalmente, do movimento de rotação que ela executa em torno do seu eixo. Um dos experimentos mais simples e mais admiráveis que comprovam a rotação da Terra em torno do seu eixo foi realizado publicamente por Leon Foucault, em 1851, sob a grande cúpula do Pantheon em Paris (Figura 5).

Foucault suspendeu uma esfera de 28 kg (Figura 6), através de um fio de 70 m de comprimento, ao teto do Pantheon. A maneira pela qual a extremidade superior do fio foi presa permitia ao pêndulo oscilar livremente em qualquer direção com um período de 17 segundos aproximadamente .



Figura 5 - Cúpula do Pantheon em Paris

Em torno do ponto, no solo, diretamente abaixo do ponto de suspensão do pêndulo, foi construída uma pequena elevação circular de aproximadamente 3m de raio (Figura 6). Nessa elevação, foi colocado um pouco de areia, de modo que uma ponta metálica que saía da esfera do pêndulo, para baixo, varria a areia a cada oscilação (veja trajetórias na Figura 11).



Figura 6 - vista interna do Pantheon em Paris

Após sucessivas oscilações, tornou-se claro que o plano vertical do movimento do pêndulo estava girando no sentido dos ponteiros do relógio, quando visto de cima. Em um intervalo de 1h, o plano de oscilação desse pêndulo do Pantheon girava mais de 11 graus, completando uma volta em aproximadamente 32 h.

Por que motivo, então, o plano de oscilação do pêndulo gira para um observador localizado sobre a Terra? Será que o plano de oscilação do pêndulo de Foucault também gira no referencial das estrelas distantes (referencial inercial padrão)?

Seja um pêndulo semelhante ao de Foucault suspenso no pólo norte terrestre. Para um observador fixo às estrelas distantes, o plano de oscilação desse pêndulo permanece fixo nesse referencial; entretanto, o fato de a Terra girar em torno do seu eixo no sentido anti-horário fará o plano das oscilações do pêndulo de Foucault girar no sentido horário (Figura 11), para um observador localizado sobre o hemisfério norte da Terra (seqüência de Figuras 7, 8, 9 e 10), perfazendo uma rotação completa a cada 24 horas, no caso específico de um pêndulo localizado exatamente nos polos.

Pode-se mostrar que esse período T de rotação do plano de oscilação do pêndulo varia com a latitude φ da cidade onde o pêndulo esteja localizado, segundo a expressão abaixo:

$$T = \frac{24 \text{ h}}{\text{sen } \varphi}$$

Assim, para uma latitude $\varphi = 0^\circ$ (equador), esse período é infinito, isto é, um pêndulo de Foucault localizado na linha do equador oscila num plano fixo. Para uma latitude $\varphi = 90^\circ$ (pêndulo localizado nos polos), o plano de oscilação do pêndulo gira com o mesmo período de rotação da Terra (24h).

Como justificar essa rotação do plano de oscilação do pêndulo pela análise das forças que agem nele?



Figura 7



Figura 8



Figura 9



Figura 10

Figuras 7, 8, 9 e 10- Para uma observadora que se encontra no referencial das estrelas distantes, a oscilação do pêndulo simples ocorre num plano vertical fixo. Para um observador que se encontra fixo à superfície da Terra em rotação horária em torno do seu eixo, entretanto, o plano de oscilação vertical desse pêndulo não permanece fixo, mas gira no sentido anti-horário.

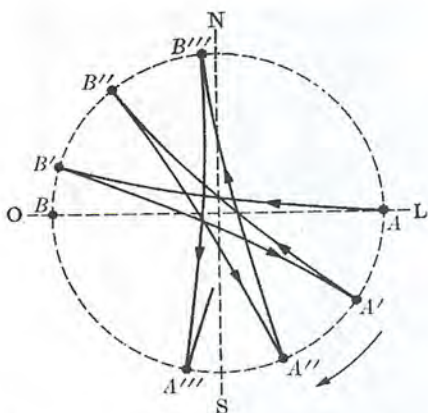


Figura 11a - no hemisfério norte, a rotação do plano de oscilação do pêndulo ocorre no sentido horário.

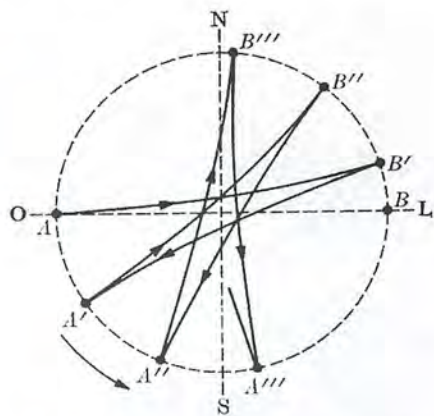


Figura 11 b - no hemisfério sul, a rotação do plano de oscilação do pêndulo ocorre no sentido anti-horário.

Para um observador fixo às estrelas distantes (referencial inercial padrão), as forças tração T e peso P que agem na bolinha estão contidas no mesmo plano de oscilação do pêndulo e, por isso, são incapazes de acelerá-lo para fora desse plano (Figura 12). Em outras palavras, essas forças são incapazes de girar o plano de oscilação do pêndulo que (visto que o momento ou torque delas, em relação ao ponto de suspensão do pêndulo, é nulo), de fato, permanece estacionário no referencial das estrelas distantes, conforme esperado. Tudo ocorre de acordo com as leis de Newton nesse referencial, confirmando o seu caráter inercial.

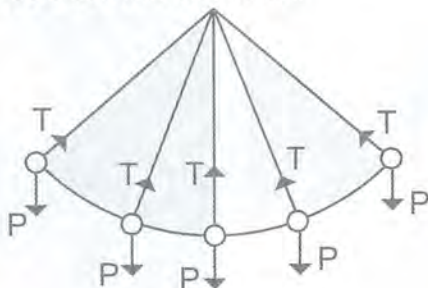


Figura 12 – Para que o movimento de um corpo se mantenha num plano fixo, é suficiente que a sua velocidade, bem como todas as forças que agem sobre ele, estejam sempre contidas no referido plano, como ocorre no pêndulo simples.

Para um observador sobre a Terra, porém, embora as forças tração T e peso P que agem na bolinha estejam contidas no mesmo plano de oscilação do pêndulo e, por isso, sejam incapazes de acelerá-lo para fora desse plano, ainda assim, o plano de oscilação do pêndulo simples gira nesse referencial, em desacordo com o comportamento esperado com base nas leis de

Newton. Isso nos leva a crer que a Terra, rigorosamente, não é um referencial inercial.

A justificativa para a rotação do plano de oscilação do pêndulo de Foucault no referencial da Terra, com base nas forças que agem sobre o pêndulo, requer a introdução do conceito de “força de inércia” (que estudaremos posteriormente). Uma força de inércia chamada “força de Coriolis” que atua numa direção transversal ao movimento é que, efetivamente, gira o plano de oscilação do pêndulo de Foucault, para um observador não inercial posicionado sobre a Terra. Essa força age numa direção transversal ao plano definido por T e P, aplicando no pêndulo um momento (torque) não nulo em relação ao seu ponto de suspensão.

O Pêndulo de Foucault, que se encontra aberto à visitação em Paris até os dias de hoje, é uma belíssima comprovação experimental do caráter não inercial da Terra.

Qualquer ponto sobre o equador terrestre possui, em relação às estrelas distantes, uma aceleração da ordem de $a = \omega^2.R \cong 0,03 \text{ m/s}^2$ e, por conta dessa pequenina aceleração, a rigor, a Terra não é um referencial inercial. Ainda assim, a maioria dos fenômenos estudados sobre a superfície da Terra tem duração muito breve, quando comparados ao período de rotação da Terra (24 h) em torno do seu eixo. Por esse motivo, o efeito dessa rotação pode ser desprezado na maioria das aplicações da Dinâmica, no estudo do movimento de corpos sobre a superfície do Planeta. Nesses casos, a Terra é tomada com um referencial aproximadamente inercial.

Nesse livro, caso não seja dito nada em contrário, à Terra será admitida como um referencial inercial.

Galileu percebeu que

Propriedade 2: qualquer referencial que esteja em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme, em relação a um referencial inercial, também é um referencial inercial.

Assim, admitindo a Terra como referencial inercial, é possível afirmar que:

Propriedade 3: qualquer referencial em estado de repouso ou em movimento retilíneo e uniforme, em relação à Terra, também é um referencial inercial.

Propriedade 4: qualquer referencial acelerado, isto é, que possua aceleração tangencial, ou aceleração centrípeta, em relação à Terra, é um referencial não inercial.

Assim, qualquer sistema acelerado sobre a Terra é um referencial não inercial. As leis de Newton não são válidas nesses sistemas de referência. São exemplos de referenciais não inerciais:

- uma plataforma girante num parque de diversões, como um carrossel, em virtude da aceleração centrípeta;

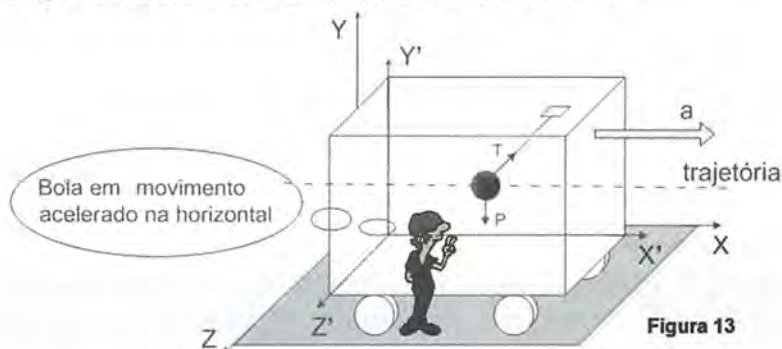
- um carro se movendo numa curva, em decorrência da aceleração centrípeta;
- um avião, durante a decolagem, por causa da aceleração proporcionada pelas turbinas.

A seguir, faremos várias aplicações das leis de Newton em referenciais inerciais. Nos capítulos 4 e 5, faremos um estudo avançado da Dinâmica e aprenderemos a aplicar as leis de Newton nos referenciais não inerciais, com auxílio do *Princípio da Equivalência de Einstein*.

2.4 O FORMATO DA TRAJETÓRIA E O PAR DE EIXOS-PADRÃO

Nessa seção, aprenderemos alguns métodos simples, porém muito eficientes no equacionamento de problemas de Dinâmica, isto é, problemas que envolvam forças, aceleração, velocidade, deslocamentos etc.

Em geral, uma das grandes dificuldades com as quais os estudantes de Física se deparam, na análise das forças que agem num corpo, é como saber quais forças devem ser decompostas e quais não precisam ser decompostas na resolução do problema. “...Será que há apenas uma forma sistemática de analisar o problema, ou será que existem várias maneiras de analisar que conduzem ao mesmo resultado correto? ...”



A experiência mostra que uma ferramenta importante na resolução sistemática de problemas de Dinâmica é a análise do *formato da trajetória* seguida pelo móvel.

O *formato da trajetória* está intimamente relacionado com as forças que agem sobre o corpo durante seu movimento num dado referencial, e nos permite concluir quais forças efetivamente colaboram para a sua aceleração e quais forças definitivamente devem se cancelar por não participarem do processo de aceleração do móvel.

Para esclarecer um pouco essas idéias, considere, por exemplo, o pêndulo preso ao teto do vagão na Figura 13. A bola presa ao fio se encontra em movimento acelerado descrevendo uma trajetória retilínea horizontal em

relação à Terra (referencial inercial). Esse formato da trajetória descrita pela bola permite concluir que :

- a aceleração ($\rightarrow a$) resultante do móvel está (integralmente) na mesma direção da velocidade ($\rightarrow v$), isto é, está na direção horizontal, não havendo nenhuma componente de aceleração vertical (Figura 13);
- conseqüentemente, a força resultante agindo no móvel (responsável por produzir tal aceleração) é horizontal $F_R = T_X \rightarrow$;
- a ausência de aceleração vertical garante que a força resultante nessa direção $\downarrow \uparrow$ é nula, portanto, $T_Y = P$ na Figura 13.

Em geral, no estudo da Dinâmica dos movimentos, o par de eixos-padrão utilizado para a decomposição das forças obedece o seguinte modelo :

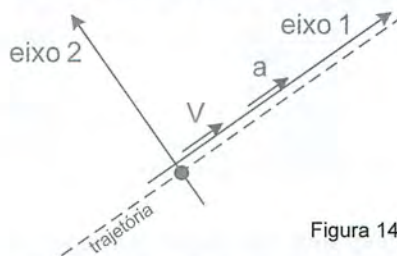


Figura 14

Eixo 1 – Eixo tangencial

Características:

- Eixo que está na mesma direção da velocidade da partícula, no referencial inercial em questão (Figura 14) ;
- em movimentos retilíneos, coincide com a trajetória seguida pela partícula (Figura 14);
- em movimentos retilíneos, esse eixo contém a força resultante agindo no móvel (caso ela não seja nula) e, conseqüentemente, a sua aceleração resultante (caso ela não seja nula); e
- as forças e acelerações, nesse eixo, determinam se o movimento será retardado, uniforme ou acelerado.

Eixo 2 – Eixo centrípeto, radial ou normal

Características:

- Eixo que é perpendicular à velocidade da partícula, no referencial inercial em questão (Figura 14);
- em movimentos retilíneos, o corpo sempre está em equilíbrio ($F_R = 0$, $a_R = 0$) na direção do eixo 2;
- esse eixo, obviamente, é sempre perpendicular ao eixo 1, visto que sempre é perpendicular à velocidade do corpo;
- as forças que agem sobre esse eixo estão relacionadas à curvatura da trajetória descrita pelo corpo no referencial inercial.

Esse par de eixos descrito será denominado "Par de eixos-padrão". Na maioria das resoluções, adotaremos o par de eixos-padrão, fazendo uso de eixos alternativos apenas quando a simplificação algébrica obtida nesse caso for vantajosa (o que raramente acontece).

Exemplo Resolvido 1: A figura mostra um prisma de massa M que se move sobre um plano horizontal. Um pequeno bloco de massa m se encontra apoiado sobre a superfície inclinada do prisma. Se a gravidade local vale g , o prof. Renato Brito pede que você determine com qual força F horizontal e constante se deve empurrar esse prisma, de forma que o conjunto se mova sem que o bloquinho escorregue em relação ao prisma. Todos os atritos são desprezados.

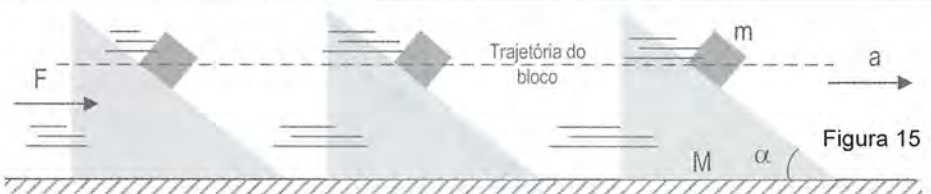


Figura 15

Solução:

A Figura 16 mostra o diagrama das forças que agem no prisma e no bloco. A questão-chave, para o estudante de Física, é "qual das forças que agem no bloquinho deve ser decomposta, a normal N ou o peso $m \cdot g$?" Será que tanto faz?

A resposta é que devemos fazer uso do chamado Par de Eixos-padrão (mostrado na Figura 14), a fim de que o nosso equacionamento do problema seja mais objetivo, reduzindo o trabalho algébrico. A seguir, analisaremos a Dinâmica do movimento da caixa, com base no formato da sua trajetória descrita no referencial da Terra.

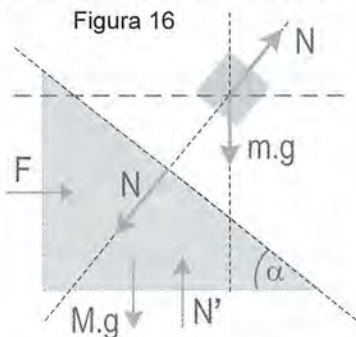


Figura 16

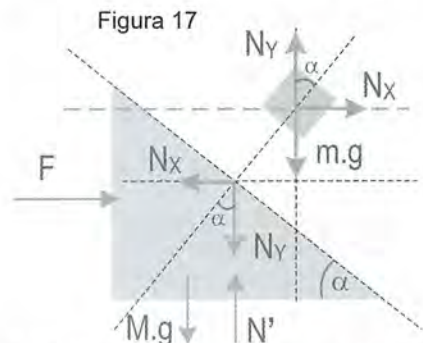


Figura 17

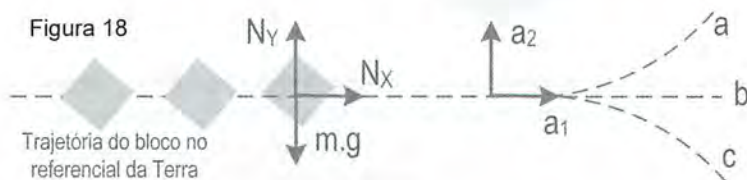
Segundo o enunciado, bloco e prisma descreverão trajetórias retilíneas compartilhando das mesmas acelerações $\rightarrow a$ no referencial da Terra, como mostra a Figura 15. A trajetória do bloco no referencial da Terra define o eixo 1 a ser adotado, o chamado eixo tangencial. Conforme expresso anteriormente, em movimentos retilíneos, o eixo 1 sempre coincide com a trajetória do corpo

em relação à Terra (referencial inercial), portanto será horizontal nessa questão. O eixo 2 (centrípeto ou normal) é perpendicular ao eixo 1, portanto será vertical nessa questão.

Assim, adotando esse par de eixos-padrão, iremos decompor apenas as forças que não estiverem sobre nenhum desses dois eixos, como mostra a Figura 17.

O formato da trajetória seguido pelo bloco, no referencial inercial (Terra), é uma reta horizontal (Figura 18b) que não se curva nem para cima (Figura 18a) nem para baixo (Figura 18c), sugerindo que o bloco não possui aceleração na direção 2 ($a_2 = 0$), isto é, que o bloco encontra-se em equilíbrio ($F_R = 0$) na direção do eixo 2, o que permite escrever:

$$\text{Equilíbrio na direção 2: } N_Y = m.g \Rightarrow \mathbf{N.\cos\alpha = m.g} \quad (\text{eq1})$$



Na direção 1, bloco e prisma compartilham de uma mesma aceleração $a_1 = a$ no referencial da Terra. O diagrama de forças da Figura 18 mostra que essa aceleração horizontal do bloquinho decorre da força N_X . A segunda lei de Newton permite escrever:

$$F_R = m.a \Rightarrow N_X = m.a \Rightarrow \mathbf{N.\sen\alpha = m.a} \quad (\text{eq2})$$

O prisma compartilha dessa mesma aceleração horizontal a , portanto, observando as forças horizontais que agem no prisma, na Figura 17, vem:

$$F_R = M.a \Rightarrow (F - N_X) = M.a \Rightarrow \mathbf{(F - N.\sen\alpha) = M.a} \quad (\text{eq3})$$

Dividindo as equações eq1 e eq2 membro a membro, vem: $a = g.Tg\alpha$. Essa é a aceleração horizontal que os corpos devem compartilhar (no referencial da Terra) a fim de que o bloco se mova em equilíbrio vertical. Agora, com qual força F devemos empurrar o prisma para que ambos compartilhem dessa aceleração ?

Somando as equações eq2 e eq3, membro a membro, vem:

$$\mathbf{F = (M + m).a} \quad (\text{eq 4a})$$

A relação eq4 nos lembra que ambos os corpos compartilham da mesma aceleração horizontal a no referencial da Terra (como mostra a Figura 15) e, portanto, podem ser tratados como se fossem corpo único de massa " $M + m$ " movendo-se com aceleração $a = g.Tg\alpha$.

Em linhas gerais, só é possível considerar um sistema de N corpos como se fosse corpo único, a fim de aplicar a segunda lei de Newton, quando todos os corpos do sistema compartilharem de uma mesma aceleração a (que será a aceleração do centro de massa do sistema). Assim, da relação eq4a, vem:

$$F = (M + m).a \Rightarrow F = (M + m).g.Tg\alpha \quad (\text{eq 4b})$$



A Figura 19 mostra o diagrama das forças agindo no bloco, fazendo uso de um sistema de eixos cartesianos alternativo, como sugeriu a Claudete. Nesse caso, relacionar a aceleração horizontal ($\rightarrow a$) do bloco com a força resultante horizontal que causou essa aceleração, torna-se uma missão complicada, visto que as forças que agem no bloco (N , $p.\text{sen}\alpha$ e $p.\text{cos}\alpha$) não se encontram direcionadas ao longo do mesmo sistema de eixos coordenados que contém a aceleração, como mostra a Figura 19.

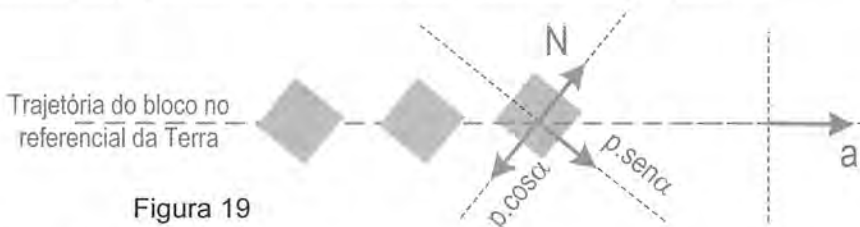
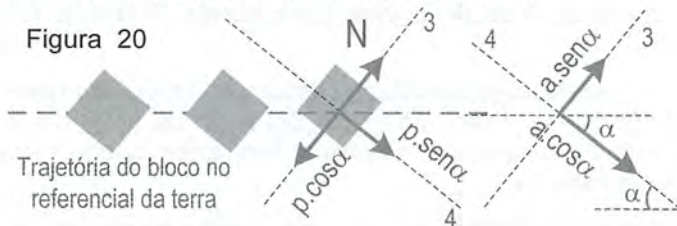


Figura 19

Dizemos que o diagrama de forças não está “casado” com o diagrama cinemático do bloco (o par de eixos das forças não coincide com o par de eixos da aceleração), o que dificulta o equacionamento da segunda lei de Newton.

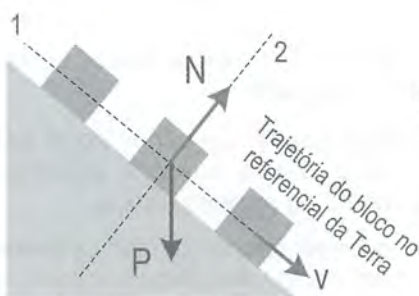
Para melhor compreender, note que o diagrama de forças (padrão) utilizado na Figura 18 ficou automaticamente “casado” ao diagrama cinemático (forças e acelerações estão direcionadas sobre o mesmo par de eixos), permitindo que facilmente se chegasse às relações eq1 e eq2, levando-se em conta o formato da trajetória descrita pelo bloco, bem como a segunda lei de Newton. Essa simplicidade, em geral, é obtida quando se faz uso do par de eixos-padrão.

Para resolver o problema usando o diagrama de forças da Figura 19 (resolução que deve ser evitada), decomponemos a aceleração a no mesmo sistema de eixos das forças N , $p.\text{sen}\alpha$ e $p.\text{cos}\alpha$, escrevendo a segunda lei de Newton para cada direção, como mostra a Figura 20:



Direção 3: $F_R = m.a \Rightarrow (N - m.g.\text{cos}\alpha) = m.a.\text{sen}\alpha$ (eq5).

Direção 4: $F_R = m.a \Rightarrow (m.g.\text{sen}\alpha) = m.a.\text{cos}\alpha$ (eq6).



As relações eq5 e eq6 (determinadas a partir da análise das forças no sistema de eixos alternativos) são perfeitamente compatíveis com as relações eq1 e eq2 (determinadas a partir da análise das forças no sistema de eixos-padrão) e levam ao mesmo resultado encontrado inicialmente, requerendo, entretanto, maior processamento algébrico, o que deve ser evitado.

Profinho, mas por que tem questões de plano inclinado em que a gente decompõe o peso P , em vez da normal?



Ora, basta perceber que há uma diferença entre o formato da trajetória de cada uma dessas questões.



Nas questões mais comuns de planos inclinados, o bloquinho move-se ao longo da rampa (Figura 21), descrevendo uma trajetória retilínea na direção

da rampa (no referencial da Terra), indicando que devemos tomar um sistema de referência-padrão com o eixo 1 paralelo à rampa e o eixo 2 perpendicular à rampa.

Nesse caso, a força que será decomposta (por estar fora dos eixos 1 e 2) será apenas o peso P do bloco, visto que a normal N já está sobre o eixo 2 (Figura 21).

Portanto, em cada situação-problema, devemos sempre identificar o sistema de eixos-padrão a ser usado na resolução, a fim de obter um diagrama de forças casado ao diagrama cinemático, facilitando o equacionamento da segunda lei de Newton.

Portanto, em linhas gerais, ao iniciar a resolução de um problema de Dinâmica, é interessante o estudante sempre atentar para os seguintes passos a serem seguidos:

- 1) separe todos os corpos e coloque todas as forças que agem em cada um deles;
- 2) identifique o formato da trajetória seguida pelo corpo (reta horizontal, reta inclinada, reta vertical etc);
- 3) cada corpo deverá ganhar um par de eixos, sendo o eixo 1 de cada corpo posicionado sobre a sua trajetória retilínea, e o eixo 2 posicionado perpendicularmente ao primeiro eixo; e
- 4) decomponha todas as forças que não caíram sobre o eixo 1 nem sobre o eixo 2 de cada corpo. As demais forças, em geral, não devem ser decompostas.



Claudete, não podemos resolver esse problema adotando o prisma como referencial e admitindo que o bloco esteja em equilíbrio nesse referencial. Por quê ? A resposta é que, conforme discutimos na página 47 (Figura 4), as leis de Newton **só** relacionam as forças que agem num corpo com as suas respectivas acelerações **no referencial inercial** (a Terra, por simplicidade), não sendo válidas num referencial não inercial (acelerado), como no caso do prisma dessa questão.

Os problemas que resolveremos desse ponto em diante, ao longo dos capítulos 2 e 3, serão todos no referencial inercial, para que o leitor se familiarize com esse referencial.

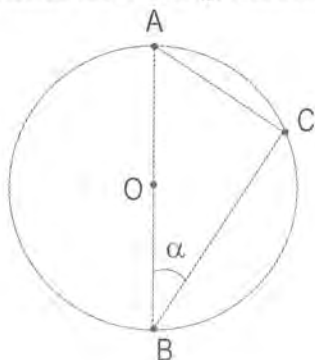
A partir do capítulo 4, quando tivermos adquirido mais experiência na resolução de problemas de Dinâmica no referencial inercial, aprenderemos a resolvê-los também no referencial acelerado com auxílio do *Princípio da Equivalência de Einstein*, que eu, professor Renato Brito, explicarei no Capítulo 4.

Bom aprendizado !

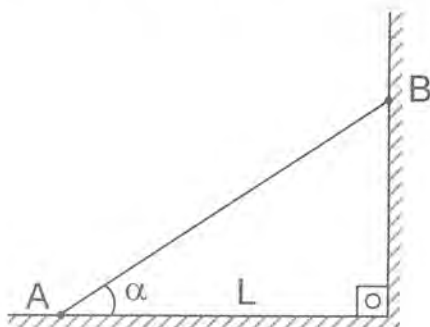
PROBLEMAS DE APLICAÇÃO

Questão 149 - ☞

A figura mostra um aro circular de centro O localizado num plano vertical. Em seu interior, foram fixados três arames AB , AC e BC com mostra a figura. Uma pequena continha perfurada é abandonada do repouso do ponto A e desce sem atrito ao longo do arame AB , atingindo o ponto B num tempo t_{AB} . A mesma continha, quando desce o trecho AC , a partir do repouso, atinge o ponto C num tempo t_{AC} . Quando abandonada em C , essa continha desce ao longo do arame CB , sem atrito, atingindo o ponto B após um tempo t_{CB} . Se a gravidade local vale g , determine a relação entre os tempos t_{AB} , t_{AC} e t_{CB} .



Questão 149



Questão 150

Questão 150 - ☞ - Descendo em tempo mínimo

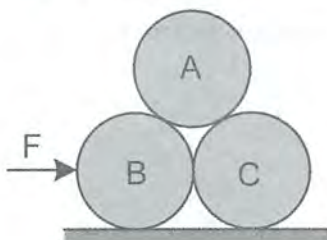
A figura mostra uma rampa de comprimento variável cuja extremidade A é fixa ao solo enquanto sua extremidade superior pode ser encaixada em qualquer ponto B ao longo da parede vertical, de forma que a projeção horizontal da rampa tem comprimento constante L . Para qual inclinação α dessa rampa, um corpo, abandonado do repouso do ponto B , descerá completamente essa rampa AB num tempo mínimo? A gravidade local vale g e todos os atritos são desprezíveis.

Questão 151 - ☞ - Erguendo uma pedra em tempo mínimo

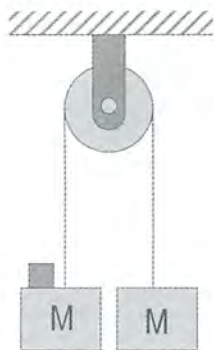
Deseja-se suspender uma pedra de massa m desde o solo até uma altura H . Para isso, amarra-se a pedra a uma corda de massa desprezível e puxa-se verticalmente pela extremidade livre. Sabendo-se que a corda suporta uma tração máxima T sem se partir, determine o tempo mínimo que será gasto para suspender essa pedra, de forma que ela deve atinja a altura final H em repouso. Considere g a gravidade local.

Questão 152 - ⚙ - Empurrando os três cilindros

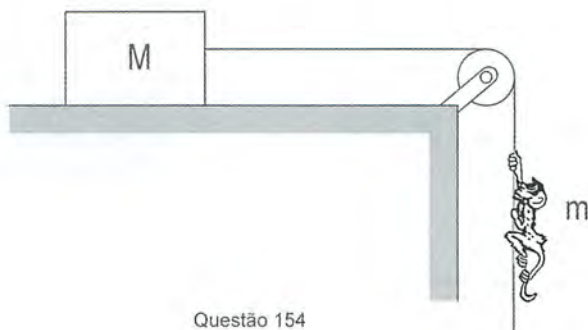
Três cilindros idênticos são arranjados formando um triângulo equilátero como mostra a figura, com os dois cilindros inferiores apoiados no solo. Todos os atritos são desprezíveis. Uma força horizontal constante é aplicada exatamente na direção do centro do cilindro B. Para qual intervalo de valores da aceleração desse sistema os cilindros permanecem em contato entre si?

**Questão 153 - ⚙ - (ITA 96)**

Duas caixas de mesma massa M estão inicialmente em equilíbrio conectadas entre si por polia e fio ideais, num local onde a aceleração da gravidade vale g . Um bloquinho de massa m é suavemente colocado sobre um dos blocos, como mostra a figura. Com que força esse bloquinho pressionará a caixa sobre a qual foi colocado?



Questão 153



Questão 154

Questão 154 - ⚙

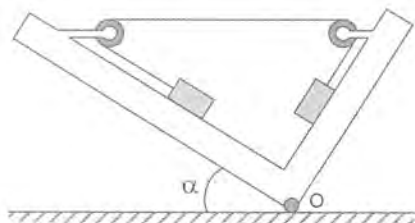
Um macaco de massa m está agarrado a uma corda que passa por uma roldana fixa. A outra extremidade da corda está amarrada a uma caixa de massa M que repousa sobre uma superfície horizontal lisa. A gravidade local vale g . Determine a aceleração dos corpos em relação à Terra nos seguintes casos:

- o macaco permanece imóvel em relação à corda;
- o macaco tem aceleração b em relação à corda, para baixo; e
- o macaco tem aceleração b em relação à corda, para cima.

Questão 155 - ⚙ - Inclinação para aceleração máxima

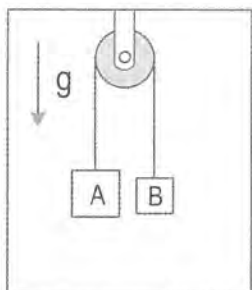
A figura mostra duas rampas soldadas em L de forma a se manterem sempre perpendiculares entre si. Usando duas polias ideais, monta-se o sistema da figura composto por dois blocos de mesma massa igual a m conectados por um fio ideal. O conjunto encontra-se articulado em O, podendo girar em torno daquele ponto como mostra a figura. Determine:

- a inclinação α a fim de que a aceleração adquirida pelos corpos seja máxima;
- a tração no fio nas condições do item a.

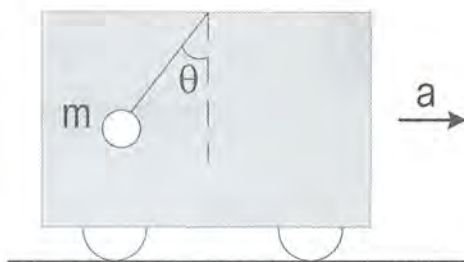
**Questão 156 - ⚙**

O sistema da figura se encontra no interior de um elevador que move-se verticalmente com aceleração constante de módulo a . A gravidade local vale g ; todos os atritos são desprezíveis. Admitindo $M_A > M_B$, determine:

- a aceleração das caixas em relação ao elevador;
- a aceleração de cada caixa em relação à Terra;
- a tração T no fio ideal.



Questão 156



Questão 157

Questão 157 - ⚙ (Não deixe de ler a resolução comentada dessa questão)

[157 a 161]

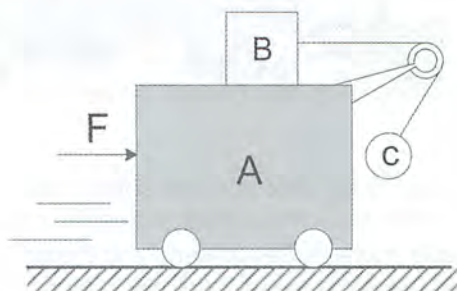
Um vagão move-se sobre trilhos retos e horizontais, com aceleração escalar constante numa região em que $g = 10 \text{ m/s}^2$. Preso ao teto do vagão, há um pêndulo simples que se mantém em repouso em relação ao vagão, formando ângulo de 37° com a vertical. Sabendo que a massa da partícula presa ao fio é $m = 4 \text{ kg}$ e que os atritos são desprezíveis ($\text{sen}37^\circ = 0,60$ e $\text{cos}37^\circ = 0,80$) pergunta-se:

- O vagão está se movendo para a direita ou esquerda ?
- Qual o módulo da aceleração do vagão ?
- Qual o módulo da tração no fio ?

Questão 158 - Ⓞ

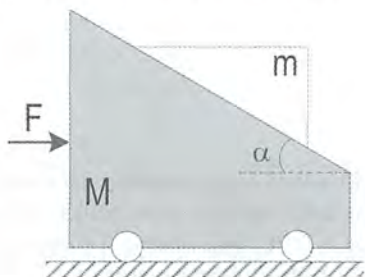
[157 a 161]

No sistema representado na figura, os blocos A, B e C têm massas, respectivamente iguais, a 44 kg, 10 kg e 6 kg. Uma força F é aplicada ao bloco A, de modo que o conjunto todo se move em relação ao solo, mas os blocos B e C permanecem em repouso, em relação a A. Sabendo que não há contato entre os blocos A e C e que os atritos são desprezíveis, determine o módulo da aceleração do conjunto em relação ao solo, bem como da força F .

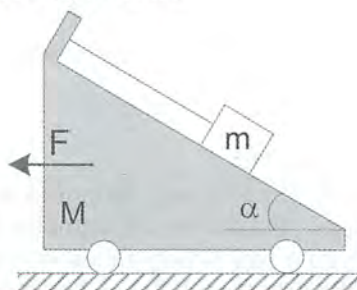
**Questão 159 - ☾ (ITA)**

[157 a 161]

Um prisma de massa m encontra-se apoiado sobre a superfície de inclinação α de um carrinho de massa M que se move sobre um solo horizontal. Determine a força F com que se deve empurrar o carrinho a fim de que o sistema se mova sem que o prisma escorregue em relação ao carrinho. A gravidade local vale g e todos os atritos são desprezíveis.



Questão 159



Questão 160

Questão 160 - Ⓞ☾

[157 a 161]

No sistema mostrado na figura, a gravidade local vale g , o fio é ideal e todos os atritos são desprezíveis. Determine:

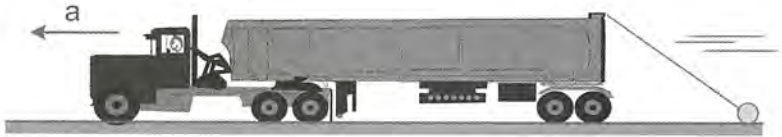
- com que força F se deve puxar o carrinho de massa M de forma que o bloco de massa m fique na iminência de perder o contato com a superfície de inclinação α ;
- a tração no fio, nas condições do item a.

Questão 161 - ♀

[157 a 161]

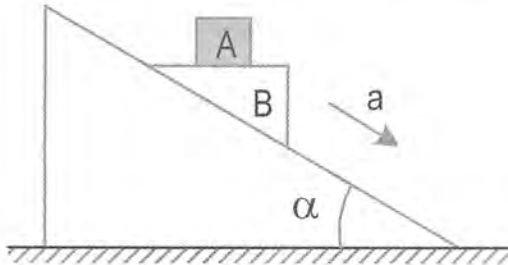
A figura mostra um caminhão de massa M que move-se em trajetória retilínea. Um pêndulo de massa m e comprimento L pende de sua traseira, amarrado a um ponto de suspensão, a uma altura h em relação ao solo. Se a gravidade local vale g , o prof. Renato Brito pede para você determinar :

- a partir de qual valor de aceleração do caminhão, o pêndulo perderá contato com o solo; e
- a tração no fio, nessa situação.

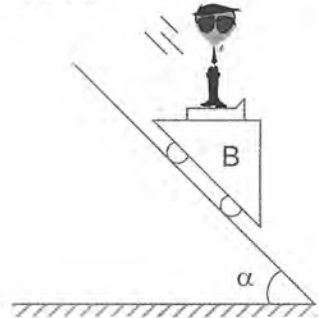
**Questão 162 - ♀**

[162 a 165]

Um bloco A, de massa 10 kg, está apoiado sobre a face horizontal plana de um prisma B, que desce por uma rampa sem atrito, como mostra a figura, sem que A escorregue sobre B. Sendo $\sin\alpha = 0,6$ e $\cos\alpha = 0,8$, determine a força normal e a força de atrito exercidas sobre o bloco A.



Questão 162



Questão 163

Questão 163

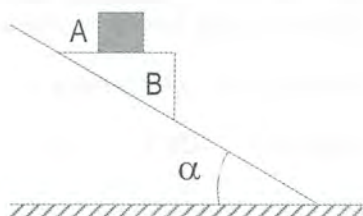
[162 a 165]

O prof. Daniel Leite, de massa $m = 50$ kg, está sobre uma balança de molas, a qual está fixa a um carrinho B, que desce uma rampa sem atrito, como mostra a figura. São dados: $g = 10\text{m/s}^2$ e $\sin\alpha = 0,20$. Determine a marcação da balança, supondo que seu mostrador esteja calibrado em newtons.

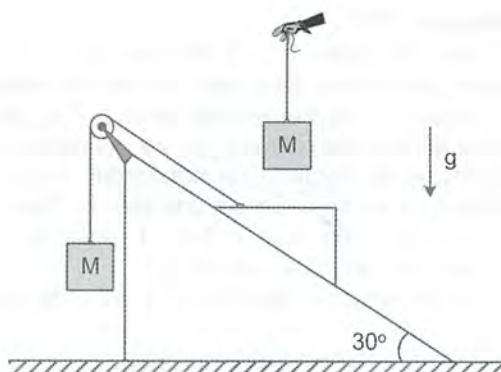
Questão 164 - ♀

[162 a 165]

A figura mostra um bloco A sobre a superfície horizontal de um prisma B que, por sua vez, encontra-se apoiado sobre uma rampa de inclinação α com a horizontal. Se o sistema é abandonado do repouso, qual a direção, o sentido e o valor da aceleração adquirida pelo bloco A? A gravidade local vale g e todos os atritos são desprezíveis.



Questão 164



Questão 165

Questão 165 - ♀

[162 a 165]

A figura mostra uma caixa de massa M amarrada a um fio que passa por uma polia e se conecta a um prisma triangular. Este prisma se encontra apoiado sobre um plano inclinado *liso*, que forma um ângulo de 30° com a horizontal. A gravidade local vale g . Estando o sistema inicialmente em equilíbrio, um pequeno bloco de massa M é colocado sobre a superfície horizontal do prisma, que passa a descer acelerado, sem que o bloco escorregue em relação ao prisma. O prof. Renato Brito pede que você determine:

- a normal N trocada entre o bloco e o prisma; e
- a força de atrito F_{at} que o prisma exerce sobre o bloco.

Para não ficar como eu, voando, não passe desse ponto sem antes ler o Tópico Especial 2 sobre Vínculos geométricos no Capítulo 7.

**Questão 166 - ♀**

[166 a 167]

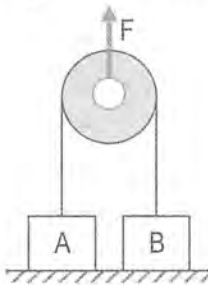
A figura mostra duas caixas, A e B, apoiadas sobre uma tábua fixa. O fio é perfeitamente flexível e não há atritos a considerar. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$. São dadas as massas $m_A = 40 \text{ kg}$ e $m_B = 24 \text{ kg}$. O prof. Renato Brito pede para você determinar as acelerações α (do corpo A) e β (do corpo B) e γ (da polia) em cada um dos seguintes casos: $F = 400 \text{ N}$, $F = 720 \text{ N}$ e $F = 1200 \text{ N}$.

Questão 167

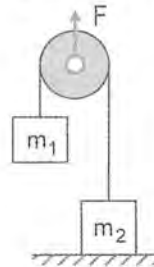
[166 a 167]

O eixo da roldana indicada na figura é impulsionado por uma força F de baixo para cima. Despreze o atrito do mancal e a massa do fio e da roldana. O corpo m_1 possui massa igual a 2 kg, e o outro corpo amarrado na outra extremidade da roldana possui massa $m_2 = 4$ kg. O corpo de massa m_2 está inicialmente apoiado na horizontal. Faça um diagrama das forças sobre a roldana e sobre cada um dos blocos. Determine:

- o maior valor que a força F pode ter, de modo que m_2 permaneça em repouso sobre a superfície;
- as acelerações dos blocos 1 e 2 e da polia, supondo $F = 100$ N.



Questão 166



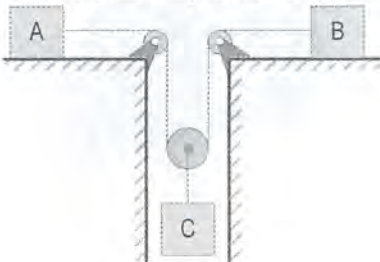
Questão 167

Questão 168 - ⚙

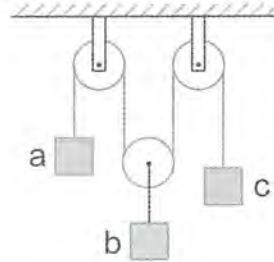
[168 a 178]

No sistema representado na figura, os fios e as polias são ideais, não há atrito e as massas dos blocos A, B e C são respectivamente iguais a 15kg, 10kg e 24kg. A aceleração da gravidade tem módulo 10 m/s^2 . Sendo a_A , a_B e a_C os módulos das acelerações dos blocos A, B e C, respectivamente, determine:

- os valores de a_A , a_B e a_C ;
- o módulo da tração no fio que está ligado ao bloco A.



Questão 168



Questão 169

Questão 169 - ⚙

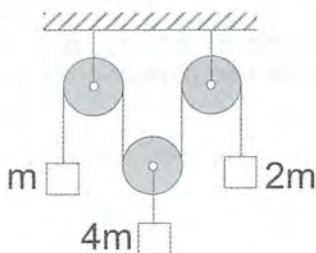
[168 a 178]

A figura mostra duas polias fixas ao teto e uma polia móvel, todas de massas desprezíveis. Se as massas das caixas **a**, **b** e **c** valem, respectivamente, 3 kg, 2 kg e 1 kg, o prof. Renato Brito pede para você determinar as acelerações de cada uma das caixas, indicando o sentido. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$ e despreze atritos.

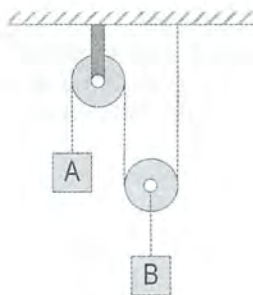
Questão 170 - C

[168 a 178]

No sistema abaixo, determine as acelerações de cada bloco em função da gravidade local g .



Questão 170



Questão 171

Questão 171

[168 a 178]

No sistema representado na figura, os fios e as polias são ideais. A aceleração da gravidade tem módulo 10 m/s^2 e as massas de A e B são respectivamente iguais a $3,0 \text{ kg}$ e $8,0 \text{ kg}$. Calcule:

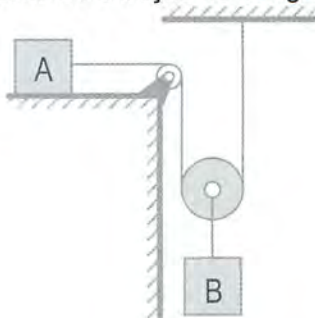
- as acelerações de A e B;
- a tração no fio ligado ao bloco A.

Questão 172

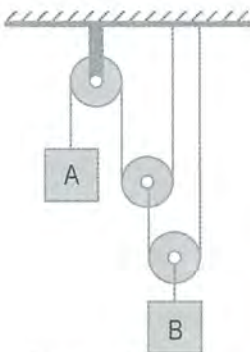
[168 a 178]

No sistema representado na figura, os fios e as polias são ideais e não há atrito entre o bloco A e a superfície de apoio. A aceleração da gravidade tem módulo 10 m/s^2 e as massas dos blocos A e B são respectivamente iguais a 2 kg e 12 kg .

- Determine as acelerações dos blocos A e B;
- Determine a tração no fio ligado ao bloco A.



Questão 172



Questão 173

Questão 173

[168 a 178]

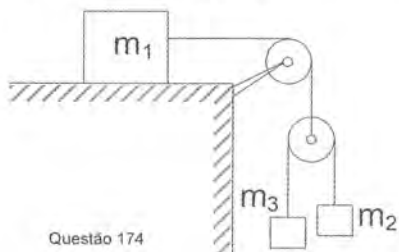
Considere o sistema representado na figura, onde os fios e as polias são ideais. A aceleração da gravidade tem módulo 10 m/s^2 e as massas de A e B são respectivamente iguais a 3 kg e 2 kg . Sendo a_A e a_B os módulos das acelerações dos blocos A e B, determine:

- a) os valores de a_A e a_B ;
 b) o módulo da tração no fio ligado ao bloco A.

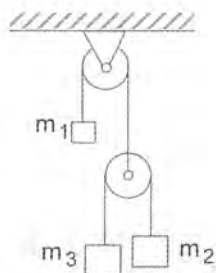
Questão 174 - Ⓞ

[166 a 178]

Na figura, os fios e polias são ideais e as massas m_1 , m_2 e m_3 valem respectivamente m , $2m$ e m . Se a gravidade local vale g , pede-se determinar a aceleração de cada caixa.



Questão 174



Questão 175

Questão 175 - Ⓞ

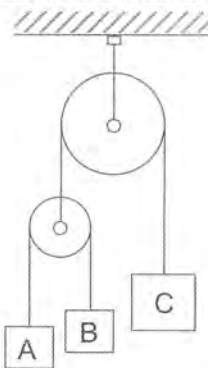
[168 a 178]

Na figura, os fios e polias são ideais e as massas m_1 , m_2 e m_3 valem respectivamente m , $2m$ e m . Se a gravidade local vale g , pede-se determinar a aceleração de cada caixa.

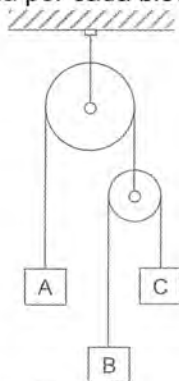
Questão 176 - Ⓒ

[168 a 178]

Na figura, todos os fios e polias são ideais. As massas das caixas A, B e C valem respectivamente M , $2M$ e $3M$ e a gravidade local vale g . Determine a direção, o sentido e o valor da aceleração adquirida por cada bloco.



Questão 176



Questão 177

Questão 177 - Ⓒ

[168 a 178]

Na figura, todos os fios e polias são ideais. As massas das caixas A, B e C valem respectivamente $4M$, $4M$ e $2M$ e a gravidade local vale g . Se o sistema é abandonado do repouso estando, A e C numa mesma horizontal:

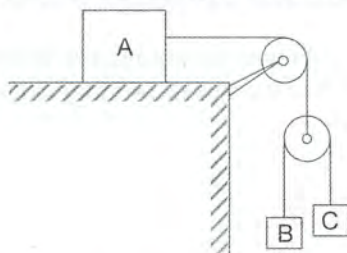
- a) Determine a direção, o sentido e o valor da aceleração adquirida por cada bloco;

- b) Mostre que os blocos A e C sempre estarão a uma mesma altura, após o sistema ser abandonado do repouso.

Questão 178 - C

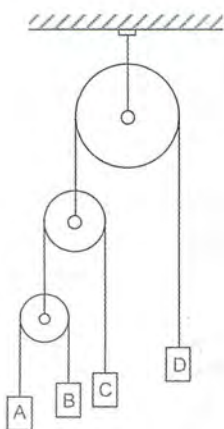
[168 a 178]

Na figura, todos os fios e polias são ideais. As massas das caixas A, B e C valem respectivamente $1M$, $3M$ e $2M$ e a gravidade local vale g . Determine a direção, o sentido e o valor da aceleração adquirida por cada bloco.

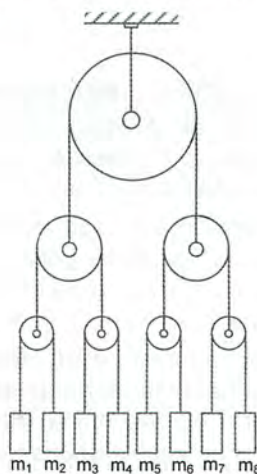
**Questão 179 - C**

[179, 180]

Na figura, todos os fios e polias são ideais. As massas das caixas A, B, C e D valem respectivamente m , $2m$, $3m$ e $6m$ e a gravidade local vale g . Determine a direção, o sentido e o valor da aceleração adquirida pelo bloco D.



Questão 179



Questão 180

Questão 180 - C

[179, 180]

Na figura, todos os fios e polias são ideais. Supondo conhecidas todas as massa $m_1, m_2, m_3, \dots, m_8$ de todos os blocos, bem como a gravidade local g , determine:

- a tração em cada um dos fios conectados diretamente aos blocos;
- a aceleração de cada um dos 8 blocos.

Questão 181 - ☉☾

[181, 182]

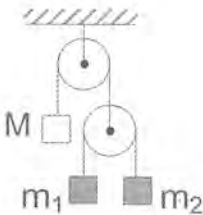
Na máquina de atwood da figura, qual deveria ser a massa M , em função de m_1 e m_2 , para que ela permanecesse em repouso? A gravidade local vale g .

Questão 182 - ☉☾ - Máquina de Atwood infinita

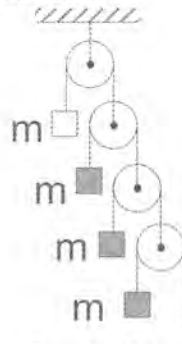
[181, 182]

O sistema da figura é composto por infinitas caixas de mesma massa m sucessivamente conectadas através de fios e polias ideais. Se a gravidade local vale g , utilizando a idéia da questão anterior (o conceito de inércia equivalente) determine:

- A) a aceleração da primeira caixa de cima (caixa branca);
 B) a tração no fio que prende a primeira polia de cima ao teto.



Questão 181

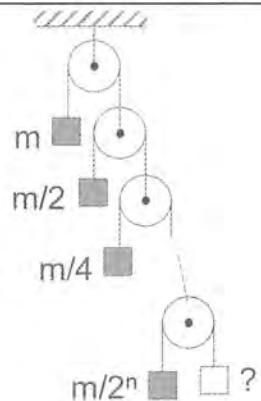


Questão 182

Questão 183 - ☾ - Máquina de Atwood em P.G.

A máquina de Atwood da figura consiste de um sistema de $n+1$ massas $m, m/2, m/4, m/8, \dots, m/2^n$ conectadas por fios e polias ideais.

- a) Pendure uma massa $m/2^n$ na extremidade livre da corda da última polia. Quais as acelerações $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$ adquiridas por cada massa do sistema?
- b) Agora, remova essa massa $m/2^n$ (que era arbitrariamente muito pequena, para um grande valor de n) que havia sido pendura no item a. Quais as acelerações $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$ adquiridas por cada massa do sistema nessas circunstâncias?

**Questão 184 - ☉☾ - Fileira de polias**

[184, 185]

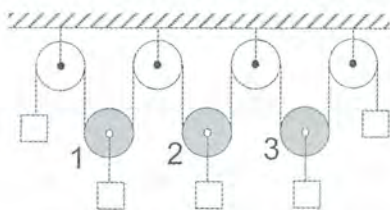
A figura mostra um sistema composto por 3 polias móveis (polias cinzas) e $3 + 2 = 5$ caixas idênticas de mesma massa m conectadas por fio e polias ideais. Se o sistema contivesse N polias móveis e, portanto, $N+2$ caixas de mesma massa m , qual seria a aceleração de cada caixa? A gravidade local vale g .

Questão 185 - ☉ - Carrossel de polias

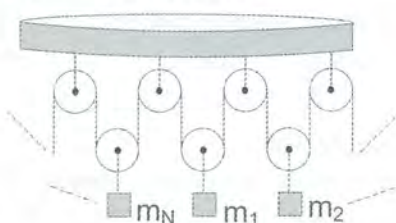
[184, 185]

A figura mostra um sistema composto por N polias fixas suspensas ao longo de uma grande argola circular horizontal. Um conjunto de N polias móveis está suspenso ao conjunto de polias fixas através de um único fio ideal que dá a volta em todo o percurso circular (looping). N caixas de massas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_N$ estão presas às N polias móveis suspensas pelo fio.

- Qual a aceleração a_i da i -ésima caixa de massa m_i ?
- Se apenas a massa de uma das caixas for nula ($m_k = 0$), qual aceleração ela irá adquirir? E as outras $N-1$ caixas?
- Se $N-1$ caixas forem idênticas e tiverem massa muito menor do que a caixa remanescente, que aceleração as caixas vão adquirir?



Questão 184

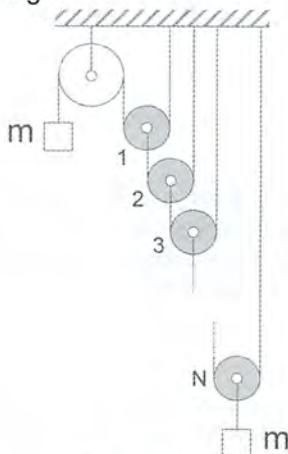


Questão 185

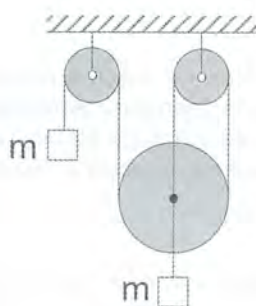
Questão 186 - ☉ - Problema das N polias móveis

[186 a 188]

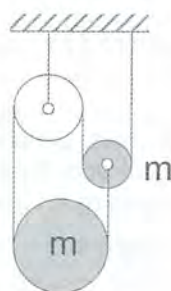
A figura mostra um sistema composto por 1 polia fixa e um conjunto de N polias móveis (cinzas) ideais. Determine as acelerações dos blocos em função de N e g .



Questão 186



Questão 187



Questão 188

Questão 187 - ☉

[186 a 188]

A figura mostra uma máquina de Atwood com duas massas iguais a m . O eixo da polia inferior tem duas extremidades de cordas presas a ele. Determine a aceleração de cada caixa. A gravidade local vale g .

Questão 188 - ☞

[186 a 188]

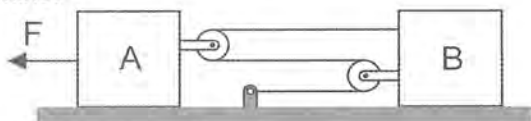
Na máquina de Atwood da figura, as duas polias inferiores (destacadas em cinza) têm massa m cada uma. O fio ideal escorrega ao redor das polias sem nenhum atrito (portanto, não você não precisa se preocupar com a inércia rotacional das polias). Se a gravidade local vale g , determine as acelerações das polias móveis (destacadas em cinza).

Questão 189 - ☞

[189, 192]

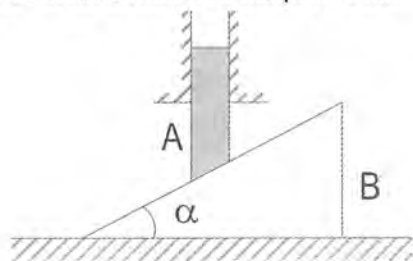
A figura mostra dois blocos A e B de massas $m_A = 2 \text{ kg}$ e $m_B = 6 \text{ kg}$ puxados por uma força de intensidade $F = 14 \text{ N}$ sobre um solo liso. O prof. Renato Brito pede que você determine:

- a) a aceleração de cada bloco;
b) a tração no cabo

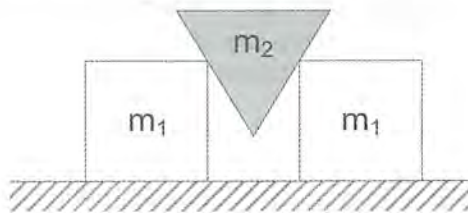
**Questão 190 - ☞**

[190, 193]

Determine a aceleração da barra A e da cunha B na figura abaixo, sabendo que a razão entre as massas m_B e m_A vale η , a gravidade local vale g e todos os atritos são desprezíveis.



Questão 190



Questão 191

Questão 191 - ☞

[191, 194]

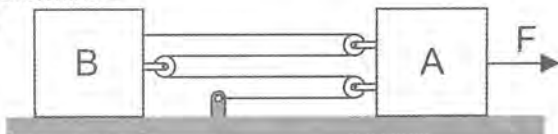
Sejam dois cubos idênticos de mesma massa $m_1 = 3 \text{ kg}$ e uma cunha de massa $m_2 = 2 \text{ kg}$ e seção triangular equilátera simetricamente posicionada entre eles. Desprezando-se todos os atritos, pede-se determinar a aceleração vertical adquirida pela cunha, quando o sistema for abandonado a partir do repouso ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

Questão 192 - ☞

[189, 192]

A figura mostra dois blocos A e B de massas $m_A = 8 \text{ kg}$ e $m_B = 6 \text{ kg}$, puxados por uma força de intensidade $F = 56 \text{ N}$ sobre um solo liso. O prof. Renato Brito pede que você determine:

- a) a aceleração de cada bloco;
b) a tração no cabo

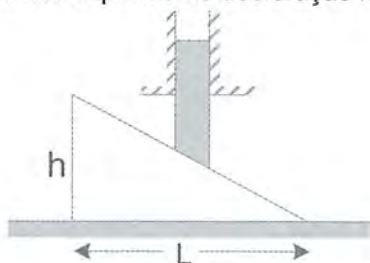


Questão 193 - C

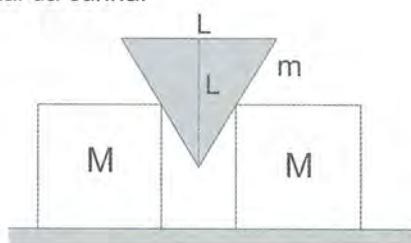
[190, 193]

Na figura abaixo, uma barra vertical de massa 1 kg encontra-se apoiada sobre uma cunha de massa 4 kg e dimensões $h = 60$ cm e comprimento $L = 30$ cm livre para se mover sobre um solo horizontal. Se a gravidade local vale $g = 10$ m/s² e todos os atritos são desprezíveis, determine:

- a) a aceleração vertical de descida da barra;
 b) a correspondente aceleração horizontal da cunha.



Questão 193



Questão 194

Questão 194 - C

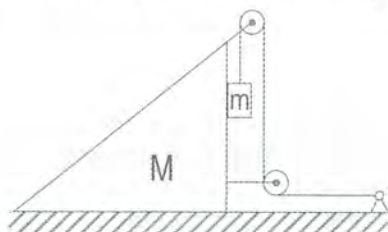
[191, 194]

Sejam dois blocos idênticos de mesma massa $M = 4$ kg e uma cunha de massa $m = 2$ kg e seção triangular isósceles simetricamente posicionada entre eles. A altura L do triângulo isósceles é congruente à sua base L . Desprezando-se todos os atritos, pede-se determinar a aceleração vertical adquirida pela cunha, quando o sistema for abandonado a partir do repouso ($g = 10$ m/s²).

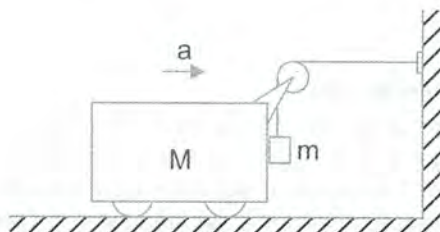
Questão 195 - M

[195 a 197]

Na figura, todas as polias e fios são ideais, bem como todos os atritos são desprezíveis. Abandonando-se o sistema do repouso, pede-se determinar a aceleração da cunha de massa M em relação à Terra. A massa do bloco vale m e a gravidade local vale g .



Questão 195



Questão 196

Questão 196

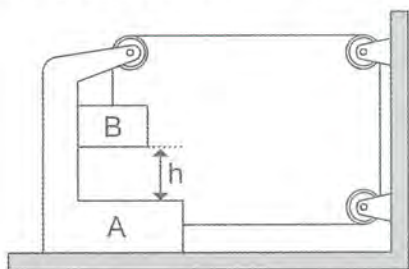
[195 a 197]

A figura mostra um bloco de massa m pendurado verticalmente por um fio ideal e encostado em um carrinho de massa M , que pode deslizar sem atrito num solo horizontal. O prof. Renato Brito pede para você determinar a aceleração a adquirida pelo carrinho, quando o sistema é abandonado a partir do repouso.

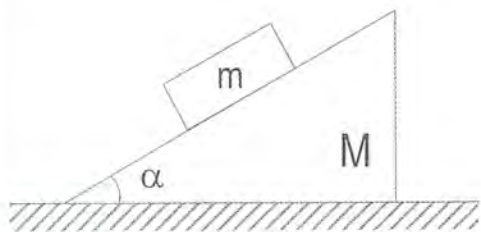
Questão 197 -

[195 a 197]

No sistema representado na figura, não há atritos, o fio é inextensível e tem peso desprezível. No local, a intensidade da aceleração da gravidade vale g . Ignorando a influência do ar, calcule o intervalo de tempo que o corpo **B** (de massa m) leva para atingir a base do corpo **A** (de massa M), quando é abandonado de uma altura h em relação a **A**.



Questão 197

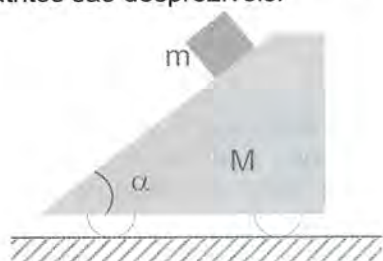


Questão 198

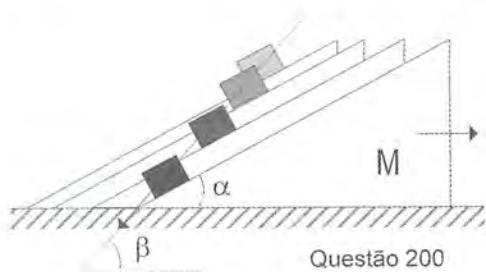
Questão 198 -

[198 a 200, 208]

A figura mostra uma cunha de massa M parada sobre uma superfície horizontal lisa. Determine a aceleração com que ela se moverá, quando um bloco de massa m for abandonado sobre a sua superfície inclinada em um ângulo α com a horizontal. Sabe-se que a gravidade local vale g e todos os atritos são desprezíveis.



Questão 199



Questão 200

Questão 199

[198 a 200]

Um bloco de massa m é abandonado em repouso sobre um carrinho de massa $M = 2m$. Se o sistema pode deslizar sem atrito, o prof. Renato Brito pede para você determinar a aceleração a adquirida pelo carrinho em função da aceleração da gravidade local g . Dado: $\alpha = 45^\circ$.

Questão 200 -

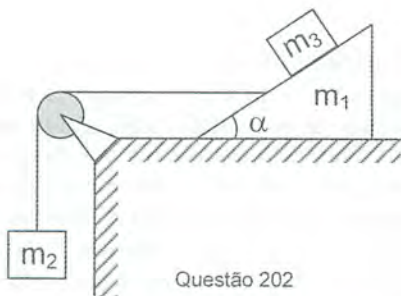
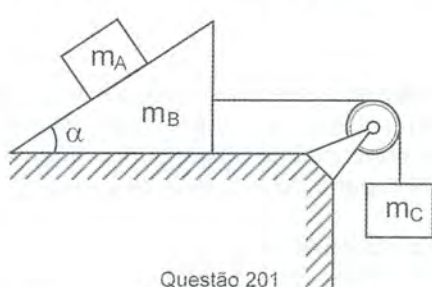
[198 a 200]

A figura mostra uma cunha de massa M e inclinação α inicialmente parada sobre o solo horizontal liso. Sabendo que, quando um bloco é abandonado sobre a superfície inclinada lisa da rampa, passa a descrever uma trajetória retilínea de inclinação β com a horizontal, pede-se determinar a massa do referido bloco.

Questão 201 - 6

[201 a 205]

Na figura, os blocos de massas $m_A = 4 \text{ kg}$, $m_B = 6 \text{ kg}$ e $m_C = 2 \text{ kg}$ encontram-se inicialmente em repouso. Desprezando eventuais atritos, o prof. Renato Brito pede para você determinar a aceleração adquirida pelos blocos A, B e C. Dado: $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $\alpha = 45^\circ$

**Questão 202 (IME)**

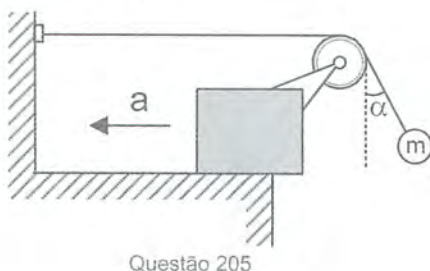
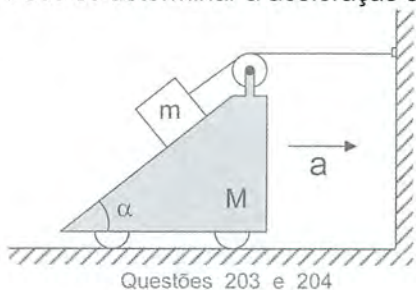
[201 a 205]

A figura mostra três blocos, que podem se mover sem atrito. Sendo $\alpha = 30^\circ$, determine a relação entre m_1 , m_2 e m_3 para que os blocos se movam, sem que m_3 escorregue em relação a m_1 .

Questão 203 - 6

[201 a 205]

Na figura, as massas m da caixa e M da cunha, assim como o ângulo α da rampa, são conhecidos. Todos os fios são ideais e os atritos são desprezíveis. Pede-se determinar a aceleração adquirida pela cunha.

**Questão 204**

[201 a 205]

Um bloco de massa m , conectado a uma parede através de um fio ideal, é abandonado em repouso sobre um carrinho de massa $M = 2m$. Se o sistema pode deslizar sem atrito, o prof. Renato Brito pede para você determinar a aceleração a adquirida pelo sistema, em função de g .

Dado: $\sin \alpha = 0,6$ $\cos \alpha = 0,8$

Questão 205 - 9

[201 a 205]

Na figura, após o pêndulo ser abandonado do repouso, o bloco acelera para a esquerda de forma que a inclinação α do pêndulo com a vertical permanece constante. O prof. Renato Brito pede que você determine a massa do bloco e a sua aceleração, em função da massa da bola m , da gravidade local g e do ângulo α . Todos os atritos são desprezíveis; fios e polias são ideais.

Questão 206 - 9

[206, 207]

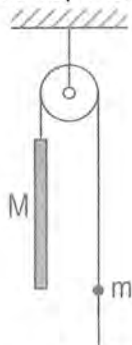
No sistema da figura, a bolinha tem uma pequena abertura que permite o fio passar através dela com algum atrito. No instante inicial, a bolinha estava posicionada exatamente no mesmo nível horizontal da extremidade inferior da barra. Quando o sistema é abandonado a partir do repouso, os corpos se movem com aceleração constante.

Determine a intensidade da força de atrito cinética trocada entre o fio e a bolinha, sabendo que, t segundos após o início do movimento, a bolinha atinge o mesmo nível horizontal da extremidade superior da barra. O comprimento da barra vale L , a gravidade local vale g e as massas da barra e da bolinha valem, respectivamente, M e m , com $M > m$.

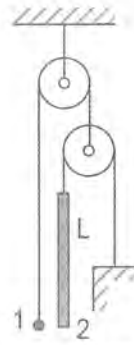
Questão 207 - 9

[206, 207]

No arranjo mostrado na figura, a massa da bolinha 1 é η vezes maior ($\eta < 2$) que a da barra 2, cujo comprimento vale L . As massas dos fios e polias são desprezíveis, bem como os atritos. A bolinha se encontra fixa à extremidade do fio, inicialmente posicionada no mesmo nível horizontal da extremidade inferior da barra. Se o sistema é abandonado do repouso no instante $t = 0$, determine o instante em que a bolinha passará pelo mesmo nível horizontal da extremidade superior da barra.



Questão 206

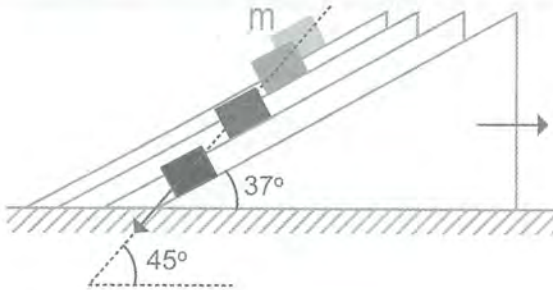


Questão 207

Questão 208 - C

A figura mostra uma cunha de inclinação 37° inicialmente parada sobre o solo horizontal liso. Sabendo que, quando um bloco de massa m é abandonado sobre a superfície inclinada lisa da rampa, passa a descrever

uma trajetória retilínea de inclinação 45° com a horizontal, pede-se determinar a massa da cunha. ($\sin 37^\circ = 0,6$, $\cos 37^\circ = 0,8$)

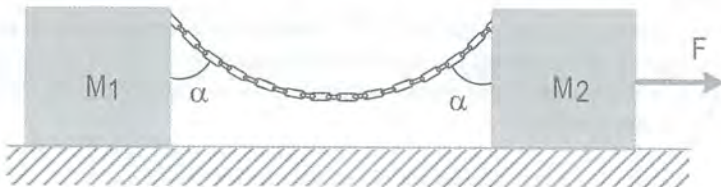


Questão 209 - ⚙

[209, 210]

A figura mostra um sistema formado por dois blocos de massas $M_1 = 8 \text{ kg}$ e $M_2 = 8 \text{ kg}$, conectados entre si por uma corrente de massa $m = 4 \text{ kg}$, sendo rebocado por uma força F constante de intensidade 30 N . Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, o prof. Renato Brito pede para você determinar:

- a tração em cada extremidade da corrente; e
- a tração no ponto médio dessa corrente, considerando que a mesma se distribui simetricamente em relação à mediatriz de suas extremidades.

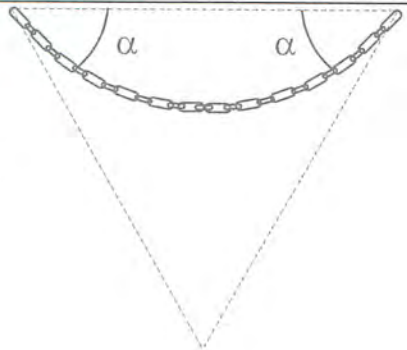


Questão 210

[209, 210]

Uma corrente flexível, suspensa num plano vertical, tem suas extremidades formando um ângulo α com a horizontal. Se a tração em cada extremidade vale T , o prof. Renato Brito pede que você determine:

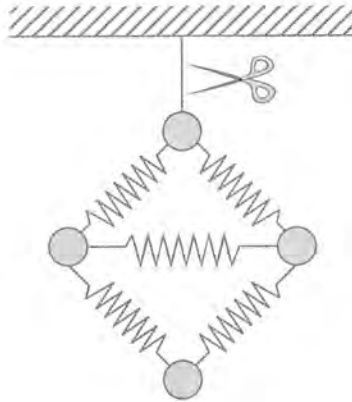
- o peso da corda;
- a tração em seu ponto médio.



Questão 211 - 6

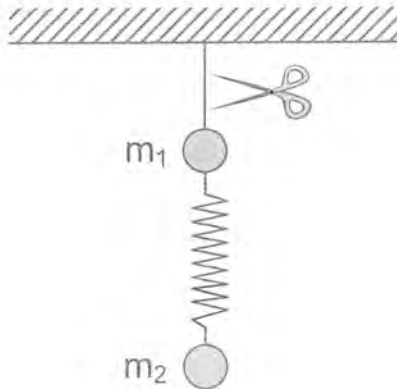
[211, 212]

Um sistema composto por quatro bolas iguais, conectadas entre si por cinco molas ideais idênticas, está pendurado ao teto como mostra. O prof. Renato Brito pede que você determine as acelerações de cada bola, logo após o fio ser cortado.

**Questão 212 - C**

[211, 212]

Um sistema, composto por duas bolas de massas m_1 e m_2 conectadas entre si através de uma mola ideal, está pendurado ao teto como mostra a figura. O prof. Renato Brito pede que você determine as acelerações de cada bola, logo após o fio ser cortado.



PROBLEMAS QUE ENVOLVEM ATRITO

Questão 213 - ☞ Não deixe de ler o comentário dessa questão) [213 a 215]

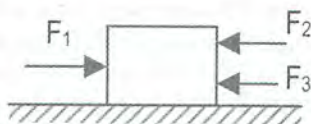
A caixa da figura tem peso $P = 20\text{N}$, está submetida a duas forças $F_1 = 50\text{N}$ e $F_2 = 20\text{N}$ e encontra-se em equilíbrio estático.

a) Determine a direção, sentido e intensidade da força de atrito F_{at} .



b) O que se pode afirmar sobre o valor do coeficiente de atrito estático μ_E entre essa caixa e a superfície horizontal ?

c) Se uma força $F_3 = 15\text{N}$ for acrescentada ao sistema como na figura abaixo, a caixa ainda ficará em equilíbrio estático ? Qual será a nova intensidade da F_{at} ?



d) Se a intensidade da força F_3 fosse 80N , na figura acima, a caixa ainda ficaria em equilíbrio estático ?

e) Ainda na figura acima, qual o maior valor possível da força F_3 para o qual se pode garantir que a caixa certamente não escorregará ?

Questão 214 - ☞

[213 a 215]

A figura A mostra uma caixa A, de massa $3m$, apoiada sobre uma superfície áspera e conectada a uma caixa B, de massa $2m$, através de polia e fio ideais. O sistema encontra-se em equilíbrio estático.

a) É possível determinar o coeficiente de atrito estático entre a caixa A e o plano horizontal, nessas condições ? Justifique.

b) Determine a maior massa possível para a caixa C que foi adicionada ao sistema (figura B) para a qual ainda se pode garantir que as caixas permanecerão em equilíbrio estático.

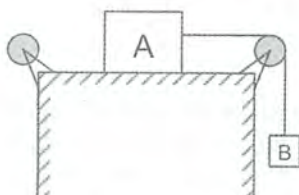


Figura A

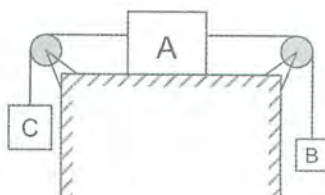


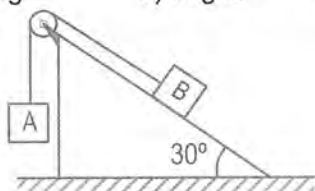
figura B

Questão 215 - ☞

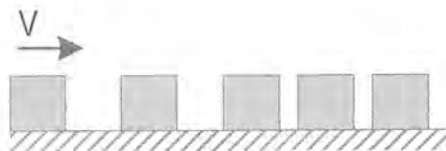
[213 a 215]

As caixas A e B da figura abaixo têm massas m e $2m$, respectivamente. Se o sistema encontra-se em equilíbrio estático e a gravidade vale g , então a intensidade da força de atrito que age na caixa B vale :

- a) $m.g$ b) $m.g/2$ c) $m.g/3$ d) $m.g/4$ e) zero



Questão 215



Questão 216

Questão 216 - ☞

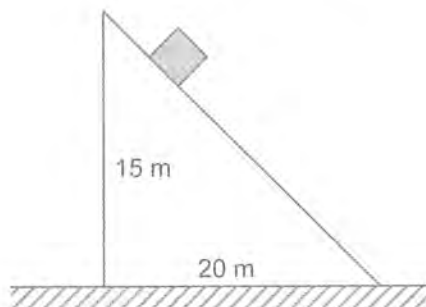
Uma caixa de massa M foi lançada num solo horizontal áspero com velocidade inicial V_0 e pára de se mover após um tempo T , tendo percorrido uma distância D . Se a caixa fosse lançada com uma velocidade duas vezes maior :

- a) a caixa iria para num tempo $2T$, após percorrer uma distância $2D$;
 b) a caixa iria para num tempo T , após percorrer uma distância $2D$;
 c) a caixa iria para num tempo $2T$, após percorrer uma distância D ;
 d) a caixa iria para num tempo $2T$, após percorrer uma distância $4D$;
 e) a caixa iria para num tempo $4T$, após percorrer uma distância $2D$.

Questão 217 - ☞

[217 a 221]

A caixa da figura foi abandonada no ponto mais alto do plano inclinado e leva 5 s para escorregar até lá embaixo. Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine o coeficiente de atrito cinético entre a caixa e o plano inclinado.

**Questão 218** - ☞ - (UECE)

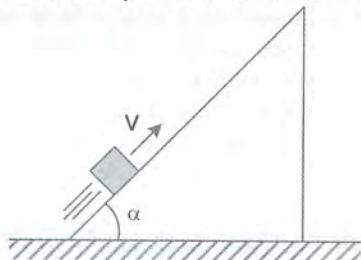
[217 a 221]

Um pequeno bloco desliza sem atrito ao longo de um plano inclinado de 45° com a horizontal. A fim de que a aceleração de descida se reduza à metade, é necessário que haja atrito entre o plano e o bloco. Determine o valor do coeficiente de atrito para que isto ocorra.

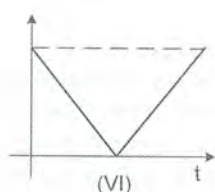
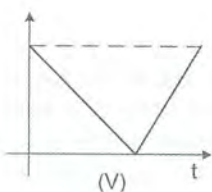
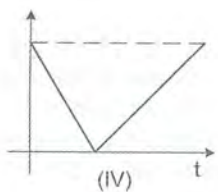
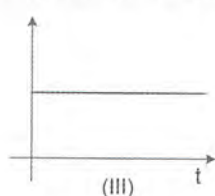
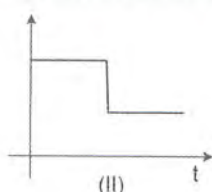
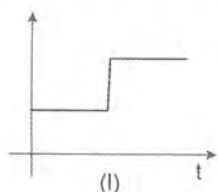
Questão 219 -

[217 a 221]

Um pequeno bloco foi lançado ladeira acima com velocidade inicial v ao longo de uma rampa inclinada áspera como mostra a figura. Responda:



- a) Qual dos gráficos melhor representa o módulo da aceleração do bloco durante seu movimento de sobe e desce ao longo dessa rampa ?
 b) Qual dos gráficos melhor representa o módulo da velocidade $|v|$ do bloco durante seu movimento de sobe e desce ao longo dessa rampa ?

**Questão 220 -**

[217 a 221]

Na questão anterior, se a rampa fosse lisa, o tempo de subida do bloco seria igual ao do tempo de descida. Entretanto, a presença do atrito adiciona uma assimetria ao sistema.

- a) Na presença do atrito, quem é maior: o tempo de subida ou o de descida ?
 b) Determine a razão $t_{\text{desc}} / t_{\text{sub}}$ entre esses tempos em função da inclinação α da rampa e do coeficiente de atrito cinético μ .

Questão 221 -

[217 a 221]

Um pequeno bloco de massa m é lançada ladeira acima ao longo de uma rampa que forma um ângulo α com a horizontal. O prof. Renato Brito pede para você determinar o coeficiente de atrito μ , sabendo que o tempo de subida do bloco é n vezes menor do que o seu tempo de descida.

Questão 222 - Ⓢ

[222, 223]

Dois blocos A e B foram abandonados em repouso, conectados entre si através de um fio ideal e uma polia, como mostra a figura. Analise se haverá escorregamento ou não e determine a intensidade da tração T no fio ideal, conhecendo a massa de cada bloco e os coeficientes de atrito. Admita $g = 10 \text{ m/s}^2$. Considere os dois casos a seguir:

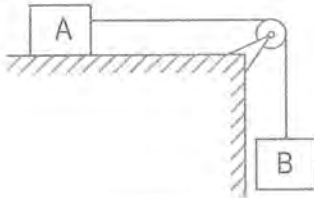
- a) $m_A = 8 \text{ kg}$, $m_B = 2 \text{ kg}$, $\mu_E = 0,5$ e $\mu_C = 0,4$
 b) $m_A = 2 \text{ kg}$, $m_B = 8 \text{ kg}$, $\mu_E = 0,8$ e $\mu_C = 0,4$

Questão 223 - Ⓢ

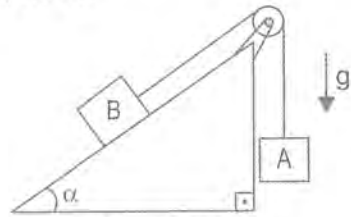
[222, 223]

Na situação esquematizada na figura, os blocos A e B têm massas iguais a 6 kg e 4 kg respectivamente, os coeficientes de atrito valem $\mu_E = 0,7$ e $\mu_C = 0,5$ e a inclinação da rampa vale $\alpha = 37^\circ$ ($\text{sen}37^\circ = 0,6$ $\text{cos}37^\circ = 0,8$). Quando o sistema é abandonado do repouso, determine:

- a) se o bloco irá escorregar ou não;
 b) a intensidade da força de atrito e da tração no fio.



Questão 222

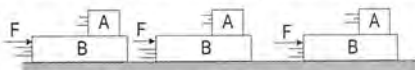


Questão 223

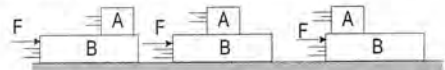
Questão 224 - Ⓢ

[224 à 229]

Um bloco A, de massa 4 kg está sobre um bloco B de massa 8 kg , que repousa sobre uma superfície plana horizontal sem atrito. O coeficiente de atrito estático entre o bloco A e o bloco B é $\mu_E = 0,20$. Calcule a máxima intensidade de uma força horizontal F que pode ser aplicada sobre o bloco B, de modo que o conjunto se mova sem que A escorregue sobre B.



caso 1 - se F não for muito grande, as caixas se moverão com a mesma aceleração em relação à Terra ($a_A = a_B$)



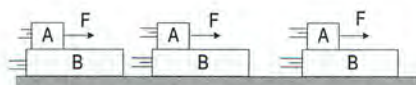
caso 2 - se F for muito grande, a caixa B acelerará mais do que a caixa A, e ultrapassará a caixa A ($a_B > a_A$).

Questão 225 - Ⓢ

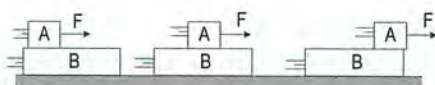
[224 a 229]

Um bloco A, de massa 4 kg está sobre um bloco B de massa 8 kg , que repousa sobre uma superfície plana horizontal sem atrito. Os coeficientes de atrito estático entre o bloco A e o bloco B valem $\mu_C = 0,16$ e $\mu_E = 0,20$. Uma força horizontal de módulo $F = 14,4 \text{ N}$ é aplicada sobre o bloco A como mostra a figura.

- a) Determine as acelerações dos corpos em relação à Terra;
 b) Se o bloco B tem um comprimento $L = 2,4 \text{ m}$, determine quanto tempo levará para que o bloco A caia de cima do B.



caso 3 - se F não for muito grande, as caixas se moverão com a mesma aceleração em relação à Terra ($a_A = a_B$)



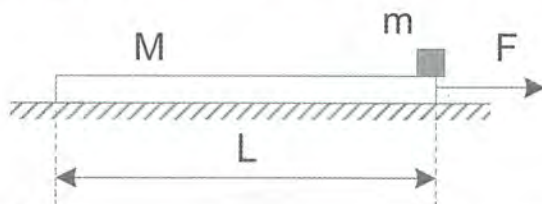
caso 4 - se F for muito grande, a caixa A acelerará mais do que a caixa B, e ultrapassará a caixa B ($a_A > a_B$).

Questão 226 - C (Olimpíada Brasileira de Física)

[224 a 229]

Um bloquinho de massa igual a $m = 1$ kg repousa sobre a extremidade de uma prancha de comprimento $L = 1$ m e massa $M = 2$ kg, como mostra a figura abaixo. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre o bloquinho e a prancha valem $\mu_E = 0,6$ e $\mu_C = 0,5$. Se a gravidade local vale $g = 10$ m/s², determine:

- a maior valor da força horizontal F com que se pode puxar a prancha, sem que o bloquinho escorregue em relação a ela.
- o tempo que o bloquinho levará para cair da extremidade oposta da prancha, caso seja aplicada à rampa uma força $F = 19$ N.

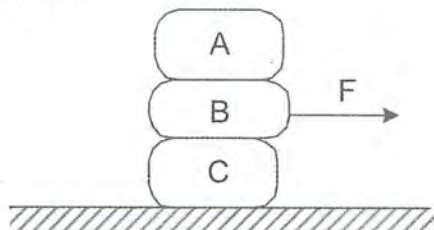


Questão 227 - C

[224 a 229]

Três blocos A, B e C, de massas respectivamente $2M$, $4M$ e $8M$, encontram-se empilhados e apoiados em um solo horizontal áspero, num local onde a gravidade vale g . Sabendo que os coeficientes de atrito entre os pares de blocos valem $\mu_{AB} = 0,1$, $\mu_{BC} = 0,3$ e $\mu_{c-ch\tilde{a}o} = 0,1$, a máxima força F horizontal aplicada ao bloco B, que ainda mantém todos os corpos em repouso entre si e em relação ao chão, vale:

- $1,2.M.g$
- $1,4.M.g$
- $1,6.M.g$
- $1,8.M.g$
- $2,0.M.g$



Questão 228 - C

[224 a 229]

As caixas da figura têm massas $m_A = 5$ kg, $m_B = 10$ kg e $m_C = 30$ kg. A mesa é lisa e os coeficientes de atrito entre os blocos A e B valem $\mu_E = 0,6$ e $\mu_C = 0,4$. Se o sistema for abandonado a partir do repouso, determine:

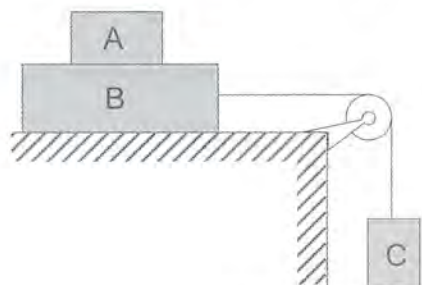
- a tração no fio durante o movimento dos corpos;
- a força que a caixa B exerce na caixa A.

Questão 229 - ⚙️

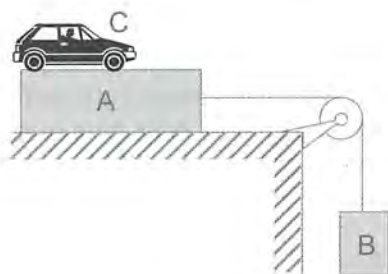
[224 a 229]

A figura mostra dois blocos A e B e um carro C, todos com a mesma massa conectados por fio e polia ideais. Existe atrito em todas as superfícies. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre o bloco A e a superfície horizontal valem respectivamente μ_E e μ_C . Determine:

- a aceleração máxima que o carro pode desenvolver de forma que o bloco A ainda permaneça em repouso.
- a aceleração que o carro deverá desenvolver a fim de que o bloco B suba com velocidade constante;



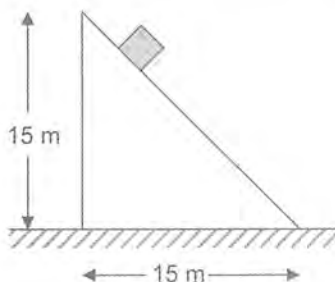
Questão 228



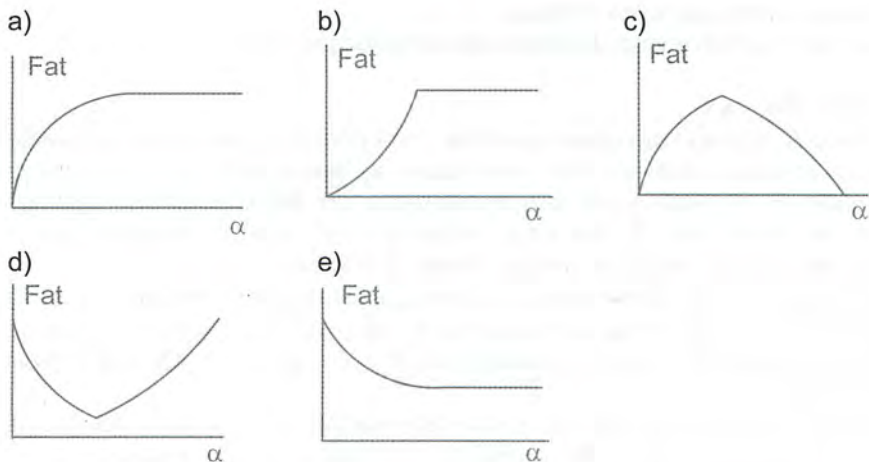
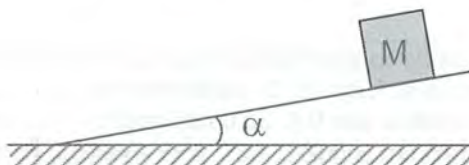
Questão 229

Questão 230 - ⚙️

Um bloco de massa $m = 2 \text{ kg}$ foi abandonado sobre um prisma de seção reta triangular, de massa $M = 4 \text{ kg}$, como mostra a figura. O prof. Renato Brito pede para você determinar qual o menor coeficiente de atrito μ permitido entre o solo e o prisma, a fim de que este não se mova para a esquerda durante a descida do bloco. Desconsidere qualquer atrito entre o bloco e o prisma.

**Questão 231** - ⚙️

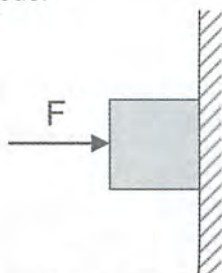
A figura mostra uma caixa em repouso sobre uma rampa áspera. Se o ângulo α que a rampa forma com a horizontal for gradualmente aumentado no intervalo $(0, 90^\circ)$, o prof. Renato Brito pede para você determinar qual dos gráficos a seguir melhor descrevem o comportamento da força de atrito que age sobre a caixa, em função do ângulo α :

**Questão 232 - ☪**

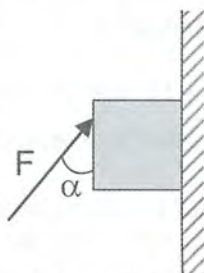
[232 a 234]

Um bloco de massa m é mantido em equilíbrio estático, encostado em uma parede vertical, aplicando-se a ele uma força horizontal F , como mostra a figura. Adote $g = 10\text{m/s}^2$.

- a) Admitindo $\mu_E = 0,40$, determine os valores possíveis para a intensidade de F de forma que o bloco de massa $m = 80\text{ kg}$ permaneça em equilíbrio estático.
- b) Admitindo $F = 400\text{N}$, determine os valores possíveis para o coeficiente de atrito estático μ_E entre o bloco e a parede de forma que o bloco de massa $m = 80\text{ kg}$ permaneça em equilíbrio estático.
- c) Admitindo $F = 400\text{N}$ e $\mu_E = 0,40$, determine os valores possíveis para a massa m de forma que o bloco permaneça em equilíbrio estático encostado na parede.



Questão 232



Questão 233

Questão 233 - C

[232 a 234]

Na figura a seguir, está representado um bloco de 2,0 kg sendo pressionado contra a parede por uma força F . O coeficiente de atrito estático entre esses corpos vale 0,5 e o cinético vale 0,4. Se uma força $F = 50$ N for aplicada no bloco numa direção que forma um ângulo $\alpha = 37^\circ$ com a vertical, determine:

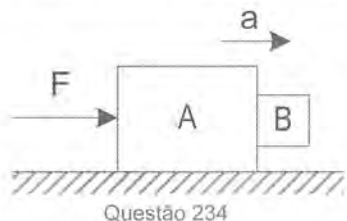
- se o bloco escorrega ou não;
- a força de atrito que agirá no bloco;
- a direção, sentido e valor da aceleração adquirida pelo bloco.

Questão 234 - C

[232 a 234]

Um bloco A, apoiado em uma superfície plana horizontal sem atrito, move-se em movimento acelerado de aceleração a , empurrado por uma força horizontal F . O bloco A por sua vez empurra um bloco B, como mostra a figura, de modo que B não caia. Adote $g = 10$ m/s² e suponha que o coeficiente de atrito estático entre os blocos A e B seja igual a μ .

- supondo $\mu = 0,25$, determine os valores possíveis para o módulo de a .
- supondo $\mu = 0,25$ e que as massas de A e B sejam $m_A = 6$ kg e $m_B = 4$ kg, calcule a faixa de valores possíveis para F a fim de que B não escorregue para baixo.
- supondo que a caixa se move com aceleração $a = 25$ m/s², calcule os valores possíveis de μ a fim de que B não escorregue para baixo.



Questão 234



Questão 235 e 236

Questão 235 - C - Força mínima para escorregar

[235 a 239]

O caixote de massa M da figura se encontra apoiado sobre um plano horizontal áspero. O coeficiente de atrito entre o material da caixa e o plano vale μ . Se a gravidade local vale g , o prof. Renato Brito pede que você:

- Mostre que a menor força F necessária para mover essa caixa na direção

$$\text{horizontal vale } F = \frac{\mu \cdot M \cdot g}{\cos \alpha + \mu \cdot \text{sen} \alpha}.$$

- Usando uma trigonometria elementar, mostre que essa expressão para a

$$\text{força } F \text{ pode ser reescrita como } F = \frac{\mu \cdot M \cdot g}{\sqrt{1 + \mu^2} \cdot \cos(\alpha - \beta)}, \text{ com } \text{tg} \beta = \mu.$$

- Sendo μ , M e g constantes, $\text{tg} \beta$ também é constante e a expressão acima, portanto, é uma função exclusiva $F(\alpha)$ do ângulo α . Mostre que, ao se variar o ângulo α no intervalo $[0, \pi/2]$, a força F mínima para deslocar aquela caixa ocorrerá para $\alpha = \text{arctg} \mu$.

d) Mostre que, portanto, a força mínima necessária para deslocar o caixote

$$\text{vale } F = \frac{\mu \cdot M \cdot g}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Questão 236 - ⚡ - Força mínima para escorregar

[235 a 239]

A caixa de massa $M = 20 \text{ kg}$ da figura encontra-se apoiada sobre um plano horizontal áspero. O coeficiente de atrito entre a caixa e o plano vale $\mu = 0,75$ e a gravidade local vale $g = 10 \text{ m/s}^2$. Se o ângulo α pode ser ajustado convenientemente, determine a menor força F capaz de mover o caixote ao longo do plano

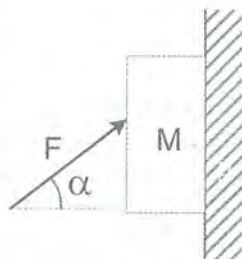
- a) 90 N b) 120 N c) 150 N d) 180 N e) 240 N

Questão 237 - ⚡ - Força mínima para não escorregar

[235 a 239]

Uma caixa de massa M é encostada numa parede vertical num local onde a gravidade vale g . O coeficiente de atrito entre a caixa e a parede vale μ . Você deseja impedir que essa caixa escorregue para baixo aplicando uma força F que forma um ângulo α com a horizontal ($-90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$), como mostra a figura.

- a) Para um dado ângulo α , qual o menor valor de F requerido ?
 b) Para qual valor de α será requerida uma força F mínima ? Qual o valor de F_{\min} , nesse caso ?
 c) Supondo $\mu = 1$, para qual faixa de valores do ângulo α no intervalo $-90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ será impossível manter o bloco em equilíbrio estático ?

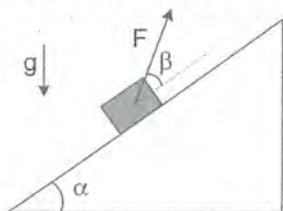


Questão 238 - ⚡ - Força mínima para escorregar

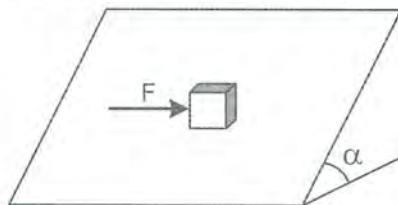
[235 a 239]

A figura mostra um bloco de massa m em repouso sobre uma rampa inclinada de um ângulo α com a horizontal. Uma força F será aplicada a essa caixa com o objetivo de fazê-la escorregar ladeira acima. Sendo μ o coeficiente de atrito estático entre a caixa e a rampa, o prof. Renato Brito pede que você determine :

- a) o valor da menor força F que torna iminente o escorregamento da caixa ladeira acima;
 b) o ângulo β que a força F deve fazer com a rampa, nas condições do item a.



Questão 238



Questão 239

Questão 239 - ☞ - Força mínima para escorregar

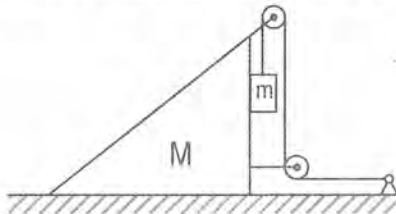
[235 a 239]

Um pequeno cubo de massa m repousa sobre um plano inclinado que forma um ângulo α com a horizontal como mostra a figura. Determine a força horizontal mínima F que deve ser aplicada ao cubo para movê-lo. A força F está contida no plano inclinado e o coeficiente de atrito entre o cubo e o plano vale μ .

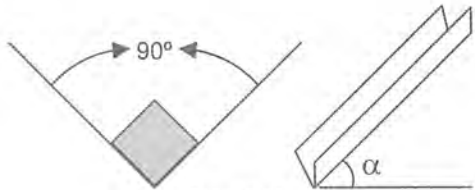
Questão 240 - ☞

No arranjo da figura, as massas M do prisma e m da caixa são conhecidas e o coeficiente de atrito trocado entre eles vale μ . Sabendo que o chão é liso e que a gravidade local vale g , pede-se determinar:

- a) a aceleração do prisma em relação à Terra; e
- b) a aceleração da caixa em relação à Terra.



Questão 240



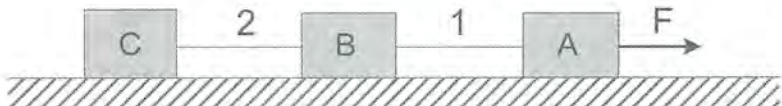
Questão 241

Questão 241 - ☞

Observe a figura. Um bloco de massa m escorrega ao longo de uma calha retangular cujas abas estão simetricamente dispostas em relação ao plano vertical bisetor, formando entre si 90° , conforme indicado. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a calha vale μ e o eixo da calha se encontra inclinado em um ângulo α com a horizontal. Se a gravidade local vale g , determine a aceleração de descida do bloco.

Questão 242 - ☞

A figura mostra três blocos A, B e C de mesma massa $m = 5 \text{ kg}$ sobre uma superfície horizontal áspera conectados por fios ideais que suportam uma tração máxima de 20 N . Os coeficientes de atrito entre os bloco e a superfície horizontal valem respectivamente $\mu_A = 0,3$, $\mu_B = 0,2$ e $\mu_C = 0,1$. Aplica-se ao bloco A uma força horizontal F cuja intensidade vai aumentando gradativamente. Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine o valor mínimo de F que provoca a ruptura de um dos fios.



Questão 243 - 9

[243, 244]

Um copo apóia-se no tampo horizontal de uma mesa. Cobre-se a boca do copo com um cartão circular e sobre o cartão coloca-se uma moeda.

Os centros do cartão e da moeda coincidem com o centro do copo. O raio do cartão vale R , o da boca do copo vale $r < R$ e o raio da moeda é desprezível. O coeficiente de atrito entre a moeda e o cartão vale μ .

Move-se o cartão horizontalmente em trajetória reta e com aceleração constante. O prof. Renato Brito pede para você determinar a menor aceleração a com que se deve puxar o cartão, para que a moeda ainda caia dentro do copo.



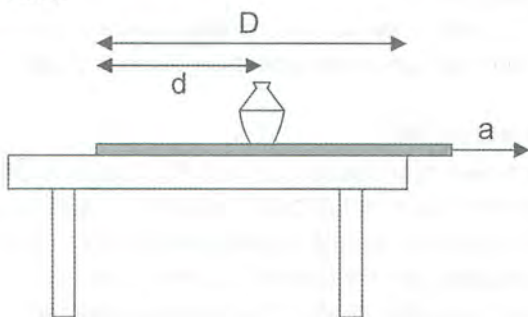
Prof Renato Brito

**Questão 244 (ITA 97)**

[243, 244]

Um antigo vaso chinês está a uma distância d da extremidade de um forro, sobre uma mesa fixa ao solo. Essa extremidade, por sua vez, se encontra a uma distância D de uma das bordas da mesa, como mostra a figura. Você apostou que consegue puxar o forro da mesa com uma aceleração a , de tal forma que o vaso não caia da mesa. Considere que ambos os coeficientes de atrito cinético e estático entre o vaso e o forro tenham o valor μ e que o vaso pare ao tocar a mesa. Você ganhará a aposta se a intensidade da aceleração a estiver dentro da faixa:

- a) $a < \frac{d \cdot \mu \cdot g}{D}$
 b) $a > \frac{d \cdot \mu \cdot g}{D}$
 c) $a > \mu \cdot g$
 c) $a > \frac{D \cdot \mu \cdot g}{d}$
 e) $a > \frac{D \cdot \mu \cdot g}{(D - d)}$

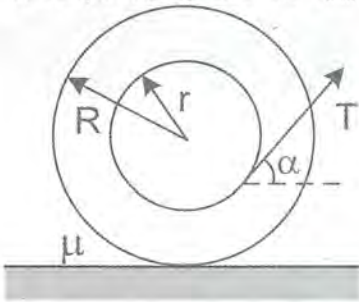


Questão 245 - ☞ (veja apêndice 11 sobre rolamentos)

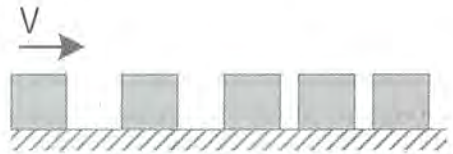
[59 - pág 20]

A figura mostra um carretel de linha de raio interno r e raio externo R apoiado sobre um solo horizontal. O coeficiente de atrito entre o carretel e o solo vale μ . Um cordão enrolado no carretel é puxado com uma força de tração T formando um ângulo α com a horizontal. A massa do carretel vale m .

- Dados R e r , para qual valor de α o carretel permanece imóvel, sem rolar ? Para quais valores de α o carretel rola para a esquerda ? Para quais valores de α o carretel rola para a direita ? Admita que, em todos esses casos, o atrito entre o solo e o carretel é suficiente para impedir qualquer escorregamento.
- Dados R , r e μ , qual o maior valor da tração T para a qual o carretel permanece imóvel ?
- Dados R e μ , qual deve ser o valor de r para o qual o escorregamento do carretel se torna iminente usando a menor tração T possível ? Qual é o correspondente valor de T_{\min} .



Questão 245



Questão 246

Questão 246 - ☞

[246, 247]

Um bloco de massa m é lançado num solo horizontal com uma velocidade inicial V_0 e percorre uma distância D até parar. Se a gravidade local vale g , determine:

- o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o solo;
- a força que o solo aplica ao bloco durante o processo de frenagem.

Questão 247 - ☞

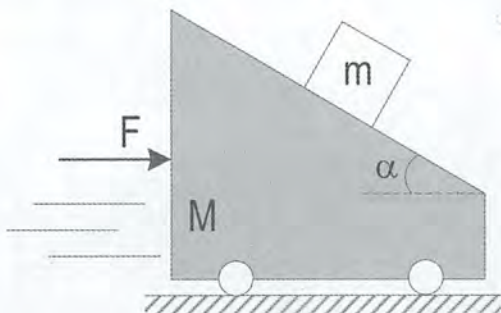
[246, 247]

Um anel homogêneo de raio R é posto a girar em torno do seu centro até adquirir uma velocidade angular ω . Em seguida, o anel em rotação na posição horizontal é abandonado sobre a superfície de uma mesa, com a qual apresenta um coeficiente de atrito cinético μ . Quanto tempo o anel levará até parar completamente ? A gravidade local vale g .

- $\frac{2\omega R\mu}{g}$
- $\frac{\omega R}{\mu g}$
- $\frac{\omega R}{2\mu g}$
- $\frac{\omega R\mu}{g}$
- $\frac{\omega R^2\mu}{g}$

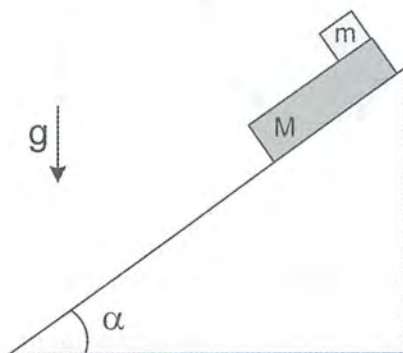
Questão 248 -

Se os coeficientes de atrito entre o bloco de massa m e a cunha de massa M valem $\mu_E = 0,5$ e $\mu_C = 0,4$, determine a maior força F horizontal com que se pode empurrar a cunha ao longo do solo horizontal liso de forma que o bloco não escorregue em relação a ela. A gravidade local vale g ($\text{sen}\alpha = 0,6$, $\text{cos}\alpha = 0,8$).

**Questão 249 -**

[225, 226, 249]

Uma tábua de massa M encontra-se apoiada sobre uma rampa fixa de inclinação α com a qual apresenta um coeficiente de atrito cinético μ . Um bloco liso de massa m encontra-se sobre a tábua. Quando o sistema é abandonado do repouso, tábua e bloco descem ladeira abaixo. Se a tábua tem um comprimento L , quanto tempo o bloco levará para perder o contato com ela durante seu movimento de descida? A gravidade local vale g .



3 DINÂMICA DO MOVIMENTO CURVILÍNEO NO REFERENCIAL INERCIAL



3.1 DINÂMICA DO MOVIMENTO CURVILÍNEO

A figura a seguir mostra a velocidade de um móvel durante o seu movimento ao longo de uma trajetória sinuosa. Percebemos que, a cada instante, a velocidade é tangente à trajetória, apontando na direção que ele seguiria a partir daquele instante, caso prosseguisse em linha reta.

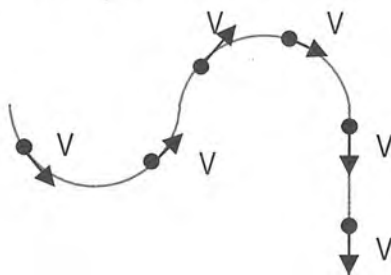
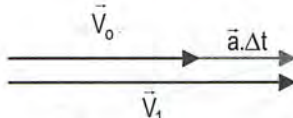


Figura 22 – A velocidade do móvel molda-se à trajetória, permanecendo tangente a ela em cada ponto. Assim, a velocidade varia em direção ao longo do trecho curvilíneo da trajetória, mantendo uma direção constante no trecho retilíneo.

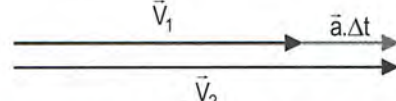
Assim, em todo o trecho curvilíneo, a velocidade do móvel vai se moldando à trajetória, mudando a direção de acordo com o formato da curva. No trecho retilíneo, entretanto, essa velocidade não muda mais de direção, permanecendo alinhada à trajetória.

Sendo a velocidade uma grandeza vetorial, qualquer mudança em sua direção, sentido ou valor é suficiente para dizermos que esta grandeza está variando. Assim, todo movimento curvilíneo é caracterizado por uma velocidade V variável, no mínimo em direção, implicando que uma aceleração deve estar presente. Em outras palavras, todo movimento curvilíneo é acelerado, visto que uma aceleração está presente para variar a velocidade do móvel.

O vetor aceleração indica, a cada instante, em qual direção e com que rapidez a velocidade do móvel será alvo de variações. Assim, se no presente momento a velocidade do móvel é representada pelo vetor \vec{V}_0 , qual será a velocidade dele após um intervalo de tempo Δt ? A velocidade será representada pelo vetor \vec{V}_1 , tal que:

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_0 + \vec{a} \cdot \Delta t$$


Após um novo intervalo Δt , a velocidade do móvel passará de \vec{V}_1 para \vec{V}_2 , tal que:

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \vec{a} \cdot \Delta t$$


E assim por diante, após um novo intervalo Δt , a velocidade do móvel passará de \vec{V}_2 para \vec{V}_3 , tal que:

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_2 + \vec{a} \cdot \Delta t$$


As figuras acima mostram graficamente essas operações matemáticas. Assim, a cada intervalo Δt , a velocidade \vec{V} do móvel recebe um acréscimo $\vec{a} \cdot \Delta t$ na mesma direção e sentido do vetor aceleração \vec{a} .

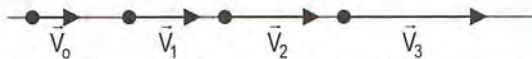


Figura 23 – A trajetória de um móvel será retilínea sempre que a sua aceleração apontar na mesma direção da sua velocidade.

Assim, se o vetor aceleração \vec{a} do móvel estiver sempre na mesma direção e sentido do vetor velocidade \vec{V} , as sucessivas velocidades \vec{V}_0 , \vec{V}_1 , \vec{V}_2 , \vec{V}_3 .. atingidas pelo móvel serão vetores que apontam numa direção constante,

significando que a trajetória seguida pelo móvel será retilínea (Figura 23). Não haverá mudanças na direção do seu movimento, visto que não há mudanças na direção da velocidade do móvel à medida que o tempo passa.

Mas como será o comportamento da velocidade \vec{v} do móvel, caso a sua aceleração \vec{a} não aponte na mesma direção da sua velocidade?

Quando um projétil é lançado horizontalmente com velocidade inicial \vec{V}_0 , ele recebe a ação de uma aceleração vertical constante $\vec{a} = \vec{g}$ chamada aceleração da gravidade. Assim, a sua velocidade será objeto de sucessivas variações $\vec{a} \cdot \Delta t$ na direção vertical (Figura 24), de forma que a trajetória seguida pelo móvel vai gradativamente encurvando para baixo, na direção do vetor $\vec{a} \cdot \Delta t$, como mostra a Figura 25.

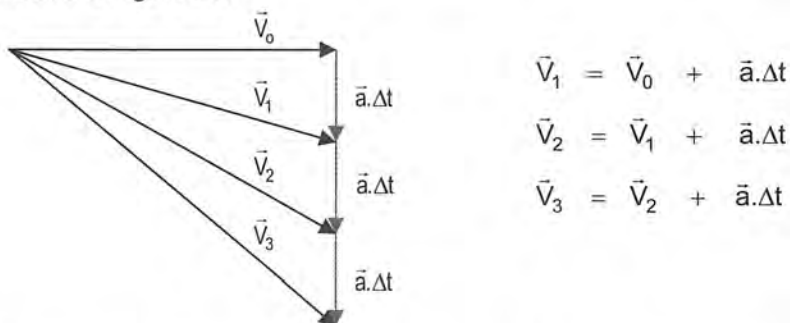


Figura 24 – a velocidade vetorial do móvel é alvo de sucessivos acréscimos verticais para baixo, sempre na mesma direção e sentido da aceleração que atua sobre ele.



Do exposto até aqui, concluímos que o formato da trajetória seguida por um móvel está intimamente relacionado ao fato de os vetores velocidade \vec{v} e aceleração \vec{a} apontarem numa mesma direção ou não.

A trajetória será retilínea sempre que os vetores \vec{v} e \vec{a} apontarem numa mesma direção, independente dos seus sentidos; será curvilínea quando \vec{v} e \vec{a} apontarem em direções diferentes.

O leitor precisa atentar para o fato de que os vetores que ilustram a Figura 25 foram obtidos a partir das operações vetoriais implícitas na Figura 24. Nesse ponto da leitura, é importante parar e analisar cuidadosamente as Figuras 24 e 25 antes de prosseguir.

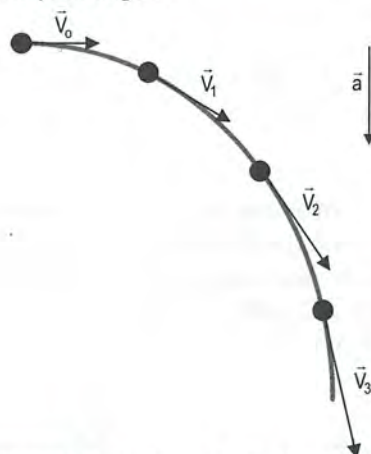


Figura 25 – Como a aceleração do móvel é vertical para baixo, a sua velocidade, bem como a sua trajetória, vão gradativamente encurvando naquela direção, com o passar do tempo.

Note que a velocidade vetorial do móvel e, conseqüentemente, a trajetória seguida por ele, tende a encurvar na direção e sentido da aceleração que atua sobre o móvel. Essa aceleração, por sua vez, é causada pela resultante das forças que atuam sobre ele, apontando na mesma direção e sentido dessa resultante F_R , de acordo com a segunda lei de Newton.

3.2 AS COMPONENTES TANGENCIAL E CENTRÍPETA DA ACELERAÇÃO

A fim de estudar a Dinâmica do movimento dos corpos, em geral, deve-se adotar o Par de Eixos Padrão já explicado na página 54, que tem as seguintes características:

Eixo 1 - é o chamado eixo tangencial, por ser tangente à trajetória. Aponta na direção da velocidade do móvel. Sobre esse eixo estarão as forças tangenciais responsáveis pelo aparecimento (ou não) de uma aceleração tangencial, que está relacionada com a taxa de variação do módulo da velocidade do móvel.

Eixo 2 - é chamado de eixo normal, radial ou centrípeto. É perpendicular à trajetória e, portanto, perpendicular à velocidade do móvel. Sobre esse eixo estarão as forças centrípetas responsáveis pelo aparecimento (ou não) de uma aceleração centrípeta, relacionada com a taxa de variação da direção da velocidade do móvel.

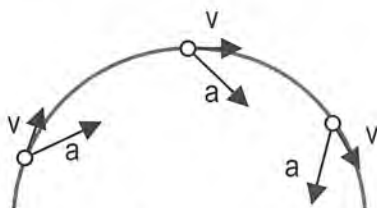


Figura 26

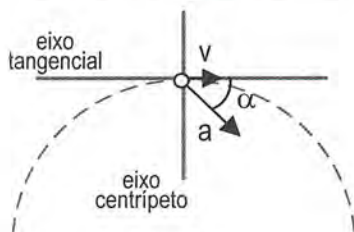


Figura 27

A Figura 26 mostra um móvel descrevendo uma trajetória curvilínea, sujeito a uma aceleração representada pelo vetor \vec{a} . Traçando o sistema cartesiano (Figura 27) formado pelos eixos tangencial e radial (ou centrípeto), estamos aptos a melhor investigar o papel de cada uma das duas componentes da aceleração do móvel (Figura 28):

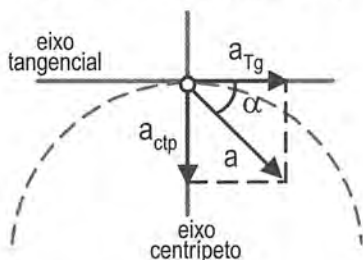


Figura 28

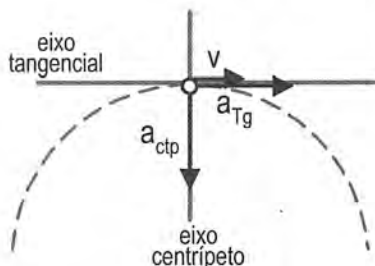


Figura 29

Curiosamente, as componentes da aceleração do móvel atuam de forma independente, tendo, cada qual, uma função bem definida.

• **A componente tangencial (a_{Tg})**

O módulo da componente tangencial é, comumente, chamado de aceleração escalar do móvel, e Figura em expressões consagradas da cinemática escalar tais como:

$$V = V_0 \pm a_{Tg} \cdot T$$

A componente tangencial da aceleração fornece a taxa de variação (ritmo de variação) do módulo da velocidade, que tanto pode estar aumentando como pode estar diminuindo, conforme essa componente tangencial esteja respectivamente a favor ou contra a velocidade do móvel.

É comum se dizer que, se a aceleração de um móvel vale 4 m/s^2 , sua rapidez está aumentando de 4 m/s em 4 m/s , a cada segundo de movimento. Ao se dizer isso, está se fazendo referência à sua aceleração escalar (ou

tangencial) do móvel. Afinal, é esta componente que se relaciona ao ritmo de variação do módulo da velocidade do móvel.

Quando um móvel se desloca com a_{Tg} nula, dizemos que ele executa um **movimento uniforme**. Nesse caso, a sua velocidade é constante em módulo e sentido, podendo ser variável apenas em direção, no caso dos movimentos curvilíneos uniformes.

• **A componente centrípeta** (a_{ctp})

A componente centrípeta da aceleração é sempre perpendicular à velocidade do móvel (Figura 29), apontando para o lado para onde a sua trajetória se curvará.

Uma “grande aceleração centrípeta” significa que o móvel fará uma curva bastante “fechada” (pequeno raio de curvatura), ao passo que uma “pequena aceleração centrípeta” significa que a curvatura da trajetória será “suave” (grande raio de curvatura), como sugere a Figura 30.

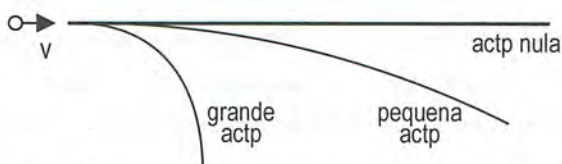


Figura 30 - o valor da aceleração centrípeta está relacionado à curvatura da trajetória seguida pelo móvel.

Ora, então, quando a a_{ctp} for nula, a trajetória seguida pelo móvel não apresentará curvatura alguma, ou seja, será retilínea....



O módulo da aceleração centrípeta a_{ctp} relaciona-se com a velocidade V do móvel e com o raio de curvatura R de sua trajetória, num dado instante, pela expressão:

$$a_{ctp} = \frac{|v|^2}{R}$$

A aceleração centrípeta a_{ctp} mede a rapidez com que a direção da velocidade \vec{v} do móvel está variando. Em todo movimento retilíneo, a direção da velocidade permanece constante e alinhada à trajetória, como

vimos anteriormente, portanto, **todo movimento retilíneo é caracterizado por uma a_{ctp} nula.**

Da Figura 29, ainda podemos escrever as seguintes expressões:

$$a_{Tg} = a \cdot \cos\alpha$$

$$a_{ctp} = a \cdot \sin\alpha$$

$$(a)^2 = (a_{Tg})^2 + (a_{ctp})^2$$

onde a é o módulo da aceleração vetorial ou resultante, conforme a Figura 28. Falamos sobre as componentes das acelerações, explicando a função que cada uma delas desempenha na dinâmica do movimento. Mas como essas acelerações se relacionam com as forças atuantes ?

3.3 FORÇAS EM TRAJETÓRIA CURVILÍNEA

As Figuras 26 a 29 mostram diagramas cinemáticos do movimento de um móvel sobre uma trajetória curvilínea. A seguir, ilustraremos um diagrama de forças compatível com aquele diagrama cinemático.

Para isso, considere que, sobre aquele mesmo móvel, atuem as forças \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 mostradas na Figura 31. Sabendo que todo conjunto de forças admite uma única resultante \vec{F}_R , trataremos de determiná-la para, em seguida, encontrarmos as suas componentes tangencial F_{Tg} e centrípeta F_{ctp} :

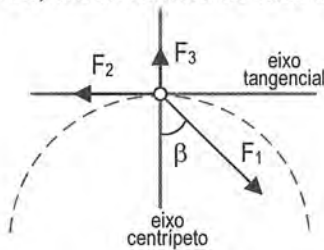


Figura 31

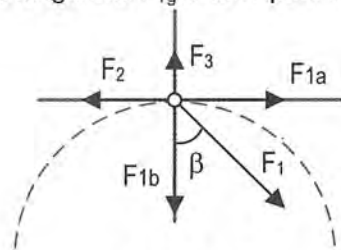


Figura 32



Profinho, ouvi dizer que, no movimento curvilíneo, tem que ter uma tal de força centrípeta ! Qual das forças F_1 , F_2 ou F_3 é essa tal de força centrípeta ?

Amiga Claudete, as forças F_1 , F_2 e F_3 são forças genéricas quaisquer que estão atuando sobre o móvel, podendo ser tração, peso, normal, força de atrito, força elástica etc., **mas não existe na natureza uma força denominada "a força centrípeta".** Em outras palavras, a tal força centrípeta não é uma das três forças que estão atuando sobre o móvel. Na verdade, o termo

mais adequado é “componente centrípeta da força resultante” ou simplesmente “resultante centrípeta” em vez de dizer “a força centrípeta”.

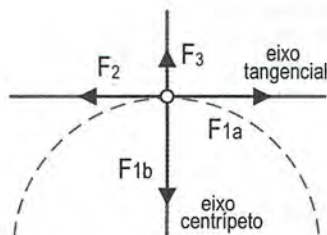


Figura 33

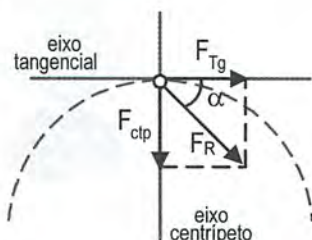


Figura 34

A seguir, esclareceremos de uma vez por todas quem é a “resultante centrípeta”, vulgarmente chamada de “a força centrípeta” pela Claudete. Na Figura 32, tratamos de decompor todas as forças que não estivessem sobre os eixos tangencial e normal, no caso, apenas a força F_1 , substituída por suas componentes F_{1a} e F_{1b} , como mostram as Figuras 32 e 33.

A resultante tangencial F_{Tg} causa uma aceleração tangencial a_{Tg} de acordo com a segunda lei de Newton $F_{Tg} = m \cdot a_{Tg}$. No diagrama cinemático ilustrado na Figura 28, a componente tangencial a_{Tg} aponta para a direita, sugerindo que foi causada por uma resultante tangencial F_{Tg} que também aponta para a direita, donde se conclui que $F_{1a} > F_2$ na Figura 33. Assim, a segunda lei de Newton na direção tangencial permite escrever:

$$F_{Tg} = m \cdot a_{Tg}$$

$$F_{Tg} = F_{1a} - F_2 = m \cdot a_{Tg}, \text{ com } F_{1a} = F_1 \cdot \text{sen}\beta$$

$$\boxed{F_{Tg} = (F_1 \cdot \text{sen}\beta - F_2) = m \cdot a_{Tg}}$$

A resultante centrípeta F_{ctp} é a resultante das forças que atuam sobre o eixo centrípeta (Figuras 33 e 34) e sempre aponta para dentro da curva, assim como a aceleração a_{ctp} causada por ela, donde se conclui que $F_{1b} > F_3$. A segunda lei de Newton na direção centrípeta permite escrever:

$$F_{ctp} = m \cdot a_{ctp}$$

$$F_{ctp} = F_{1b} - F_3 = m \cdot a_{ctp}, \text{ com } F_{1b} = F_1 \cdot \text{cos}\beta$$

$$\boxed{F_{ctp} = (F_1 \cdot \text{cos}\beta - F_3) = m \cdot a_{ctp}} \text{ com } a_{ctp} = V^2/R.$$

Assim, percebemos que, aquilo o que a Claudete estava chamando de “a força centrípeta” é, meramente, a resultante das forças que atuam sobre o móvel ao longo da direção centrípeta (Figuras 33 e 34).



AAhh ! entendi, Profinho !
A tal de força centrípeta é,
na verdade, a componente
centrípeta da força
resultante, dada por:
 $F_{ctp} = F_R \cdot \cos\beta - F_3$.

Exatamente, Claudete ! Agora percebo que você entendeu ! Da Figura 34, ainda podemos escrever as seguintes relações:

$$F_{Tg} = F_R \cdot \cos\alpha$$

$$F_{ctp} = F_R \cdot \sin\alpha$$

$$(F_R)^2 = (F_{Tg})^2 + (F_{ctp})^2$$

Note que, como as acelerações que aparecem no diagrama cinemático da Figura 28 foram respectivamente causadas pelas forças que aparecem na Figura 34, o ângulo α indicado em ambos os diagramas é exatamente o mesmo, visto que a aceleração resultante \vec{a} aponta exatamente na mesma direção e sentido da força resultante \vec{F}_R que a causou.

3.4 ESTUDO DO MOVIMENTO DE UM PÊNDULO SIMPLES

Um pêndulo simples é uma massa suspensa a um ponto de sustentação através de um cordão ideal de massa desprezível. O pêndulo é deslocado da posição de equilíbrio e abandonado a partir do repouso, dando início a um movimento oscilatório. Durante esse movimento, apenas duas forças atuam sobre a massa do pêndulo a cada instante: a tração e o peso.

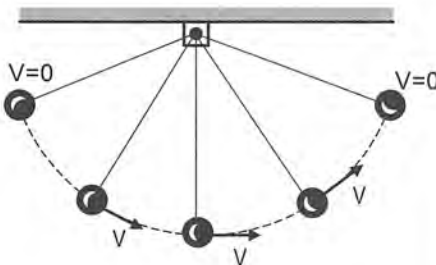


Figura 35 – o pêndulo simples

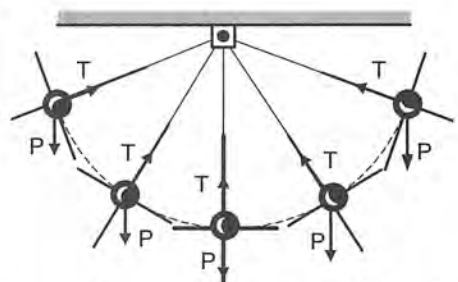


Figura 36 – o par de eixos tangencial e radial se desloca junto com pêndulo durante as oscilações.

Mais uma vez, a velocidade da bola é tangente à trajetória em cada ponto (Figura 35). A fim de estudar a Dinâmica do movimento, precisamos traçar o par de eixos tangencial (paralelo à velocidade) e radial (perpendicular à velocidade) em cada ponto do movimento, como indica a Figura 36.

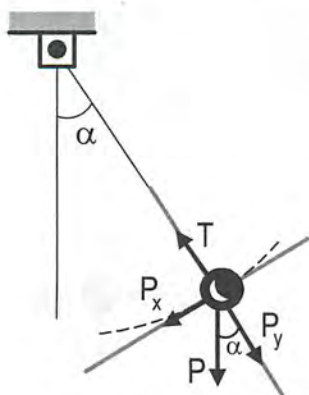


Figura 37

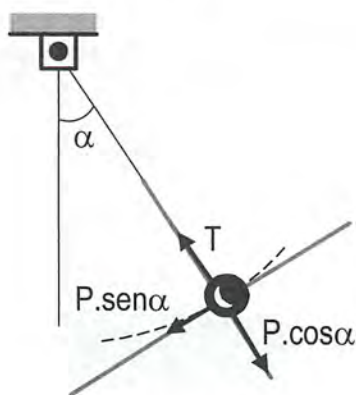


Figura 38

Em seguida, tendo feito a escolha correta do par de eixos adequado em cada posição da bola, resta claro quais forças precisam ser decompostas em suas componentes para a análise do movimento: aquelas que não estiverem sobre nenhum dos eixos, no caso, a força peso P (Figura 36).

As Figuras 37 e 38 mostram a decomposição conveniente do peso da bola. Lembrando que as forças que apontam para dentro da curva sempre superam as forças que apontam para fora ($F_{IN} > F_{OUT}$) na direção radial ou centrípeta, a segunda lei de Newton permite escrever:

$$F_{ctp} = F_{IN} - F_{OUT} = m \cdot a_{ctp}$$

$$F_{ctp} = T - P_Y = m \cdot a_{ctp}, \text{ com } P_Y = P \cdot \cos\alpha$$

$$F_{ctp} = T - P \cdot \cos\alpha = m \cdot \frac{V^2}{R} \quad (\text{eq 7})$$

(equação geral do pêndulo simples)

Assim, a expressão anterior nos permite determinar a tração T no fio do pêndulo em cada posição angular α do pêndulo, desde que se conheça a velocidade V da massa, ao passar por aquela posição.

Nos extremos da oscilação, onde a velocidade da bola é momentaneamente nula ($V = 0$), temos:

$$F_{ctp} = T - P \cdot \cos\alpha = m \cdot \frac{V^2}{R}, \text{ com } V = 0$$

$$T - P \cdot \cos\alpha = 0 \Rightarrow T = P \cdot \cos\alpha$$

Em qualquer outra posição do pêndulo, tem-se $T > P \cdot \cos\alpha$.

Em particular, quando o pêndulo passar pela **posição mais baixa da oscilação** (Figura 39), a segunda lei de Newton na direção centrípeta permite escrever:

$$F_{\text{ctp}} = F_{\text{IN}} - F_{\text{OUT}} = m \cdot a_{\text{ctp}}$$

$$F_{\text{ctp}} = T - P = m \cdot a_{\text{ctp}}$$

$$F_{\text{ctp}} = T - P = m \cdot \frac{V^2}{R}$$

$$T = m \cdot g + m \cdot \frac{V^2}{R} \Rightarrow T > m \cdot g.$$

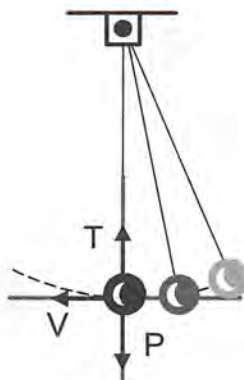


Figura 39a

Assim, quando a bola passar pela posição mais baixa da oscilação, o que terá maior intensidade, a tração T ou o peso $m \cdot g$? O resultado obtido há pouco mostra que teremos $T > m \cdot g$.

Apenas no caso em que o pêndulo é abandonado em repouso ($V = 0$) naquela posição mais baixa é que teremos:

$$F_{\text{ctp}} = T - P = m \cdot \frac{V^2}{R} = 0 \Rightarrow T = P \quad (\text{apenas caso } V = 0)$$

Adicionalmente, é interessante analisar a orientação e o módulo da força resultante agindo na esfera em cada ponto da oscilação, conforme mostrado na figura 39b abaixo:

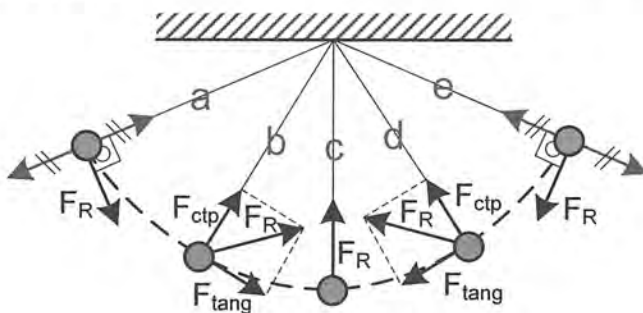


Figura 39b – Diagrama da força resultante em cada ponto da oscilação do Pêndulo

Nas posições extremas da oscilação (posições **a** e **e**), onde o pêndulo pára ($v_a = v_e = 0$) a fim de inverter o sentido do movimento, a tração T equilibra (cancela) a componente $P \cdot \cos \alpha$, e a componente $P \cdot \sin \alpha$ fará o papel da força resultante F_R , isto é, $F_R = P \cdot \sin \alpha$ nas posições **a** e **e**. Note que, nesses extremos da oscilação, a força resultante F_R é perpendicular ao fio (ou seja, a força resultante é tangente à trajetória).

Nas posições **b** e **d** da oscilação, a força resultante tem uma componente centrípeta de módulo $F_{ctp} = T - P \cdot \cos \alpha$ e uma componente tangencial de módulo $F_{tang} = P \cdot \sin \alpha$. Nessas posições, a força resultante aponta numa direção intermediária entre a tangencial e a centrípeta, e tem módulo dado por :

$$F_R = \sqrt{(F_{tang})^2 + (F_{ctp})^2} = \sqrt{(P \cdot \sin \alpha)^2 + (T - P \cdot \cos \alpha)^2}$$

ou

$$F_R = \sqrt{(F_{tang})^2 + (F_{ctp})^2} = \sqrt{(P \cdot \sin \alpha)^2 + (m \cdot V^2 / R)^2}$$

Na posição **c** mais baixa da oscilação, a força resultante aponta para cima (na direção radial, centrípeta) e tem módulo dado por $F_R = T - P$.

Analogamente, como a aceleração resultante a_R sempre aponta na mesma direção e sentido da força resultante F_R , o diagrama que mostra a aceleração resultante do pêndulo simples, em cada ponto da oscilação, é mostrado na figura abaixo:

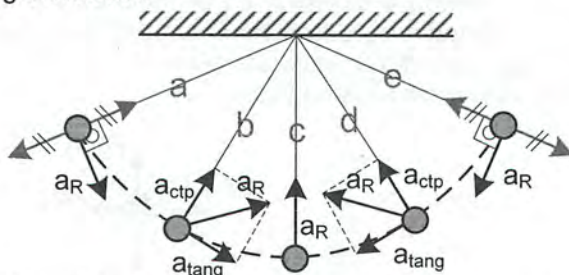


Figura 39c – Diagrama da aceleração Resultante em cada ponto da oscilação do Pêndulo

3.5 DINÂMICA DO MCU PLANO HORIZONTAL

O pêndulo ilustrado na Figura 40 é chamado de pêndulo cônico. A pequena esfera executa um movimento circular uniforme, presa por um fio a um ponto de suspensão, descrevendo uma trajetória contida num plano horizontal (imaginário).

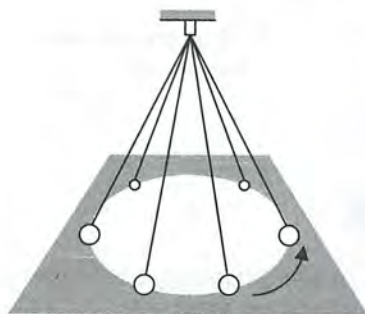


Figura 40 - O pêndulo cônico.

Assim como no pêndulo simples, apenas duas forças atuam sobre a pequena esfera do pêndulo cônico: a tração T e peso P .

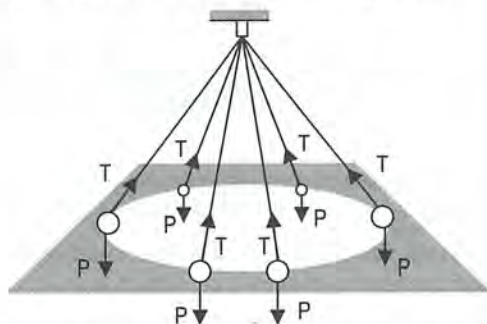


Figura 41 - Apenas a tração T e o peso P atuam sobre a esfera do pêndulo.

Para que você compreenda a dinâmica do pêndulo cônico, consideremos, inicialmente, um móvel genérico descrevendo um MCU qualquer num plano horizontal semelhante ao movimento do pêndulo cônico, sob ação das quatro forças genéricas mostradas na Figura 42:

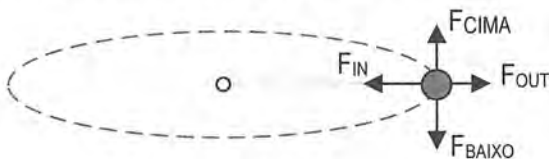


Figura 42 – móvel genérico que executa um MCU no plano horizontal idêntico ao da esfera do pêndulo cônico, só que submetido a um sistema de quatro forças genéricas.

Se esse móvel da Figura 42 mantém a trajetória sempre no mesmo plano horizontal, **sem acelerar para cima nem para baixo** (*aceleração vertical nula*), qual deve ser a relação entre as intensidades das forças verticais F_{CIMA} e F_{BAIXO} ?



Elas precisam ser iguais em módulo para se cancelarem, né profi ?

Exatamente, Claudete ! Assim, podemos dizer que $F_{CIMA} = F_{BAIXO}$, na Figura 42, a fim de que elas se cancelem, visto que a bola não apresenta aceleração vertical.

E sobre as forças F_{IN} e F_{OUT} que atuam na direção radial (Figura 42), o que podemos dizer sobre elas? Ora, sendo a trajetória curvilínea, devemos recordar que, na direção radial, precisamos sempre ter $F_{IN} > F_{OUT}$, para que haja uma resultante centrípeta $F_{ctp} = F_{IN} - F_{OUT}$ a fim de produzir a aceleração centrípeta a_{ctp} necessária a todo movimento curvilíneo. Assim:

$$F_{ctp} = F_{IN} - F_{OUT} = m \cdot a_{ctp}$$

Em síntese, as forças que atuam sobre o móvel devem satisfazer as seguintes relações:

Direção vertical: $F_{CIMA} = F_{BAIXO}$ (eq8).

Direção radial: $F_{IN} - F_{OUT} = m \cdot a_{ctp}$ (eq9).

O mesmo raciocínio será aplicado ao pêndulo cônico, visto que se trata do mesmo tipo de movimento: **um MCU que se mantém num plano horizontal**. Assim, a fim de que o diagrama de forças mostrado na Figura 43 se assemelhe ao da Figura 42, qual das forças tração T ou o peso P deverá ser decomposta no esquema a seguir?

Se você disse “a tração”, acertou! Afinal, queremos um diagrama de forças que contenha “uma pra cima”, “uma pra baixo”, “uma pra dentro” e, eventualmente, “uma pra fora”, seguindo o padrão da Figura 42 para esse tipo de movimento: MCU num plano horizontal. Qualquer força que esteja fora desse padrão deverá ser decomposta.

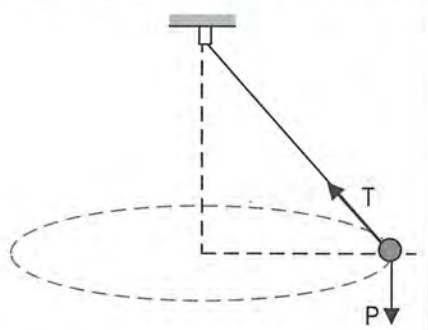


Figura 43 – As duas forças que agem no pêndulo cônico no referencial inercial.

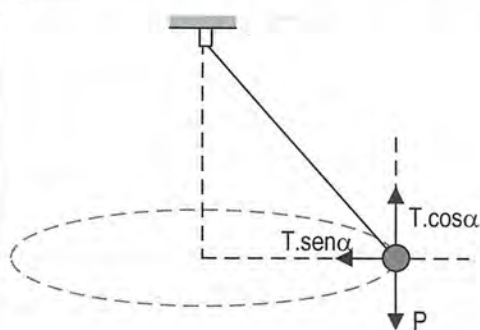


Figura 44 - O comprimento L do fio e o raio R da trajetória circular estão relacionados entre si pelo $\text{sen} \alpha$ no triângulo retângulo em destaque.

Decompondo a tração em suas componentes T_x e T_y , percebemos a semelhança entre o diagrama de forças das Figuras 42 e 44, o que nos permite equacioná-los da mesma forma:

direção vertical : $T \cdot \cos \alpha = m \cdot g$;

direção radial : $T \cdot \sin \alpha - 0 = m \cdot \frac{V^2}{R} = m \cdot \omega^2 \cdot R$

Triângulo retângulo : $\sin \alpha = \frac{R}{L}$.

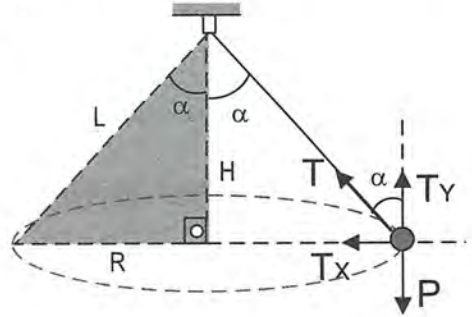


Figura 45

CONCLUSÃO IMPORTANTE: sempre que um corpo descrever um MCU num plano horizontal, as forças que agem no corpo devem ser decompostas de forma semelhante à Figura 42 (sempre !). Dessa forma, o equacionamento das forças sempre seguirá o mesmo raciocínio mostrado anteriormente. Existem várias situações físicas que recaem na mesma análise feita para o diagrama de forças da Figura 42.

O período T do movimento de rotação executado pelo pêndulo cônico é facilmente determinado a seguir:

$$T \cdot \sin \alpha = m \cdot \omega^2 \cdot R.$$

Substituindo a tração T e o $\sin \alpha$, vem:

$$\left(\frac{m \cdot g}{\cos \alpha} \right) \cdot \left(\frac{R}{L} \right) = m \cdot \omega^2 \cdot R \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L \cdot \cos \alpha}}.$$

Da cinemática do movimento circular, vem:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L \cdot \cos \alpha}{g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{H}{g}}, \text{ com } H = L \cdot \cos \alpha.$$

$$\boxed{T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L \cdot \cos \alpha}{g}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{H}{g}} \quad \text{com } H = L \cdot \cos \alpha} \quad (\text{eq10})$$

(Período do MCU descrito por um pêndulo cônico)

Da expressão encontrada acima, decorre uma interessante propriedade dos pêndulos cônicos:

Pêndulos cônicos que giram com alturas $H = L \cdot \cos\alpha$ (veja Figura 46) idênticas compartilham da mesma velocidade angular ω e, conseqüentemente, do mesmo período T . É caso dos pêndulos cônicos a seguir:

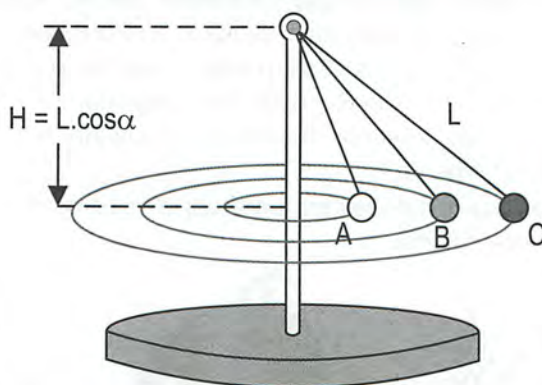


Figura 46A

De acordo com a relação eq10, os pêndulos cônicos da Figura 46A estão se movendo com períodos de rotação idênticos pois suas esferas estão girando a uma mesma altura vertical H medida a partir do ponto de suspensão. Teremos $T_A = T_B = T_C$ e, portanto, $\omega_A = \omega_B = \omega_C$.

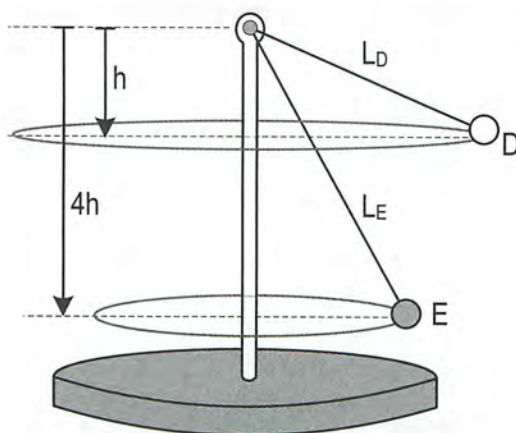


Figura 46B

Já os pêndulos D e E da Figura 46B giram com períodos de rotação $T_E = 2 \cdot T_D$ visto que suas alturas verticais satisfazem a relação $H_E = 4 \cdot H_D$. Nesse caso, teremos $\omega_D = 2 \cdot \omega_E$.

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO

Questão 250 - ☹ - A volta ao mundo em 1h

Raulzinho era o típico garoto que detestava banho. Certa vez, viu-se decidido a livrar-se do sabonete para sempre, arremessando-o com incrível velocidade horizontal. Para a sua surpresa, o sabonete o surpreendeu de volta ☺. Se o raio da Terra vale $R = 6400 \text{ km}$, pergunta-se:

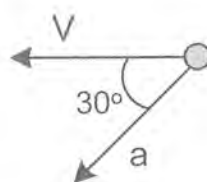
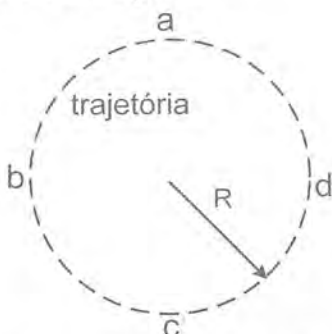
- Com que velocidade absurda Raulzinho precisaria ter arremessado o sabonete horizontalmente ?
- Quantas horas o sabonete levaria para dar a volta completa em volta da Terra em trajetória rasante ?



Questão 251 - ☹

[251 a 253]

Uma partícula está se deslocando sobre a circunferência abcd mostrada, de raio $R = 3 \text{ m}$. No instante $t = 2 \text{ s}$, a sua velocidade \mathbf{V} e a sua aceleração \mathbf{a} são mostradas no diagrama.



Diagrama

- O diagrama cinemático mostra a velocidade \mathbf{V} e a aceleração \mathbf{a} do móvel no instante $t = 2 \text{ s}$. Com base nesse diagrama, concluímos que, naquele instante, o móvel só pode estar passando por qual das posições a, b, c ou d da sua trajetória circular ?
- Se a sua aceleração vale $a = 24 \text{ m/s}^2$, qual a sua a_{ctp} ?
- Qual a velocidade V do móvel nesse instante ?
- O módulo da sua velocidade V está aumentando ou diminuindo nesse instante ?

Questão 252 - ☉

[251 a 253]

Um móvel de massa 10 kg realiza um movimento circular de raio $R = 2$ m, obedecendo a seguinte função horária do espaço $S = 2 - 8.t + 3.t^2$ no SI. Determine, no instante $t = 2$ s:

- a) a velocidade do móvel
- b) a intensidade da componente tangencial da força resultante
- c) a intensidade da componente centrípeta da força resultante
- d) a intensidade da força resultante

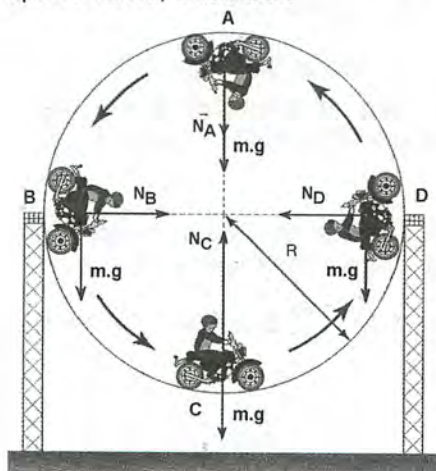
Questão 253 - ☹

[251 a 253]

Num certo instante do movimento de uma partícula, sua velocidade \vec{v} e sua aceleração \vec{a} formam entre si um ângulo α . Determine o raio de curvatura da trajetória dessa partícula no referido instante.

Questão 254 - ☉

O "Globo da morte" é um espetáculo muito comum em circos. Consiste em uma superfície esférica rígida, geralmente de grades metálicas, que é percorrida internamente por um motociclista, conforme a figura abaixo. Sejam V_A , V_B , V_C e V_D a velocidade do motociclista ao passar, respectivamente, pelas posições A, B, C e D do globo. Se a gravidade local vale g e a massa do conjunto moto+motoqueiro valem, determine:



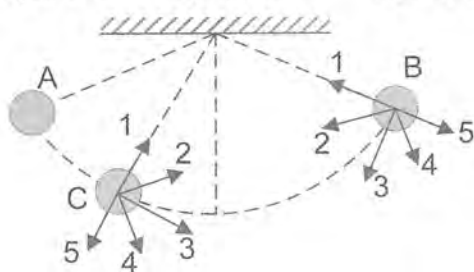
- a) a expressão literal para a força normal N trocada no contato entre a moto e o globo, em cada um das quatro posições;
- b) a velocidade mínima que o motociclista deve imprimir à moto para conseguir dar a volta completa no globo. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$ e o raio $R = 3,6$ m.
- c) se a velocidade da moto no ponto A for $V_A = 12 \text{ m/s}$, qual a intensidade da força normal N_A trocada entre a moto e o globo? Admita $m = 400$ kg.

Questão 255 - C

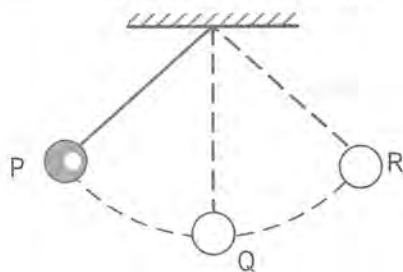
[255 a 262]

A figura ilustra um pêndulo simples que oscila periodicamente entre as posições extremas A e B. Quando a esfera passa pela posição intermediária C, os vetores que melhor representam a velocidade V , a aceleração a e a força F resultante sobre a esfera são, respectivamente:

- a) 3, 1, 1 b) 3, 2, 1 c) 2, 3, 4 d) 3, 2, 2 e) 3, 1, 4



Questão 255 e 256



Questão 257 e 258

Questão 256 - C

[255 a 262]

Ainda na questão anterior, os vetores que melhor representam a velocidade V , a aceleração a e a força F resultante sobre a esfera ao atingir a posição extrema B são, respectivamente:

- a) 3, nula, 1 b) 1, 4, 2 c) 2, nula, 4 d) nula, 2, 2 e) nula, 3, 3

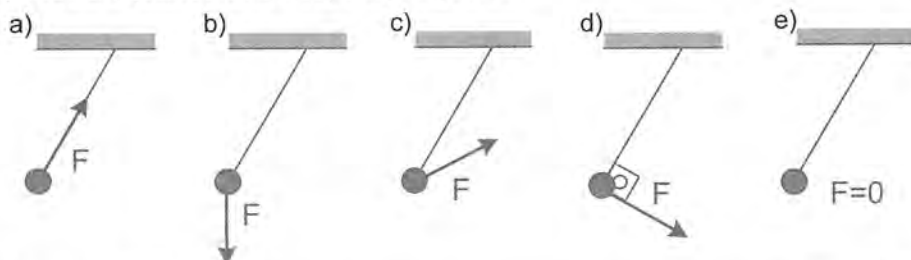
O enunciado a seguir se refere às questões 257 e 258:

O pêndulo da figura oscila em condições ideais, tendo como posições de inversão do sentido do seu movimento os pontos P e R.

Questão 257 - C

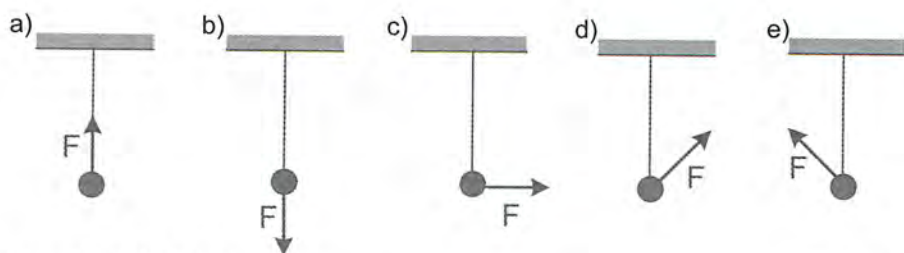
[255 a 262]

Assinale a opção que melhor representa a força resultante F na esfera pendular, quando esta ocupa a posição P:

**Questão 258 - C**

[255 a 262]

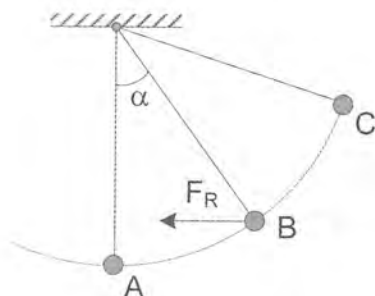
Com relação à situação da questão anterior, assinale a opção que melhor representa a força resultante F na esfera pendular, quando esta ocupa a posição Q (mais baixa da trajetória), proveniente da posição P.

**Questão 259** - ☉

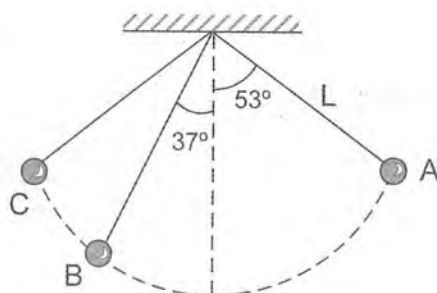
[255 a 262]

A figura mostra um pêndulo simples composto por um fio de comprimento L preso a uma bolinha de massa m num local em que a gravidade vale g . Determine a tração no fio quando o pêndulo passar pela posição B na qual a força resultante agindo sobre a bolinha é horizontal:

- a) $m \cdot g \cdot \text{sen} \alpha$ b) $m \cdot g \cdot \text{cos} \alpha$ c) $m \cdot g \cdot \text{tg} \alpha$ d) $m \cdot g \cdot \text{sec} \alpha$ e) $g \cdot \text{cos} \text{sec} \alpha$



Questão 259



Questão 260

Questão 260 - ☉

[255 a 262]

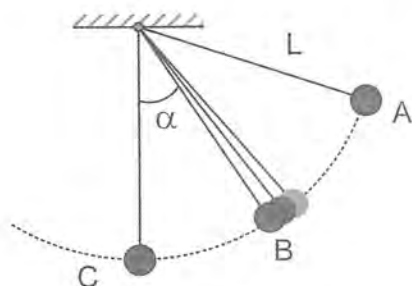
Na figura, temos um pêndulo simples de comprimento $L = 0,6 \text{ m}$ e com uma esfera de massa $m = 2 \text{ kg}$, oscilando. Se o pêndulo atingir o repouso ao chegar à posição A, quanto valerá a tração no fio nessa posição? Se ele for impulsionado de forma a passar pelo ponto B com velocidade 3 m/s , quanto valerá a tração no fio nessa posição? Dados: $\text{sen } 37^\circ = \text{cos } 53^\circ = 0,60$ $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Questão 261 - ☉

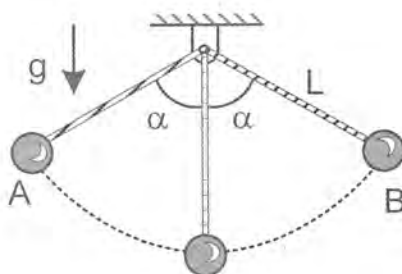
[255 a 262]

A figura mostra um pêndulo composto por um fio de comprimento $L = 3,75 \text{ m}$ preso a uma bolinha de massa $M = 6 \text{ kg}$ num local em que a gravidade vale $g = 10 \text{ m/s}^2$. O pêndulo, abandonado do repouso em A, passa pelo ponto B com velocidade 5 m/s . Sendo $\alpha = 30^\circ$, a força resultante que age na bolinha, ao passar pelo ponto B, vale:

- a) 40 N b) 50 N c) 80 N d) 100 N e) 120 N



Questão 261



Questão 262

Questão 262 - \bullet C

[255 a 262]

Um pêndulo simples oscila entre duas posições extremas A e B, como mostra a figura abaixo, num local onde a intensidade do campo gravitacional vale g . A aceleração da esfera, ao atingir a posição B, vale:

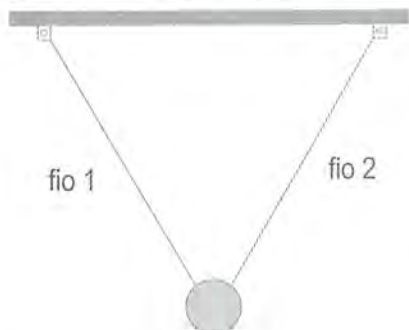
- a) g b) $g \cdot \text{sen} \alpha$ c) $g \cdot \text{cos} \alpha$ d) $g \cdot \text{tg} \alpha$ e) nula.

Questão 263 - \bullet N

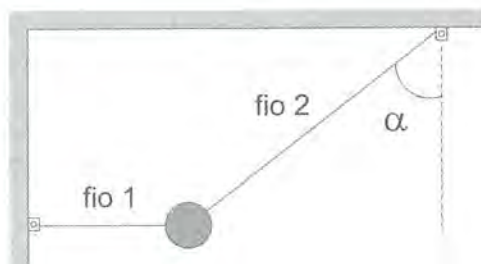
[263, 264]

A figura mostra uma esfera de massa m suspensa em equilíbrio por meio de dois fios ideais 1 e 2, formando um triângulo equilátero. Nessas circunstâncias, a tração no fio 2 vale T_A . Repentinamente, o fio 1 é cortado e a tração no fio 2, logo após o corte, passa a valer T_B . O quociente T_A / T_B vale:

- a) 1 b) $3/4$ c) 4. d) 2 e) $2/3$



Questão 263



Questão 264

Questão 264

[263, 264]

A figura mostra uma esfera de massa m suspensa em equilíbrio por intermédio de dois fios ideais 1 e 2. Nessas circunstâncias, a tração no fio 2 vale T_A . Repentinamente, o fio 1 é cortado e a tração no fio 2, logo após o corte, passa a valer T_B . O quociente T_A / T_B vale:

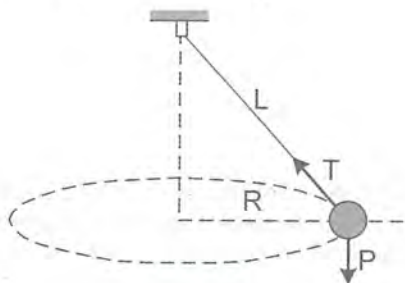
- a) 1 b) $\text{sen}^2 \alpha$ c) $\text{sec}^2 \alpha$ d) 2 e) $\text{tg} \alpha$.

Questão 265 - C

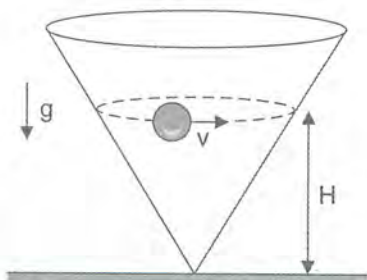
[265 a 279]

Num pêndulo cônico, a massa m está presa a um fio de comprimento L e gira numa circunferência horizontal de raio R com velocidade escalar V , conforme a figura. Se a gravidade local vale g , a intensidade da tração T vale:

- a) $\frac{m \cdot V^2 \cdot L}{R}$ b) $\frac{m \cdot V^2 \cdot L}{R^2}$ c) $\frac{m \cdot g \cdot L}{R}$ d) $\frac{m \cdot g \cdot R}{L}$ e) $\frac{m \cdot g \cdot R}{L^2}$



Questão 265



Questão 266 e 267

Questão 266 - F

[265 a 279]

Uma pequena esfera de massa m descreve um movimento circular uniforme no interior de um cone fixo, apoiada sobre sua parede interna lisa num local onde a gravidade vale g . A órbita está contida num plano horizontal a uma altura constante H do solo. A velocidade dessa pequena esfera é dada por:

- a) $\sqrt{g \cdot H}$ b) $\sqrt{2 \cdot g \cdot H}$ c) $\sqrt{\frac{g \cdot H}{2}}$ d) $2\sqrt{g \cdot H}$ e) $\sqrt{\frac{2g \cdot H}{3}}$

Questão 267

[265 a 279]

Uma pequena esfera de massa 5 kg move-se em órbita circular no interior de um cone fixo (veja a figura), apoiada sobre sua parede interna lisa num planeta onde a gravidade g é desconhecida. A altura H da órbita que a esfera descreve é tão maior quanto maior for a velocidade com que ela se move. Sabe-se que, para uma velocidade orbital $V = 6$ m/s, a órbita circular ocorre a uma altura $H = 40$ cm. Assim, para uma velocidade 50% maior, a órbita ocorrerá a uma altura :

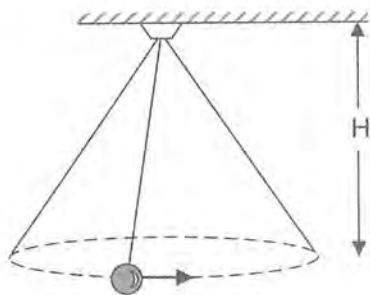
- a) 50 cm b) 60 cm c) 75 cm d) 90 cm e) 120 cm.

Questão 268 - F

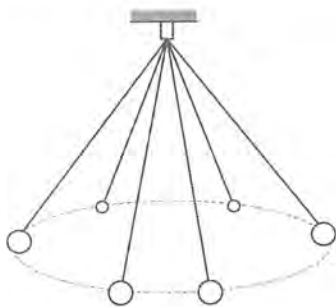
[265 a 279]

A figura ilustra um pêndulo cônico que gira em MCU amarrado a um ponto de suspensão fixo ao teto de uma casa, num local onde a gravidade vale g . Durante a rotação, a esfera permanece a uma altura H constante do teto. A velocidade angular ω desse pêndulo vale:

- a) $\sqrt{\frac{g}{H}}$ b) $\sqrt{\frac{2g}{H}}$ c) $\sqrt{\frac{g}{2H}}$ d) $\sqrt{g \cdot H}$ e) $\sqrt{\frac{2g}{3H}}$



Questão 268 e 269



Questão 270

Questão 269 - ♂

[265 a 279]

A figura da questão anterior ilustra um pêndulo cônico que gira em MCU amarrado a um ponto de suspensão fixo ao teto de uma casa num planeta onde a gravidade é desconhecida. É intuitivo o fato de que, quanto maior a velocidade angular ω com que a esfera gire num plano horizontal, mais a bola tenderá a subir e menor será a distância H a que ela ficará do teto. Assim, admita que, para uma bola girando a uma velocidade angular $\omega = 6 \text{ rad/s}$, a altura H vale 1 m. Reduzindo-se a velocidade angular dessa esfera à metade, a sua órbita estacionará a uma nova altura H igual a :

- a) 2 m b) 3 m c) 4 m d) 5 m e) 6 m

Questão 270 - ♂

[265 a 279]

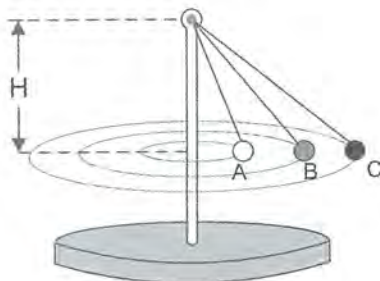
Uma pequena esfera, de massa $m = 4 \text{ kg}$, suspensa por um fio, descreve um movimento circular uniforme, em um plano horizontal, constituindo o chamado pêndulo cônico. Sendo o raio da trajetória $R = 3 \text{ m}$, o comprimento do fio $L = 5 \text{ m}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine que altura vertical ΔH a bolinha subirá, caso a sua velocidade angular ω seja duplicada.

Questão 271 - ♀

[265 a 279]

A figura ilustra três pêndulos cônicos que giram em trajetórias circulares contidas num mesmo plano horizontal como mostra a figura abaixo. As esferas A, B e C têm massas iguais e descrevem circunferências de raios R , $2R$ e $3R$ respectivamente. Entre os períodos de rotação T_A , T_B e T_C , vale a relação:

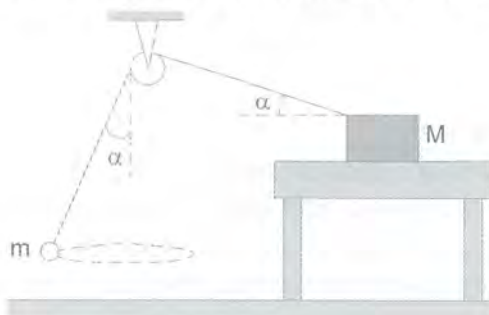
- a) $T_A = T_B = T_C$
 b) $6T_A = 3T_B = 2T_C$
 c) $T_A = 3T_B = 9T_C$
 d) $9T_A = 3T_B = T_C$
 e) $T_A = 3T_B = 6T_C$



Questão 272 - ⚙

[265 a 279]

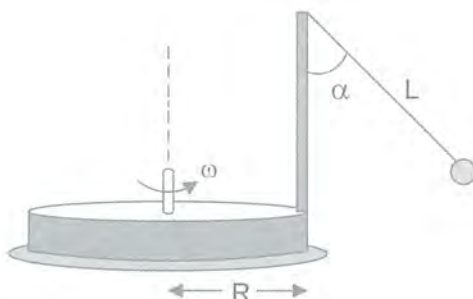
A figura mostra uma caixa de massa $M = 2,4 \text{ kg}$ em repouso sobre uma mesa fixa ao solo. Um fio ideal preso a essa caixa passa por uma polia e conecta-se a uma esfera de massa $m = 2 \text{ kg}$ que gira em MCU, descrevendo uma circunferência de raio $R = 50 \text{ cm}$, num plano horizontal com velocidade angular $\omega = 2 \text{ rad/s}$. Determine o menor coeficiente de atrito μ entre a caixa e a mesa que impede o escorregamento da caixa. Admita $g = 10 \text{ m/s}^2$.

**Questão 273 -** ⚙

[265 a 279]

A figura mostra um carrusel de raio $R = 1,5 \text{ m}$ girando em torno do seu eixo central. Um mastro fixo à sua periferia suporta um pêndulo de comprimento $L = 10 \text{ m}$ que gira solidário ao carrusel, formando um ângulo $\alpha = 37^\circ$ com a vertical. Determine a velocidade angular ω de rotação do sistema ($\sin 37^\circ = 0,6$).

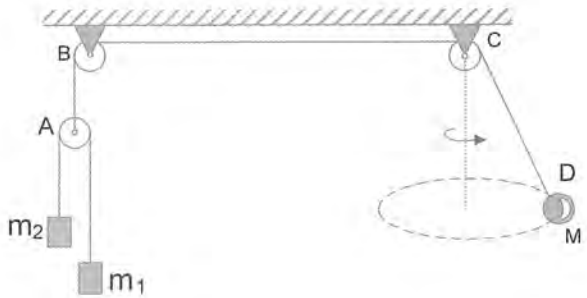
- a) 1 rad/s b) 2 rad/s c) 3 rad/s d) 4 rad/s e) 5 rad/s

**Questão 274 -** ⚙ (ITA 94)

[265 a 279]

Um fio tem presa uma massa M numa das extremidades e, na outra, uma polia que suporta duas massas, $m_1 = 3 \text{ kg}$ e $m_2 = 1 \text{ kg}$, unidas por um outro fio, como mostra a figura. Os fios têm massas desprezíveis e as polias são ideais. Se $CD = 0,8 \text{ m}$ e a massa M gira com velocidade angular constante $\omega = 5 \text{ rad/s}$ numa trajetória circular em torno do eixo vertical passando por C , observa-se que o trecho ABC do fio permanece imóvel. Considerando a aceleração gravitacional $g = 10 \text{ m/s}^2$, a massa M vale:

- a) 3 kg
 b) 4 kg
 c) 0,75 kg
 d) 1,5kg
 e) 2,5 kg

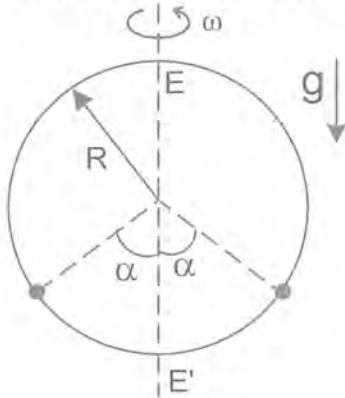


Questão 275 - \odot (ITA 92)

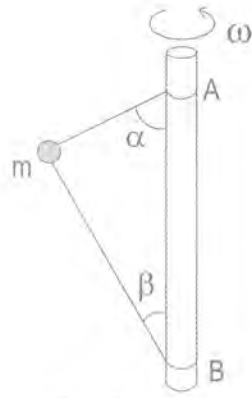
[265 a 279]

Um aro metálico circular e duas esferas de mesma massa m são acoplados, conforme a figura. As esferas são perfuradas diametralmente, de modo a poderem se deslocar ao longo do aro, sem atrito. Sabendo que o disco está girando em torno do seu diâmetro vertical (eixo EE') com velocidade angular ω , determine:

- a) a relação entre o ângulo α e a velocidade angular ω ;
 b) quando a velocidade angular ω aumenta indefinidamente ($\omega \rightarrow \infty$), o ângulo α tende a qual valor ?



Questão 275




Questão 276

Questão 276 - \odot

[265 a 279]

No sistema da figura, a bolinha de massa m está amarrada por fios de massas desprezíveis ao eixo vertical AB e gira com velocidade angular ω em torno desse eixo. A distância AB vale L e vale a relação $\alpha + \beta = 90^\circ$.

- a) Calcule as tensões nos fios superior e inferior.
 b) Para que valor de ω o fio inferior ficaria frouxo ?

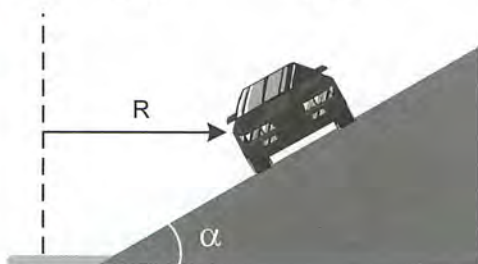

Questão 277 - 

[265 a 279]

Um veículo necessita deslocar-se num trecho circular de um autódromo, com velocidade escalar constante de 180 km/h. O raio de curvatura da trajetória é 820 m. Para que esse movimento seja possível sem fazer uso do atrito entre os pneus e a pista, a estrada deverá apresentar uma sobrelevação, em relação à horizontal, correspondente a um ângulo aproximadamente igual a (veja tabela trigonométrica adiante):

- a) 2° b) 7° c) 13° d) 17° e) 20°

	2°	7°	13°	17°
sen	0,035	0,122	0,225	0,292
cos	0,999	0,992	0,974	0,956
Tan	0,035	0,123	0,231	0,306

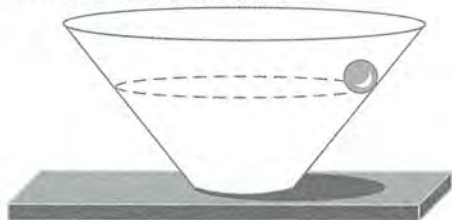

**Questão 278 -** 

[265 a 279]

O prof. Renato Brito apoiou uma vasilha de massa M e raio da base R sobre uma mesa áspera fixa ao solo. A superfície lateral da vasilha é inclinada em um ângulo $\alpha = 45^\circ$ em relação à horizontal. Uma bolinha de gude de massa m executa um MCU apoiada internamente sobre a parede lisa da vasilha. Admita que o atrito entre a mesa e a vasilha seja suficiente para que esta não escorregue e que $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Quando a velocidade angular da bolinha vale $\omega = 10 \text{ rad/s}$, a bolinha descreve uma órbita estacionária a uma certa altura H (vertical) em relação à superfície da mesa. Se a velocidade angular da bolinha for duplicada, a bolinha passará a uma nova órbita estacionária a uma altura :

- a) 7,5 cm acima da altura original
 b) 7,5 cm abaixo da altura original
 c) 5,0 cm acima da altura original
 d) 5,0 cm abaixo da altura original
 e) 2,5 cm acima da altura original

**Questão 279 -** 

[265 a 279]

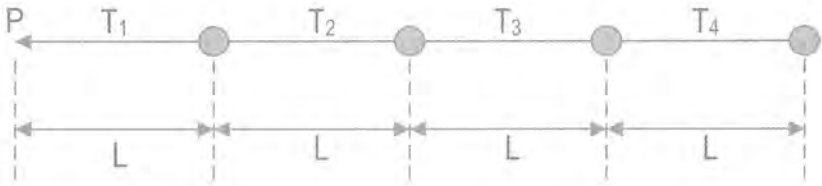
Determinar o valor do menor coeficiente de atrito estático μ entre a vasilha e a mesa, em função de M e m , a fim de que a vasilha da questão anterior ainda não escorregue em relação à mesa.

Questão 280 - ⚙️

O rotor é um brinquedo que existe em parques de diversões. Ele é constituído de um cilindro oco provido de um assoalho. As pessoas entram no cilindro e ficam em pé encostadas na parede interna. O cilindro começa a girar em torno de seu eixo vertical e a partir de uma velocidade angular mínima, o assoalho é retirado e as pessoas ficam “presas” à parede do cilindro. Sendo R o raio do cilindro, g a aceleração da gravidade e μ_E o coeficiente de atrito entre as pessoas e o cilindro, determine a velocidade angular mínima ω de rotação do cilindro a fim de que as pessoas não escorreguem durante seu movimento.

**Questão 281 - ⚙️**

Quatro corpos de massa m estão presos a um fio flexível, inextensível e de massa desprezível. O sistema todo gira com velocidade angular ω constante em torno do ponto P . Os corpos de massa m estão apoiados sobre um plano horizontal sobre o qual deslizam sem atrito. As trações nos fios de mesmo comprimento L valem T_1 , T_2 , T_3 e T_4 respectivamente. Sabendo que $T_3 = 14 \text{ N}$, determine o valor das demais trações.

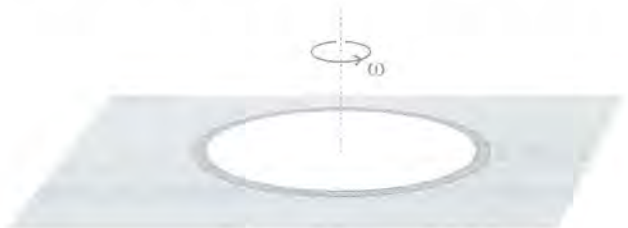
**Questão 282 - ⚙️**

[282 a 283]

Uma corrente metálica de massa $m = 40 \text{ g}$ e comprimento $L = 60 \text{ cm}$, cujos extremos estão unidos, foi colocada em um disco de madeira. O disco gira com uma frequência $f = 50$ rotações por segundo. Determine a tensão da corrente T .



Questão 282



Questão 283

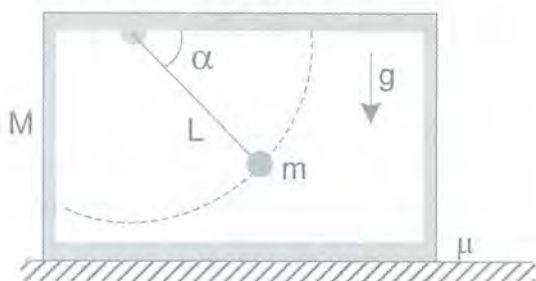
Questão 283 - ☞

[282 a 283]

Um aro circular fino feito de material elástico tem massa m e raio r quando em repouso. Esse aro é posto a girar em torno do seu eixo, como mostrado na figura, até atingir uma velocidade angular ω . Se a constante elástica do aro vale k , determine o raio final atingido pelo aro circular.

Questão 284 - ☞

Uma caixa de madeira de massa M encontra-se em repouso apoiada sobre uma superfície horizontal áspera com a qual apresenta um coeficiente de atrito estático μ . Um pêndulo simples composto por um fio de comprimento L e uma esfera de massa m , oscila preso ao teto da caixa. Sabendo que, no instante mostrado na figura, a caixa encontra-se na iminência de escorregar, determine a velocidade da bolinha nesse momento.

**Questão 285** - ☞

[285 a 290]

Um projétil foi lançado horizontalmente do alto de uma montanha com velocidade $v_0 = 40 \text{ m/s}$ numa região onde a aceleração da gravidade vale $g = 10 \text{ m/s}^2$. Assim, 3 s após o lançamento, os módulos da aceleração resultante, da aceleração tangencial atg e da aceleração centrípeta $actp$ do projétil valem, respectivamente:

- $20 \text{ m/s}^2, 12 \text{ m/s}^2, 8 \text{ m/s}^2$
- $10 \text{ m/s}^2, 6 \text{ m/s}^2, 8 \text{ m/s}^2$
- $10 \text{ m/s}^2, 8 \text{ m/s}^2, 6 \text{ m/s}^2$
- $20 \text{ m/s}^2, 8 \text{ m/s}^2, 12 \text{ m/s}^2$
- $10 \text{ m/s}^2, \text{nula}, 10 \text{ m/s}^2$

Pergunta: Qual o raio de curvatura da parábola nesse instante $t = 3 \text{ s}$?



Questão 286 - ☞

[285 a 290]

Um projétil foi lançado horizontalmente do alto de uma montanha com velocidade inicial $v_0 = 30 \text{ m/s}$ numa região onde a aceleração da gravidade vale $g = 10 \text{ m/s}^2$. Assim, 4 s após o lançamento, os módulos da aceleração resultante, da aceleração tangencial atg e da aceleração centrípeta $actp$ do projétil valem, respectivamente:

- a) 20 m/s^2 , 12 m/s^2 , 8 m/s^2
 b) 10 m/s^2 , 6 m/s^2 , 8 m/s^2
 c) 10 m/s^2 , 8 m/s^2 , 6 m/s^2
 d) 20 m/s^2 , 8 m/s^2 , 12 m/s^2
 e) 10 m/s^2 , nula, 10 m/s^2


Pergunta: Qual o raio de curvatura da parábola nesse instante $t = 4 \text{ s}$?

Questão 287 -  

[285 a 290]

Um projétil foi lançado horizontalmente do alto de uma montanha com velocidade V_0 numa região onde a aceleração da gravidade vale g . Assim, t segundos após o lançamento, determine:


- a) a aceleração tangencial a_{tg} do projétil;
 b) a aceleração centrípeta a_{cp} do projétil
 c) o raio de curvatura da trajetória parabólica.

Questão 288 - 

[285 a 290]

Um projétil foi lançado com uma velocidade inicial V_0 formando um ângulo α com a horizontal num local onde a aceleração da gravidade vale g . Após um certo tempo, a velocidade do projétil vale V . Nesse instante, a componente centrípeta a_{cp} da sua aceleração vale:


- a) $\frac{V_0}{V} \cdot g \cos \alpha$ b) $\frac{V_0}{V} \cdot g \sin \alpha$ c) $\frac{V}{V_0} \cdot g \cos \alpha$ d) $\frac{V}{V_0} \cdot g \sin \alpha$ e) $\frac{V_0}{V} \cdot g \tan \alpha$

Questão 289 - 

[285 a 290]

Um projétil foi lançado obliquamente num local a aceleração da gravidade vale g . Ao passar pelo ponto de altura máxima, sua velocidade vale U . A componente centrípeta da aceleração desse projétil, no instante em que sua velocidade vale V , é:

- a) g . b) $g \cdot \frac{U}{V}$ c) $g \cdot \frac{V}{U}$ d) $2g \cdot \frac{U}{V}$ e) $2g \cdot \frac{V}{U}$

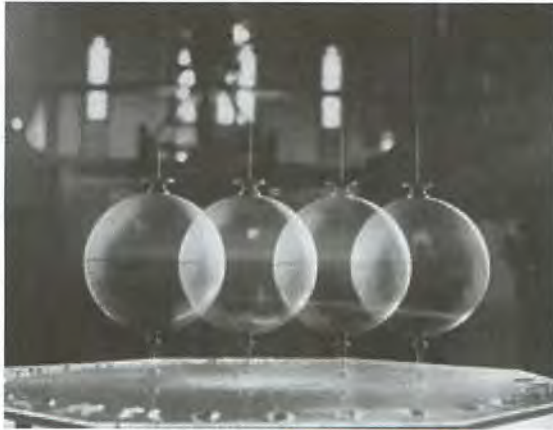
Questão 290 - 

[285 a 290]

Um projétil foi lançado obliquamente com velocidade V_0 numa direção que forma um ângulo α com a horizontal numa região onde a aceleração da gravidade vale g . Assim, t segundos após o lançamento, determine:

- a) a aceleração tangencial a_{tg} do projétil;
 b) a aceleração centrípeta a_{cp} do projétil
 c) o raio de curvatura da trajetória parabólica.

4 DINÂMICA RETILÍNEA NO REFERENCIAL NÃO INERCIAL



4.1 REVENDO O REFERENCIAL INERCIAL - GENERALIZAÇÕES

A primeira lei de Newton afirma que “se um corpo estiver livre da ação de forças, ou ele está parado e assim permanecerá indefinidamente, ou ele está em movimento retilíneo e uniforme e assim permanecerá enquanto perdurar a ausência de forças”.

A segunda lei de Newton é expressa matematicamente pela equação fundamental da Mecânica Clássica,

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (\text{eq1})$$

onde $\Sigma \vec{F}$ é a soma (vetorial) de todas as forças que agem no corpo, m é a massa do corpo e \vec{a} é a sua aceleração.

Uma análise superficial dessas leis de Newton mostra que a primeira lei de Newton é um caso particular da segunda lei, visto que, se $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$, então teremos $\vec{a} = \vec{0}$. Em outras palavras, se a força resultante que age no corpo for nula, a sua velocidade será (vetorialmente) constante, conforme estabelecido pela primeira lei.

Assim, sendo a primeira lei de Newton um caso particular da segunda lei, a primeira lei não seria redundante? Por qual motivo, então, Newton teria incluído essa versão refinada da lei da inércia de Galileu como uma das suas três leis fundamentais da Mecânica?

A resposta está na sutileza das entrelinhas – a questão do referencial. A importância da primeira lei de Newton reside no fato de ela definir um sistema de referência fundamental para toda a Mecânica, o *referencial inercial*.

Conforme discutimos no capítulo 2, um sistema de referência é dito *inercial* quando nele se verifica a lei da inércia. Um ônibus que esteja desacelerando, por exemplo, não é um referencial inercial: os passageiros sentados no interior desse ônibus observam que uma caixa, inicialmente em repouso no piso, adquire velocidade por si só e acelera para frente, durante a frenagem do veículo, sem que nenhuma força horizontal tenha agido na caixa para produzir tal aceleração. Nesse exemplo, percebe-se:

- uma clara violação da primeira lei de Newton – lei da inércia: *a caixa estava em repouso e, de repente, adquiriu movimento, naquele referencial, sem que nenhuma força horizontal tivesse atuado para alterar o seu estado de repouso inicial;*
- uma irrefutável violação da segunda lei de Newton: *no referencial do ônibus, a caixa possui aceleração horizontal, sem que haja forças horizontais para produzir tal aceleração.*

Assim, vemos que a primeira lei de Newton tem um papel independente da segunda lei e importante na definição dos sistemas de referência inerciais. Sem esta definição, não se pode escolher um sistema de referência para aplicar a segunda lei de Newton.

Quando a segunda lei de Newton afirma que a aceleração causada pela força resultante é dada por

$$\vec{a} = \frac{\Sigma \vec{F}}{m} \quad (\text{eq2})$$

Essa é a aceleração que o corpo possui em todo e qualquer *referencial inercial*.

Propriedade 5: Se dois referenciais B e C são inerciais, ou B está parado em relação a C, ou B está em MRU em relação a C. A recíproca não é necessariamente verdadeira, ou seja, o simples fato de dois referenciais estarem parados entre si não os torna referenciais inerciais.

A propriedade 5 afirma que, se houver velocidade relativa \vec{V}_{AB} entre dois referenciais inerciais A e B quaisquer, ela será necessariamente constante. A propriedade 5 pode ser reescrita conforme a seguir:

Propriedade 6: Se dois referenciais B e C são inerciais, a aceleração relativa, entre eles, é necessariamente nula $\vec{a}_{CB} = \vec{a}_{BC} = \vec{0}$. A recíproca não é necessariamente verdadeira, ou seja, se dois referenciais tiverem aceleração relativa entre si nula, eles não são necessariamente referenciais inerciais.

A partir das propriedades 5 e 6 anteriores, o que podemos inferir sobre a percepção que dois observadores inerciais B e C têm a respeito do movimento de um terceiro móvel A qualquer ?

- Será que dois referenciais inerciais B e C genéricos concordam com o valor da velocidade de um terceiro móvel A que se mova em relação a eles, ou seja, será que $\vec{V}_{AC} = \vec{V}_{AB}$?

Pela expressão geral da velocidade relativa (vetorial) entre três móveis A, B e C, mostrada abaixo

$$\vec{V}_{AC} = \vec{V}_{AB} + \vec{V}_{BC} \quad (\text{eq3})$$

Vê-se que, em geral, se dois referenciais inerciais B e C apresentarem velocidade relativa \vec{V}_{BC} entre si (isto é, se B mover-se em relação a C, então discordarão da velocidade de um terceiro móvel A (isto é, se $\vec{V}_{BC} \neq \vec{0}$, teremos $\vec{V}_{AC} \neq \vec{V}_{AB}$).

Os referenciais inerciais só concordarão com a velocidade do terceiro móvel ($\vec{V}_{AC} = \vec{V}_{AB}$) no caso em que esses referenciais estiverem parados entre si ($\vec{V}_{BC} = \vec{0}$).

- E acerca da aceleração ? Será que dois referenciais inerciais B e C genéricos sempre concordam com o valor da aceleração de um terceiro móvel A, que se mova em relação a eles, ou seja, será que $\vec{a}_{AC} = \vec{a}_{AB}$?

Ora, da propriedade 6 enunciada anteriormente, sabemos que, se B e C são referenciais inerciais, a aceleração relativa entre eles é necessariamente nula $\vec{a}_{BC} = \vec{0}$. Assim, pela expressão geral da aceleração relativa (vetorial) entre três móveis A, B e C, mostrada abaixo

$$\vec{a}_{AC} = \vec{a}_{AB} + \vec{a}_{BC} \quad (\text{eq4})$$

com $\vec{a}_{BC} = \vec{0}$, pode-se enunciar a seguinte propriedade:

Propriedade 7: Dois referenciais inerciais B e C quaisquer sempre concordam com a aceleração de um terceiro móvel A, isto é, $\vec{a}_{AC} = \vec{a}_{AB}$. Em outras palavras, a aceleração de um móvel é sempre a mesma em qualquer referencial inercial, podendo ser calculada pela segunda lei de Newton

$$\vec{a} = \frac{\Sigma \vec{F}}{m}$$

É por esse motivo que se pode afirmar que a aceleração calculada pela segunda lei de Newton é a aceleração do móvel simultaneamente **em todo e qualquer referencial inercial**.

Em linhas gerais, vimos que, embora a *velocidade* de um móvel possa assumir valores diferentes, quando medida por diferentes *referenciais inerciais*, a sua *aceleração* será sempre a mesma, ainda que medida por *distintos referenciais inerciais*. Isto decorre do fato de os *referenciais inerciais* nunca terem aceleração relativa entre si (propriedade 6).

Com efeito, se diferentes *referenciais inerciais* sempre concordam tanto com a massa m (a massa é invariante) quanto com a aceleração \vec{a} (propriedade 7) de um móvel, esses fatos nos levam a concluir que :

Propriedade 8: Todos os *referenciais inerciais* concordam a respeito de todas as forças (*forças de interação*) que agem sobre um móvel, bem como acerca da força resultante agindo sobre ele, dada pela segunda lei de Newton

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Grandezas Absolutas (que independem do Referencial inercial)

- massa;
- aceleração;
- força;
- Impulso;
- tempo, temperatura, densidade
- Adicionalmente, acrescentamos aqui **todas as leis físicas.**

Grandezas Relativas (que dependem do Referencial inercial)

- velocidade, quantidade de movimento, energia cinética
- deslocamento;
- trabalho.

Usando a linguagem matemática, dizemos que *as leis de Newton são invariantes* em mudanças de um *referencial inercial* para outro *referencial inercial*. Todos os referenciais inerciais aplicam as leis de Newton da mesma forma, ou, ainda, *todos os referenciais inerciais são equivalentes*.

É importante ressaltar que, até agora, nos ocupamos em descrever várias propriedades dos referenciais inerciais sem, no entanto, nos preocuparmos em fazer uma lista deles. Sabemos que qualquer referencial que esteja parado ou em MRU, em relação a um referencial inercial, também será um referencial inercial. A questão que surge é: qual é o referencial inercial-padrão ?

À rigor, essa busca do referencial inercial padrão é filosófica, profunda e não ampliará em nada a nossa compreensão do assunto. Objetivamente falando, a maneira prática de verificar se um referencial é ou não é inercial é testar experimentalmente a validade das leis de Newton naquele referencial.

Se, à primeira vista, nenhuma delas for violada, estaremos, em primeira aproximação, diante de um *referencial inercial*. Caso contrário, o referencial é dito *não inercial*. Lembramos que, neste livro, usaremos a aproximação de que a Terra é um *referencial inercial*.

4.2 – O REFERENCIAL NÃO INERCIAL

Dado que somos capazes de identificar, em primeira aproximação, um referencial inercial, facilmente reconheceremos um referencial *não inercial*. Afinal, será classificado como *não inercial* todo e qualquer referencial que estiver acelerado em relação a um *referencial inercial*.

Propriedade 9: Referencial não inercial é todo aquele que apresentar aceleração em relação a um referencial inercial. Por esse motivo, os referenciais não inerciais são também conhecidos como os referenciais acelerados.

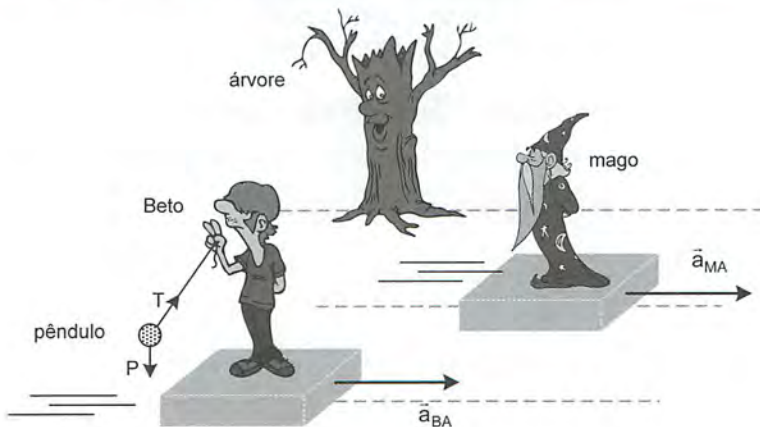
Conforme vimos anteriormente, a aceleração calculada pela segunda lei de Newton é a aceleração do móvel em relação a qualquer referencial inercial; qualquer um mesmo, visto que jamais haverá aceleração relativa entre *referenciais inerciais* (propriedade 6).

Portanto, a aceleração calculada pela segunda lei de Newton (aceleração do móvel no *referencial inercial*) jamais concordará com a aceleração do móvel num referencial não inercial, visto que sempre haverá aceleração relativa entre essas duas classes de referenciais.

Esse raciocínio confirma a tese de que:

Propriedade 10: As leis de Newton, da maneira como foram formuladas, só são válidas nos referenciais inerciais.

Exemplo Resolvido 2: A figura mostra Beto e o Mago se movendo com acelerações horizontais respectivamente $a_{BA} = 7,5 \text{ m/s}^2$ e $a_{MA} = 2,5 \text{ m/s}^2$ em relação à árvore (referencial inercial). O pêndulo suspenso por Beto permanece em repouso, no referencial do garoto, formando um ângulo $\alpha = 37^\circ$ com a vertical. Se a gravidade local vale $g = 10 \text{ m/s}^2$, o prof. Renato Brito pede que você determine ($\sin 37^\circ = 0,6$ $\cos 37^\circ = 0,8$):



- a) a aceleração do pêndulo em relação ao Beto (a_{PB});
 b) a aceleração do pêndulo em relação à árvore (a_{PA});
 c) a aceleração do pêndulo em relação ao Mago (\bar{a}_{PM}); e
 d) a aceleração do pêndulo em relação ao Mago (a_{PM}), caso este estivesse se movendo com velocidade constante $V_{MA} = 3 \text{ m/s}$ em relação à árvore.

Solução:

No referencial do Beto, o pêndulo se encontra em repouso permanente ($v' = 0$, $a' = 0$), isto é, em equilíbrio estático. Afinal, ele nem se aproxima nem se afasta do Beto, enquanto o garoto move-se em relação à Terra.

Mas o referencial do Beto é inercial ou não inercial ?

Começemos analisando a árvore. Ora, com certeza, ela é um referencial inercial, visto que não possui aceleração em relação à Terra. Afinal, ela está fixa à Terra, que é admitida como referencial inercial (propriedade 3).

Como o Mago e o Beto, entretanto, possuem aceleração em relação à Terra (ou à árvore), pela propriedade 9, eles certamente são referenciais *não inerciais*.

Comentário: note, o que faz com que o Mago e o Beto sejam classificados como referenciais não inerciais não é o fato de eles terem velocidade em relação à árvore (ou à Terra) mas, sim, o fato de cada um deles ter aceleração em relação a ela.

a) A aceleração do pêndulo em relação ao Beto é nula ($a_{PB} = 0$), visto que a velocidade do pêndulo em relação ao Beto é constante, permanentemente nula.

Tentar aplicar a segunda lei de Newton $\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$ no referencial do Beto, a fim de determinar a aceleração a_{PB} do pêndulo em relação ao Beto, seria inútil, visto que, conforme a propriedade 7, a segunda lei de Newton aplicada ao pêndulo determinará a sua aceleração em relação aos referenciais inerciais, nesse caso, em relação à Terra ou à árvore.

b) A árvore é um referencial inercial, por isso, para determinar a aceleração $a = a_{PA}$ do pêndulo em relação a ela, basta aplicar diretamente a segunda lei de Newton:

$$\text{Na vertical: } T \cdot \cos \alpha = m \cdot g \quad (\text{eq5})$$

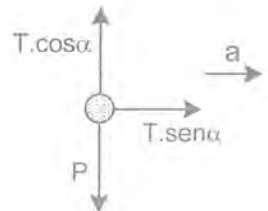
$$\text{Na horizontal: } F_R = m \cdot a \Rightarrow T \cdot \sin \alpha = m \cdot a \quad (\text{eq6})$$

Dividindo eq6 por eq5, membro a membro, vem:

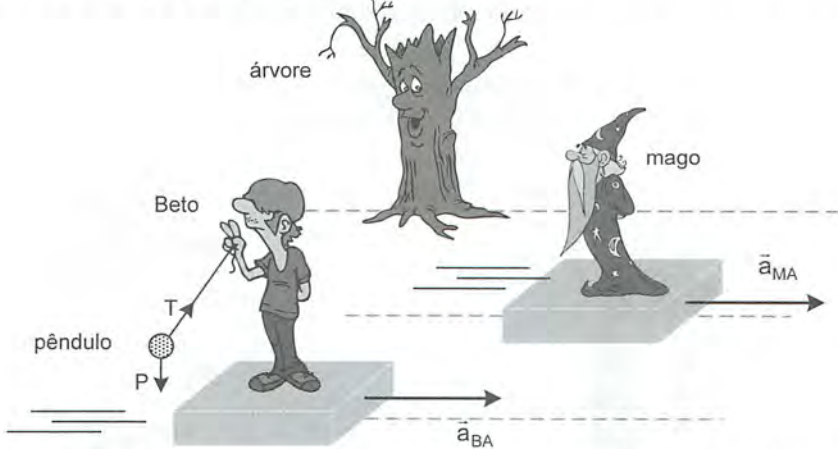
$$\frac{T \cdot \sin \alpha}{T \cdot \cos \alpha} = \frac{m \cdot a}{m \cdot g} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g} \Rightarrow$$

$$a = a_{PA} = g \cdot \operatorname{tg} \alpha = g \cdot \operatorname{tg}(37^\circ) = 10 \times 0,75$$

$$a = a_{PA} = 7,5 \text{ m/s}^2$$



Note que, conforme era esperado, a aceleração do pêndulo em relação à árvore coincidiu com a aceleração do Beto em relação à árvore (dada no enunciado) $a_{PA} = a_{BA} = 7,5 \text{ m/s}^2$, o que era esperado, visto que o pêndulo não possui aceleração em relação ao Beto.



c) Pela equação do movimento relativo, podemos dizer que a aceleração do pêndulo em relação à árvore \vec{a}_{PA} é igual à aceleração do pêndulo em relação ao Mago \vec{a}_{PM} mais a aceleração do Mago em relação à árvore \vec{a}_{MA} . Matematicamente, vem:

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PM} + \vec{a}_{MA}$$

Substituindo os vetores com os seus respectivos módulos ao lado, temos:

$$(\rightarrow 7,5) = \vec{a}_{PM} + (\rightarrow 2,5)$$

$$\vec{a}_{PM} = (\rightarrow 7,5) + (\leftarrow 2,5)$$

$$\vec{a}_{PM} = \rightarrow 5,0 \text{ m/s}^2$$

d) Se o Mago estivesse se movendo com velocidade constante $V_{MA} = 3 \text{ m/s}$ em relação à árvore (*referencial inercial*), ele teria aceleração nula $\vec{a}_{MA} = \vec{0}$ em relação à árvore, o que o tornaria um *referencial inercial* (propriedade 2, capítulo 2). Dessa forma, como a aceleração determinada no item b é a aceleração do pêndulo em *qualquer referencial inercial*, então, também será a aceleração dele em relação ao Mago movendo-se em MRU, ou seja, $\vec{a}_{PM} = \rightarrow 7,5 \text{ m/s}^2$.

Se você preferir o formalismo matemático, podemos escrever:

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PM} + \vec{a}_{MA}$$

Substituindo os vetores com os seus respectivos módulos ao lado, temos:

$$(\rightarrow 7,5) = \vec{a}_{PM} + \vec{0}$$

$$\vec{a}_{PM} = \rightarrow 7,5 \text{ m/s}^2$$

4.3 O PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA DE EINSTEIN

O Princípio da Equivalência foi formulado por Albert Einstein em 1909, constituindo a base da sua Teoria da Relatividade Geral. Ao contrário do que possa parecer, a idéia por trás desse princípio físico é bastante simples e intuitiva, com largo emprego no entendimento e resolução de problemas de Mecânica.

Para entendermos de forma clara e objetiva o Princípio da Equivalência, consideremos o nosso amigo Raulzito no interior de um elevador em repouso na Figura 47.

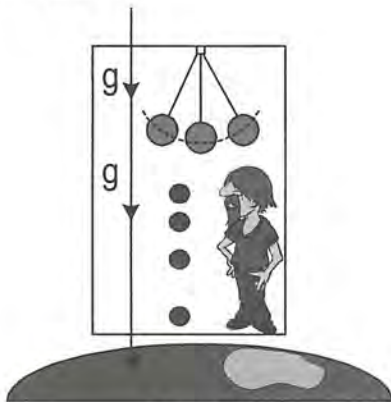


Figura 47

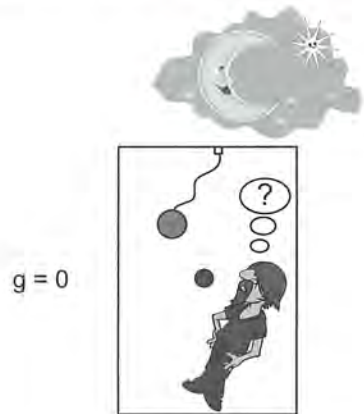


Figura 48

Devido à ação do campo gravitacional terrestre, todos os corpos localizados no interior do elevador são puxados para baixo, em direção ao centro da Terra. É por isso que um pêndulo preso ao teto oscila (Figura 47), quando abandonado do repouso com o fio inclinado; ou que uma bola de tênis de massa m cai em direção ao piso do elevador, com aceleração

$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{m \cdot g}{m} = g$$

quando abandonada a meia altura.

Até aqui, nada demais, correto? Imagine, entretanto, que o elevador do Raul seja levado ao espaço sideral, longe de qualquer estrela ou planeta, num local onde não há nenhuma grande massa causando campo gravitacional:

Se não há campo gravitacional ($g = 0$), a esfera do pêndulo (Figura 49) não sofrerá atração gravitacional e, assim, permanecerá em repouso, presa ao teto do elevador com o fio frouxo. A bola de tênis, abandonada a meia altura, agora não cairá em direção ao piso do elevador mas, sim, ficará levitando em repouso onde tiver sido abandonada.

Fisiologicamente, a sensação da pessoa, no interior do elevador, é de ausência de gravidade. É a mesma terrível sensação que uma pessoa tem

quando está em queda livre em direção a uma piscina, despencando sem nenhum apoio sob seus pés.

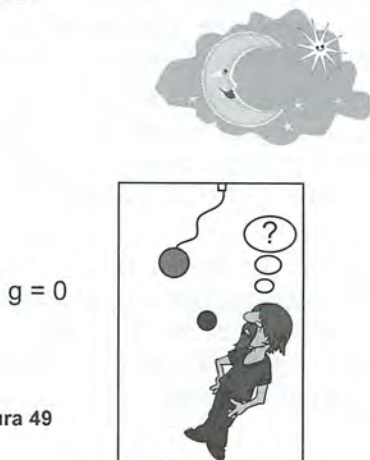


Figura 49

Voltando ao aspecto físico, a pergunta chave é: *haveria alguma forma de se produzir uma espécie de gravidade artificial no interior do elevador, de forma a fazer com que os objetos voltem a ser acelerados em direção ao piso, como ocorria na Figura 47, devolvendo ao Raul a sua sensação de peso?* A resposta é afirmativa. Para isso, devemos instalar propulsores embaixo do elevador, de forma a acelerá-lo para cima, como mostrado na Figura 50.

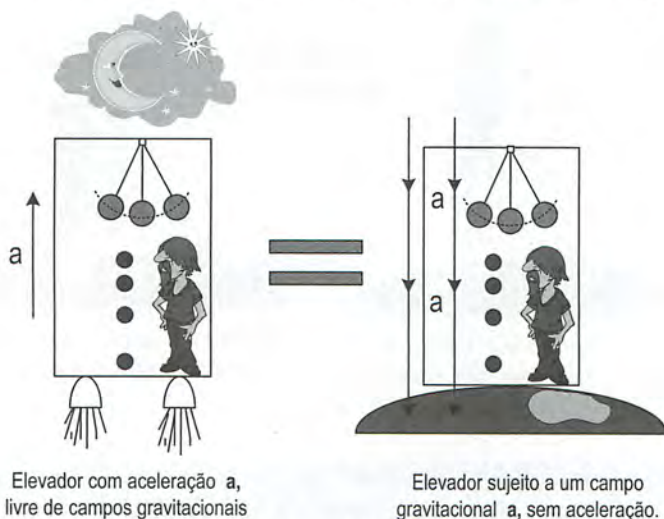


Figura 50

Quando os propulsores fornecerem ao elevador uma aceleração a (m/s^2) para cima, o que ocorrerá no interior do elevador? Ora, no referencial do elevador, a bola de tênis cairá com essa mesma aceleração a (m/s^2) em

direção ao piso. Todos os demais objetos tenderão a acelerar para baixo com aceleração a (m/s^2), da mesma forma que o fazem quando o elevador está em repouso na superfície de um planeta onde o campo gravitacional tem intensidade a (N/kg). Essa equivalência é mostrada na Figura 50.

A verdade é que essa aceleração a (m/s^2) \uparrow que o elevador possui, no referencial inercial, será sentida no referencial do elevador (referencial não inercial) como um *legítimo campo gravitacional* de intensidade a (N/kg) \downarrow , na mesma direção e sentido oposto ao da aceleração desse referencial não inercial.

Essa idéia razoavelmente intuitiva é o que chamamos de Princípio da Equivalência de Einstein. Qualquer experimento físico, quer de Mecânica, ou de Eletromagnetismo, ou de Termodinâmica, levado a cabo no interior de cada um dos elevadores da Figura 50, sempre levará aos mesmos resultados experimentais, confirmando que esses sistemas físicos são absolutamente equivalentes.

4.4 ELEVADOR ACELERADO PARA CIMA

Na Figura 51, vemos um elevador com aceleração a (m/s^2) \uparrow apontando para cima num local onde o campo gravitacional tem intensidade g (N/kg).

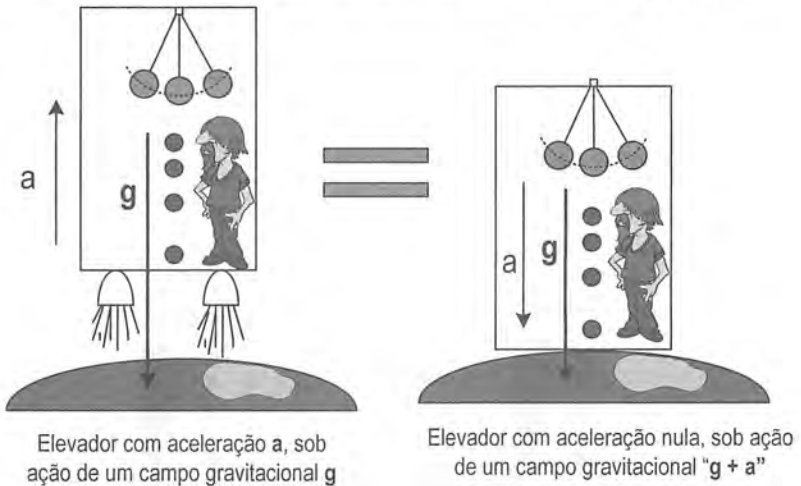


Figura 51

O Princípio da Equivalência estabelece uma equivalência entre um referencial inercial e um referencial não inercial: um elevador com aceleração a (m/s^2) \uparrow apontando para cima num local onde o campo gravitacional vale g (N/kg) equivale, do ponto de vista de quem esteja no seu interior, a um elevador com **aceleração nula** num planeta onde o **campo gravitacional vale " $g + a$ "** (N/kg).

É por esse motivo que, quando você está dentro de um elevador nessas circunstâncias, no seu dia-a-dia, tem a sensação de que o seu peso está um pouco maior do que o de costume.

Apesar de denominarmos “ $g' = g + a$ ” o campo **gravitacional resultante** ou **aparente** no interior do elevador, o seu efeito é real e claramente perceptível por qualquer pessoa em seu interior.

Considere que haja uma lâmpada fixa ao teto desse elevador e, portanto, em repouso ($v = 0$) nesse referencial. Se, durante o movimento desse elevador, ela se desprender, sua aceleração de queda-livre, naquele referencial, será visivelmente maior que a costumeira aceleração $a = g$ (m/s^2). Isso evidencia que, de fato, o campo gravitacional (N/kg) que a puxa para baixo, no referencial do elevador, vale $g' = g + a$. Assim, se a altura do teto do elevador em relação ao seu piso vale H , o seu tempo de queda T é facilmente determinado assim:

$$H = \frac{(g')T^2}{2} = \frac{(g+a)T^2}{2} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2H}{g+a}} \quad (\text{eq7})$$

Outro exemplo interessante consiste em fixar um pêndulo simples ao teto desse elevador. Genericamente, um pêndulo simples, oscilando num campo gravitacional \vec{g} (N/kg), apresenta um período T dado por:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (\text{eq8})$$

Fixando-se esse pêndulo ao teto dos elevadores da Figura 51, qual seria o período do seu movimento oscilatório? Bom, como garante o Princípio da Equivalência, esse período é exatamente o mesmo, independente de em qual dos elevadores da Figura 51 o pêndulo tenha sido fixado. Afinal, trata-se da mesma realidade física, só que interpretada de pontos de vista diferentes.

Como, entretanto, a expressão eq8 foi originalmente determinada num sistema isento de aceleração, ela é prontamente adaptada ao elevador da direita na Figura 51. Assim, o período de oscilação do pêndulo no interior de qualquer desses dois elevadores é dado por:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g'}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g+a}} \quad (\text{eq9})$$

4.5 ELEVADOR ACELERADO PARA BAIXO

A Figura 52 mostra um elevador com aceleração a (m/s^2) apontando para baixo num local onde a gravidade vale g (N/kg).

O Princípio da Equivalência estabelece que um elevador com aceleração a (m/s^2) apontando para baixo, num local onde o campo gravitacional vale g (N/kg), equivale, do ponto de vista de quem esteja no seu interior, a um elevador com **aceleração nula**, num planeta onde a **campo gravitacional** (N/kg) vale “ $g' = g - a$ ”.

É, novamente, por esse motivo que, quando você está dentro de um elevador nessas circunstâncias, no seu dia-a-dia, tem a sensação de que o seu peso está um pouco menor do que o de costume, visto que o campo gravitacional (N/kg) aparente em seu interior estará valendo $g' = g - a$. A expressão “campo gravitacional aparente”, de certa forma, poderia ser também entendido como “gravidade efetiva” ou “gravidade resultante”, na concepção do prof. Renato Brito.

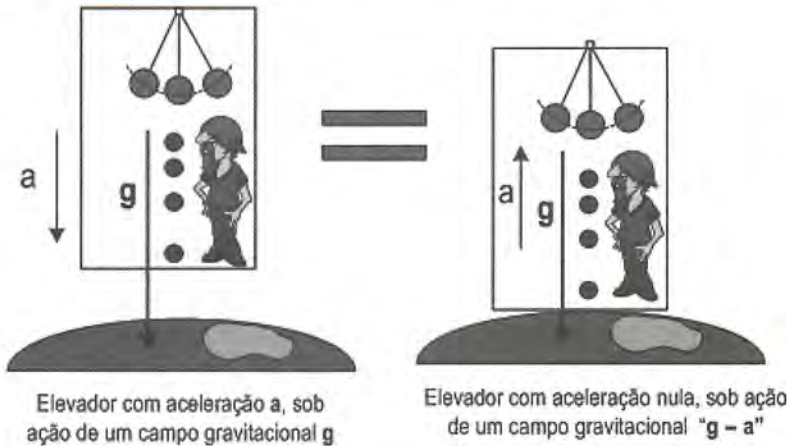


Figura 52

Se, mais uma vez, a lâmpada fixa ao teto do elevador se desprender e cair em direção ao piso, sua aceleração de queda livre será visivelmente menor do que a costumeira aceleração g (N/kg), evidenciando que, de fato, o campo gravitacional (N/kg) que a puxa para baixo naquele referencial vale $g' = g - a$. Assim, se a altura do teto do elevador em relação ao seu piso vale H , o seu tempo de queda T é facilmente determinado assim:

$$H = \frac{(g')T^2}{2} = \frac{(g - a)T^2}{2} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2H}{g - a}} \quad (\text{eq10})$$

Da mesma forma, o período de oscilação do pêndulo, no interior de qualquer dos elevadores da Figura 52, é dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g'}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g - a}} \quad (\text{eq11})$$

4.6 VAGÃO ACELERADO HORIZONTALMENTE

A Figura 53 mostra um vagão com aceleração \bar{a} (m/s²) para a direita, num local onde o campo gravitacional vale \bar{g} (N/kg). No seu interior, um pêndulo suspenso ao teto se mantém em repouso em relação ao vagão, com uma inclinação permanente α com a vertical.

Assim, do ponto de vista de um referencial inercial fixo ao solo, a esfera do pêndulo descreve uma trajetória retilínea horizontal, compartilhando da mesma aceleração \vec{a} do vagão, graças à componente $T_x \rightarrow$ da tração que age sobre ela. Assim, esse referencial escreverá a segunda lei de Newton na horizontal:

$$\bullet F_R = m.a \Rightarrow T_x = m.a \Rightarrow T.\text{sen}\alpha = m.a \quad (\text{eq12})$$

Como a bola não apresenta aceleração vertical, as forças devem se equilibrar mutuamente nessa direção. O referencial inercial escreverá:

$$\bullet \text{Equilíbrio vertical: } T_y = P \Rightarrow T.\text{cos}\alpha = m.g \quad (\text{eq13})$$

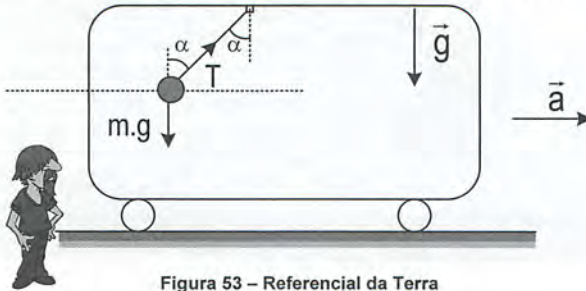


Figura 53 – Referencial da Terra

Dessa forma, dividindo as relações eq12 e eq13, membro a membro, o referencial inercial conclui que a aceleração do vagão (e conseqüentemente da bola do pêndulo) se relaciona com o ângulo α de inclinação do pêndulo segundo a expressão:

$$a = g.\text{tg}\alpha \quad (\text{eq14})$$

Agora, observemos todo esse cenário a partir do referencial do próprio vagão (Figura 54), referencial este que se encontra acelerado em relação à Terra, constituindo-se, portanto, um referencial não inercial.

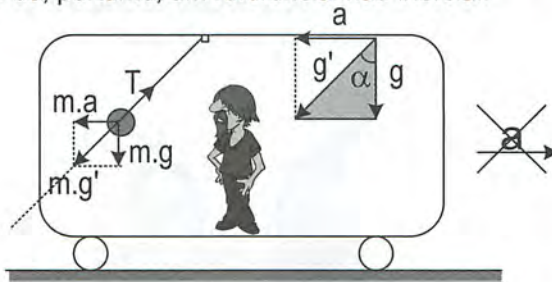


Figura 54 – Referencial do vagão

Para efetuarmos essa mudança de referencial, garantindo ainda a validade das leis de Newton no referencial acelerado, faremos uso do Princípio da Equivalência: a aceleração a (m/s^2) \rightarrow (que o vagão possui no referencial da Terra) será substituída (no referencial do vagão) por um “campo gravitacional adicional” $\leftarrow a$ (N/kg) de mesmo valor, mesma direção e sentido contrário da

aceleração a (m/s^2) → que será “esquecida”, visto que o vagão não apresenta tal aceleração no referencial do próprio vagão (☺ obviamente....).

Nesse ponto, é importante chamar a atenção do leitor para não usar mais o termo **aceleração** (m/s^2) para se referir ao vetor $\leftarrow a$ que se encontra dentro do vagão (Figura 54). Nesse referencial do vagão, esse vetor $\leftarrow a$ designa um campo gravitacional $a \leftarrow$ (N/kg).

Adicionalmente, não devemos achar que uma aceleração (m/s^2) e um campo gravitacional (N/kg) tratam-se da mesma entidade física, só porque eles têm unidades físicas iguais ($1 N/kg = 1 kg \cdot m \cdot s^{-2} / kg = 1 m/s^2$) e o Princípio da Equivalência estabelece uma equivalência entre eles. Existem outras grandezas tais como momento de uma força ($N \cdot m$) e trabalho ($N \cdot m = joule$) que também apresentam unidades físicas iguais mas que têm significados físicos bem distintos.

A aceleração é o efeito dinâmico de uma força ($a = F_R / m$) que, ao agir sobre um corpo de massa m , que faz a sua velocidade sofrer alterações no ritmo $\Delta v / \Delta t$ dado por essa aceleração a , ou seja, $a = F_R / m = \Delta v / \Delta t$. Por outro lado, um campo gravitacional g é um ente abstrato que, ao agir sobre um corpo qualquer de massa m , imprime sobre ele uma força gravitacional (atrativa) de intensidade $F_{grav} = m \cdot g$. É possível um corpo possuir aceleração mesmo sem sofrer a ação de um campo gravitacional e vice-versa, de forma que aceleração e campo gravitacional são entidades física distintas. O que o Princípio de Einstein faz é estabelecer uma equivalência entre elas, numa mudança de um referencial inercial para um não-inercial.

Assim, do ponto de vista de quem se encontra no referencial do vagão (Figura 54), haverá dois campos gravitacionais a e g igualmente legítimos, conforme estabelecido pelo Princípio da Equivalência.

Ora, mas campos gravitacionais produzem forças gravitacionais ao atuarem sobre massas, não é verdade? Assim, da mesma forma que a gravidade $g \downarrow$ (gerada pela massa da Terra) age sobre a massa m do pêndulo, produzindo sobre esta a força gravitacional $m \cdot g \downarrow$; a gravidade $a \leftarrow$ (fruto da mudança do referencial inercial para o não inercial) também agirá sobre a referida massa m , produzindo nela a *força gravitacional* $m \cdot a \leftarrow$ como mostrado na Figura 54.



Nesse referencial acelerado, após fazermos uso do Princípio da Equivalência, adicionando a gravidade $a \leftarrow$ ao sistema, bem como a respectiva força gravitacional $m \cdot a \leftarrow$, as leis de Newton voltam a ser satisfeitas (embora se trate de um referencial não inercial ☺).

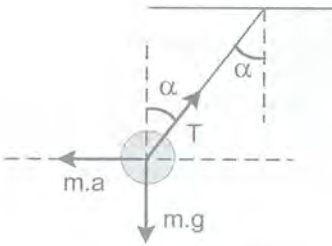


Figura 55

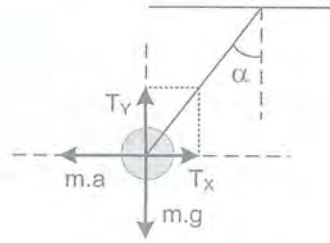


Figura 56

- No referencial do vagão, a bola do pêndulo se encontra em repouso permanente ($v' = 0$, $a' = 0$). Por se tratar de equilíbrio num referencial não inercial, usaremos a denominação **equilíbrio relativo**.

Ordinariamente, utiliza-se o termo “equilíbrio” apenas quando se trata de um equilíbrio em um referencial inercial, reservando a expressão “equilíbrio relativo” para o caso em que o equilíbrio ocorrer em um referencial não inercial. O estudante deve seguir essa convenção ao fazer uso dessas ferramentas na resolução de questões discursivas.

- As forças que agem nessa bola, nesse referencial, são o seu peso $m.g$, a tração T e a força de inércia $m.a$ (veja Figura 55). A força de inércia é uma força gravitacional fictícia.
- Na direção horizontal (Figura 56), a força de inércia “ $m.a$ ” equilibra a componente horizontal T_x da tração: $T_x = T.\text{sen}\alpha = m.a$ (eq15)
- Na direção vertical (Figura 56), o peso $m.g$ da bola equilibra a componente vertical T_y da tração: $T_y = T.\text{cos}\alpha = m.g$ (eq16)

Das relações eq15 e eq16, o observador que se encontra no interior do vagão (Figura 54) concluirá que a inclinação α do pêndulo se relaciona com as gravidades a e g no seu referencial, segundo a expressão:

$$a = g.\text{tg}\alpha \quad (\text{eq17})$$

Comparando as relações eq12, eq13 e eq14, escritas pelo referencial inercial, com as relações eq15, eq16 e eq17, escritas pelo referencial acelerado, vemos que ambos chegam às mesmas equações e, portanto, aos mesmos resultados, apesar de usarem argumentos e princípios físicos distintos, conforme o referencial de cada um.

Ainda na Figura 54, uma segunda forma alternativa do referencial não inercial interpretar o que se passa no interior do vagão é considerar a ação de uma única gravidade resultante g' que será a soma vetorial das gravidades parciais :

$$\vec{g}' = \vec{g} + \vec{a} \quad (\text{eq18})$$

Seu módulo pode ser determinado pelo Teorema de Pitágoras ou calculando o cosseno de α no triângulo em destaque na Figura 54.

$$g' = \sqrt{g^2 + a^2} = \frac{g}{\cos \alpha} \quad (\text{eq-19})$$

Do ponto de vista do referencial no interior do vagão (Figura 54), a gravidade deixou de ser \vec{g} (Figura 53) e passou a ser \vec{g}' (Figura 54). As forças que agem na bola do pêndulo, nesse contexto, são a tração T e o peso da bola $P' = m.g'$.

Estando o pêndulo, em equilíbrio *relativo* nesse referencial, as forças T e P' que agem na bola (Figura 54) têm o mesmo valor, mesma direção e sentidos contrários de forma a se cancelarem (mutuamente) :

$$T = P' \Rightarrow T = m.g'$$

Adicionalmente, essa gravidade resultante \vec{g}' define uma nova direção vertical e, conseqüentemente uma nova direção horizontal perpendicular a ela nesse referencial, como mostra a Figura 57.

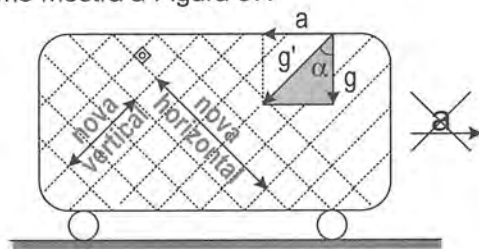


Figura 57 – novas direções horizontal e vertical

Basicamente, o sistema de “coordenadas convencional XoY ” sofreu uma rotação de um ângulo α tal que $\text{tg}\alpha = a/g$, conforme o triângulo retângulo em destaque na Figura 57. A nova vertical, definida pela direção da nova gravidade \vec{g}' , forma um ângulo α com a vertical original.

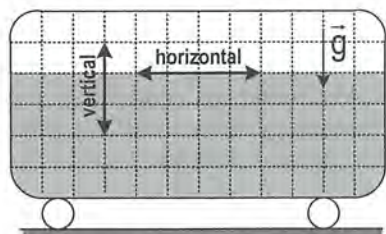


Figura 58 - superfície da água caso o vagão seja um referencial inercial

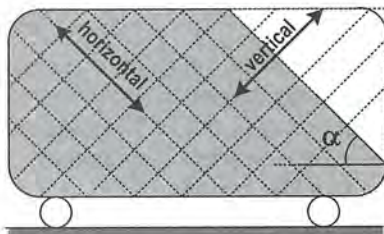


Figura 59 - superfície da água caso o vagão seja um referencial não inercial

A própria natureza adapta-se perfeitamente a essas novas direções vertical (direção de \vec{g}') e horizontal (direção perpendicular a \vec{g}') redefinidas no referencial não inercial. Uma comprovação experimental desse fato é o interessante comportamento da superfície livre de um líquido que preencha o interior de um vagão apoiado sobre trilhos retilíneos:

- Caso o vagão esteja parado ou em MRU num referencial inercial, a superfície livre do líquido repousará na horizontal, conforme a lei de Stevin, da Hidrostática (Figura 58);
- Caso o vagão esteja se movendo com aceleração constante $a \rightarrow$, ele constituirá um referencial não inercial e a superfície livre do líquido nele contido agora repousará na nova direção horizontal (Figura 59) como se, para o líquido, o campo gravitacional resultante $\mathbf{g}' \swarrow$ que reina nesse referencial não inercial fosse tão natural quanto a antiga gravidade $\mathbf{g} \downarrow$ convencional. Nesse caso, a lei de Stevin, da Hidrostática também, precisará ser adaptada para esse referencial não inercial. Faremos isso no volume 3 dessa coleção, no capítulo de Hidrostática.

A verdade é que, como os líquidos não são *Homo sapiens* nem *muliere sapiens* ☺, para eles, de fato, nada incomum está ocorrendo no referencial acelerado.

Quando um pêndulo simples, fixo ao teto do vagão, é abandonado em repouso nessa nova direção vertical, ele tende a permanecer estacionário alinhado à direção de \mathbf{g}' .

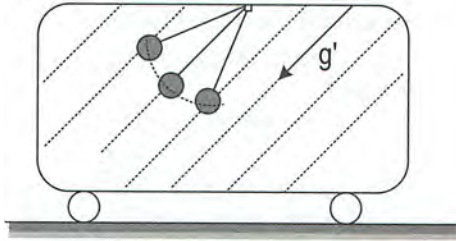


Figura 60 - pêndulo simples oscilando no referencial acelerado

Se, porém, o seu equilíbrio for perturbado, o pêndulo inclinado executará um MHS (Figura 60), oscilando simetricamente em relação à direção do novo campo gravitacional \mathbf{g}' (como de costume), com período de oscilação dado por :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g'}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{\sqrt{g^2 + a^2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g \cos \alpha}} \quad (\text{eq20})$$

4.7 FORÇAS DE INTERAÇÃO E FORÇAS DE INÉRCIA

Seja um vagão que move-se sobre trilhos retilíneos (Figura 61) com aceleração $\mathbf{a} \rightarrow$ em relação à Terra, constituindo-se, portanto, um referencial não inercial.

No interior desse vagão, vemos dois corpos A e B, abandonados do repouso, em relação ao vagão, conectados entre si mediante fio e polia ideais, sobre uma mesa lisa.

Exemplo Resolvido 3: dadas as massas dos corpos $m_A = 8 \text{ kg}$ e $m_B = 2 \text{ kg}$, a aceleração do vagão $a = 3 \text{ m/s}^2$ e a gravidade local $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine:
 a) a aceleração adquirida por cada corpo;
 b) a tração no fio;
 c) quanto tempo o bloco A leva para percorrer a distância $d = 80 \text{ cm}$ e encostar na parede traseira do vagão. Admita que o bloquinho parte do repouso em relação ao vagão.

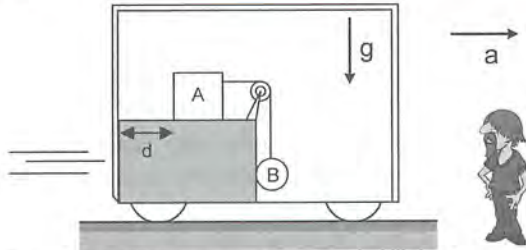


Figura 61 - vagão movendo-se em relação à Terra (referencial não-inercial) com aceleração constante a .

1ª Resolução – no referencial Inercial (Terra)

Facilmente identificamos todas as forças que agem em cada um dos corpos A e B do sistema (Figura 62):

- a caixa A interage com a superfície horizontal lisa da mesa, recebendo dela uma força de contato normal $N \uparrow$, bem como recebe uma força de tração $T \rightarrow$ devido à corda e finalmente uma força gravitacional $m_A \cdot g \downarrow$ em virtude da gravidade terrestre $g \downarrow$. A ação exclusiva dessas três forças determinará a aceleração dessa caixa $a_{AT} \rightarrow$ em relação à Terra (referencial inercial);
- a esfera B, por sua vez, recebe uma força de contato $f \rightarrow$ horizontal devido à parede da mesa, bem como uma tração $T \uparrow$ e uma força gravitacional $m_B \cdot g \downarrow$ em decorrência da gravidade terrestre. A ação exclusiva dessas três forças determinará a aceleração $a_{BT} \searrow$ dessa caixa em relação à Terra (referencial inercial).

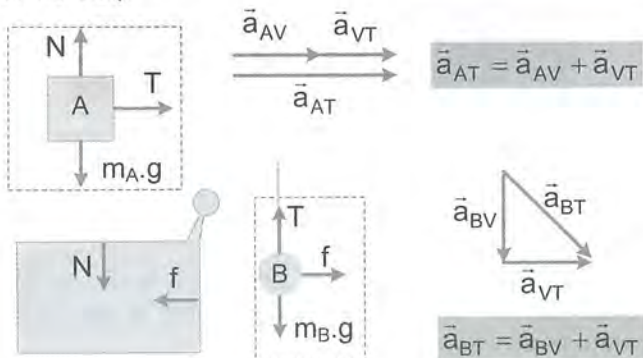


Figura 62

- \vec{a}_{AT} = aceleração do corpo A em relação a Terra;
- \vec{a}_{AV} = aceleração do corpo A em relação ao vagão;
- \vec{a}_{VT} = aceleração do vagão em relação à Terra;
- \vec{a}_{BT} = aceleração do corpo B em relação a Terra; e
- \vec{a}_{BV} = aceleração do corpo B em relação ao vagão.
- \vec{a}_{VT} = aceleração do vagão em relação à Terra.

Como o fio que conecta as caixas A e B não estica, podemos garantir que os corpos A e B apresentam acelerações de módulos iguais no referencial do vagão, ou seja:

$$|\vec{a}_{AV}| = |\vec{a}_{BV}| = a'$$

A aceleração do vagão em relação à Terra tem módulo:

$$|\vec{a}_{VT}| = a = 3 \text{ m/s}^2$$

Isto posto, os diagramas vetoriais da Figura 62 podem ser redesenhados assim:

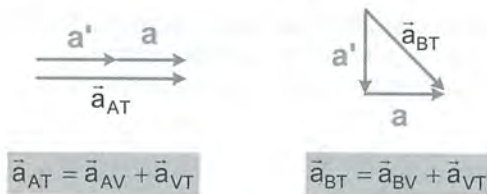


Figura 63 - aceleração de A e B, em relação à Terra, e suas componentes

Como sabemos, a segunda lei de Newton ($F_R = m \cdot a$) relaciona as forças que agem no corpo com a sua aceleração em relação à Terra (ou qualquer outro referencial inercial). Nos diagramas da Figura 63, vemos que o corpo A possui aceleração \vec{a}_{AT} em relação à Terra de módulo:

$$|\vec{a}_{AT}| = a + a' \quad (\text{eq 21})$$

Já a aceleração \vec{a}_{BT} do corpo B em relação à Terra possui componentes horizontal e vertical cujos módulos são dados por:

$$\text{Componente horizontal: } |\vec{a}_{BTX}| = a \quad (\text{eq 22})$$

$$\text{Componente vertical: } |\vec{a}_{BTY}| = a' \quad (\text{eq 23})$$

Assim, analisando o **corpo A** (Figura 62), temos :

- na vertical (equilíbrio): $N = m_A \cdot g$ (eq 24)
- na horizontal, a caixa A (Figura 62) move-se com aceleração \vec{a}_{AT} sob ação da tração T. Assim, pela segunda lei de Newton :

$$F_R = m_A \cdot a_{AT}, \text{ com } a_{AT} = a + a' \quad (\text{veja eq21})$$

$$T = m_A \cdot (a + a') \quad (\text{eq 25})$$

Analisando o **corpo B**, temos:

- Na vertical, a esfera B desce com aceleração vertical \vec{a}_{BTY} r.o referencial da Terra (inercial). A segunda lei de Newton permite escrever:

$$F_{RY} = m_B \cdot a_{BTY}, \text{ com } a_{BTY} = a' \text{ (veja eq23)}$$

$$(m_B \cdot g - T) = m_B \cdot a' \quad \text{(eq 26)}$$

- Na horizontal, a esfera B move-se com aceleração horizontal \vec{a}_{BTX} no referencial da Terra (inercial). A segunda lei de Newton permite escrever:

$$F_{RX} = m_B \cdot a_{BTX}, \text{ com } a_{BTX} = a \text{ (veja eq22)}$$

$$f = m_B \cdot a \quad \text{(eq 27)}$$

Para determinar o valor de a' , podemos somar as relações eq25 e eq26, membro a membro:

$$m_B \cdot g = m_A \cdot (a + a') + m_B \cdot a'$$

Sendo $m_A = 8 \text{ kg}$, $m_B = 2 \text{ kg}$ e $a = 3 \text{ m/s}^2$, vem:

$$2 \cdot (10) = 8 \cdot (3 + a') + 2 \cdot a' \Rightarrow a' = -0,4 \text{ m/s}^2 \quad !!$$

Em nossos cálculos, subentendemos que a aceleração dos corpos A e B em relação ao vagão seria a' com o sentido indicado na Figura 64. Essa hipótese, entretanto, nos levou a um valor negativo para a' !

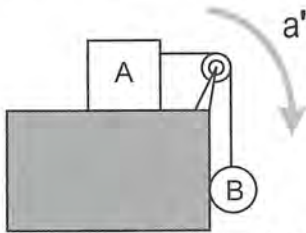


Figura 64 - sentido original convencionado para a' durante os cálculos, resultando um valor negativo para a'

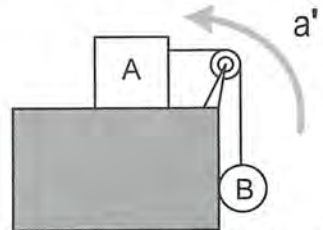


Figura 65 - novo sentido convencionado para a' , resultando um valor positivo para a'

Isso sugere que, na verdade, os blocos A e B nesse sistema aceleram no sentido indicado na Figura 65, na qual temos $a' = +0,4 \text{ m/s}^2$. Assim, chegamos à *surpreendente conclusão* de que a esfera B acelerará para cima \uparrow , ao passo que a caixa A acelerará para trás \leftarrow , no referencial do vagão.



Figura 66 - aceleração de A e B, em relação à Terra, e suas componentes

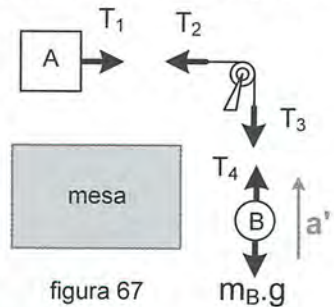
Os vetores aceleração de módulo a' que aparecem nos diagramas da Figura 63 também devem ter o seu sentido invertido. Os novos diagramas de aceleração para os corpos A e B aparecem na Figura 66.

As relações eq21, eq25 e eq26 também precisarão ser adaptadas, por conta da inversão do sentido da aceleração a' mostrada na Figura 65.



A explicação para a subida da esfera B, dada pelo referencial inercial observando tudo de fora do trem, em geral, é desconfortável e não agrada muito o estudante. De fato, ela é pouco intuitiva.

A idéia é afirmar que, por inércia, a caixa A resiste a ser acelerada em relação à Terra. O vagão acelera $\rightarrow a$, mas a caixa A tenta permanecer inerte. Assim, como a esfera B, a mesa e a polia aceleram violentamente para a direita, e o fio não estica, ele finda puxando a caixa A com uma grande tração $\rightarrow T_1$ que reage, por sua vez, exercendo uma grande tração $T_2 \leftarrow$, que se propaga pelo fio e finda exercendo uma grande tração $T_4 \uparrow$ na esfera, que supera o seu peso $m_B \cdot g$ e a acelera para cima também.



A caixa A, portanto, escorrega para trás, em relação à mesa fixa ao vagão, porque resiste a acompanhar a aceleração do vagão, provocando a subida da esfera B. Quanto maior for a massa da caixa A, maior será a sua inércia, maior será a sua resistência a ser acelerada.

Em relação à Terra, todavia, a caixa A acelera para a esquerda ou para a direita ? Ora, observando o diagrama de acelerações dessa caixa na Figura 66, considerando os módulos das acelerações $a = 3 \text{ m/s}^2$ e $a' = 0,4 \text{ m/s}^2$, vemos que $\vec{a}_{AT} \rightarrow$ apontará para a direita mesmo, com módulo :

$$|\vec{a}_{AT}| = a - a' = 3 - 0,4 = 2,6 \text{ m/s}^2. \quad (\text{eq 28})$$

Ora, mas já era esperado que a caixa A apresentaria aceleração $\vec{a}_{AT} \rightarrow$ para a direita, no referencial inercial (Terra), visto que a força resultante $T_1 \rightarrow$ sobre ela aponta para a direita.

Para determinar a intensidade dessa tração T_1 no fio, podemos aplicar diretamente a segunda lei de Newton na direção horizontal para a caixa A (Figura 67):

$$F_R = m_A \cdot a_{AT}, \text{ com } |\vec{a}_{AT}| = a - a' \text{ (veja eq28)}$$

$$T_1 = m_A \cdot (a - a') = 8 \cdot (3 - 0,4)$$

$$T_1 = 20,8 \text{ N}$$

É importante atentar para o fato de que, em todos os casos até agora, a aceleração que tem figurado na segunda lei de Newton é a aceleração do corpo em relação a um referencial inercial (nesse caso, a Terra). Adiante, com o uso do Princípio da Equivalência, adaptaremos a segunda lei de Newton para que ela passe a calcular acelerações dos corpos nos referenciais acelerados.

Assim, considerando que o fio é ideal (massa nula), bem como a lei da ação-reação, temos $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = T = 20,8 \text{ N}$

Uma forma alternativa de determinar a tração T no fio é aplicar a segunda lei de Newton na esfera B, na vertical (Figura 67):

$$F_R = m_B \cdot a' \Rightarrow T_4 - m_B \cdot g = m_B \cdot a'$$

$$T_4 - 2 \cdot (10) = 2 \cdot (0,4)$$

$$T_4 = 20,8 \text{ N}$$

Finalmente, para se determinar o tempo t que a caixa A leva para partir do repouso com aceleração a' , no referencial do vagão, e percorrer uma distância $d = 80 \text{ cm} = 0,8 \text{ m}$ (nesse referencial) até atingir a parede traseira do vagão (Figura 61), faremos uso da cinemática do MUV:

$$d = V_o \cdot t + \frac{a' \cdot t^2}{2}, \text{ com } V_o = 0$$

$$0,8 = 0 + \frac{0,4 \cdot t^2}{2} \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

A seguir, analisaremos todo esse problema novamente, sendo que agora do ponto de vista de um referencial que se encontra dentro do vagão, acelerado juntamente com o vagão, em relação à Terra. Resolveremos o problema no referencial não inercial.

Exemplo Resolvido 3 - 2ª Resolução – No Referencial não inercial:

Vimos que nosso sistema de corpos A e B se encontra no interior de um vagão que move-se com aceleração (m/s^2) constante $a \rightarrow$ em relação à Terra. Logicamente, o vagão apresenta essa aceleração (m/s^2) $\rightarrow a$ em relação ao referencial inercial (a Terra, por exemplo), mas não apresenta aceleração alguma em relação a si mesmo (obviamente..... ☺).

Faremos então uma mudança de referencial. Traremos toda a análise do referencial inercial para o referencial acelerado. Ora, conforme acabamos de dizer, no próprio referencial do vagão, essa aceleração (m/s^2) $\rightarrow a$ é inexistente, sendo substituída (Figura 68) por um campo gravitacional (N/kg) $a \leftarrow$ extra, de mesmo módulo da referida aceleração desse referencial.

Esse campo gravitacional (N/kg) $a \leftarrow$ será adicionada (vetorialmente) ao campo gravitacional (N/kg) $\downarrow g$ já existente naquele referencial (gerada pela massa da Terra), conforme estabelecido pelo Princípio da Equivalência de Einstein, de forma que, no interior do vagão, haverá duas gravidades a e g legítimas.

Ora, da mesma forma que a gravidade $g \downarrow$ causa forças gravitacionais $m_A \cdot g \downarrow$ e $m_B \cdot g \downarrow$ em cada uma das massas m_A e m_B do sistema, a gravidade $a \leftarrow$ também causará forças gravitacionais $m_A \cdot a \leftarrow$ e $m_B \cdot a \leftarrow$ em cada uma das massas m_A e m_B do sistema.

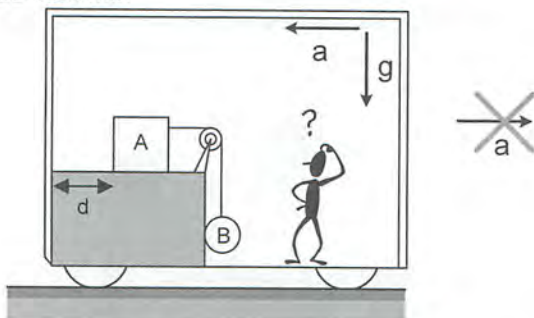


Figura 68 - vagão parado no referencial do vagão, sem aceleração nem velocidade no referencial do vagão.

Essas forças ($m_A \cdot a$ e $m_B \cdot a$) são chamadas de **forças de inércia** ou **forças fictícias** pois, diferentemente das **forças de interação**, elas não foram *exercidas* por nenhum outro corpo, apesar de agirem sobre todos os corpos que se encontrem no referencial acelerado do vagão.

Assim, cada uma dessas forças fictícias não apresenta a sua respectiva reação, visto que elas não decorrem da interação de dois corpos.

Propriedade 11: Forças de inércia ou forças fictícias não admitem reação, visto que não decorrem da interação de dois corpos. Para tais forças, o princípio da Ação e Reação não se aplica.

Apesar, porém, da denominação “*forças fictícias*”, seus efeitos são tão reais quanto os efeitos das “*forças de interação*”. Em outras palavras, as forças fictícias podem acelerar (ou deformar) corpos no referencial não inercial da mesma forma que as forças de interação o fazem.



O referencial acelerado perceberá todas as forças reais, isto é, as forças comuns percebidas pelo referencial inercial (as forças da Figura 62) e, adicionalmente, verá uma força gravitacional extra, fictícia, em cada massa do sistema.

Assim, o diagrama de forças, no referencial acelerado, ficará:

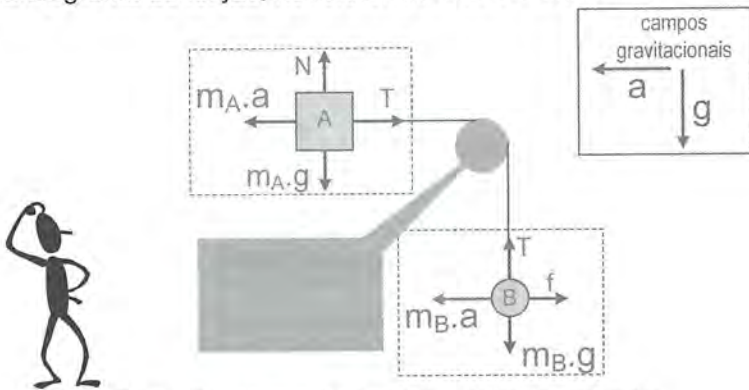


Figura 69 – diagrama de forças no referencial acelerado

Observando a Figura 69, vemos que a força de inércia $\leftarrow m_A \cdot a$ tenta puxar o bloco A para trás \leftarrow e, indiretamente, suspender \uparrow a bola B através do fio. O peso $m_B \cdot g$, por sua vez, age no sentido oposto da força de inércia $m_A \cdot a$. Assim, há três possibilidades para a aceleração a' desses corpos em relação ao vagão:

- 1) Caso $m_A \cdot a = T = m_B \cdot g \Rightarrow$ equilíbrio relativo $\Rightarrow a' = 0$
- 2) Caso $m_B \cdot g > m_A \cdot a \Rightarrow$ corpo B acelera para baixo (Figura 70)
- 3) Caso $m_A \cdot a > m_B \cdot g \Rightarrow$ corpo B acelera para cima (Figura 71)

Efetando os cálculos para $m_A = 8 \text{ kg}$, $m_B = 2 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $a = 3 \text{ m/s}^2$, vem:

$$m_A \cdot a = 8 \times 3 = 24 \text{ N}$$

$$m_B \cdot g = 2 \times 10 = 20 \text{ N}$$

Assim, como temos $m_A \cdot a > m_B \cdot g$, os blocos vão apresentar, no referencial não inercial, uma aceleração a' com o sentido indicado na Figura 71.

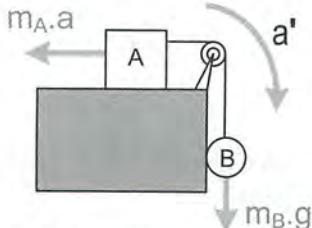


Figura 70 - Sentido da aceleração a' , caso tenhamos $m_B \cdot g > m_A \cdot a$

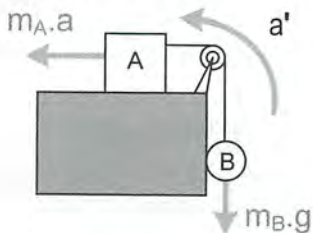


Figura 71 - Sentido da aceleração a' , caso tenhamos $m_A \cdot a > m_B \cdot g$

Considerando, então, o diagrama de forças da Figura 72, o observador não inercial poderá escrever duas equações de “equilíbrio relativo”:

- esfera B – equilíbrio relativo na horizontal: $f = m_B \cdot a$
- caixa A – equilíbrio vertical: $N = m_A \cdot g$

Para determinar a aceleração a' dos corpos A e B, no referencial não inercial, basta agora aplicarmos a segunda lei de Newton a cada um dos blocos da Figura 72, na direção da sua respectiva aceleração a' .

Profinho, o senhor tinha dito que as leis de Newton só funcionam no referencial inercial. Como iremos fazer uso delas também nos referenciais acelerados ?



A chave é o Princípio da Equivalência, Claudete.



Você tem razão, Claudete. Se, entretanto, fizermos uso do Princípio da Equivalência de Einstein, acrescentando adequadamente as forças de inércia, as leis de Newton voltam a ser válidas nesse referencial, ainda que seja não inercial.

Assim, aplicando a segunda lei de Newton para a caixa A na horizontal (Figura 72), vem:

$$F_R = m_A \cdot a'$$

$$(m_A \cdot a - T) = m_A \cdot a' \quad (\text{eq 29})$$

Aplicando a segunda lei de Newton para a bola B na vertical (Figura 72), vem:

$$F_R = m_B \cdot a'$$

$$(T - m_B \cdot g) = m_B \cdot a' \quad (\text{eq 30})$$

Somando as relações eq29 e eq30, membro a membro, vem:

$$m_A \cdot a - m_B \cdot g = (m_A + m_B) \cdot a'$$

Substituindo $m_A = 8 \text{ kg}$, $m_B = 2 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $a = 3 \text{ m/s}^2$, temos:

$$8 \cdot 3 - 2 \cdot 10 = (8 + 2) \cdot a'$$

$$a' = 0,4 \text{ m/s}^2$$

Dessa forma, determinamos a aceleração a' dos corpos A e B em relação ao vagão. Substituindo a' em na relação eq30, vem:

$$(T - 2 \cdot 10) = 2 \cdot (0,4)$$

$$T = 20,8 \text{ N}$$

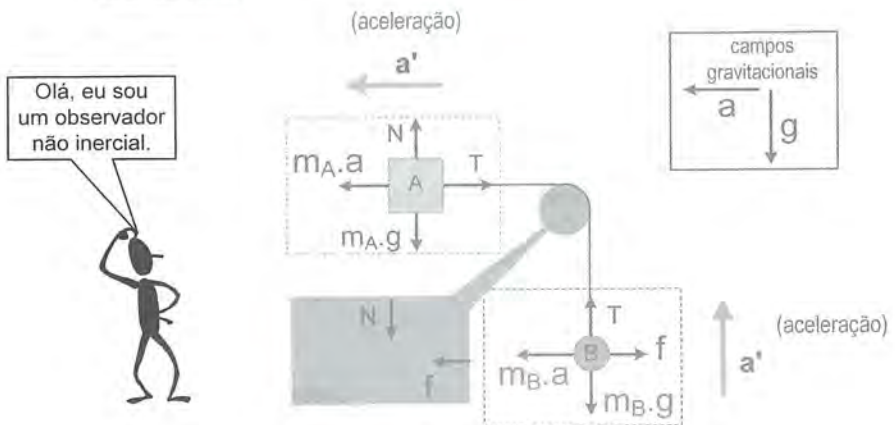


Figura 72 – Diagrama de forças no referencial acelerado

O prof Renato Brito acredita que a análise do problema no *referencial acelerado* se torna mais clara e intuitiva para o leitor do que a resolução do mesmo problema no *referencial inercial*.

Enquanto, no referencial inercial, alegamos que a caixa A move-se para trás, em relação ao vagão, por inércia (argumento que os estudantes não apreciam); no referencial acelerado, essa tal de inércia se materializa na forma de uma **força de inércia**, que pode ser calculada e medida, além de ser tão real para o referencial não inercial quanto as forças de interação.

É por esses motivos que, em geral, os estudantes que aprendem a resolver problemas de Dinâmica no referencial acelerado ficam tão encantados com o poder dessa incrível ferramenta que passam a utilizá-la sempre que possível.

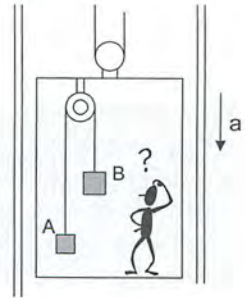
Exemplo Resolvido 4: A figura mostra um elevador que se move para cima ($v \uparrow$) em movimento retardado ($a \downarrow$) com aceleração $a = 2 \text{ m/s}^2$ num local onde a intensidade do campo gravitacional vale $g = 10 \text{ N/kg}$. Os blocos A e B, de massas 2 kg e 6 kg , encontram-se ligados entre si através de um fio ideal que passa por uma polia presa ao teto do elevador. Pede-se determinar:

- a aceleração com que se movem os bloquinhos para o observador dentro do elevador;
- a tração no cordão.

Solução:

Um problema semelhante foi resolvido na página 64 questão 156, no referencial inercial da Terra.

Resolveremos o problema no referencial do elevador. Como este se encontra acelerado no referencial da Terra, precisaremos fazer uso do Princípio da Equivalência (Figura 73), substituindo a sua aceleração $\downarrow a$ (m/s^2) por uma gravidade $a \uparrow$ (N/kg), totalizando, no referencial do elevador (Figura 73), uma gravidade resultante:



$$g' = g - a = 10 \text{ N/kg} - 2 \text{ N/kg} = 8 \text{ N/kg}$$

Com isso, no referencial do elevador, este encontra-se imóvel (obviamente rsrsrsr ☺) e dentro dele reina um campo gravitacional resultante $g' = 8 \text{ N/kg}$. E o que dizer do movimento dos blocos, quando abandonados em repouso em relação ao elevador? Como o fio não estica (vínculo geométrico caso 1 página 245), os blocos terão acelerações iguais em módulo (em relação ao elevador) mas de sentidos contrários.

Sendo mais pesado que o bloco A, o bloco B terá aceleração (m/s^2) para baixo $\downarrow a'$ ao passo que A terá aceleração (m/s^2) para cima $\uparrow a'$ no referencial do elevador (Figura 74).

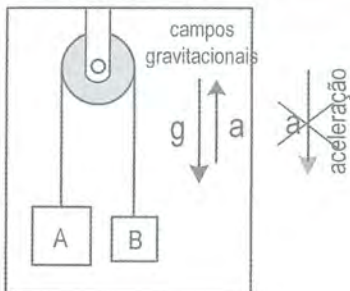


Figura 73 - aplicando o Princípio da equivalência

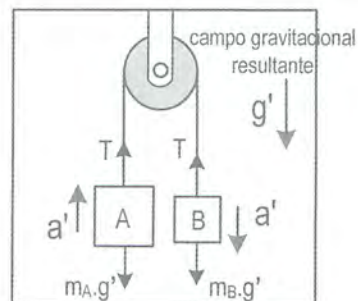


Figura 74 - diagrama de forças no referencial acelerado

Escrevendo a 2ª lei de Newton para cada bloco, vem:

<p>Bloco A: $F_R = m_A \cdot a'$ $(T - m_A \cdot g') = m_A \cdot a'$ $T - 2 \cdot (8) = 2 \cdot a'$ (eq31)</p>	<p>Bloco B: $F_R = m_B \cdot a'$ $(m_B \cdot g' - T) = m_B \cdot a'$ $6 \cdot (8) - T = 6 \cdot a'$ (eq32)</p>
---	---

De eq31 e eq32, vem $a' = 4 \text{ m/s}^2$ e $T = 24\text{N}$.

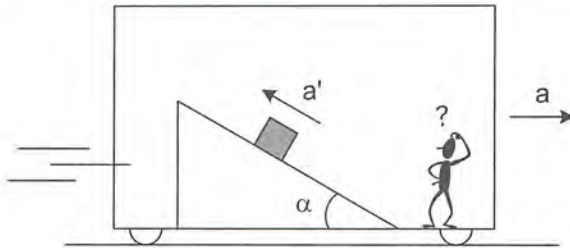
Assim, determinamos a aceleração a' de cada bloco em relação ao elevador. Para determinar a aceleração de cada bloco em relação à Terra, podemos usar as relações gerais da aceleração relativa:

$$\vec{a}_{AT} = \vec{a}_{AE} + \vec{a}_{ET} = \uparrow 4 \text{ m/s}^2 + \downarrow 2 \text{ m/s}^2 = \uparrow 2 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_{BT} = \vec{a}_{BE} + \vec{a}_{ET} = \downarrow 4 \text{ m/s}^2 + \downarrow 2 \text{ m/s}^2 = \downarrow 6 \text{ m/s}^2$$

Exemplo Resolvido 5: a figura mostra um trem que parte do repouso sobre trilhos retílineos com aceleração constante $a = 8 \text{ m/s}^2$ em relação à Terra. Uma caixa de massa $m = 2 \text{ kg}$ foi abandonada sobre uma rampa lisa que encontra-se fixa ao piso desse trem. Para um observador no interior do trem, a caixa subirá essa rampa com qual aceleração a' ?

Dado: $g = 10 \text{ N/kg}$, $\text{sen} \alpha = 0,6$, $\text{cos} \alpha = 0,8$



Solução: O bloco possui uma aceleração $a \rightarrow$ (8 m/s^2) no referencial da Terra. Efetuando a mudança de referencial Terra \rightarrow trem, essa aceleração será substituída, no referencial do trem, por uma gravidade $a \leftarrow$ (8 N/kg) de mesmo valor, mesma direção e sentido oposto ao da aceleração $a \rightarrow$ (8 m/s^2) que esse referencial possui em relação à Terra.

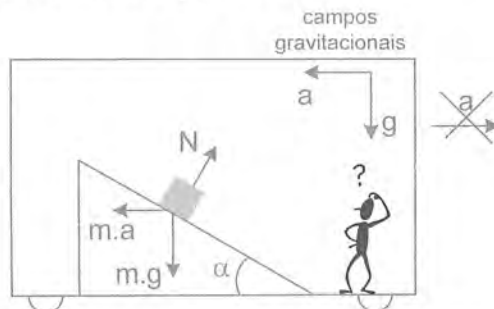


Figura 75 – diagrama de forças no referencial acelerado

Assim, como o campo gravitacional $g \downarrow$ causa a força gravitacional $m \cdot g \downarrow$ sobre a caixa, o campo gravitacional $a \leftarrow$ causa a força gravitacional (fictícia) $m \cdot a \leftarrow$ (Figura 75). Adicionalmente, temos a força de contato normal N que a rampa exerce sobre a caixa. Como o eventual movimento da caixa, no referencial do trem, ocorrerá ao longo da rampa, faremos uso do *Par de Eixos-Padrão*, conforme explicado na página 55, adotando um eixo 1 na direção do movimento e um eixo 2 na direção normal ao primeiro eixo.

Decompondo as forças que não se encontram sobre os eixos 1 e 2, obteremos o diagrama de forças mostrado na Figura 76.

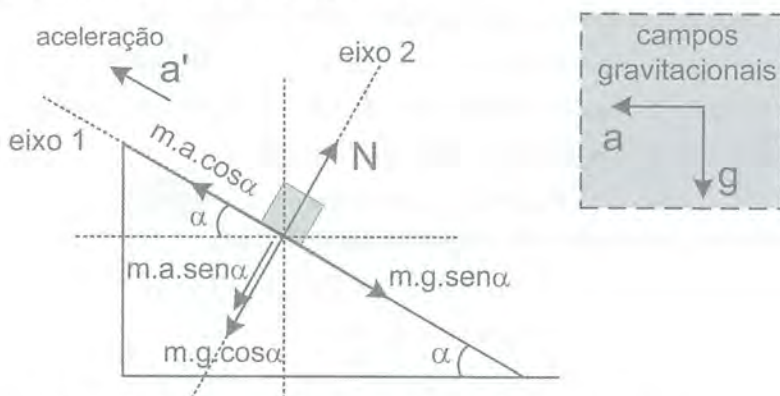


Figura 76 – diagrama de forças no referencial acelerado

Como a caixa não possuirá aceleração ao longo da direção normal, nesse referencial, a 2ª lei de Newton garante o equilíbrio das forças ao longo do eixo 2 :

$$N = m \cdot g \cdot \cos \alpha + m \cdot a \cdot \sin \alpha \quad (\text{eq 33})$$

A título de curiosidade, em que condições a caixa permanecerá em equilíbrio relativo sobre a rampa, nesse referencial, isto é, ficará em repouso ou se deslocará apenas em MRU ao longo da rampa ?

Ora, para isso, as forças ao longo da direção do possível movimento da caixa (eixo 2) devem se cancelar, dando uma F_R nula naquela direção. Matematicamente:

$$m \cdot a \cdot \cos \alpha = m \cdot g \cdot \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad a = g \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \Rightarrow \quad a = g \cdot \tan \alpha \quad (\text{eq 34})$$

Veja que, se a gravidade $\leftarrow a$ necessária para manter a caixa imóvel, no referencial acelerado, é dada pela relação eq 34 acima, isto permite concluir que, no interior desse vagão, a gravidade resultante g' (Figuras 57 e 60 páginas 138 e 139) será exatamente perpendicular à rampa. Dessa forma, não haverá nenhuma componente de gravidade na direção da rampa tentando acelerar a caixa ao longo do eixo 1 (Figura 76).

O resultado fornecido pela relação eq 34 acima corresponde ao mesmo resultado obtido na análise desse problema no referencial inercial, como podemos perceber, retornando ao exemplo resolvido 1, páginas 56 a 61.

Retomando a análise das forças na Figura 76, podemos antever em que condições a caixa possuirá aceleração a' (em relação ao trem) ladeira acima ou ladeira abaixo:

- **caso 1:** a caixa terá aceleração a' ladeira acima se

$$m.a.\cos\alpha > m.g.\text{sen}\alpha \Rightarrow a > g.\text{tg}\alpha$$

- **caso 2:** a caixa terá aceleração a' ladeira abaixo se

$$m.a.\cos\alpha < m.g.\text{sen}\alpha \Rightarrow a < g.\text{tg}\alpha$$

- **caso 3:** a caixa terá aceleração $a' = 0$, isto é, permanecerá em repouso ou em MRU no referencial da rampa, se

$$m.a.\cos\alpha = m.g.\text{sen}\alpha \Rightarrow a = g.\text{tg}\alpha$$

Para os dados fornecidos nessa questão, temos:

$$m.a.\cos\alpha = 2 \cdot 8 \cdot (0,8) = 12,8 \text{ N}$$

$$m.g.\text{sen}\alpha = 2 \cdot 10 \cdot (0,6) = 12,0 \text{ N}$$

Assim, sendo $m.a.\cos\alpha > m.g.\text{sen}\alpha$ (isto é, $12,8 > 12$), ocorrerá o caso 1. A segunda lei de Newton, na direção do movimento (eixo 1 – Figura 76), permite escrever:

$$F_R = m.a' \Rightarrow (m.a.\cos\alpha - m.g.\text{sen}\alpha) = m.a'$$

$$12,8 - 12,0 = 2 \cdot a' \Rightarrow a' = 0,4 \text{ m/s}^2$$

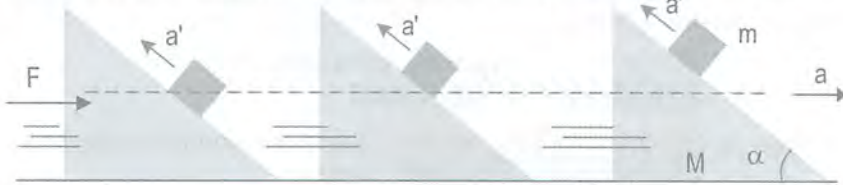
De posse desse valor da aceleração a' da caixa em relação à rampa, poderíamos, facilmente, determinar, por exemplo, quanto tempo a caixa levaria para partir do repouso, no ponto mais baixo da rampa, e atingir o seu ponto mais alto.

Facilmente percebemos que a análise do problema diretamente no referencial acelerado, no lugar de usarmos o referencial inercial, nos dá uma visão muito mais clara e intuitiva de “como” e “por que” a caixa sobe a rampa, durante o movimento acelerado do trem em relação à Terra.

Em vez de alegar que a caixa sobe a rampa por inércia, como o faz o referencial inercial, em nossa análise, traduzimos essa tal inércia por uma força fictícia cujo valor pode ser determinado diretamente, permitindo avaliar se a caixa, de fato, acelerará ou não, ladeira acima e, se o fizer, com qual valor de aceleração o movimento ocorrerá. Isso não lhe parece muito interessante ☺ ?

Exemplo Resolvido 6: Uma caixa de massa m está apoiada sobre a face inclinada de um prisma triangular que forma um ângulo α com a horizontal. O prisma tem massa M e é empurrado por uma força horizontal constante de intensidade $F > (M+m).g.tg\alpha$. Sabendo que a gravidade local vale g e admitindo que o sistema parte do repouso, o prof. Renato Brito pede que você determine:

- a) a aceleração a com a qual o prisma se moverá em relação à Terra;
 b) a aceleração a' com que a caixa subirá a rampa no referencial da rampa.



Solução:

De acordo com o resultado obtido no Exemplo Resolvido 1 – página 56 – relação eq4b – deduzimos que, sendo $F > (M+m).g.tg\alpha$, a caixa acabará acelerando ladeira acima. Por quê? ☺

Seja a a aceleração que o prisma possui em relação à Terra. Efetuando uma mudança do referencial inercial (Terra) para o referencial acelerado do prisma, abandonamos a aceleração $\rightarrow a$ (m/s^2) e a computamos, no referencial do prisma, na forma de um campo gravitacional $\leftarrow a$ (N/kg) que causará forças gravitacionais fictícias $m.a \leftarrow$ e $M.a \leftarrow$ nos corpos de massa m e M do sistema, respectivamente (Figura 77), com base no Princípio da Equivalência de Einstein.

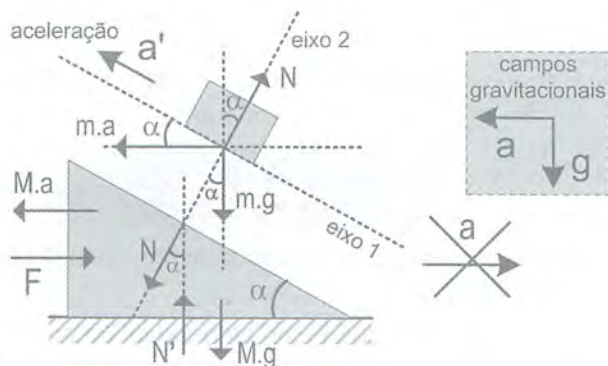


Figura 77 – diagrama de forças no referencial acelerado

A Figura 77 mostra todas as *forças de interação* (reais) agindo no sistema, bem como as *forças de inércia* (fictícias) $m.a \leftarrow$ e $M.a \leftarrow$ atuando respectivamente no bloco e no prisma. A tendência de a caixa escorregar ladeira acima é justificada (no referencial não inercial) pela ação da componente $m.a.\cos\alpha$ (\nearrow) da força de inércia $m.a$, como pode ser visto na

Figura 77. No referencial do prisma, este logicamente permanece imóvel (em equilíbrio relativo), o que implica o cancelamento das forças horizontais (veja Figura 77) que agem sobre ele:

$$F = M.a + N_x$$

$$F = M.a + N.\text{sen}\alpha \quad (\text{eq35})$$

A caixa se moverá ao longo da rampa ladeira acima (eixo 1) com aceleração a' , permanecendo isenta de aceleração no eixo 2 (direção da normal). Assim, na direção do movimento da caixa (eixo 1 – Figura 77), a segunda lei de Newton permite escrever:

$$F_R = m.a' \Rightarrow (m.a.\text{cos}\alpha - m.g.\text{sen}\alpha) = m.a'$$

$$a' = a.\text{cos}\alpha - g.\text{sen}\alpha \quad (\text{eq36})$$

Na direção do eixo 2, o equilíbrio "relativo" das forças permite escrever:

$$N = m.g.\text{cos}\alpha + m.a.\text{sen}\alpha \quad (\text{eq37})$$

Isolando a normal N em eq37 e substituindo em eq35, vem:

$$F = M.a + m.g.\text{sen}\alpha.\text{cos}\alpha + m.a.\text{sen}^2\alpha, \text{ donde:}$$

$$a = \frac{(F - m.g.\text{sen}\alpha.\text{cos}\alpha)}{M + m.\text{sen}^2\alpha} \quad (\text{eq38})$$

Substituindo eq38 em eq36, vem:

$$a' = \frac{(F - m.g.\text{sen}\alpha.\text{cos}\alpha)}{M + m.\text{sen}^2\alpha}.\text{cos}\alpha - g.\text{sen}\alpha.\frac{(M + m.\text{sen}^2\alpha)}{(M + m.\text{sen}^2\alpha)}$$

$$a' = \frac{F.\text{cos}\alpha - m.g.\text{sen}\alpha.\text{cos}^2\alpha - M.g.\text{sen}\alpha - m.g.\text{sen}\alpha.\text{sen}^2\alpha}{M + m.\text{sen}^2\alpha}$$

$$a' = \frac{F.\text{cos}\alpha - m.g.\text{sen}\alpha.(\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha) - M.g.\text{sen}\alpha}{M + m.\text{sen}^2\alpha}$$

$$a' = \frac{F.\text{cos}\alpha - (M+m).g.\text{sen}\alpha}{M + m.\text{sen}^2\alpha} \quad (\text{eq39})$$

Analisaremos, a seguir, o comportamento do sistema para alguns valores particulares da força F :

- **Caso $F = m.g.\text{sen}\alpha.\text{cos}\alpha$** , segundo a relação eq38, teremos $a = 0$. Assim, no referencial da Terra, o prisma permanecerá em equilíbrio enquanto a caixa se moverá ladeira abaixo com aceleração $a' = -g.\text{sen}\alpha$, conforme eq36. O sinal negativo decorre apenas do fato ter sido tomado como positivo o sentido ascendente do eixo 1.
- **Caso $F = (M+m).g.\text{tg}\alpha$** , segundo a relação eq39, teremos $a' = 0$, o que, pela relação eq36, implica $a = g.\text{tg}\alpha$. Nesse caso, a caixa permanecerá em equilíbrio (relativo) sobre o prisma ($a' = 0$), podendo ficar tanto em repouso

quanto em MRU em relação ele. Adicionalmente, no referencial da Terra, caixa e prisma compartilharão da mesma aceleração $a = g \cdot \text{tg} \alpha \rightarrow$, em concordância com os resultados obtidos no Exemplo Resolvido 1 – página 58 – relação eq4b.

Exemplo Resolvido 7: A figura mostra uma cunha de massa M abandonada em repouso sobre uma superfície horizontal lisa. Sabe-se que a gravidade local vale g e todos os atritos são desprezíveis. Quando um bloco de massa m for abandonado sobre a sua superfície inclinada em um ângulo α com a horizontal, o prof. Renato Brito pede que você determine:

- a aceleração com que a cunha se moverá;
- a aceleração de descida do bloco, em relação à cunha;
- se a cunha tem altura H e o bloco for abandonado do seu topo, a partir do repouso, quanto tempo ele levará para descer toda a rampa ?

Solução:

Esse problema foi resolvido anteriormente (questão 198, página 76) no referencial inercial. A seguir, solucionaremos essa questão no referencial da própria cunha que, por se encontrar acelerada em relação à Terra, constitui-se um referencial não inercial.

Efetuada uma mudança do referencial inercial (Terra) para o referencial acelerado da cunha, abandonamos a aceleração que esta possui (em relação à Terra) e a computamos, no seu referencial não inercial, como um campo gravitacional $\leftarrow a$ (N/kg) que causará forças gravitacionais fictícias $m \cdot a \leftarrow$ e $M \cdot a \leftarrow$ nos corpos de massa m e M do sistema, respectivamente, com base no Princípio da Equivalência de Einstein, como mostra a Figura 78.

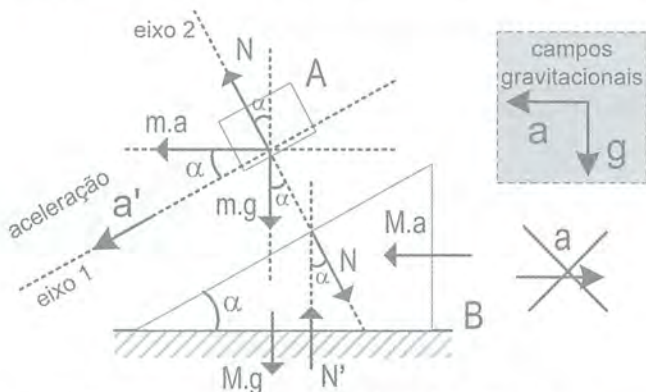
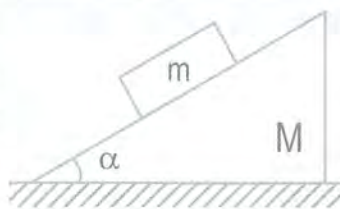


Figura 78 – diagrama de forças no referencial acelerado

No referencial da própria cunha, logicamente, esta não possui aceleração ou velocidade alguma, visto que ninguém possui velocidade ou aceleração em relação a si mesmo 😊.

Nesse referencial, a cunha se encontra em equilíbrio relativo, enquanto a caixa descerá a rampa com uma aceleração a' a ser determinada a seguir.

Como a cunha se encontra em equilíbrio relativo, na direção horizontal (veja Figura 78), podemos escrever :

$$M.a = N_x \Rightarrow M.a = N.\text{sen}\alpha \quad (\text{eq 40})$$

Como a cunha se encontra em equilíbrio vertical (veja Figura 78), vem :

$$N_y + M.g = N' \Rightarrow N.\text{cos}\alpha + M.g = N' \quad (\text{eq 41})$$

O bloco se encontra em equilíbrio relativo, na direção normal (eixo 2, Figura 78), o que permite escrever :

$$N + m.a.\text{sen}\alpha = m.g.\text{cos}\alpha \quad (\text{eq 42})$$

Na direção do movimento (eixo 1, Figura 78), o bloco apresenta aceleração a' . Assim, nessa direção, a segunda lei de Newton permite escrever:

$$F_R = m.a' \Rightarrow (m.a.\text{cos}\alpha + m.g.\text{sen}\alpha) = m.a'$$

$$a' = a.\text{cos}\alpha + g.\text{sen}\alpha \quad (\text{eq 43})$$

Multiplicando eq42 por $\text{sen}\alpha$ e somando, membro a membro, à relação eq40, vem:

$$M.a = N.\text{sen}\alpha$$

$$N.\text{sen}\alpha + m.a.\text{sen}^2\alpha = m.g.\text{sen}\alpha.\text{cos}\alpha \quad (+)$$

$$M.a + m.a.\text{sen}^2\alpha = m.g.\text{sen}\alpha.\text{cos}\alpha$$

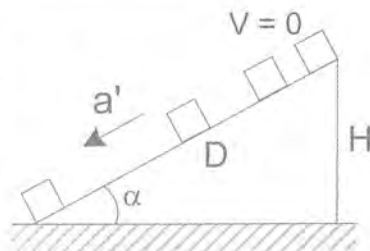
$$a.(M + m.\text{sen}^2\alpha) = m.g.\text{sen}\alpha.\text{cos}\alpha \Rightarrow a = \frac{m.g.\text{sen}\alpha.\text{cos}\alpha}{M + m.\text{sen}^2\alpha}$$

Substituindo esse resultado em eq43, vem:

$$a' = a.\text{cos}\alpha + g.\text{sen}\alpha = \left(\frac{m.g.\text{sen}\alpha.\text{cos}\alpha}{M + m.\text{sen}^2\alpha} \right).\text{cos}\alpha + g.\text{sen}\alpha$$

$$a' = g.\text{sen}\alpha.\left(\frac{m.\text{cos}^2\alpha}{M + m.\text{sen}^2\alpha} + 1 \right) \Rightarrow a' = \frac{(M + m).g.\text{sen}\alpha}{(M + m.\text{sen}^2\alpha)}$$

No referencial da própria cunha, a caixa será abandonada do topo da rampa (a uma altura vertical H) e percorrerá uma distância D (a hipotenusa) até descer toda a ladeira, movendo-se com aceleração constante a' em MRUV.

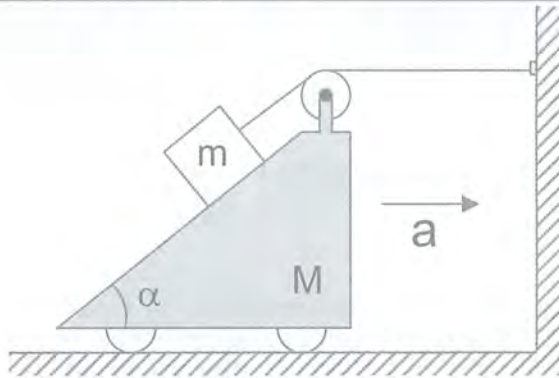


Para calcularmos o tempo de descida dessa caixa, ao longo da rampa, faremos uso da equação cinemática do MRUV :

$$D = v_0 \cdot t + (a') \cdot t^2 / 2, \text{ com } D = H / \text{sen}\alpha \text{ e } a' = \frac{(M + m) \cdot g \cdot \text{sen}\alpha}{(M + m \cdot \text{sen}^2\alpha)}$$

$$\frac{H}{\text{sen}\alpha} = 0 + \frac{(M + m) \cdot g \cdot \text{sen}\alpha}{(M + m \cdot \text{sen}^2\alpha)} \cdot \frac{t^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2H \cdot (M + m \cdot \text{sen}^2\alpha)}{(M + m) \cdot g \cdot \text{sen}^2\alpha}}$$

Exemplo Resolvido 8: Na figura, as massas m da caixa e M da cunha, assim como o ângulo α da rampa, são conhecidos. Todos os fios são ideais e os atritos são desprezíveis. Se a gravidade local vale g , pede-se determinar a aceleração a adquirida pela cunha.



Solução:

Esse problema foi resolvido anteriormente (questão 203, página 77) no referencial inercial. A seguir, solucionaremos essa questão no referencial da própria cunha que, por se encontrar acelerada em relação à Terra, constitui um referencial não inercial.

Observando toda a movimentação a partir do referencial da Terra (veja agora a Figura 79), temos que:

- a parede se encontra fixa nesse referencial;
- a cunha move-se acelerada para a direita com aceleração $a \rightarrow$;
- a caixa, conectada à parede, através do fio ideal, move-se ladeira abaixo ao longo da superfície inclinada da cunha (veja a Figura 79).

Por outro lado, observando toda a movimentação a partir do referencial da própria cunha, (veja agora a Figura 80), vemos que:

- a cunha se encontra fixa nesse referencial;
- a parede é que move-se acelerada para a esquerda com aceleração $a \leftarrow$;
- a caixa, conectada à parede, através do fio ideal, acompanha o movimento da parede e desce a superfície inclinada da cunha (Figura 80).

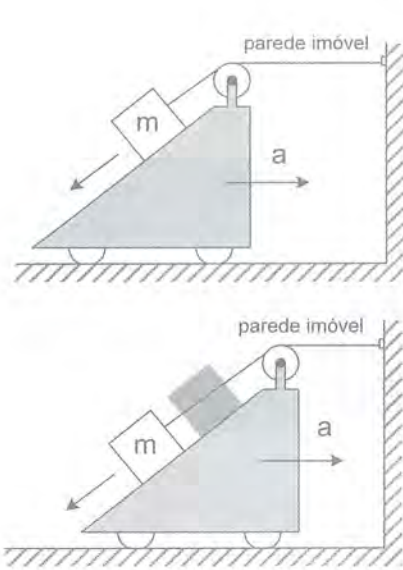


Figura 79 – Referencial da Terra: a parede permanece fixa enquanto a cunha move-se para a direita.

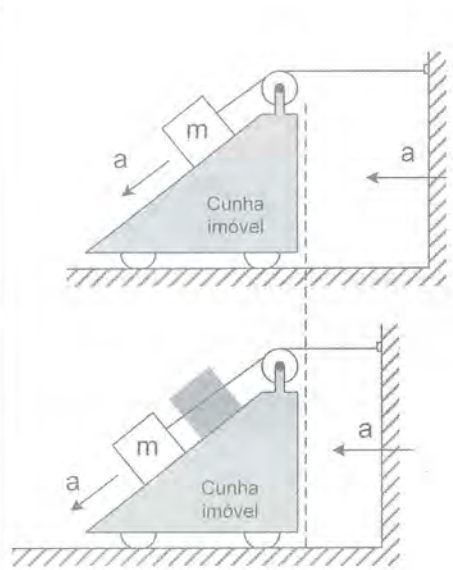


Figura 80 – Referencial da cunha: a cunha permanece fixa enquanto a parede move-se para a esquerda.

A partir desse ponto, nos concentraremos na Figura 80. A resolução do problema será feita a partir da análise do movimento no referencial da cunha (não inercial). Pelo fato de o fio não esticar (vínculo geométrico), a caixa descerá a rampa com a mesma aceleração escalar a com que a parede move-se para a esquerda no referencial da cunha (Figura 80).

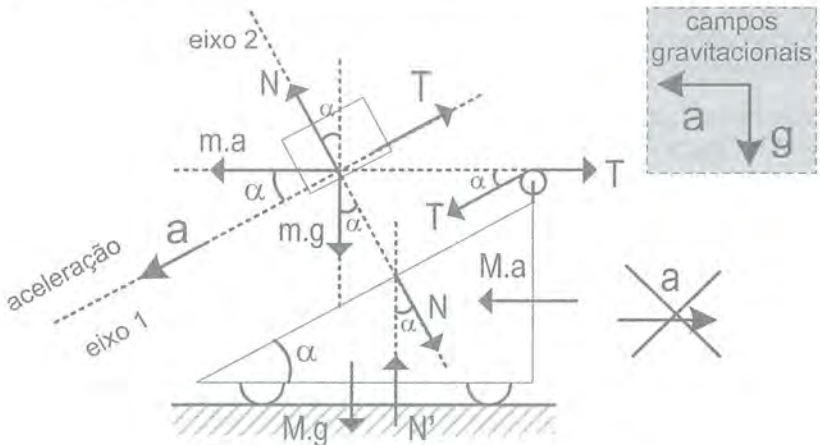


Figura 81 – diagrama de forças no referencial acelerado, fazendo uso do Princípio da Equivalência

Efetuada uma mudança do referencial inercial (Terra) para o referencial acelerado da cunha, abandonamos a aceleração $\rightarrow a$ que esta possui em relação à Terra (Figura 79) e a computamos, no seu referencial não inercial, em forma de uma gravidade $\leftarrow a$ (Figura 81) que causará forças gravitacionais fictícias $m \cdot a \leftarrow$ e $M \cdot a \leftarrow$ nos corpos de massa m e M do sistema, respectivamente, com base no Princípio da Equivalência de Einstein, como mostra a Figura 81.

A caixa descerá a rampa com a mesma aceleração escalar a com que a parede move-se para a esquerda em direção à cunha, como mostra a Figura 80. Na direção do eixo 1 (veja Figura 81), a 2ª lei de Newton permite escrever:

$$F_R = m \cdot a \Rightarrow (m \cdot a \cdot \cos \alpha + m \cdot g \cdot \sin \alpha - T) = m \cdot a \quad (\text{eq 44})$$

Na direção da normal N (eixo 2), a caixa não possui aceleração e, portanto, podemos escrever o equilíbrio das forças:

$$N + m \cdot a \cdot \sin \alpha = m \cdot g \cdot \cos \alpha \quad (\text{eq 45})$$

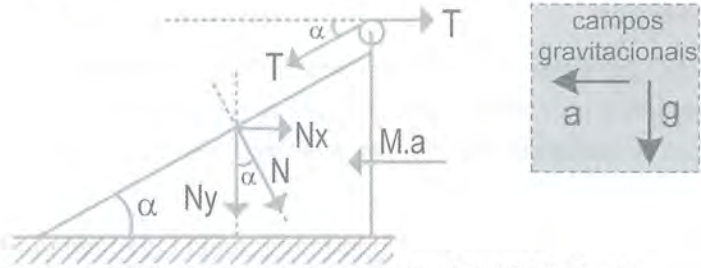


Figura 82 – Diagrama das forças que agem na cunha, no referencial acelerado

No referencial da própria cunha (Figura 82), esta se encontra em equilíbrio estático (relativo), o que nos permite escrever na horizontal :

$$\begin{aligned} T + N_x &= T \cdot \cos \alpha + M \cdot a \\ T + N \cdot \sin \alpha &= T \cdot \cos \alpha + M \cdot a \\ T \cdot (1 - \cos \alpha) + N \cdot \sin \alpha &= M \cdot a \quad (\text{eq 46}) \end{aligned}$$

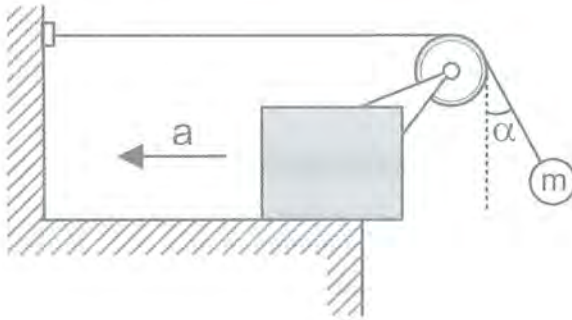
Isolando T em eq44, N em eq45 e substituindo em eq46, vem:

$$\begin{aligned} (m \cdot a \cdot \cos \alpha + m \cdot g \cdot \sin \alpha - m \cdot a) \cdot (1 - \cos \alpha) + (m \cdot g \cdot \cos \alpha - m \cdot a \cdot \sin \alpha) \cdot \sin \alpha &= M \cdot a \\ m \cdot a \cdot (\cos \alpha - 1) \cdot (1 - \cos \alpha) + m \cdot g \cdot \sin \alpha - m \cdot a \cdot \sin^2 \alpha &= M \cdot a \\ -m \cdot a \cdot (\cos^2 \alpha - 2 \cdot \cos \alpha + 1) + m \cdot g \cdot \sin \alpha - m \cdot a \cdot \sin^2 \alpha &= M \cdot a \\ -m \cdot a + 2m \cdot a \cdot \cos \alpha - m \cdot a + m \cdot g \cdot \sin \alpha &= M \cdot a \end{aligned}$$

$$m \cdot g \cdot \sin \alpha = M \cdot a + 2m \cdot a \cdot (1 - \cos \alpha) \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{M + 2m \cdot (1 - \cos \alpha)}$$

Para aprimorar seu entendimento, compare essa resolução feita no referencial não inercial com a resolução da mesma questão no referencial inercial, analisando a questão 203, página 77.

Exemplo Resolvido 9: Na figura, após o pêndulo ser abandonado do repouso, o bloco acelera para a esquerda de forma que a inclinação α do pêndulo com a vertical permanece constante. O prof. Renato Brito pede que você determine a massa do bloco e a sua aceleração, em função da massa da bola m , da gravidade local g e do ângulo α . Todos os atritos são desprezíveis; fios e polias são ideais.



Solução:

Esse problema foi resolvido anteriormente (questão 205, página 78) no referencial inercial (Terra), no qual a caixa move-se com aceleração $a \leftarrow$ para a esquerda em direção à parede, enquanto esta permanece imóvel (veja Figura 83).

A seguir, resolveremos o mesmo problema no referencial da própria caixa (não inercial) no qual ela permanece imóvel, enquanto a parede (juntamente com o piso) acelera para a direita $a \rightarrow$ em direção à caixa (veja Figura 84).

A partir desse ponto, o leitor deve se concentrar nas Figura 84 e 85. A esfera do pêndulo move-se aceleradamente na direção do eixo 1 (Figura 85), permanecendo em equilíbrio (relativo) no eixo 2. A caixa, por sua vez, permanece em equilíbrio (relativo) no referencial da caixa ☺.

Efetuada uma mudança da Terra (referencial inercial) para o referencial acelerado da caixa, abandonamos a aceleração $\leftarrow a$ que esta possui em relação à Terra (Figura 83) e a computamos, no seu referencial não inercial, em forma de uma gravidade $\rightarrow a$ (Figura 85), que causará forças gravitacionais fictícias $m \cdot a \rightarrow$ e $M \cdot a \rightarrow$, respectivamente, na esfera do pêndulo e na caixa, com base no Princípio da Equivalência de Einstein, como mostra a Figura 85.

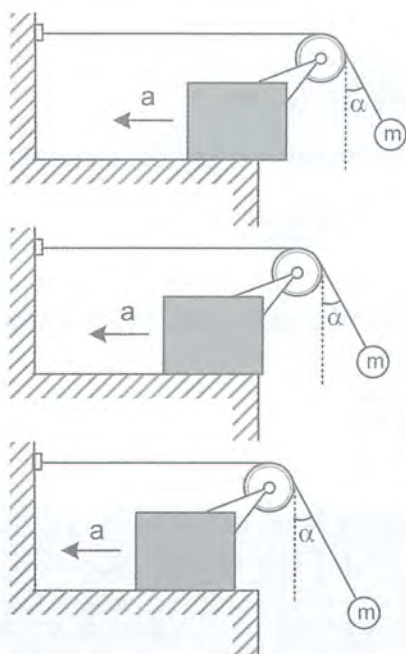


Figura 83 – Referencial da Terra: a parede permanece fixa, enquanto a caixa move-se para a esquerda em direção à parede.

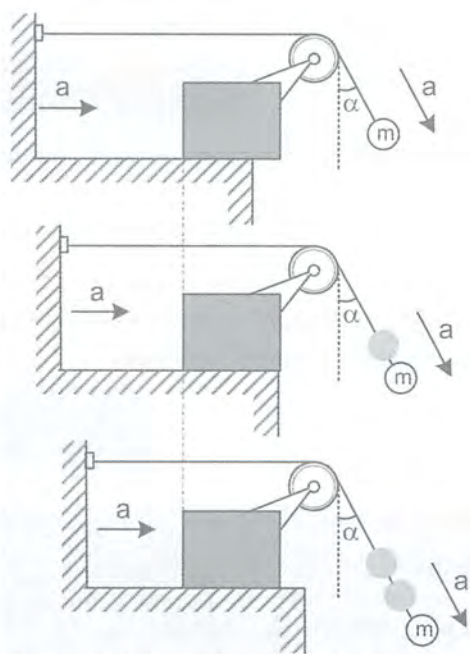


Figura 84 – Referencial da caixa: a caixa permanece fixa, enquanto a parede move-se para a direita em direção à caixa.

Estando, a caixa, em equilíbrio relativo na horizontal (Figura 85), vem:

$$T = T \cdot \text{sen} \alpha + M \cdot a \Rightarrow T \cdot (1 - \text{sen} \alpha) = M \cdot a \quad (\text{eq 47})$$

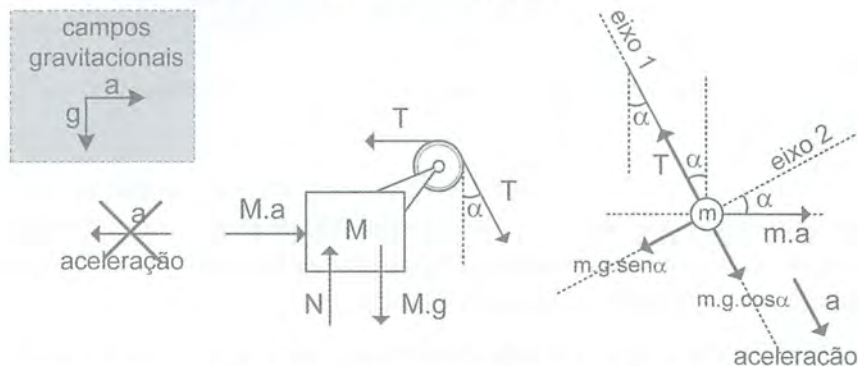


Figura 85 – Diagrama de forças no referencial não inercial da caixa. Note a presença das forças gravitacionais fictícias $M \cdot a \rightarrow$ e $m \cdot a \rightarrow$ na caixa e no pêndulo, respectivamente.

A segunda lei de Newton para a esfera do pêndulo, na direção do eixo 1 (Figura 85), permite escrever:

$$F_R = m \cdot a$$

$$(m \cdot g \cdot \cos \alpha + m \cdot a \cdot \sin \alpha - T) = m \cdot a$$

$$m \cdot g \cdot \cos \alpha - T = m \cdot a \cdot (1 - \sin \alpha) \quad (\text{eq 48})$$

O equilíbrio da esfera do pêndulo, na direção do eixo 2 (Figura 85), permite escrever:

$$m \cdot g \cdot \sin \alpha = m \cdot a \cdot \cos \alpha \Rightarrow a = g \cdot \tan \alpha \quad (\text{eq 49})$$

Multiplicando a relação **eq48** por $(1 - \sin \alpha)$, somando membro a membro com a relação **eq47** e levando em conta a relação **eq49**, após redução dos termos semelhantes, obtém-se:

$$M = \frac{m \cdot (1 - \sin \alpha)^2}{\sin \alpha}$$

Exemplo Resolvido 10: Um bloco de massa m está apoiado sobre a face inclinada de um prisma triangular que forma um ângulo α com a horizontal, como mostra a figura. Sabendo que a gravidade local vale g e o coeficiente de atrito entre o bloco e o prisma vale μ , determine o valor da maior força F horizontal com que se pode empurrar esse prisma, sem que o bloco escorregue em relação a ele. Não há atrito entre o prisma e o solo horizontal.

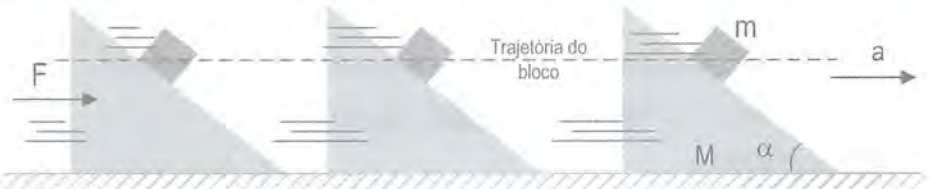


Figura 86 – dinâmica do sistema no referencial inercial (Terra)

Solução:

No referencial da Terra (Figura 87), bloco e prisma compartilham de uma mesma aceleração $a \rightarrow$. No referencial do próprio prisma (referencial acelerado), entretanto, ambos os corpos não apresentarão mais aceleração alguma, isto é, estarão em equilíbrio (relativo).

Conforme o Princípio da Equivalência, essa aceleração $a \text{ (m/s}^2\text{)} \rightarrow$ que os corpos possuem, no referencial da Terra, equivale, no referencial do próprio prisma, a um campo gravitacional $\leftarrow a \text{ (N/kg)}$ (Figura 87) que causará forças gravitacionais fictícias $m \cdot a \leftarrow$ e $M \cdot a \leftarrow$ nos corpos de massa m e M do sistema, respectivamente.

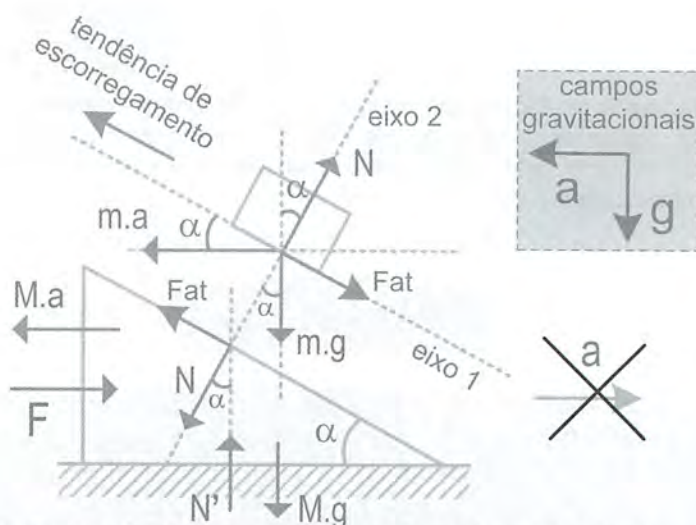


Figura 87 – Diagrama das forças que agem na cunha, no referencial acelerado

A Figura 87 mostra tanto as *forças de interação* (reais), quanto as forças de inércia $m.a \leftarrow$ e $M.a \leftarrow$ agindo nos corpos do sistema. Observe atentamente o diagrama de forças da Figura 87, antes de passar adiante.

Note que, nesse problema, pede-se determinar a maior força F com que se deve empurrar a caixa para que ela não escorregue em relação ao prisma. No referencial não inercial, essa tendência de escorregamento da caixa ladeira acima é justificada pela ação da componente $m.a.\cos\alpha$ da força de inércia $m.a$ ao longo do eixo 1, como pode ser visto na Figura 87.

Estando o bloco em equilíbrio (relativo) na direção normal (eixo 2 – Figura 87), podemos escrever:

$$N = m.g.\cos\alpha + m.a.\sen\alpha \quad (\text{eq 50})$$

Estando o bloco também em equilíbrio (relativo) na direção do eixo 1 (ao longo da rampa), graças à força de atrito, podemos escrever:

$$m.a.\cos\alpha = m.g.\sen\alpha + \text{Fat} \quad (\text{eq 51})$$

Como devemos determinar o **maior valor** da força F para o qual ainda não ocorre escorregamento relativo entre a caixa e o prisma, deduzimos que o referido bloco se encontra na iminência de escorregar, o que permite escrever :

$$\text{Fat} = \mu \cdot N \quad (\text{eq 52})$$

Substituindo eq50 em eq52 e, posteriormente, eq52 em eq51, vem:

$$m.a.\cos\alpha = m.g.\sen\alpha + \mu \cdot (m.g.\cos\alpha + m.a.\sen\alpha)$$

$$a = \frac{g \cdot (\operatorname{sen} \alpha + \mu \cdot \operatorname{cos} \alpha)}{(\operatorname{cos} \alpha - \mu \cdot \operatorname{sen} \alpha)} = \frac{g \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \mu)}{(1 - \mu \cdot \operatorname{tg} \alpha)} \quad (\text{eq 53})$$

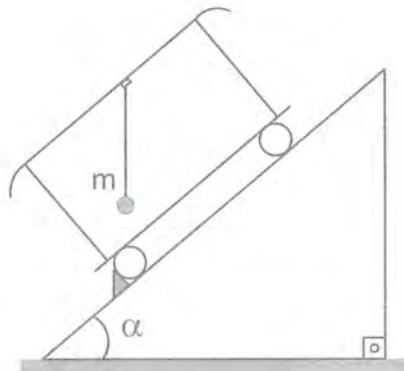
Observando a Figura 86, voltando brevemente ao referencial inercial da Terra, podemos considerar que todo o conjunto de massa “M + m” se move com a mesma aceleração a sob ação da força resultante externa F , o que permite escrever, pela 2ª lei de Newton:

$F = (M + m) \cdot a$, usando eq53, vem:

$$F = (M + m) \cdot \frac{g \cdot (\mu + \operatorname{tg} \alpha)}{(1 - \mu \cdot \operatorname{tg} \alpha)} \quad (\text{eq 54})$$

Exemplo Resolvido 11 - Um vagão de estrada de ferro situa-se no topo de uma rampa descendente de inclinação α com a horizontal, em um trecho reto de estrada, mantido em repouso por ação dos freios. Ao teto do vagão fixou-se um pêndulo simples, composto por um fio leve de comprimento L amarrado a uma pequena esfera de massa m . Liberando o vagão, admite-se que ele se mova ao longo do plano inclinado, na ausência de forças dissipativas, num local onde a gravidade vale g .

- Determine a gravidade equivalente g' no interior do vagão, para um referencial não inercial fixo a ele;
- Admita que o pêndulo simples fixo ao teto do vagão seja posicionado de forma a permanecer estacionário em relação ao vagão (isto é, sem oscilar). Determine a tração T no fio do pêndulo;
- se o pêndulo for posto a executar pequenas oscilações, determine o período T das oscilações. Admita que a massa m do pêndulo é muito menor que a massa do vagão.



Solução:

a) O vagão desce a rampa com aceleração $a = g \cdot \operatorname{sen} \alpha$ no referencial inercial (Figura 88), aceleração essa causada pela força resultante $P \cdot \operatorname{sen} \alpha$ que age sobre o sistema.

Desse ponto em diante, porém, o prof. Renato Brito analisará o que ocorre no interior do vagão a partir do referencial não inercial do próprio vagão. Será efetuada uma mudança do referencial da Terra (inercial) para o referencial do vagão (não inercial).

Para efetuar tal mudança de referencial, a aceleração $a = g \cdot \text{sen} \alpha$ (Figura 89) será abandonada, visto que o vagão não possui tal aceleração em relação ao próprio vagão (☺ rrsr... obviamente).

Pelo Princípio da Equivalência de Einstein, essa aceleração $a = g \cdot \text{sen} \alpha$ (m/s^2) equivale, para quem está no interior do vagão, a um campo gravitacional extra de mesma intensidade $a = g \cdot \text{sen} \alpha$ (N/kg), mesma direção mas de sentido contrário ao da aceleração a ser “abandonada”.



Figura 88 – Diagrama das forças que agem na cunha, no referencial acelerado

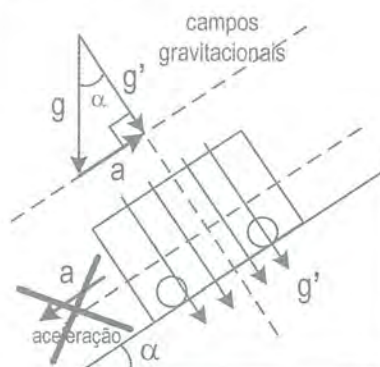


Figura 89 – Diagrama das forças que agem na cunha, no referencial acelerado

Assim, no referencial do vagão, este se encontra imóvel (obviamente) e, em seu interior, agem dois campos gravitacionais (N/kg) $g \downarrow$ e $a = g \cdot \text{sen} \alpha \nearrow$ cujo efeito resultante (soma vetorial) é um campo gravitacional resultante g' , perpendicular ao piso do vagão, como mostra o diagrama vetorial da Figura 89.

Nesse ponto, é importante observar atentamente as nuances do diagrama vetorial da Figura 89, em que as gravidades g e a se somam vetorialmente para totalizar a gravidade resultante g' no interior do vagão. O ângulo formado entre as gravidades g e g' é exatamente o mesmo ângulo que o plano inclinado faz com a horizontal visto que g' é perpendicular à rampa. Note também que a geometria no triângulo retângulo da figura confirma que o módulo da gravidade $a \nearrow$ vale realmente $a = g \cdot \text{sen} \alpha$.

Para quem está no interior do vagão, o campo gravitacional g' , de módulo $g' = g \cdot \text{cos} \alpha$, define a nova direção vertical naquele referencial, de forma muito semelhante ao ocorrido no contexto das Figuras 57 e 60 – página 138.

b) Para que o pêndulo permaneça em equilíbrio relativo, no referencial do vagão, sem oscilar, ele certamente deverá ser posicionado na nova vertical definida pela direção do campo gravitacional resultante g' , conforme as Figuras 89 e 90. Sobre a esfera do pêndulo agirão apenas as forças tração T e força gravitacional (peso) $m.g'$. Da condição de equilíbrio relativo (Figura 90), vem:

$$T = m.g' = m.g.\cos\alpha \quad (\text{eq 55})$$

Note que o pêndulo permanece estacionário (no referencial do vagão) com o fio formando 90° com o teto do vagão, enquanto este último desce a rampa livremente com aceleração $a = g.\text{sen}\alpha$ (no referencial da Terra).

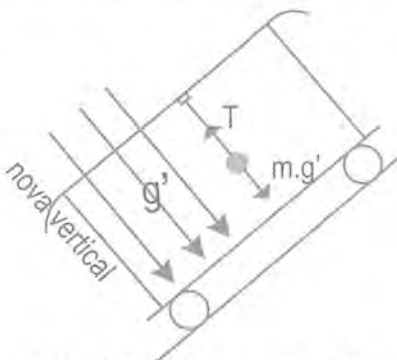


Figura 90 – Diagrama das forças que agem na cunha, no referencial acelerado

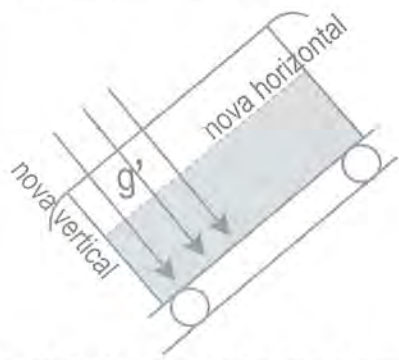


Figura 91 – Diagrama das forças que agem na cunha, no referencial acelerado

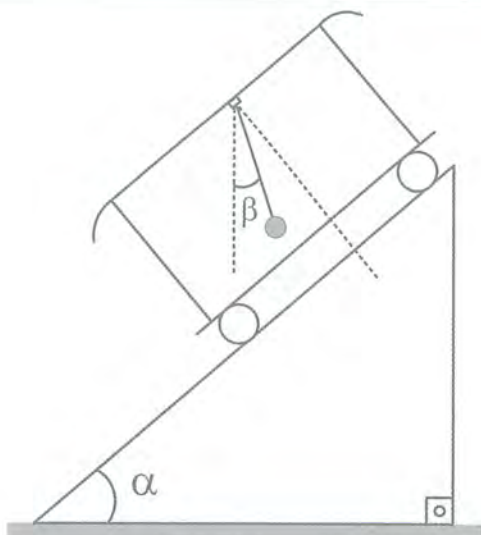
Adicionalmente, a direção da **nova horizontal**, no interior do vagão, é a direção perpendicular a g' , coincidindo com a direção da própria rampa (Figura 91). Assim, se o vagão, por exemplo, estivesse parcialmente preenchido com água (feito um aquário), a superfície livre desta permaneceria em equilíbrio (relativo) numa direção paralela à da própria rampa, como mostra a Figura 91.

c) Se o pêndulo da Figura 90 fosse posto a executar pequenas oscilações, estas ocorreriam simetricamente em relação à direção da nova vertical g' , com período T dado por :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g.\cos\alpha}} \quad (\text{eq56})$$

Neste caso, estamos considerando que a massa do vagão é muito maior do que a massa do pêndulo, de forma que as suas oscilações não perturbem o movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV) executado pelo vagão com aceleração $a = g.\text{sen}\alpha$.

Exemplo Resolvido 12: Considere agora que o vagão do exemplo resolvido 11 esteja descendo a rampa e que as resistências dissipadoras que agem sobre o vagão correspondam a uma força de atrito com coeficiente $\mu < \text{tg}\alpha$. Calcule o ângulo β que o pêndulo forma com a vertical, durante a descida do vagão.



Resolução: de acordo com a 2ª lei de Newton, o sistema de massa total M descerá a rampa com aceleração a (no referencial da Terra) dada por :

$$F_R = M.a \Rightarrow (P.\text{sen}\alpha - F_{at}) = M.a$$

$$M.g.\text{sen}\alpha - \mu.N = M.a \quad , \quad \text{com a reação normal } N \text{ dada por } N = P.\text{cos}\alpha$$

$$M.g.\text{sen}\alpha - \mu.M.g.\text{cos}\alpha = M.a \Rightarrow a = g.\text{sen}\alpha - \mu.g.\text{cos}\alpha \quad (\text{eq 57})$$

No referencial do próprio vagão, entretanto, essa aceleração a será equivalente a uma gravidade a , que será adicionada vetorialmente à gravidade local g para totalizar a gravidade resultante g' (no referencial do vagão), como mostra a Figura 92.

Da geometria da figura, temos que:

$$a + c = g.\text{sen}\alpha \Rightarrow a = g.\text{sen}\alpha - c \quad (\text{eq 58})$$

Comparando eq57 e eq58, vem: $c = \mu.g.\text{cos}\alpha$ (eq 59)

É sabido que o pêndulo permanece em equilíbrio relativo, sem oscilar, no referencial do vagão, quando posicionado na nova vertical definida pela direção da gravidade resultante g' , conforme a Figura 92.

Para determinar o ângulo β formado entre a direção de g' e a direção de g , lançaremos mão da identidade trigonométrica:

$$\text{Tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta}{1 + \text{tg}\alpha.\text{tg}\beta} \quad (\text{eq 60})$$



Figura 92 – Diagrama das forças que agem na cunha, no referencial acelerado

Do triângulo retângulo da Figura 92, temos que:

$$\text{Tg}(\alpha - \beta) = \frac{c}{g.\cos\alpha} \stackrel{\text{eq 59}}{=} \frac{\mu.g.\cos\alpha}{g.\cos\alpha} = \mu \quad (\text{eq 61})$$

A partir de eq60 e eq61, vem:

$$\text{Tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta}{1 + \text{tg}\alpha.\text{tg}\beta} = \mu \Rightarrow \text{tg}\alpha - \text{tg}\beta = \mu + \mu.\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta$$

$$\text{tg}\beta + \mu.\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta = \text{tg}\alpha - \mu \Rightarrow \text{tg}\beta = \frac{\text{tg}\alpha - \mu}{1 + \mu.\text{tg}\alpha} \quad (\text{eq 62})$$

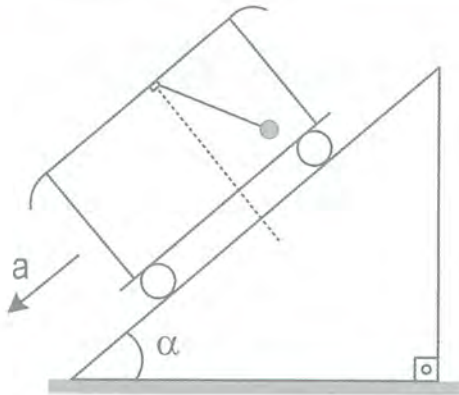
A expressão eq62 traz a resposta do problema, entretanto, é possível, adicionalmente, determinar o valor da gravidade resultante \mathbf{g}' no referencial do vagão com a aplicação do Teorema de Pitágoras:

$$(\mathbf{g}')^2 = (g.\cos\alpha)^2 + c^2$$

$$(\mathbf{g}')^2 = (g.\cos\alpha)^2 + (\mu.g.\cos\alpha)^2$$

$$\mathbf{g}' = g.\cos\alpha \sqrt{1 + \mu^2}$$

Exemplo Resolvido 13 – ITA 2005 : considere uma rampa de ângulo α com a horizontal sobre a qual desce um vagão com aceleração a , em cujo teto está pendurada uma mola de comprimento L , massa desprezível e constante elástica K , tendo uma massa m fixa à sua extremidade. Considerando que L_0 seja o comprimento natural da mola, que a gravidade local vale g e que o pêndulo permanece estacionário em relação ao vagão, determine a alongação $x = L - L_0$ sofrida por essa mola nesse movimento.



Resolução: o vagão desce a rampa com aceleração a em relação à Terra (referencial inercial); entretanto, no referencial do próprio vagão, pelo Princípio da Equivalência de Einstein, essa aceleração $a \searrow$ equivale a uma gravidade $a \nearrow$, que será adicionada vetorialmente à gravidade local $g \downarrow$ para totalizar a gravidade resultante g' (no referencial do vagão), como mostra a Figura 93.

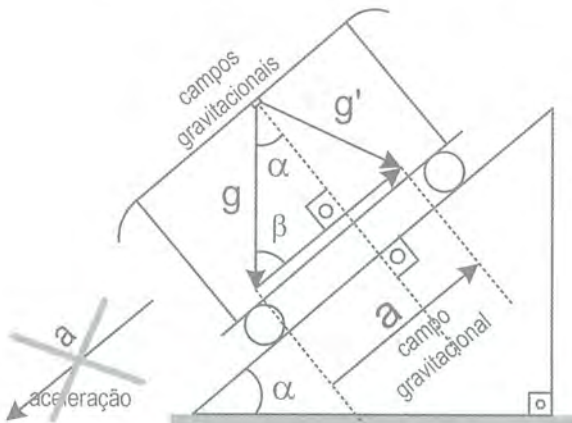


Figura 93 – Diagrama das forças que agem na cunha, no referencial acelerado.

Aplicando a “lei dos cossenos” na Figura 93, a fim de determinar o módulo da gravidade resultante g' no interior do vagão, vem:

$$(g')^2 = g^2 + a^2 - 2.g.a.\cos(\beta)$$

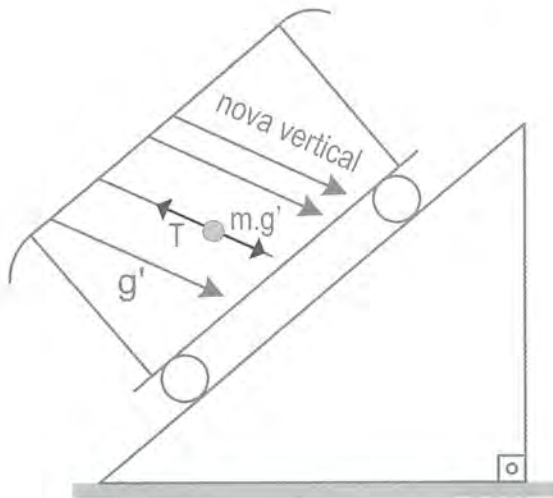
$$(g')^2 = g^2 + a^2 - 2.g.a.\cos(90^\circ - \alpha)$$

$$(g')^2 = g^2 + a^2 - 2.g.a.\text{sen}\alpha$$

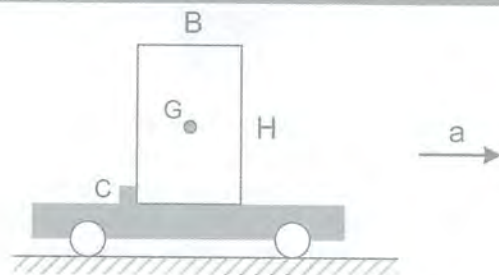
$$g' = \sqrt{g^2 + a^2 - 2.a.g.\text{sen}\alpha}$$

Para que o pêndulo permaneça em equilíbrio relativo, no referencial do vagão, sem oscilar, ele certamente deverá ser posicionado na nova vertical definida pela direção da gravidade resultante g' (veja figura abaixo). Sobre a esfera do pêndulo agirão apenas as forças tração T e força gravitacional (peso) $m.g'$. Da condição de equilíbrio relativo, vem:

$$T = m.g' \Rightarrow K.x = m.g' \Rightarrow x = \frac{m.g'}{K} = \frac{m}{K} \cdot \sqrt{g^2 + a^2 - 2.a.g.\text{sen}\alpha}$$



Exemplo Resolvido 14: A figura mostra uma caixa com dimensões H e B , apoiada sobre uma plataforma que move-se sobre trilhos retos e horizontais com aceleração a . O escorregamento da caixa em relação à plataforma é impedido por um batente C fixo ao piso da plataforma. Sabendo que a gravidade local vale g , determine a maior aceleração a com que a plataforma pode se mover sem que a caixa tombe. Admita que a caixa é homogênea e tem massa m .



Comentário:

Imprimindo ao carro uma aceleração excessiva (para a direita), o paralelepípedo tomba (para a esquerda). A maior aceleração sem tombamento é aquela na qual o paralelepípedo se apóia no carro exclusivamente por sua aresta inferior esquerda, e as forças agentes obedecem ao esquema a seguir.

1ª Solução: no Referencial Inercial

Observando a figura abaixo, a 2ª lei de Newton permite escrever:

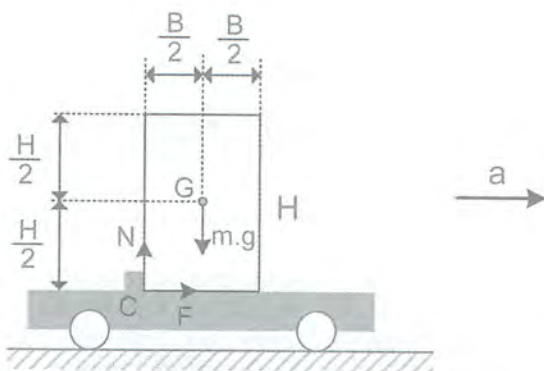


Figura 94 – Diagrama de forças referencial inercial

Na vertical, equilíbrio: $N = m.g$ (eq63)

Na horizontal, movimento acelerado: $F_R = m.a \Rightarrow F = m.a$ (eq64)

Uma vez que a caixa está em equilíbrio de rotação no **referencial inercial**, a soma dos momentos das forças externas em relação **ao seu centro de massa G** é nula:

$$-N \cdot \left(\frac{B}{2}\right) + F \cdot \left(\frac{H}{2}\right) = 0 \quad (\text{eq65})$$

Substituindo eq63 e eq64 em eq65, vem:

$$-(m \cdot g) \cdot B + (m \cdot a) \cdot H = 0 \Rightarrow a = \frac{g \cdot B}{H}$$

2ª Solução: no Referencial Não inercial do carro

Efetuada a mudança de referencial, a aceleração $a \rightarrow$ foi substituída por uma gravidade $a \leftarrow$, que causará uma força gravitacional fictícia (força de Einstein) no centro de massa G da caixa, no referencial não inercial do carro. No referencial do carro (veja figura 95), a caixa se encontra em equilíbrio relativo ($v' = 0$, $a' = 0$), o que permite escrever:

$$\text{Na vertical, equilíbrio: } N = m \cdot g \quad (\text{eq66})$$

$$\text{Na horizontal, equilíbrio (relativo) } F = m \cdot a \quad (\text{eq67})$$

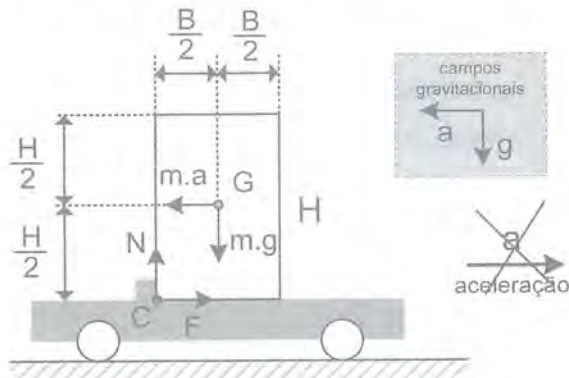


Figura 95 – Diagrama de forças referencial não inercial

Uma vez que a caixa está em equilíbrio de rotação no seu próprio referencial (**não inercial**), a soma dos momentos das forças externas em relação **a qualquer ponto arbitrário é nula** (fato este que não ocorre no referencial inercial, conforme a 1ª solução). Podemos tomar o momento total nulo tanto em relação ao centro de massa G quanto em relação ao ponto C de apoio da caixa. Optando pelo ponto C, vem:

$$+m \cdot g \cdot \left(\frac{B}{2}\right) - m \cdot a \cdot \left(\frac{H}{2}\right) = 0 \quad (\text{eq68})$$

$$(m \cdot g) \cdot B - (m \cdot a) \cdot H = 0 \Rightarrow a = \frac{g \cdot B}{H}$$

Em linhas gerais, ao analisar esse tipo de problema, podemos afirmar o seguinte:

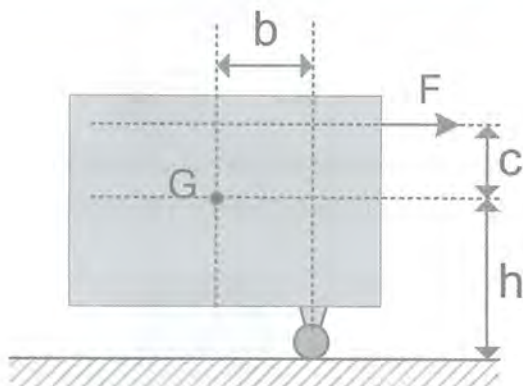
- **Propriedade 1** - No referencial inercial (Terra), corpos que transladam aceleradamente, sem rotação, terão o momento total das suas forças (torque total) nulo em relação ao seu centro de massa G e somente em relação ao seu centro de massa.

Justificativa avançada: isso ocorre porque o momento angular do sistema é constante apenas em relação ao centro de massa G (constante e nulo nesse caso), exigindo um torque total das forças nulo em relação a G . Esse momento angular, entretanto, será crescente (velocidade crescente) em relação a qualquer outro ponto fixo ao referencial inercial, exigindo um torque total das forças não nulo. Torque é sinônimo de "momento de uma força".

- **Propriedade 2** - Corpos que transladam aceleradamente (no referencial inercial), sem rotação, terão o momento total das suas forças (torque total) nulo em relação a qualquer ponto fixo ao seu próprio referencial (referencial não inercial do próprio corpo), desde que se faça uso do princípio da equivalência, acrescentando as forças de inércia pertinentes.

Justificativa avançada: o momento angular do corpo é constante (e nulo) em relação a qualquer ponto fixo ao referencial do próprio corpo, visto que ele se encontra parado em relação a qualquer ponto desses (obviamente....rsrsr...). Essa constância do momento angular do corpo em relação a qualquer ponto do seu referencial implica torque total das forças nulo em relação a esse ponto genérico.

Exemplo Resolvido 15: A figura mostra um carrinho massa m , tracionado por força F e apoiado em apenas um eixo dianteiro com duas rodas. Despreza-se atrito. Determinar a força F e a aceleração a de modo que o sólido se mova na posição esquematizada, sem tombamento.



Solução no Referencial Não Inercial do Carrinho:

Sobre o carrinho, agem as forças de interação normal N , peso $m.g$ (no centro de massa G), a força solicitadora F , bem como a força de inércia $m.a$ (no seu centro de massa).

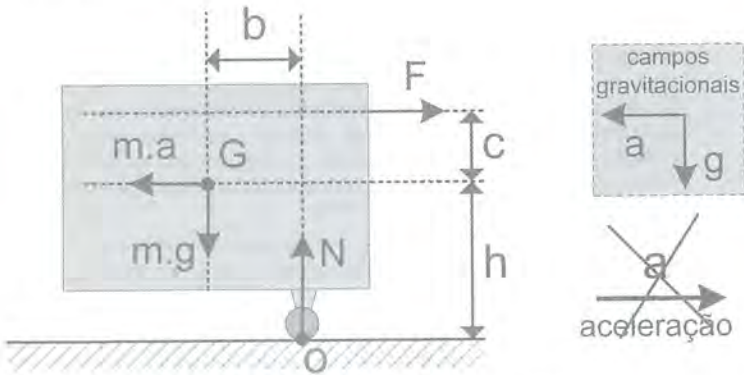


Figura 96 – Diagrama de forças referencial inercial

Tomando o momento total nulo em relação ao ponto O de contato da rodinha com o solo, vem:

$$-(m.g).b - (m.a).h + F.(h+c) = 0 \quad (\text{eq69})$$

Do equilíbrio relativo do carro, no referencial não inercial do próprio carro (na horizontal), vem:

$$F = m.a \quad (\text{eq70})$$

Substituindo eq70 em eq69, vem:

$$F.(h+c) = (m.g).b + (m.a).h$$

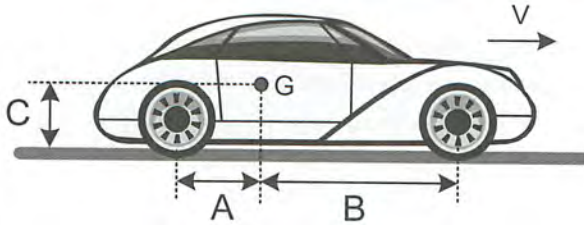
$$(m.a).(h+c) = (m.g).b + (m.a).h$$

$$(m.a).c = (m.g).b \Rightarrow a = g \cdot \frac{b}{c}$$

Após termos determinado a aceleração adequada para que esse carrinho se mova em relação à Terra (referencial inercial) sem tombar, determinemos a força F a partir de eq70:

$$F = m.a \Rightarrow F = m.g \cdot \frac{b}{c}$$

Exemplo Resolvido 16: O esquema anexo representa um automóvel de massa m . O coeficiente de atrito estático entre as rodas e a pavimentação é μ . A pista é reta e horizontal. Atrito de escorregamento só é considerado na roda motriz; atrito de rolamento é desprezado. Supõe-se que o motor possa desenvolver força de tração de sobra. Determinar a maior aceleração do veículo na partida, na hipótese de tração só dianteira.



Solução no Referencial Não Inercial do Carro:

Sobre o carrinho, agem as forças de interação normal N_1 , normal N_2 , seu peso $m.g$ (no centro de massa G), a força de atrito F_{at} que o solo exerce na roda dianteira tracionada (conectada ao motor), bem como a força de inércia $m.a$ (no seu centro de massa), conforme a figura 97.

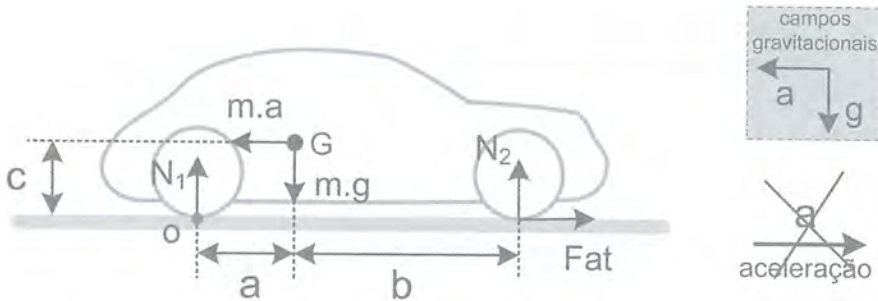


Figura 97 – Diagrama de forças referencial não inercial

O carro encontra-se em equilíbrio de momentos (relativo) em relação a qualquer ponto do referencial do carro. Tomando o momento total nulo em relação ao ponto O de contato da roda traseira com o solo (veja Figura 97), vem:

$$m.a.C + N_2.(A + B) - m.g.A = 0 \quad (\text{eq71})$$

Adicionalmente, estando o carro em equilíbrio (relativo) no seu próprio referencial não inercial, podemos escrever na horizontal:

$$F_{at} = m \cdot a \quad (\text{eq72})$$

Sabemos que o atrito estático tem intensidade variável, aumentando desde o valor nulo até o valor máximo $F_{at_{\max}} = \mu \cdot N$

Comentário: o atrito entre o pneu do carro e o solo é estático pelo fato de que o pneu apenas rola ao longo do solo sem que o ponto de contato da roda com o solo escorregue em relação a este, ou seja, não ocorre derrapagem.

A expressão eq72 mostra que, quanto maior for a intensidade da força de atrito, maior será a aceleração a que o carro adquirirá no referencial da Terra. Assim, para a condição de máxima aceleração, devemos ter:

$$F_{at} = F_{at_{\max}} = \mu \cdot N_2 \quad (\text{eq73})$$

Comentário: a intensidade do $F_{at_{\max}}$ é calculada fazendo-se uso da normal N_2 por ser essa a força de contato normal trocada na fronteira em que surge esse atrito. Se o atrito fosse na roda traseira, teríamos usado N_1 na relação eq73 (veja Figura 97).

Isolando N_2 em eq71 e substituindo em eq73 e, em seguida, substituindo eq73 em eq72, vem:

$$F_{at} = F_{at_{\max}} = \mu \cdot N_2 = m \cdot a$$

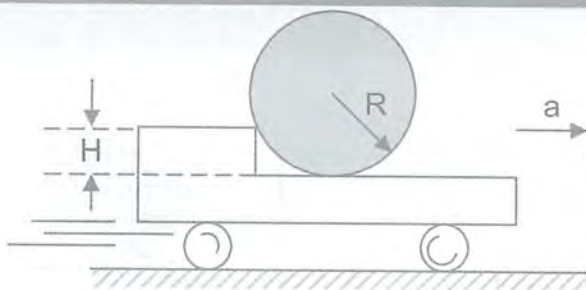
$$\mu \cdot \left(\frac{m \cdot g \cdot A - m \cdot a \cdot C}{A + B} \right) = m \cdot a$$

$$\mu \cdot m \cdot g \cdot A - \mu \cdot m \cdot a \cdot C = m \cdot a \cdot A + m \cdot a \cdot B$$

$$a = \left(\frac{A \cdot \mu \cdot g}{A + B + \mu \cdot C} \right)$$

Exemplo Resolvido 17: Um carrinho, que suporta uma esfera de raio R , é dotado de um degrau de altura $H = 0,4.R$ e desloca-se horizontalmente em movimento retilíneo. Determine a máxima aceleração a com que o móvel pode se deslocar sem que a esfera suba o degrau.

- a) $5g/3$
 b) $4g/3$
 c) g
 d) $3g/4$
 e) $5g/4$



Solução no Referencial Não Inercial do Carro:

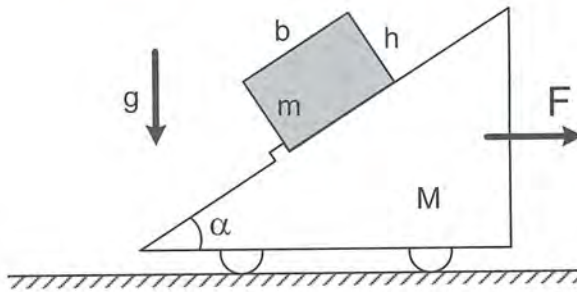
Sobre a esfera agem as forças de interação normal N , normal N' , seu peso $m.g$ (no centro de massa), bem como a força de inércia $m.a$ (no seu centro de massa).



A força de Einstein " $m.a$ " está empurrando a esfera, de forma a subir o degrau. Quanto maior for o valor de " $m.a$ ", menor será a normal N' de contato entre a esfera e o chão. Quando " $m.a$ " atingir o valor crítico, a normal N' se anulará ($N' = 0$, a esfera perde o contato com o solo) e a esfera estará na iminência de subir o batente. Nesse momento, aplicando o equilíbrio dos momentos em relação ao ponto O de contato da roda com o batente, temos:

$$-(0,6.R).m.a + (0,8.R).m.g = 0 \Rightarrow a = \frac{4.g}{3}$$

Exemplo Resolvido 18: A figura mostra uma caixa homogênea de massa m , altura h e base b , apoiada sobre uma prisma móvel de massa M e inclinação α . Um pequeno batente impede o escorregamento da caixa. Se a gravidade local vale g , o prof. Renato Brito pede que você determine a maior força F horizontal com que se pode puxar a rampa sem que a caixa tombe para trás.



Solução no Referencial Não inercial do Prisma:

Imprimindo ao prisma uma aceleração excessiva (para a direita), a caixa tomba (para a esquerda). A maior aceleração sem tombamento é aquela para a qual a caixa se apóia no carro exclusivamente por sua aresta inferior. A Figura 98 mostra as forças reais e fictícias agindo sobre a caixa, sem dar ênfase à colocação das forças que agem sobre o prisma :

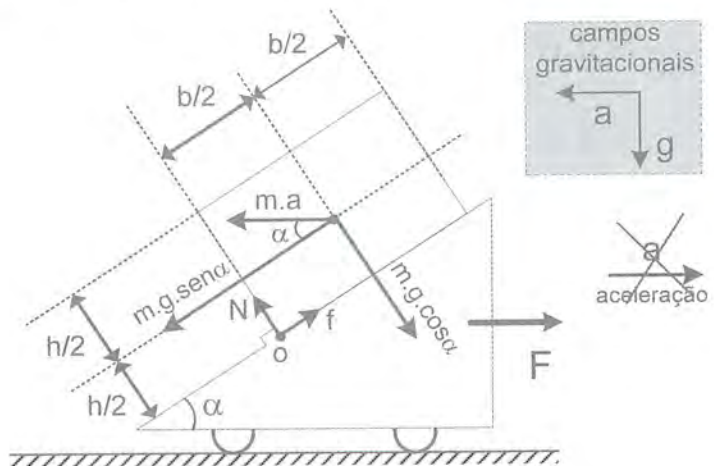


Figura 98 – referencial não inercial - Forças agindo na caixa

A normal N age na aresta inferior, visto que a caixa está literalmente apoiada nela (quando na iminência de tombar). A força f é exercida pelo batente na caixa, impedindo seu escorregamento. O peso $m.g$ da caixa já se encontra decomposto em suas componentes $m.g.\text{sen}\alpha$ e $m.g.\text{cos}\alpha$.

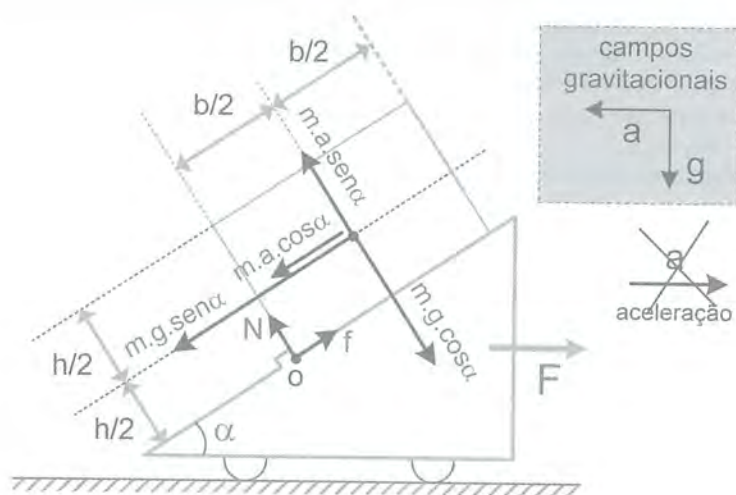


Figura 99 – referencial não inercial - forças agindo na caixa

A força de inércia “ $m.a$ ” (Figura 98) tem o sentido oposto ao da aceleração que será “abandonada”, na mudança do referencial da Terra para o referencial do prisma. Na Figura 99, decomparamos a força de inércia “ $m.a$ ” em suas componentes.

Aplicando a condição de momento total das forças nulo em relação ao ponto o (figura 99), temos:

$$m.a.\text{sen}\alpha.(b/2) + m.a.\text{cos}\alpha.(h/2) + m.g.\text{sen}\alpha.(h/2) - m.g.\text{cos}\alpha.(b/2) = 0$$

$$m.a.(b.\text{sen}\alpha + h.\text{cos}\alpha) = m.g.(b.\text{cos}\alpha - h.\text{sen}\alpha)$$

$$a = g.\left(\frac{b.\text{cos}\alpha - h.\text{sen}\alpha}{b.\text{sen}\alpha + h.\text{cos}\alpha}\right) \Rightarrow a = g.\left(\frac{b - h.\text{tg}\alpha}{h + b.\text{tg}\alpha}\right)$$

Assim, essa aceleração acima torna iminente o tombamento da caixa.

A força com que o conjunto deve ser empurrado para se mover com essa aceleração é dada pela 2ª lei de Newton:

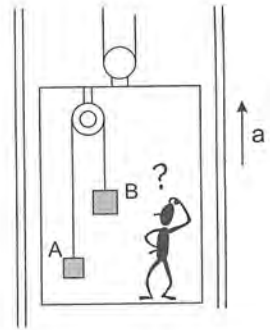
$$F_R = (M + m).a \Rightarrow F = (M+m).g.\left(\frac{b - h.\text{tg}\alpha}{h + b.\text{tg}\alpha}\right)$$

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO

Questão 291

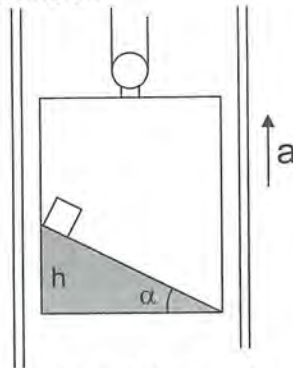
A figura mostra um elevador que move-se para cima ($v \uparrow$) em movimento acelerado ($a \uparrow$) com aceleração $a = 2 \text{ m/s}^2$ num local onde a gravidade vale $g = 10 \text{ N/kg}$. Os blocos A e B, de massas 2 kg e 6 kg , encontram-se ligados entre si por meio de um fio ideal que passa por uma polia presa ao teto do elevador. Pede-se determinar:

- a aceleração com que movem-se os bloquinhos para o observador dentro do elevador;
- a tração no cordão.



Questão 292 - ☞

A figura mostra um elevador que se move com aceleração $a = 5 \text{ m/s}^2$ para cima. Um bloco inicialmente em repouso, em relação ao elevador, é abandonado do topo de um plano inclinado e escorrega ladeira abaixo, até atingir o piso do elevador. Admitindo $g = 10 \text{ N/kg}$ e desprezando atritos, o prof Renato Brito pede para você determinar:



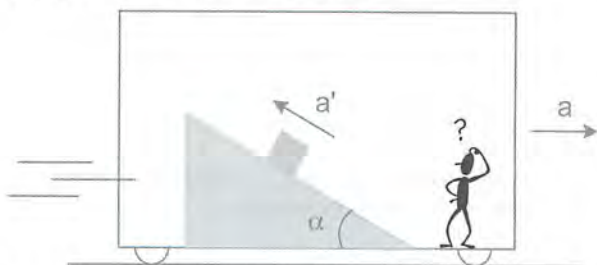
- a aceleração adquirida pelo bloco ladeira abaixo, em relação ao elevador;
- quanto tempo o bloco gasta para descer toda a ladeira, admitindo que a mesma tenha altura vertical $h = 2,7 \text{ m}$. Dado: $\sin \alpha = 0,60$ e $\cos \alpha = 0,80$

Questão 293

A figura mostra um trem que parte do repouso sobre trilhos retilíneos com aceleração constante a em relação à Terra. Uma caixa de massa $m = 2 \text{ kg}$ foi abandonada sobre uma rampa lisa que se encontra fixa ao piso desse trem. Determine:

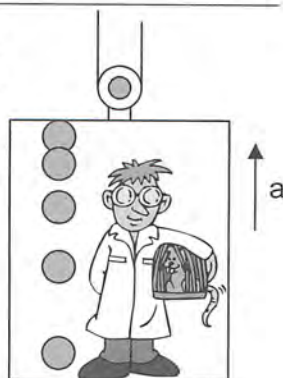
- o valor da aceleração a para que a caixa permaneça em repouso em relação à rampa, durante o movimento do trem;
- a aceleração a' com que a caixa subirá a rampa, em relação ao trem, caso este se mova com aceleração $a = 9 \text{ m/s}^2$ em relação à Terra.

Dado: $g = 10 \text{ N/kg}$, $\text{sen} \alpha = 0,6$, $\text{cos} \alpha = 0,8$

**Questão 294 - ☉**

A figura mostra um elevador panorâmico que sobe com aceleração $a = 2 \text{ m/s}^2$. De repente, Dr. Raul percebe que a lâmpada se desprende do teto a $2,94 \text{ m}$ de altura do piso do elevador e passa a cair verticalmente em direção ao piso. Quanto tempo ele dispõe para afastar o pé e não se machucar com o impacto da lâmpada no piso? (Dado $g = 10 \text{ N/kg}$)

- $0,4 \text{ s}$
- $0,5 \text{ s}$
- $0,6 \text{ s}$
- $0,7 \text{ s}$
- $0,8 \text{ s}$

**Questão 295 - ☉**

Considere agora que outro elevador esteja subindo com uma incrível velocidade constante $V = 300 \text{ km/h}$. De repente, Dr. Raul percebe que a lâmpada se desprende do teto a $3,2 \text{ m}$ de altura do piso do elevador e passa a cair verticalmente em direção ao piso. Quanto tempo ele dispõe para afastar o pé e não se machucar com o impacto da lâmpada no piso? (Dado $g = 10 \text{ N/kg}$)

- $0,4 \text{ s}$
- $0,5 \text{ s}$
- $0,6 \text{ s}$
- $0,7 \text{ s}$
- $0,8 \text{ s}$

Questão 296 - C

Considere um pêndulo simples de comprimento ℓ é preso ao teto de um elevador, como mostra a figura. Sendo g o módulo do campo gravitacional no local, analisar as afirmações a seguir:

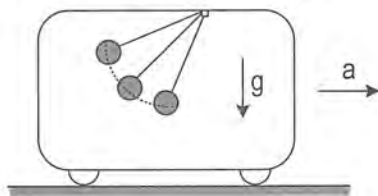
- I - Se o elevador permanecer em repouso ou mover-se em movimento retilíneo e uniforme, o período de oscilação do pêndulo será $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.
- II - Se o elevador mover-se com aceleração de módulo a dirigida para cima, o período de oscilação do pêndulo será $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g+a}}$.
- III - Se o elevador mover-se com aceleração de módulo a dirigida para baixo ($a < g$), o período de oscilação será $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g-a}}$.
- IV - Se o elevador estiver em queda livre, o pêndulo não oscilará, visto que a gravidade aparente em seu interior será nula.

Determine as alternativas corretas:

- a) todas b) apenas II e III c) apenas IV d) apenas I e) apenas I, II e III.

Questão 297 - C

A figura mostra um pêndulo de comprimento L preso ao teto de um vagão que se move com aceleração constante a num local em que o campo gravitacional tem intensidade g . Se o pêndulo é posto a executar pequenas oscilações, o período dessas oscilações é dado por :





- a) $2\pi\sqrt{\frac{L}{g+a}}$ b) $2\pi\sqrt{\frac{L}{\sqrt{g^2+a^2}}}$ c) $2\pi\sqrt{\frac{L}{g-a}}$ d) $2\pi\sqrt{\frac{L}{\sqrt{g^2-a^2}}}$

Questão 298 - C

Assinale **A** para grandezas absolutas (aquelas que independem do referencial inercial) e **R** para grandezas relativas (aquelas que dependem do referencial inercial), nos domínios da Mecânica Clássica:

- a) aceleração
b) massa
c) força

- d) deslocamento
- e) velocidade
- f) energia cinética
- g) quantidade de movimento
- h) intervalo de tempo
- i) impulso
- j) trabalho


Questão 299 -  

Sejam A e B dois referenciais inerciais. Se a quantidade de movimento de um sistema, num certo episódio, se conserva, para o referencial A, podemos garantir que a quantidade de movimento desse sistema certamente se conserva em relação ao referencial B ?

Questão 300 - (UFPA) 

Um ônibus caminha com velocidade constante em uma estrada horizontal quando, subitamente, o motorista acelera o veículo, fazendo com que os passageiros experimentem uma força que os impele para trás. Assinale a alternativa **correta**:

- a) a força que os passageiros experimentam é de natureza fictícia ou inercial e proporcional ao peso de cada passageiro.
- b) a força que os passageiros experimentam é de natureza fictícia ou inercial, mas independe do peso de cada passageiro.
- c) a força que os passageiros experimentam é real, mas depende do campo gravitacional da Terra.
- d) a força que os passageiros experimentam é real, mas independe do campo gravitacional da Terra.
- e) passageiros diferentes no interior do veículo experimentam forças fictícias de mesmo valor.

Questão 301 - (CEFET-CE) - 

Medindo-se várias grandezas físicas referentes ao movimento de uma partícula em relação a distintos **referenciais inerciais**, verifica-se que algumas grandezas mudam com o referencial (relativas), enquanto outras não (absolutas). Constata-se que, no limite de baixas velocidades da mecânica clássica:

- a) aceleração instantânea é relativa, enquanto velocidade instantânea é absoluta;
- b) força resultante é relativa, enquanto intervalo de tempo é absoluto;
- c) deslocamento é relativo, enquanto aceleração instantânea é absoluta;
- d) intervalo de tempo é relativo, enquanto deslocamento é absoluto;
- e) força resultante é relativa, enquanto velocidade instantânea é absoluta.

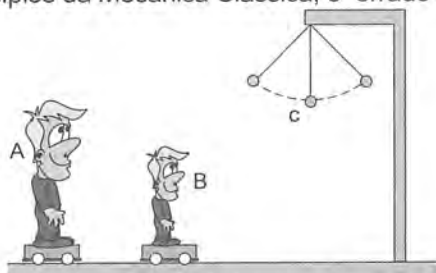
Questão 302 - (UECE 2008) C

Assinale a alternativa que, de acordo com a física newtoniana, contém apenas grandezas (físicas) que não dependem do **referencial inercial** adotado:

- a) trabalho e energia cinética
- b) força, massa e aceleração
- c) massa, energia cinética e aceleração
- d) temperatura e velocidade

Questão 303 - C

Sejam A e B dois referenciais inerciais (observadores inerciais) estudando o movimento de um móvel C. A Terra é admitida como um referencial inercial. Considerando os princípios da Mecânica Clássica, é errado afirmar que:



- a) mesmo A e B sendo referenciais inerciais, eles podem medir diferentes valores para a velocidade, a quantidade de movimento e para a energia cinética da bolinha C. Para isso, basta que A esteja se movendo em relação a B.
- b) os referenciais (observadores) A e B certamente não têm aceleração, um em relação ao outro ($\vec{a}_{AB} = 0$), por serem referenciais inerciais;
- c) a aceleração do móvel C, quando medida pelo referencial A, sempre concorda com a sua aceleração medida pelo referencial B, quer os referenciais inerciais A e B estejam parados entre si ou em movimento entre si;
- d) se A fosse um referencial inercial e B fosse um referencial não-inercial, A e B discordariam a respeito da aceleração do corpo C;
- e) mesmo A e B sendo referenciais inerciais, é possível que a energia mecânica do pêndulo C se conserve para o observador A, mas não se conserve (varie com o tempo) para o observador B.

Questão 304 - (ITA 2003)

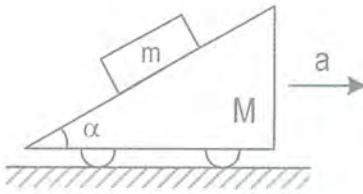
[304 a 314]

A figura mostra um carrinho de massa M , com rampa, inicialmente em repouso sobre uma superfície lisa. Sobre a sua superfície inclinada, repousa uma caixa de massa m . Se o coeficiente de atrito entre a rampa e a caixa vale μ , determine a aceleração máxima com que o carrinho pode se mover para a direita, sem que a caixa escorregue sobre sua superfície inclinada.

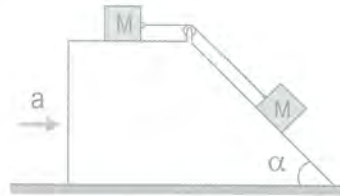
Questão 305 - 

[304 a 314]

A figura mostra duas caixas iguais conectadas entre si por meio de fio e polia ideais. O coeficiente de atrito entre cada bloco e a superfície prismática vale $\mu = 0,5$ e a gravidade local vale g . O prof. Renato Brito pede para você determinar a maior aceleração a com que o sistema pode ser acelerado horizontalmente para a direita, sem que os blocos escorreguem em relação ao prisma. Dado: $\sin\alpha = 0,6$ $\cos\alpha = 0,8$.



Questão 304

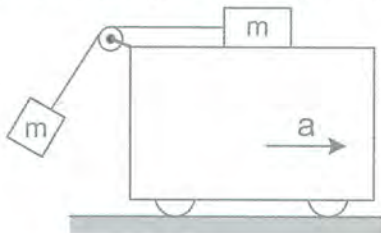


Questão 305

Questão 306 - 

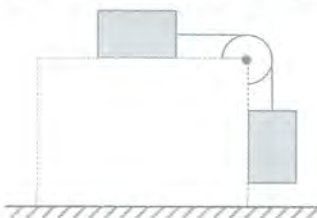
[304 a 314]

A figura mostra dois blocos de mesma massa m conectados entre si através de um fio que passa por uma polia, ambos ideais. Se a gravidade local vale g e o coeficiente de atrito entre o bloco e o carro vale $\mu > 1$, o prof. Renato Brito pede para você determinar a maior aceleração a com que o carro pode se mover, sem que o bloco escorregue em relação a ele.

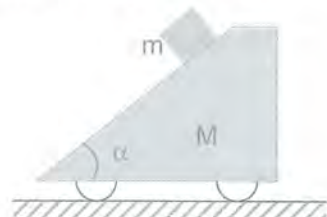
**Questão 307 -** 

[304 a 314]

Na figura, os blocos têm massas iguais e estão inicialmente em repouso (equilíbrio estático) sobre uma mesa que, por sua vez, repousa sobre uma superfície horizontal. Sabendo que o fio e a polia são ideais, a gravidade local vale g e o coeficiente de atrito entre os blocos e a mesa vale μ , determine a maior aceleração com que a mesa deve ser empurrada, de forma que não ocorra escorregamento entre os blocos e a mesa.



Questão 307

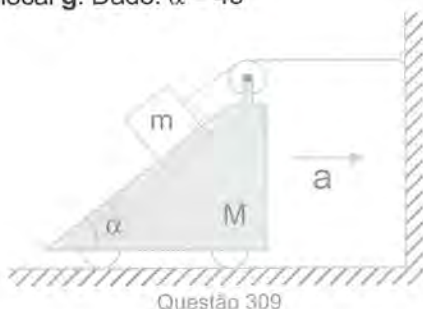


Questão 308

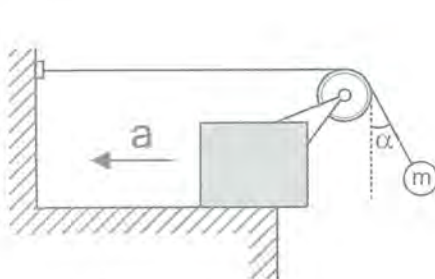
Questão 308

[304 a 314]

Um bloco de massa m é abandonado em repouso sobre um carrinho de massa $M = 2m$. Se o sistema pode deslizar sem atrito, determine a aceleração a adquirida pelo carrinho em função da aceleração da gravidade local g . Dado: $\alpha = 45^\circ$



Questão 309



Questão 310

Questão 309

[304 a 314]

Um bloco de massa m , conectado a uma parede através de um fio ideal, é abandonado em repouso sobre um carrinho de massa $M = 2m$. Se o sistema pode deslizar sem atrito, o prof. Renato Brito pede para você determinar a aceleração a adquirida pelo sistema em função de g . Dado: $\sin \alpha = 0,6$ $\cos \alpha = 0,8$

Questão 310

[304 a 314]

Na figura, após o pêndulo ser abandonado do repouso, sua inclinação $\alpha = 30^\circ$ com a vertical permanece constante durante o movimento da caixa. Todos os atritos são desprezíveis. Dada a massa da bola $m = 800 \text{ g}$ e a gravidade local $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine a massa M do bloco, bem como a sua aceleração.

Questão 311

[304 a 314]

Seja um prisma triangular inicialmente fixo ao solo. A sua superfície inclinada (rampa) é perfeitamente lisa e forma um ângulo α com a horizontal. Um pequeno bloco, quando abandonado em repouso no topo dessa rampa, desce aceleradamente até encontrar a trava T . Determine com que aceleração horizontal a se deve empurrar esse prisma para a direita, a partir desse instante, a fim de que o tempo que a caixa leve para retornar à sua posição inicial seja o mesmo tempo que ela gastou na descida da rampa. A gravidade local vale g .

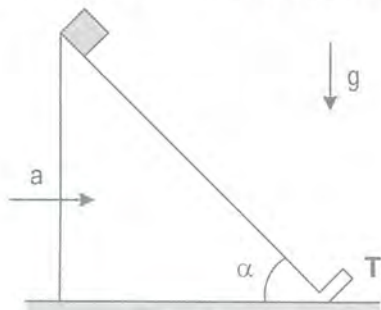
- $g \cdot \operatorname{tg} \alpha$
- $2g \cdot \operatorname{tg} \alpha$
- $g \cdot \operatorname{cotg} \alpha$
- $2g \cdot \operatorname{cotg} \alpha$
- $2 \cdot g \cdot \operatorname{sen} \alpha$

Questão 312 - ☞

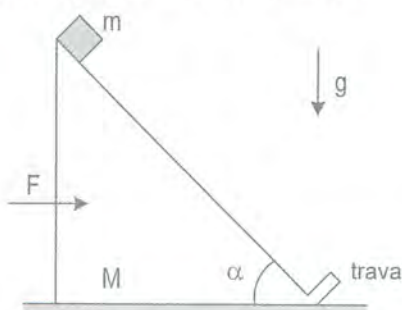
[304 a 314]

Seja um prisma triangular de massa M e inclinação α com a horizontal inicialmente em repouso sobre o solo liso. Quando um pequeno bloco de massa m é abandonado em repouso no topo dessa rampa, desce aceleradamente ladeira abaixo, gastando T segundos até encontrar a trava. Durante a descida do bloco, é necessária a ação de uma força horizontal e constante de intensidade F agindo sobre o prisma, a fim de mantê-lo estacionário em relação ao solo.

Em seguida, estando o bloco em repouso na extremidade inferior da rampa, a intensidade da força F é ampliada em K vezes, levando o bloco a mover-se ladeira acima, gastando T segundos para atingir o topo da rampa novamente. Determine o valor numérico de K , para $\alpha = 45^\circ$ e $M = 2m$.



Questão 311



Questão 312

Questão 313

[304 a 314]

Uma caixa de massa m está apoiada sobre a face inclinada de um prisma triangular que forma um ângulo $\alpha = 45^\circ$ com a horizontal. O prisma tem massa $M = 2m$ e é empurrado por uma força horizontal constante de intensidade $F = 4m \cdot g$. Sabendo que a gravidade local vale g e admitindo que o sistema parte do repouso, o prof. Renato Brito pede que você determine:

- a aceleração a com a qual o prisma se moverá em relação à Terra;
- a aceleração a' com que a caixa subirá a rampa no referencial da rampa.

**Questão 314** - ☞

[304 a 314]

Sobre um prisma triangular se coloca uma corda flexível e homogênea de modo que seu ponto médio fique sobre a aresta superior do prisma. Este se apóia em um plano horizontal perfeitamente liso. Sendo $\alpha < \beta$, determine a aceleração horizontal que deve ser comunicada ao prisma para que a corda

permaneça imóvel em relação ao prisma durante seu movimento. A gravidade local vale g .

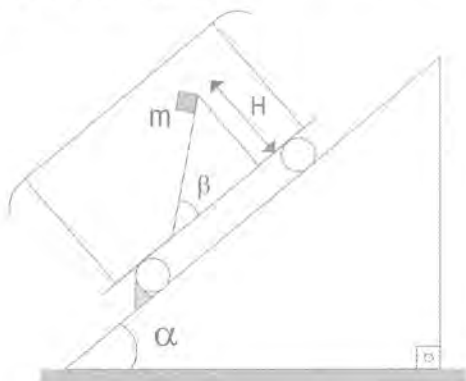
- $g \cdot (\text{sen} \beta - \text{sen} \alpha)$
- $g \cdot \text{tg} \beta / \text{tg} \alpha$
- $g \cdot \text{tg}(\beta/2 - \alpha/2)$
- $g / (\cos \beta + \cos \alpha)$
- $g \cdot \text{tg}(\beta - \alpha)$



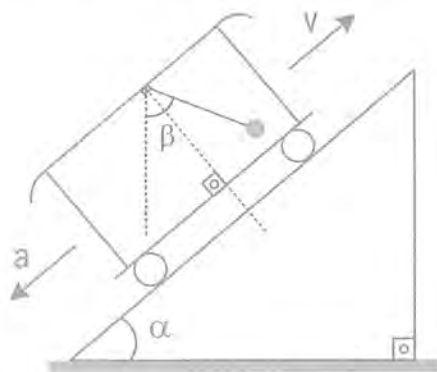
Questão 315 - ⚙

[315 a 319]

Observe a figura a seguir. Os ângulos α e β são conhecidos, assim como a gravidade local g e a massa m do bloquinho. A rampa encontra-se fixa ao solo do vagão e todos os atritos são desprezíveis. Quando a trava das rodas é retirada, o vagão passa a se mover aceleradamente para baixo ao longo de uma ladeira muito longa. No interior do vagão, o bloquinho parte do repouso, do topo da rampa de altura H , descendo ladeira abaixo. Considerando que a massa do vagão seja muito maior do que a massa do bloquinho, determine o tempo gasto por este para atingir o piso do vagão em função de α , β , g e H .



Questões 315 e 316




Questão 317

Questão 316

[315 a 319]

Considere novamente a figura da questão anterior. Quando a trava das rodas é retirada, o vagão passa a move-se aceleradamente ladeira abaixo. No seu interior, o atrito entre o bloquinho e a cunha faz com que ele não escorregue em relação à cunha, durante o movimento do vagão. Pede-se determinar:

- a força de atrito que age sobre o bloco, durante o movimento do vagão.
- o menor coeficiente de atrito estático necessário para que o bloquinho não escorregue em relação à cunha, durante o movimento acelerado do vagão.

Questão 317 - 

[315 a 319]

A figura mostra um vagão subindo livremente uma rampa fixa de inclinação α com a horizontal. Fixo ao seu teto se encontra um pêndulo, que permanece estacionário em relação ao vagão, sem oscilar, durante todo o movimento. Sabendo que a gravidade local vale g e o coeficiente de atrito cinético entre a rampa e o vagão vale μ , pede-se determinar a inclinação β ($\beta > \alpha$) do fio com a vertical durante a subida do vagão em movimento retardado.

Questão 318 - 

[315 a 319]

Considere que um pêndulo simples tem um período $T = 1$ s, quando oscila num campo gravitacional uniforme $g = 10$ N/kg. Se esse pêndulo for fixado ao teto de um vagão que desce livremente uma rampa lisa, inclinada de um ângulo $\alpha = 60^\circ$ com a horizontal, oscilará com período:

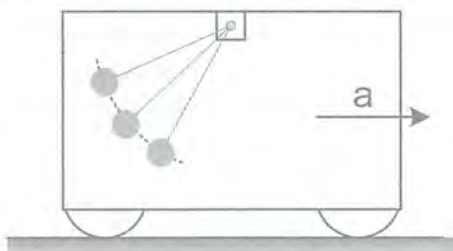

- a) 1 s b) $\sqrt{2}$ s c) $(\sqrt{2}/2)$ s d) $\sqrt{3}$ s e) $(\sqrt{3}/2)$ s

Questão 319 - 

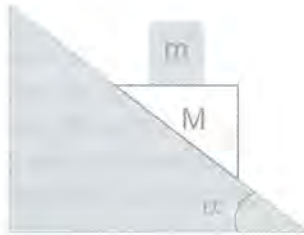
[315 a 319]

Num dado planeta onde a gravidade vale g , um relógio de pêndulo de comprimento $L = 1$ m funciona pontualmente no interior de um vagão de trem inicialmente em repouso. Quando o prof. Renato Brito aplicou uma aceleração constante ao vagão, o relógio passou a oscilar em torno de uma posição de equilíbrio 36 cm acima da posição de equilíbrio original. O efeito da aceleração, entretanto, fez com que o pêndulo deixasse de operar pontualmente, pois este passou a:

- a) adiantar 15 s a cada minuto;
 b) adiantar 12 s a cada minuto;
 c) adiantar 1 min a cada hora;
 d) adiantar 45 s a cada minuto;
 e) adiantar 24 s a cada hora.

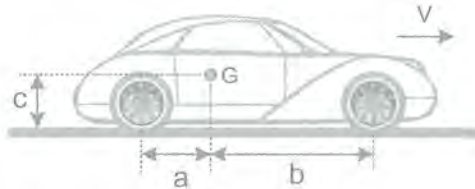
**Questão 320 -** 

O sistema da figura foi abandonado a partir do repouso. A rampa é perfeitamente lisa e se encontra fixa ao solo. Só há atrito entre a cunha de massa M e o bloco de massa m que repousa sobre a superfície horizontal da cunha. Se a gravidade local vale g e a rampa forma um ângulo α com a horizontal, o prof. Renato Brito pede que você determine o menor coeficiente de atrito que pode haver na fronteira de contato entre o bloco e a superfície horizontal da cunha a fim de que ambos (bloco e cunha) se movam juntos, sem que o bloco escorregue em relação à cunha durante o movimento descendente do conjunto.

**Questão 321 - ⚙**

A figura mostra um carro de massa m , que move-se ao longo de uma pista horizontal cujo coeficiente de atrito estático com as rodas vale μ . Atrito de escorregamento só é considerado na roda motriz; atrito de rolamento é desprezado. Supõe-se que o motor possa desenvolver força de tração de sobra. Determine:

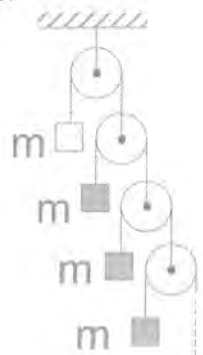
- a maior aceleração do veículo na partida, na hipótese de tração só traseira em função de μ , a , b , c e da gravidade g .
- a maior aceleração do veículo na partida, na hipótese de tração só dianteira. Nesse caso, admita $a = 1,4$ m, $b = 2$ m, $c = 0,6$ m, $g = 10$ m/s² e $\mu = 0,75$.

**Questão 322 - ⚙ - Máquina de Atwood infinita**

[181, 182, 322]

O sistema da figura é composto por infinitas caixas de mesma massa m sucessivamente conectadas através de fios e polias ideais. Se a gravidade local vale g , utilizando o conceito de inércia equivalente apresentado na questão 181, determine:

- a aceleração da primeira caixa de cima (caixa branca);
- a tração no fio que prende a primeira polia de cima ao teto.



5 DINÂMICA CURVILÍNEA NO REFERENCIAL NÃO INERCIAL



5.1 INTRODUÇÃO

Nos capítulos 2 e 4, aprendemos que as forças podem ser classificadas em *forças de interação* e *forças de inércia*.

Forças de Interação são aquelas que decorrem da interação direta (forças de contato) ou indireta (forças de campo) entre dois corpos, surgindo sempre aos pares, em acordo com a 3ª lei de Newton (Ação e Reação). Usando uma linguagem mais simples, são as forças comuns que usualmente se estuda no Ensino Médio, tais como a força gravitacional (peso, por exemplo), a força elétrica, a força magnética, o atrito, a normal N , a força elástica, o empuxo etc.

Forças de Inércia são forças fictícias. Elas surgem apenas quando efetuamos uma mudança de um referencial inercial para um referencial não inercial com base no Princípio da Equivalência de Einstein. Elas não existem no referencial inercial, só agindo nos referenciais não inerciais (acelerados).

Sempre que efetuamos uma mudança de um referencial inercial para um referencial acelerado em **translação retilínea** com aceleração a , a força de inércia " $m \cdot a$ ", que surge nesse contexto, é chamada de "**força de Einstein**" e esteve presente em todos os exemplos resolvidos e propostos do capítulo 4.

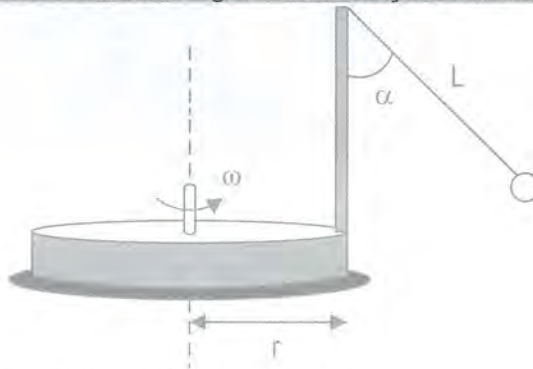
Por outro lado, quando efetuamos uma mudança de um referencial inercial para um referencial não inercial dotado de movimento de rotação uniforme, animado de aceleração exclusivamente centrípeta $a = \omega^2 \cdot R$, a força de inércia que surge nesse contexto ($m \cdot a = m \cdot \omega^2 \cdot R$) é chamada de **força centrífuga** e será discutida no presente capítulo.

Além da força de Einstein e da centrífuga, também podemos citar as forças de **Euler** e **Coriolis**, cuja aplicação prática na resolução de problemas é bastante restrita, fugindo dos objetivos do presente livro de Mecânica.

5.2 A FORÇA CENTRÍFUGA

A força centrífuga é uma força de inércia que age apenas em referenciais não inerciais dotados de aceleração centrípeta, isto é, referenciais em rotação. Para uma melhor compreensão, consideremos o exemplo a seguir.

Exemplo Resolvido 19: a figura mostra um carrossel de raio $r = 1,5$ m girando em torno do seu eixo central. Um mastro fixo à sua periferia suporta um pêndulo de comprimento $L = 10$ m que gira solidário ao carrossel, formando um ângulo α constante com a vertical, tal que $\text{sen}\alpha = 0,6$. ($g = 10 \text{ m/s}^2$). Determine a velocidade angular ω de rotação do sistema.



1ª Solução – Análise no Referencial Inercial – Terra

Para um referencial (observador) fixo à Terra (Figura 100), todo o conjunto “carrossel + mastro + pêndulo” está girando com velocidade angular ω em torno do eixo de rotação central. A esfera do pêndulo, portanto, está executando um MCU de raio $R = r + L \cdot \text{sen}\alpha$, dotada de aceleração centrípeta $a_{cp} = \omega^2 \cdot R$ no referencial da Terra, sob ação exclusiva das forças peso P e tração T .

Conforme aprendemos no estudo da Dinâmica de um MCU no plano horizontal (eq8 e eq9 página 107), a dinâmica do movimento desse pêndulo é facilmente equacionada da seguinte forma:

Na vertical (Figura 100), temos o equilíbrio das forças: $T \cdot \text{cos}\alpha = m \cdot g$ (eq74)

Na direção radial, a aceleração centrípeta é produzida pela componente horizontal T_x da tração. Pela 2ª lei de Newton na direção radial (ou centrípeta), podemos escrever:

$$FR_{cp} = F_{in} - F_{out} = m \cdot a_{cp}$$

$$(T \cdot \text{sen}\alpha - 0) = m \cdot (\omega^2 R)$$

$$T \cdot \text{sen}\alpha = m \cdot (\omega^2 R) \quad (\text{eq 75})$$

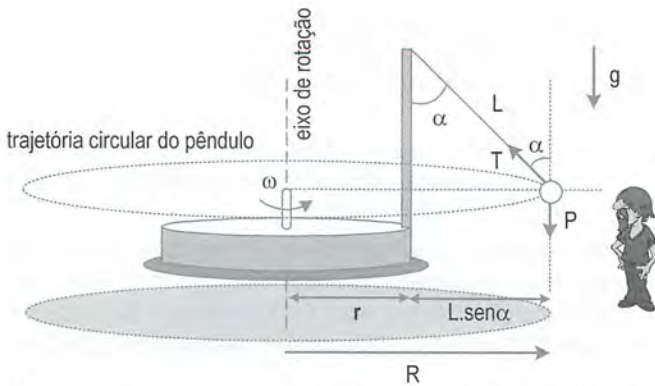


Figura 100 – Diagrama das forças que agem no pêndulo, no referencial da Terra, no qual a bolinha possui aceleração centrípeta e sofre ação apenas do campo gravitacional terrestre g .

A esfera do pêndulo descreve um movimento circular de raio R em torno do eixo de rotação, tal que: $R = r + L \cdot \text{sen} \alpha = 1,5 + 10 \times 0,6 = 7,5 \text{ m} \Rightarrow R = 7,5 \text{ m}$

Dividindo a equação eq75 pela eq74, temos que:

$$\frac{T \cdot \text{sen} \alpha}{T \cdot \text{cos} \alpha} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot R}{m \cdot g} \Rightarrow \text{tg} \alpha = \frac{\omega^2 \cdot R}{g} \Rightarrow \frac{0,6}{0,8} = \frac{\omega^2 \cdot 7,5}{10} \Rightarrow \omega = 1 \text{ rad/s}$$

Mas como resolveríamos esse mesmo problema no referencial do próprio carrossel? Ora, seja um observador solidário ao carrossel (Figura 101), isto é, um observador que se encontre sobre o referido carrossel, compartilhando do seu mesmo movimento de rotação em relação à Terra.

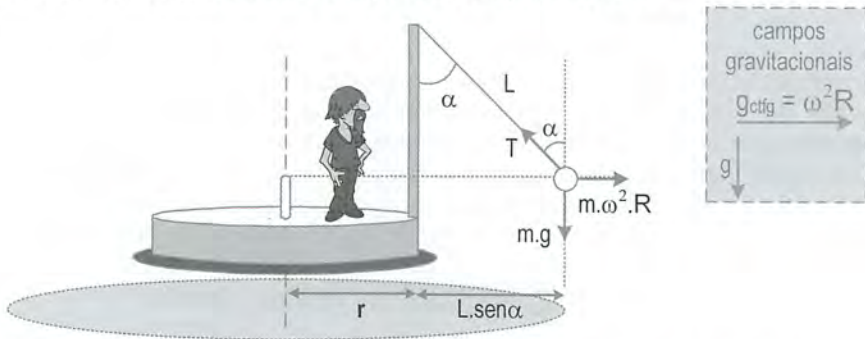


Figura 101 – Diagrama das forças que agem no pêndulo, no referencial acelerado do próprio pêndulo. Neste referencial, o pêndulo encontra-se imóvel (sem velocidade angular, nem aceleração centrípeta), e sofre ação tanto do campo gravitacional terrestre $g \downarrow$ quanto de um campo gravitacional centrífugo $g_{\text{ctfg}} \rightarrow$ decorrente da mudança do referencial inercial da Terra (inercial) para o referencial girante do pêndulo (não-inercial, dotado de aceleração centrípeta em relação à Terra).

Para tal observador, o carrossel, assim como o pêndulo, se encontra absolutamente imóvel (*afinal, ninguém possui velocidade ou aceleração em relação a si mesmo ☺*), enquanto todo o ambiente ao seu redor é que está girando em relação a ele.

Fazendo uso do princípio da Equivalência de Einstein (estudado no capítulo 4), efetuamos uma mudança do referencial inercial da Terra para o referencial não inercial do próprio carrossel.

A aceleração centrípeta a_{ctp} que a esfera do pêndulo possui, no referencial da Terra (Figura 102), equivale, no referencial do carrossel, a uma “*campo gravitacional centrífugo*” de mesmo valor ($\omega^2 \cdot R$), mesma direção (radial) e sentido contrário ao da aceleração centrípeta, que será “*abandonada*” (Figura 103).



Figura 102 – no referencial inercial da Terra, o pêndulo está se movendo em MCU animado de aceleração centrípeta a_{ctp} .

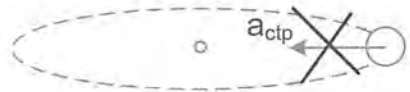


Figura 103 – no referencial não inercial do próprio pêndulo, este não possui nem velocidade nem aceleração. Nesse referencial, essa a_{ctp} é sentida como uma gravidade centrífuga (que foge do centro).

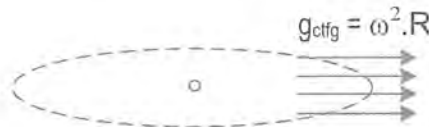


Figura 104 – o campo gravitacional centrífugo é radial e aponta para fora da curva em cada ponto, causando uma força gravitacional fictícia, denominada força centrífuga.

A gravidade centrífuga g_{ctfg} é radial e aponta para fora da curva em cada ponto da curva (Figura 104), causando uma força gravitacional fictícia denominada força centrífuga F_{ctfg} , que só existe no referencial animado de movimento circular, como mostra a Figura 101. Assim, nesse referencial, todos os corpos de massa m que se encontrem a uma distância R do eixo de rotação, ficarão sujeitos a uma força radial para fora (centrífuga), de intensidade:

$$F_{ctfg} = m \cdot g_{ctfg} = m \cdot (\omega^2 \cdot R) \quad (\text{eq 76})$$

Para o observador não inercial (Figura 101), o pêndulo se encontra em equilíbrio (relativo) estático no referencial do carrossel, o que permite escrever:

$$\text{equilíbrio vertical: } T_y = P \Rightarrow T \cdot \cos \alpha = m \cdot g \quad (\text{eq 77})$$

$$\text{equilíbrio radial: } T_x = F_{ctfg} \Rightarrow T \cdot \sin \alpha = m \cdot \omega^2 \cdot R \quad (\text{eq 78})$$

Comparando-se as relações eq74 e eq75, obtidas pelo referencial inercial com as relações eq77 e eq78, obtidas pelo referencial em rotação, vemos que ambos chegam às mesmas relações matemáticas e, portanto, aos mesmos resultados, embora cada um se apóie em argumentos diferentes.

A tabela abaixo sintetiza a visão de cada referencial sobre a situação física em análise nas Figuras 100 e 101:

Referencial da Terra	Referencial do carrossel
A esfera do pêndulo descreve um MCU no plano horizontal (Figura 100).	O pêndulo se encontra em repouso permanente, sem velocidade nem aceleração ($V' = 0$, $a' = 0$, $a_{ctp}=0$), portanto, em equilíbrio relativo (Figura 101).
A esfera possui uma a_{ctp} , o que requer a existência de uma força resultante centrípeta F_{ctp} para produzir essa aceleração, de acordo com a 2ª lei de Newton.	O pêndulo possui aceleração resultante nula, portanto, força resultante nula. Não há força resultante centrípeta nem tangencial nesse referencial.
Nesse referencial inercial, não existem forças fictícias, tais como a força centrífuga. A componente horizontal da tração exercerá o papel de resultante centrípeta $F_{ctp} = T_x$, fornecendo ao pêndulo a a_{ctp} necessária para o movimento circular.	Além das forças de interação peso P e tração T , existe uma força fictícia denominada centrífuga (radial para fora) $F_{ctfg} = m \cdot \omega^2 \cdot R$. A resultante dessas três forças deverá ser nula, para justificar o equilíbrio relativo do pêndulo nesse referencial ($a' = 0$).

Note que a existência simultânea da força centrífuga e de uma resultante centrípeta num mesmo referencial seria uma incongruência conceitual. Afinal, enquanto a resultante centrípeta só existe no referencial inercial (Figura 100), a força centrífuga, por sua vez, só existe no referencial não inercial em rotação (Figura 101). Por esse mesmo motivo, não faz sentido dizer que a força centrífuga “cancela” a força centrípeta em algum referencial. Elas nunca coexistem num mesmo referencial.

Vale ressaltar também que, por se tratar de uma força de inércia, a *força centrífuga* não decorre da interação de dois corpos e, portanto, não admite uma “força de reação” (propriedade 11, página 145). Portanto, em qualquer situação em que a força centrífuga esteja presente, nenhuma outra força será a “reação à força centrífuga”.

Outro aspecto interessante e vantajoso da análise do problema no referencial não inercial é que ela torna mais claros alguns comportamentos do sistema cuja compreensão não é nada intuitiva quando analisada no referencial inercial. Por exemplo, é conhecido o fato de que, quanto maior for

a velocidade angular ω de rotação do pêndulo cônico, no referencial da Terra, mais ele tende a subir, levando a um aumento do ângulo α , mostrado nas Figuras 100 e 101.

Embora a justificativa para esse fato seja meio enigmática no referencial da Terra (Figura 100), essa tendência de subida do pêndulo fica absolutamente clara quando o problema é analisado no referencial girante (Figura 101), no qual o aumento da velocidade angular ω leva ao crescimento da força centrífuga $m \cdot \omega^2 \cdot R$ e, conseqüentemente, ao crescimento do ângulo α . Idéias semelhantes podem ser utilizadas em uma nova análise dos problemas de aplicação de números **111** a **115** no referencial não inercial em rotação, fazendo uso do conceito de força centrífuga. Você seria capaz de retornar a esses problemas e analisá-los no referencial acelerado ?

Exemplo Resolvido 20 – Um Passat de massa $M = 1200$ kg se desloca com velocidade escalar constante, fazendo uma curva de raio $R = 20$ m num solo plano horizontal. Sabendo que o coeficiente de atrito estático e cinético entre os pneus e o solo valem, respectivamente, $\mu_e = 2,0$ e $\mu_c = 1,8$ determine:

- qual a maior velocidade com que o carro pode fazer a curva sem derrapar ?
- a força de atrito que age no carro, quando a curva é feita a 36 km/h ?
- a força de atrito que age no carro, se ele atingir uma velocidade de 108 km/h na curva ?

1ª Solução – Análise no Referencial Inercial

Faremos a análise, considerando o veículo como puntiforme, desprezando as suas dimensões, a fim de evitar o uso de conceito de *momento de uma força*. Uma análise mais elaborada, incluindo a possibilidade de o carro tombar (capotar) será feita adiante na página 212, exemplo resolvido 25.

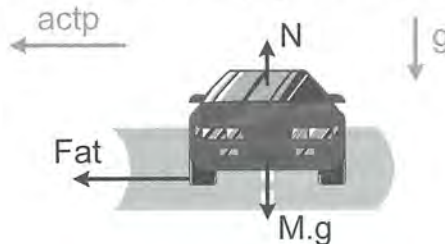


Figura 105 – Diagrama das forças que agem no carro, no referencial inercial

Como estamos analisando esse movimento no referencial inercial (Terra), nenhuma força de inércia (tal como a centrífuga) estará presente. Adiante, analisaremos o problema no referencial não inercial do próprio carro. Assim, no referencial da Terra, agirão sobre o veículo apenas as forças normal N e peso P na vertical (Figura 105), bem como uma força de atrito radial, que fornecerá a aceleração centrípeta $actp$ necessária para esse MCU.

Conforme aprendemos no estudo da Dinâmica de um MCU no plano horizontal (eq8 e eq9, página 107), a dinâmica do movimento desse veículo é facilmente equacionada da seguinte forma:

$$\text{equilíbrio vertical: } N = M \cdot g \quad (\text{eq 79})$$

Na direção radial, a força de atrito estático (estático, pois o pneu rola no solo sem escorregar, sem derrapagem) proverá a aceleração ctp necessária para esse MCU, com base na 2ª lei de Newton:

$$FR_{\text{ctp}} = M \cdot a_{\text{ctp}} \Rightarrow Fat_e = \frac{M \cdot v^2}{R} \quad (\text{eq 80})$$

Essa relação eq80 acima pode ser denominada “*condição para se manter na curva sem derrapar*”. Se ela for satisfeita, o carro se mantém na curva. Caso contrário, no referencial inercial, o carro derrapa e tende a sair na direção tangente, por inércia.

Sendo *estática* a força de atrito trocada entre os pneus e o chão, sua intensidade pode variar numa certa faixa de valores, podendo crescer até atingir um certo valor máximo, sem que haja escorregamento relativo entre as superfícies do pneu e do solo. Esse limite máximo que a força de atrito pode atingir é dado por:

$$Fat_e \leq \mu_e \cdot N \quad (\text{eq 81})$$

A condição acima é obrigatoriamente satisfeita pela força de atrito, independentemente da condição eq80 ser satisfeita ou não; mas o que isso significa ?

Suponha que, para uma velocidade v_1 , uma certa força de atrito Fat_{e1} é requerida para fornecer a aceleração centrípeta $a_{\text{ctp}1}$ necessária para manter o carro nessa curva (Figura 105).

Agora, admita que a velocidade do carro aumente para um valor v_2 tal que $v_2 = 2 \cdot v_1$. Nesse caso, a força de atrito radial Fat_{e2} requerida para manter o carro na curva sem derrapar (dada por eq80) será quatro vezes maior do que antes. A pergunta que se faz é: nesse caso, o carro ainda se manterá na curva ou derrapará ?

Ora, à medida que a velocidade v do carro vai sendo aumentada, ele se manterá na curva (sem derrapar), enquanto a força de atrito requerida pela condição eq80 ainda satisfizer a condição eq81. Se o carro atingir uma velocidade v tão grande que, para mantê-lo na pista sem derrapar, a força de atrito (que age com centrípeta) requerida pela condição eq80 seja maior do que $Fat_{\text{max}} = \mu_e \cdot N$, violando a relação eq81, lamentaremos bastante: nesse caso, o carro derrapará e sairá da curva; a condição eq81 continuará sendo satisfeita enquanto eq80 falhará.

Isso ocorre pelo fato de que a força de atrito estática é limitada, podendo sua intensidade aumentar somente até um certo valor-limite (eq 81), acima do qual o escorregamento entre as superfícies em contato será inevitável.



Assim, substituindo eq79 e eq80 em eq81, vem:

$$\text{Fat} \leq \mu_e \cdot N$$

$$\frac{M \cdot v^2}{R} \leq \mu_e \cdot M \cdot g \Rightarrow v \leq \sqrt{\mu_e \cdot R \cdot g} \quad (\text{eq82})$$

Assim, o fato de a força de atrito estática (que age como resultante centrípeta) ser limitada acaba impondo um limite superior à velocidade com que o carro poderá descrever a curva de forma segura, isto é, sem derrapagem.

a) Para $\mu_e = 2,0$, $R = 20 \text{ m}$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$, usando eq82, vem:

$$v \leq \sqrt{\mu_e \cdot R \cdot g} \Rightarrow v \leq \sqrt{(2,0) \times 20 \times 10} \Rightarrow v \leq 20 \text{ m/s}$$

A máxima velocidade do carro na curva, para que não ocorra derrapagem, será $v_{\text{max}} = 20 \text{ m/s} = 72 \text{ km/h}$.

b) Sendo $36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}$ uma velocidade inferior à velocidade máxima permitida ($72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$) para que não haja derrapagem, vemos que o carro descreverá a curva de forma segura e a força de atrito que estará agindo no carro será dada pela relação eq80 :

$$\text{Fat}_e = \frac{M \cdot v^2}{R} = \frac{1200 \cdot (10)^2}{20} = 6000 \text{ N}$$

c) Sendo $108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s}$ uma velocidade superior à velocidade máxima permitida ($72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$) para que não aja derrapagem, vemos que o carro derrapará e, nesse caso, o Fat será cinético, dado por:

$$\text{Fat}_c = \mu_c \cdot N = \mu_c \cdot M \cdot g = 1,8 \cdot (1200) \cdot (10) = 21.600 \text{ N}$$

2ª Solução – Análise no Referencial Não Inercial : agora, faremos a análise no referencial do próprio carro. Logicamente, nesse referencial, o carro não possui velocidade nem aceleração alguma. Todo o cenário ao redor do carro, incluindo a pista, é que está girando ao redor do dele no seu próprio referencial.

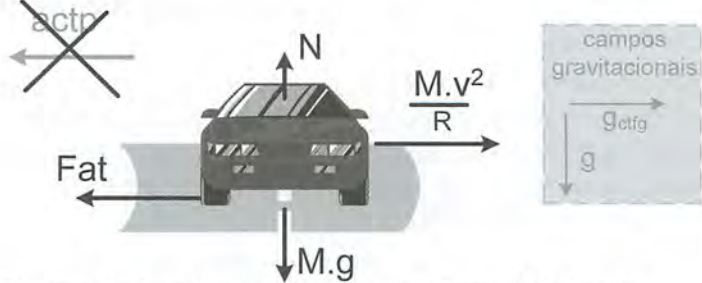


Figura 106 – Diagrama das forças que agem no carro, no referencial não inercial

Pelo Princípio da Equivalência, a aceleração centrípeta que o carro possuía no referencial da Terra agora equivale, no referencial do carro, a uma gravidade centrífuga $g_{ctfg} = v^2 / R$, que causará no carro uma força centrífuga de intensidade $M.v^2 / R$ apontando radialmente para fora da curva, conforme a Figura 106.

Na verdade, em cada massa m do sistema, no referencial não inercial em rotação, tanto agirá uma força peso $m.g$ quanto uma força centrífuga $m.v^2 / R$, puxando o corpo para fora da curva, no referencial não inercial. Na expressão da força centrífuga, v é a velocidade do corpo no referencial inercial e R é a distância do referido corpo ao eixo de rotação, isto é, o raio da trajetória circular descrita por ele no referencial da Terra.

Apesar dessa força centrífuga ser uma força fictícia, seu efeito é perfeitamente real no referencial em rotação. Afinal, quem não já se sentiu puxado para fora de uma curva, durante um passeio de carro ? No referencial inercial da Terra, esse puxão que sentimos é justificado alegando-se a lei da inércia (o qual não parece muito intuitivo), ao passo que, no referencial em rotação (não inercial), tal puxão é justificado pela ação da famosa força centrífuga.

Vale ressaltar que, como ocorre a toda e qualquer *força fictícia*, a *força centrífuga* não existe no referencial inercial (Terra), agindo apenas no próprio referencial em rotação. Adicionalmente, nenhuma força será a “reação à força centrífuga” visto que forças fictícias não admitem reação.

Observando a Figura 106, estando o carro em equilíbrio relativo, no referencial dele mesmo, temos que a força de atrito estático equilibrará a ação da força centrífuga:

- **Equilíbrio (relativo) radial:** $Fat = Fctfg \Rightarrow Fat = \frac{M.v^2}{R}$ (eq 83)

- **Equilíbrio vertical:** $N = M.g$ (eq 84)

Note que as expressões eq80 e eq83 são idênticas, mas foram escritas baseadas em argumentos distintos:

- O referencial inercial (observador na calçada observando o carro fazer a curva) escreve a relação eq80, alegando a 2ª lei de Newton, pois sabe que uma resultante centrípeta é requerida para produzir a a_{cp} necessária para se descrever uma curva;
- Já o referencial em rotação (o motorista do carro, por exemplo) alega que o carro se encontra imóvel (no referencial dele) e está sendo puxado para fora da curva pela ação da força centrífuga e que só não escorrega em virtude da força de atrito estático que cancela a ação da centrífuga (equilíbrio estático eq83).

Logicamente, quanto maior for a velocidade do carro na curva (em relação à Terra), maior será a intensidade da força centrífuga agindo sobre o carro (no referencial do carro), maior será a intensidade do atrito estático requerido para impedir o escorregamento radial do veículo no referencial não inercial. Sendo a força de atrito estático limitada, seu valor obrigatoriamente satisfará a relação:

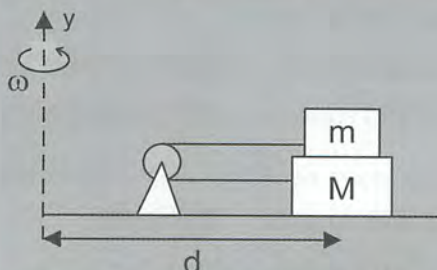
$$F_{at_e} \leq \mu_e \cdot N \quad (\text{eq 85})$$

Assim, a partir das relações eq83, eq84 e eq85, facilmente chegaremos à mesma relação eq82 obtida no referencial inercial, bem como aos mesmos resultados numéricos. Nesse ponto, voltamos a enfatizar que ambos os referenciais sempre findam por encontrar as mesmas equações e, portanto, os mesmos resultados, sendo, em geral, uma mera conveniência a adoção do referencial inercial ou do não inercial para a solução do problema.

Os estudantes, ao se depararem com esse problema, geralmente questionam sobre a necessidade da existência de uma força que se contraponha à força de atrito. Essa força contrapondo-se à força de atrito realmente não é necessária, aparecendo apenas quando o problema é analisado no referencial não inercial em rotação (força centrífuga). Já no referencial da Terra, a presença da força de atrito é justificada pela necessidade de haver uma resultante centrípeta a fim de prover a a_{cp} necessária para a trajetória curvilínea.

O professor Renato Brito acredita que, à medida que o estudante se torna capaz de analisar problemas como esse em ambos os referenciais, ele atinge maturidade e compreensão muito maiores acerca dos conceitos e fenômenos envolvidos.

Exemplo Resolvido 21: (IME) Considere dois blocos, de massas m e M , interligados por uma corda ideal que passa por uma roldana fixa à mesa, conforme a figura.



Considerando que não existe atrito entre o bloco M e a mesa, determine o menor coeficiente de atrito μ entre os dois blocos, para que não haja escorregamento relativo entre eles durante a rotação solidária de todo o conjunto blocos+mesa+polia, com velocidade angular ω em torno do eixo vertical y . Considere d a distância dos blocos ao eixo de rotação e $M > m$.

Resolução no Referencial Não Inercial em Rotação

No referencial da própria mesa girante, as caixas estão em equilíbrio estático relativo. Usando o Princípio da Equivalência, abandonamos a aceleração centrípeta e a substituímos por um campo gravitacional centrífugo $g_{ctfg} = \omega^2 R$, que causará forças centrífugas $m \cdot \omega^2 R$ e $M \cdot \omega^2 R$, respectivamente, nas massas m e M .

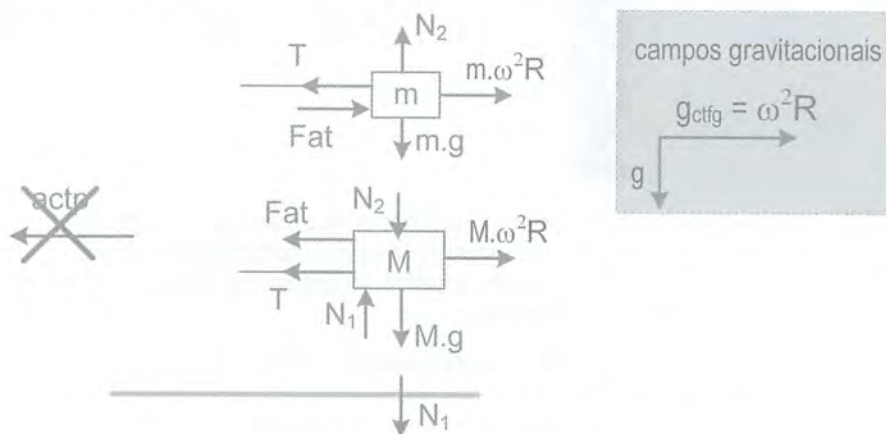


Figura 107 – Diagrama das forças que agem nos blocos, no referencial não inercial da mesa girante

As duas forças centrífugas agem, cada uma, puxando as caixas radialmente para fora da curva; entretanto, sendo $M > m$, teremos $M\omega^2 R > m\omega^2 R$ e, conseqüentemente, no referencial da mesa girante, a tendência é a caixa de baixo (de massa M) escorregar radialmente para fora arrastada pela centrífuga $M\omega^2 R$, puxando a caixa de cima radialmente para dentro através

do fio. Assim, o atrito que age apenas na fronteira entre as caixas atuará impedindo esse escorregamento relativo.

Estando ambas as caixas em equilíbrio relativo na direção radial (horizontal), no referencial da mesa girante, vem:

$$\text{Caixa inferior: } F_{at} + T = M \cdot \omega^2 \cdot R \quad (\text{eq 86})$$

$$\text{Caixa superior: } F_{at} + m \cdot \omega^2 \cdot R = T \quad (\text{eq 87})$$

Estando ambas as caixas em equilíbrio relativo na vertical, vem:

$$\text{Caixa superior: } N_2 = m \cdot g \quad (\text{eq 88})$$

$$\text{Caixa inferior: } N_2 + M \cdot g = N_1$$

$$M \cdot g + M \cdot g = N_1 \quad (\text{eq 89})$$

Como o problema pede que seja determinado o menor valor do coeficiente de atrito na fronteira entre as caixas, de forma que ainda não ocorra escorregamento relativo entre elas, isso nos leva a crer que as caixas se encontram na iminência de escorregar, o que permite escrever :

condição de iminência de escorregar: $F_{at} = \mu \cdot N_2$, usando eq88, vem:

$$F_{at} = \mu \cdot m \cdot g \quad (\text{eq 90})$$



Ei broder, por que foi usado N_2 no cálculo acima em vez de N_1 ?

Ora, meu amigo Raulzito, como o atrito em questão está sendo trocado na fronteira entre as caixas, ele se relaciona com a força normal trocada nessa fronteira entre as caixas, portanto, com N_2 . Lembre-se de que o chão é liso, segundo o enunciado do problema.

Somando as relações eq86 e eq87, membro a membro, e usando eq90, vem:

$$2 \cdot F_{at} + m \cdot \omega^2 \cdot R = M \cdot \omega^2 \cdot R$$

$$2 \cdot \mu \cdot m \cdot g = M \cdot \omega^2 \cdot R - m \cdot \omega^2 \cdot R$$

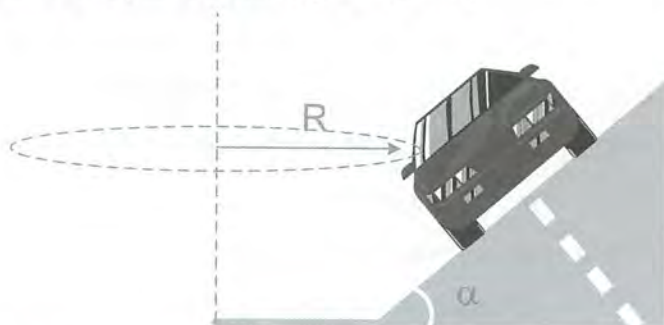
$$2 \cdot \mu \cdot m \cdot g = (M - m) \cdot \omega^2 \cdot R, \quad \text{com } R = d$$

$$\mu = \frac{(M - m) \cdot \omega^2 \cdot d}{2 \cdot m \cdot g}$$

Exemplo Resolvido 22: Considere o veículo de massa m percorrendo uma curva inclinada, de ângulo α , com raio R constante, a uma velocidade v . Supondo que o coeficiente de atrito dos pneus com o solo seja μ , calcule a máxima velocidade com que este veículo pode percorrer esta curva, sem deslizamento.

1ª Solução - No Referencial Não Inercial do Veículo

No referencial não inercial do próprio veículo, não há nem aceleração centrípeta a_{ctp} nem força resultante centrípeta, visto que o carro se encontra imóvel nesse referencial, em equilíbrio relativo ($a' = 0$, $v' = 0$).



Segundo o Princípio da Equivalência, a aceleração centrípeta que o carro possui, no referencial da Terra, equivale, no referencial do próprio veículo, a um campo gravitacional centrífugo $g_{ctfg} = v^2/R$ de mesmo valor, mesma direção (radial) e sentido contrário (radial para fora) que produzirá uma força centrífuga $F_{ctfg} = m \cdot g_{ctfg}$. Esta, por sua vez, empurra o carro para fora da curva como mostra a Figura 107.

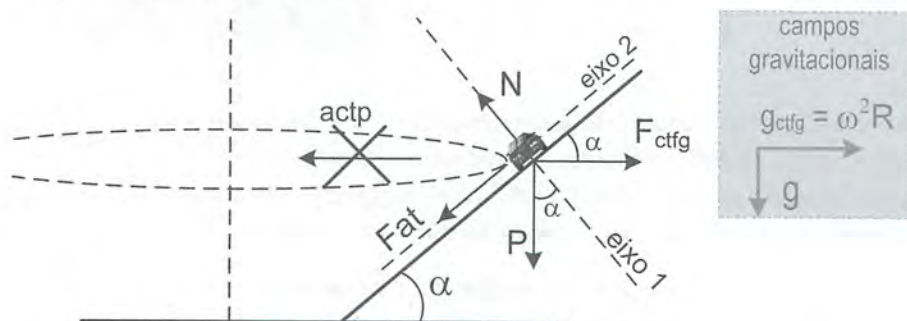


Figura 108 – Diagrama das forças que agem no carro, no referencial não inercial do próprio carro

Se a velocidade v do veículo (em relação à Terra) for suficientemente grande, produzirá uma força centrífuga $F_{ctfg} = m \cdot v^2/R$ (no referencial não inercial) muito intensa ao ponto de tornar iminente o escorregamento do carro

ladeira acima (ao longo do eixo 2, Figura 108). Uma força de atrito atuará ao longo da superfície, se opondo à componente da F_{ctfg} ao longo da rampa.

A seguir, equacionaremos o equilíbrio relativo desse carro no referencial não inercial (Figura 108):

$$\text{Equilíbrio ao longo do eixo 1: } N = P.\cos\alpha + F_{ctfg}.\text{sen}\alpha \quad (\text{eq 91})$$

$$\text{Equilíbrio ao longo do eixo 2: } Fat + P.\text{sen}\alpha = F_{ctfg}.\cos\alpha \quad (\text{eq 92})$$

Como queremos determinar a velocidade máxima v com que o carro pode fazer a curva sem escorregar, concluímos que o carro estará na iminência de escorregar ladeira acima, no referencial não inercial, devido à força F_{ctfg} .

$$\text{Condição de iminência de escorregar: } Fat = \mu.N \quad (\text{eq 93})$$

Substituindo eq91 em eq93, e substituindo eq93 em eq92, vem:

$$Fat + P.\text{sen}\alpha = F_{ctfg}.\cos\alpha$$

$$\mu.N + P.\text{sen}\alpha = F_{ctfg}.\cos\alpha$$

$$\mu.(P.\cos\alpha + F_{ctfg}.\text{sen}\alpha) + P.\text{sen}\alpha = F_{ctfg}.\cos\alpha$$

$$\mu.P.\cos\alpha + \mu.F_{ctfg}.\text{sen}\alpha + P.\text{sen}\alpha = F_{ctfg}.\cos\alpha$$

$$\mu.P.\cos\alpha + P.\text{sen}\alpha = F_{ctfg}.\cos\alpha - \mu.F_{ctfg}.\text{sen}\alpha$$

$$m.g.(\mu.\cos\alpha + \text{sen}\alpha) = \frac{m.v^2}{R} .(\cos\alpha - \mu.\text{sen}\alpha)$$

$$v = \sqrt{\frac{R.g.(\mu.\cos\alpha + \text{sen}\alpha)}{(\cos\alpha - \mu.\text{sen}\alpha)}} \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{R.g.(\mu.\cos\alpha + \text{sen}\alpha)}{(\cos\alpha - \mu.\text{sen}\alpha)}} \quad (\text{eq 94})$$

Ao contrário, se fosse solicitado determinar a velocidade mínima v_{\min} com que o carro deveria percorrer a curva sem escorregar (ladeira abaixo), nesse caso bastaria inverter o sentido da força de atrito no diagrama da Figura 108 e adaptar as relações eq91 e eq92 a esse novo diagrama de forças.

Outro fato importante é que a resolução do problema no referencial não inercial do próprio carro transforma um delicado problema de dinâmica do movimento curvilíneo num mero problema de equilíbrio estático, levando-nos às equações eq91, eq92 e eq93.

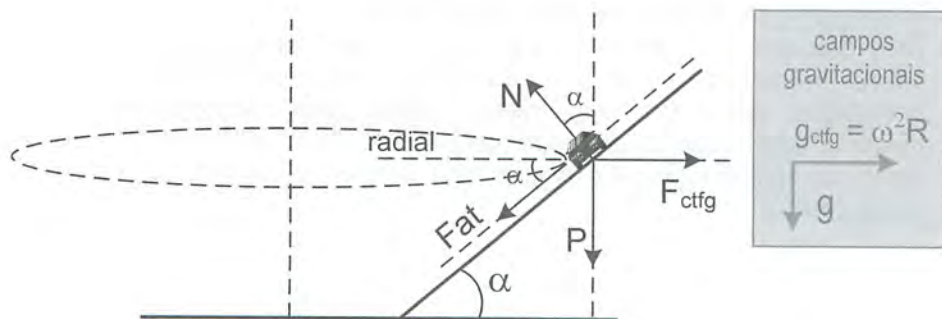


Figura 109 – Diagrama das forças que agem no carro, no referencial não inercial do próprio carro

Em nossa resolução, optamos pelo par de eixos perpendiculares 1 e 2 (Figura 108), o que nos levou a decompor as forças peso P e centrífuga F_{ctfg} . Vale ressaltar, no entanto, que chegaríamos ao mesmo resultado, caso tivéssemos adotado qualquer outro par de eixos perpendiculares entre si, como, por exemplo, o par de eixos alternativo radial e vertical da Figura 109.

Nesse caso, as forças que se encontram fora do par de eixos e, por isso, sofreriam decomposição seriam a força de atrito Fat e a normal N . As novas equações de equilíbrio seriam:

$$\text{Equilíbrio radial: } Fat \cdot \cos \alpha + N \cdot \sin \alpha = F_{ctfg} \quad (\text{eq 95})$$

$$\text{Equilíbrio vertical: } N \cdot \cos \alpha = Fat \cdot \sin \alpha + P \quad (\text{eq 96})$$

$$\text{Condição de Iminência de escorregar: } Fat = \mu \cdot N \quad (\text{eq 97})$$

O conjunto de relações eq95, eq96 e eq97 é matematicamente equivalente ao conjunto de relações eq91, eq92 e eq93 e, portanto, também leva ao mesmo resultado para v_{max} expresso pela relação eq94.

Profinho, e como resolveríamos esse problema no referencial inercial ?



2ª Solução no Referencial Inercial da Terra

Ora, Claudete, no referencial da Terra, o movimento descrito por esse veículo trata-se de um MCU no plano horizontal, com a presença de uma aceleração centrípeta a_{ctp} radial. Nesse caso, precisamos seguir rigorosamente o que foi explicado nas páginas 106 e 107, incluindo o par de eixos descrito na Figura 42 (página 106), bem como as relações eq8 e eq9 da página 107.

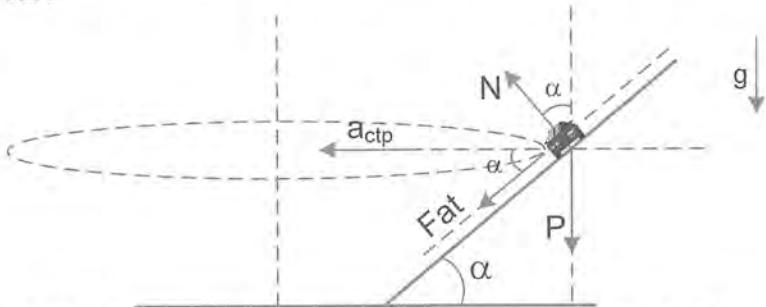


Figura 110 – Diagrama das forças que agem no carro no referencial da Terra.

Adicionalmente, em se tratando de um referencial inercial, forças fictícias, tais como a centrífuga, não estarão mais presentes, como mostra a Figura 110. Assim, na direção vertical, a caixa não apresenta aceleração alguma, estando, portanto, em equilíbrio nesse eixo, o que nos permite escrever:

$$\text{Equilíbrio vertical: } N \cdot \cos \alpha = \text{Fat} \cdot \sin \alpha + P \quad (\text{eq 98})$$

Na direção radial, pela 2ª lei de Newton, deve haver uma força resultante centrípeta para produzir a aceleração centrípeta a_{ctp} necessária para o MCU. Assim, na direção radial, escrevemos:

$$FR_{ctp} = (F_{in} - F_{out}) = m \cdot a_{ctp}$$

$$(N \cdot \sin \alpha + \text{Fat} \cdot \cos \alpha - 0) = m \cdot \frac{v^2}{R} \quad (\text{eq 99})$$

$$\text{Condição de iminência de escorregar: } \text{Fat} = \mu \cdot N \quad (\text{eq 100})$$

O conjunto de relações eq98, eq99 e eq100 é matematicamente equivalente ao dois conjuntos de relações encontradas pelo referencial não inercial e, portanto, também leva ao mesmo resultado para v_{\max} expresso pela relação eq94, embora cada referencial faça uso de argumentos físicos distintos para escrever suas próprias equações.

Particularmente, eu, Renato Brito, acredito que a resolução mais prática e objetiva seja a que envolve as relações eq91, eq92 e eq93.

Exemplo Resolvido 23: A curva de uma pista de corridas é compensada com uma inclinação α com a horizontal de modo que a derrapagem lateral seja impossível para uma certa velocidade V_0 ; entretanto, admita que um carro entre nessa curva com velocidade $V > V_0$. O prof. Renato Brito pede que você determine o coeficiente de atrito μ mínimo que evitará a derrapagem do carro nesse caso.

Solução no Referencial Não Inercial do Veículo

Quando o carro entra na curva inicialmente com velocidade V_0 , segundo o enunciado, ele se mantém na curva inclinada em equilíbrio relativo, no seu referencial não inercial, sem fazer uso do atrito, conforme a Figura 111.

A seguir, equacionaremos o equilíbrio relativo desse carro no referencial não inercial:

Equilíbrio ao longo do eixo 1: $N = P \cdot \cos \alpha + F_{\text{ctfg}} \cdot \sin \alpha$ (eq 101)

Equilíbrio ao longo do eixo 2: $P \cdot \sin \alpha = F_{\text{ctfg}} \cdot \cos \alpha$ (eq 102)

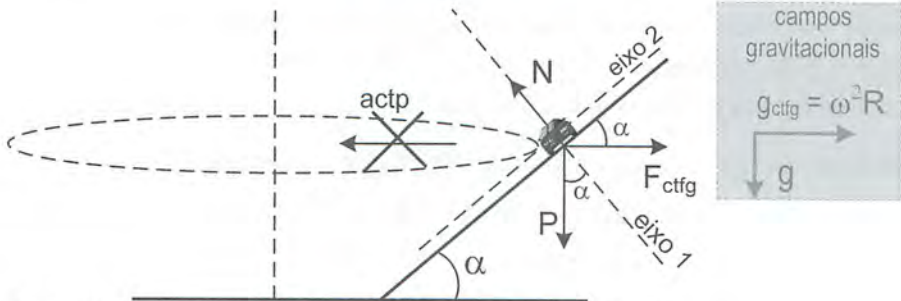


Figura 111 – Diagrama das forças que agem no carro, no referencial não inercial do próprio carro, para uma velocidade V_0

Da relação eq102, vem: $m \cdot g \cdot \sin \alpha = \frac{m \cdot V_0^2}{R} \cdot \cos \alpha$

$$R \cdot g = V_0^2 \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\text{eq 103})$$

Em seguida, quando o carro entrar na curva com velocidade $V > V_0$, haverá uma tendência de escorregar ladeira acima (Figura 112), visto que, neste caso, a componente da força centrífuga ladeira acima superará a componente do peso ladeira abaixo ($F_{\text{ctfg}} \cdot \cos \alpha > P \cdot \sin \alpha$), o que solicitará a atuação do atrito ladeira abaixo para garantir ao carro o equilíbrio relativo no seu referencial não inercial como mostra a Figura 112.

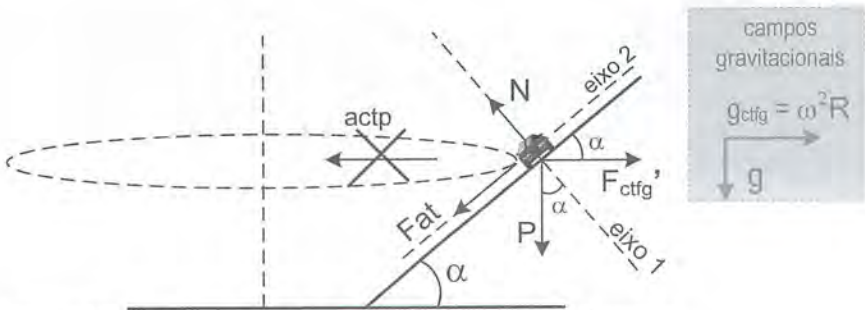


Figura 112 – Diagrama das forças que agem no carro, no referencial não inercial do próprio carro para $V > V_0$.

A seguir, equacionaremos o equilíbrio relativo desse carro no referencial não inercial, para o caso $V > V_0$:

Equilíbrio ao longo do eixo 1: $N = P \cdot \cos \alpha + F_{ctfg}' \cdot \sen \alpha$ (eq104)

Equilíbrio ao longo do eixo 2: $Fat + P \cdot \sen \alpha = F_{ctfg}' \cdot \cos \alpha$ (eq105)

Como queremos determinar o menor coeficiente de atrito μ que deve haver entre a pista e os pneus, a fim de que o carro não derrape, para $V > V_0$, concluímos que o carro estará na iminência de escorregar ladeira acima.

Condição de iminência de escorregar: $Fat = \mu \cdot N$ (eq 106)

Substituindo eq104 em eq106, e substituindo eq106 em eq105, vem:

$$Fat + P \cdot \sen \alpha = F_{ctfg}' \cdot \cos \alpha$$

$$\mu \cdot N + P \cdot \sen \alpha = F_{ctfg}' \cdot \cos \alpha$$

$$\mu \cdot (P \cdot \cos \alpha + F_{ctfg}' \cdot \sen \alpha) + P \cdot \sen \alpha = F_{ctfg}' \cdot \cos \alpha$$

$$\mu \cdot (P \cdot \cos \alpha + F_{ctfg}' \cdot \sen \alpha) = F_{ctfg}' \cdot \cos \alpha - P \cdot \sen \alpha$$

$$\mu = \frac{\frac{m \cdot V^2 \cdot \cos \alpha}{R} - m \cdot g \cdot \sen \alpha}{\frac{m \cdot V^2 \cdot \sen \alpha}{R} + m \cdot g \cdot \cos \alpha} = \frac{V^2 \cdot \cos \alpha - R \cdot g \cdot \sen \alpha}{V^2 \cdot \sen \alpha + R \cdot g \cdot \cos \alpha}$$

Usando eq103, vem :

$$\mu = \frac{V^2 \cdot \cos \alpha - V_0^2 \cdot \cos \alpha}{V^2 \cdot \sen \alpha + V_0^2 \cdot \frac{\cos \alpha}{\sen \alpha} \cdot \cos \alpha} = \frac{(V^2 - V_0^2) \cdot \sen \alpha \cdot \cos \alpha}{V^2 \cdot \sen^2 \alpha + V_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}$$

Exemplo Resolvido 24: Um velocista pilota uma moto de prova com velocidade V descrevendo uma curva de raio R , utilizando-se do atrito que existe entre o asfalto e os pneus da moto.



- a) Mostre que, para cada velocidade V com a qual o piloto descreva a curva, existe única inclinação α adequada que ele deve manter com a horizontal para garantir o seu "equilíbrio", dada por $\text{tg } \alpha = g.R/V^2$;
- b) Mostre que a máxima velocidade que o piloto pode ter, sem riscos de derrapagem lateral, é dada por $V_{\text{max}} = \sqrt{\mu.R.g}$;
- c) Mostre que, durante o traçado da curva com máxima velocidade (iminência de derrapar), a inclinação da moto com o solo, para que o piloto esteja "equilibrado", é dada pelo ângulo α tal que $\text{tg } \alpha = 1/\mu$.

Solução no Referencial Não Inercial da Moto

a) As Figuras 113 e 114 mostram o diagrama das forças que agem no conjunto moto+motoqueiro, no referencial não inercial da moto, incluindo a força centrífuga F_{ctfg} , radial para fora da curva, juntamente com o peso $M.g$, ambos agindo no centro de massa G do conjunto.



Figura 113 – Diagrama das forças que agem no conjunto moto+motoqueiro no referencial não inercial em rotação

A Figura 114 já mostra um polígono fechado de quatro forças, o que geometricamente já garante que a resultante delas é nula (equilíbrio das forças no referencial não inercial):

$$N = M.g \quad (\text{eq107})$$

$$F_{\text{at}} = M.v^2 / R \quad (\text{eq108})$$

Note que a linha GO que liga o centro de massa G ao ponto de contato O da moto com o chão define a inclinação α do motoqueiro em relação ao solo. Observando a Figura 114, é fácil verificar que o momento total das forças é nulo, tanto em relação ao ponto G quanto em relação ao ponto O.

- O momento total das forças em relação ao ponto O é nulo por dois motivos:
 - (1) a resultante entre as forças peso $M.g$ e centrífuga $M.v^2/R$ passa sobre o ponto O, determinando um momento nulo em relação a esse ponto.
 - (2) Adicionalmente, N e Fat também passam por O, o que garante um momento total nulo em relação a este ponto.
- O momento total das forças em relação ao ponto G é nulo por dois motivos:
 - (1) a resultante entre as forças normal N e Fat passa sobre o ponto G, determinando um momento nulo em relação a esse ponto.
 - (2) Adicionalmente, o peso $M.g$ e a centrífuga $M.v^2/R$ também passam por G, o que garante um momento total nulo em relação a este ponto.

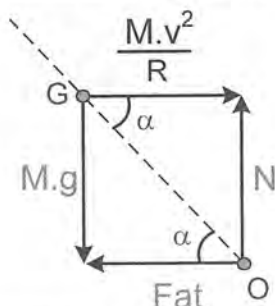


Figura 114 – Diagrama das forças que agem no conjunto moto+motoqueiro no referencial não inercial em rotação

Dessa forma, as relações eq107 e eq108, bem como a geometria na Figura 114, garantem as condições para que o motoqueiro faça a curva de forma segura, em equilíbrio relativo (de forças e de momentos) no seu referencial não inercial.

É fácil entender por que é impossível fazer a curva com uma moto (ou bicicleta) sem incliná-la. Observando a Figura 113, se o eixo OG fosse vertical, as forças $M.g$, Fat e N teriam momento nulo em relação a O (pois passariam por esse ponto), mas ainda restaria o momento não-nulo da força centrífuga $M.v^2/R$ em relação a O, de forma que a moto tombaria para fora da curva (no sentido horário) derrubando o motoqueiro.

A partir dos triângulos retângulos da Figura 114, podemos escrever:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{N}{\frac{M.v^2}{R}} = \frac{M.g}{\frac{M.v^2}{R}} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{R.g}{v^2} \quad (\text{eq109})$$

Observe atentamente os esquemas mostrados na Figura 115. Apesar da normal N e o peso $M.g$ terem intensidade constante, qual a influência do aumento da velocidade v no equilíbrio do motoqueiro na curva?

A relação eq109, juntamente com a Figura 115, mostra que, quanto maior for a velocidade v do piloto na curva ($v_2 > v_1$), menor deverá ser o ângulo α que ele deve manter entre a moto e o solo ($\alpha_2 < \alpha_1$) para garantir o seu "equilíbrio". Em outras palavras, velocidades cada vez maiores exigem inclinações α cada vez menores com a horizontal, para garantir o "equilíbrio" do piloto durante a curva, como se pode comprovar graficamente na Figura 115.

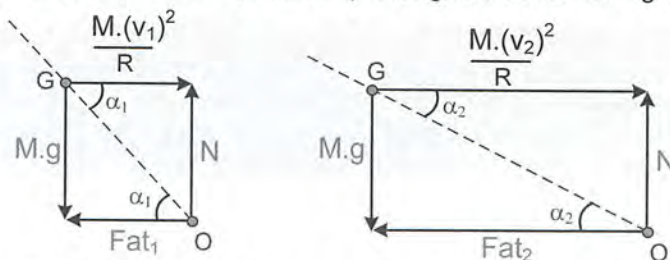


Figura 115 – aumentando a velocidade v da moto durante uma curva, o motoqueiro deverá diminuir a inclinação α entre a moto e o solo para garantir o seu equilíbrio. Compare a inclinação α do eixo OG do motoqueiro nos dois diagramas acima e comprove esse fato graficamente. Note que $N = M.g$ = constante.

Observando a Figura 115, vemos que, quanto maior for a velocidade ($v_2 > v_1$) do motoqueiro na curva (no referencial da Terra), maior será a força centrífuga que age nele (no referencial não inercial), menor deverá ser o ângulo de inclinação ($\alpha_2 < \alpha_1$) entre o motoqueiro (eixo OG) e o solo para garantir seu equilíbrio. Adicionalmente, o aumento da F_{ctfg} irá requerer maior F_{at} estático na curva ($F_{at2} > F_{at1}$) para impedir o escorregamento lateral da moto. Esse fato limita o aumento da velocidade da moto na curva.

b) Além das relações eq107 e eq108 listadas anteriormente, sabemos que a força de atrito estática entre os pneus e o solo é limitada superiormente, sendo incapaz, portanto, de transportar um certo valor máximo determinado experimentalmente, conforme a relação eq110.

$$N = M.g \quad (\text{eq107})$$

$$F_{at} = M.v^2 / R \quad (\text{eq108})$$

$$F_{at} \leq \mu.N \quad (\text{eq110})$$

Substituindo eq107 e eq108 em eq110, vem:

$$F_{at} \leq \mu.N$$

$$M.v^2 / R \leq \mu.M.g \Rightarrow v \leq \sqrt{\mu.R.g}$$

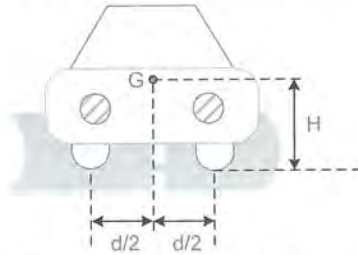
Dessa forma, temos que $V_{\max} = \sqrt{\mu.R.g}$ (eq111)

c) Substituindo eq111 em eq109, vem:

$$\text{tg}\alpha = \frac{R.g}{v^2} = \frac{R.g}{(\sqrt{\mu.R.g})^2} \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{1}{\mu} \quad (\text{eq112})$$

O ângulo crítico α descrito acima é, portanto, a menor inclinação que a moto pode manter com a horizontal durante uma curva segura, sem riscos de derrapagem ou desequilíbrio para o piloto. Inclinações menores exigiriam velocidades ainda maiores do que $V_{\max} = \sqrt{\mu.R.g}$ para garantir o “equilíbrio” do motoqueiro, levando a moto a escorregar inevitavelmente.

Exemplo Resolvido 25 - Um carro de massa M trafega numa curva circular de raio R . A gravidade local vale g , a altura do centro de massa G do carro vale H , a distância lateral entre as rodas vale d e o atrito existente é suficiente para impedir qualquer escorregamento. Determine a máxima velocidade com que o veículo pode fazer a curva sem capotar.



Solução no Referencial Não Inercial do Veículo :

No referencial não inercial do próprio veículo, não há nem aceleração centrípeta a_{ctp} nem força resultante centrípeta, visto que o carro se encontra imóvel nesse referencial, em equilíbrio relativo ($a' = 0, v' = 0$).

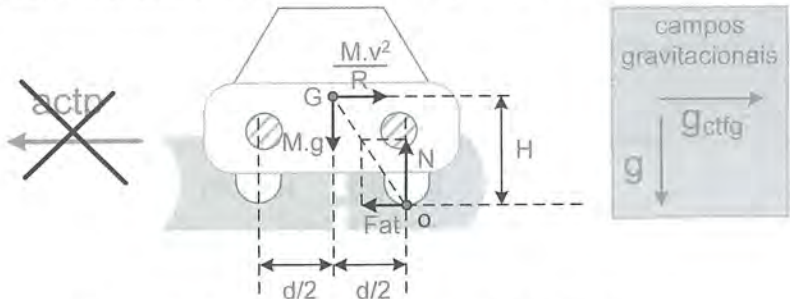


Figura 116 – Diagrama das forças que agem no carro, no referencial não inercial do próprio carro.

Segundo o Princípio da Equivalência, a aceleração centrípeta que o carro possui, no referencial da Terra, equivale, no referencial do próprio veículo, a um campo gravitacional centrífugo $g_{\text{ctfg}} = v^2/R$ de mesmo valor, mesma direção (radial) e sentido contrário (radial para fora) que produzirá uma força centrífuga $F_{\text{ctfg}} = m \cdot g_{\text{ctfg}}$. Esta, por sua vez, age sobre o centro de massa G do carro empurra-o para fora da curva, como mostra a Figura 116.

Em geral, as quatro rodas do carro sofrem forças de contato com o solo, mas, nessa situação específica, o carro se encontra na iminência de tombar para fora da curva e as rodas internas acabaram de perder o contato com a pista. Para que o carro ainda se mantenha equilibrado nessa situação crítica, no seu referencial inercial, sem capotar, aplicaremos equilíbrio dos momentos em relação ao ponto o de contato das rodas externas com o solo. Note que as forças normal N e atrito F_{at} já passam sobre o ponto o , de forma que não produzem momento. Assim, temos:

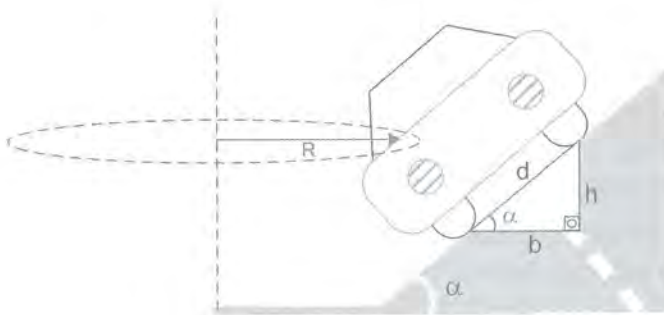
$$+M \cdot g \cdot \left(\frac{d}{2}\right) - \left(\frac{M \cdot v^2}{R}\right) \cdot H = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g \cdot d \cdot R}{2 \cdot H}} \quad (\text{eq113})$$

A expressão eq113 fornece a velocidade máxima com que o carro pode fazer a curva sem tombar. Devemos lembrar que, adicionalmente, a expressão eq82 (página 198) fornece a velocidade máxima com que o carro pode fazer a curva sem derrapar. Assim, para que o carro percorra uma curva sem derrapar nem tombar, sua velocidade deverá ser menor do que a menor dessas duas velocidades críticas.

Vale ressaltar que, tanto os riscos do carro tombar na curva (eq113) ou derrapar na curva (eq82) independem da massa M do veículo, como se pode observar diretamente nas expressões dessas velocidades críticas.

Um grande raio de curvatura R (curvas mais abertas) favorece a segurança do veículo, tanto no critério de capotar quanto no de derrapar. Adicionalmente, carros mais baixos (menor quociente d/H) são mais difíceis de capotar, como sugere a relação eq113.

Exemplo Resolvido 26 - Um carro de massa m está percorrendo uma pista inclinada em um ângulo α com a horizontal, num trecho circular de raio R com velocidade escalar constante v . A distância lateral entre os pneus do carro vale d . Determine o desnível vertical h entre as rodas, para que seja compensado o efeito centrífugo, ou seja, de forma que o carro consiga descrever a curva sem requerer atrito. Para facilitar os cálculos, admita α suficientemente pequeno ($\text{sen} \alpha \cong \text{tg} \alpha$), de forma que a distância d entre as rodas seja assimilada à sua projeção horizontal b ($h \cong b$).



Solução no Referencial Não Inercial do Carro :

A figura mostra as forças que estão agindo no carro, no seu referencial não inercial, incluindo a força centrífuga. O problema em questão não está interessado em analisar se o carro vai tombar ou não. Seu objetivo é determinar a inclinação que deve ser dada à pista, de forma que a tendência de escorregamento radial para fora da curva (pela ação da componente força centrífuga nesse referencial) seja compensada pela componente $P.\text{sen}\alpha$ do peso do carro.

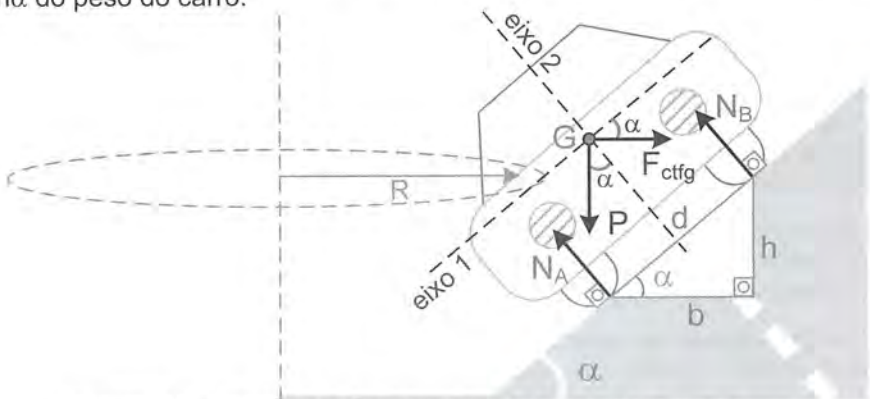


Figura 117 – Diagrama das forças que agem no carro, no referencial não inercial do próprio carro

Para que ocorra esse equilíbrio relativo na direção do eixo 1 (Figura 117), devemos ter:

$$F_{ctfg} \cdot \cos\alpha = P \cdot \text{sen}\alpha \Rightarrow \left(\frac{m \cdot v^2}{R} \right) \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \text{sen}\alpha \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{v^2}{R \cdot g} \quad (\text{eq114})$$

Do triângulo retângulo da Figura 117, temos: $\text{sen}\alpha = \frac{h}{d}$ (eq115)

Sendo α um ângulo pequeno ($\alpha \leq 10^\circ$), vale a relação: $\text{sen}\alpha \cong \text{tg}\alpha$ (eq116)

A partir de eq114, eq115 e eq116, vem: $\frac{h}{d} \cong \frac{v^2}{R \cdot g} \Rightarrow h \cong \frac{v^2 \cdot d}{R \cdot g}$ (eq117)

A expressão acima fornece o desnível vertical h procurado.

Exemplo Resolvido 27: (ITA-94) Um motociclista trafega numa estrada reta e nivelada atrás de um caminhão de 4 m de largura, perpendicularmente à carroceria. Ambos estão trafegando a 72 km/h, quando o caminhão se detém instantaneamente, devido a uma colisão. Se o tempo de reação do motorista for 0,50 s, determine a que distância mínima deverá estar trafegando para evitar o choque apenas com mudança de trajetória. Considere que o coeficiente de atrito entre o pneu e o solo vale $\mu = 0,80$, a aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$ e que a trajetória original o levaria a colidir no meio da carroceria.



Solução no Referencial Não Inercial da Moto:

O pleno entendimento da solução desse problema requer que o leitor tenha, previamente, estudado o Exemplo Resolvido 24.

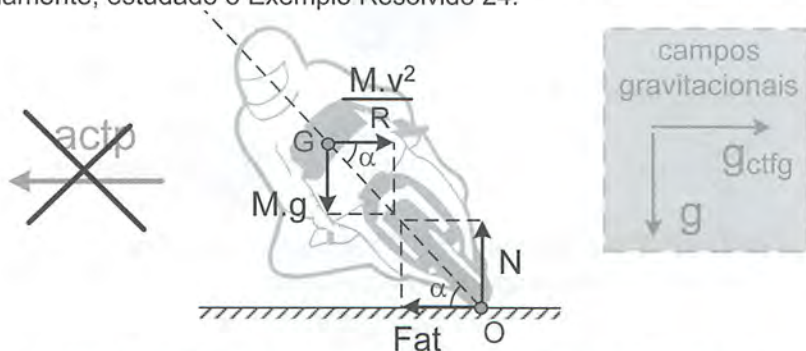


Figura 118 – Diagrama das forças que agem no conjunto moto+motoqueiro no referencial não inercial em rotação

Para escapar da colisão com a traseira do caminhão, o piloto da moto deverá efetuar a curva mais fechada possível, isto é, a curva com menor raio de curvatura R , sem, no entanto, fazer uso do freio, como exige o enunciado. Isso indica que ele deverá minimizar o raio R do percurso, sem alterar o valor da velocidade v da moto. O que isso significa ?

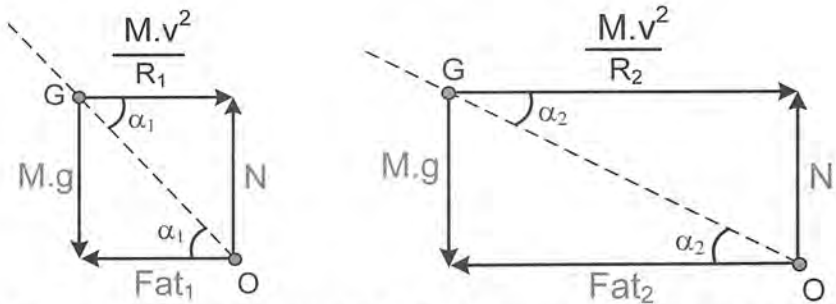


Figura 119 – a redução do raio de curvatura ($R_2 < R_1$) mantendo a velocidade constante obriga o piloto da moto a diminuir a inclinação α entre a moto e o solo ($\alpha_2 < \alpha_1$) para não se desequilibrar. Mais atrito será requerido, nesse caso ($Fat_2 > Fat_1$).

A Figura 119 mostra que, sendo constantes a massa M , a normal N e a gravidade g , para reduzir o raio ($R_2 < R_1$) de curvatura da sua trajetória, sem se desequilibrar, o piloto deverá deitar mais a moto ($\alpha_2 < \alpha_1$), fato que exigirá ainda mais atrito da pista ($Fat_2 > Fat_1$). Sabemos, porém, que o valor do atrito estático, trocado entre a pista e os pneus da moto, não pode aumentar indefinidamente, sendo naturalmente limitado pela expressão:

$$Fat \leq \mu \cdot N \quad (\text{eq117})$$

Adicionalmente, no referencial não inercial da moto, o atrito deve equilibrar a força centrífuga:

$$Fat = \frac{M \cdot v^2}{R} \quad (\text{eq118})$$

Assim, substituindo eq118 em eq117, vem:

$$\frac{M \cdot v^2}{R} \leq \mu \cdot N \Rightarrow \frac{M \cdot v^2}{R} \leq \mu \cdot M \cdot g \Rightarrow R \geq \frac{v^2}{\mu \cdot g} \quad (\text{eq119})$$

A expressão eq119 mostra que o raio R da trajetória descrita pela moto está limitada pelo atrito, podendo atingir o valor mínimo:

$$R_{\min} = \frac{v^2}{\mu \cdot g} = \frac{(20 \text{ m/s})^2}{0,8 \cdot 10} = 50 \text{ m}$$

A curva mais fechada que o piloto conseguirá descrever, considerando o atrito disponível, possuirá raio de curvatura $R = 50 \text{ m}$ e será o arco BC na Figura 120. Raios de curvatura menores levariam a moto a derrapar por falta de atrito.

Devemos lembrar, entretanto, que o motoqueiro tem um tempo de reação de 0,5 s antes de iniciar a curva e que, durante esse tempo, a moto possui velocidade $v = 20 \text{ m/s}$, percorrendo o trecho AB de comprimento:

$$z = AB = 20 \text{ m/s} \cdot (0,5 \text{ s}) = 10 \text{ m}$$

Assim, nesse episódio, o motoqueiro percorrerá todo o trecho ABC e sairá ileso, sem colidir com a traseira do caminhão.

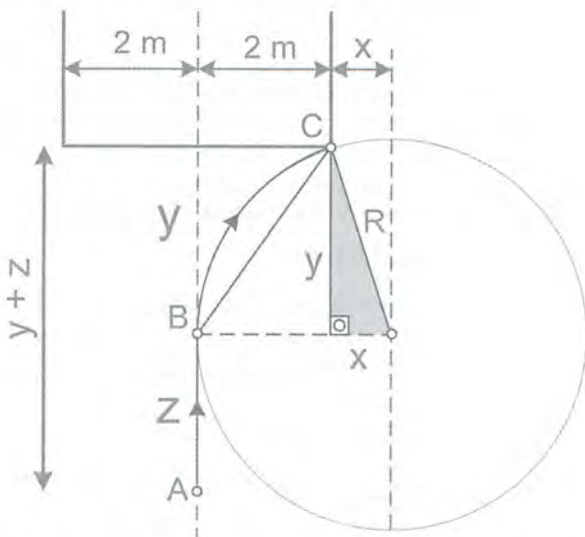


Figura 120 – vista superior da trajetória ABC do motoqueiro.

A partir do Teorema de Pitágoras no triângulo em destaque, temos:

$$y^2 + x^2 = R^2$$

$$y^2 + (48)^2 = (50)^2 \Rightarrow y = 14 \text{ m}$$

A distância pedida é a distância do ponto A até a traseira do caminhão (Figura 120), dada por:

$$y + z = 14 + 10 = 24 \text{ m}$$

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO**Questão 323 (UFCG 2007) - C**

Um livro didático de 1957 ensinava aos alunos e às alunas do Curso Normal o conceito força centrífuga. Leia parte do texto:

Quando rodo um objeto preso por um cordão, dou o impulso (força tangencial) e o cordão puxa para o centro (força centrípeta). Se soltar o cordão desaparecerá a força centrípeta e o corpo sairá pela tangente e não na direção do raio. Quando o cordão puxa o corpo, este, pela reação, puxa a mão para fora (reação centrífuga ou força centrífuga). É fácil sentir que a força centrípeta e, portanto a sua reação centrífuga aumenta com a massa do corpo, com o tamanho do cordão e com a velocidade da rotação. [...] Se a Terra desse mais de dezessete rotações em 24 horas, a força centrífuga superaria a atração e nós voaríamos pelo espaço.

CASTRO, Correggio de. **Física e Química**. 4ª ed. São Paulo: CEN, 1957, p.42-3.

Considerando o texto, pode-se afirmar que:

- a) o autor erra, pois a força centrífuga não é reação à força centrípeta, pois elas não coexistem em um mesmo referencial;
- b) em hipótese alguma a força centrípeta aplicada ao objeto aumenta com o tamanho (comprimento) do cordão;
- c) o autor, em nenhum momento, considera que as forças ação e reação atuam em corpos diferentes.
- d) o autor está correto em atribuir à força centrípeta e à força centrífuga as mesmas variações, pois constituem um par ação-reação.
- e) o autor, em nenhum momento, considera que as forças centrípeta e centrífuga atuam no mesmo corpo.

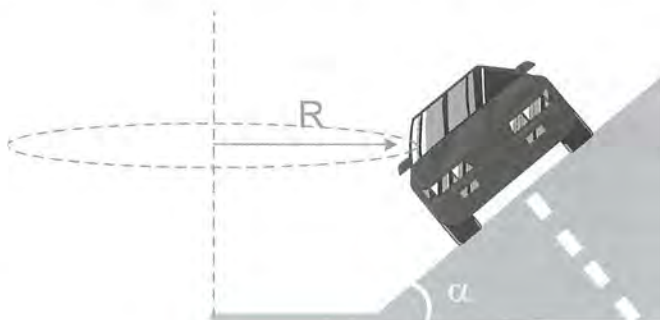
Questão 324 (ITA) - C

A força centrífuga:

- a) não existe, pois não pode ser medida;
- b) é a reação à força centrípeta;
- c) só se manifesta em referencias acelerados, com movimento de translação em relação às estrelas fixas;
- d) ocorre num movimento de rotação, observado de um referencial inercial;
- e) só se manifesta em referenciais não inerciais, com movimento de rotação em relação às estrelas fixas.

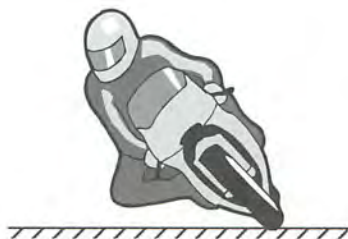
Questão 325

Considere o veículo de massa m da figura percorrendo uma curva inclinada, de ângulo α , com raio R constante, a uma velocidade v . Supondo que o coeficiente de atrito dos pneus com o solo seja μ , calcule a mínima velocidade com que este veículo pode percorrer esta curva, sem deslizamento. A gravidade local vale g e considere $\tan \alpha > \mu$.

**Questão 326**

[326 a 331]

O piloto Alexandre Barros foi o vencedor do último GP da Espanha na categoria 250 cc de moto velocidade. Durante os treinos, pilotando sua moto num trecho em curva de raio 180 m, o piloto percebeu que os pneus perdem a aderência ao solo, quando ele tenta se equilibrar na curva, inclinando a moto com um ângulo inferior a 27° com a horizontal. Sabendo que a massa total do piloto com a moto vale 600 kg, o prof. Renato Brito pede para você determinar:



- o coeficiente de atrito estático entre os pneus da moto e o asfalto;
- a máxima velocidade com que o piloto pode descrever essa curva com segurança.
- a velocidade com que o piloto descreve a curva, quando mantém uma inclinação de 45° com a horizontal.
- a intensidade da força de atrito que atua na moto, quando mantém uma inclinação de 45° com a horizontal.

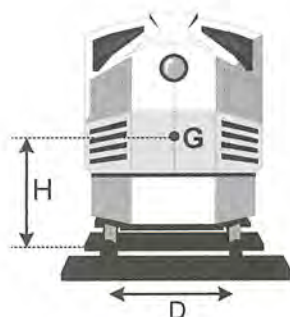
Dado: $\text{tg } 27^\circ = 0,5$, $g = 10 \text{ m/s}^2$

Questão 327

[326 a 331]

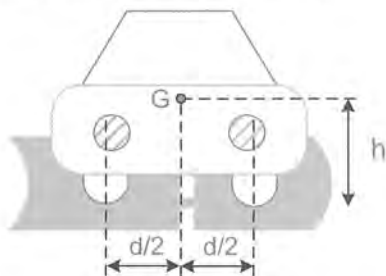
Um vagão de estrada de ferro percorre uma curva de raio $R = 300 \text{ m}$. A distância entre os trilhos é $d = 1,60 \text{ m}$ e o centro de massa G do vagão situa-se à altura $H = 1,50 \text{ m}$ acima dos trilhos. Considerando que a aceleração local da gravidade vale $g = 10 \text{ m/s}^2$, o prof. Renato Brito pede que você determine aproximadamente a velocidade máxima com que o vagão pode passar pela curva sem tombamento.

- a) 25 m/s
 b) 30 m/s
 c) 40 m/s
 d) 45 m/s
 e) 35 m/s

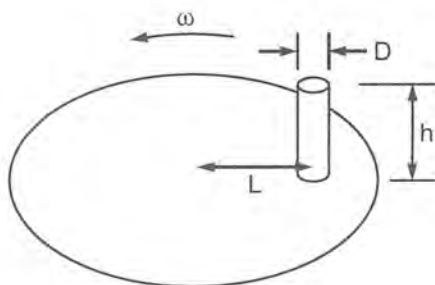
**Questão 328**

[326 a 331]

Em pista horizontal e rugosa, um automóvel faz uma curva de raio $R = 10$ m. São dados $d = 1,50$ m, $h = 0,60$ m, $g = 10$ m/s². Determine a maior velocidade permitida para esse carro na curva de forma que não ocorra tombamento (capotamento).



Questão 328



Questão 329

Questão 329 (ITA 2008) – ©

[326 a 331]

Um cilindro de diâmetro D e altura h repousa sobre um disco que gira num plano horizontal, com velocidade angular ω . Considere μ o coeficiente de atrito entre o disco e o cilindro (com $\mu > D/h$), L a distância entre o eixo do disco e o eixo do cilindro, e g a aceleração da gravidade. O cilindro pode escapar do movimento circular de duas maneiras: por tombamento ou por deslizeamento. Determine qual deles ocorrerá primeiro, em função das variáveis.

Questão 330

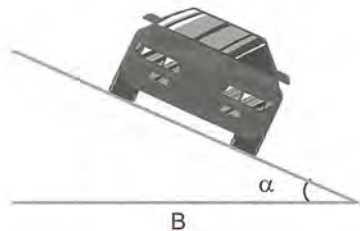
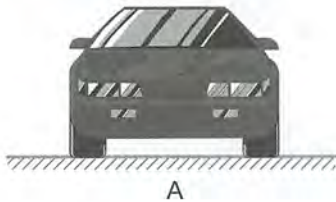
[326 a 331]

Em pista horizontal e rugosa, o automóvel faz uma curva de raio $R = 360$ m a uma velocidade de 72 km/h. São dados $d = 1,80$ m (distância lateral entre as rodas) e $g = 10$ m/s². Determine o desnível vertical h que deveria haver entre as rodas em decorrência de uma sobrelevação da pista, a fim de suprimir a tendência de derrapagem. Use a aproximação para pequenos ângulos $\text{sen } \alpha \cong \text{tg } \alpha$.

Questão 331 (ITA)

[326 a 331]

Para que um automóvel percorra uma curva horizontal de raio dado, numa estrada horizontal, com uma certa velocidade, o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a pista deve ter no mínimo um certo valor μ . Determinar qual o valor α do ângulo de sobrelevação (Figura B) para que o automóvel percorra uma curva horizontal, com o mesmo raio e com a mesma velocidade acima, numa estrada com sobrelevação, sem ter tendência a derrapar.

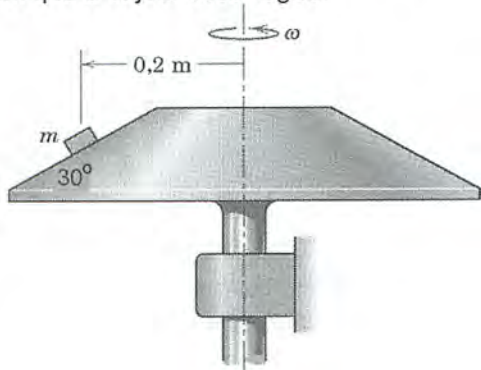
**Questão 332 - ☉**

[332, 333]

Um pequeno objeto de massa m é colocado sobre uma superfície cônica em rotação, numa posição que dista $r = 0,2$ m do eixo de rotação. A velocidade angular do sistema, então, passa a ser aumentada muito suavemente. Se o coeficiente de atrito estático entre o objeto e a superfície girante vale $\mu_E = 0,8$, determine a máxima velocidade angular ω com que o sistema pode girar em torno do seu eixo vertical sem que o objeto escorregue.

Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\cos 30^\circ = 0,86$

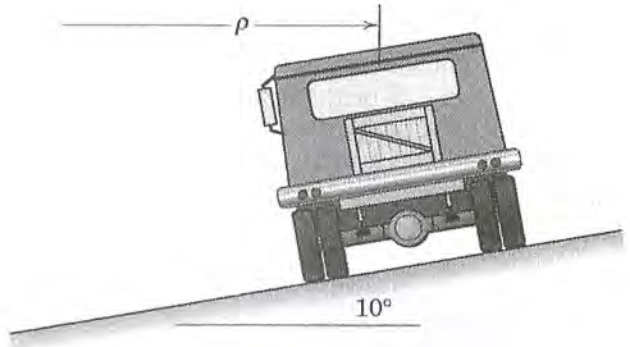
- 1,5 rad/s
- 2,7 rad/s
- 3,2 rad/s
- 4,1 rad/s
- 5,6 rad/s

**Questão 333 - ☉**

[332, 333]

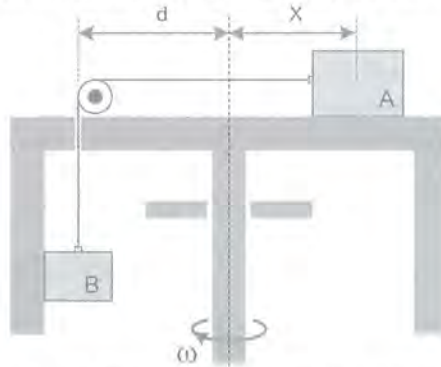
Uma carreta parte do repouso desenvolvendo uma aceleração escalar $a = 2 \text{ m/s}^2$ numa pista circular de raio $\rho = 30$ m com uma pequena sobrelevação de 10° com a horizontal. Em sua carroceria, encontra-se um caixote. Se $\mu_E = 0,3$ é o coeficiente de atrito estático entre o caixote e a carroceria, determine o instante t após o início do movimento da carreta no qual o caixote começa a escorregar. A trajetória circular da carreta está contida num plano horizontal. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\sin 10^\circ = 0,173$ e $\cos 10^\circ = 0,98$.

- a) 14,7 s
 b) 12,3 s
 c) 9,71 s
 d) 7,43 s
 e) 6,12 s



Questão 334 -

A figura mostra uma plataforma horizontal que gira com velocidade angular constante $\omega = 2 \text{ rad/s}$ em torno de um eixo vertical fixo ao seu centro. Um bloco A, de massa $M = 5 \text{ kg}$, repousa sobre a superfície da plataforma e se encontra conectado por meio de um fio ideal a um outro bloco B, de massa $m = 4 \text{ kg}$, que pende verticalmente e é impedido de sair da plataforma.



Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, o prof. Renato Brito pede que você determine os valores máximos e mínimos de x para os quais os blocos permanecerão estacionários em relação à plataforma. Admita que o coeficiente de atrito entre todos os pares de superfícies vale $\mu = 0,4$ e $d = 2,5 \text{ m}$.

Questão 335

A figura mostra um grupo de patinadores efetuando uma curva de raio $R = 20 \text{ m}$, num local em que a gravidade vale $g = 10 \text{ m/s}^2$. Se a inclinação do corpo deles com a vertical, durante o traçado da curva, vale 30° , a velocidade deles tem um valor mais próximo de:



- a) 8,6 m/s b) 9,4 m/s c) 10,7 m/s d) 11, 5 m/s e) 12,6 m/s

Questão 336 - Gravidade Artificial - ☞

[336, 337]

Algo muito comum nos filmes de ficção científica é o fato dos personagens não flutuarem no interior das naves espaciais. Mesmo estando no espaço sideral, na ausência de campos gravitacionais externos, eles se movem como se existisse uma força que os prendesse ao chão das espaçonaves. Um filme que se preocupa com esta questão é “2001, uma Odisséia no Espaço”, de Stanley Kubrick. Nesse filme a gravidade é simulada pela rotação da estação espacial, que cria um peso efetivo agindo sobre o astronauta. A estação espacial, em forma de rosca, mostrada abaixo, gira com velocidade angular constante de $0,2 \text{ rad/s}$ em torno de um eixo longitudinal. O raio R da espaçonave é 40 m .

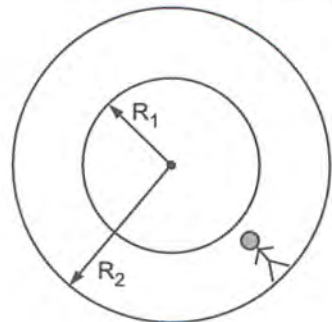


- a) Calcule a velocidade tangencial (m/s) do astronauta mostrado na figura.
 b) Calcule a gravidade aparente sentida g pelo astronauta, durante a rotação;

Questão 337 (ITA 2006 - adaptada) - ☞

[336, 337]

Uma estação espacial em forma de toróide, raio interno R_1 e raio externo R_2 , gira com período T em torno do seu eixo central numa região de gravidade nula. O astronauta sente que seu “peso” aumenta 21% quando passa a correr com velocidade v no interior desta estação, ao longo de sua maior circunferência, conforme mostra a figura. Determine o módulo dessa velocidade v .



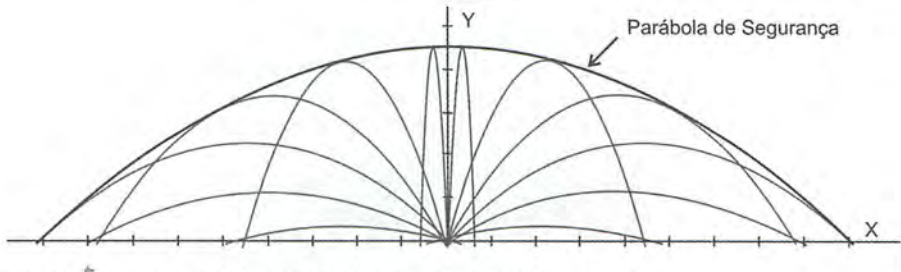
Questão 338 - 🎧

O “rotor” é um brinquedo que existe em parques de diversões. Ele é constituído de um cilindro oco provido de um assoalho. As pessoas entram no cilindro e ficam em pé encostadas na parede interna. O cilindro começa a girar em torno de seu eixo vertical e a partir de uma velocidade angular mínima, o assoalho é retirado e as pessoas ficam “presas” à parede do cilindro. Sendo R o raio do cilindro, g a aceleração da gravidade e μ_E o coeficiente de atrito entre as pessoas e o cilindro, determine a velocidade angular mínima ω de rotação do cilindro a fim de que as pessoas não escorreguem durante seu movimento.



6 PARÁBOLA DE SEGURANÇA

Tópico Especial 1



6.1 INTRODUÇÃO À PARÁBOLA DE SEGURANÇA

A parábola de segurança (ps) é uma ferramenta poderosa e muito interessante que resolve, de forma simples e elegante, problemas de máximos e mínimos, envolvendo lançamentos de projéteis que, de outra forma, seriam solucionados com um enorme trabalho algébrico, regado a cálculo diferencial.

Ela é citada em listas de exercícios de muitos livros de Mecânica universitários, bem como nos livros da renomada Editora Mir-Moscou, mas a sua teoria detalhada, envolvendo descrição de todas as suas propriedades, bem como as respectivas demonstrações, é rara.

Assim, visando a divulgar essa ferramenta tão poderosa e tão útil para que seja utilizada por um número cada vez maior de estudantes brasileiros, achei oportuna a publicação desse tema neste livro, descrevendo e demonstrando cada uma das suas propriedades, bem como ilustrando as aplicações práticas dessa ferramenta.

6.2 ENTENDENDO A PARÁBOLA DE SEGURANÇA

Considere um lançador de projéteis, localizado na origem de um sistema de coordenadas cartesianas XY (Figura 1), disparando projéteis com velocidade inicial V_0 constante, mas sob diferentes ângulos de disparo α com a horizontal, variando gradativamente no intervalo $0^\circ < \alpha < 180^\circ$. Para cada ângulo α , a trajetória seguida pelo projétil é uma parábola que parte da origem, atinge uma altura máxima e retorna ao solo horizontal, como mostrado na Figura 1.

O movimento parabólico de um projétil pode ser interpretado como a superposição de dois movimentos ortogonais mais simples: (1) um MRU na horizontal (visto que o projétil move-se na ausência de forças horizontais); (2) e um MRUV na direção vertical sob ação exclusiva da força peso, que fornece a aceleração constante da gravidade $a = g$. A cinemática de cada um desses movimentos permite escrever as suas respectivas funções horárias da posição em cada eixo:

$$X = V_0 \cdot \cos \alpha \cdot t \quad (\text{eq1})$$

$$Y = V_0 \cdot \text{sen} \alpha \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} \quad (\text{eq2})$$

Para determinar a equação da trajetória parabólica seguida pelo projétil, devemos encontrar uma relação entre as coordenadas Y e X independente do parâmetro t que, para isso, precisa ser eliminado das equações eq1 e eq2 acima. Isolando t na relação eq1 e substituindo na relação eq2, vem:

$$Y = \text{tg} \alpha \cdot X - \frac{g}{2 \cdot V_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot X^2 \quad (\text{eq3})$$

(equação geral da trajetória do projétil)

A expressão acima é a equação geral da trajetória descrita por um projétil lançado com velocidade inicial V_0 , formando um ângulo α com a horizontal, num campo gravitacional uniforme g.

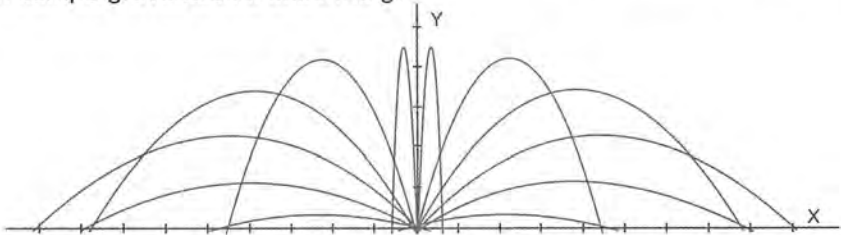


Figura 1 – Família de trajetórias parabólicas descritas por projéteis que foram disparados da origem do sistema de coordenadas com velocidade de disparo V_0 constante sob cada um dos seguintes ângulos de disparo α : 15° , 30° , 45° , 60° , 75° , 85° , 95° , 105° , 120° , 135° , 150° e 165° .

Efetuada-se uma seqüência de disparos sob ângulos α progressivamente maiores, variando no intervalo $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, obteremos uma família de trajetórias parabólicas que têm, em comum, a velocidade de disparo V_0 , sendo, cada uma delas, descrita pela equação eq3.

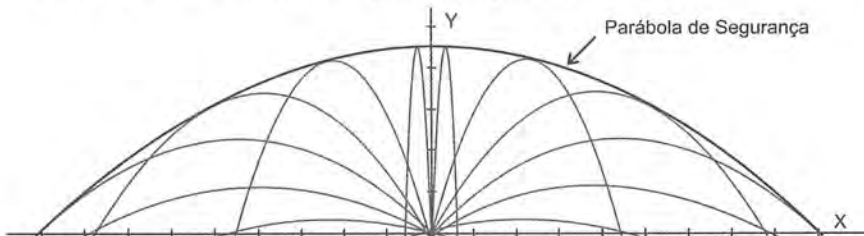


Figura 2 - Todas as trajetórias parabólicas de projéteis disparados com mesma velocidade inicial V_0 , mas sob ângulos de disparos variados, tangenciam internamente uma parábola envolvente, denominada parábola de segurança.

Curiosamente, essa família de parábolas, que têm em comum a mesma velocidade de disparo V_0 , tangencia uma parábola envolvente, que é única para cada valor de V_0 , denominada “parábola de segurança”, como mostra a Figura 2.

A expressão “parábola de segurança” advém do fato de que ela define o lugar geométrico dos pontos do plano XY que jamais serão atingidos pelo lançador, ao efetuar disparos com aquela velocidade V_0 característica daquela PS. O conjunto de todos os pontos externos a essa parábola de segurança constituem a chamada “zona de segurança” dessa PS, como mostra a Figura 3.

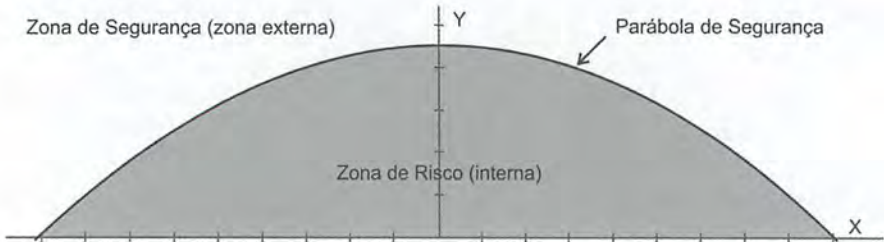


Figura 3 - pontos localizados na zona externa à parábola de segurança (PS) não são alcançados por esse lançador, quando dispara projéteis com a velocidade V_0 característica dessa PS.

6.3 DETERMINANDO A EQUAÇÃO DA PARÁBOLA DE SEGURANÇA

Seja um lançador, localizado na origem $(0, 0)$ do plano cartesiano, disparando projéteis com velocidade de módulo V_0 constante, porém, sob ângulos α variáveis. Inicialmente, desejamos responder à seguinte pergunta:

Dado um ponto P qualquer, do plano cartesiano, localizado nas coordenadas (X_P, Y_P) , com qual ângulo α o lançador deverá efetuar o disparo a fim de atingir aquele ponto ?

Para determinar o ângulo α , vamos impor que a trajetória do projétil (dada pela equação eq3) efetivamente passe pelo ponto P. Para isso, fazemos $X = X_P$ e $Y = Y_P$ na relação eq3 :

$$Y_P = \text{tg}\alpha \cdot X_P - \frac{g}{2 \cdot V_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot X_P^2, \quad \text{mas} \quad \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha = 1 + \text{tg}^2 \alpha.$$

$$Y_P = \text{tg}\alpha \cdot X_P - \frac{g \cdot X_P^2}{2 \cdot V_0^2} \cdot (1 + \text{tg}^2 \alpha). \quad \text{Com um pouco de álgebra, encontramos :}$$

$$(\text{tg}\alpha)^2 - \left(\frac{2 \cdot V_0^2}{g \cdot X_P} \right) \cdot \text{tg}\alpha + \left(1 + \frac{2 \cdot V_0^2 \cdot Y_P}{g \cdot X_P^2} \right) = 0 \quad (\text{eq4})$$

Essa equação do 2º grau na variável $\text{tg}\alpha$ fornecerá os valores do ângulo de disparo α para os quais o projétil, efetivamente, passa pelo ponto P.

Entretanto, dependendo das coordenadas (X_P , Y_P) desse ponto, três situações possíveis podem ocorrer:

- Caso 1: $\Delta > 0$** nesse caso, a equação eq4 fornecerá dois ângulos α distintos para os quais o ponto X_P , Y_P será atingido pelo projétil. Graficamente, o ponto P é interno à parábola de segurança (Figura 4).
- Caso 2: $\Delta = 0$** nesse caso, a equação eq4 fornecerá um único ângulo α de disparo sob o qual o ponto X_P , Y_P será atingido pelo projétil. Graficamente, o ponto P está sobre parábola de segurança, isto é, P pertence à PS (Figura 5).
- Caso 3: $\Delta < 0$** aqui, a equação 4 não possui solução. Em outras palavras, não existe ângulo α que faça a trajetória do projétil passar pelo ponto X_P , Y_P . O motivo é que a velocidade do lançador está pequena demais para atingir esse ponto. Para atingi-lo, será necessário aumentar a velocidade de disparo, isto é, trocar a PS original por uma nova PS mais abrangente que contenha esse ponto P. Graficamente, $\Delta < 0$ significa que o ponto P é externo à parábola de segurança, isto é, se encontra em sua zona de segurança (Figura 6).

A parábola de segurança é o lugar geométrico (L.G.) dos pontos X_P , Y_P do plano, os quais são atingidos pelo lançador sob um único ângulo α de disparo. Em outras palavras, ela é o L.G. dos pontos X_P , Y_P para os quais a equação do 2º grau eq4 na variável α só apresenta uma única solução distinta (Figura 5).

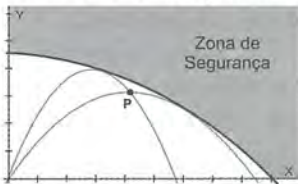


Figura 4 - Caso $\Delta > 0$: o ponto P está localizado no interior da parábola de segurança e é atingido para dois ângulos α de disparos distintos.

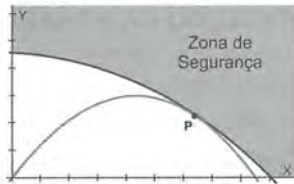


Figura 5 - Caso $\Delta = 0$: o ponto P pertence à parábola de segurança e é atingido apenas sob um único ângulo α de disparo. Ele está no limite, exatamente na fronteira entre os pontos que podem e os que não podem mais ser alcançados pelo lançador.

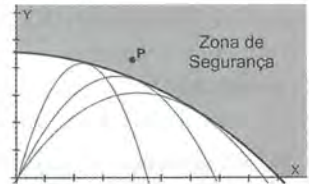


Figura 6 - Caso $\Delta < 0$: o ponto P está localizado fora da parábola de segurança e não pode ser atingido, independente do ângulo de disparo.

Portanto, para determinar esses pontos X_P , Y_P , devemos impor a condição $\Delta = 0$ na equação eq4:

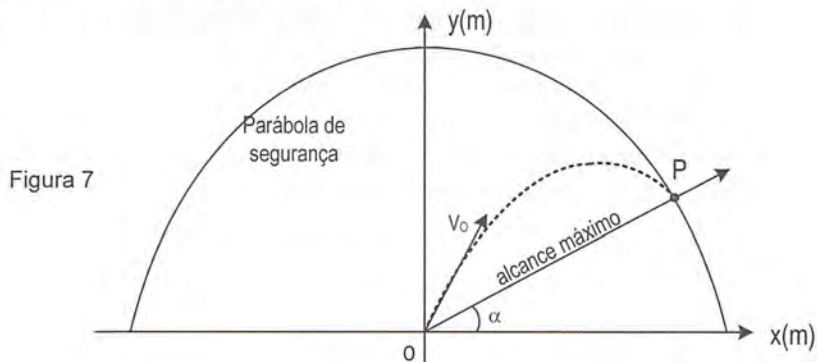
$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow \left(\frac{2.V_0^2}{g.X_P} \right)^2 - 4. \left(1 + \frac{2.V_0^2.Y_P}{g.X_P^2} \right) = 0 \Rightarrow Y_P = \frac{V_0^2}{2.g} - \frac{g}{2.V_0^2}.X_P^2$$

Equação da parábola de segurança (eq5)

A equação eq5 é a famosa equação da parábola de segurança ☺ mostrada na Figura 2. É importante você realmente olhar a Figura 2, nesse ponto da leitura, para refrescar a memória. Uma parábola de segurança é a envoltória de toda uma família de parábolas que têm em comum uma mesma velocidade de disparo V_0 .

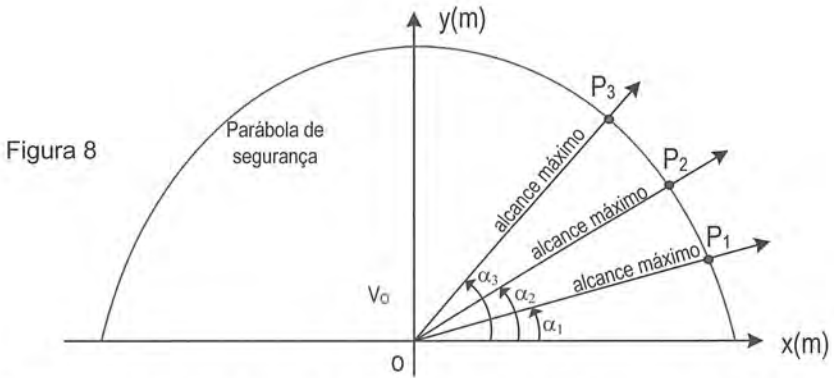
A parábola de segurança, descrita pela equação eq5, fornece as coordenadas X_P, Y_P de todos os pontos do plano que estão “no limite” de serem atingidos pelo lançador que dispara projéteis com velocidade V_0 constante, a partir da origem $(0, 0)$ do sistema de coordenadas cartesianas XY . Por que “no limite”? Ora, porque os pontos externos à parábola de segurança estão fora do alcance daquele lançador (Figura 6). Apenas os pontos internos à parábola de segurança ou, sobre esta, podem ser atingidos por esse lançador (Figuras 4 e 5).



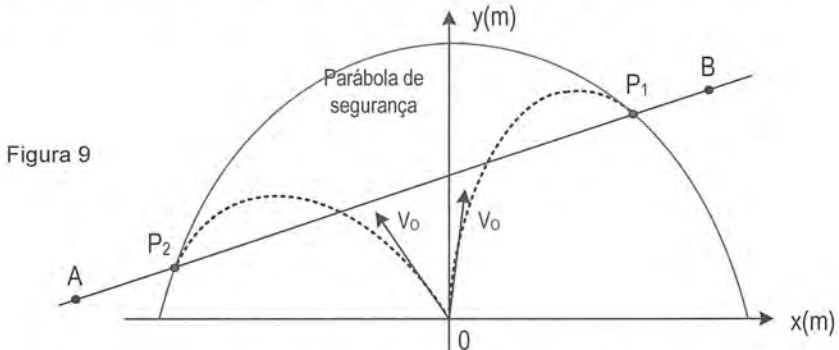
Após observar atentamente a Figura 2, percebem-se várias formas alternativas de interpretar ou visualizar a parábola de segurança. Uma delas é a seguinte:

1a interpretação para a Parábola de Segurança: considere uma rampa de inclinação α que passa pela origem do sistema de coordenadas XY , como mostra a Figura 7. Pergunta-se: qual o alcance máximo que esse lançador consegue atingir ao longo dessa rampa de inclinação α ? Em outras palavras, qual o ponto dessa rampa mais distante da origem que pode ser atingido por esse lançador? A resposta é o ponto P da envoltória, isto é, da parábola de segurança, como mostrado na Figura 7! Pode-se dizer que:

Propriedade 1: A parábola de segurança de um lançador é o lugar geométrico dos pontos $P_1, P_2, P_3 \dots P_N$ (Figura 8) de máximo alcance (para os projéteis disparados por esse lançador) ao longo de quaisquer rampas de inclinação $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_N$ que passem pela origem do sistema de coordenadas.



2a interpretação para a Parábola de Segurança: generalizando um pouco mais, percebemos que, na verdade, não há necessidade de impor a condição de as rampas de inclinação $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_N$ (Figura 8) passarem pela origem $(0, 0)$ onde se encontra o lançador. Isso porque cada rampa serve apenas para definir a direção ao longo da qual se quer que o lançador atinja alcance máximo. Como qualquer reta do plano também definirá uma direção peculiar, qualquer reta r do plano poderá ser utilizada.



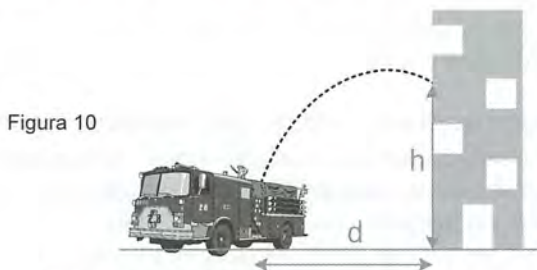
Assim, o prof. Renato Brito pode generalizar, dizendo que:

Propriedade 2: A parábola de segurança (P.S.) fornece os pontos P de máximo alcance de um lançador ao longo de qualquer reta AB do plano que toque a P.S. em 1 ou 2 pontos. No caso em que a reta AB seja secante à parábola (toque em 2 pontos), haverá 2 pontos P_1 e P_2 de alcance máximo ao longo dessa reta, sendo um ao longo do sentido $A \rightarrow B$ (P_1) e outro ponto (P_2) ao longo do sentido oposto $B \rightarrow A$, como mostra a Figura 9. Em todo caso, note que, para uma mesma parábola de segurança, todos os lançamentos ocorrem a uma mesma velocidade de disparo V_0 , sendo alterada apenas a direção α do disparo em cada lançamento.

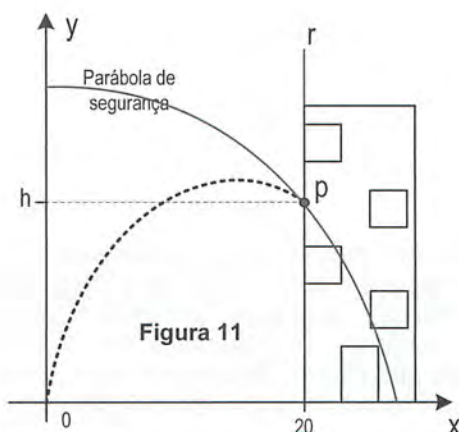
Exemplo Resolvido 1: Um prédio de 25 andares está em chamas e, dadas as grandes proporções do incêndio, o caminhão do corpo de bombeiros só consegue chegar a uma proximidade $d = 20$ m da base do prédio. Se a água desse esguicho é lançada com uma velocidade inicial $v_0 = 20$ m/s, o prof. Renato Brito pede que você determine a altura h da janela mais alta, que poderá ser atingida pelo jato d'água. Despreze a altura inicial do jato d'água, admitindo que ele parte do solo e use $g = 10$ m/s².

Solução:

Seja r a reta vertical que contém a parede frontal do prédio (Figura 11), descrita pela equação analítica $x = 20$. Esse problema de lançamento de projéteis solicita que seja determinada a ordenada y do ponto p "limite" (mais alto) dessa reta que ainda pode ser atingido pelo lançador (jato d'água parabólico).



Observando a Figura 2 (página 226) novamente, vemos que, para solucionar esse problema, é suficiente determinar sobre qual ponto da parede do prédio passará a envoltória (P.S.) de todas as parábolas daquele lançador com velocidade $v_0 = 20$ m/s.



Assim, com base na propriedade 1 da (P.S.), para determiná-lo, devemos procurar o ponto cujas coordenadas x,y satisfazem, simultaneamente, à equação da reta r e à equação da parábola de segurança, ou seja, devemos resolver um sistema com essas duas equações :

- Equação da parábola de segurança: $Y = \frac{V_0^2}{2.g} - \frac{g}{2.V_0^2}.X^2$.

Para $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $V_0 = 20 \text{ m/s}$, vem:

$$Y = \frac{(20)^2}{2.(10)} - \frac{10}{2.(20)^2}.X^2 \Rightarrow y = 20 - \frac{X^2}{80} \quad (\text{eq6})$$

- Equação da reta r : $x = 20$ (eq7)

Resolvendo o sistema de equações eq6 e eq7, vem:

$$y = 20 - \frac{X^2}{80} = 20 - \frac{20^2}{80} = 20 - 5 = 15 \text{ m}$$

Portanto, o ponto p procurado tem coordenadas $(x, y) = (20, 15)$ e, portanto, está a uma altura $h = y = 15\text{m}$.

6.4 ATINGINDO UM ALVO USANDO VELOCIDADE MÍNIMA DE DISPARO

Cada lançador possui “uma e somente uma” parábola de segurança (ps) para “cada velocidade V_0 de disparo”. Isso significa que, para uma sucessão de velocidades de disparo $V_0 < V_1 < V_2 < V_3$, haverá suas respectivas parábolas de segurança ps_0, ps_1, ps_2, ps_3 , sendo que cada uma delas é mais abrangente que a sua antecessora. Em outras palavras, quanto maior a velocidade de disparo V_0 da parábola de segurança, mais abrangente (mais alta e larga) ela será.

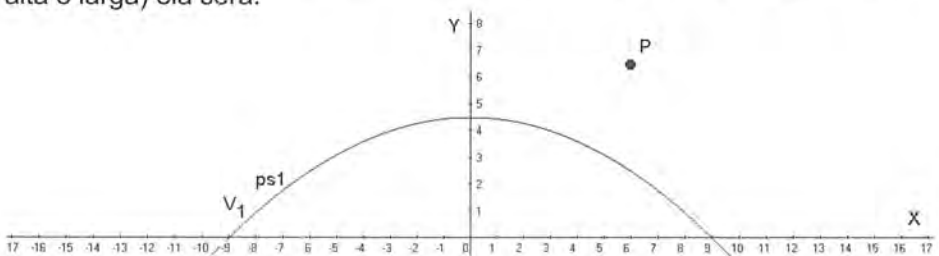


Figura 12

Suponha que um lançador deseje atingir um alvo representado pelo ponto P na Figura 12. Digamos que, para atingir essa meta, seja estipulada uma velocidade V_1 de disparo para esse lançador, ficando automaticamente determinada a sua parábola de segurança ps_1 (envoltória de todas as trajetórias parabólicas que partem do lançador com a mesma velocidade de disparo V_1 sob ângulos variáveis) dada pela relação eq5.

Admita que, conforme ilustrado na Figura 12, esse ponto P seja, casualmente, externo a essa parábola de segurança ps_1 , indicando que a velocidade V_1 desses disparos é insuficiente para atingi-lo, independentemente do ângulo de

disparo. Isso nos leva a crer que, para atingir seu objetivo, o lançador deverá aumentar a velocidade de disparo de V_1 para V_2 e, assim, passar de uma envoltória ps_1 para uma envoltória ps_2 mais abrangente do que sua antecessora, como mostra a Figura 13.

Admita, porém, que o aumento de velocidade de V_1 para V_2 ainda tenha sido insuficiente, visto que o ponto P a ser atingido ainda é externo à envoltória ps_2 da velocidade de disparo V_2 , como mostra a figura 13.

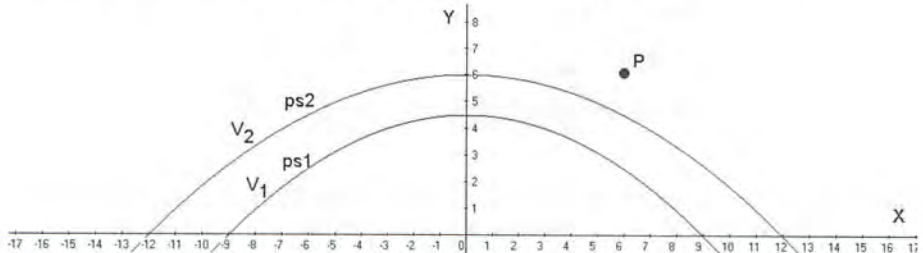


Figura 13

Isso indica que a velocidade de disparo V_2 ainda precisa ser gradativamente aumentada, tornando a sua envoltória (ps_2) mais e mais abrangente, até que, para uma dada velocidade de disparo V_3 , sua envoltória (ps_3) estará suficientemente ampla e, finalmente, tocará o ponto pretendido P, como mostra a Figura 14.

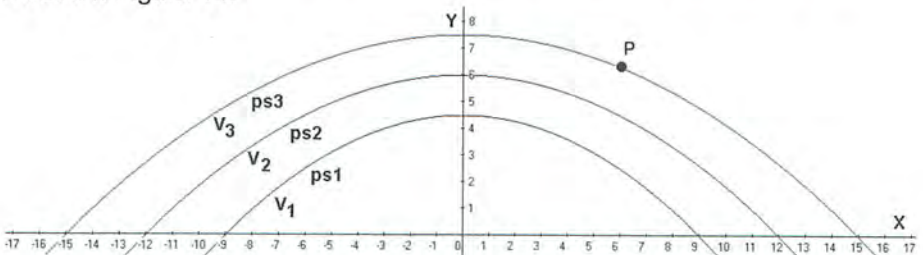


Figura 14

Pronto ! Se o ponto P (alvo) pertence à envoltória ps_3 da velocidade V_3 (figura 14), esta será a mínima velocidade de disparo para esse lançador que permitirá seu projétil atingir o ponto P visado, como mostra a Figura 14. Qualquer velocidade de disparo $V \geq V_3$ permitirá os projéteis do lançador alcançar o ponto P desejado, bastando para isso apenas ajustar o ângulo de disparo convenientemente, conforme aprenderemos adiante.

Propriedade 3 - velocidade mínima de disparo para atingir o alvo :

a velocidade mínima v_0 com que o lançador deve efetuar o disparo, a fim de atingir um dado ponto P do plano (plano cartesiano vertical que contém o lançador), é a velocidade v_0 associada à envoltória (P.S.) que passa exatamente sobre o ponto P desejado.

Exemplo Resolvido 2: Pedrinho quer chutar uma bola de futebol por cima de um muro de altura $h = 5$ m, distante $d = 20$ m do local onde se encontra a bola. Sendo $g = 10$ m/s², o prof. Renato Brito pede que você determine a menor velocidade V_0 com que deve chutar a bola para atingir o seu objetivo.

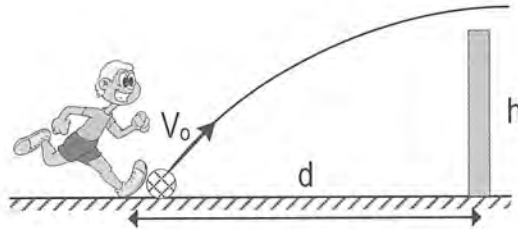


Figura 15

Solução:

Determinaremos a velocidade mínima V_0 com que Pedrinho deverá chutar a bola para que ela parta do ponto de coordenadas $(0, 0)$ e passe pelo ponto mais alto do muro, de coordenadas $(20, 5)$ no sistema de coordenadas XY centrado na posição inicial a partir de onde a bola é chutada.

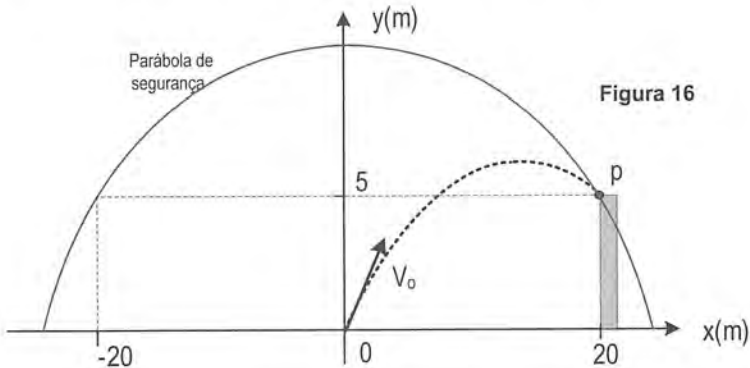


Figura 16

De acordo com a propriedade 3, a velocidade V_0 mínima com que a bola deve ser chutada para atingir o ponto P, de coordenadas $(20, 5)$, é a velocidade V_0 , associada à envoltória (ps), que passa exatamente sobre o ponto P pretendido. Assim, devemos impor a condição de que uma parábola de segurança passe pelo ponto desejado $(20, 5)$ e determinar a velocidade V_0 associada a essa parábola de segurança.

Equação da parábola de segurança (envoltória) :

$$Y = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2} \cdot X^2, \text{ com } g = 10 \text{ m/s}^2;$$

Condição a ser satisfeita: $x = 20 \text{ m} \Rightarrow y = 5 \text{ m}$.

$$\text{Substituindo, vem: } 5 = \frac{V_o^2}{20} - \frac{10}{2 \cdot V_o^2} \cdot 20^2 \Rightarrow 5 = \frac{V_o^2}{20} - \frac{2000}{V_o^2}$$

$$100 \cdot V_o^2 = V_o^4 - 40.000 \Rightarrow V_o^4 - 100 \cdot V_o^2 - 40.000 = 0$$

$$V_o^2 = \frac{100 + \sqrt{(100)^2 + 4 \times 40.000}}{2} = 256,15 \Rightarrow V_o \cong 16 \text{ m/s}$$

Portanto, a menor velocidade V_o com que Pedrinho deverá chutar a bola para que ela caia do outro lado do muro vale, aproximadamente, 16 m/s. Ainda assim, resta uma pergunta: com que ângulo α Pedrinho deverá efetuar o chute com essa velocidade $V_o \cong 16$ m/s a fim de atingir o referido ponto p da parábola de segurança (topo do muro) ?

Substituindo os valores $V_o \cong 16$ m/s, $X = 20$ m e $Y = 5$ m na relação eq3 página 226, obteríamos uma equação na variável $\text{tg}\alpha$ que forneceria o valor do ângulo α procurado. A propriedade 4 a seguir, contudo, nos fornece uma maneira mais objetiva de obter o ângulo α em qualquer caso.

6.5 OTIMIZANDO O ÂNGULO DE DISPARO

Seja um plano inclinado de inclinação α com a horizontal cuja origem se encontra nas coordenadas (0, 0) de um sistema cartesiano XY. O lançador, localizado nessa origem (0, 0) dispara projéteis com velocidade V_o constante sob ângulos de disparo θ variáveis, como mostra a Figura 17.

Pela Propriedade 1 da parábola de segurança, estudada anteriormente, o alcance máximo que esse lançador pode atingir, ao longo desse plano inclinado, é dado pelo comprimento OP na Figura 17, onde P é o ponto de interseção do plano inclinado com a parábola de segurança associada àquela velocidade V_o daquele lançador.

A pergunta-chave, no contexto acima, é: nessas condições, sob qual ângulo de disparo θ o lançador deve atirar a fim de alvejar esse ponto P pertencente à parábola de segurança ? Fica subentendido que o disparo será realizado com a velocidade V_o associada àquela PS.

Propriedade 4 - Ângulo de Disparo da Parábola de Segurança: a direção procurada é a da bissetriz do ângulo formado entre o segmento OP e o eixo vertical Y que passa pelo lançador, como mostra a Figura 17. Esse fato inusitado será demonstrado adiante na seção 6.7 - página 242.

O ângulo θ de disparo pode ser facilmente determinado a seguir:

$$\alpha + 2\beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = \frac{90^\circ - \alpha}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\theta = \alpha + \beta = \alpha + 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\alpha}{2} + 45^\circ} \quad (\text{eq8})$$

No caso particular em que se deseje obter máximo alcance ao longo de uma rampa de inclinação $\alpha = 0^\circ$ com a horizontal (caso ordinário de alcance máximo ao longo de uma superfície horizontal), o ângulo θ de disparo, conforme a relação eq8, será dado por :

$$\theta = \frac{\alpha}{2} + 45^\circ = 0^\circ + 45^\circ = 45^\circ$$

que é um resultado já conhecido do estudo elementar do lançamento de projéteis. Nesse caso, o ponto mais distante a ser alvejado pelo lançador será o ponto P^* de interseção da parábola de segurança com o eixo horizontal OX como mostra a Figura 17.

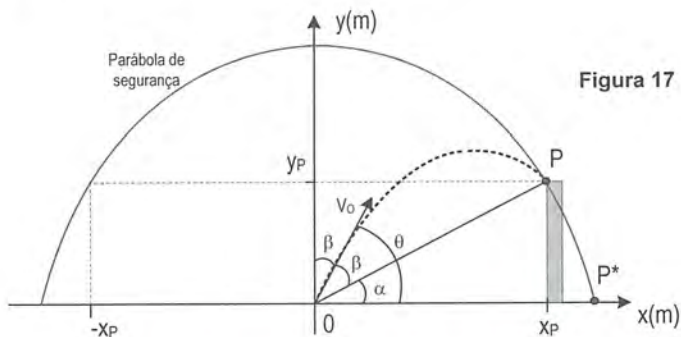


Figura 17

Exemplo Resolvido 3: Pedrinho deseja chutar uma bola de futebol por cima de um muro de altura $h = 5$ m distante $d = 20$ m do local onde se encontra a bola. No exemplo resolvido 2, determinamos a menor velocidade V_0 com que ele deve chutar a bola para atingir o seu objetivo. Para completar a proeza de Pedrinho, determine a direção θ na qual ele deverá chutar essa bola para atingir a sua meta fazendo uso dessa velocidade mínima $V_0 \cong 16$ m/s determinada anteriormente ($g = 10$ m/s²).

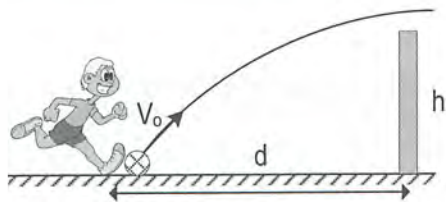


Figura 18

Solução:

Observando as Figuras 16 e 17, vemos que o ângulo α de inclinação do segmento OP é dado por:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_P}{x_P} = \frac{5 \text{ m}}{20 \text{ m}} = 0,25 \Rightarrow \alpha \cong 14^\circ$$

(Consulte uma tabela trigonométrica ou calculadora científica)

Segundo a relação eq8, na Figura 17, temos:

$$\theta = \frac{\alpha}{2} + 45^\circ \cong \frac{14^\circ}{2} + 45^\circ \Rightarrow \theta \cong 52^\circ.$$

Assim, conclui-se que Pedrinho deverá chutar a bola aproximadamente numa direção que forma um ângulo de 52° com a horizontal.

É admirável o poder que a parábola de segurança tem de otimizar os parâmetros do lançador ☺ ! Afinal de contas, pelo que vimos até agora, ela permite:

- determinar todos os pontos de máximo alcance de um lançador ao longo de qualquer direção (propriedades 1 e 2), conhecendo apenas a velocidade de disparo V_o do lançador e a gravidade local g (fazendo uso da equação 5);
- determinar a velocidade V_o mínima de disparo que o lançador deve usar para atingir um alvo P qualquer (propriedade 3), conhecendo apenas as coordenadas (X_P, Y_P) do ponto pretendido e a gravidade local g (fazendo uso da equação 5);
- determinar o ângulo α otimizado para o disparo em cada um dos casos acima (propriedade 4), sabendo apenas as coordenadas (X_P, Y_P) do ponto desejado (fazendo uso da equação 8).

A parábola de segurança (dada pela relação eq5) é, portanto, a ferramenta otimizadora da trajetória parabólica (relação eq3) descrita pelo projétil em seu movimento.

6.6 GENERALIZANDO AS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO PARABÓLICO POR CONSIDERAÇÕES DE SIMETRIA (Por Pierre Lucie)

O movimento geral de um projétil, num campo gravitacional uniforme, é regido pelas seguintes equações:

$$\vec{a} = \vec{g} = \text{constante} \quad (\text{eq9})$$

$$\vec{V} = \vec{V}_o + \vec{g}.t \quad (\text{eq10})$$

$$\vec{r} = \vec{V}_o.t + \frac{\vec{g}}{2}.t^2 \quad (\text{eq11})$$

Uma interessante interpretação da equação eq11 é mostrada no diagrama de vetores da Figura 20, na qual o movimento parabólico é interpretado como a composição de dois movimentos independentes:

I. um MRU na direção de \vec{V}_o ;

II. uma queda livre, a partir do repouso, na direção da gravidade \vec{g} . Assim, em cada instante t , a superposição (soma vetorial) desses dois movimentos independentes fornece o vetor posição \vec{r} do móvel.

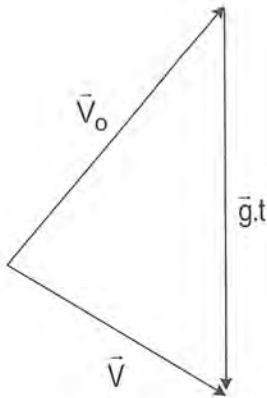


Figura 19

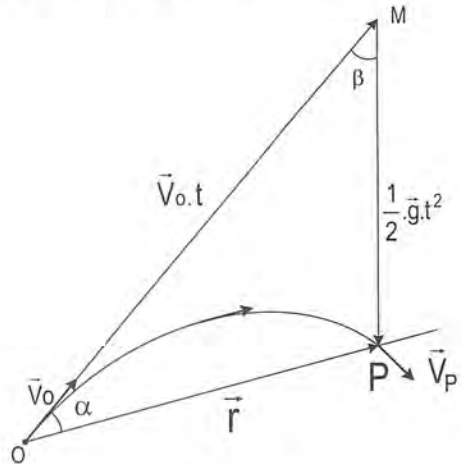


Figura 20

Considerações de simetria são sempre úteis e, portanto, bem-vindas, visto que sempre trazem consideráveis simplificações na análise e resolução de problemas nas ciências exatas.

A partir de agora, usaremos a simetria da inversão da seta do tempo nesse movimento parabólico.

Invertamos, ao mesmo tempo, t e \vec{V}_0 nas equações eq9, eq10 e eq11, substituindo t por $-t$ e \vec{V}_0 por $-\vec{V}_0$.

$$\vec{a} = \vec{g} = \text{constante} \quad (\text{eq9}) \Rightarrow \vec{a}^* = \vec{g} = \text{constante} \Rightarrow \vec{a}^* = \vec{a}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{g}.t \quad (\text{eq10}) \Rightarrow \vec{V}^* = -\vec{V}_0 + \vec{g}.(-t) = -(\vec{V}_0 + \vec{g}.t) \Rightarrow \vec{V}^* = -\vec{V}$$

$$\vec{r} = \vec{V}_0.t + \frac{\vec{g}}{2}.t^2 \quad (\text{eq11}) \Rightarrow \vec{r}^* = (-\vec{V}_0).(-t) + \frac{\vec{g}}{2}.(-t)^2 \Rightarrow \vec{r}^* = \vec{r}$$

A equação eq9 não altera sua forma. Dizemos que ela permanece invariante: o valor da gravidade não depende, evidentemente, do sentido no qual avança o relógio (uma aceleração é um quociente de um comprimento pelo quadrado de um tempo).

A equação eq11 também permanece invariante, o que significa que a trajetória do projétil permanece a mesma. Tentemos entender isto. Dado o movimento de um projétil, a origem dos tempos pode ser escolhida

arbitrariamente. Na Figura 21, a origem dos tempos foi tomada no instante em que o projétil passava por O. Nesse instante, a velocidade do projétil era \vec{V}_0 . Era a velocidade inicial. Em $t = -2$ s, o projétil estava em A com velocidade \vec{V}_A .

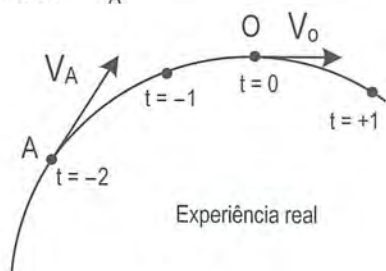


Figura 21

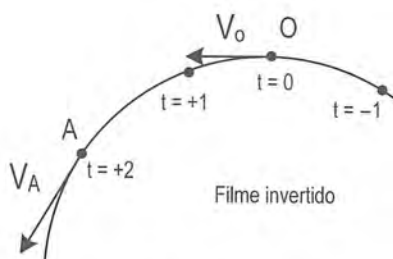


Figura 22

Agora analisemos o movimento após invertermos t e \vec{V}_0 . Na prática, isso poderia ser simulado da seguinte maneira: filma-se a experiência real (Figura 21) e, agora, passa-se o filme ao contrário. O que veremos? Ora, veremos um projétil percorrer a mesma trajetória, mas em sentido contrário (Figura 22):

- em $t = 0$, ele passa pelo ponto O com uma velocidade V_0 igual, porém oposta à velocidade da experiência real.
- em $t = 2$, ele passa por A também com uma velocidade oposta à da experiência real.

A inversão do sentido do movimento sobre a mesma trajetória é ratificada, formalmente, pelo fato de que obtivemos $\vec{V}^* = -\vec{V}$ ao substituirmos t por $-t$ e \vec{V}_0 por $-\vec{V}_0$ na relação eq10. Assim, \vec{V} se transforma em $-\vec{V}$ ao se inverter a seta do tempo.

Essa inversão do sentido do movimento sobre a mesma trajetória tem, como consequência que, ao se assistir ao filme da experiência do projétil (Figura 22), não há nenhum meio de provarmos se o filme está sendo passado no sentido real ou no sentido contrário.

Estamos nos deparando com uma das simetrias mais fundamentais da Física: a simetria das interações em relação a uma inversão do tempo.

As interações conservativas são simétricas em relação a uma inversão do sentido do tempo.

Durante o movimento do projétil, a interação gravitacional entre o projétil e a Terra é conservativa, visto que a única força agindo sobre o projétil é a gravitacional, que é uma força conservativa.

Essa simetria, estudada acima, permite facilmente generalizar as equações para o movimento parabólico:

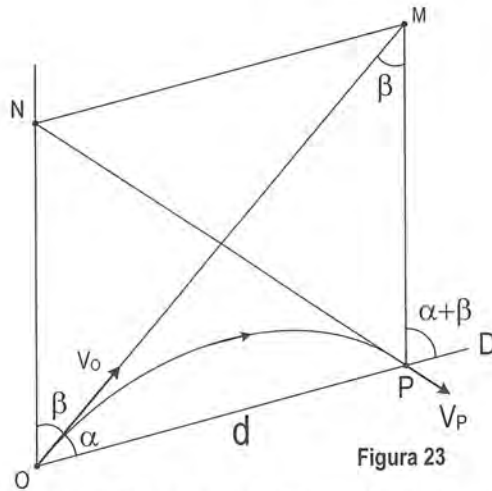


Figura 23

Atiremos um projétil com velocidade \vec{V}_0 fazendo um ângulo α acima de uma direção qualquer OD (não necessariamente horizontal) como mostra a Figura 23. Seja β o ângulo entre \vec{V}_0 e a vertical NO.

Após t segundos, o projétil atinge o ponto P, da reta OD, com velocidade \vec{V}_P . A partir das Figuras 20 e 23, podemos escrever:

$$OM = V_0 \cdot t \quad (\text{eq12})$$

$$MP = \frac{g \cdot t^2}{2} \quad (\text{eq13})$$

Passemos, agora, o filme de trás para frente (Figura 24):

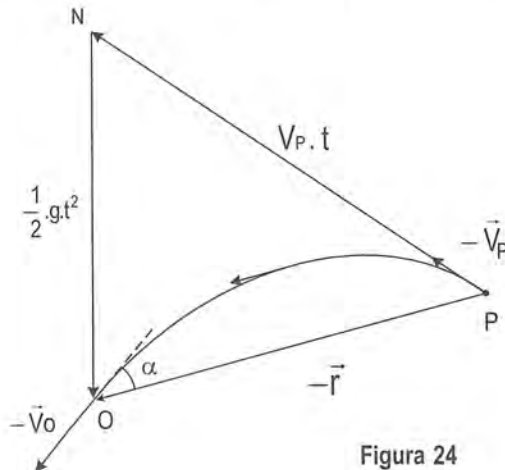


Figura 24

O projétil sai de P com velocidade $-\vec{V}_p$ e, t segundos depois, passa por O com velocidade $-\vec{V}_o$. Podemos escrever:

$$PN = -\vec{V}_p \cdot t \quad (\text{eq14})$$

$$NO = \frac{g \cdot t^2}{2} \quad (\text{eq15})$$

Dessa forma, vemos que MP e NO são dois segmentos verticais congruentes, portanto o quadrilátero OPMN é um paralelogramo. A Lei dos senos, no triângulo OMP da Figura 23, permite escrever :

$$\frac{OP}{\text{sen } \beta} = \frac{MP}{\text{sen } \alpha} = \frac{OM}{\text{sen}[180^\circ - (\alpha + \beta)]}$$

Sendo OP o alcance d na direção OD (Figura 23) e considerando as relações eq12 e eq13, temos:

$$\frac{OP}{\text{sen } \beta} = \frac{MP}{\text{sen } \alpha} = \frac{OM}{\text{sen}[180 - (\alpha + \beta)]} \Rightarrow \frac{d}{\text{sen } \beta} = \frac{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2}{\text{sen } \alpha} = \frac{V_o \cdot t}{\text{sen}(\alpha + \beta)} \quad (\text{eq16})$$

Da relação eq16, podemos obter o tempo de vôo t do projétil :

$$t = \frac{2 \cdot V_o \cdot \text{sen } \alpha}{g \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)} \quad (\text{eq17})$$

Substituindo eq17 em eq16, determinamos o alcance d ao longo da direção OD:

$$\frac{d}{\text{sen } \beta} = \frac{V_o \cdot t}{\text{sen}(\alpha + \beta)} \Rightarrow d = \frac{V_o \cdot \text{sen } \beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)} \cdot t = \frac{V_o \cdot \text{sen } \beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)} \cdot \left(\frac{2 \cdot V_o \cdot \text{sen } \alpha}{g \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)} \right)$$

$$d = \frac{2 \cdot V_o^2 \cdot \text{sen } \beta \cdot \text{sen } \alpha}{g \cdot \text{sen}^2(\alpha + \beta)} \quad (\text{eq18})$$

Equação geral do alcance do projétil

Particularizando-se, a título de verificação, a expressão eq18 para o caso ordinário em que o disparo ocorre ao longo de um plano OD horizontal (isto é, admitindo-se $\alpha + \beta = 90^\circ$ na Figura 23), temos:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \text{sen } \beta = \cos \alpha \Rightarrow d = \frac{2 \cdot V_o^2 \cdot \text{sen } \beta \cdot \text{sen } \alpha}{g \cdot \text{sen}^2(\alpha + \beta)} = \frac{2 \cdot V_o^2 \cdot \cos \alpha \cdot \text{sen } \alpha}{g \cdot \text{sen}^2 90^\circ} = \frac{V_o^2 \cdot \text{sen}(2\alpha)}{g}$$

que é a equação do alcance conhecida do estudo elementar do movimento de projéteis.

6.7 GENERALIZANDO O ALCANCE MÁXIMO

Para determinar o valor máximo do alcance d , na equação 18, variando-se o ângulo de disparo α , devemos notar que:

- Fixando-se uma direção genérica OD, na Figura 23, bem como a respectiva vertical ON, o ângulo $\alpha + \beta$, formado entre elas, está univocamente determinado. Assim, embora o lançador possa efetuar o disparo em qualquer direção limitada por OD e ON (Figura 23), variando cada um dos ângulos α e β , a soma $\alpha + \beta$, ainda assim, permanece constante, o mesmo ocorrendo ao denominador da expressão eq18;
- Para maximizar o alcance d , dado pela relação eq18, devemos maximizar o produto $\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta$, com a condição de que $\alpha + \beta = \text{constante}$;
- É possível demonstrar que, sendo $\alpha + \beta = \text{constante}$, o produto $\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta$ será máximo para $\alpha = \beta$. (veja demonstração formal optativa adiante).

Portanto, na equação 18, o alcance d , obtido pelo projétil ao longo da rampa OD (Figura 23), será máximo para $\alpha = \beta$, isto é, será máximo quando o projétil for disparado exatamente na bissetriz do ângulo formado entre a direção OD e a vertical NO que passa pelo lançador (Figura 23).

Esse resultado obtido demonstra a Propriedade 4 (Ângulo de Disparo da parábola de segurança), descrita anteriormente na Figura 17.

Seja θ a metade do ângulo formado entre a direção inclinada OD e a vertical ON que passa pelo lançador na Figura 23, isto é:

$$\theta = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (\text{eq19})$$

Da condição de alcance máximo ($\alpha = \beta$), a relação eq19 permite escrever:

$$\theta = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\alpha + \alpha}{2} = \frac{\beta + \beta}{2} = \alpha = \beta. \quad \text{Substituindo em eq18,}$$

vem:

$$d_{\max} = \frac{2 \cdot V_0^2 \cdot \text{sen}\beta \cdot \text{sen}\alpha}{g \cdot \text{sen}^2(\alpha + \beta)} = \frac{2 \cdot V_0^2 \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\theta}{g \cdot \text{sen}^2(2\theta)} = \frac{2 \cdot V_0^2 \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\theta}{g \cdot [2 \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\theta]^2}$$

$$d_{\max} = \frac{V_0^2}{2g \cdot (\cos\theta)^2} \quad (\text{eq20})$$

alcance máximo do projétil no caso geral da figura 23

Apenas a título de verificação, particularizando a expressão eq20 para o caso de alcance máximo ordinário, na figura 23, isto é, considerando a rampa OD na direção horizontal, com $\alpha + \beta = 90^\circ$ e $\alpha = 45^\circ$, de eq19 e eq20, vem:

$$d_{\max} = \frac{V_0^2}{2g \cdot (\cos\theta)^2} = \frac{V_0^2}{2g \cdot (\cos 45^\circ)^2} = \frac{V_0^2}{2g \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{V_0^2}{g}$$

Esse resultado acima coincide com o resultado obtido classicamente nos livros de Ensino Médio para o alcance máximo de um projétil disparado numa planície horizontal.

Propriedade 5 – Perpendicularismo entre as velocidades inicial e final

Na Figura 23, na condição de alcance máximo, teremos $OM \perp NP$. Em outras palavras, em todo lançamento oblíquo, na condição de alcance máximo, a velocidade inicial \vec{V}_0 e a velocidade final \vec{V}_p são necessariamente perpendiculares entre si.

Essa propriedade é facilmente demonstrável, lembrando que, na condição para alcance máximo, temos $\alpha = \beta$, portanto, o paralelogramo OPMN será um losango (terá os quatro lados congruentes), portanto, suas diagonais se cruzam em ângulo reto.

Essa propriedade facilita bastante a resolução de problemas de lançamento oblíquo envolvendo máximos e mínimos. Para uma interessante aplicação, veja a resolução da questão 140 na página 363.

Demonstração Formal Optativa:

A famosa identidade trigonométrica $2 \cdot \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta = \text{cos}(\alpha - \beta) - \text{cos}(\alpha + \beta)$ nos diz que:

Se $(\alpha + \beta) = \text{constante} \Rightarrow \text{cos}(\alpha + \beta) = \text{constante}$. Assim, vem:

$2 \cdot \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta = \text{cos}(\alpha - \beta) + \text{constante}$;

Portanto, para maximizar o produto $\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta$, devemos maximizar o termo $\text{cos}(\alpha - \beta)$. O maior valor que o $\text{cos}(\alpha - \beta)$ atinge é 1, para $\alpha - \beta = 0^\circ$, ou seja, para $\alpha = \beta$.

7 VÍNCULOS GEOMÉTRICOS

Tópico Especial 2



7.1 INTRODUÇÃO AOS VÍNCULOS GEOMÉTRICOS

Quando dois corpos A e B movem-se livremente, seus movimentos ocorrem de forma independente e estão meramente sujeitos às leis da Mecânica. Quando esses corpos se movem vinculados entre si, contudo, seus movimentos deixam de ser independentes e a geometria envolvida impõe restrições que devem ser satisfeitas em função do tipo de conexão entre os corpos (fios, polias móveis, polias fixas etc). Essas restrições recebem o nome de *vínculos geométricos*.

As relações cinemáticas que decorrem exclusivamente desses vínculos geométricos, aliadas às leis da Mecânica, constituirão as ferramentas disponíveis para o estudo analítico dos problemas da Dinâmica.

O uso exclusivo das leis de Newton do movimento, ignorando as relações cinemáticas oriundas dos vínculos geométricos, torna o número de incógnitas maior do que o número de equações disponíveis para a análise do problema, inviabilizando a sua solução.

Nesse tópico especial, o prof. Renato Brito abordará os vínculos geométricos mais comuns em problemas de Mecânica.

7.2 CASO 1: FIOS INEXTENSÍVEIS, POLIAS FIXAS

A Figura 1 mostra duas caixas A e B que se movem numa mesma direção (movimento unidimensional), conectadas entre si por meio de um fio ideal inextensível. O vínculo geométrico (imposta pelo fato de o fio não esticar) garante que as caixas A e B sempre sofrerão deslocamentos idênticos ($dx_A = dx_B$), tanto pelo fato de as caixas se moverem na mesma direção do fio quanto pelo fato de uma caixa puxar a outra, o que mantém o fio permanentemente tracionado (esticado) durante o movimento.

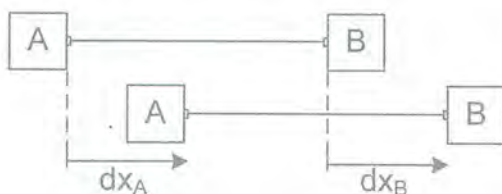


Figura 1 – as caixas movem-se na mesma direção do fio, enquanto uma puxa a outra. Como o fio não estica, suas extremidades sempre sofrem deslocamentos idênticos.

Na Figura 1, o vínculo geométrico garante que o movimento de uma das caixas será a cópia fiel do movimento da outra. Elas sofrerão deslocamentos necessariamente iguais, em qualquer intervalo de tempo, e se moverão com velocidades e acelerações idênticas ($v_A = v_B$, $a_A = a_B$) em qualquer instante.

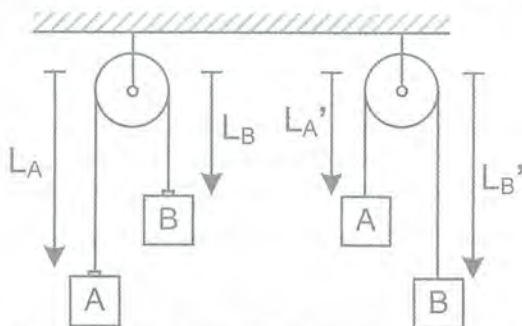


Figura 2– as caixas movem-se na mesma direção do fio, enquanto uma caixa puxa a outra. Como a polia é fixa e o fio não estica, suas extremidades sempre sofrerão deslocamentos iguais e opostos.

O mesmo vínculo geométrico da Figura 1 também garante que as caixas da Figura 2, conectadas entre si por meio de um fio inextensível que passa por uma polia fixa, sempre sofrerão deslocamentos idênticos (apesar de opostos) em qualquer intervalo de tempo dt infinitesimal, de forma que as caixas apresentarão velocidades e acelerações de mesmo módulo em cada instante ($v_A = v_B$, $a_A = a_B$).

Análise Matemática do vínculo geométrico da Figura 2

A Figura 2 mostra dois instantes sucessivos (t e $t + dt$) do movimento do sistema. O vínculo geométrico em questão é o fato de que o comprimento total do fio que conecta as caixas A e B, passando através da polia fixa, permanece inalterado no decorrer do tempo, o que permite escrever:

$$\text{No instante } t: \quad L_A + L_B = K \text{ (constante)} \quad (\text{eq1})$$

$$\text{No instante } t + dt: \quad L_A' + L_B' = K \text{ (constante)} \quad (\text{eq2})$$

Subtraindo as equações, membro a membro, obteremos a relação entre os deslocamentos dL_A e dL_B de cada caixa no intervalo de tempo infinitesimal dt :

$$L_A' - L_A + L_B' - L_B = K - K \Rightarrow dL_A + dL_B = 0 \quad (\text{eq3})$$

A expressão eq3 afirma que as caixas A e B sempre sofrem deslocamentos escalares dL iguais em módulo, porém de sinais contrários.

O sinal algébrico do deslocamento dL_A será positivo, caso a caixa A se desloque a favor do eixo L_A (Figura 2) e, negativo, caso ela se mova no sentido contrário desse eixo. O mesmo é válido para o sinal do deslocamento dL_B sofrido pela caixa B, ao longo do respectivo eixo L_B (Figura 2). Considerando que, na Figura 2, a caixa A subiu enquanto B desceu, teremos $dL_A < 0$ e $dL_B > 0$, o que justifica a soma $dL_A + dL_B$ ser nula conforme a relação eq3.

$$dL_A + dL_B = 0 \Rightarrow \frac{dL_A}{dt} + \frac{dL_B}{dt} = 0 \Rightarrow v_A + v_B = 0 \quad (\text{eq4})$$

A expressão eq4 afirma que as caixas A e B têm velocidades iguais em módulo, em qualquer instante, embora tenhamos $v_A < 0$ (caixa A move-se contra o eixo L_A) e $v_B > 0$ (caixa B move-se a favor do eixo L_B).

$$v_A + v_B = 0 \Rightarrow v_A = -v_B \Rightarrow |v_A| = |v_B| \quad (\text{eq5})$$

Para determinarmos a relação cinemática entre as acelerações instantâneas de A e B, podemos partir da relação eq4 novamente:

$$\text{No instante } t: \quad v_A + v_B = 0 \quad (\text{eq6})$$

$$\text{No instante } t + dt: \quad v_A' + v_B' = 0 \quad (\text{eq7}).$$

Subtraindo as equações, membro a membro, obteremos a relação entre as variações de velocidade de cada caixa no intervalo de tempo infinitesimal dt :

$$v_A' - v_A + v_B' - v_B = 0$$

$$dv_A + dv_B = 0 \Rightarrow \frac{dv_A}{dt} + \frac{dv_B}{dt} = 0 \Rightarrow a_A + a_B = 0 \quad (\text{eq8})$$

A expressão eq8 afirma que as caixas A e B têm acelerações iguais em módulo, em qualquer instante, porém sentidos contrários.

$$a_A + a_B = 0 \Rightarrow a_A = -a_B \Rightarrow |a_A| = |a_B| \quad (\text{eq9})$$

Assim, o vínculo geométrico, decorrente do fato de que o comprimento " $L_A + L_B$ " do fio permanece constante no tempo, nos levou às seguintes relações cinemáticas para o sistema da Figura 2:

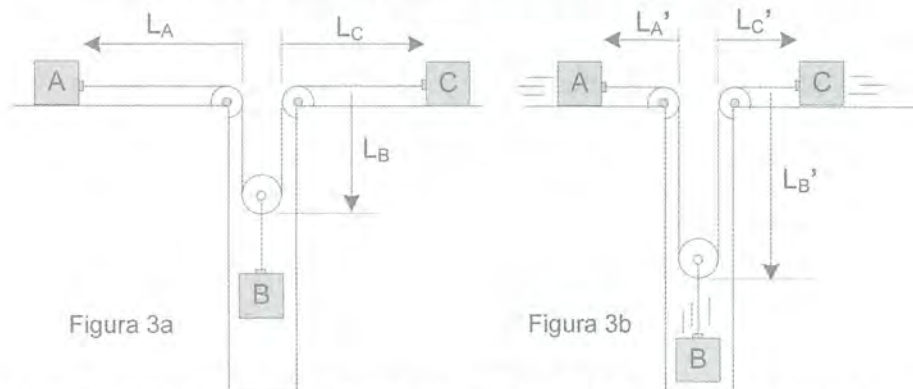
$$dL_A + dL_B = 0 \Rightarrow |dL_A| = |dL_B| \quad (\text{eq10})$$

$$v_A + v_B = 0 \Rightarrow |v_A| = |v_B| \quad (\text{eq11})$$

$$a_A + a_B = 0 \Rightarrow |a_A| = |a_B| \quad (\text{eq12})$$

7.3 CASO 2: FIOS INEXTENSÍVEIS, UMA POLIA MÓVEL

Na Figura 3, vemos 2 caixas A e C conectadas entre si por meio de um longo fio inextensível, que passa por uma polia móvel suspensa. Uma terceira caixa B está suspensa por um fio ao eixo dessa polia.



Nesse sistema, o vínculo geométrico é o fato de que o comprimento do fio longo que interliga as caixas A e C (Figura 3a) permanece invariável entre quaisquer dois instantes t e $t + dt$. Assim, o prof. Renato Brito pode escrever: O comprimento do fio no instante t (Figura 3a) vale:

$$L_A + L_B + L_B + L_C = L_A + 2.L_B + L_C = K = \text{constante} \quad (\text{eq13})$$

O comprimento do fio no instante $t + dt$ (Figura 3b) vale :

$$L'_A + 2.L'_B + L'_C = K = \text{constante} \quad (\text{eq14})$$

Subtraindo as equações, membro a membro, obteremos a relação entre os deslocamentos escalares de cada caixa no intervalo de tempo infinitesimal dt :

$$(L'_A - L_A) + 2.(L'_B - L_B) + (L'_C - L_C) = K - K$$

$$dL_A + 2.dL_B + dL_C = 0 \Rightarrow dL_B = -\left(\frac{dL_A + dL_C}{2}\right) \quad (\text{eq15})$$

Para esclarecer os sinais algébricos na equação eq15, observe na Figura 3a que:

- um deslocamento dL_A é positivo quando a caixa A move-se a favor do eixo L_A (quando ela mover-se para a esquerda na Figura 3a) e será negativo quando ela mover-se no sentido contrário do eixo L_A . A mesma regra de sinal também se aplica à velocidade e aceleração da caixa A;
- um deslocamento dL_C , por sua vez, será positivo quando ocorrer a favor do eixo L_C mostrado na Figura 3a (quando a caixa C mover-se para a direita), e negativo quando ocorrer no sentido oposto. A mesma regra de sinal também se aplica à velocidade e aceleração da caixa C;
- finalmente, um deslocamento dL_B será positivo quando ocorrer a favor do eixo L_B mostrado na Figura 3a (quando a caixa B mover-se para baixo) e, negativo quando ocorrer no sentido contrário ao desse eixo. A mesma regra de sinal também se aplica à velocidade e aceleração dessa caixa.

Assim, atentando para os deslocamentos representados nas Figuras 3a e 3b, quando o sistema é abandonado a partir do repouso, verifica-se que $dL_A < 0$, $dL_B > 0$ e $dL_C < 0$, o que justifica o fato de a soma escalar $dL_A + 2.dL_B + dL_C$ ser nula conforme a relação eq15.

Caso o leitor prefira escrever a relação eq15 em função dos módulos dos deslocamentos, teremos :

$$|dL_A| = -dL_A \quad (\text{eq16}) \quad \text{visto que } dL_A < 0$$

$$|dL_B| = dL_B \quad (\text{eq17}) \quad \text{visto que } dL_B > 0$$

$$|dL_C| = -dL_C \quad (\text{eq18}) \quad \text{visto que } dL_C < 0$$

Substituindo-se eq16, eq17 e eq18 em eq15, vem:

$$dL_B = -\left(\frac{dL_A + dL_C}{2}\right) \Rightarrow |dL_B| = \frac{|dL_A| + |dL_C|}{2} \quad (\text{eq 19})$$

Assim, admita que o sistema da Figura 4 seja abandonado a partir do repouso e que as caixas A e C se desloquem simultaneamente $|dL_A| = 4$ cm e $|dL_C| = 2$ cm. Com isso, que distância descerá a caixa B ?

Ora, se A e C se movem, respectivamente, 4 cm e 2 cm em sentidos opostos, o fio longo que conecta essas caixas vai adquirir uma folga de $4+2 = 6$ cm.

A polia móvel, contudo, assim como a caixa B, só se desloca para baixo a metade desse valor. Isso pelo fato de que é necessária uma folga de 3 cm de fio, tanto do lado esquerdo quanto do lado direito da polia móvel suspensa, a fim de que seu eixo possa descer apenas 3 cm (veja Figura 4). Essa idéia está implícita na relação eq19 ☺ .

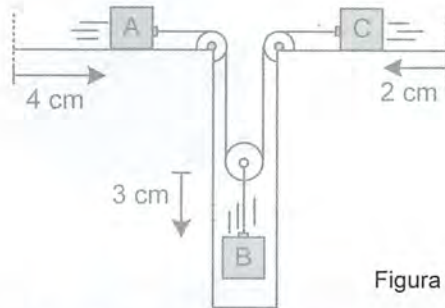


Figura 4

Para determinar a relação cinemática entre as velocidades instantâneas de A, B e C, podemos partir da relação eq15 novamente:

$$dL_A + 2.dL_B + dL_C = 0 \Rightarrow \frac{dL_A}{dt} + 2.\frac{dL_B}{dt} + \frac{dL_C}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$v_A + 2.v_B + v_C = 0 \quad (\text{eq 20})$$

A expressão acima relaciona as velocidades escalares instantâneas das caixas A, B e C em qualquer instante do movimento. A convenção de sinais algébricos para essas velocidades escalares segue a orientação positiva dada pelos eixos L_A , L_B e L_C da Figura 3a, segundo a qual teremos: $v_A < 0$, $v_B > 0$ e $v_C < 0$.

Para encontrar a relação cinemática entre as acelerações instantâneas dos corpos do sistema, podemos partir da relação eq20 novamente:

$$\text{No instante } t: \quad v_A + 2.v_B + v_C = 0 \quad (\text{eq 21})$$

$$\text{No instante } t + dt: \quad v_A' + 2.v_B' + v_C' = 0 \quad (\text{eq 22})$$

Subtraindo as equações, membro a membro, obteremos a relação entre as variações de velocidade de cada caixa no intervalo de tempo dt :

$$v_A' - v_A + 2.(v_B' - v_B) + v_C' - v_C = 0$$

$$dv_A + 2dv_B + dv_C = 0 \Rightarrow \frac{dv_A}{dt} + 2\frac{dv_B}{dt} + \frac{dv_C}{dt} = 0$$

$$a_A + 2.a_B + a_C = 0 \quad (\text{eq 23})$$

A expressão acima relaciona as acelerações escalares instantâneas das caixas A, B e C em qualquer instante do movimento. A convenção de sinais algébricos para essas acelerações escalares segue a orientação positiva dada pelos eixos L_A , L_B e L_C da Figura 3a

Assim, o vínculo geométrico decorrente do fato de o comprimento " $L_A + 2.L_B + L_C$ " do fio permanecer constante no tempo, juntamente com as propriedades da polia móvel suspensa, nos leva às seguintes relações cinemáticas para o sistema da Figura 3:

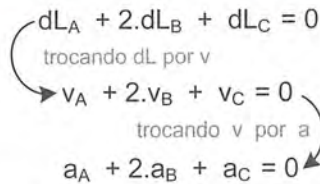
$$dL_A + 2.dL_B + dL_C = 0 \Rightarrow |dL_B| = \frac{|dL_A| + |dL_C|}{2} \quad (\text{eq 24})$$

$$v_A + 2.v_B + v_C = 0 \Rightarrow |v_B| = \frac{|v_A| + |v_C|}{2} \quad (\text{eq 25})$$

$$a_A + 2.a_B + a_C = 0 \Rightarrow |a_B| = \frac{|a_A| + |a_C|}{2} \quad (\text{eq 26})$$

Nesse ponto, é importante o leitor observar a semelhança entre as relações eq24, eq25 e eq 26 acima.

Regra Prática de Derivação: em geral, quando a relação entre os deslocamentos infinitesimais é linear e envolve apenas coeficientes reais constantes ($dL_A + 2.dL_B + dL_C = 0$), a correspondente relação entre as velocidades instantâneas pode ser obtida facilmente substituindo-se dL por v ($v_A + 2.v_B + v_C = 0$) e a relação entre as acelerações instantâneas, substituindo-se v por a ($a_A + 2.a_B + a_C = 0$).



Podemos facilmente generalizar o raciocínio usado na explicação da Figura 4 para os casos das Figuras 5 e 6 abaixo da seguinte forma:

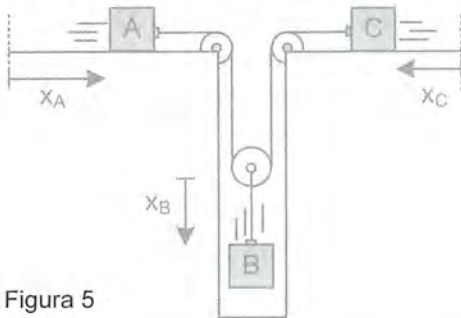


Figura 5

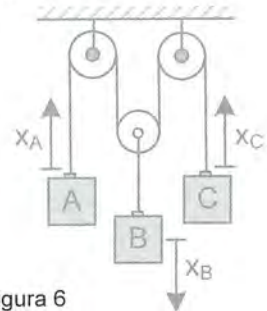


Figura 6

Sempre que as caixas A e C sofrerem deslocamentos x_A e x_C que levem o cordão a adquirir uma folga " $x_A + x_C$ " (como ocorre nas Figuras 5 e 6), a polia suspensa envolta por esse cordão, assim como a caixa B presa a ela, se deslocará apenas a metade dessa folga, conforme explicado em detalhes na Figura 4. Matematicamente, vem:

$$x_B = \frac{\text{folga}}{2} \Rightarrow x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \quad (\text{eq 27})$$

Usando a regra prática de derivação, podemos substituir x por v na relação eq21 acima:

$$v_B = \frac{v_A + v_C}{2} \quad (\text{eq28})$$

Da mesma forma, substituindo v por a na relação eq 22, temos:

$$a_B = \frac{a_A + a_C}{2} \quad (\text{eq29})$$

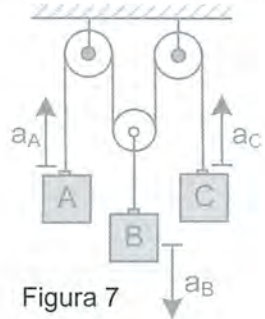


Figura 7

As relações eq27, eq28 e eq29, que se aplicam aos sistemas das Figuras 5, 6 e 7, foram determinadas de modo mais prático e menos formal do que as suas equivalentes eq15, eq20 e eq23.

Adicionalmente, são mais fáceis de serem utilizadas do que suas equivalentes, pois tratam automaticamente dos módulos das grandezas cinemáticas, sem requerer uso de sinais algébricos e eixos orientados.

7.4 CASO 3: FIOS INEXTENSÍVEIS, DUAS POLIAS MÓVEIS

Seguindo o mesmo princípio utilizado nas Figuras 5 e 6, o prof. Renato Brito pode facilmente encontrar as relações cinemáticas que decorrem dos vínculos geométricos presentes no sistema da Figura 8 a seguir.

Quando a caixa A sobe uma distância $x_A \uparrow$ (Figura 8), uma folga *de igual comprimento* é gerada no fio que envolve a polia B, fazendo com que esta desça uma distância $x_B \downarrow$ igual à metade da folga, isto é:

$$x_B = \frac{x_A}{2} \quad (\text{eq 30})$$

A descida da polia B, por sua vez, provoca uma folga igual a x_B no fio que envolve a polia C, levando esta última a descer uma distância x_C igual à metade dessa folga, portanto:

$$x_C = \frac{x_B}{2} \stackrel{\text{eq24}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{x_A}{2} \Rightarrow x_C = \frac{x_A}{4} \quad (\text{eq 31})$$

Usando a regra prática de derivação, podemos substituir x por v na relação acima:

$$v_C = \frac{v_A}{4} \quad (\text{eq 32})$$

Da mesma forma, substituindo v por a na relação anterior, temos:

$$a_C = \frac{a_A}{4} \quad (\text{eq 33})$$

As expressões eq 25, eq 26 e eq 27 relacionam os deslocamentos, as velocidades instantâneas e as acelerações instantâneas das caixas A, B e C em qualquer instante do movimento desse sistema e só podem ser determinadas a partir desses argumentos geométricos.

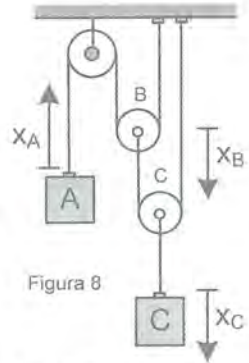


Figura 8

7.5 CASO 4: FIO INEXTENSÍVEL, VARIANTE COM DUAS POLIAS MÓVEIS

Na Figura 9 adiante, a caixa A sofrerá um deslocamento x_A para a esquerda, acarretando um correspondente deslocamento x_B à segunda caixa no mesmo sentido. Qual a relação entre as grandezas cinemáticas dessas duas caixas ?

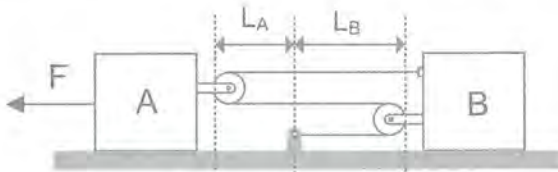


Figura 9a

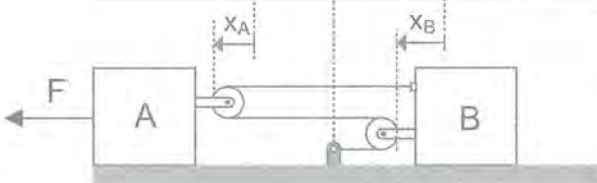


Figura 9b

Mais uma vez, determinaremos as relações cinemáticas de maneira informal e prática, usando o vínculo geométrico associado ao fato de que o comprimento do fio permanece constante ($L_{\text{inicial}} = L_{\text{final}}$) durante o deslocamento das caixas.

O comprimento do fio na Figura 9a vale:

$$L_{\text{inicial}} = L_B + L_B + L_A + L_A + L_B \Rightarrow L_{\text{inicial}} = 3 \cdot L_B + 2 \cdot L_A \quad (\text{eq 34})$$

Comparando as Figuras 9a e 9b, percebemos que, durante o deslocamento das caixas, a distância " L_A " passa a valer " $L_A + x_A$ ", ao passo que " L_B " é reduzida a " $L_B - x_B$ ". Assim, o comprimento da corda (Figura 9b) passa a valer :

$$L_{\text{final}} = 3 \cdot (L_B - x_B) + 2 \cdot (L_A + x_A) \quad (\text{eq 35})$$

Do vínculo geométrico, vem:

$$L_{\text{inicial}} = L_{\text{final}} \Rightarrow 3.L_B + 2.L_A = 3.(L_B - x_B) + 2.(L_A + x_A) \Rightarrow$$

$$3.x_B = 2.x_A \quad (\text{eq 36})$$

Usando a regra prática de derivação, podemos substituir x por v em eq 36:

$$3.v_B = 2.v_A \quad (\text{eq 37})$$

Finalmente, empregando mais uma vez a regra prática de derivação, podemos substituir v por a em eq 31:

$$3.a_B = 2.a_A \quad (\text{eq 38})$$

As expressões eq36, eq37 e eq38 relacionam os deslocamentos, as velocidades instantâneas e as acelerações instantâneas das caixas A e B, em qualquer instante do movimento desse sistema, e só podem ser determinadas a partir desses argumentos geométricos.

7.6 CASO 5: CORPOS RÍGIDOS DESLIZANDO – CASO SIMPLES

Na Figura 10a, vemos um prisma reto de base triangular isósceles, apoiado sobre dois cubos idênticos. Quando o prisma é abandonado do repouso, ele passa a descer verticalmente, percorrendo uma distância vertical y , ao mesmo tempo dt , em que cada cubo percorre uma distância horizontal x . (Figura 10b)

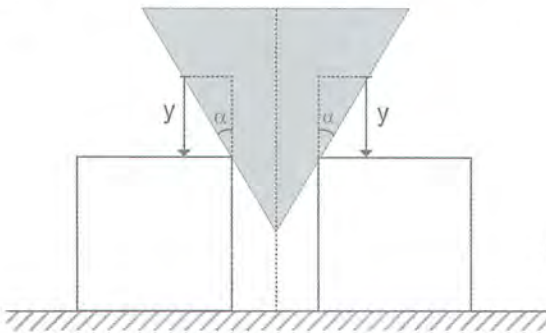


Figura 10a

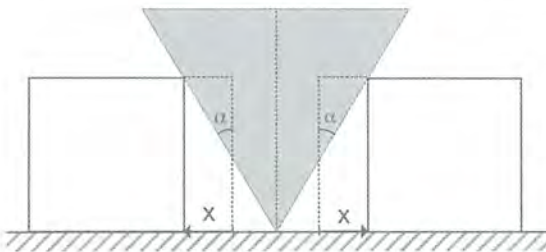


Figura 10b

Da geometria da figura, é fácil ver que: $\text{tg}\alpha = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y \cdot \text{tg}\alpha \quad (\text{eq39})$

Usando a regra prática de derivação, podemos substituir x por V_x e y por V_y em eq 39, visto que $\text{tg}\alpha$ é uma constante real:

$$v_x = v_y \cdot \operatorname{tg}\alpha \quad (\text{eq40})$$

A expressão acima relaciona a velocidade dos cubos (v_x) com a velocidade de descida (v_y) do prisma, num mesmo instante do movimento.

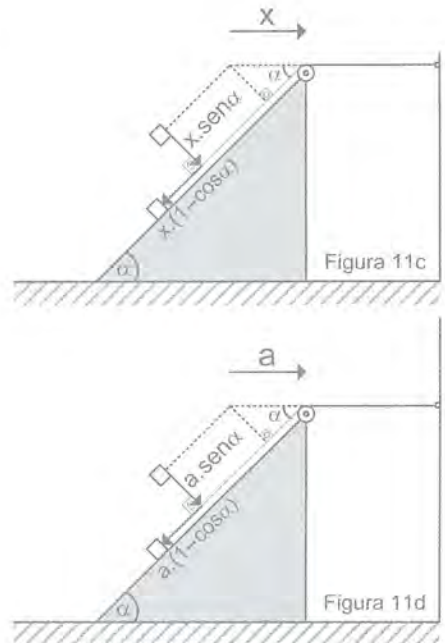
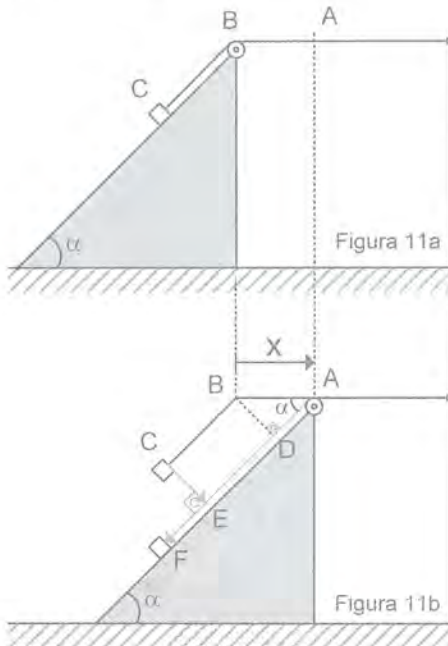
Finalmente, empregando, mais uma vez, a regra prática de derivação, podemos substituir V por a em eq 34:

$$a_x = a_y \cdot \operatorname{tg}\alpha \quad (\text{eq41})$$

A expressão acima relaciona a aceleração dos cubos (a_x) com a aceleração de descida (a_y) do prisma em qualquer instante do movimento. Mais uma vez, enfatizamos que as expressões eq 39, eq40 e eq41 só podem ser determinadas a partir desses argumentos geométricos.

7.7 CASO 6: CORPOS RÍGIDOS DESLIZANDO – CASO AVANÇADO

Considere a situação da Figura 11a, em que uma caixa se encontra apoiada sobre a superfície inclinada de um prisma, que pode se mover ao longo de uma superfície horizontal.



A caixa encontra-se conectada à parede vertical por meio de um fio inextensível, que passa por uma polia com dimensões desprezíveis. Se o sistema for abandonado a partir do repouso, o prisma adquirirá uma aceleração horizontal $\rightarrow a$ para a direita, no referencial da Terra (inercial).

A seguir, o prof. Renato Brito determinará a aceleração da caixa em relação à Terra, em função da aceleração a do prisma. Seja L o comprimento do trecho ABC do fio na Figura 11a. A geometria da Figura 11b permite escrever:

$$L = AB + BC = x + BC \Rightarrow BC = DE = L - x \quad (\text{eq 42})$$

$$\text{No } \triangle ABD: AD = x \cdot \cos\alpha \quad (\text{eq 43}) \quad \text{e} \quad BD = CE = x \cdot \sin\alpha \quad (\text{eq 44})$$

Quando o prisma se desloca em uma distância x para a direita (Figura 11b), o trecho ABC do fio assume o formato AF, embora o seu comprimento permaneça constante. Assim, podemos escrever (Figura 11b):

$$L = AD + DE + EF = x \cdot \cos\alpha + (L - x) + EF$$

$$L = x \cdot \cos\alpha + (L - x) + EF \Rightarrow EF = x - x \cdot \cos\alpha \Rightarrow EF = x \cdot (1 - \cos\alpha) \quad (\text{eq 45})$$

Do exposto, concluímos que, sempre que o prisma se deslocar $x \rightarrow$ para a direita, a caixa sobre a rampa se deslocará $x \cdot \sin\alpha$ na direção CE (Figura 11c) e $x \cdot (1 - \cos\alpha)$ na direção EF, deslocamentos esses sempre tomados em relação à Terra. Finalmente, da regra prática de derivação, trocando x por v e, em seguida, v por a nas expressões eq44 e eq45, podemos dizer que:

Conclusão

Se o prisma (Figura 11d) apresentar uma aceleração horizontal $\rightarrow a$ para a direita, no referencial da Terra, a caixa apresentará as acelerações $a \cdot \sin\alpha$ na direção CE e $a \cdot (1 - \cos\alpha)$ na direção EF, todas em relação à Terra (referencial inercial).

Profinho..... mas não tem como achar essas acelerações da caixa só pelas leis de Newton não? Temos que recorrer à geometria inevitavelmente?



Sim, temos que recorrer à geometria inevitavelmente.

Claudete, os resultados que acabamos de obter são conseqüências do vínculo geométrico (associado ao fato de que o comprimento total do fio permanece constante durante o movimento dos corpos) e só podem ser obtidos a partir desses argumentos geométricos. Em outras palavras, é impossível se chegar a esses resultados fazendo uso exclusivo das relações entre forças e acelerações decorrentes das leis de Newton do movimento. Quando essa mesma situação problema for analisada no referencial não-inercial (pags 160 e 161), o vínculo geométrico será bem mais simples. Essa é uma das inúmeras vantagens de se aprender a trabalhar nesse referencial, que será estudado nos capítulos 4 e 5.

8 Respostas e Soluções



Questão 1 – A Super Mosca

Solução: Se os trens se movem com velocidades 60 km/h e 40 km/h em sentidos opostos, eles se aproximam mutuamente com uma velocidade $60 + 40 = 100$ km/h. Assim, se a distância inicial entre eles vale 500 km, eles vão se encontrar após $500 / 100 = 5$ h de viagem. Durante essas 5h de viagem, a abelha está percorrendo 70 km a cada 1 hora, portanto, ela percorrerá $5 \times 70 = 350$ km em 5 h de viagem. Você não estava pensando em calcular pedacinho por pedacinho, estava ? ☺

Questão 2 – Zenon de Eléia e o Paradoxo de Aquiles - Solução

a) Pelo enunciado, vemos que a tartaruga sofre deslocamentos sempre 10 vezes menores do que Aquiles, no mesmo intervalo de tempo, o que nos permite concluir que a velocidade da tartaruga é 10 vezes menor do que a velocidade de Aquiles, ou seja 0,5 m/s. Assim, as funções horárias da posição dos movimentos uniformes de Aquiles e da tartaruga (no SI) são:

$$S_A = S_0 + v_A \cdot t = 0 + 5 \cdot t \Rightarrow S_A = 5 \cdot t \quad (\text{eq1})$$

$$S_T = S_0 + v_T \cdot t = 1000 + 0,5 \cdot t \Rightarrow S_T = 1000 + 0,5 \cdot t \quad (\text{eq2})$$

Igualando-se as posições escalares dos móveis, vem:

$$\begin{aligned} S_A = S_T &\Rightarrow 5 \cdot t = 1000 + 0,5 \cdot t \Rightarrow 4,5 \cdot t = 1000 \Rightarrow \\ t &= 2000 / 9 = 222,222222... \text{ segs.} \end{aligned}$$

Eles se encontrarão no instante determinado acima.

Esse tempo de encontro também poderia ter sido encontrado usando a teoria das progressões geométricas. Para percorrer os primeiros 1000 m, Aquiles gasta $1000 / 5 = 200$ segs. Para percorrer os próximos 100 m, aqueles leva $100 / 5 = 20$ s. Para percorrer os próximos 10 m, Aquiles leva $10 / 5 = 2$ segs. Assim, procedendo dessa forma, ilimitadamente, vemos que o tempo total gasto por Aquiles até que a distância entre ele e a tartaruga chegue a zero, é dado por:

$$t = 200 \text{ s} + 20 \text{ s} + 2 \text{ s} + 0,2 \text{ s} + \dots$$

Usando a fórmula do limite da soma dos termos da P.G. infinita, temos:

$$t = S_N = \frac{a_1}{1-q} = \frac{200}{1-\frac{1}{10}} = \frac{200}{\frac{9}{10}} = \frac{2000}{9} \text{ m} = 222,2222\dots \text{segs}$$

b) A distância percorrida por Aquiles nesse intervalo de tempo é dada por:

$$\Delta S_{\text{Aquiles}} = v_A \cdot t = 5 \text{ m/s} \times (2000/9) \text{ s} = 10.000/9 \text{ m} = 1111,1111\dots \text{m}$$

A distância percorrida por Aquiles até alcançar a tartaruga também poderia determinar pelo limite da soma da P.G. infinita abaixo:

$$S_N = 1000 \text{ m} + 100 \text{ m} + 10 \text{ m} + 1 \text{ m} + 0,1 \text{ m} + \dots$$

Usando a fórmula do limite da soma dos termos da P.G. infinita, temos:

$$\Delta S_{\text{Aquiles}} = S_N = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1000}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1000}{\frac{9}{10}} = \frac{10000}{9} \text{ m} = 1111,1111\dots \text{m}$$

Esse tipo de problema era paradoxal para os antigos pois eles tinham dificuldades em lidar como somas de infinitos termos. Eles não entendiam que uma soma de infinitos termos poderia resultar um valor finito.

$$\text{c) } S_A - S_T = 12,5 \Rightarrow 5 \cdot t - (1000 + 0,5 \cdot t) = 12,5 \Rightarrow 4,5 \cdot t = 1012,5 \\ t = 225 \text{ segs.}$$

Aquiles estará 12,5 m à frente da tartaruga no instante $t = 225$ segs.

Questão 3

Solução: Inicialmente, arbitraremos um referencial e determinaremos uma função horária da posição para cada móvel:

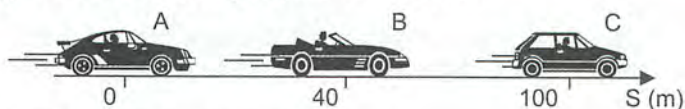


Figura 1

$$\begin{aligned} \text{Funções horárias: } S_A &= 50 \cdot t \\ S_B &= 40 + 20 \cdot t \\ S_C &= 100 + 60 \cdot t \end{aligned}$$

O instante t que devemos determinar está esquematizado abaixo:

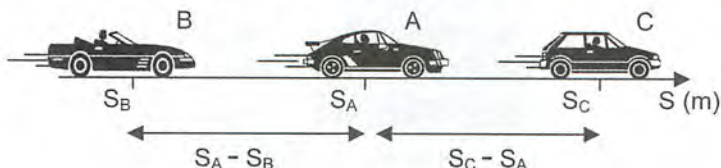


Figura 2

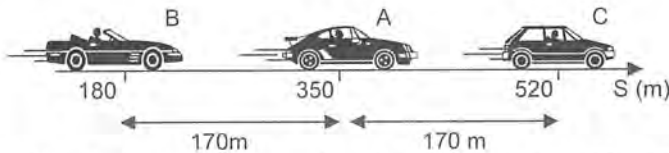
Para que o móvel A esteja a meia distância entre os móveis B e C, matematicamente, vem :

$$S_A - S_B = S_C - S_A \Rightarrow 2.S_A = S_B + S_C \Rightarrow S_A = \frac{S_B + S_C}{2}$$

Substituindo as funções horárias, vem :

$$50.t = \frac{(40 + 20.t) + (100 + 60.t)}{2} \Rightarrow 50.t = 70 + 40.t \Rightarrow t = 7s$$

Assim, no instante $t = 7s$, o móvel A estará exatamente entre os móveis B e C, a meia distância entre eles, conforme esquematizado a seguir:



Esse problema nos mostra o grande valor da ferramenta “**função horária da posição**”, que simplifica bastante a resolução de problemas de movimento.

Questão 4 - Resposta: 250 m

Dica: Segue o mesmo raciocínio da questão 3. Note que a velocidade escalar do móvel C será negativa.

Questão 5 – As cruzadas

Solução: Fixaremos a origem do tempo ($t = 0$ h) no instante 8:00h do relógio citado na questão, para facilitar o equacionamento do problema. Assim, após essa normalização do relógio, o enunciado passa a ter o seguinte texto:

Quatro automóveis A, B, C, e D movem-se em uma estrada, todos com velocidade constante. A ultrapassa B no instante $t = 0$ h, ultrapassa C no instante $t = 1$ h e cruza com D no instante $t = 2$ h. D cruza com B no instante $t = 4$ h e com C no instante $t = 6$ h. Determine em qual instante B ultrapassou C.

Note que, sutilmente, o verbo *ultrapassar* no enunciado subentende móveis que se movem no mesmo sentido, ao passo que *cruzar* subentende móveis que se movem em sentidos opostos. Assim, as funções horárias das posições dos móveis A, B, C e D são dadas abaixo:

$$S_A = 0 + V_A.t \quad (\text{eq1})$$

$$S_B = 0 + V_B.t \quad (\text{eq2})$$

$$S_C = S_{OC} + V_C.t \quad (\text{eq3})$$

$$S_D = S_{OD} - V_D.t \quad (\text{eq4})$$

Note que, no instante $t = 0$ h, A ultrapassa B. Assim, A e B têm posições iniciais idênticas $S_{OA} = S_{OB} = 0$ m.

Como A ultrapassa C em $t = 1$ h, vem:

$$S_A = S_C \Rightarrow 0 + V_A \cdot 1 = S_{OC} + V_C \cdot 1 \Rightarrow V_A - V_C = S_{OC} \quad (\text{eq5})$$

Como A ultrapassa D em $t = 2$ h, vem:

$$S_A = S_D \Rightarrow V_A \cdot 2 = S_{OD} - V_D \cdot 2 \Rightarrow V_A + V_D = \frac{S_{OD}}{2} \quad (\text{eq6})$$

Como D cruza com B em $t = 4$ h, vem:

$$S_B = S_D \Rightarrow V_B \cdot 4 = S_{OD} - 4 \cdot V_D \Rightarrow V_B + V_D = \frac{S_{OD}}{4} \quad (\text{eq7})$$

Como D cruza com C em $t = 6$ h, vem:

$$S_C = S_D \Rightarrow S_{OC} + 6 \cdot V_C = S_{OD} - 6 \cdot V_D \Rightarrow V_C + V_D = \frac{S_{OD} - S_{OC}}{6} \quad (\text{eq8})$$

Subtraindo, membro a membro, as equações eq6 e eq5, vem:

$$V_D + V_C = \frac{S_{OD}}{2} - S_{OC} \quad (\text{eq9})$$

Comparando eq8 e eq9, vem: $\frac{S_{OD}}{2} - S_{OC} = \frac{S_{OD} - S_{OC}}{6} \Rightarrow S_{OD} = \frac{5 \cdot S_{OC}}{2}$ (eq10)

Para achar o instante t em que B ultrapassou C, igualamos suas posições escalares:

$$S_B = S_C \Rightarrow V_B \cdot t = S_{OC} + V_C \cdot t \Rightarrow t = \frac{S_{OC}}{V_B - V_C}$$

onde o denominador $V_B - V_C$ pode ser obtido subtraindo-se as equações eq7 e eq8 membro a membro. Assim, vem:

$$t = \frac{S_{OC}}{V_B - V_C} = \frac{S_{OC}}{\frac{S_{OD}}{4} - \frac{S_{OD} - S_{OC}}{6}} = \frac{12 \cdot S_{OC}}{2 \cdot S_{OC} + S_{OD}} \stackrel{\text{eq10}}{=} \frac{12 \cdot S_{OC}}{2 \cdot S_{OC} + \frac{5}{2} S_{OC}} = \frac{12}{4,5}$$

$$t = \left(2 + \frac{2}{3}\right) \text{h} = 2\text{h} + \frac{2}{3} \times 60\text{min} = 2\text{h}40\text{min}$$

Voltando para o relógio original da questão:

Concluimos que B ultrapassou C 2h e 40min após o instante $t = 0$ h, ou seja, 2h e 40min após as 8:00h, portanto, às 10h40min no relógio original da questão.

Resposta Correta: letra C

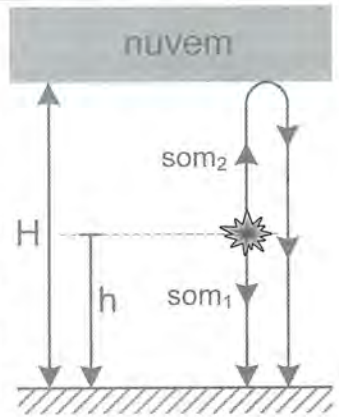
Questão 6 - Eco nas nuvens

Solução: Seja H a altura da nuvem e h a altura em que o rojão explodiu, todos medidos em relação ao solo. O som da explosão (som_1) percorre a distância h com velocidade v em t_1 segundos, o que nos permite escrever:

$$h = v \cdot t_1 \quad (\text{eq1})$$

Uma outra parcela do som (som_2) da explosão sobe percorrendo a distância $H-h$ até atingir a nuvem, onde é refletida e desce percorrendo a altura H até chegar ao observador no solo. Esse percurso total de comprimento $H + (H - h)$ é percorrido pelo som com velocidade v em t_2 segundos, o que nos permite escrever:

$$H + H - h = v \cdot t_2 \quad (\text{eq2})$$

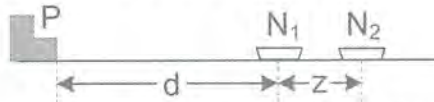


Substituindo eq1 em eq2, vem:

$$H + H - h = v \cdot t_2 \quad \Rightarrow \quad H + H - v \cdot t_1 = v \cdot t_2 \quad \Rightarrow \quad H = \frac{v \cdot (t_1 + t_2)}{2}$$

Questão 7

Solução: No instante $t = 0s$, o som é emitido no porto P e inicia sua propagação simultaneamente no ar e na água.



No instante $t = t_1$ o som que se propaga na água atinge o navio quando ele se encontra na posição N_1 , de forma que:

$$d = V_G \cdot t_1 \quad (\text{eq1})$$

No instante $t = t_2$ o som que se propaga no ar atinge o navio quando ele se encontra na posição N_2 , de forma que:

$$(d + z) = V_R \cdot t_2 \quad (\text{eq2})$$

Do enunciado da questão, temos que: $t_2 - t_1 = \Delta t$ (eq3)

A distância z que o navio percorre, nesse intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ é tal que:

$$z = V_N \cdot \Delta t \quad (\text{eq4})$$

Isolando t_1 e t_2 em eq1 e eq2 e substituindo em eq3, vem:

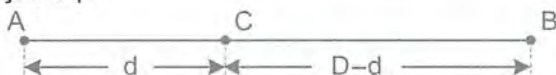
$$\Delta t = t_2 - t_1 = \left(\frac{d+z}{V_R} \right) - \left(\frac{d}{V_G} \right) \stackrel{(\text{eq4})}{=} \left(\frac{d + V_N \cdot \Delta t}{V_R} \right) - \left(\frac{d}{V_G} \right)$$

Desenvolvendo e reduzindo os termos semelhantes, encontramos:

$$d = \frac{V_G \cdot (V_R - V_N) \cdot \Delta t}{(V_G - V_R)}$$

Questão 8

Solução: Seja D a distância desejada entre os pontos A e B. O som do disparo em A leva t_1 segundos para atingir o ponto C, o que nos permite escrever a relação eq1.



O tempo total necessário para que a bala disparada em A atinja o alvo em B e o som do impacto retorne de B a ponto C é dado por t_2 (veja eq2).

$$t_1 = \frac{d}{v_S} \quad (\text{eq1})$$

$$t_2 = \frac{D}{v_P} + \frac{D-d}{v_S} \quad (\text{eq2})$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad (\text{eq3})$$

Segundo o observador em C, o tempo que decorre entre a chegada do som proveniente de A e o som proveniente do impacto em B vale Δt , o que nos leva à relação eq3. A partir dessas relações, facilmente encontramos:

$$D = \left(\frac{v_P}{v_P + v_S} \right) \cdot (v_S \cdot \Delta t + 2d)$$

Questão 9

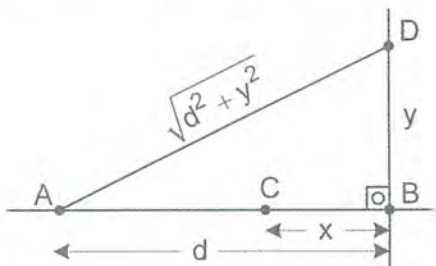
Solução:

a) O observador em C ouve simultaneamente o som do estampido em A e o som do impacto da bala com o alvo em B. Isso significa que o tempo t_1 que o som do estampido leva para percorrer a distância AC é igual ao tempo total t_2 gasto pela bala ir de A até B e o som produzido em B retornar ao ponto C, o que nos permite escrever:

$$t_1 = t_2 \Rightarrow \frac{d-x}{v_S} = \frac{d}{v} + \frac{x}{v_S}$$

Isolando o valor de x , vem:

$$x = \frac{d}{2} \left(1 - \frac{v_S}{v} \right) = \frac{1200}{2} \left(1 - \frac{340}{680} \right) = 300\text{m}$$



b) O observador em D ouve simultaneamente o som do estampido em A e o som do impacto da bala com o alvo em B. Isso significa que o tempo t_3 que o som do estampido leva para percorrer a distância AD é igual ao tempo total t_4 gasto pela bala ir de A até B e o som produzido em B atingir o ponto C, o que nos permite escrever:

$$t_3 = t_4 \Rightarrow \frac{\sqrt{d^2 + y^2}}{v_s} = \frac{d}{v} + \frac{y}{v_s}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros e isolando o valor de y, vem:

$$y = \frac{d}{2} \left(\frac{v}{v_s} - \frac{v_s}{v} \right) = \frac{1200}{2} \left(\frac{680}{340} - \frac{340}{680} \right) \Rightarrow y = 900\text{m}$$

Questão 10 - Resposta: alternativa A

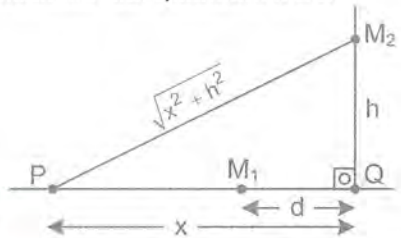
Solução: Essa questão segue o mesmo raciocínio das questões 8 e 9.

Para o primeiro aparelho M_1 , temos:

$$\frac{x-d}{v_s} = \frac{x}{v} + \frac{d}{v_s} \Rightarrow d = \frac{(v-v_s) \cdot x}{2v}$$

Para o aparelho M_2 , temos:

$$\frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{v_s} = \frac{x}{v} + \frac{h}{v_s} \Rightarrow h = \frac{(v^2 - v_s^2) \cdot x}{2 \cdot v \cdot v_s}$$



A razão pedida d/h pedida vale:
$$\frac{d}{h} = \frac{\frac{(v-v_s) \cdot x}{2v}}{\frac{(v^2 - v_s^2) \cdot x}{2 \cdot v \cdot v_s}} = \frac{(v-v_s) \cdot v_s}{(v^2 - v_s^2)}$$

Questão 11 – Móveis alinhados

1ª Solução: A Figura 4 mostra o instante inicial ($t = 0s$) do movimento dos móveis r, s e t, que movem-se alinhados (reta 1) com velocidades respectivamente iguais a v_r , v_s e v_t . Após um tempo T, os móveis terão percorrido as distâncias $dr = v_r.T$, $ds = v_s.T$ e $dt = v_t.T$, respectivamente, de forma a se manterem alinhados (reta 2) conforme a Figura 5.

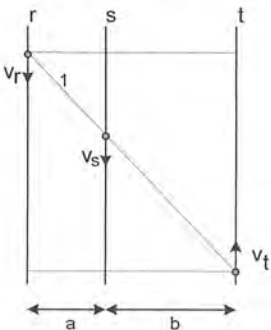


Figura 4

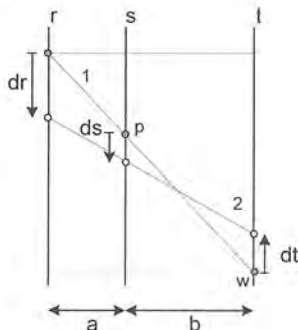


Figura 5

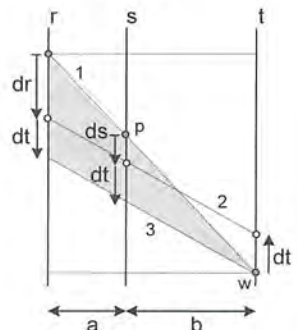


Figura 6

A fim de determinar uma relação geométrica entre as distâncias dr , ds e dt percorridas pelos móveis, tracemos uma reta 3, paralela à reta 2, passando pelo ponto w , conforme a Figura 6. Com isso, obteremos dois triângulos semelhantes (em destaque na Figura 6), de onde vem a relação:

$$\frac{b+a}{dr+dt} = \frac{b}{ds+dt}$$

Isolando ds na relação acima, encontramos: $ds = \frac{dr \cdot b - dt \cdot a}{(a+b)}$

Sendo $dr = vr \cdot T$, $ds = vs \cdot T$ e $dt = vt \cdot T$, vem:

$$vs \cdot T = \frac{vr \cdot T \cdot b - vt \cdot T \cdot a}{(a+b)} \quad \Rightarrow \quad vs = \frac{vr \cdot b - vt \cdot a}{(a+b)}$$

Questão 11 – Móveis alinhados

2ª Solução: A Figura 7 mostra o instante inicial ($t = 0$) do movimento dos móveis r , s e t no referencial da Terra. Efetuaremos uma mudança de referencial, passando do referencial da Terra para o referencial do móvel r . Para isso, precisamos parar o móvel r . Para fazermos isso, damos ao móvel r uma velocidade $-\vec{v}_r$ suficiente para cancelar a velocidade dele. Afinal, no referencial do móvel r , esse móvel certamente está parado, concorda ☺ ?

Para que todos os móveis sofram a mesma mudança de referencial Terra \rightarrow r , devemos também somar o vetor $-\vec{v}_r$ à velocidade dos móveis s e t . A figura 8 mostra essa etapa transitória em que todos os móveis ganham a velocidade adicional $-\vec{v}_r$. Na figura 9, achamos a velocidade resultante (soma vetorial) de cada móvel, já no referencial do móvel r . Nesse referencial, o móvel r está parado, o móvel s tem velocidade $vr - vs$ e o móvel t tem velocidade $vr + vt$.

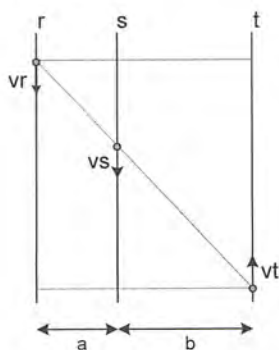


Figura 7

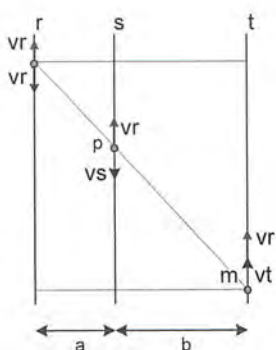


Figura 8

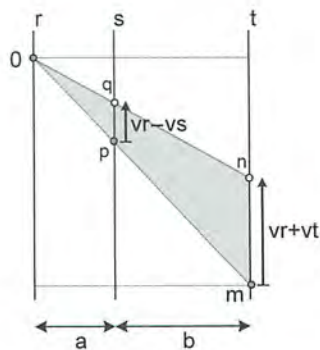


Figura 9

Na Figura 9, após um intervalo de tempo Δt , o móvel s vai de p para q , sofrendo um deslocamento $(vr - vs) \cdot \Delta t$. Simultaneamente, o móvel t vai de m para n , sofrendo um deslocamento $(vr + vt) \cdot \Delta t$. E o móvel r , por que ele

Na Figura 9, após um intervalo de tempo Δt , o móvel **s** vai de **p** para **q**, sofrendo um deslocamento $(v_r - v_s) \cdot \Delta t$. Simultaneamente, o móvel **t** vai de **m** para **n**, sofrendo um deslocamento $(v_r + v_t) \cdot \Delta t$. E o móvel **r**, por que ele não se move? Porque o móvel **r** está parado no referencial dele próprio, obviamente, certo ☺?

A condição de alinhamento dos móveis sempre é obtida por uma semelhança de triângulos. Na Figura 9, é fácil identificar dois triângulos semelhantes Δopq e Δomn . A semelhança de triângulos nos permite escrever:

$$\frac{a}{(v_r - v_s) \cdot \Delta t} = \frac{a+b}{(v_r + v_t) \cdot \Delta t}$$

Cancelando o termo Δt e reduzindo os termos semelhantes, determinamos a velocidade pedida v_s :

$$v_s = \frac{v_r \cdot b - v_t \cdot a}{(a+b)}$$

Questão 12 - Resposta: 8 m/s

Dica: veja a resolução da questão 11. Note que, se a distância da raia 1 até a raia 3 vale $3 - 1 = 2x$, então a distância da raia 1 até a raia 6 vale $6 - 1 = 5x$

Questão 13

Solução: Sejam v_1 e v_2 as velocidades com que as velas 1 e 2 são consumidas; e v_3 e v_4 as velocidades das sombras das velas projetadas nas paredes esquerda e direita respectivamente. Após t segundos, esses elementos percorreram distâncias iguais a $v_1 \cdot t$, $v_2 \cdot t$, $v_3 \cdot t$ e $v_4 \cdot t$ mostradas na Figura 10 abaixo:

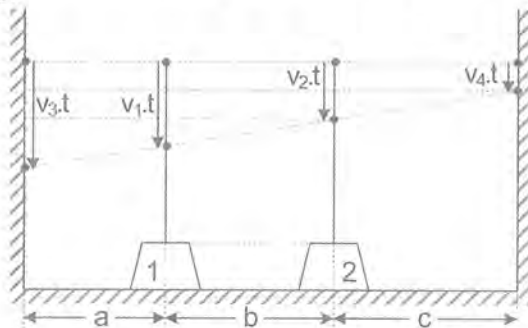


Figura 10

Como já sabemos, a condição de alinhamento dos móveis sempre é obtida por uma semelhança de triângulos. A semelhança entre os triângulos retângulos em destaque na Figura 11 nos permite escrever:

$$\frac{a+b}{(v_3 - v_2) \cdot t} = \frac{b}{(v_1 - v_2) \cdot t}$$

Isolando v_3 na expressão acima, vem: $v_3 = v_1 \cdot \frac{(a+b)}{b} - v_2 \cdot \frac{a}{b}$ (eq1)

Como a vela 1 queima todo o seu comprimento h num tempo t_1 , sua velocidade de queima v_1 é dada por: $v_1 = \frac{h}{t_1}$ (eq2)

Já a vela 2 queima todo o seu comprimento h num tempo t_2 , assim, sua velocidade de queima v_2 é dada por: $v_2 = \frac{h}{t_2}$ (eq3)

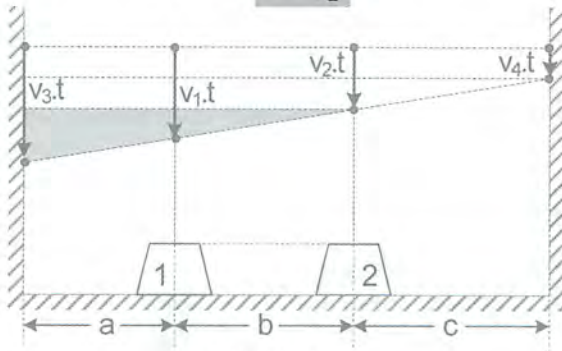


Figura 11

Substituindo eq2 e eq3 em eq1, vem: $v_3 = \frac{h}{t_1} \cdot \frac{(a+b)}{b} - \frac{h}{t_2} \cdot \frac{a}{b}$.

Reduzindo os termos semelhantes, vem: $v_3 = \frac{h}{b} \cdot \left(\frac{a+b}{t_1} - \frac{a}{t_2} \right)$

A expressão acima fornece a velocidade v_3 da sombra da vela projetada na parede esquerda.

A semelhança entre os triângulos retângulos em destaque na Figura 12 nos permite escrever:

$$\frac{b+c}{(v_1 - v_4) \cdot t} = \frac{c}{(v_2 - v_4) \cdot t}$$

Isolando v_4 na expressão acima, vem: $v_4 = v_2 \cdot \frac{(b+c)}{b} - v_1 \cdot \frac{c}{b}$ (eq4)

Substituindo eq2 e eq3 em eq4, vem: $v_4 = \frac{h}{t_2} \cdot \frac{(b+c)}{b} - \frac{h}{t_1} \cdot \frac{c}{b}$.

Reduzindo os termos semelhantes, vem: $v_4 = \frac{h}{b} \cdot \left(\frac{b+c}{t_2} - \frac{c}{t_1} \right)$

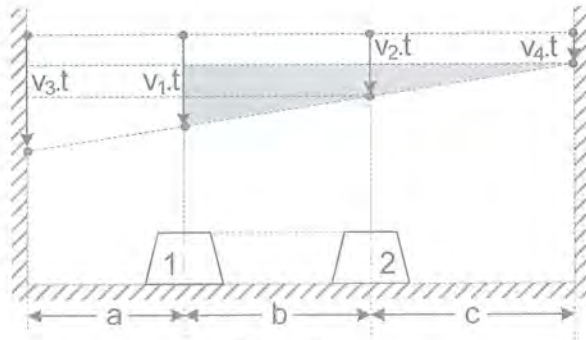


Figura 12

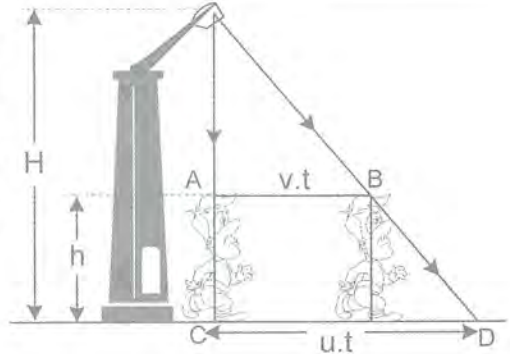
A expressão anterior fornece a velocidade v_4 da sombra da vela projetada na parede direita.

Questão 14 (Dica: veja as resoluções das questões 11 e 13)

Solução:

Enquanto a cabeça do pedestre percorre a distância $AB = v \cdot t$, a extremidade da sombra do pedestre projetada no chão, movendo-se com velocidade u , percorre a distância $CD = u \cdot t$. A semelhança de triângulos permite escrever:

$$\frac{H-h}{v \cdot t} = \frac{H}{u \cdot t} \Rightarrow u = \frac{v \cdot H}{H-h}$$



Questão 15

Solução: Seja $3D$ a distância entre as estações A e B.

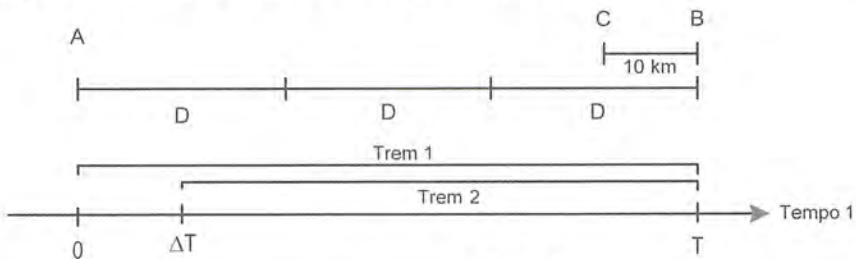


Figura 13

O trem 1 passou pela estação A no instante $t = 0$ e alcançou a estação B no instante $t = T$ (veja Figura 13), tendo percorrido a distância $3D$, deslocando-se em movimento uniforme a 54 km/h .

$$3D = 54 \cdot (T - 0) \quad (\text{eq1})$$

O trem 2 passou por A no instante $t = \Delta T$ e alcançou a estação B no instante $t = T$, tendo percorrido a distância $3D$, deslocando-se em movimento uniforme a 72 km/h .

$$3D = 72 \cdot (T - \Delta T) \quad (\text{eq2})$$

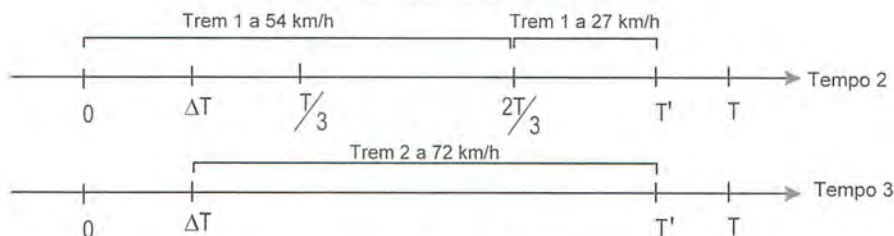


Figura 14

Acontece, entretanto, que, após ter percorrido $2/3$ da distância que separa as duas estações, o trem 1 reduz sua velocidade (54 km/h) à metade (27 km/h) e, em conseqüência, é ultrapassado pelo trem 2 num ponto C (veja a Figura 13) situado a 10 km antes da estação B.

Portanto, nesse novo episódio, cada trem andou apenas de A até C, percorrendo somente a distância $AC = 3D - 10$.

Descrição do movimento do trem 1 no percurso AC, conforme a “seta do tempo 2” na Figura 14.

$$3D - 10 = 54 \cdot \frac{2T}{3} + 27 \cdot \left(T' - \frac{2T}{3} \right) \quad (\text{eq3})$$

Descrição do movimento do trem 2 no percurso AC conforme a “seta do tempo 3” na Figura 14.

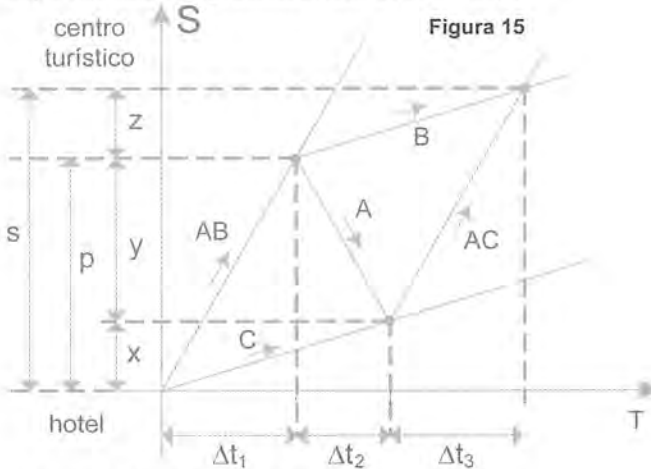
$$3D - 10 = 72 \cdot (T' - \Delta T) \quad (\text{eq4})$$

A seguir, Isolando as incógnitas T e ΔT , nas equações eq1 e eq2, assim como T' , na equação eq4, todos em função de D , e substituindo as relações encontradas na relação eq3, obteremos uma equação do 1° grau na variável D . Resolvendo, encontramos a resposta pedida: $3D = 37,5 \text{ km}$.

Questão 16 – O problema dos três turistas

Solução: Sejam V_B e V_P as velocidades escalares constantes da bicicleta e dos pedestres, respectivamente. O gráfico $S \times T$ acima mostra que, inicialmente, A (dono da bicicleta) dá carona para B até um certo ponto da estrada (trecho AB), enquanto C inicia o movimento a pé (trecho C). Em seguida, B desce da bicicleta e prossegue a pé rumo ao centro turístico (trecho B), enquanto A volta (trecho A) para pegar C que já estava a caminho. Juntos, A e C prosseguem de bicicleta (trecho AC) e chegam ao centro turístico junto com B.

O gráfico $S \times T$, que representa esse movimento, é um paralelogramo, visto que velocidades iguais implicam inclinações iguais no plano $S \times T$. Todo paralelogramo é um quadrilátero com lados opostos congruentes e paralelos, dois a dois. Conseqüentemente, como os lados AB e AC são congruentes e igualmente inclinados em relação à horizontal, suas projeções horizontais Δt_1 e Δt_3 são congruentes, isto é, $\Delta t_1 = \Delta t_3$.



O percurso completo dura um tempo total:

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_1 = 2 \cdot \Delta t_1 + \Delta t_2.$$

Sejam V_B a velocidade da bicicleta e V_P a velocidade do pedestre. Observando o gráfico, vemos que:

p é a distância percorrida por AB , com velocidade V_B , num intervalo de tempo Δt_1 , ou seja, $p = V_B \cdot \Delta t_1$;

y é a distância percorrida por A , com velocidade V_B , num intervalo de tempo Δt_2 , ou seja, $y = V_B \cdot \Delta t_2$;

x é a distância percorrida por C , com velocidade V_P , num intervalo de tempo $\Delta t_1 + \Delta t_2$, ou seja, $x = V_P \cdot (\Delta t_1 + \Delta t_2)$.

Como $p = x + y$, vem: $V_B \cdot \Delta t_1 = V_P \cdot (\Delta t_1 + \Delta t_2) + V_B \cdot \Delta t_2$

$$20 \cdot \Delta t_1 = 4 \cdot (\Delta t_1 + \Delta t_2) + 20 \cdot \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_1 = 3 \cdot \Delta t_2 / 2 \quad (\text{eq1})$$

Observando novamente o gráfico, vemos que a distância do hotel ao centro turístico ($s = 8$ km) vale $s = p + z$;

z é a distância percorrida por B , com velocidade V_P , num intervalo de tempo $\Delta t_1 + \Delta t_2$, ou seja, $z = V_P \cdot (\Delta t_1 + \Delta t_2)$;

$$s = p + z \Rightarrow 8 = V_B \cdot \Delta t_1 + V_P \cdot (\Delta t_1 + \Delta t_2) \quad (\text{eq2})$$

Resolvendo o sistema de equações eq1 e eq2, encontramos:

$$\Delta t_2 = (1/5)h = 12 \text{ min} \quad \text{e} \quad \Delta t_1 = (3/10)h = 18 \text{ min}$$

A duração total do percurso será:

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_1 = 2 \cdot \Delta t_1 + \Delta t_2 = 48 \text{ min.}$$

O segundo turista (B) deverá ser transportado de bicicleta até que faltem quantos km para chegar ao centro turístico? Em outras palavras, quanto vale z no gráfico?

$$z = V_P \cdot (\Delta t_1 + \Delta t_2) = \frac{4 \text{ km}}{h} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{10} \right) h \Rightarrow z = 2 \text{ km}$$

Comentário: É normal que você esteja surpreso com essa solução desse problema através do gráfico. Você está muito mais acostumado a soluções puramente algébricas do que a resoluções com interpretações gráfico-geométricas. Aconselho ao leitor, entretanto, que aprecie essa forma de resolver os problemas e tente se acostumar a ela. Incorpore essa idéia e tente usá-la sempre que possível. Soluções gráficas, em geral, são bem mais concisas e elegantes do que soluções puramente analíticas/algébricas e fazem de você um estudante de Física diferenciado. Elas lhe dão "uma visão além do alcance" ☺.

Questão 17 – Empresário na estação ferroviária

Solução: Acompanhe a narrativa a seguir, observando o gráfico da figura 16.

Em dias normais, o empresário e o carro da empresa fazem, respectivamente, os percursos AEH e FEH, até chegarem à empresa (H). No dia em que o empresário chegou 1h mais cedo à última estação (A), ele partiu a pé para a empresa, fazendo o percurso AB. O carro da empresa, fazendo o percurso FB, encontrou o empresário (em B) e retornaram juntos, fazendo o trecho BG e chegando à empresa 20 min antes do habitual (H).

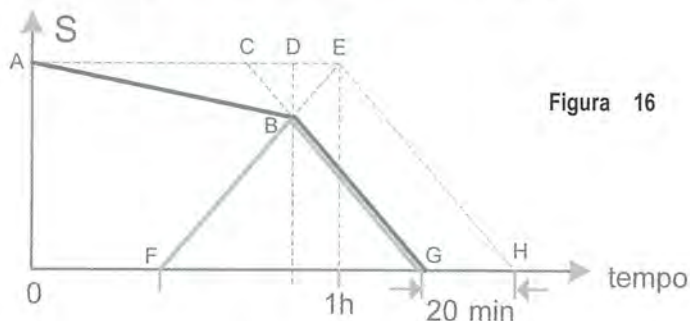


Figura 16

Segundo o enunciado, $GH = CE = 20 \text{ min}$. O tempo do movimento do empresário até o encontro com o carro em B é igual a:

$$AD = AE - DE = AE - CE / 2 = 1h - 10 \text{ min} = 50 \text{ min}$$

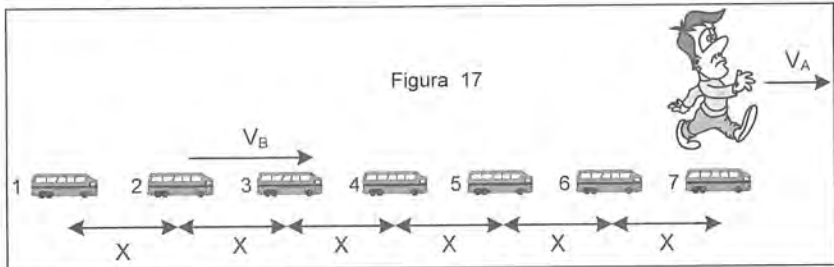
Questão 18 – Linha de bondes**Solução:** Considere os seguintes parâmetros:

D = distância entre as estações A e B;

T = tempo que o andarilho leva para andar de A até B;

 V_B = velocidade de cada bonde; V_A = velocidade do andarilho (observador);

X = distância que separa dois bondes consecutivos.



- De 15 min em 15 min, em cada estação, cruzam-se dois bondes:

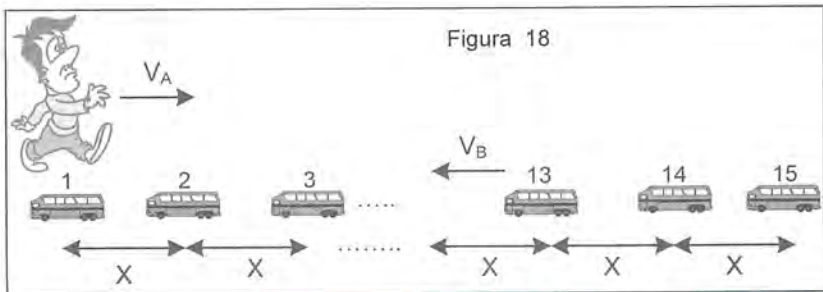
$$X = V_B \cdot 15 \quad (\text{eq 1})$$

- Durante o tempo T que o andarilho leva para caminhar de A a B, sete bondes passaram por ele, movimentando-se no mesmo sentido (veja Figura 17). Note na Figura 17 que a distância que separa o 1º bonde do 7º bonde vale $(7-1) \cdot x = 6x$. Usando velocidade relativa, vem:

$$(7 - 1) \cdot X = (V_B - V_A) \cdot T \Rightarrow 6 \cdot X = (V_B - V_A) \cdot T \quad (\text{eq 2})$$

- Durante o tempo T que o andarilho leva para caminhar de A a B, 15 bondes passaram por ele, movimentando-se no sentido contrário. Analogamente ao 1º caso, a distância que separa o 1º bonde do 15º bonde na Figura 18 vale $(15-1) \cdot x = 14x$. Usando velocidade relativa, vem:

$$(15 - 1) \cdot X = (V_B + V_A) \cdot T \Rightarrow 14 \cdot X = (V_B + V_A) \cdot T \quad (\text{eq 3})$$



Dividindo as relações eq3 e eq2, membro a membro, vem:

$$\frac{14}{6} = \frac{V_B + V_A}{V_B - V_A} \Rightarrow V_A = \frac{2 \cdot V_B}{5} \quad (\text{eq 4})$$

Substituindo eq1 e eq4 em eq2, vem:

$$6 \cdot (V_B \cdot 15) = \left(V_B - \frac{2 \cdot V_B}{5} \right) \cdot T \Rightarrow T = 150 \text{ min} = 2\text{h}30\text{min}$$

Então, o andarilho leva 2h30 min para mover-se de A até B. Quanto tempo Δt um bonde qualquer leva para percorrer a distância D que separa as estações A e B, movendo-se com velocidade V_B ?

$$\Delta t = \frac{D}{V_B} = \frac{V_A \cdot T}{V_B} = \frac{2}{5} \times 150 \text{ min} = 60 \text{ min} = 1\text{h}$$

Questão 19 – Linha de bondes generalizada

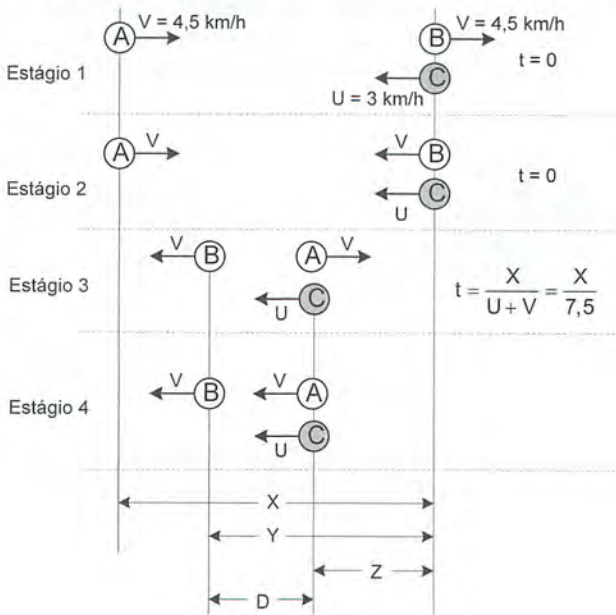
Resposta: a) $\left(\frac{q-p}{2} \right) \cdot T$ minutos, b) $\left(\frac{p+q-2}{2} \right) \cdot T$ minutos

Questão 20 – O guarda na linha de bondes

Resposta: letra b Dica: Veja a resolução da questão 18

Questão 21 – A coluna de soldados

Solução: Sejam A e B dois soldados consecutivos (distanciados de x). No instante $t = 0$, o oficial superior C passa pelo soldado B que, por sua vez, inverte imediatamente o sentido do movimento (estágios 1 e 2 da figura).



A partir do estágio 2, quanto tempo demora para que o oficial C cruze com o soldado A (estágio 3) ? Ora, se encontrarão no instante:

$$t = \frac{x}{u+v} = \frac{x}{7,5}$$

Nesse tempo t , quais as distâncias y percorrida pelo soldado B e z percorrida pelo oficial C (do estágio 2 ao estágio 3) ? Ora, B percorrerá uma distância y dada por:

$$y = v \cdot t = v \cdot \frac{x}{7,5} = \frac{4,5 \cdot x}{7,5}$$

ao passo que C percorrerá $z = u \cdot t = u \cdot \frac{x}{7,5} = \frac{3x}{7,5}$

No estágio 4, o soldado A inverte o sentido do movimento e passa a se mover a favor do movimento de B. A partir desse instante, a distância entre os 2 soldados A e B se manterá constante e igual a:

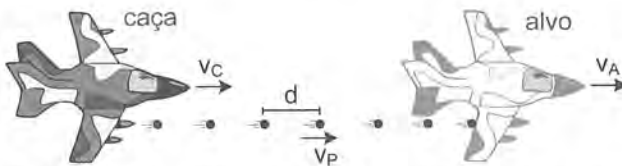
$$d = y - z = \frac{4,5 \cdot x}{7,5} - \frac{3 \cdot x}{7,5} = \frac{1,5 \cdot x}{7,5} = 0,2 \cdot x$$

Vemos que a distância entre 2 indivíduos consecutivos (A e B) na coluna de soldados inicialmente valia x e, após a inversão, passou a valer $0,2 \cdot x$.

Assim, quando toda a coluna de soldados inverter o seu sentido, o seu comprimento total passará de 600 m para $0,2 \times 600 \text{ m} = 120 \text{ m}$.

Questão 22 – O problema dos caças – Efeito Doppler

Solução: No referencial do caça, os projéteis se movem com velocidade $v_P - v_C$. Sendo T o tempo decorrido entre dois disparos consecutivos nesse referencial, a distância entre dois projéteis consecutivos nesse referencial vale $d = (v_P - v_C) \cdot T$.



No referencial do alvo, os projéteis se movem com velocidade $v_P - v_A$. Sendo T' o tempo decorrido entre dois impactos consecutivos de projéteis com o alvo nesse referencial, a distância entre dois projéteis consecutivos nesse referencial vale $d = (v_P - v_C) \cdot T$.

Entretanto, a distância entre dois projéteis consecutivos é a mesma, tanto no referencial do caça quanto no referencial do alvo, o que nos permite escrever:

$$(v_P - v_C) \cdot T = (v_P - v_A) \cdot T' \quad \Rightarrow \quad T' = T \cdot \left(\frac{v_P - v_C}{v_P - v_A} \right)$$

Esse problema é semelhante ao Efeito Doppler estudado na acústica. Os projéteis atuam como as frentes de onda sonora, v_p é a velocidade do som no ar, v_c é a velocidade da fonte sonora que está emitindo o som e v_A é a velocidade do observador que ouvirá o som. A frequência do som emitido pela fonte será $F = 1/T$ e a frequência do som recebido pelo observador será $F_{\text{apar}} = 1/T'$.

A única falha na analogia é que a velocidade adquirida pelos projéteis em relação ao ar (v_p) aumenta caso a velocidade do caça v_c em relação ao ar aumente. Esse fato não ocorre no caso das ondas sonoras, ou seja, a velocidade do som em relação ao ar não aumenta caso a velocidade da fonte sonora em relação ao ar aumente. Dizemos que a velocidade das ondas sonoras em relação ao ar independe da velocidade da fonte sonora que emite as ondas. Ela só depende das características do meio de propagação da onda (densidade do gás, atonicidade do gás, temperatura do gás etc).

Questão 23 – Método de Fizeau da roda dentada

$v = \frac{\omega L N}{2\pi n}$, dica: regra de 3, se durante o período $T=2\pi/\omega$ a roda gira um total de N dentes

(1 volta completa), quanto tempo Δt ela levará para girar apenas n dentes? O tempo L/V que a bala leva para ir de um disco ao outro é igual ao tempo que os discos levam para girar n dentes (indo do vão de ordem zero no 1º disco ao vão de ordem n no 2º disco).

Questão 24 – Rodas que parecem estar paradas

Solução

a) O ângulo entre dois raios consecutivos da roda dianteira vale $\varphi = 2\pi/N_1$ radianos. O observador terá a impressão de que a roda não está girando se, no intervalo de tempo entre duas imagens consecutivas ($\tau = 1/24$ s), a roda girar um ângulo α que seja múltiplo de φ , ou seja, $\alpha = k \cdot \varphi = 2\pi \cdot k/N_1$, onde k é um inteiro positivo ($k = 1, 2, 3, 4, \dots$). Por outro lado, o deslocamento angular α da roda num intervalo de tempo τ é $\alpha = \omega \cdot \tau$, onde ω é a velocidade angular da roda. Daí, temos:

$$\alpha = \omega \cdot \tau \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi k}{N_1} = \omega \cdot \tau \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi k}{N_1 \tau}$$

Assim, o observador no cinema terá a impressão de que a roda não está girando se a velocidade da carrugagem for valer:

$$v = \omega \cdot r = \frac{2\pi k r}{N_1 \tau}, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

Para $k = 1$, teremos o valor mínimo para essa velocidade, ou seja:

$$v_{\min} = \omega \cdot r = \frac{2 \times 3,14 \cdot 1 \times 0,35}{6 \times 1/24} = 8,8 \text{ m/s}$$

b) Para que as rodas dianteiras e traseiras pareçam estar simultaneamente paradas, devemos ter:

$$v = \frac{2\pi k_1 \cdot r}{N_1 \tau} = \frac{2\pi k_2 \cdot R}{N_2 \tau} \Rightarrow N_2 = N_1 \cdot \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{R}{r}$$

Para manter a velocidade da carruagem já determinada no item a, tomaremos

$k_1 = 1$. Sendo $R = 1,5 \cdot r$, vem:

$$N_2 = N_1 \cdot \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{R}{r} = 6 \times \frac{k_2}{1} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow N_2 = 9 \cdot k_2$$

Para que N_2 seja mínimo, tomemos $k_2 = 1$. Assim, teremos $N_2 = 9$. Assim, a roda traseira deverá ter pelo menos 9 raios para que ela também pareça estar parada, para a mesma velocidade da carruagem determinada no item a.

Questão 25 – Rodas que parecem girar ao contrário

Solução: Pela figura, vemos que o ângulo formado entre dois raios consecutivos nessa roda vale 30° . O observador terá a impressão de que a roda está parada se, no intervalo de tempo entre duas imagens consecutivas ($\tau = 1/24$ s), a roda girar um ângulo $\alpha = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ \dots$ etc.

Mas o que ocorrerá se a roda girar um ângulo de $+25^\circ$ (ou seja, 25° no sentido horário) entre duas imagens consecutivas? O observador terá a impressão de que a roda girou apenas 5° no sentido anti-horário naquele intervalo. Isso porque seu cérebro interpretará os $+25^\circ$ como sendo $+30^\circ - 5^\circ$, ou seja, 30° no sentido horário (que seu cérebro não perceberá) mais 5° no sentido anti-horário (que serão percebidos).

Nosso cérebro prefere enxergar sempre o menor giro que dá exatamente aquele mesmo efeito final. No caso acima, ele preferiu enxergar um giro de 5° no sentido anti-horário a um giro de 25° horário.

Da mesma forma, se a roda girar $+30^\circ + 20^\circ = +50^\circ$ (50° no sentido horário), no intervalo entre duas imagens consecutivas, o observador terá a impressão de que a roda girou apenas 10° no sentido anti-horário. Isso porque seu cérebro não interpretará os 50° como sendo $+30^\circ + 20^\circ$, mas sim, como sendo $+60^\circ - 10^\circ$, ou seja, 60° no sentido horário (que seu cérebro não perceberá) mais 10° no sentido anti-horário (que serão percebidos).

Nosso cérebro prefere enxergar sempre o menor giro que dá exatamente aquele mesmo efeito final. No caso acima, ele preferiu enxergar um giro de 10° no sentido anti-horário a um giro de 20° horário.

Se a roda girar $+60^\circ + 24^\circ = +84^\circ$ (84° no sentido horário), no intervalo entre duas imagens consecutivas, o observador terá a impressão de que a roda girou apenas 6° no sentido anti-horário. Isso porque seu cérebro não interpretará os 84° como sendo $+60^\circ + 24^\circ$, mas sim, como sendo $+90^\circ - 6^\circ$, ou

seja, 90° no sentido horário (que seu cérebro não perceberá) mais 6° no sentido anti-horário (que serão percebidos).

No caso acima, o cérebro preferiu enxergar um giro de 6° no sentido anti-horário a um giro de 24° horário.

Em geral, sempre que a roda girar no sentido horário um ângulo α tal que $15^\circ < \alpha < 30^\circ$, ele será interpretado pelo cérebro como um giro de $+30^\circ - (30^\circ - \alpha)$, ou seja, um giro de 30° no sentido horário (que seu cérebro não perceberá) mais um ângulo de " $30^\circ - \alpha$ " no anti-horário que será percebido pelo seu cérebro.

Dando um passo além, sempre que a roda girar no sentido horário um ângulo α tal que $15^\circ + 30.k < \alpha < 30^\circ + 30.k$, onde k é um inteiro não-negativo, esse giro será interpretado pelo cérebro como um giro de " $30^\circ - \alpha$ " no sentido anti-horário.

Logicamente que, para um giro α no sentido horário, tal que $0^\circ < \alpha < 15^\circ$, o cérebro não será enganado. Ele realmente verá um giro no sentido horário mesmo. Em linhas gerais, para um giro α no sentido horário tal que $0^\circ + 30.k < \alpha < 15^\circ + 30.k$, onde k é um inteiro não negativo, o cérebro não será enganado. Ele realmente perceberá um giro no sentido horário mesmo.

Em suma, que condição deve satisfazer o ângulo α que a roda gira, no intervalo de tempo entre duas imagens consecutivas, para dar a impressão de que ela está girando no sentido contrário? Ele deve satisfazer a condição abaixo:

$$15^\circ + 30.k < \alpha < 30^\circ + 30.k, \quad \text{com } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

$$30^\circ \cdot \left(k + \frac{1}{2}\right) < \alpha < 30^\circ \cdot (k + 1), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \quad (\text{eq1})$$

Em radianos, fica:

$$\frac{\pi}{6} \cdot \left(k + \frac{1}{2}\right) < \alpha < \frac{\pi}{6} \cdot (k + 1), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \quad (\text{eq2})$$

Se o disco tem velocidade angular $\omega = 2\pi f$, no intervalo de tempo τ entre duas imagens consecutivas ($\tau = 1/24$ s), ele gira um ângulo α dado por:

$$\alpha = \omega \cdot \tau = 2\pi f \cdot \tau \quad (\text{eq3})$$

Substituindo eq3 em eq2, vem:

$$\frac{\pi}{6} \cdot \left(k + \frac{1}{2}\right) < \alpha < \frac{\pi}{6} \cdot (k + 1), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$\frac{\pi}{6} \cdot \left(k + \frac{1}{2}\right) < 2\pi f \cdot \tau < \frac{\pi}{6} \cdot (k + 1) \quad (\text{eq4})$$

$$\frac{\pi}{6} \cdot \left(k + \frac{1}{2}\right) < 2\pi f \cdot \frac{1}{24} < \frac{\pi}{6} \cdot (k + 1)$$

Cancelando o π e multiplicando cada membro por 12, vem:

$$(2k + 1) < f < 2 \cdot (k + 1), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \text{ etc} \quad (\text{eq5})$$

Para $k = 0$, teremos: $1 \text{ Hz} < f < 2 \text{ Hz}$

Para $k = 1$, teremos: $3 \text{ Hz} < f < 4 \text{ Hz}$

Para $k = 2$, teremos: $5 \text{ Hz} < f < 6 \text{ Hz}$

Para $k = 3$, teremos: $7 \text{ Hz} < f < 8 \text{ Hz}$

Assim, vemos que a alternativa E da questão está correta.

Adicionalmente, como podemos generalizar a condição dada pela relação eq4, quando o ângulo entre dois raios adjacentes não for mais $\varphi = 30^\circ = \pi/6 \text{ rad}$? Ora, para uma roda com N raios, o ângulo entre dois raios adjacentes vale $\varphi = 2\pi/N$. Assim, trocando $30^\circ = \pi/6 \text{ rad}$ na relação eq4 por um ângulo um ângulo genérico $\varphi = 2\pi/N$, vem:

$$\frac{\pi}{6} \cdot \left(k + \frac{1}{2}\right) < 2\pi \cdot f \cdot \tau < \frac{\pi}{6} \cdot (k + 1) \quad (\text{eq6})$$

$$\frac{2\pi}{N} \cdot \left(k + \frac{1}{2}\right) < 2\pi \cdot f \cdot \tau < \frac{2\pi}{N} \cdot (k + 1)$$

$$\frac{1}{N \cdot \tau} \cdot \left(k + \frac{1}{2}\right) < f < \frac{1}{N \cdot \tau} \cdot (k + 1) \quad (\text{eq7})$$

Sendo τ o tempo decorrido entre duas imagens consecutivas (período), o parâmetro $n = 1/\tau$ fornece o número de imagens projetados na tela do cinema por segundo. Substituindo $\tau = 1/n$ na relação eq7, vem:

$$\frac{n}{N} \cdot \left(k + \frac{1}{2}\right) < f < \frac{n}{N} \cdot (k + 1), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \quad (\text{eq8})$$

Sendo n o número de imagens projetadas na tela por segundo e N o número de raios na roda da carruagem, a expressão eq8 acima nos fornece uma expressão geral para as possíveis frequências f de rotação da roda para que a mesma pareça estar girando no sentido contrário. No caso desse problema, temos $n = 24$ quadros/seg e $N = 12$ raios. Substituindo na relação geral dada por eq8, chegaremos ao resultado fornecido pela relação eq5 para o caso particular do presente problema.

Questão 26 – Rodas girando – Ilusão de óptica

Solução: A frequência de rotação da roda vale:

$$f = 900\text{RPM} = \frac{900 \text{ voltas}}{60 \text{ s}} = \frac{15 \text{ voltas}}{\text{s}} \times \frac{360 \text{ graus}}{1 \text{ voltas}} = \frac{5400 \text{ graus}}{\text{s}}$$

A roda gira quantos graus a cada flash ?

$$n = \frac{5400 \text{ graus}}{\text{seg}} \times \frac{1 \text{ seg}}{24 \text{ flashes}} = \frac{225 \text{ graus}}{\text{flash}}$$

Como a roda tem 6 raios, cada fatia da roda tem um ângulo central dado por $360 / 6 = 60$ graus.

Seguindo o mesmo raciocínio das questões 24 e 25, embora a roda gire 225 graus horários a cada flash, cérebro humano não perceberá todo esse giro a cada flash.

Para entender, note que o ângulo 225 graus pode ser escrito de duas formas:

$$225 = 180 + 45 \quad \text{ou} \quad 225 = 240 - 15$$

O cérebro humano prefere enxergar sempre o menor giro. Sendo $15^\circ < 45^\circ$, o cérebro interpretará que essa roda está girando **15° anti-horários** a cada flash.

Mas girar 15° anti-horários a cada flash significa girar com que frequência aparente ?

Ora, lembrando que a lâmpada pisca num ritmo de 24 flashes/seg, temos:

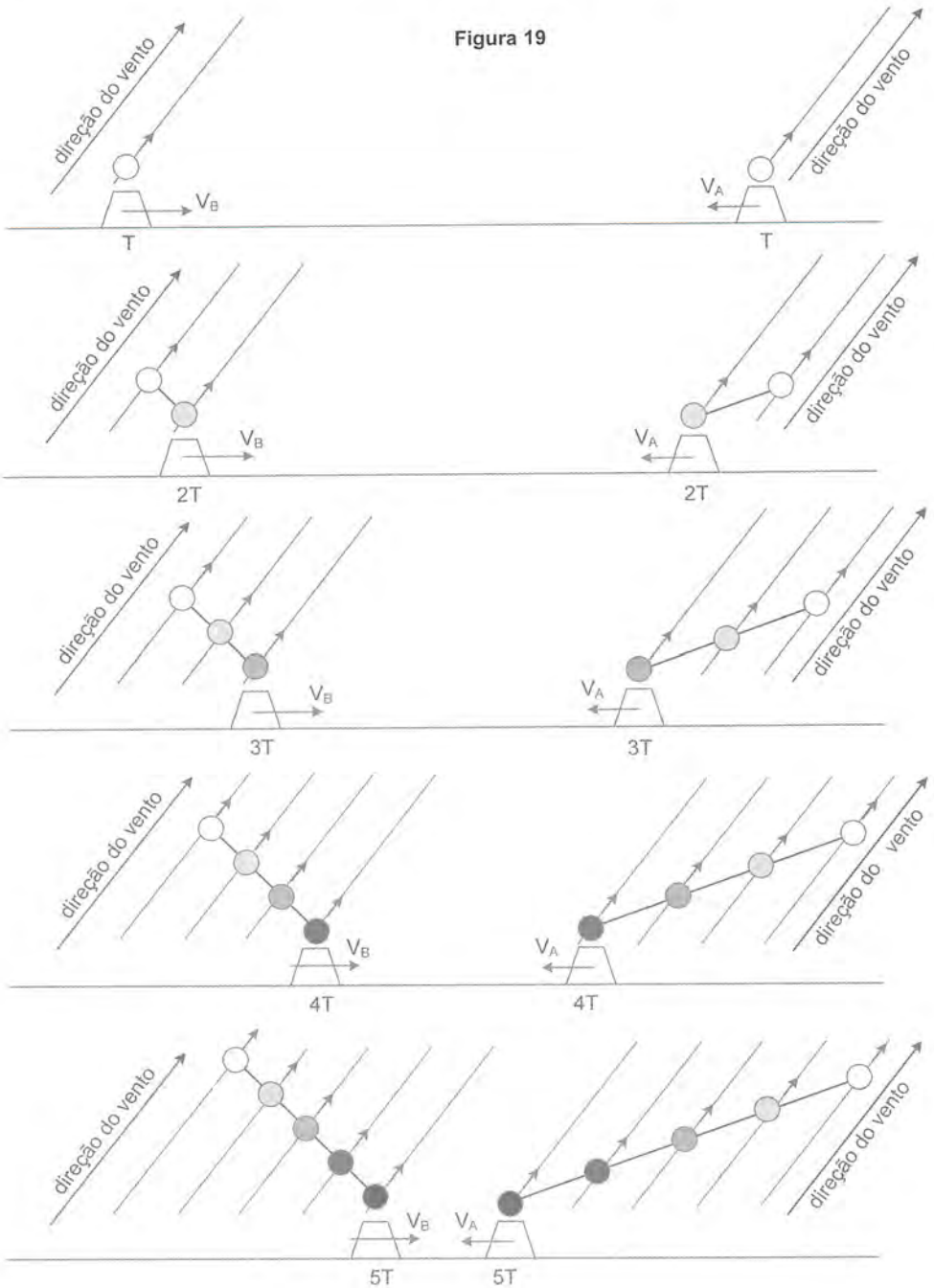
$$f_{\text{aparente}} = \frac{15 \text{ graus}}{\text{flash}} \times \frac{24 \text{ flash}}{1 \text{ seg}} \times \frac{1 \text{ volta}}{360 \text{ graus}} \times \frac{60 \text{ seg}}{1 \text{ min}} = \frac{60 \text{ voltas}}{\text{min}} = 60 \text{ rpm}$$

Questão 27 - Solução

Quando a fumaça do trem é emitida, ela passa automaticamente a ser arrastada pelo ar na direção e sentido do vento, com a velocidade do vento, visto que a fumaça tem massa (inércia) desprezível. A Figura 19 mostra uma seqüência de instantes T, 2T, 3T, 4T e 5T do movimento dos trens A e B, **antes de se cruzarem**, bem como o deslocamento da fumaça na direção do vento, à medida que vai sendo liberada pelo respectivo trem.

Após se cruzarem no ponto P (veja Figura 20), os trens A e B, bem como a fumaça liberada por eles durante o cruzamento, percorrem respectivamente os trechos PA, PB e PC (Figura 20) no mesmo intervalo de tempo Δt , de forma que $PA = V_A \cdot \Delta t$, $PB = V_B \cdot \Delta t$ e $PC = V_V \cdot \Delta t$.

Figura 19



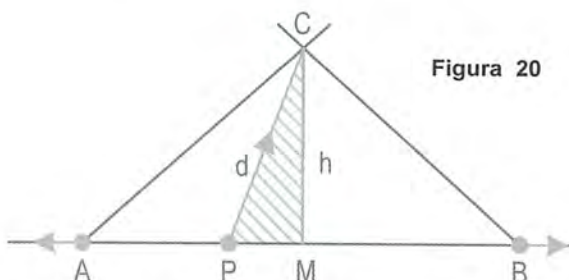


Figura 20

A direção PC na Figura 20, portanto, é a própria direção do vento que arrasta a fumaça com velocidade V_V .

$$V_A = 50,4 \text{ km/h} = 14 \text{ m/s}, \quad V_B = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$$

$$PA + PB = AB \Rightarrow V_A \cdot \Delta t + V_B \cdot \Delta t = 1360 \text{ m} \Rightarrow$$

$$14 \cdot \Delta t + 20 \cdot \Delta t = 1360 \text{ m} \Rightarrow \Delta t = 40 \text{ s}$$

$$\text{Assim: } PA = 14 \cdot \Delta t = 560 \text{ m}, \quad PB = 20 \cdot \Delta t = 800 \text{ m}$$

$$PM = PB - MB = 800 - 1360 / 2 = 120 \text{ m}$$

$$\Delta PMC: \text{ Pitágoras: } (PM)^2 + h^2 = d^2 \Rightarrow (120)^2 + (160)^2 = d^2 \Rightarrow d = PC = 200 \text{ m}$$

$$\text{Mas } d = PC = V_V \cdot \Delta t \Rightarrow 200 = V_V \cdot 40 \Rightarrow V_V = 5 \text{ m/s}$$

A velocidade do vento vale 5 m/s.

Questão 28 – Solução

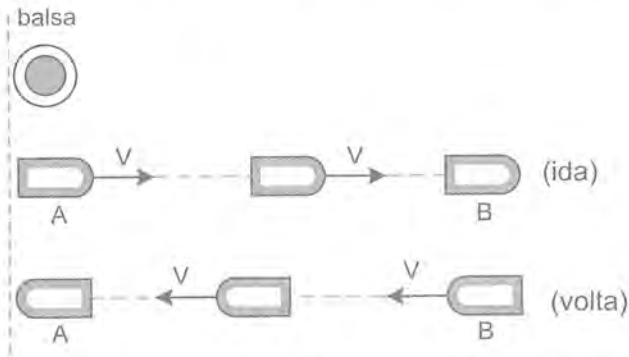
A resolução dessa questão demonstra como a escolha do referencial mais adequado pode simplificar bastante a análise de um problema de Física. Antes de iniciar a solução do problema, considere as seguintes informações, subentendidas no enunciado, mas que podem não ser conhecidas pelo estudante:

- *navegar rio acima* = navegar contra a correnteza;
- *navegar rio abaixo* = navegar a favor da correnteza;
- *balsa* = embarcação que move-se apenas arrastada pela correnteza, não possui motor;
- *velocidade acusada pelo velocímetro do barco a motor* = velocidade do barco em relação à água.

A chave é adotar o referencial na água, tomar todas as velocidades em relação à água inicialmente.

Nesse referencial, a balsa se encontra parada durante todo o episódio (a balsa não se move em relação à água). O barco se afasta da balsa durante 1h, percorrendo a distância AB com velocidade constante V (no referencial da água). Em seguida, o piloto do barco desliga o motor para conserto

durante 0,5 h, intervalo de tempo no qual barco, balsa e água permanecem parados (no referencial da água).



Após permanecer parado no ponto B durante 0,5 h (veja figura), o barco retorna com a mesma velocidade V de antes (no referencial da água), a fim de fazer percorrer na volta a mesma distância da ida ($AB = BA$) no mesmo tempo gasto anteriormente (1h) até alcançar novamente a balsa (que permaneceu parada em A o tempo todo).

Assim, o tempo total para o barco perfazer a distância $AB + BA$ vale:

$$\Delta t = 1\text{h (ida)} + 0,5\text{h (parado)} + 1\text{h (volta)} = 2,5\text{ h}$$

Conforme o enunciado afirma, porém, nesse intervalo de tempo de 2,5 h, a balsa percorre uma distância de 7,5 km em relação às margens, movendo-se arrastada pela correnteza e, portanto, com a velocidade da correnteza (no referencial da Terra). Assim, qual a velocidade da correnteza (em relação à Terra)?

$$V_c = \frac{D}{\Delta t} = \frac{7,5\text{ km}}{2,5\text{ h}} = 3\text{ km/h}$$

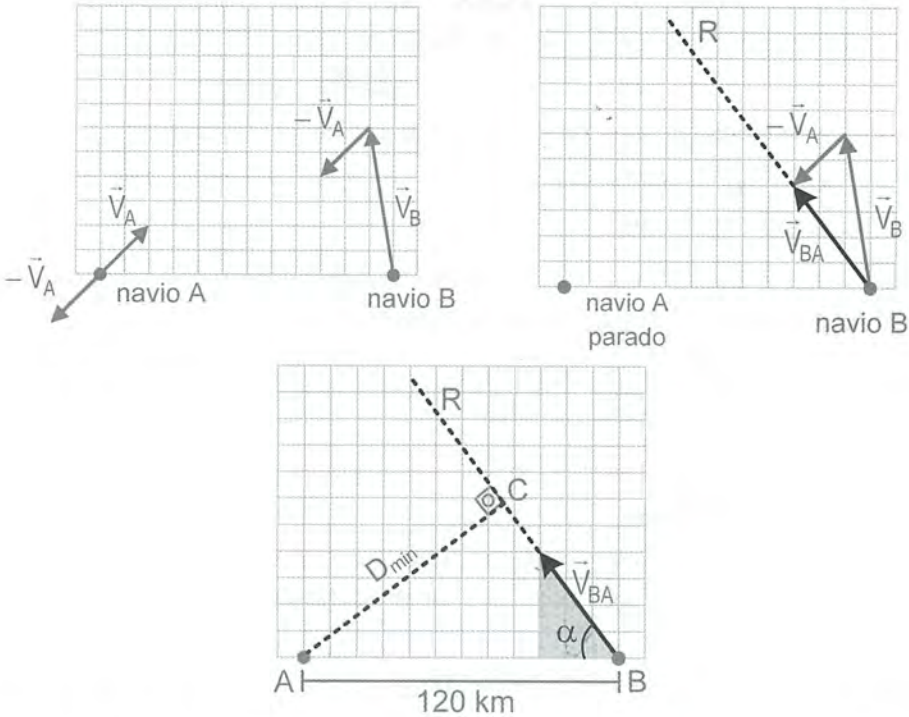
Questão 29 – 1ª Solução - Geométrica

Resolveremos o problema inicialmente no referencial do barco A, isto é, no referencial em que A se encontra parado. Para fazer a mudança de referencial $Terra \rightarrow A$, adicionaremos o vetor $-\vec{V}_A$ às velocidades dos navios A e B, de forma a anular a velocidade do navio A. Assim, A e B serão levados para o referencial onde A se encontra parado, isto é, o referencial do navio A.

No referencial do navio A, ele próprio se encontra parado, observando a travessia do navio B, que move-se com velocidade \vec{V}_{BA} (velocidade de B em relação a A) por meio da trajetória representada pela reta R. O triângulo

retângulo em destaque sob o vetor \vec{V}_{BA} tem catetos com dimensões 3 unidades e 4 unidades, permitindo determinar :

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{5}$$



A menor distância que separa os navios, durante a travessia, é a distância entre o ponto A e a reta R (a distância entre um ponto e uma reta, por definição, é a menor distância, tomada perpendicularmente) dada pelo segmento AC. Seu valor é calculado pelo triângulo retângulo $\triangle ABC$:

$$\text{sen } \alpha = \frac{D_{\min}}{120 \text{ km}} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{D_{\min}}{120 \text{ km}} \Rightarrow D_{\min} = 96 \text{ km}$$

Questão 29 - 2ª Solução - Analítica

Agora daremos uma solução analítica para o problema, trabalhando no referencial da Terra mesmo. A figura da questão mostra um desenho em escala mas não fornece as velocidades \vec{V}_A e \vec{V}_B .

Admitindo que cada unidade na horizontal ou na vertical valha 1 km/h, vemos que as componentes horizontais dos barcos A e B valem $V_{Ax} = 2 \text{ km/h} \rightarrow$ e

$V_{BX} = 1 \text{ km/h} \leftarrow$ em sentidos opostos. Assim, usando velocidade relativa, a distância horizontal Δx entre eles, em função do tempo t , é dada por:

$$\Delta x = 120 - (2+1) \cdot t \quad \Rightarrow \quad \Delta x = 120 - 3 \cdot t \quad (\text{eq1})$$

As componentes verticais das velocidades dos barcos A e B na direção y valem $V_{AY} = 2 \text{ km/h} \uparrow$ e $V_{BY} = 6 \text{ km/h} \uparrow$. Assim, usando velocidade relativa, a distância vertical Δy entre eles, em função do tempo t , é dada por:

$$\Delta y = (6 - 2) \cdot t \quad \Rightarrow \quad \Delta y = 4 \cdot t \quad (\text{eq2})$$

Assim, a distância d entre eles, em qualquer instante t , é dada por:

$$d^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = (120 - 3t)^2 + (4t)^2 = 14400 - 720t + 9t^2 + 16t^2$$

$$d^2 = 14400 - 720t + 25t^2$$

Para achar o valor mínimo de d^2 , devemos determinar as coordenadas do vértice da função do 2º grau acima na variável t :

$$d_{\min}^2 = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(720^2 - 4 \cdot 25 \cdot 14400)}{4 \cdot 25} = 9216$$

$$d_{\min} = \sqrt{9216} = 96 \text{ km}$$

Questão 30 - Resposta

$$a) \frac{L_1 v_1 + L_2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}, \quad b) \frac{|L_1 v_2 - L_2 v_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Dica: Veja a resolução da questão 29, use o teorema de Pitágoras.

Questão 31 - Resposta: 10 km, 15 min

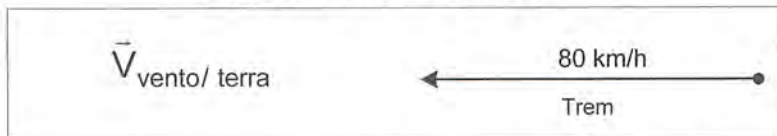
Questão 32 - Resposta: $\text{sen} \alpha = 1/4$,

Dica: use a lei dos senos: $V_B \cdot \Delta t / \text{sen} \alpha = V_A \cdot \Delta t / \text{sen} \beta$

Questão 33 - Solução

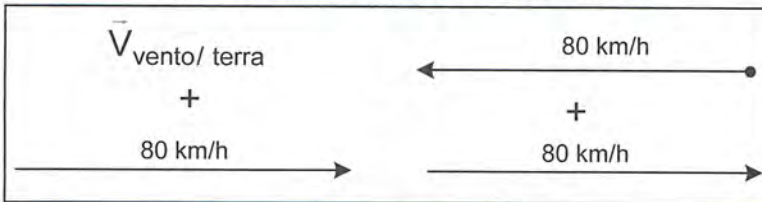
No referencial da Terra (Figura 21), o trem move-se para oeste, com velocidade 80 km/h, ao passo que o vento tem velocidade desconhecida nesse referencial. Conforme o enunciado, todavia, para quem está no interior do trem (ou seja, no referencial do trem), o vento sopra do norte para o sul \downarrow

Figura 21 - Referencial da Terra



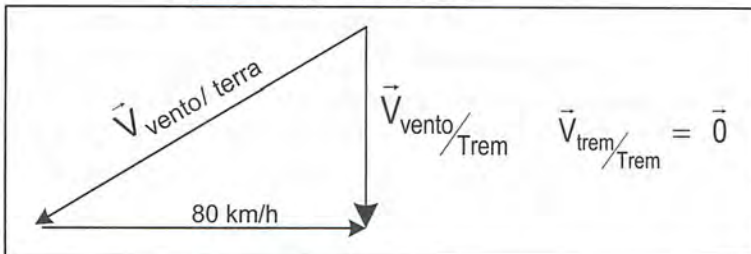
A fim de usar esse fato para descobrir a orientação da velocidade do vento em relação à Terra, efetuaremos a mudança de referencial Terra \rightarrow trem.

Figura 22 – mudando para o Referencial do trem



Na Figura 22, adicionamos o vetor $-\vec{V}_{\text{trem/terra}} = 80 \rightarrow$ à velocidade do vento e à velocidade do trem, de forma a “parar” o trem. Na Figura 23, já estamos no referencial do trem. Agora, sabendo que $\vec{V}_{\text{vento/trem}}$ sopra na direção norte-sul, determinamos graficamente a orientação da velocidade do vento em relação à Terra, $\vec{V}_{\text{vento/terra}} = \swarrow$, mostrada na Figura 23.

Figura 23 - Referencial do trem



Na Figura 24, vemos outro episódio em que, segundo o enunciado do problema, o trem está se movendo a 20 km/h no sentido leste-oeste \leftarrow , enquanto o vento sopra em relação à Terra conforme determinado na Figura 23. Segundo o enunciado, nessas circunstâncias, o vento sopra a 45° , vindo do nordeste, para quem está no interior do trem (no referencial do trem). A fim de usar esse fato para descobrir o valor da velocidade do vento em relação à Terra, efetuaremos a mudança de referencial Terra \rightarrow trem na Figura 25.

Figura 24 - Referencial da terra

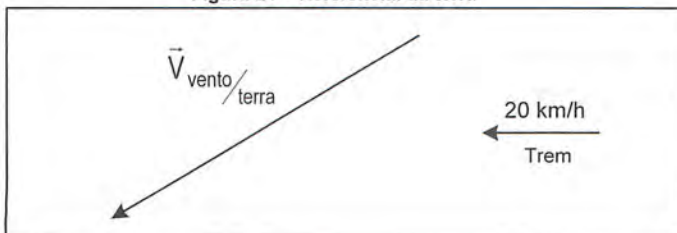


Figura 25 – Mudando para o referencial do trem

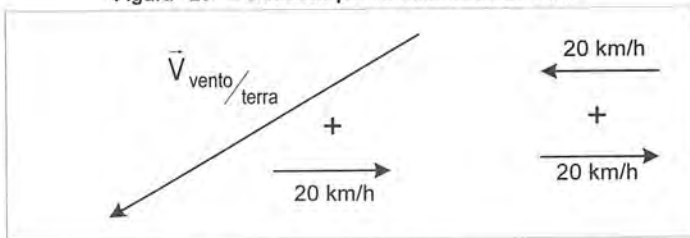
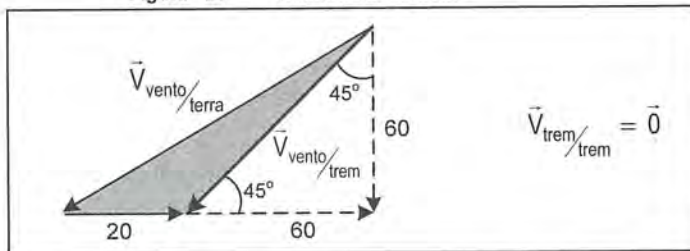


Figura 26 – Referencial do trem



Na Figura 26, na qual o trem se encontra parado (no referencial do trem), o vento sopra com sua velocidade $\vec{V}_{\text{vento-trem}}$ vindo do nordeste a 45° . Observando o triângulo retângulo isósceles (45° , 90° , 45°), na Figura 26 e comparando com a Figura 23, facilmente determinamos o módulo da velocidade do vento em relação à Terra $|\vec{V}_{\text{vento-terra}}| = 100 \text{ km/h}$, fazendo uso do Teorema de Pitágoras na Figura 27.

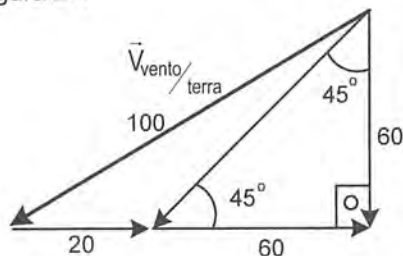


Figura 27

Questão 34 – Resposta

- a) 10 m/s b) 3 s c) 30 m d) 18 m

Questão 35 – Resposta

- a) 130 km/h b) 260 km

Questão 36 – Resposta

- a) 8 m/s, b) $\sin \alpha = 0,6$, c) 5s, d) perpendicular à correnteza, e) 4 s

Questão 37 – Resposta: 45 segundos

Questão 38 – Resposta

$$\frac{v \cdot T}{\sqrt{v^2 - u^2}}$$

Questão 39 – Resposta: B

Questão 40 – Resposta: 5 min também, acredita ? ☺

Questão 41 - Travessia com velocidade mínima

Solução: Considere os seguintes parâmetros:

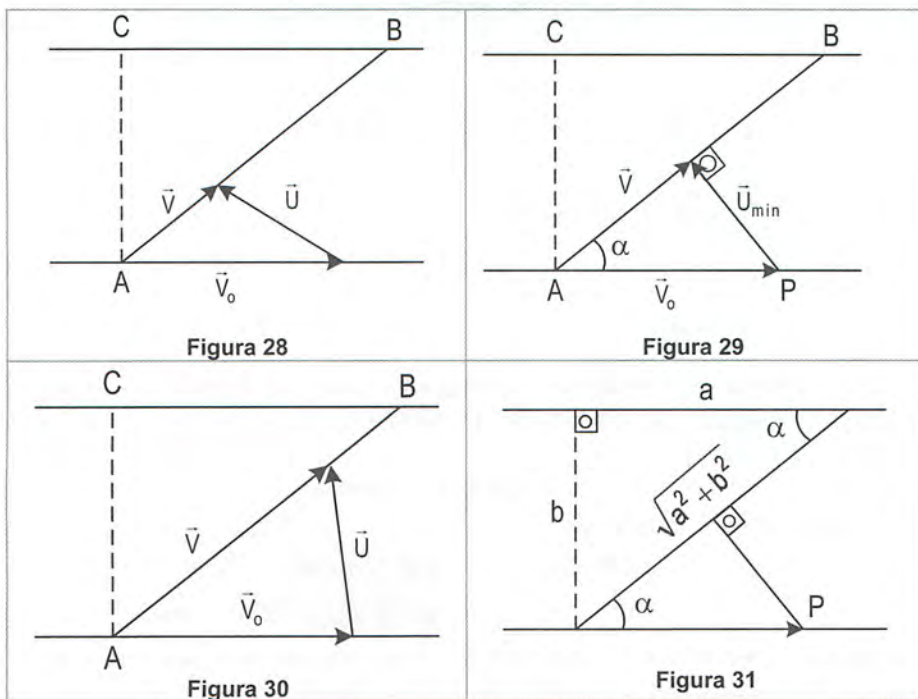
\vec{U} = velocidade do barco em relação à água;

\vec{V}_0 = velocidade da água em relação à Terra;

\vec{V} = velocidade do barco em relação à Terra.

A relatividade galileiana permite escrever a equação vetorial:

$$\vec{V} = \vec{U} + \vec{V}_0 \quad (\text{eq1})$$



Para que o barco parta do ponto A da margem e chegue ao ponto B da margem oposta, seguindo a trajetória AB em relação à Terra (margens), a velocidade do barco em relação à Terra \vec{V} deve apontar na direção da reta AB.

Os diagramas vetoriais das Figuras 28, 29 e 30 mostram três situações distintas que satisfazem a relação vetorial eq1. Entretanto, dentre elas, em qual teremos o menor módulo para o vetor \vec{U} ? Ora, quando o vetor \vec{U} representar a distância mínima entre o ponto P e a reta AB, isto é, quando \vec{U} for perpendicular à direção AB como mostra a Figura 29.

Das Figuras 29 e 31, temos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{U_{\min}}{V_o} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \text{Portanto: } U_{\min} = \frac{V_o \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Questão 42

Solução: Considere os seguintes parâmetros:

\vec{u} = velocidade da lancha em relação à água;

\vec{v} = velocidade da água (correnteza) em relação à Terra;

\vec{w} = velocidade da lancha em relação à Terra.

Da relatividade de Galileu, podemos escrever: $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ (eq1)

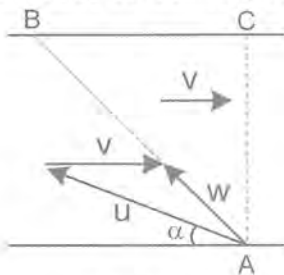


Figura 32

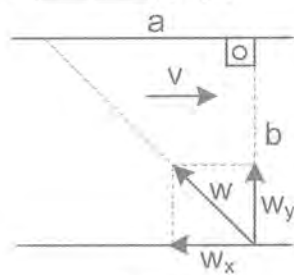


Figura 33

A relação vetorial eq1 pode ser vista graficamente na Figura 32, onde a velocidade resultante \vec{w} da lancha já aponta exatamente na direção AB visada.

Sejam $BC = a$, $AC = b$ e τ a duração da travessia.

Das Figuras 32 e 33, vemos que:

$$AC = w_y \cdot \tau \Rightarrow b = (u \cdot \text{sen } \alpha) \cdot \tau \quad (\text{eq2})$$

$$BC = w_x \cdot \tau \Rightarrow a = (u \cdot \text{cos } \alpha - v) \cdot \tau \quad (\text{eq3})$$

Usando $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$, eliminamos o ângulo α nas relações eq2 e eq3, e caímos na seguinte equação do 2º grau na variável τ :

$$(u^2 - v^2) \cdot \tau^2 - (2v \cdot a) \cdot \tau - (a^2 + b^2) = 0$$

$$16 \cdot \tau^2 - 18 \cdot \tau - 13 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau, encontramos $\tau = 1,625h = 1h37min30s$

Questão 43 – Travessia com vento na bandeira

Solução: Considere os seguintes parâmetros:

\vec{V}_{BT} = velocidade do barco em relação à Terra;

\vec{V}_{BV} = velocidade do barco em relação ao vento;

\vec{V}_{VB} = velocidade do vento em relação ao barco;

\vec{V}_{VT} = velocidade do vento em relação à Terra.

A bandeira do barco aponta na direção da velocidade do vento em relação ao barco \vec{V}_{VB} . Logicamente que os vetores \vec{V}_{BV} e \vec{V}_{VB} têm mesmo valor, mesma direção e sentidos opostos como mostrado na Figura 34.

Da relatividade de Galileu, podemos escrever:

$$\vec{V}_{BT} = \vec{V}_{BV} + \vec{V}_{VT} \quad (\text{eq1})$$

A relação eq1 é mostrada graficamente na Figura 34.

Da geometria do problema, vemos que $\gamma = \gamma'$ porque são alternos internos.

Adicionalmente, temos: $\theta + \gamma + \varphi = 180^\circ$

$$\theta + (90^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\theta = \beta + \alpha - 90^\circ \quad (\text{eq2})$$

Pela lei dos senos, podemos escrever:

$$\frac{V_{BT}}{\text{sen}\theta} = \frac{V_{VT}}{\text{sen}\varphi} \Rightarrow \frac{V_{BT}}{\text{sen}(\beta + \alpha - 90^\circ)} = \frac{u}{\text{sen}(180^\circ - \beta)} \Rightarrow \frac{V_{BT}}{\text{sen}(\beta + \alpha - 90^\circ)} = \frac{u}{\text{sen}\beta} \quad (\text{eq3})$$

No referencial da Terra, o barco se move com velocidade V_{BT} e percorre a distância AB num intervalo de tempo τ tal que: $AB = V_{BT} \cdot \tau \quad (\text{eq4})$.

Como a largura do rio vale $BC = L$, então $AB = L/\text{sen}\alpha \quad (\text{eq5})$

Substituindo eq5 e eq3 em eq4, vem:

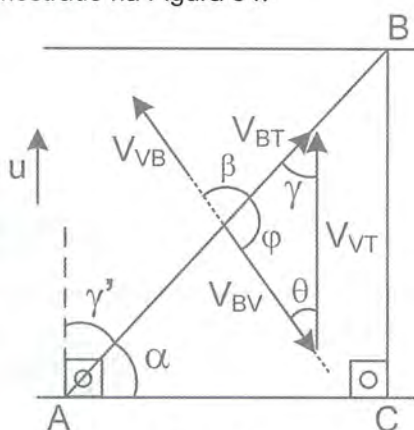


Figura 34

$$AB = V_{BT} \cdot \tau \Rightarrow \frac{L}{\text{sen}\alpha} = \frac{u \cdot \text{sen}(\alpha + \beta - 90^\circ)}{\text{sen}\beta} \cdot \tau \Rightarrow \tau = \frac{L \cdot \text{sen}\beta}{u \cdot \text{sen}(\alpha + \beta - 90^\circ) \cdot \text{sen}\alpha}$$

Assim, determinamos o tempo τ da travessia desse barco.

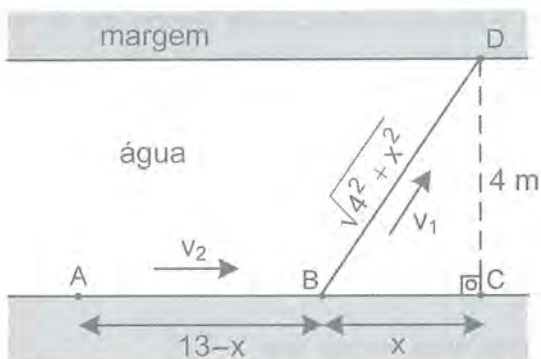
Questão 44 – Resposta

$$u = \frac{L \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}{\tau \cdot \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta}, \quad \text{Dica: Veja a resolução da questão 43}$$

Questão 45 – Biatlon otimizado

Solução: Admita que o banhista fará o percurso ABD mostrado na figura. Nesse caso, o tempo da travessia será dado por:

$$t = \frac{AB}{v_1} + \frac{BD}{v_2} = \frac{13-x}{5} + \frac{\sqrt{16+x^2}}{3} \Rightarrow t = \frac{39-3x+5\sqrt{16+x^2}}{15} \quad (\text{eq1})$$



Para que o tempo t da travessia seja mínimo, devemos minimizar o valor do parâmetro y dado por:

$$y = -3x + 5\sqrt{16+x^2} \quad (\text{eq2})$$

Desenvolvendo, vem:

$$y + 3x = 5\sqrt{16+x^2} \Rightarrow (y+3x)^2 = 5^2 \cdot |16+x^2| = 5^2 \cdot (16+x^2)$$

$$16x^2 - 6xy - y^2 + 400 = 0 \Rightarrow 16x^2 - (6y)x + (400 - y^2) = 0 \quad (\text{eq3})$$

Assim, encontramos uma equação do 2º grau na variável x . Como a distância x na figura deve ser um número real, devemos ter:

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow 36y^2 - 4 \cdot 16 \cdot (400 - y^2) \geq 0 \Rightarrow y^2 \geq 256 \Rightarrow y \geq 16.$$

Dessa forma, concluímos que o menor valor positivo do parâmetro vale $y_{\min} = 16$.

Esse valor de y ocorrerá para qual valor da distância x ? Substituindo $y = 16$ na equação eq3 e resolvendo a equação do 2º grau, obtemos $x = 3$ m.

Se o valor de x encontrado para minimizar o tempo de travessia do banhista fosse maior do que 13 m ($x \geq 13$ m), o banhista em A deveria pular logo na água e nadar direto no percurso AD. Como o valor de x encontrado está no intervalo $0 < x < 13$ m, o banhista em A deverá correr 10 m até atingir o ponto B para, em seguida, nadar 5 m no trecho BD.

Questão 46 – Resposta

$$CD = \frac{L}{\sqrt{n^2 - 1}}, \text{ Dica: Veja a resolução da questão 45}$$

Questão 47 - 1ª Solução: No referencial dos carros

Essa avenida é percorrida por uma seqüência ilimitada de carros, todos se movendo com velocidade constante V (em relação à Terra). Segundo o enunciado, eles estão dispostos de forma que a distância livre entre dois carros consecutivos sempre vale a . Sendo ilimitada a seqüência de carros, o pedestre necessariamente atravessará a avenida por uma trajetória retilínea que passa entre dois carros consecutivos.

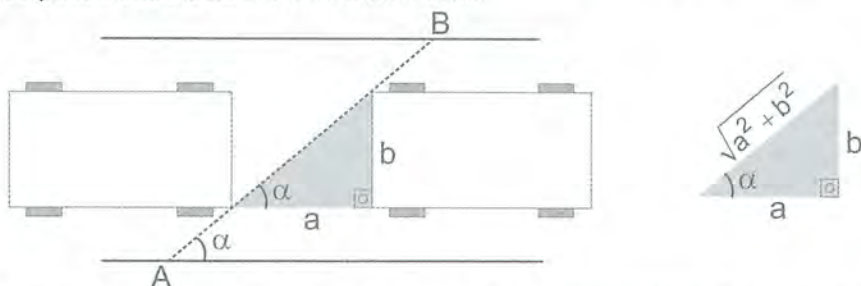


Figura 35 – Trajetória do pedestre no referencial dos carros na iminência de ser atropelado

Para atravessar a avenida na iminência de ser atropelado, o pedestre deve seguir uma trajetória retilínea que tangencie a extremidade esquerda de um carro e a extremidade direita do carro seguinte. A Figura 35 mostra como deve ser essa trajetória seguida pelo pedestre no referencial dos carros, ou seja, no referencial em que os carros encontram-se parados. A velocidade do pedestre em relação aos carros deve necessariamente apontar na direção da reta AB mostrada na Figura 35, cuja inclinação está bem definida pela relação $\text{tg} \alpha = b/a$, já que a e b são dados no problema.

Essa trajetória mostrada na Figura 35, porém, ainda não garante que o pedestre esteja atravessando a avenida usando velocidade mínima. Para que essa condição também seja satisfeita, considere os seguintes parâmetros a seguir:

\vec{V}_{PC} = velocidade do pedestre em relação aos carros;

\vec{V}_{PT} = velocidade do pedestre em relação à Terra;

\vec{V}_{TC} = velocidade da Terra em relação aos carros.

\vec{V}_{CT} = velocidade dos carros em relação à Terra.

Logicamente que as velocidades \vec{V}_{TC} e \vec{V}_{CT} têm mesmo valor, mesma direção e sentidos contrários. Adotaremos $\vec{V}_{CT} = V \leftarrow$ e $\vec{V}_{TC} = V \rightarrow$.

Da Relatividade de Galileu, podemos escrever: $\vec{V}_{PC} = \vec{V}_{PT} + \vec{V}_{TC}$ (eq1)

As Figuras 36 e 37 mostram diagramas vetoriais representando a relação eq1. Em todos os diagramas, a velocidade $\vec{V}_{TC} = V \rightarrow$ é fixa, já que ela foi fornecida no enunciado do problema. A velocidade \vec{V}_{PC} não tem módulo fixo e encontra-se apoiada sobre a reta AB mostrada na Figura 35 (para que o pedestre atravessasse a avenida na iminência de ser atropelado – Figura 35). O vetor \vec{V}_{PT} tem origem no ponto P e extremidade em um ponto qualquer sobre a reta AB a ser determinado. Assim, observando as Figuras 36 e 37, vemos então que \vec{V}_{PT} tem direção e módulo variáveis. Em outras palavras, existem vários pares de velocidades \vec{V}_{PC} e \vec{V}_{PT} que permitem o pedestre atravessar a avenida da forma mostrada na Figura 35, isto é, na iminência de ser atropelado.

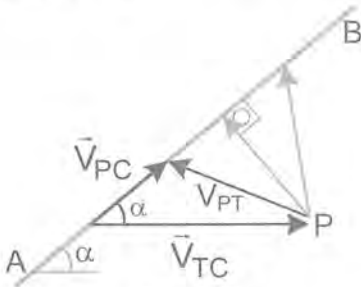


Figura 36

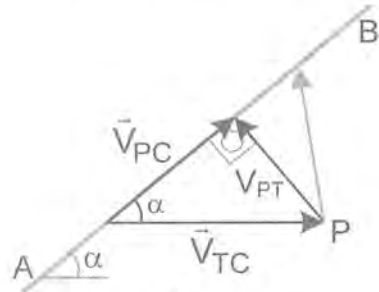


Figura 37

Entretanto, como o enunciado do problema pede que a velocidade \vec{V}_{PT} do pedestre em relação à Terra seja mínima, essa condição é satisfeita quando \vec{V}_{PT} aponta perpendicularmente à reta AB, como pode ser visto na Figura 37.

Isso porque a menor distância entre um ponto e uma reta sempre é determinada pelo comprimento do segmento de reta que parte desse ponto e é perpendicular à reta em questão.

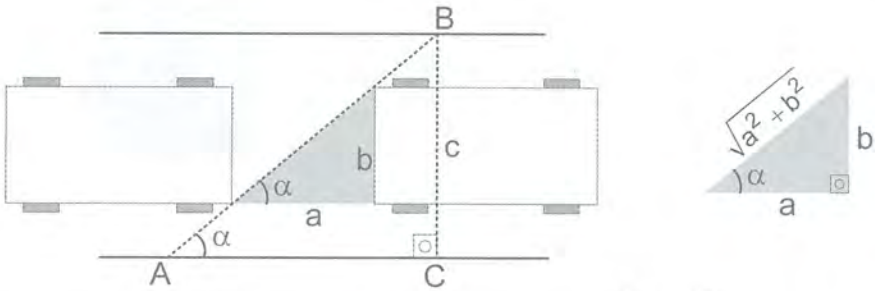


Figura 38

Do triângulo retângulo na Figura 37, temos:

$$V_{PT} = V_{TC} \cdot \text{sen} \alpha \Rightarrow V_{PT\text{min}} = \frac{V \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\text{eq2})$$

Assim, a velocidade mínima que o pedestre pode desenvolver, em relação à Terra, para conseguir atravessar a avenida na iminência de ser atropelado é dada pela relação eq2 acima.

Para calcularmos o tempo que durará a travessia, precisamos determinar o deslocamento sofrido pelo pedestre no referencial desejado, bem como a velocidade do pedestre nesse mesmo referencial. Do quociente entre essas grandezas, acharemos o tempo gasto na travessia. Como o tempo gasto na travessia é o mesmo em qualquer referencial, optaremos por calculá-lo no referencial dos carros.

Nesse referencial, qual o deslocamento AB sofrido pelo pedestre? Ora, da Figura 38, temos:

$$AB = \frac{BC}{\text{sen} \alpha} = \frac{c}{\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \Rightarrow AB = \frac{c \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \quad (\text{eq3})$$

Qual a velocidade V_{PT} desenvolvida pelo pedestre no referencial dos carros, na condição de $V_{PT\text{min}}$? Da Figura 37, vem:

$$V_{PC} = V_{TC} \cdot \text{cos} \alpha = \frac{V \cdot a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow V_{PC} = \frac{V \cdot a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\text{eq4})$$

Assim, a duração da travessia, no referencial dos carros, vale:

$$\Delta t = \frac{\Delta S}{V_{PC}} = \frac{AB}{V_{PC}} = \frac{\frac{c \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}{b}}{\frac{V \cdot a}{\sqrt{a^2 + b^2}}} = \frac{c \cdot (a^2 + b^2)}{a \cdot b} \Rightarrow \Delta t = \frac{c}{V} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \quad (\text{eq5})$$

Finalmente, está resolvido o problema.

Logicamente que, quando passamos do referencial dos carros para o referencial da Terra, as velocidades dos móveis, bem como as suas trajetórias, mudam bastante. A Figura 39 mostra as velocidades do carro e do pedestre em relação à Terra, extraídas diretamente da Figura 37.

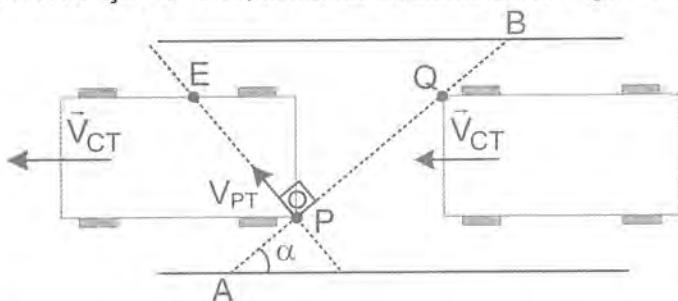


Figura 39 – Deslocamentos dos móveis vistos de um referencial na Terra, na condição de travessia com velocidade mínima.

Como vemos na Figura 39, a trajetória do pedestre no referencial da Terra aponta na direção de V_{PT} , sendo, portanto, perpendicular ao segmento AB. No referencial da Terra, no mesmo tempo que o pedestre leva para percorrer a distância PE, o pára-choque dianteiro do carro de trás percorre a distância QE. Essa é a visão da movimentação do pedestre e dos carros no referencial da Terra.

Questão 47 - 2ª Solução: no Referencial da Terra

Observe os deslocamentos do pedestre P e dos carros na Figura 40, no referencial da Terra. Nesse referencial, sabemos que para conseguir atravessar a avenida na iminência de ser atropelado, o pedestre em P terá que percorrer a distância PE no mesmo tempo em que o pára-choque dianteiro do carro de trás percorrer a distância QE. Para todos os efeitos, ainda não sabemos nada sobre o ângulo EPQ na Figura 40, visto que acabamos de iniciar uma nova resolução do problema.

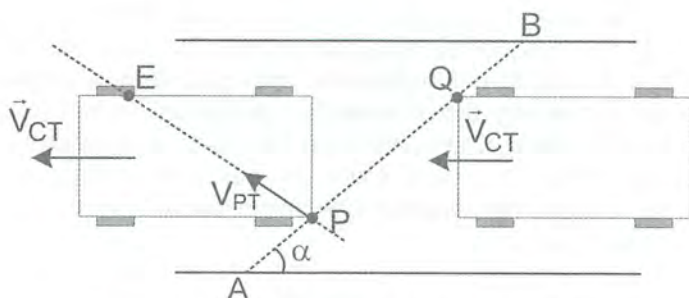


Figura 40 – Análise pré-eliminar no referencial da Terra

A seguir, determinaremos a condição para que P e Q cheguem ao ponto E simultaneamente (no referencial da Terra). Para simplificar a notação, desse ponto em diante adotaremos $V_{PT} = U$ e $V_{CT} = V$.

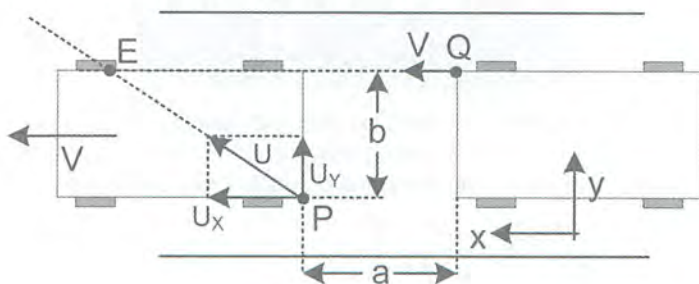


Figura 41

Enquanto o pedestre vai do ponto P ao ponto E (no referencial da Terra), ele sofre um deslocamento igual a b na direção y , movendo-se com velocidade U_y naquela direção. Assim, o tempo t gasto pelo pedestre nesse deslocamento é dado pela relação:

$$b = U_y \cdot t \quad (\text{eq6})$$

Na direção x , o pedestre se move com velocidade relativa $V - U_x$ em relação aos carros e sofre um deslocamento horizontal a no referencial dos carros, no mesmo tempo t , o que nos permite escrever:

$$a = (V - U_x) \cdot t \quad (\text{eq7})$$

Note que PE é o deslocamento do pedestre no referencial da Terra no qual os carros também estão se movendo; enquanto PQ é o deslocamento do pedestre no referencial dos carros (ou seja, no referencial em que os carros estão parados). O tempo de deslocamento, porém, é o mesmo em qualquer referencial.

Isolando t em eq6 e substituindo em eq7, vem:

$$a \cdot U_y + b \cdot U_x = b \cdot V \quad \Rightarrow \quad U_x = V - \frac{a}{b} \cdot U_y \quad (\text{eq8})$$

A relação eq8 acima é a condição para que o pedestre chegue ao ponto E (no referencial da Terra) juntamente com o ponto Q, isto é, na iminência de ser atropelado. A relação eq8, entretanto, não garante que a travessia seja realizada com o pedestre desenvolvendo velocidade mínima (U_{\min}). É fácil ver que existem infinitos pares ordenados (U_x, U_y) que satisfazem a relação eq8. Devemos encontrar dentre todos os pares ordenados (U_x, U_y) que satisfazem a relação eq8, aquele que minimiza a função o módulo da velocidade U dado por :

$$U = \sqrt{U_x^2 + U_y^2}$$

Da teoria de vetores, vem: $U^2 = U_x^2 + U_y^2$

$$U^2 = U_x^2 + U_y^2 \stackrel{(\text{eq8})}{=} \left(V - \frac{a}{b} \cdot U_y \right)^2 + U_y^2, \text{ desenvolvendo, vem:}$$

$$U^2 = U_y^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) - U_y \left(\frac{2 \cdot a \cdot V}{b} \right) + V^2 \quad (\text{eq9})$$

O 2º membro da relação eq9 trata-se de uma função do 2º grau na variável na variável U_y . Seu gráfico é uma parábola com concavidade para cima e, portanto, admite um valor mínimo para U^2 dado pela expressão:

$$U_{\min}^2 = \frac{-\Delta}{4A} = \frac{-(B^2 - 4AC)}{4A} = \frac{4AC - B^2}{4A}$$

$$U_{\min}^2 = \frac{4 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \cdot V^2 - \left(-\frac{2 \cdot a \cdot V}{b} \right)^2}{4 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)} = \frac{(4b^2 + 4a^2 - 4a^2) \cdot V^2}{4b^2 + 4 \cdot a^2} = \frac{b^2 \cdot V^2}{a^2 + b^2}$$

$$U_{\min} = \frac{b \cdot V}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\text{eq10})$$

A expressão obtida acima para a velocidade mínima U_{\min} do pedestre coincide com o resultado obtido em eq2.

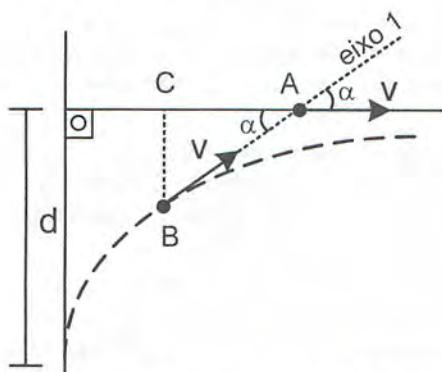
A velocidade mínima do pedestre foi obtida de forma muito mais concisa e elegante quando fizemos uso da geometria plana nas Figuras 36 e 37 para determinar a orientação do vetor V_{PT} que minimizaria o seu módulo. Soluções geométricas, em geral, são sempre mais econômicas. A dificuldade, entretanto, é visualizá-las. Encontrar a saída geométrica para um problema de máximo e mínimo requer uma certa habilidade que o leitor só adquire com o tempo e com dedicação.

Questão 48 – Resposta:

a) $v = \frac{8\sqrt{5}}{5} = 3,57 \text{ m/s}$, b) $\text{tg}\alpha = 2$, **Dica:** Veja a resolução da questão 47

Questão 49

Solução: Observe na figura as componentes das velocidades das lanchas A e B na direção BA (eixo 1). A lancha B move-se com velocidade V nessa direção BA, ao passo que a lancha A move-se com velocidade $V \cdot \cos\alpha$ nessa direção BA.



Sendo $V > V \cdot \cos\alpha$, vemos que o ponto B está se aproximando do ponto A, ou seja, a distância BA entre eles está diminuindo com velocidade:

$$V_{\text{rel}_{AB}} = V - V \cdot \cos\alpha = V \cdot (1 - \cos\alpha).$$

Por outro lado, o ponto C (projeção de B sobre a trajetória da lancha A) move-se na direção CA com velocidade $V \cdot \cos\alpha$, enquanto a lancha A move-se na direção CA com velocidade V . Sendo $V > V \cdot \cos\alpha$, vemos que A está se afastando de C, ou seja, a distância CA entre eles está aumentando com velocidade:

$$V_{\text{rel}_{CA}} = V - V \cdot \cos\alpha = V \cdot (1 - \cos\alpha).$$

Assim, como BA diminui no mesmo ritmo com que CA aumenta, a soma $S = CA + BA$ dessas distâncias permanecerá constante durante o movimento das lanchas.

No instante inicial, os pontos A e C coincidiam e a soma S era dada por $S = CA + BA = 0 + d = d$. Após um grande intervalo de tempo, B coincidirá com C, e a soma S valerá:

$$S = CA + BA = x + x = d$$

Portanto, a distância x que separa as lanchas, ao final, valerá $x = d/2 = 3 \text{ km}$.

Questão 50

Solução: O movimento completo de cada tartaruga pode ser interpretado como sendo uma composição de dois movimentos independentes, descritos a seguir:

- 1) Cada tartaruga descreve um movimento circular com velocidade tangencial $V_T = V \cdot \sin \alpha$ (veja Figura 42);
- 2) Cada tartaruga move-se radialmente em direção ao baricentro do triângulo equilátero (Figura 42), com velocidade $V_R = V \cdot \cos \alpha$, isto é, a circunferência vai atrofiando, gradativamente, até ser reduzida ao seu baricentro.

Em síntese, o triângulo equilátero (Figura 42) vai girando sobre uma circunferência de raio x decrescente. Ao final, quando a circunferência atingir o seu centro (baricentro do triângulo), as três tartarugas terão se encontrado naquele ponto.

Logicamente, o triângulo permanece equilátero, à medida em que vai girando em torno do seu circuncentro, devido à perfeita simetria do problema, em especial, o fato de todas as tartarugas se moverem com velocidades escalares de módulos iguais.

Assim, para determinar o tempo que as tartarugas levam para se encontrar, é suficiente analisar apenas o movimento radial de uma delas: basta calcular o tempo que qualquer uma delas leva para caminhar em MRU sobre um raio, com velocidade $V_R = V \cdot \cos \alpha$, com $\alpha = 30^\circ$, até atingir o centro da circunferência.

$$T = \frac{\text{distância}}{\text{velocidade}} = \frac{x}{V_R} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{L \cdot \sqrt{3}}{2}}{V \cdot \cos 30^\circ} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{L \cdot \sqrt{3}}{2}}{\frac{V \sqrt{3}}{2}} \Rightarrow T = \frac{2L}{3V}$$

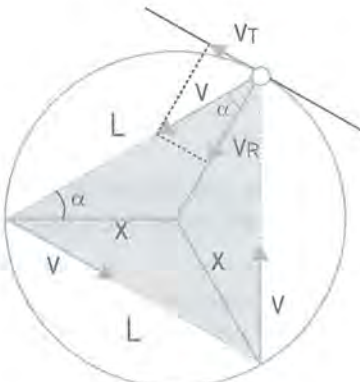


Figura 42

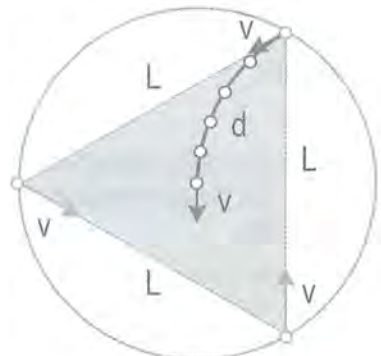


Figura 43

Lembrando que o "movimento completo" descrito por cada tartaruga, durante o intervalo de tempo determinado acima, é uniforme com velocidade escalar

V , a distância d percorrida por cada uma delas (Figura 43), até se encontrarem, é dada por:

$$d = V \cdot T = V \cdot \frac{2L}{3V} \Rightarrow d = \frac{2L}{3}$$

Questão 51 – Four Crazy Turtles

Resposta: a) $\frac{a}{v}$, b) a

Questão 52 - 1ª Solução (Não deixe de ler a 2ª solução também)

O rolamento da roda ao longo do solo horizontal pode ser interpretado como a composição de dois movimentos parciais independentes:

- 1) uma translação horizontal, com a mesma velocidade do centro O (Figura 44)
- 2) uma rotação simples ao redor do centro O , com velocidade tangencial V' a ser determinada (Figura 45).

Superpondo esses dois movimentos componentes, obteremos o movimento completo de rolamento (Figura 46). Para obter a velocidade de cada um dos pontos A , B , C e D , devemos achar a resultante das velocidades de rotação V e translação V' em cada um.

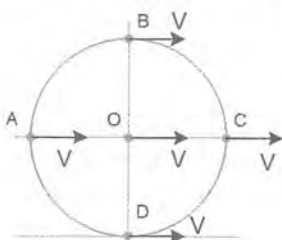


Figura 44 – Translação

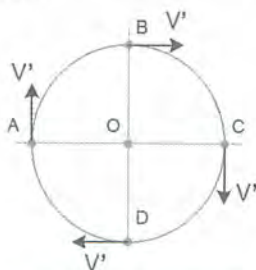


Figura 45 – Rotação

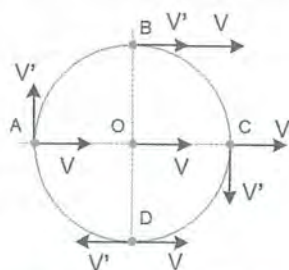


Figura 46 – Superposição

O enunciado, porém, afirma que a roda gira *sem escorregar*. O que isso significa na prática? Ora, que o ponto da roda que está em contato com o chão, em cada instante, está momentaneamente parado em relação ao solo, isto é, $V_D = 0$. Portanto, pela Figura 46, podemos escrever:

$$V_D = 0 \Rightarrow V - V' = 0 \Rightarrow V' = V.$$

Com isso, vemos que as velocidades de translação e de rotação V e V' são iguais em módulo e, assim, determinamos a velocidade resultante de cada ponto, em função da velocidade V de translação do centro O da roda, nas figuras a seguir:

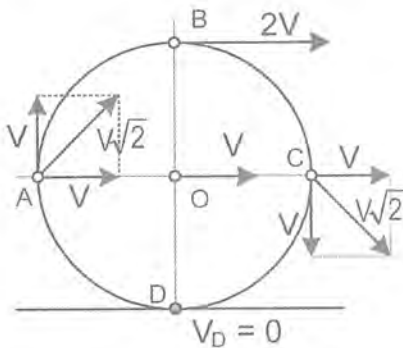


Figura 47

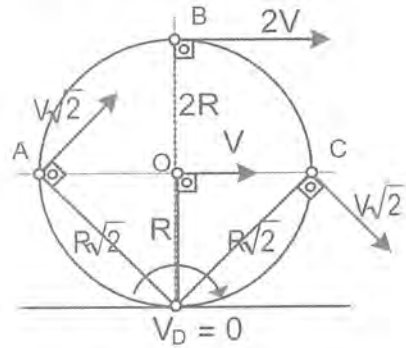


Figura 48

Assim, efetuando a soma dos vetores em cada ponto (Figura 47), obtemos:

$$V_A = V_C = \sqrt{V^2 + V^2} = V \cdot \sqrt{2}$$

$$V_B = V + V = 2V$$

$$V_D = 0$$

$V_O = 0 + V = V$ (note que o centro O da roda não apresenta velocidade de rotação V' na Figura 45).

Em linhas gerais, todo movimento de um corpo rígido pode ser interpretado como a superposição de uma translação pura com uma rotação pura em torno de um centro de rotação fixo.

Questão 52 - 2ª Solução (Não deixe de ler):

A Figura 48 mostra uma forma alternativa de resolver esse problema sem precisar decompor o movimento completo em uma rotação + translação, fazendo uso do conceito de "centro de rotação instantânea". Para isso, basta perceber que:

Todos os pontos da roda estão, momentaneamente, girando em torno do "centro de rotação instantânea" (ponto D de contato entre a roda e o plano horizontal - Figura 48) com a mesma velocidade angular ω :

$$\omega = \frac{V_A}{R_A} = \frac{V_B}{R_B} = \frac{V_C}{R_C} = \frac{V_O}{R_O} \quad (\text{eq1})$$

onde os raios R_A , R_B , R_C e R_O são os chamados "raios de giração", isto é, as distâncias de cada um dos pontos A, B, C e O ao "centro de rotação instantânea" D, conforme a Figura 48.

Determinando-se os valores dos "raios de giração" pela geometria da Figura 48, podemos novamente determinar as velocidades dos demais pontos A, B e C com base na velocidade do centro O da roda em relação à Terra, $V_O = V$, que já é fornecida no enunciado.

$$\omega = \frac{V_A}{R_A} = \frac{V_B}{R_B} = \frac{V_C}{R_C} = \frac{V_O}{R_O} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{V_A}{R \cdot \sqrt{2}} = \frac{V_B}{2R} = \frac{V_C}{R \cdot \sqrt{2}} = \frac{V}{R}$$

Donde vem: $V_A = V_C = V \cdot \sqrt{2}$, $V_B = 2V$

Em qualquer caso, o “centro de rotação instantânea” é o ponto em relação ao qual todos os demais pontos do corpo rígido estão executando movimento de rotação instantânea (rotação pura, sem translação). Se o corpo rola apoiado em alguma superfície, o “centro de rotação instantânea” é o ponto de contato entre o corpo e a superfície.

A Figura 49 generaliza o cálculo da velocidade de pontos quaisquer de um disco circular que rola sobre uma superfície, determinando a velocidade V_P de um ponto P qualquer da roda em função de V , R e do raio de giração R_g daquele ponto. A relação eq1 permite escrever:

$$\omega = \frac{V_P}{R_g} = \frac{V}{R} \quad (\text{eq2})$$

Vale ressaltar que o centro de rotação instantânea poderá estar localizado dentro ou fora do corpo rígido. Para aprender mais, veja a 1ª resolução da questão 62. Em qualquer caso, o “centro de rotação instantânea” pode ser determinado com base na seguinte propriedade:

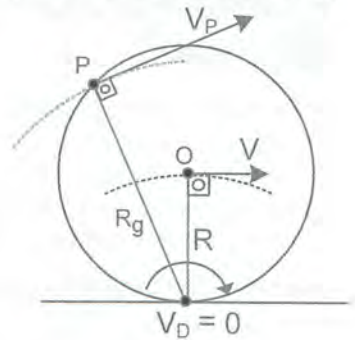


Figura 49

Os “raios de giração”, que ligam cada ponto do corpo rígido ao “centro de rotação instantânea”, são sempre perpendiculares à velocidade instantânea de qualquer ponto do referido corpo, como pode ser percebido nas Figuras 48 e 49.

As Figuras 48 e 49 ratificam que, em linhas gerais, o movimento de qualquer corpo rígido também pode ser interpretado como sendo, instantaneamente, uma rotação pura em torno de um centro de rotação instantâneo.

Questão 53 - Resposta:

$$V_A = \frac{V \cdot (R+r)}{r}, \quad V_B = \frac{V \cdot \sqrt{R^2 + r^2}}{r}, \quad V_C = \frac{V \cdot (R-r)}{r}, \quad V_D = \frac{V \cdot \sqrt{R^2 + r^2}}{r}$$

Questão 54 - Solução:

a) Instantaneamente, todos os pontos da roda estão girando em torno do centro de rotação instantânea S como mostra a figura. Sendo α ângulo externo do triângulo POS, vemos que $\theta + \theta = \alpha$, portanto $\theta = \alpha/2$. O raio de giração R_p do ponto P é a distância OS desse ponto ao centro de rotação instantâneo S, sendo dado por:

$$R_p = R \cdot \cos\theta + R \cdot \cos\theta \quad \Rightarrow \quad R_p = 2R \cdot \cos(\alpha/2) \quad (\text{eq1})$$

O raio de giração R_Q do ponto Q (mostrado na figura da questão) é a distância QS desse ponto ao centro de rotação instantâneo S, sendo dado por:

$$R_Q = 2R \cdot \cos\beta \quad (\text{eq2})$$

Assim, podemos escrever:

$$\omega = \frac{V_P}{R_P} = \frac{V_Q}{R_Q} = \frac{V_O}{R_O}$$

$$\frac{V_P}{2R \cdot \cos(\alpha/2)} = \frac{V_Q}{2R \cdot \cos\beta} = \frac{V}{R}$$

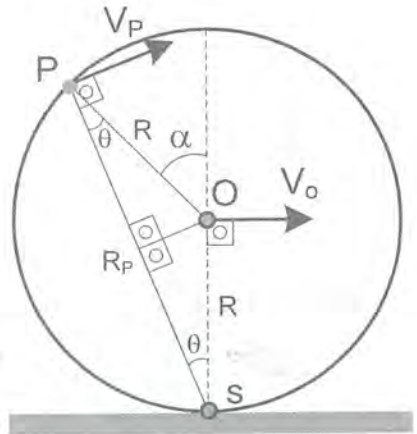
Portanto:

$$V_P = 2V \cdot \cos(\alpha/2) = V \sqrt{2 \cdot (1 + \cos\alpha)} \quad \text{e}$$

$$V_Q = 2V \cdot \cos\beta$$

b) Para que V_Q seja máximo, $\cos\beta$ deverá ser máximo, portanto $\beta = 0^\circ$.

O ponto da roda com máxima velocidade é ponto mais alto da roda. Ele tem raio de giração $2R$ e velocidade instantânea $2V$.



Questão 55 – Solução (veja apêndice 11 sobre rolamentos)

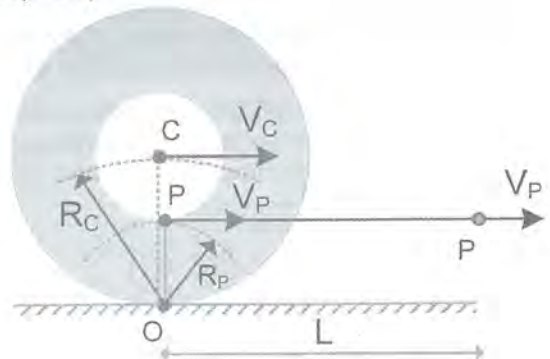
Instantaneamente, todos os pontos da roda estão girando em torno do ponto O de contato entre a roda e o solo com a mesma velocidade angular ω . Assim, a relação eq2 (página 299) nos permite escrever :

$$\omega = \frac{V_C}{R_C} = \frac{V_P}{R_P}$$

$$\omega = \frac{V_C}{R} = \frac{V_P}{R-r}$$

$$\frac{V_C}{40 \text{ cm}} = \frac{10 \text{ cm/s}}{10 \text{ cm}}$$

$$V_C = 40 \text{ cm/s}$$



Portanto, vemos que a velocidade do centro C da roda (em relação ao solo) vale $V_C = 40 \text{ cm/s}$. Como o ponto P da roda se move com velocidade $V_P = 10 \text{ cm/s}$, temos que o centro C da roda se aproxima do extremo P da linha, com velocidade relativa:

$$V_{REL} = V_C - V_P = 40 - 10 = 30 \text{ cm/s}.$$

Assim, a distância horizontal $L = 1,2 \text{ m} = 120 \text{ cm}$ que separa P e C será coberta em quanto tempo ?

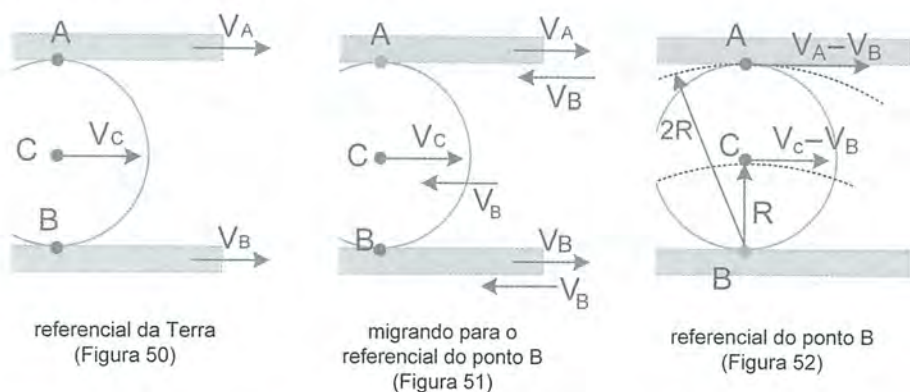
$$\Delta t = \frac{L}{V_{REL}} = \frac{120 \text{ cm}}{30 \text{ cm/s}} = 4 \text{ s}$$

Após 4 s, toda a linha estará enrolada no carretel.

Questão 56 - Solução

Os pontos A, B e C têm velocidade, no referencial da Terra (Figura 50), entretanto, no referencial do ponto B, o ponto B não tem velocidade. Todos os demais pontos giram, instantaneamente, ao redor do ponto B (Figura 52), que será o centro de rotação instantânea dessa roda, nesse referencial.

A fim de efetuar a mudança de referencial "Terra → ponto B", devemos proceder como na Figura 51: dar, a cada um dos pontos A, B e C, a velocidade $-V_B$ necessária para anular a velocidade do ponto B. Na Figura 52, quando finalmente a velocidade do ponto B é nula, já estamos no referencial do ponto B.



A Figura 52 mostra as velocidades dos pontos A, B e C no referencial do ponto B. Sendo B o "centro de rotação instantânea nesse referencial, podemos escrever:

$$\omega = \frac{V_A - V_B}{2R} = \frac{V_C - V_B}{R} \Rightarrow V_A - V_B = 2 \cdot V_C - 2 \cdot V_B \Rightarrow V_C = \frac{V_A + V_B}{2}$$

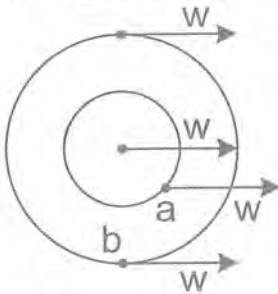
Portanto, está determinada a velocidade V_C do centro C da roda, como mostrado na Figura 50.

Questão 57 - Resposta: $V_B = 60 \text{ m/s} \leftarrow$

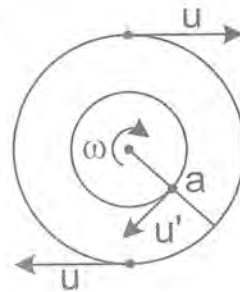
Questão 58 - Resposta: $1 \text{ cm/s} \rightarrow$ e $8 \text{ cm/s} \leftarrow$

Questão 59 – Solução: (veja apêndice 11 sobre rolamentos)

a) A figura 53 mostra que todos os pontos do carretel transladam com a mesma velocidade $w \rightarrow$ do seu centro. A Figura 54 mostra a velocidade de rotação ω dos pontos da periferia do carretel, bem como a velocidade u' de rotação do ponto a . O único ponto que não apresenta velocidade de rotação (Figura 54), logicamente, é o centro do carretel.



Translação
Figura 53



Rotação
Figura 54

Como o carretel rola sobre o solo sem escorregar, o ponto b tem velocidade total (rotação + translação) nula em relação à Terra:

$$v_b = w - u = 0 \quad \Rightarrow \quad w = u \quad (\text{eq1})$$

Do movimento de rotação, vem: $\omega = \frac{u}{R} = \frac{u'}{r} \Rightarrow u' = \frac{u \cdot r}{R} = \frac{w \cdot r}{R}$ (eq2)

Assim, compondo (superpondo) a translação com a rotação, o ponto A tem as velocidades mostradas nas Figuras 55 e 56.

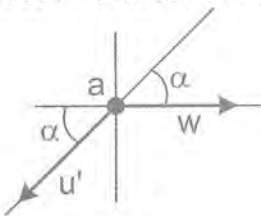


Figura 55

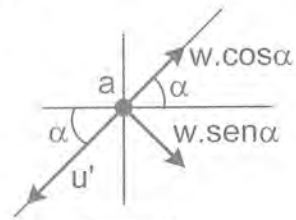


Figura 56

Na direção tangencial ao cilindro interno (de raio r) do carretel, o ponto a tem velocidade tangencial (Figura 56):

$$v_{A-\text{tangencial}} = w \cdot \cos \alpha - u' \stackrel{(\text{eq1})}{=} w \cdot \cos \alpha - \frac{w \cdot r}{R} = w \left(\cos \alpha - \frac{r}{R} \right) \quad (\text{eq3})$$

Entretanto, segundo o enunciado, essa componente tangencial descrita em eq3 vale V . Assim, vem:

$$V_{A\text{-tangencial}} = w \left(\cos \alpha - \frac{r}{R} \right) = V \Rightarrow w = \frac{V}{\left(\cos \alpha - \frac{r}{R} \right)} \quad (\text{eq4})$$

b) Para que o carretel translate para a esquerda \leftarrow , devemos ter:

$$w < 0 \Rightarrow \frac{V}{\left(\cos \alpha - \frac{r}{R} \right)} < 0 \Rightarrow \cos \alpha - \frac{r}{R} < 0 \Rightarrow \cos \alpha < \frac{r}{R}$$

$$\alpha > \arccos \left(\frac{r}{R} \right) \quad (\text{eq5})$$

A interpretação geométrica do resultando obtido algebricamente em eq5 é a seguinte: para $\cos \alpha = r / R$, o prolongamento do cordão (que tangencia o cilindro menor) passa exatamente pelo ponto m de contato entre o carretel e o solo (Figura 57). Assim, tanto a linha de ação da tração T exercida pelo fio quanto a linha de ação do peso P do carretel passam pelo ponto m , de forma que o momento total dessas forças em relação àquele ponto será nulo. Com isso, o cilindro não terá nenhuma tendência de girar em torno daquele ponto, ou seja, não terá tendência de rolar. Ele pode até escorregar ao longo do solo, porém, sem rolar.

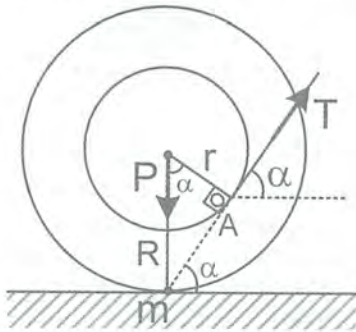


Figura 57

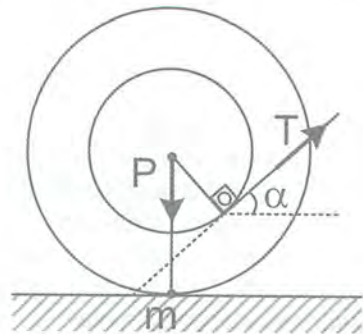


Figura 58

Mas, e se a inclinação α do cordão com a horizontal diminuir, como mostrado na Figura 58? Nesse caso, a linha de ação da tração T passará à esquerda do ponto m , ao passo que a linha de ação do peso P ainda passa por aquele ponto. Assim, o momento resultante das forças em relação ao ponto m será apenas o momento horário produzido pela tração T , de forma que o carretel girará no sentido horário em torno do ponto m e, conseqüentemente, rolará para a direita \rightarrow .

Por outro lado, se a inclinação α da Figura 57 aumentasse, a linha de ação da tração T passaria à direita do ponto m , produzindo um momento total anti-horário em relação a esse ponto, levando o disco a rolar no sentido anti-horário e, portanto, rolar para a esquerda. Esse foi exatamente o resultado que obtivemos analiticamente na relação eq5 do item b desse problema.

c) Devemos determinar a velocidade do ponto A em relação ao centro do carretel. A Figura 55 mostra que o ponto A tem as velocidades $\mathbf{u}' \swarrow$ e $\mathbf{w} \rightarrow$ em relação à Terra, ao passo que o centro do carretel tem velocidade $\mathbf{w} \rightarrow$ em relação à Terra. Assim, a velocidade do ponto A em relação ao centro do carretel vale apenas $\mathbf{u}' \swarrow$ cujo módulo é obtido a partir das relações eq2 e eq4:

$$u' = \frac{w \cdot r}{R} = \frac{r}{R} \frac{V}{\left(\cos \alpha - \frac{r}{R}\right)} \Rightarrow u' = \frac{r \cdot V}{R \cdot \cos \alpha - r} \quad (\text{eq6})$$

d) Se o fio AB de comprimento L vai sendo “engolido” pelo carretel com uma velocidade dada por eq6, em quanto tempo Δt o fio estará completamente enrolado no carretel?

$$L = u' \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{u'} = \frac{L}{\frac{r \cdot V}{R \cdot \cos \alpha - r}} \Rightarrow \Delta t = \frac{L \cdot (R \cdot \cos \alpha - r)}{r \cdot V} \quad (\text{eq7})$$

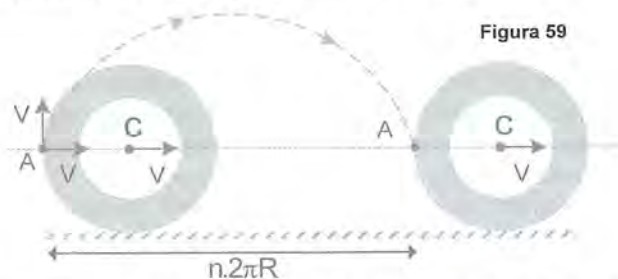
Caso o leitor ache mais interessante, é possível achar esse tempo em função da velocidade \mathbf{w} de translação do carretel:

$$L = u' \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{u'} = \frac{L}{\frac{w \cdot r}{R}} \Rightarrow \Delta t = \frac{L \cdot R}{w \cdot r}$$

O raciocínio desse item d é semelhante ao raciocínio da questão 55.

Questão 60 - Solução

Seja A o ponto extremo esquerdo da roda, de onde se soltará a gota de barro, e C o centro dela. Conforme mostrado na Figura 59, ao se soltar, a gota de barro terá velocidades $V \uparrow$ e $V \rightarrow$, onde $V \rightarrow$ é a velocidade de translação do centro C da roda. Assim, a gota de barro permanecerá na mesma vertical do ponto A durante todo o movimento parabólico, visto que ambos compartilham da mesma velocidade horizontal $V \rightarrow$ em relação à Terra.



A condição para que a gota de barro caia exatamente sobre o ponto A, após a roda ter dado n voltas, é que o tempo gasto pela gota em seu movimento

vertical ida e volta seja o mesmo tempo que a roda leva para percorrer a distância horizontal $D = n \cdot 2 \cdot \pi \cdot R$. O tempo gasto na vertical vale:

$$T_{\text{vert}} = V/g \text{ (subida)} + V/g \text{ (descida)} = 2V/g$$

O tempo gasto para percorrer a distância horizontal D vale $T_{\text{hor}} = D/v = n \cdot 2 \cdot \pi \cdot R / V$. Igualando esses tempos, temos:

$$T_{\text{vert}} = T_{\text{hor}} \Rightarrow \frac{2V}{g} = \frac{n \cdot 2 \cdot \pi \cdot R}{V} \Rightarrow v = \sqrt{n \cdot \pi \cdot R \cdot g}$$

Questão 61

Solução: A pedrinha se deslocará do topo da roda traseira até o topo da roda dianteira descrevendo, no referencial do carro, a trajetória parabólica mostrada na figura. Nesse trajeto, a pedrinha sofre um deslocamento vertical h tal que:

$$h = (2b - 2a) = g \frac{t^2}{2} \quad (\text{eq1})$$

onde t é o tempo de voo da pedrinha.

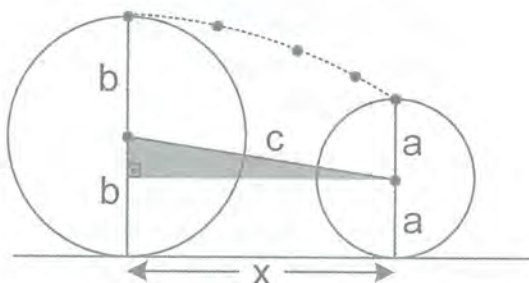
Nesse mesmo percurso, a pedrinha sofre um deslocamento horizontal x no referencial do carro que pode ser determinado pelo triângulo retângulo em destaque na figura:

$$x = \sqrt{c^2 - (b - a)^2} \quad (\text{eq2})$$

Seja $v \rightarrow$ a velocidade de translação dos centros das rodas em relação à Terra. Na direção horizontal, a pedrinha tem uma velocidade horizontal $2v$ em relação à Terra, mas tem uma velocidade $v_x = 2v - v = v$ no referencial do carro.

Assim, para o movimento horizontal da pedrinha, no referencial do carro, podemos escrever:

$$x = v_x \cdot t = v \cdot t \quad (\text{eq3})$$



Isolando t em eq1, x em eq2 e substituindo em eq3, vem:

$$x = v \cdot t \Rightarrow \sqrt{c^2 - (b - a)^2} = v \cdot \sqrt{\frac{4(b - a)}{g}}$$

$$\sqrt{(c+b-a)(c-b+a)} = v \cdot \sqrt{\frac{4(b-a)}{g}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g \cdot (c+b-a)(c-b+a)}{4 \cdot (b-a)}}$$

☺ massa, né ?

Questão 62 – Problema da escada apoiada

1ª Solução: Usando o conceito de “centro de rotação instantânea”

Os raios de giração R_g e R são perpendiculares às velocidades V_P e V (Figura 60) e concorrem no centro de rotação instantânea O . Pela relação eq2 (veja resolução da questão 52 na página 299), vem:

$$\omega = \frac{V_P}{R_g} = \frac{V}{R} \Rightarrow V_P = V \cdot \left(\frac{R_g}{R} \right) = V \cdot \text{tg} \alpha \Rightarrow V_P = V \cdot \text{tg} \alpha$$

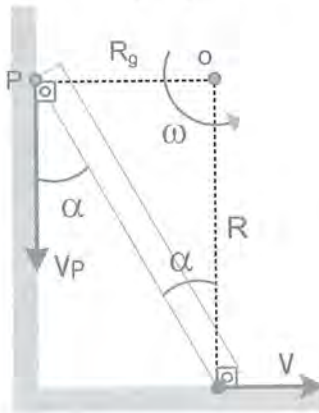


Figura 60

2ª solução – Usando o fato de que a escada tem comprimento constante

Nessa análise, trataremos o movimento completo como composto de dois movimentos mais simples: uma rotação em torno de um ponto fixo (em relação ao corpo) e uma translação.

As extremidades da escada transladam com componentes de velocidades $V_P \cdot \cos \alpha$ e $V \cdot \sin \alpha$, como mostra a Figura 63, mas, em se tratando de um corpo rígido (indeformável), essas extremidades devem apresentar velocidade relativa de translação (Figura 63) nula entre si, visto que a distância entre elas permanece constante com o passar do tempo. Em outras palavras, elas devem apresentar velocidades de translação vetorialmente idênticas :

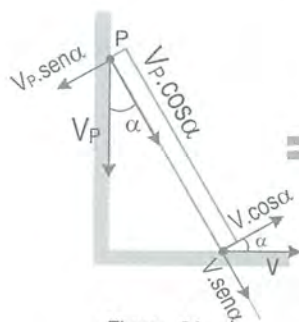


Figura 61

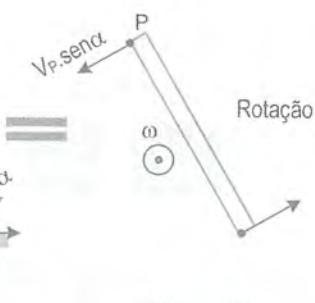


Figura 62



Figura 63

Assim, observando a Figura 63, podemos escrever:

$$V_P \cdot \cos \alpha = V \cdot \sin \alpha \Rightarrow V_P = V \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Questão 63 - Resposta: $V_x = 10 \text{ cm/s}$

Questão 64 - Solução

Inicialmente, precisamos determinar a posição do centro de rotação instantânea do corpo de formato triangular. Para isso, traçamos uma reta r passando pelo ponto A perpendicular à velocidade V desse ponto (Figura 64).

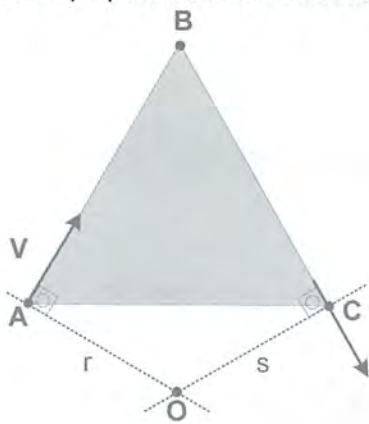


Figura 64

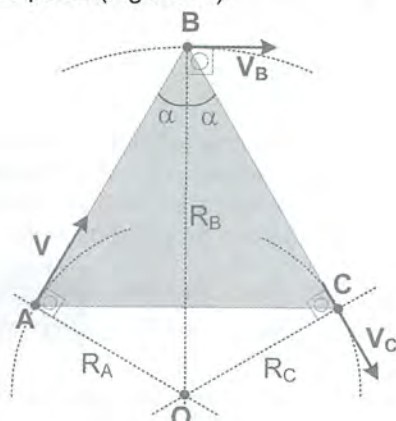


Figura 65

Em seguida, traçamos uma reta s passando pelo ponto C perpendicular à velocidade desse ponto. O ponto de cruzamento das retas r e s é o centro de rotação instantânea do corpo naquele instante, no caso, o ponto O.

Para determinar a orientação da velocidade V_B do terceiro vértice, ligamos o centro O ao ponto B (Figura 65). A velocidade V_B desse ponto deve ser perpendicular ao eixo OB e com um sentido compatível com as demais velocidades do corpo, no caso, para a direita.

Assim, podemos escrever: $\omega = \frac{V_A}{R_A} = \frac{V_B}{R_B} = \frac{V_C}{R_C}$ com $R_C = R_A = R_B \cdot \sin \alpha$, $\alpha = 30^\circ$

Ou seja, $R_A = R_B \cdot (1/2) = R_B/2$ e $R_C = R_B/2$

$$\omega = \frac{V}{R_B/2} = \frac{V_B}{R_B} = \frac{V_C}{R_B/2} \Rightarrow V_B = 2V, V_C = V$$

Questão 65 - Resposta

Desenho um segundo quadrado de mesmo lado L colado abaixo do quadrado original da questão. Traçando uma reta r perpendicular a V_A passando por A , e uma reta s perpendicular a V_B passando por B (diagonal do quadrado inferior), r e s se cruzarão no vértice P do quadrado de baixo tal que $AD = DP = L$, estando A , D e P alinhados. O ponto P será o centro de rotação instantâneo com raios de giração $R_A = PA = 2L$, $R_B = PB = L\sqrt{2}$ e $R_C = PC = L\sqrt{5}$, $R_D = PD = L$. Assim, vem:

$$\omega = \frac{V_A}{2L} = \frac{V_B}{L\sqrt{2}} = \frac{V_C}{L\sqrt{5}} = \frac{V_D}{L} \Rightarrow V_B = \frac{V\sqrt{2}}{2}, V_C = \frac{V\sqrt{5}}{2}, V_D = \frac{V}{2}$$

Questão 66 – 1ª Solução – No referencial da Terra

No referencial da Terra, as extremidades A e B da barra giram em torno de um centro comum (Figura 66) com velocidade angular ω tal que:

$$\omega = \frac{V_A}{r_A} = \frac{V_B}{r_B}$$

A proporção acima também confirma a semelhança entre os 2 triângulos mostrados na figura ao lado ☺. Usando a propriedade das proporções, vem:

$$\omega = \frac{V_A}{r_A} = \frac{V_B}{r_B} = \frac{V_A + V_B}{r_A + r_B} = \frac{V_A + V_B}{L}$$

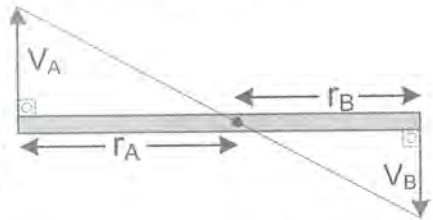


Figura 66

Questão 66 – 2ª Solução – No referencial da extremidade B da barra

Agora, resolveremos o problema no referencial da extremidade B da barra. Para passar do referencial da Terra para o referencial da extremidade B , devemos parar essa extremidade acrescentando a ela uma velocidade instantânea $-\vec{V}_B$ suficiente para pará-la. A mesma velocidade instantânea $-\vec{V}_B$ deve ser acrescentada a todos os pontos da barra para que toda ela sofra a mesma mudança de referencial (Figura 67). Acrescentando essa

velocidade $-\vec{V}_B$ à extremidade A, sua velocidade no referencial do ponto B passa a valer $V_{AB} = V_A + V_B$ (Figura 68).



Figura 67

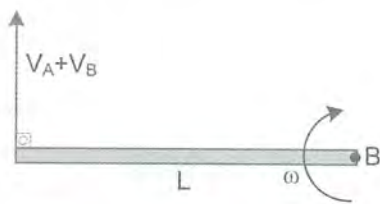


Figura 68

Logicamente, a extremidade B está imóvel no referencial do ponto B. Nesse referencial, a extremidade A gira em torno de B com velocidade linear $V_{AB} = V_A + V_B$ e raio de curvatura $r_{AB} = L$. Assim, no referencial do ponto B, a velocidade angular da barra vale é a velocidade angular da sua extremidade A:

$$\omega = \frac{V_{AB}}{r_{AB}} = \frac{V_A + V_B}{L}$$

A velocidade angular do movimento de rotação da barra é a mesma em qualquer referencial que não tenha velocidade angular, isto é, que não exiba movimento de rotação. O referencial pode até transladar, mas sem rotacionar.

Para esclarecer, considere um referencial que gire com a mesma velocidade angular dessa barra, em torno do mesmo eixo de rotação dela. Nesse referencial, a velocidade angular dessa barra seria nula.

Questão 67 – Solução:

a) Como a barra tem comprimento constante, suas extremidades devem transladar com velocidades de translação idênticas em relação à Terra, portanto, da Figura 69, podemos escrever:

$$V_A \cdot \cos \alpha = V_B \cdot \cos \beta \quad (\text{eq1})$$

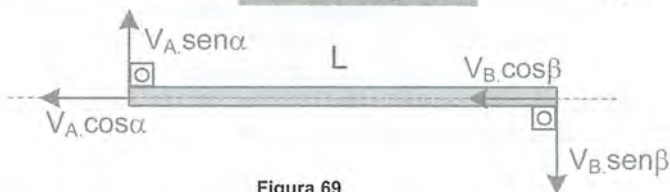


Figura 69

b) Como a barra executa movimento de rotação em torno do centro O (Figura 70) com velocidade angular ω , podemos escrever:

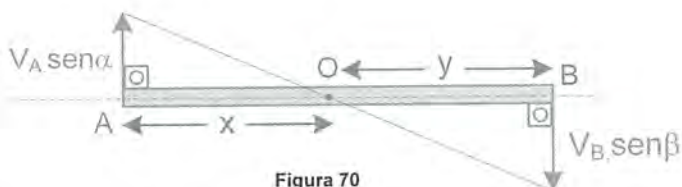


Figura 70

$$\omega = \frac{V_A \cdot \text{sen} \alpha}{x} = \frac{V_B \cdot \text{sen} \beta}{y} \quad \text{Pela propriedade das proporções, vem:}$$

$$\omega = \frac{V_A \cdot \text{sen} \alpha}{x} = \frac{V_B \cdot \text{sen} \beta}{y} = \frac{V_A \cdot \text{sen} \alpha + V_B \cdot \text{sen} \beta}{x + y} = \frac{V_A \cdot \text{sen} \alpha + V_B \cdot \text{sen} \beta}{L} \quad \text{Assim:}$$

$$\frac{V_A \cdot \text{sen} \alpha}{x} = \frac{V_A \cdot \text{sen} \alpha + V_B \cdot \text{sen} \beta}{L} \Rightarrow x = \frac{V_A \cdot \text{sen} \alpha \cdot L}{V_A \cdot \text{sen} \alpha + V_B \cdot \text{sen} \beta} \quad (\text{eq2})$$

Isolando V_B em eq1 e substituindo em eq2, vem:

$$x = \frac{V_A \cdot \text{sen} \alpha \cdot L}{V_A \cdot \text{sen} \alpha + V_B \cdot \text{sen} \beta} = \frac{V_A \cdot \text{sen} \alpha \cdot L}{V_A \cdot \text{sen} \alpha + \frac{V_A \cdot \cos \alpha}{\cos \beta} \cdot \text{sen} \beta} \Rightarrow x = \frac{L \cdot \text{tg} \alpha}{\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta} \quad (\text{eq3})$$

A Figura 71 mostra a distribuição das velocidades de rotação de todos os pontos da barra de A a B. Vemos que a velocidade de rotação aumenta linearmente quando nos afastamos do centro O de rotação, cuja velocidade de rotação é nula. O centro O só participa do movimento de translação da barra.

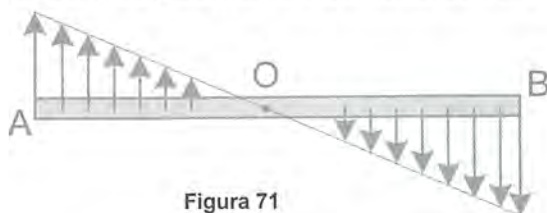


Figura 71

- c) Para determinar a velocidade angular da barra em torno do centro O, usamos o mesmo raciocínio da Questão 66. Nesse caso, não temos mais interesse nas componentes da velocidade associadas à translação (componentes longitudinais). Só nos interessam as componentes das velocidades transversais (perpendiculares) ao corpo da barra (mostradas na Figura 71). Assim, observando a Figura 70, vem:

$$\omega = \frac{V_A \cdot \text{sen} \alpha}{x} = \frac{V_B \cdot \text{sen} \beta}{y} = \frac{V_A \cdot \text{sen} \alpha + V_B \cdot \text{sen} \beta}{x + y} = \frac{V_A \cdot \text{sen} \alpha + V_B \cdot \text{sen} \beta}{L}$$

$$\omega = \frac{V_A \cdot \text{sen} \alpha + V_B \cdot \text{sen} \beta}{L} \stackrel{(\text{eq1})}{=} \frac{V_A \cdot \text{sen} \alpha + \frac{V_A \cdot \cos \alpha}{\cos \beta} \cdot \text{sen} \beta}{L}$$

$$\omega = \frac{V_A}{L} \cdot (\text{sen} \alpha + \cos \alpha \cdot \text{tg} \beta) \quad (\text{eq4})$$

d) Há duas maneiras de calcular a distância $OO' = c$ na Figura 72. A primeira delas é calculando a $\text{tg} \alpha$ no triângulo retângulo AOO' :

$$\text{tg} \alpha = \frac{x}{c} \Rightarrow c = \frac{x}{\text{tg} \alpha} \stackrel{(\text{eq3})}{=} \left(\frac{L \cdot \text{tg} \alpha}{\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta} \right) \cdot \frac{1}{\text{tg} \alpha} \Rightarrow c = \frac{L}{\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta} \quad (\text{eq5})$$

A segunda maneira de calcular a distância $c = OO' = c$ é usando o conceito de velocidade angular ω' . Nessa 2ª parte do problema, estamos considerando que, instantaneamente, todos os pontos da barra sofrem uma rotação pura (isto é, rotação sem translação) com velocidade angular ω' em torno do centro instantâneo de rotação O' (Figura 72).

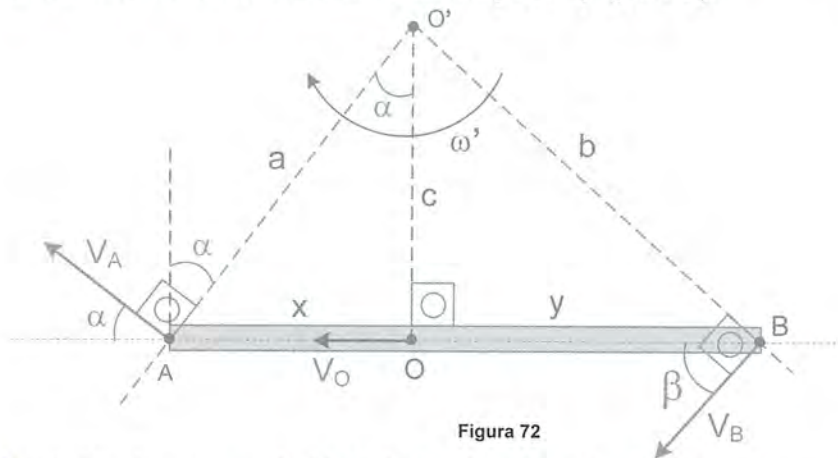


Figura 72

Nessa abordagem, a velocidade instantânea de rotação de cada ponto em torno do centro O' (Figura 72) já é exatamente a velocidade total de cada ponto. O ponto A tem velocidade total V_A , enquanto o ponto O apresenta velocidade total $V_O = V_A \cdot \cos \alpha$.

Lembre-se da Figura 71 que o ponto O, na 1ª parte do problema, não exibe velocidade de rotação. Ele participa apenas do movimento de translação da barra, movimento este no qual todos os pontos do corpo compartilham de uma mesma velocidade. Por esse motivo temos $V_O = V_A \cdot \cos \alpha = V_B \cdot \cos \beta$.

Observando a Figura 72, temos:

$$\omega' = \frac{V_A}{a} = \frac{V_O}{c} \Rightarrow c = a \cdot \frac{V_O}{V_A} = \left(\frac{x}{\operatorname{sen} \alpha} \right) \cdot \left(\frac{V_A \cdot \cos \alpha}{V_A} \right) = \frac{x}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$c = \frac{x}{\operatorname{tg} \alpha} \stackrel{(\text{eq}^3)}{=} \left(\frac{L \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} \right) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow c = \frac{L}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} \quad (\text{eq6})$$

e) A velocidade angular ω' instantânea dessa rotação em torno do centro O' é calculada por:

$$\omega' = \frac{V_A}{a} = \frac{V_O}{c} = \frac{V_B}{b}$$

Por simplicidade, usaremos a velocidade do ponto O:

$$\omega' = \frac{V_O}{c} = \frac{V_A \cdot \cos \alpha}{\left(\frac{L}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} \right)} = \frac{V_A}{L} \cos \alpha \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \operatorname{tg} \beta \right) = \frac{V_A}{L} \cdot (\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta)$$

que coincide com o resultado obtido em eq4 ☺.

De fato, a velocidade angular da barra é sempre a mesma em relação a qualquer centro de rotação, em qualquer referencial que não exiba rotação também.

Questão 68 – Resposta

a) $V_B = 40 \text{ m/s}$ b) $y = 12,8 \text{ m}$ c) $x = 7,2 \text{ m}$ d) $\omega = 2,5 \text{ rad/s}$

e) $V_M = 25 \text{ m/s}$ f) $c = 9,6 \text{ m}$ g) $a = 12 \text{ m}$ h) $b = 16 \text{ m}$

i) $m = 10 \text{ m}$

j) $\frac{30 \text{ m/s}}{12 \text{ m}} = \frac{40 \text{ m/s}}{16 \text{ m}} = \frac{25 \text{ m/s}}{10 \text{ m}}$ ☺☺☺☺☺!!!!

k) $\omega = \omega' = 2,5 \text{ rad/s}$

Questão 69 – Resposta

a) $\frac{V \cdot \cos \theta}{\cos(\alpha + \beta - \theta)}$

b) $\frac{V}{L} \cdot [\operatorname{sen} \theta + \cos \theta \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \beta - \theta)]$

Dica: veja a 2ª resolução da questão 62, bem como as resoluções das questões 66 e 67.

Questão 70 - Análise Teórica Sobre o Cone de Mach e Resolução:

A Figura 73 mostra as frentes de ondas sonoras esféricas produzidas por um avião que se move com velocidade constante sobre a reta r . O avião ocupou a seqüência de posições a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e, no momento dessa imagem, ele se encontra exatamente sobre o ponto O . Para melhor entender essa figura, perceba que:

Ao passar pelo ponto a_1 , o avião origina ali uma frente de onda sonora esférica. A partir desse instante, no mesmo tempo T_1 que o avião leva para percorrer a distância a_1O , o som originado em a_1 percorre a distância $R_1 = a_1b_1$ e sua frente de onda esférica atinge um raio $R_1 = V_{\text{som}} \cdot T_1$.

Assim, temos:

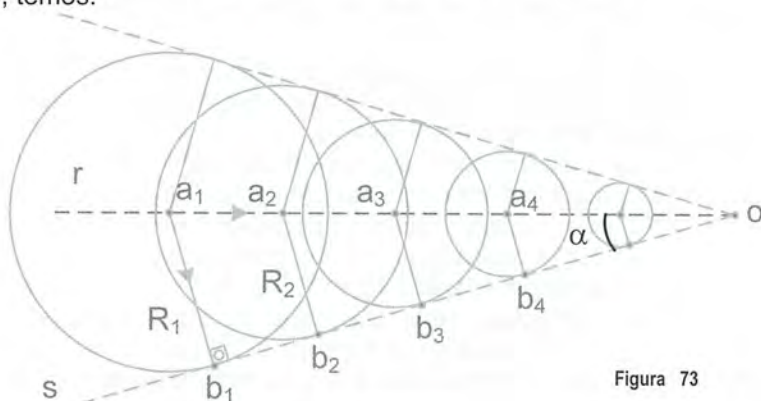


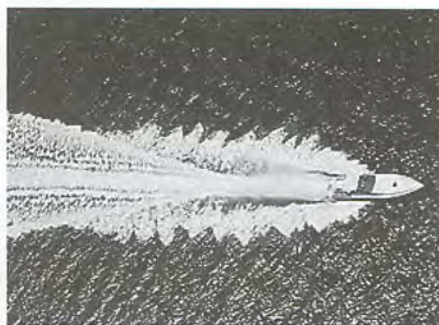
Figura 73

$$a_1O = V_{\text{avião}} \cdot T_1 \quad \text{e} \quad a_1b_1 = R_1 = V_{\text{som}} \cdot T_1$$

$$\text{sen} \alpha = \frac{R_1}{a_1O} = \frac{V_{\text{som}} \cdot T_1}{V_{\text{avião}} \cdot T_1} = \frac{V_{\text{som}}}{V_{\text{avião}}} \Rightarrow \text{sen} \alpha = \frac{V_{\text{som}}}{V_{\text{avião}}} \quad (\text{eq1})$$



Em condições atmosféricas apropriadas, o cone de Mach se torna visível. Na verdade o que se vê é umidade do ar condensada pela ação da onda de choque e variação de pressão.



Na água, as frentes de onda formam uma calda divergente atrás da lancha, semelhante ao cone de Mach.

Da mesma forma, ao passar pelo ponto a_2 , o avião origina ali uma frente de onda sonora esférica. A partir desse instante, no mesmo tempo T_2 que a aeronave leva para percorrer a distância a_2O , o som originado em a_2 percorre a distância $R_2 = a_2b_2$ e sua frente de onda esférica atinge um raio $R_2 = V_{\text{som}} \cdot T_2$.

A envoltória dessas frentes de ondas esféricas é um cone. No caso das ondas sonoras, esse cone é chamado "Cone de Mach". Figuras semelhantes a essa aparecem sempre que uma fonte de ondas viaja num meio com velocidade superior à velocidade de propagação daquelas ondas naquele meio. Assim:

- Quando uma fonte sonora move-se através do ar com uma velocidade maior que a velocidade do som no ar (caça supersônico, veja foto), é produzido um cone de ondas sonoras;
- Quando uma lancha se move na água com uma velocidade maior do que a velocidade de propagação das ondulações na superfície daquela água, uma figura semelhante será observada na superfície da água (veja foto);
- Quando uma partícula eletrizada se move aceleradamente, ela é fonte de ondas eletromagnéticas. Portanto, ao mover-se através de um meio material (meio que contém matéria, portanto exclui o vácuo), com velocidade superior à velocidade da luz naquele meio, um cone de radiação eletromagnética semelhante ao Cone de Mach é produzido. É o chamado *Efeito Cerenkov*. Note que uma partícula pode viajar, por exemplo, na água, com velocidade superior à velocidade de propagação da luz na água e esse fato não viola a Teoria da Relatividade de Einstein, segundo a qual qualquer matéria, energia ou informação é incapaz de viajar no vácuo com velocidade superior à velocidade c de propagação da luz no vácuo.

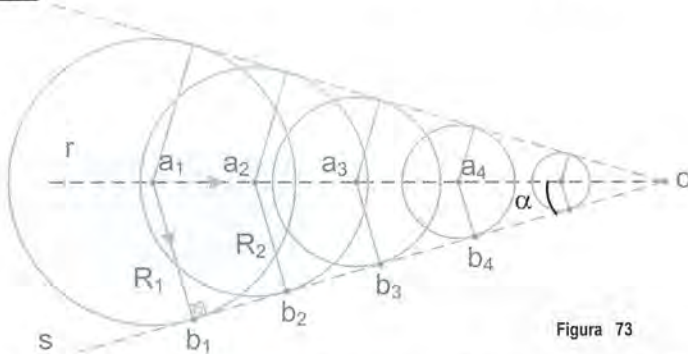


Figura 73

Ainda observando o desenho do Cone de Mach da Figura 73, note que:

- Quando o avião se encontra exatamente sobre o ponto a_1 , um observador localizado em b_1 ainda não ouviu o som emitido pelo avião, apesar de poder vê-lo. Isso porque o som só vai atingir o observador b_1 no momento em que o avião atingir o ponto O.

- Em outras palavras, enquanto o avião está passando pelos pontos a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , os observadores localizados nas posições b_1 , b_2 , b_3 , b_4 ainda não ouviram o som emitido pelo avião. Todos passarão a ouvir o som simultaneamente apenas a partir do momento em que o avião atingir o ponto O.
- O primeiro som do avião a atingir os ouvidos do observador localizado em b_1 será proveniente do ponto a_1 , portanto, instintivamente, assim que ele começar a ouvir o ruído da aeronave, o observador olhará rapidamente para trás, mirando a direção do ponto a_1 . Para surpresa dele, naquele exato instante, o avião já se encontra no ponto O.

Finalmente, aplicando a relação eq15, facilmente se determina a velocidade de vôo da fonte sonora (avião supersônico) solicitada nessa questão:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{V_{\text{som}}}{V_{\text{avião}}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{340 \text{ m/s}}{V_{\text{avião}}} \Rightarrow V_{\text{avião}} = 680 \text{ m/s}$$

Questão 71 - Solução

Para compreender plenamente a resolução dessa questão, é aconselhável, previamente, ler com atenção a resolução comentada da questão anterior na qual o prof. Renato Brito expõe, exaustivamente, idéias importantes que serão utilizadas a seguir.

O pleno entendimento da presente solução requer que o leitor tenha assimilado satisfatoriamente a solução comentada da questão anterior.

Na Figura 74, o observador em questão se encontra na posição b_1 . No instante $t = 0$, o avião, que se movimenta ao longo do segmento horizontal, passa pela cabeça desse observador (isto é, passa por a_2) e, no instante $t = T$, atinge o vértice O.

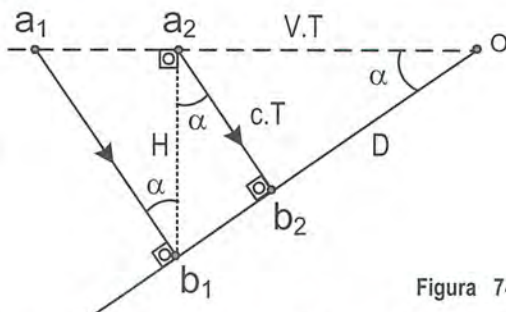


Figura 74

Quando a aeronave atinge o ponto O (T segundos após ter passado pelo ponto a_2), os observadores b_1 e b_2 começam a ouvir simultaneamente seu ruído, sendo que b_1 começa a ouvir o som proveniente de a_1 , ao passo que b_2 , o som proveniente de a_2 . Considerando, na figura 74, que:

a_2O é a distância percorrida pelo avião no tempo T : $a_2O = V \cdot T$

a_2b_2 é a distância percorrida pelo som no mesmo tempo T : $a_2b_2 = C \cdot T$, uma semelhança entre os triângulos Δa_2b_2O e Δa_2b_1O permite escrever:

$$\frac{a_2 O}{b_2 O} = \frac{a_2 b_1}{a_2 b_2} \Rightarrow \frac{V.T}{D} = \frac{H}{C.T}$$

$$\frac{V.T}{\sqrt{(V.T)^2 - (C.T)^2}} = \frac{H}{C.T}$$

$$H = \frac{C.V.T^2}{\sqrt{(V.T)^2 - (C.T)^2}}$$

$$H = \frac{C.T}{\sqrt{1 - (C/V)^2}}$$

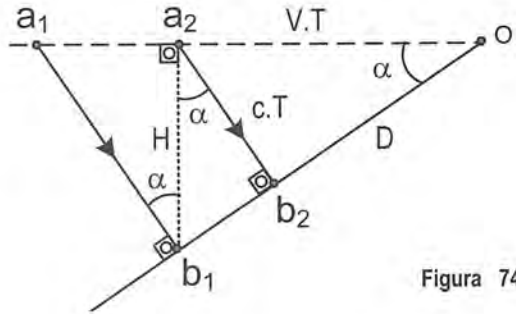


Figura 74

Questão 72 - Solução

Observe a Figura 75. O nosso observador (o piloto da AFA) encontra-se no ponto b_1 . No mesmo tempo que o avião leva para percorrer a distância $a_1 O$, o som emitido pelo avião em a_1 percorre a distância $a_1 b_1$ e chegará ao nosso observador em b_1 .

Da mesma forma, no mesmo tempo em que o avião leva para percorrer a distância $a_2 O$, o som emitido pelo avião em a_2 percorrerá a distância $a_2 b_2$ e chegará a um outro observador em b_2 .

Note que, quando o avião encontra-se em a_1 , nenhum dos observadores $b_1, b_2, b_3, \text{ etc}$ terá ouvido nenhum som de avião. No instante em que o avião passar pelo ponto O , todos os observadores $b_1, b_2, b_3, \text{ etc}$ passarão a ouvir o som do avião simultaneamente. Entretanto, o primeiro som que b_1 recebe é proveniente de a_1 , assim como o primeiro som que b_2 ouve é proveniente de b_2 e assim por diante.

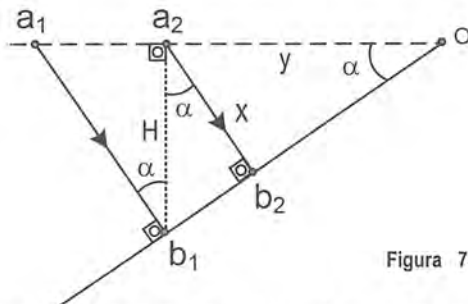


Figura 75

Dessa forma, tão logo o observador b_1 ouve o som, ele imediatamente olha e aponta para a_1 pensando que o avião está passando por lá, quando, na verdade, naquele instante, o avião já encontra-se em O . O observador b_2 ouve som ao mesmo tempo que b_1 . Ao ouvir o som, b_2 imediatamente olha e aponta para a_2 pensando que o avião está passando por lá, quando, na verdade, naquele instante, o avião já encontra-se em O .

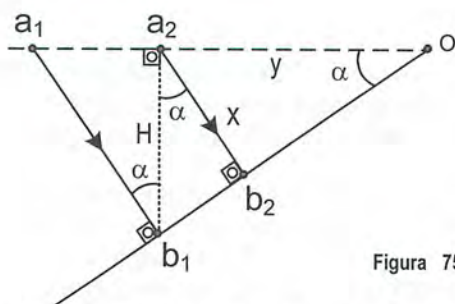


Figura 75

Generalizado, quando o avião passa pelo ponto O, todos os observadores b_1, b_2, b_3, \dots etc simultaneamente olham e apontam respectivamente para a_1, a_2, a_3, \dots etc achando que o avião está passando por aqueles respectivos pontos, quando, na verdade, o avião já está lá na frente, passando pelo ponto O.

Segundo o enunciado, o nosso observador (piloto da AFA) em b_1 só ouve o som 6s após o avião ter passado sobre a sua cabeça, ou seja, 6s após o avião ter passado pelo ponto a_2 . Em outras palavras, o enunciado disse que o avião leva 6s para percorrer a distância $y = a_2O$, afinal, todos os observadores só ouvem o som quando o avião atinge o ponto O.

Ora, nos mesmos 6s que o avião leva para percorrer a distância a_2O , o som emitido em a_2 percorre a distância $x = a_2b_1$.

Assim, $x = v_{\text{som}} \cdot \Delta t = 330 \text{ m/s} \times 6 \text{ s} \Rightarrow x = 1980 \text{ m}$.

O ângulo α na Figura 75 foi fornecido no enunciado ($\text{sen} \alpha = 0,6$, $\text{cos} \alpha = 0,8$).

Como o avião leva 6s para percorrer a distância $y = a_2O$, então:

$$y = v_{\text{avião}} \cdot \Delta t \quad \text{e} \quad \text{sen} \alpha = \frac{x}{y} = \frac{1980}{v_{\text{avião}} \cdot \Delta t} = \frac{1980}{v_{\text{avião}} \cdot 6} = 0,6 \Rightarrow v_{\text{avião}} = 550 \text{ m/s}$$

A altura H , na Figura 75, pode ser determinada por:

$$H \cdot \text{cos} \alpha = x \Rightarrow H \cdot (0,8) = 1980 \Rightarrow H = 2475 \text{ m}$$

Questão 73 – Resposta

a) 8 s, b) 330 m/s

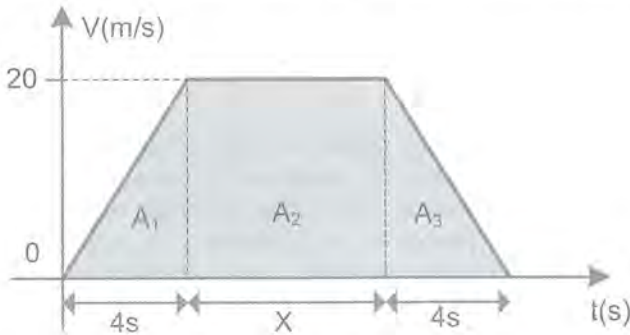
Questão 74 – Resposta

$$v = \frac{v_s \cdot h}{\sqrt{h^2 - (v_s \cdot T)^2}}$$

Questão 75 – Solução:

A fim de perfazer a distância de 4000 m em tempo mínimo, partindo do repouso e parando ao final, o trem deverá usar a velocidade máxima permitida durante o maior tempo possível, gastando o mínimo tempo para acelerar de 0 a 20 m/s, isto é, usando a máxima aceleração, tanto no início, como no final.

O movimento do trem, entre as estações A e B, é descrito pelo gráfico $v \times t$ a seguir. Usando a máxima aceleração de “5m/s a cada 1s”, o trem atinge a velocidade de 20 m/s em apenas 4s e permanece com essa velocidade durante mais x segundos. Em seguida, sua velocidade é reduzida de 20 m/s a 0 m/s em mais 4 s de movimento quando, finalmente, o trem pára na estação B.



A área total sombreada é numericamente igual à distância total percorrida pelo trem entre as duas estações, portanto:

$$A_1 + A_2 + A_3 = \frac{20 \cdot 4}{2} + 20 \cdot x + \frac{20 \cdot 4}{2} = 4000$$

$$x = 196 \text{ s}$$

O tempo total gasto pelo trem para fazer todo o percurso AB vale

$$\Delta t = 4 + X + 4 = 204 \text{ s}$$

Questão 76 - Solução

Essa questão é resolvida com base no “método da gravata” do prof. Renato Brito. No instante inicial $t = 0$, A e B passam por uma mesma posição, mas, no intervalo de tempo $(0, 3T)$ nota-se que $V_B > V_A$ (veja a Figura 76), o que significa que B esteve se afastando mais e mais de A, nesse intervalo de tempo, isto é, a distância entre eles cresce nesse intervalo.

No intervalo de tempo seguinte $[3T, 6T]$, entretanto, embora B esteja bem à frente de A, tem-se $V_A > V_B$, o que implica que a distância entre A e B foi decrescente nesse intervalo de tempo.

Pela simetria do gráfico em relação ao instante $3T$ (Figura 76), nota-se que a distância entre A e B era inicialmente nula em $t = 0$. Essa distância aumenta no intervalo $[0, 3T]$, atinge o valor máximo no instante $3T$ e passa a diminuir no intervalo $[3T, 6T]$, voltando a se anular no instante $6T$. É fácil ver que os móveis, de fato, se encontram novamente no instante $6T$.

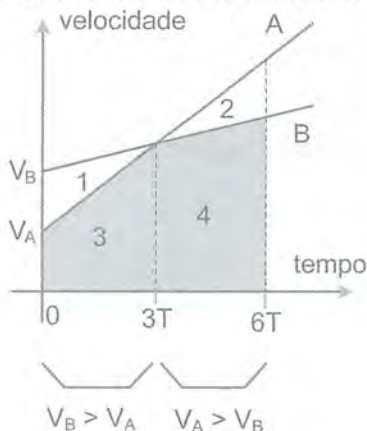


Figura 76

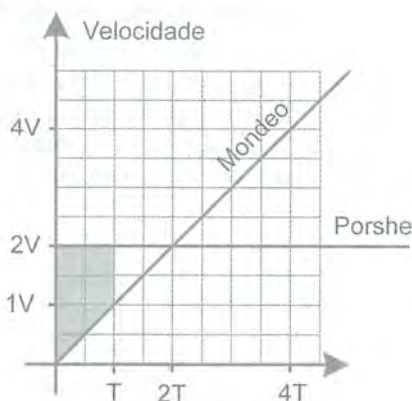


Figura 77

Para isso, basta mostrar que os carros A e B percorreram distâncias iguais no intervalo de tempo $[0, 6T]$. Verificaremos esse fato a seguir:

A distância percorrida pelo móvel A, nesse intervalo de tempo, é numericamente igual à área (trapézio) sob o gráfico do A (veja a Figura 76) entre os instantes 0 e $6T$.

Observando o gráfico, vemos que $D_A = \text{área 3} + \text{área 4} + \text{área 2}$.

Da mesma forma, vemos que $D_B = \text{área 1} + \text{área 3} + \text{área 4}$.

Graficamente, é fácil ver que as áreas 1 e 2 são idênticas ($\text{área 1} = \text{área 2}$), visto que são triângulos semelhantes (possuem os três ângulos iguais entre si, dois a dois) com razão de semelhança 1 (ambos têm alturas iguais a $3T$), portanto, são triângulos congruentes. Assim, temos que:

$D_A = \text{área 3} + \text{área 4} + \text{área 2} = \text{área 1} + \text{área 3} + \text{área 4} = D_B$, ou seja:

$$D_A = D_B.$$

As áreas 1 e 2 no gráfico formam uma figura que se assemelha a uma gravata, daí a denominação **"método da gravata"**. A igualdade entre essas áreas faz com que, para se determinar o instante do encontro, seja suficiente apenas pegar o instante do cruzamento dos gráficos ($3T$) e multiplicar por 2, ou seja, $3T \times 2 = 6T$. Isso dará certo sempre que a distância entre os móveis for inicialmente nula e seus gráficos $V \times T$ forem ambos lineares.

Questão 77 - Solução

O gráfico $V \times t$ da Figura 77 descreve o movimento dos carros conforme descrito no enunciado do problema:

“...sua aceleração é tal que a distância que o separa do Porsche, ao atingir a metade da velocidade deste, vale $3d$.”

Isso ocorre no instante T , como se pode verificar no gráfico da Figura 77: a velocidade V do Mondeo é a metade da velocidade $2V$ do Porsche naquele instante, e a distância que os separa é dada pela área hachurada. Conforme o enunciado, essa área de 6 unidades (6 quadradinhos) correspondente à distância $3d$ que separa os móveis :

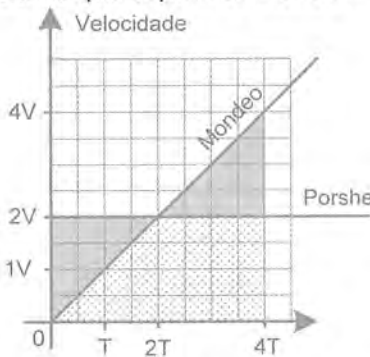


Figura 78

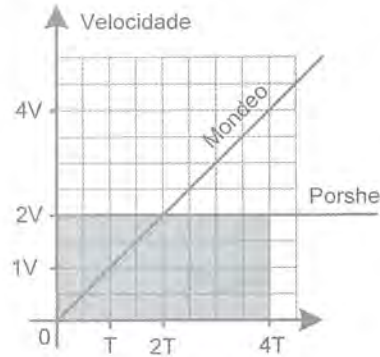


Figura 79

6 unidades de área $\equiv 3d \Rightarrow 1d = 2$ unidades de área (eq1)

Conforme o “método da gravata” do prof. Renato Brito (veja solução da Questão 76), o Mondeo alcançará o porsche no instante $2 \times 2T = 4T$.

Verifique que, de fato, as áreas sob o gráfico de cada móvel, no intervalo $[0, 4T]$, são iguais entre si (Figura 78), significando que eles percorreram distâncias iguais naquele intervalo de tempo, partindo de posições iguais em $t = 0$, confirmando que, de fato, eles se encontram cruzam no instante $4T$.

A distância total percorrida pelo Porsche (assim como pelo Mondeo), no intervalo $[0, 4T]$, é dada pela área hachurada na Figura 79:

$$D = 8 \times 4 = 32 \text{ quadradinhos} = 32 \text{ unidades de área}$$

$$D = 32 \text{ unidades de área} = 16 \times (2 \text{ unidades de área}) \stackrel{(eq1)}{=} 16 \times 1d = 16d$$

O Mondeo percorreu uma distância $16d$ até cruzar o Porsche.

Questão 78 - Resposta: $t = 9 \text{ s}$

Dica: Interprete apenas a área sob o gráfico, sem fazer cálculo. Leia a solução da questão 76.

Questão 79 - Resposta: a) 20 m, b) 8 m

Questão 80 - Solução

S_0 é a posição do móvel no instante inicial t_0 (t_0 não precisa ser igual a zero) do movimento daquele móvel; V_0 é a velocidade do móvel no instante inicial t_0 do movimento daquele móvel;

S é a posição do móvel num instante t do movimento daquele móvel, sendo t posterior a t_0 .

$$S_A = S_0 + V_0 \cdot (t - t_0) + \frac{a \cdot (t - t_0)^2}{2} \quad (\text{função horária geral de um MUV})$$

$$S_B = S_0 + V \cdot (t - t_0) \quad (\text{função horária geral de um MU})$$

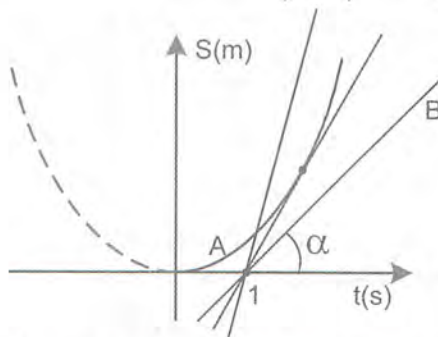
	Instante t_0	posição S_0
Móvel A	0 s	0 m
Móvel B	1 s	0 m

O móvel A parte da posição $S_0 = 0$ m no instante $t_0 = 0$ s, com velocidade $V_0 = 0$. O móvel B, por sua vez, parte da posição $S_0 = 0$ m do mesmo referencial, no instante $t_0 = 1$ s do mesmo relógio. Assim, as respectivas funções horárias serão:

$$S_A = S_0 + V_0 \cdot (t - t_0) + \frac{a \cdot (t - t_0)^2}{2} \Rightarrow$$

$$S_A = 0 + 0 \cdot (t - 0) + \frac{8 \cdot (t - 0)^2}{2} \Rightarrow S_A = 4 \cdot t^2 \quad (\text{eq1})$$

$$S_B = S_0 + V \cdot (t - t_0) \Rightarrow S_B = 0 + V \cdot (t - 1) \Rightarrow S_B = V \cdot t - V \quad (\text{eq2})$$



O gráfico da função $S_A(t)$ é uma parábola que passa pela origem. O gráfico da função $S_B(t)$ é uma reta que passa pelo ponto $(t, S) = (1, 0)$ e cuja inclinação ($\text{tg}\alpha$) é dada pelo coeficiente angular da reta (eq2), no caso, a velocidade V do móvel B. Variando-se a velocidade V do móvel B em eq2, a reta B gira em torno do ponto $(1,0)$. Quanto maior a velocidade B do móvel, maior será o ângulo de inclinação α (maior será o coeficiente angular).

Para velocidades V pequenas, a reta B não tocará a parábola (acompanhe pelo gráfico), implicando que a equação $S_A = S_B$ não terá solução, isto é, B nunca alcançará A.

Aumentando a velocidade V convenientemente, é possível obter uma reta B que tangencia a parábola (veja gráfico), indicando que a equação $S_A = S_B$ terá uma única solução real (distinta), isto é, B alcançará A “nas últimas”.

Aumentando a velocidade V ainda mais um pouco, a reta B passará a tocar a parábola em dois pontos, indicando que a equação $S_A = S_B$ terá duas soluções reais (distintas), isto é, B passará por A duas vezes.

A menor velocidade de B para que ainda consiga alcançar A é obtida quando a reta B tangencia a parábola, isto é, quando a equação $S_A = S_B$ tem uma única solução (distinta). Para isso, temos:

$$S_A = S_B \Rightarrow 4.t^2 = V.t - V \Rightarrow 4.t^2 - V.t + V = 0$$

Condição para solução única (tangência): $\Delta = 0$

$$(-V)^2 - 4.4.(V) = 0$$

$$V.(V - 16) = 0 \Rightarrow V = 0 \text{ ou } V = 16 \text{ m/s.}$$

A solução que convém é $V = 16 \text{ m/s}$. O móvel B alcançará A para qualquer V tal que $V \geq 16 \text{ m/s}$. Portanto, a menor velocidade que satisfaz o problema é $V = 16 \text{ m/s}$.

Questão 81 – Resposta

a) sim, b) 32 m, c) 8 m/s - Veja a resolução da Questão 80.

Questão 82 - Solução

O gráfico revela uma dependência linear entre a variável dependente V^2 e a variável independente X , relação essa que pode ser escrita na forma $V^2 = a.X + b$, onde a e b são coeficientes a serem determinados.

Para $X = 1$, tem-se $V^2 = 32$: $V^2 = a.X + b \Rightarrow 32 = a.1 + b$

Para $X = 5$, tem-se $V^2 = 16$: $V^2 = a.X + b \Rightarrow 16 = a.5 + b$

Resolvendo-se o sistema nas variáveis a e b , encontram-se $a = -4$ e $b = 36$.

Substituindo na relação linear, vem :

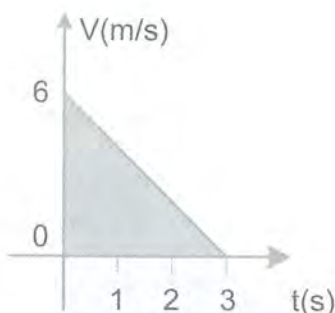
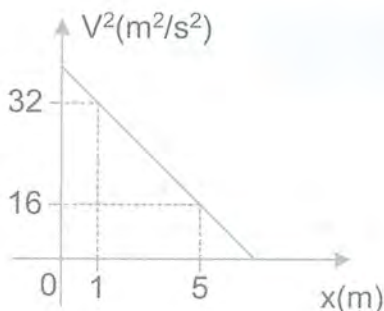
$$V^2 = a.X + b \Rightarrow V^2 = -4.X + 36 \text{ ou } V^2 = 36 - 4.X \text{ (eq1)}$$

A relação de Torricelli para o MUV pode ser escrita como $V^2 = V_0^2 + 2.a.X$ (eq2)

Comparando-se eq1 e eq2, obtém-se $V_0 = 6 \text{ m/s}$ e $a = -2 \text{ m/s}^2$.

A função horária da velocidade pode ser escrita como:

$$V = V_0 + a.t \Rightarrow V = 6 - 2.t$$



O gráfico dessa função $V(t)$ é mostrado na figura anterior.

- O carro se move com aceleração escalar constante $a = -2 \text{ m/s}^2$;
- A distância que o móvel percorre até parar é numericamente igual à área hachurada no gráfico acima, isto é, $D \equiv \text{área} \equiv 9 \text{ m}$;
- O carro pára no instante $t = 3 \text{ s}$, instante em que sua velocidade se anula ($V = 0$).

Questão 83 – Resposta

Dicas: Faça o gráfico $V \times t$ para o movimento. Analise a área sob o gráfico e as tangentes dos ângulos (inclinações das retas).

$$\text{a) } D = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha + \beta} \right) t^2, \quad \text{b) } V_{\max} = \left(\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha + \beta} \right) t$$

Questão 84 – Bala penetrando o alvo

Resposta: $\frac{(n-1)^2}{2n-1} d$

Dica: Use a equação de Torricelli do MUV duas vezes:

$$\left(u - \frac{u}{n} \right)^2 = u^2 - 2 \cdot a \cdot d \quad \text{e} \quad (0)^2 = \left(u - \frac{u}{n} \right)^2 - 2 \cdot a \cdot x$$

Questão 85 - Solução

Seja S o comprimento da pista de corrida e t o tempo que cada carro gasta para fazer todo o percurso.

Para o primeiro carro, podemos escrever: $S = v_1 \cdot t + \frac{a_1 \cdot t^2}{2}$ (eq1)

Para o segundo carro, podemos escrever: $S = v_2 \cdot t + \frac{a_2 \cdot t^2}{2}$ (eq2)

Subtraindo eq2 e eq1, membro a membro, vem:

$$(v_1 - v_2).t + \frac{(a_1 - a_2).t^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2.(v_1 - v_2)}{(a_2 - a_1)} \quad (\text{eq3})$$

Substituindo eq3 em eq1, vem:

$$S = v_1 \cdot \frac{2.(v_1 - v_2)}{(a_2 - a_1)} + \frac{a_1}{2} \left[\frac{2.(v_1 - v_2)}{(a_2 - a_1)} \right]^2 = \frac{2.(v_1 - v_2)}{(a_2 - a_1)} \left[v_1 + \frac{a_1.(v_1 - v_2)}{(a_2 - a_1)} \right]$$

$$S = \frac{2.(v_1 - v_2).(v_1.a_2 - v_2.a_1)}{(a_2 - a_1)^2}$$

Questão 86 - Solução

Aplicando a equação de Torricelli em cada um dos n trechos, vem:

$$v_1^2 - v_0^2 = 2(a) \frac{d}{n}$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2 \left(a + \frac{a}{n} \right) \frac{d}{n}$$

$$v_3^2 - v_2^2 = 2 \left(a + \frac{2a}{n} \right) \frac{d}{n}$$

$$v_4^2 - v_3^2 = 2 \left(a + \frac{3a}{n} \right) \frac{d}{n}$$

$$v_5^2 - v_4^2 = 2 \left(a + \frac{4a}{n} \right) \frac{d}{n}$$

.....

$$v_n^2 - v_{n-1}^2 = 2 \left(a + \frac{(n-1)a}{n} \right) \frac{d}{n}$$

Somando as n equações, membro a membro, vem:

$$v_n^2 - v_0^2 = \frac{2d}{n} \left(n.a + \frac{a}{n} + \frac{2a}{n} + \frac{3a}{n} + \frac{4a}{n} + \dots + \frac{(n-1)a}{n} \right)$$

$$v_n^2 - 0^2 = \frac{2d}{n} \left(n.a + \frac{1}{n} \cdot \frac{[a + a(n-1).(n-1)]}{2} \right)$$

$$v_n^2 = \frac{2.d.a}{n} \left(\frac{2n^2 + n^2 - n}{2n} \right) = \frac{2.d.a}{n} \left(\frac{3n^2 - n}{2n} \right) \quad \Rightarrow \quad v_n = \sqrt{d.a \left(3 - \frac{1}{n} \right)}$$

Questão 87 – Lançando para cima

Solução: Adotando um eixo referencial para cima \hat{S} , tomando o ponto $S_0 = 0$ no nível do solo, a função horária que fornece a posição escalar dessa bola, durante todo esse movimento, é dada por:

$$S = S_0 + V_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}, \text{ com } S_0 = 0, a = -g$$

$$S = 0 + V_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

Os instantes t_1 e t_2 , nos quais o móvel passa pela altura H ($S = H$), são as soluções da equação do 2º grau abaixo, na variável t :

$$H = 0 + V_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} \Rightarrow (g) \cdot t^2 + (-2 \cdot V_0) \cdot t + (2 \cdot H) = 0$$

Usando o conceito de soma e produto das raízes de uma equação do 2º grau, o produto das raízes da equação obtida acima permite escrever:

$$t_1 \cdot t_2 = \frac{2 \cdot H}{g} \Rightarrow g = \frac{2 \cdot H}{t_1 \cdot t_2} \quad \text{☺ (legal, né?)}$$

Questão 88 – Lançando para cima de novo

Solução: Continuando a resolução da questão anterior, podemos fazer uso do conceito de soma das raízes ($t_1 + t_2$) da equação do 2º grau, obtida anteriormente (na resolução da questão 87), a fim de determinar V_0 :

$$(g) \cdot t^2 + (-2 \cdot V_0) \cdot t + (2 \cdot H) = 0$$

$$t_1 + t_2 = \frac{-(-2 \cdot V_0)}{g} \Rightarrow V_0 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t_1 + t_2) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot H}{t_1 \cdot t_2} \right) \cdot (t_1 + t_2) \Rightarrow$$

$$V_0 = \frac{H}{t_1} + \frac{H}{t_2} \quad \text{☺ (massa, né?)}$$

Questão 89 – Fração 1/n na queda livre

Solução: Considere os seguintes parâmetros:

T = tempo total da queda livre a partir do repouso;

H_T = altura total caída, a partir do repouso, do instante $t = 0$ ao instante $t = T$;

H_{T-1} = altura total caída, a partir do repouso, do instante $t = 0$ ao instante $t = T-1$;

H_1 = distância percorrida pelo corpo durante o último segundo da queda.

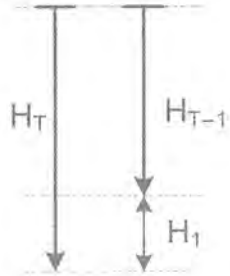
As alturas H_T e H_{T-1} são dadas, respectivamente, por:

$$H_T = \frac{g \cdot T^2}{2} \quad (\text{eq1}) \quad \text{e} \quad H_{T-1} = \frac{g \cdot (T-1)^2}{2} \quad (\text{eq2})$$

Da geometria do problema, vemos que:

$$H_T - H_{T-1} = H_1 \quad (\text{eq3})$$

Do enunciado do problema, temos que: $H_1 = \frac{H_T}{n}$ (eq4)



Substituindo eq4 em eq3, vem:

$$H_T - H_{T-1} = \frac{H_T}{n} \Rightarrow H_T - \frac{H_T}{n} = H_{T-1} \Rightarrow H_T \cdot \frac{(n-1)}{n} = H_{T-1}$$

Usando eq1 e eq2, vem:

$$\frac{g \cdot T^2}{2} \cdot \frac{(n-1)}{n} = \frac{g \cdot (T-1)^2}{2} \Rightarrow T^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = (T-1)^2 \Rightarrow T \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \pm(T-1)$$

Assim, caímos nas duas equações do 1º grau baixo:

$$T \cdot k = \pm(T-1) \quad (\text{eq5}) \quad \text{com} \quad k = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \quad (\text{eq6})$$

1ª solução: $T \cdot k = +(T-1) \Rightarrow T \cdot k = T-1 \Rightarrow$

$$T = \frac{1}{1-k} = \frac{1}{1 - \sqrt{\left(\frac{n-1}{n}\right)}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}, \text{ racionalizando, vem: } T = n + \sqrt{n^2 - n}$$

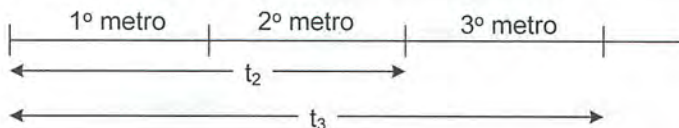
2ª solução: $T \cdot k = -(T-1) \Rightarrow T \cdot k = 1 - T \Rightarrow T = \frac{1}{1+k}$ (eq7)

Sendo n um número natural positivo, observando eq6, facilmente concluímos que k está compreendido no intervalo $0 < k < 1$. Assim, o tempo T dado pela relação eq7 está compreendido no intervalo $0 < T < 1$. Esse valor de T portanto não convém para o nosso problema. O motivo disso é que o enunciado fala sobre o “último segundo da queda” e, para que esse “último segundo da queda” ocorra, o movimento deve ter uma duração superior a 1 segundo ($T > 1$ s).

Assim, a única solução para o problema é $T = n + \sqrt{n^2 - n}$.

Questão 90 – O n-ésimo metro de uma queda livre

Solução: Considere a reta abaixo dividida em vários segmentos de mesmo comprimento 1 metro cada. Um móvel que parte do repouso na origem, em MRUV, leva quanto tempo para percorrer o 3º intervalo de comprimento 1 metro, ou seja, o 3º metro dessa reta ?



Para isso, calculamos o tempo t_2 que o móvel leva para percorrer os 2 primeiros metros a partir do repouso. Em seguida calculamos o tempo t_3 que ele leva para percorrer os 3 primeiros metros a partir do repouso. Em seguida, a diferença $\Delta t = t_3 - t_2$ fornecerá o tempo que o móvel leva para percorrer o 3º metro do movimento.

Analogamente, quanto tempo ele leva para percorrer o n-ésimo intervalo de comprimento 1 metro, ou seja, o n-ésimo metro dessa reta ?

Para isso, calculamos o tempo t_{n-1} que o móvel leva para percorrer os $n-1$ primeiros metros a partir do repouso. Em seguida calculamos o tempo t_n que ele leva para percorrer os n primeiros metros a partir do repouso. Finalmente, a diferença $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ fornecerá o tempo que o móvel leva para percorrer o n-ésimo metro do movimento.

- Calculando o tempo t_{n-1} que o móvel leva para percorrer os $n-1$ primeiros metros a partir do repouso:

$$n-1 = \frac{a \cdot (t_{n-1})^2}{2} \Rightarrow t_{n-1} = \sqrt{\frac{2(n-1)}{a}}$$

- Calculando o tempo t_n que ele leva para percorrer os n primeiros metros a partir do repouso:

$$n = \frac{a \cdot (t_n)^2}{2} \Rightarrow t_n = \sqrt{\frac{2n}{a}}$$

- Calculando a diferença Δt :

$$\Delta t = t_n - t_{n-1} = \sqrt{\frac{2n}{a}} - \sqrt{\frac{2(n-1)}{a}} = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

- No caso particular da queda livre, a aceleração do movimento vale $a = g$, assim, teremos:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2n}{g}} - \sqrt{\frac{2(n-1)}{g}} \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

Questão 91 – O n-ésimo metro de um MUV

Solução: Seja V_0 a velocidade inicial e a a aceleração escalar de um móvel em MUV. Do conceito de aceleração escalar, sabemos que:

No instante $t = 0$ s, a velocidade do corpo vale: V_0

No instante $t = 1$ s, a velocidade do corpo vale: $V_0 + a$

No instante $t = 2$ s, a velocidade do corpo vale: $V_0 + 2a$

No instante $t = 3$ s, a velocidade do corpo vale: $V_0 + 3a$

No instante $t = n-1$, a velocidade do corpo vale: $V_0 + (n-1) \cdot a$

No instante $t = n$, a velocidade do corpo vale: $V_0 + n \cdot a$

Num MUV, a velocidade escalar média, num certo intervalo de tempo, pode ser calculada pela média aritmética das velocidades do móvel no início e no término do referido intervalo de tempo.

A seguir, calcularemos a velocidade média do móvel durante o n-ésimo segundo desse movimento, que vai do instante $t = n-1$ até o instante $t = n$. Conforme vimos inicialmente, nesse intervalo de tempo, a velocidade do móvel varia desde $V_i = V_0 + (n-1) \cdot a$ até $V_f = V_0 + n \cdot a$:

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{V_i + V_f}{2} \Rightarrow \frac{\Delta S}{n - (n-1)} = \frac{V_0 + (n-1) \cdot a + V_0 + n \cdot a}{2}$$

$$\frac{\Delta S}{1} = \frac{2V_0 + (2n-1) \cdot a}{2} \Rightarrow \Delta S = V_0 + \frac{a \cdot (2n-1)}{2}$$

A expressão acima fornece a distância ΔS percorrida pelo móvel durante o n-ésimo segundo do seu movimento.

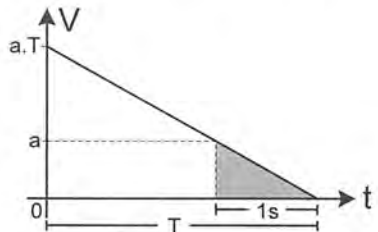
Questão 92 - Solução

A distância percorrida no último segundo do movimento é dada pela área hachurada no gráfico abaixo. A distância total percorrida durante o processo de frenagem é dada pela área do triângulo maior embaixo do gráfico. Segundo o enunciado, a área menor é uma fração $1/n$ da área maior, portanto:

$$\frac{a \cdot 1}{2} = \frac{1}{n} \left(\frac{a \cdot T \cdot T}{2} \right) \Rightarrow T = \sqrt{n} \quad (\text{eq1})$$

A distância total percorrida durante o movimento, dada pela área do triângulo maior, vale, portanto:

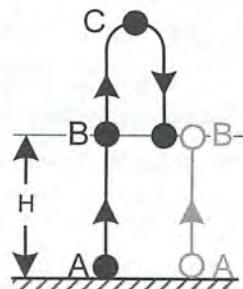
$$d = \frac{a \cdot T \cdot T}{2} = \frac{a \cdot T^2}{2} = \frac{a \cdot (\sqrt{n})^2}{2} \Rightarrow d = \frac{a \cdot n}{2}$$



A velocidade inicial do móvel vale $V_0 = a \cdot T \Rightarrow V_0 = a \sqrt{n}$

Questão 93 - Solução

A questão pede que os dois corpos, lançados verticalmente para cima com velocidades iguais, se encontrem mutuamente a uma altitude H medida em relação ao solo. Ora, se eles fossem lançados simultaneamente, certamente fariam todo o percurso lado a lado (juntos) e portanto passariam juntos por esse nível de altitude H tanto na subida quanto na descida. Entretanto, a questão pede que eles não sejam lançados simultaneamente, mas sim, que haja um atraso entre os lançamentos deles. Nesse caso, o encontro deles, a uma altitude H em relação ao solo, dar-se-á quando o corpo que foi lançado primeiro já estiver em seu movimento de descida e cruzar com o segundo corpo ainda em seu movimento ascendente, como sugere a figura ao lado.



Então a pergunta é: “quanto deve ser o intervalo de tempo entre os lançamentos dos corpos para que eles cruzem um pelo outro a uma altitude H do solo?”

Ora, observando o movimento dos corpos, vemos que, desde o lançamento deles (na posição A) até o instante do encontro (na posição B), o primeiro corpo (bola preta) percorrerá o trecho $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B$ enquanto o segundo (bola branca) percorrerá apenas o trecho $A \rightarrow B$. Assim, pelo fato de percorrer o trecho $B \rightarrow C \rightarrow B$ a mais, o primeiro corpo tende a chegar atrasado ao local do encontro pois gastará a mais em seu percurso o tempo Δt_{BCB} correspondente trecho $B \rightarrow C \rightarrow B$. Assim, para compensar de forma que eles cheguem juntos ao local do encontro, não devemos lançar o segundo corpo junto com o primeiro, mas sim, com um atraso Δt_{BCB} em relação ao lançamento do primeiro.

Assim, nossa missão agora é determinar quanto vale esse intervalo de tempo Δt_{BCB} que o primeiro corpo gasta para percorrer o trecho $B \rightarrow C \rightarrow B$. Se o corpo preto for lançado a partir de A no instante $t = 0$, passar por B no instante t_1 na subida e, novamente, passar por B na descida no instante t_2 , o intervalo de tempo desejado é a diferença $\Delta t_{BCB} = t_2 - t_1$. Os instantes t_1 e t_2 são as soluções da equação:

$$H = v_0 t - g \frac{t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad g \cdot t^2 - 2v_0 t + 2H = 0$$

Assim, o intervalo de tempo desejado é a diferença entre as raízes dessa equação, que é dada por:

$$\Delta t_{BCB} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$$

$$\Delta t_{BCB} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} = \frac{\sqrt{4v_0^2 - 8gH}}{g} \quad \Rightarrow \quad \Delta t_{BCB} = \frac{2}{g} \sqrt{v_0^2 - 2gH}$$

Questão 94 - Solução

Admita que a segunda pedra alcance a primeira pedra t segundos após a primeira pedra ter sido abandonada. Assim, a distância percorrida pela primeira pedra em t segundos é igual à distância percorrida pela segunda pedra em $(t - n)$ segundos. Seja h a distância percorrida por ambas as pedras até que elas se encontrem.

Para a primeira pedra, temos: $h = (1/2)g.t^2$ (eq1)

Para a segunda pedra, temos: $h = u.(t - n) + (1/2)g.(t - n)^2$ (eq2)

De eq1 e eq2, vem: $(1/2)g.t^2 = u.(t - n) + (1/2)g.(t - n)^2$

$g.t^2 = 2u.(t - n) + g.(t^2 - 2nt + n^2) \Rightarrow 2t.(u - g.n) = n.(2u - g.n)$

$$t = \frac{n \cdot (2u - g.n)}{2(u - gn)} \quad (\text{eq3})$$

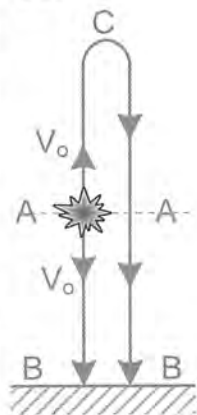
Substituindo eq3 em eq1, vem: $h = (1/2)g.t^2 \Rightarrow h = \frac{g}{2} \left[\frac{n \cdot (2u - g.n)}{2(u - gn)} \right]^2$

Questão 95 - Solução

No instante $t = 0$ s, a bomba explode em A e se parte em dois fragmentos que adquirem, logo após a explosão, velocidades de mesmo valor, mesma direção e sentidos contrários $\uparrow V_0$ e $\downarrow V_0$. Um dos fragmentos atinge o solo no instante T , enquanto o outro só chega ao solo no instante $T + 6$ s.

Ora, o fragmento que sobe gasta tempos iguais nos trechos $A \rightarrow C$ (subida) e $C \rightarrow A$ (descida), passando novamente pelo ponto A com a mesma velocidade inicial V_0 , só que agora em sentido descendente, gastando portanto, no trecho final $A \rightarrow B$, o mesmo tempo T gasto pelo primeiro fragmento para atingir o solo.

Assim, os 6 segundos a mais que o segundo fragmento gasta em seu percurso até atingir o solo referem-se ao trecho $A \rightarrow C \rightarrow A$ que ele percorre a mais do que o outro. Pela simetria, deduzimos que esse fragmento ascendente gasta 3 s tanto no trecho $A \rightarrow C$ (subida) quanto no trecho $C \rightarrow A$ (descida).



Assim, sendo $a = g = 10 \text{ m/s}^2$, se o tempo de subida do fragmento do fragmento ascendente é de 3 segundos, deduzimos que sua velocidade logo após a explosão vale $V_0 = \uparrow 30 \text{ m/s}$.

Questão 96 - Solução

Para a primeira pedra, temos:

$$H = \frac{g \cdot t_1^2}{2} \Rightarrow g = \frac{2H}{t_1^2} \quad (\text{eq1})$$

Aplicando-se Torricelli para o movimento de subida da segunda pedra, temos:

$$0^2 = V_0^2 - 2gh \Rightarrow V_0^2 = 2gh \stackrel{(\text{eq1})}{=} 2 \left(\frac{2H}{t_1^2} \right) h \Rightarrow V_0 = \frac{2}{t_1} \sqrt{Hh} \quad (\text{eq2})$$

Para o movimento completo (subida e descida) da segunda pedra, adotaremos um eixo referencial para cima \hat{S} . A posição inicial da pedra na beira do precipício será arbitrada como $S_0 = 0$ e a posição final (lá embaixo no solo, em $t = t_2$) valerá portanto $S_2 = -H$. Assim:

$$S_2 = S_0 + V_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}, \text{ com } a = -g \text{ e } t = t_2:$$

$$-H = 0 + V_0 \cdot t_2 - \frac{g \cdot t_2^2}{2} \Rightarrow V_0 \cdot t_2 + H = g \frac{t_2^2}{2} \quad (\text{eq3})$$

Substituindo eq1 e eq2 em eq3, vem:

$$V_0 \cdot t_2 + H = g \frac{t_2^2}{2} \Rightarrow \left(\frac{2}{t_1} \sqrt{Hh} \right) \cdot t_2 + H = \left(\frac{2H}{t_1^2} \right) \frac{t_2^2}{2}$$

$$\frac{2 \cdot t_2}{t_1} \sqrt{Hh} + H = \frac{t_2^2}{t_1^2} \cdot H \Rightarrow \frac{2 \cdot t_2}{t_1} \sqrt{Hh} = \frac{t_2^2}{t_1^2} \cdot H - H$$

$$\frac{2 \cdot t_2}{t_1} \sqrt{Hh} = H \left(\frac{t_2^2 - t_1^2}{t_1^2} \right) \Rightarrow \left(\frac{2t_2}{t_1} \right)^2 H \cdot h = H^2 \left(\frac{t_2^2 - t_1^2}{t_1^2} \right)^2$$

$$H = \frac{4 \cdot t_1^2 \cdot t_2^2 \cdot h}{(t_2^2 - t_1^2)^2}$$

Questão 97 - Resposta: $\sqrt{t_1 \cdot t_2}$, Dica: veja a resolução da questão 96.

Questão 98 - Solução

Esse é um problema de lançamento vertical \uparrow , e não, um problema de lançamento oblíquo \nearrow . A bola sobe \uparrow verticalmente, pára ao atingir a altura máxima e desce verticalmente \downarrow com aceleração g . Não confunda o formato parabólico do gráfico $h \times t$ com a trajetória do corpo, que será uma reta vertical.

Seja x a altura caída pelo corpo, a partir do repouso, num intervalo de tempo $\Delta t_1 / 2$. Podemos escrever:

$$x = \frac{g}{2} \left(\frac{\Delta t_1}{2} \right)^2$$

Seja y a altura caída pelo corpo, a partir do repouso, num intervalo de tempo $\Delta t_2 / 2$. Podemos escrever:

$$y = \frac{g}{2} \left(\frac{\Delta t_2}{2} \right)^2$$

Entretanto, pelo gráfico, vemos que:

$$y - x = h \Rightarrow \frac{g}{2} \left(\frac{\Delta t_2}{2} \right)^2 - \frac{g}{2} \left(\frac{\Delta t_1}{2} \right)^2 = h \Rightarrow g = \frac{8h}{\Delta t_2^2 - \Delta t_1^2}$$

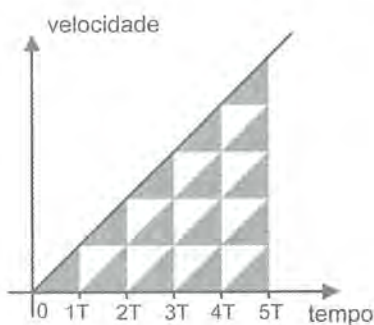
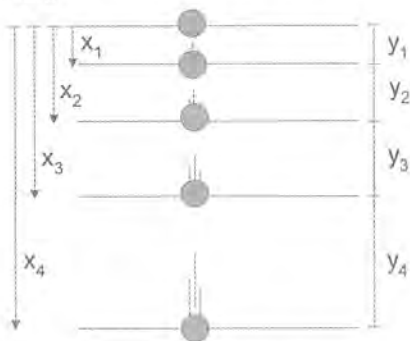
Questão 99 - Solução

A área sob o gráfico $v \times t$, compreendida num certo intervalo de tempo, é numérica-mente igual à distância percorrida pelo móvel naquele respectivo intervalo de tempo. Seja k a área de qualquer um dos triângulos que brancos ou cinzas que aparecem sob o gráfico $V \times t$ mostrado na figura.

É fácil verificar que a distância x_1 percorrida pelo móvel no intervalo $[0, 1T]$ corresponde a área de 1 triângulo, ou seja, $x_1 = k$.

Note que a distância x_2 percorrida pelo móvel no intervalo $[0, 2T]$ corresponde a área de $1 + 3 = 4$ triângulos (para isso, conte os triângulos na figura), ou seja, $x_2 = 4k$.

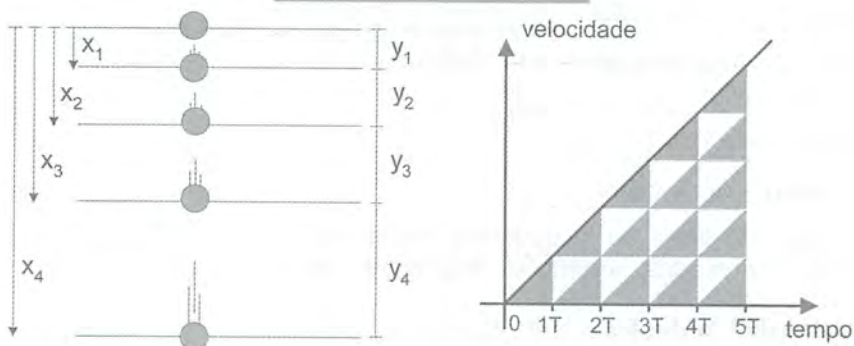
Já a distância x_3 percorrida pelo móvel no intervalo $[0, 3T]$ corresponde a área de $1 + 3 + 5 = 9$ triângulos (para isso, conte os triângulos na figura), ou seja, $x_3 = 9k$.



A distância x_4 percorrida pelo móvel no intervalo $[0, 4T]$ corresponde a área de $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ triângulos (para isso, conte os triângulos na figura), ou seja, $x_4 = 16k$.

Assim, verificamos que, de fato, as distâncias $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ etc. na figura satisfazem a proporção a seguir:

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{4} = \frac{x_3}{9} = \frac{x_4}{16} \dots = \frac{x_n}{n^2}$$



Adicionalmente, é fácil verificar que a distância y_1 percorrida pelo móvel no intervalo $[0, 1T]$ corresponde a área de um triângulo, ou seja, $y_1 = 1k$.

A distância y_2 percorrida pelo móvel no intervalo $[1T, 2T]$ corresponde à área de 3 triângulos (para isso, conte os triângulos na figura), ou seja, $y_2 = 3k$.

Já a distância y_3 percorrida pelo móvel no intervalo $[2T, 3T]$ corresponde à área de 5 triângulos (para isso, conte os triângulos na figura), ou seja, $y_3 = 5k$.

A distância y_4 percorrida pelo móvel no intervalo $[3T, 4T]$ corresponde à área de 7 triângulos (para isso, conte os triângulos na figura), ou seja, $y_4 = 7k$.

Assim, verificamos que, de fato, as distâncias $y_1, y_2, y_3, y_4, \dots$ etc. na figura satisfazem a proporção a seguir:

$$\frac{y_1}{1} = \frac{y_2}{3} = \frac{y_3}{5} = \frac{y_4}{7} \dots = \frac{y_n}{2n-1}$$

Ao olhar para essa figura que mostra os corpos em queda, chamo a atenção do leitor para as duas formas de interpretar essa figura:

1ª interpretação: A figura trata-se da superposição de uma sequência de fotografias distintas de um único corpo em queda livre, batidas em intervalos de tempos iguais.

2ª interpretação: A figura trata-se de uma única fotografia de vários corpos distintos, que foram sucessivamente abandonados do repouso, de uma mesma posição inicial, regularmente, em intervalos de tempos iguais.

Com essas duas interpretações, as Proporções de Galileu para a Queda Livre são muito úteis na resolução de problemas, tanto de queda livre, quanto de qualquer outro MRUV, desde que o corpo parta do repouso.

Questão 100 - Solução

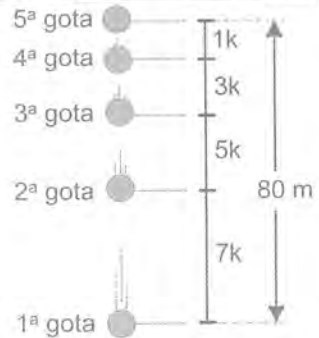
Aplicando-se as proporções de Galileu para a queda livre, vem:

$$1k + 3k + 5k + 7k = 80 \text{ m}$$

$$16k = 80 \text{ m} \Rightarrow k = 5 \text{ m}$$

De posse do valor de k , podemos determinar qualquer uma das distâncias mostradas na figura ao lado.

Em particular, a distância que separa a 3ª da 4ª gota, nesse instante, vale $3k = 15 \text{ m}$.



Resposta correta: Letra D

Questão 101 – Resposta: letra B

Questão 102 – Resposta: 4 m, 12 m, 20 m, 28 m respectivamente.

Questão 103 – Resposta: C

Questão 104 - Solução

Considere as 8 gotas em queda livre mostradas na figura ($N = 8$). A que altura H se encontra a 6ª gota no instante em que a 1ª gota toca o solo?

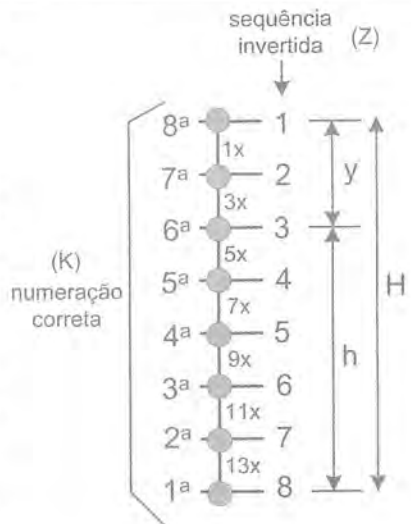
Como são 8 gotas ao todo, existem $8 - 1 = 7$ interstícios entre elas. Assim pelas proporções de Galileu, a altura total H é proporcional ao quadrado da quantidade de interstícios, portanto:

$$H = (8-1)^2 \cdot x$$

Se você somar $1x + 3x + 5x + \dots + 13x$ encontrará, de fato, $49x$. Em linhas gerais, teremos:

$$H = (N - 1)^2 \cdot x \quad (\text{eq1})$$

Para facilitar a análise, ao lado da numeração correta (k) na figura, escrevemos essa mesma numeração, porém, na ordem invertida (z).



Note que, para cada gota, a soma da numeração correta (k) com a numeração invertida (z) sempre resulta $N+1$, ou seja, sempre resulta 9. Veja na figura: $8+1 = 7+2 = 6+3 = 5+4 = 9$. Generalizando, para cada gota, vale a relação

$$k + z = N + 1 \quad \Rightarrow \quad z = N - k + 1 \quad (\text{eq2})$$

Se a 6ª gota ($k = 6$) é a gota número 3 da numeração invertida ($z = 3$), a altura $y = 1x + 3x = 4x$ que essa gota já caiu corresponde aos $3 - 1 = 2$ primeiros interstícios. Pelas proporções de Galileu, essa altura y caída pela gota é proporcional ao quadrado da quantidade de interstícios, portanto:

$$y = (3 - 1)^2 \cdot x = (z - 1)^2 \cdot x \stackrel{(\text{eq2})}{=} (N - k + 1 - 1)^2 \cdot x \Rightarrow y = (N - k)^2 \cdot x \quad (\text{eq3})$$

Da figura, vemos que a altura h da 6ª gota, portanto, será dada por:

$$h = H - y \stackrel{(\text{eq3})}{=} H - (N - k)^2 \cdot x \stackrel{(\text{eq1})}{=} H - (N - k)^2 \cdot \frac{H}{(N - 1)^2}$$

Tirando o mmc, chegamos à resposta: $h = \frac{(2N - k - 1)(k - 1) \cdot H}{(N - 1)^2} \quad (\text{eq4}) \quad \text{☺}$

Podemos verificar a resposta obtida no caso particular mostrado na figura:

$$h = 5x + 7x + 9x + 11x + 13x = 45x$$

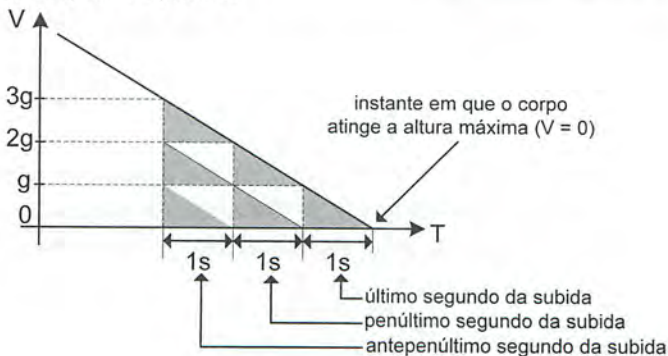
$$H = 1x + 3x + 5x + \dots + 13x = 49 \cdot x \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{H} = \frac{45x}{49x} \Rightarrow h = \frac{45H}{49}$$

Fazendo $N = 8$ e $k = 6$ na resposta literal obtida, também encontraremos:

$$h = \frac{(2N - k - 1)(k - 1) \cdot H}{(N - 1)^2} = \frac{(16 - 6 - 1)(6 - 1) \cdot H}{(8 - 1)^2} = \frac{45H}{49}$$

Questão 105 - Solução

Quando um corpo é lançado verticalmente para cima sob ação de um campo gravitacional uniforme de intensidade $g = 10 \text{ m/s}^2$, a velocidade do corpo diminui linearmente num ritmo de 10 m/s em 10 m/s , a cada 1 segundo durante a subida. Assim, nos últimos instantes da subida, a velocidade do corpo valerá 40 m/s , 30 m/s , 20 m/s , 10 m/s , 0 m/s .



No caso de uma gravidade genérica g , a velocidade do corpo, nos últimos segundos da subida, também será numericamente igual a $4g$, $3g$, $2g$, $1g$, 0 , como mostra o gráfico anterior. Assim, a distância x percorrida pelo corpo durante o último segundo da subida é numericamente igual à área do último triângulo cinza, ou seja:

$$x = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{1 \cdot g}{2} \Rightarrow x = \frac{g}{2}$$

Usando as Proporções de Galileu, observando a área sob o gráfico, vemos que a distância percorrida pelo corpo no penúltimo segundo do movimento será $3x = 3 \cdot g/2$, assim como a distância percorrida pelo corpo no antepenúltimo segundo do movimento será $5x = 5 \cdot g/2$, e assim por diante.

Questão 106 - Solução

a) Como vimos na solução da questão anterior, a distância percorrida pela pedra no penúltimo segundo da subida é numericamente igual a $3 \cdot g/2$, portanto:

$$3 \cdot g/2 = 6 \Rightarrow g = 4 \text{ m/s}^2$$

Note que a unidade física usada para a gravidade foi m/s^2 pelo fato de as unidades envolvidas no problema serem metros e segundos.

b) A distância percorrida pela pedra, durante o último segundo da subida, é numericamente igual a $g/2$, ou seja, vale $4/2 = 2$ metros.

c) A pedra levou 4 s para atingir a altura máxima, portanto:

$$V = V_0 - g \cdot t \Rightarrow 0 = V_0 - 4 \cdot (4) \Rightarrow V_0 = 16 \text{ m/s}$$

Questão 107 - Solução

De acordo com a resolução da questão 105, podemos escrever:

$$3 \cdot g/2 - 1 \cdot g/2 = 8 \Rightarrow g = 8 \text{ m/s}^2 \quad (\text{Fácil, né? } \textcircled{smiley})$$

Resposta Correta: letra B

Questão 108 – Resposta: a) 40 m/s , b) 80 m

Questão 109 – Solução

O alcance horizontal, num lançamento de projéteis num solo horizontal, é dado pela expressão:

$$A\alpha = \frac{(V_0)^2}{g} \cdot \text{sen}(2\alpha)$$

Se dois projéteis são lançados de uma mesma posição no solo, com a mesma velocidade inicial V_0 , com ângulos de disparos respectivamente iguais a α e β , com $\alpha > \beta$, qual a condição para que eles atinjam alcances horizontais iguais ?

$$A\alpha = \frac{(V_0)^2}{g} \cdot \text{sen}(2\alpha), \quad A\beta = \frac{(V_0)^2}{g} \cdot \text{sen}(2\beta)$$

$$A\alpha = A\beta \Rightarrow \frac{(V_0)^2}{g} \cdot \text{sen}(2\alpha) = \frac{(V_0)^2}{g} \cdot \text{sen}(2\beta) \Rightarrow \text{sen}(2\alpha) = \text{sen}(2\beta)$$

Solução 1: $\alpha = \beta$ (não convém para o nosso problema)

Solução 2: $(2\alpha) + (2\beta) = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$

Portanto, concluímos que a condição para se obter alcances iguais é disparar projéteis com ângulos complementares ($\alpha + \beta = 90^\circ$).

O enunciado diz que, disparando o projétil com ângulos respectivamente iguais a " α " e " 2α ", obtêm-se alcances iguais, portanto, esses ângulos são, necessariamente, complementares:

$$\alpha + 2\alpha = 90 \Rightarrow \alpha = 30^\circ \text{ e } 2\alpha = 60^\circ$$

E as alturas máximas, como são calculadas? Ora, $H_{\max} = \frac{(V_0)^2}{2g} \cdot (\text{sen}\alpha)^2$

$$H_{\max 30} = \frac{(V_0)^2}{2g} \cdot (\text{sen } 30^\circ)^2 = \frac{(V_0)^2}{2g} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{(V_0)^2}{2g} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$H_{\max 60} = \frac{(V_0)^2}{2g} \cdot (\text{sen } 60^\circ)^2 = \frac{(V_0)^2}{2g} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{(V_0)^2}{2g} \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \Rightarrow H_{\max 60} = 3 \cdot H_{\max 30}$$

Portanto, como a altura máxima obtida no 1º disparo vale $H_{\max 30} = 20$ m, a altura máxima atingida no 2º disparo será:

$$H_{\max 60} = 3 \cdot H_{\max 30} = 3 \times 20 = 60 \text{ m}$$

Questão 110 –Resposta: 30 m

Questão 111 - Solução

Seja d a distância do lançador ao alvo visado. Quando lançado em um ângulo α com a horizontal, um projétil cai a uma distância a antes do alvo:

$$\frac{(V_0)^2}{g} \cdot \text{sen}(2\alpha) = d - a \quad (\text{eq1})$$

Quando lançado em um ângulo β , ele cai a uma distância b após o alvo:

$$\frac{(V_0)^2}{g} \cdot \text{sen}(2\beta) = d + b \quad (\text{eq2})$$

Qual o ângulo θ com o qual ele deve ser lançado para que atinja o alvo?

$$\frac{(V_0)^2}{g} \cdot \text{sen}(2\theta) = d \quad (\text{eq3})$$

De eq1 e eq3, vem: $\frac{(V_0)^2}{g} \cdot \text{sen}(2\theta) - \frac{(V_0)^2}{g} \cdot \text{sen}(2\alpha) = a \quad (\text{eq4})$

De eq2 e eq3, vem: $\frac{(V_o)^2}{g} \cdot \text{sen}(2\beta) - \frac{(V_o)^2}{g} \cdot \text{sen}(2\theta) = b$ (eq5)

Dividindo eq4 e eq5, membro a membro, vem:

$$\frac{\frac{(V_o)^2}{g} \cdot (\text{sen}2\theta - \text{sen}2\alpha)}{\frac{(V_o)^2}{g} \cdot (\text{sen}2\beta - \text{sen}2\theta)} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{(\text{sen}2\theta - \text{sen}2\alpha)}{(\text{sen}2\beta - \text{sen}2\theta)} = \frac{a}{b}$$

$$\text{sen}2\theta = \frac{a \cdot \text{sen}2\beta + b \cdot \text{sen}2\alpha}{a + b}$$

Questão 112 - Solução

Para que a velocidade da pedra, ao colidir com a rampa, seja perpendicular à rampa (Figura 80), devemos ter:

$$\text{tg}\alpha = \frac{V_x}{V_y} = \frac{V_o}{V_y} \Rightarrow V_y = V_o \cdot \text{cotg}\alpha \quad (\text{eq1})$$

A componente vertical da velocidade varia linearmente com o tempo (MUV), com aceleração $a = g$. Assim:

$$V_y = V_{oy} + g \cdot t \quad (\text{eq1}) \Rightarrow V_o \cdot \text{cotg}\alpha = 0 + g \cdot t \Rightarrow t = \frac{V_o \cdot \text{cotg}\alpha}{g} \quad (\text{eq2})$$

Durante esse tempo t de queda, a pedra sofre um deslocamento horizontal x (Figura 81) em MRU, tal que:

$$x = V_o \cdot t \quad (\text{eq2}) = V_o \cdot \frac{V_o \cdot \text{cotg}\alpha}{g} \Rightarrow x = \frac{V_o^2 \cdot \text{cotg}\alpha}{g} \quad (\text{eq3})$$

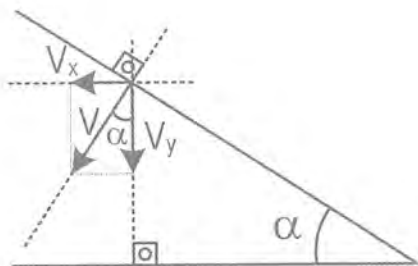


Figura 80

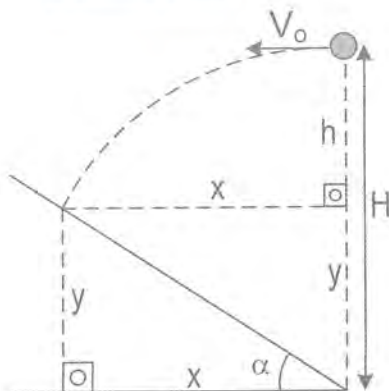


Figura 81

Simultaneamente, durante esse tempo t de queda, a pedra sofre um deslocamento vertical h (Figura 81) tal que:

$$h = \frac{g}{2} t^2 \stackrel{(eq2)}{=} \frac{g}{2} \left(\frac{V_0 \cdot \cot \alpha}{g} \right)^2 \Rightarrow h = \frac{V_0^2 \cot^2 \alpha}{2g} \quad (eq4)$$

Da Figura 81, vemos que $\text{tg} \alpha = y/x$, portanto $y = x \cdot \text{tg} \alpha$. Adicionalmente, temos:

$$y + h = H \stackrel{(eq4)}{\Rightarrow} x \cdot \text{tg} \alpha + \frac{V_0^2 \cot^2 \alpha}{2g} = H$$

$$\frac{V_0^2 \cdot \cot \alpha}{g} \cdot \text{tg} \alpha + \frac{V_0^2 \cot^2 \alpha}{2g} = H$$

$$V_0^2 \cdot (2 + \cot^2 \alpha) = 2gH \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2gH}{2 + \cot^2 \alpha}}$$

Questão 113 - Solução

Considere que um projétil seja lançado obliquamente com velocidade inicial representada pelo vetor \vec{V}_0 formando um ângulo α com a horizontal. Onde estará o projétil t segundos após o lançamento ?

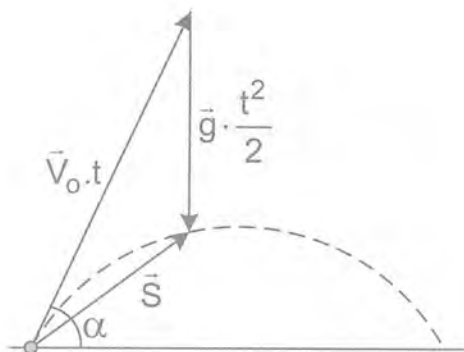


Figura 82

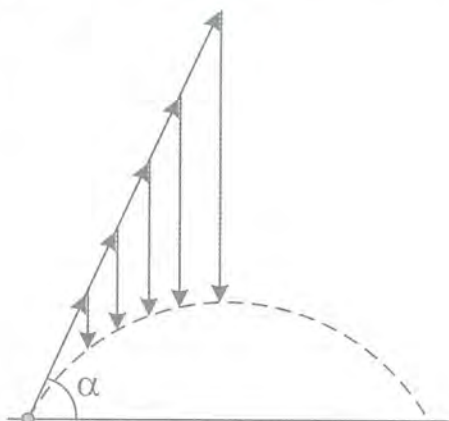


Figura 83

Ora, se não houvesse gravidade, ele se deslocaria em MRU, na direção do vetor \vec{V}_0 e sofreria um deslocamento representado pelo vetor $\vec{V}_0 \cdot t$ (Figura 82). Entretanto, como, na verdade, há gravidade, a natureza superpõe a esse deslocamento $\vec{V}_0 \cdot t$ um deslocamento adicional de queda livre, na mesma direção e sentido da aceleração da gravidade \vec{g} e de módulo $\vec{g} \cdot t^2 / 2$ (Figura 82).

O deslocamento vetorial resultante do projétil, nesse intervalo de tempo, é dado pela superposição desses dois movimentos independentes, sendo representado pelo vetor \vec{S} na Figura 82, tal que $\vec{S} = \vec{V}_0.t + \vec{g}.t^2/2$.

À medida que o parâmetro t vai aumentando de valor, os vetores $\vec{V}_0.t$ e $\vec{g}.t^2/2$ vão crescendo em módulo (Figura 83) e a extremidade do vetor deslocamento resultante \vec{S} vai gradativamente descrevendo uma parábola (Figura 84), que é a trajetória seguida pelo projétil durante o seu movimento.

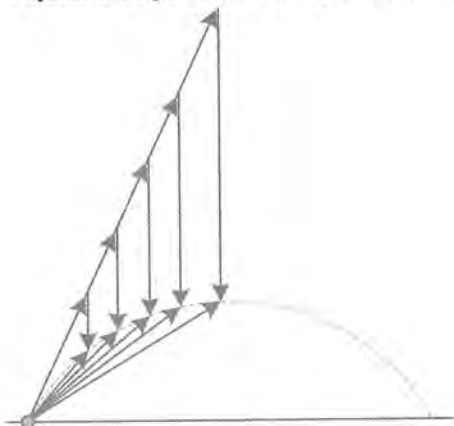


Figura 84

Assim, estamos interpretando um movimento parabólico de um projétil como sendo a superposição de dois movimentos independentes: um MRU na direção do vetor velocidade inicial \vec{V}_0 e uma queda livre na vertical. Essa interpretação alternativa dá ao leitor uma nova visão dos movimentos de projéteis. Podemos tirar proveito dessa visão alternativa para resolver questões interessantes, como esse clássico problema do caçador e do macaco.

Quando o projétil é disparado, o macaco entra em queda livre. No referencial da Terra, o movimento do projétil é a superposição do MRU ($\vec{V}_0.t$) com a queda livre $\vec{g}.t^2/2$, ao passo que o movimento do macaco é constituído apenas pela queda livre $\vec{g}.t^2/2$.

Mas como são esses movimentos, quando vistos a partir de um observador (referencial) que também se encontre em queda livre, isto é, que também execute o movimento $\vec{g}.t^2/2$? Ora, a partir do momento em que o próprio observador (referencial) também compartilha do mesmo movimento de queda $\vec{g}.t^2/2$ já compartilhado pelo projétil e pelo macaco, nesse referencial nenhum deles executa mais o movimento de queda. Em outras palavras,

nesse referencial, o projétil executa apenas o movimento $\vec{V}_0 \cdot t$ de MRU na direção do macaco, enquanto este não executa mais movimento nenhum, ou seja, permanece parado (Logicamente que, nesse referencial, o solo "cai para cima" com aceleração g até se chocar com o macaco).

Assim, analisando o problema a partir desse referencial em queda livre, tudo se passa como se tivéssemos desligado a gravidade. O projétil disparado segue em trajetória retilínea em MRU na direção exata do macaco imóvel e, assim, cedo ou tarde, irá alvejá-lo.

Só há um fato que pode salvar o macaco de ser alvejado: o animal em queda livre (no referencial da Terra) chegar ao solo antes de ser atingido pela bala. Nesse caso, a trajetória parabólica seguida pelo projétil (no referencial da Terra) toca o solo antes de cruzar com a trajetória retilínea vertical seguida pelo macaco, impedindo o sucesso desse tiro. Para driblar essa possibilidade de o macaco sair ileso, podemos inventar uma situação hipotética em que o projétil seja disparado da beira de um precipício de altura ilimitada. Nesse caso, a trajetória parabólica seguida pelo projétil fatalmente colidirá com o macaco em algum ponto da sua queda infinita, garantindo o sucesso do disparo.

a) Se o projétil for disparado com velocidade $V_0 = 100 \text{ m/s}$, em quanto tempo ele acertará o macaco? Esse cálculo é mais simples quando executado no referencial em queda livre (gravidade desligada). Nesse referencial, o projétil se desloca em MRU na direção exata do macaco e percorre apenas a hipotenusa de comprimento D até atingir o animal. Nesse caso, teremos:

$$t = \frac{D}{V_0} = \frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{V_0} = \frac{\sqrt{12^2 + 16^2}}{100} = \frac{20\text{m}}{100\text{m/s}} = 0,2\text{s}$$

Entretanto, como dissemos, a única forma de o macaco escapar do tiro é se ele chegar ao solo antes de ser alvejado, ou seja, antes do instante $t = 0,2 \text{ s}$. Ora, no referencial da Terra, o macaco executa uma queda livre. O tempo de queda do macaco é dado por:

$$h = \frac{g \cdot t_q^2}{2} \Rightarrow 16 = \frac{10 \cdot t_q^2}{2} \Rightarrow t_q = 1,78\text{s}$$

Assim, como $0,2 \text{ s} < 1,78 \text{ s}$, vemos que o macaco ainda estará caindo no instante $t = 0,2 \text{ s}$, portanto, o macaco será alvejado pela bala.

b) Se o projétil for disparado com velocidade $V_0 = 10 \text{ m/s}$, em quanto tempo ele acertará o macaco? No referencial em queda livre, o projétil se desloca em trajetória retilínea em MRU na direção exata do macaco e percorre apenas a hipotenusa de comprimento D até atingir o animal. Nesse caso, teremos:

$$t = \frac{D}{V_0} = \frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{V_0} = \frac{\sqrt{12^2 + 16^2}}{10} = \frac{25\text{m}}{10\text{m/s}} = 2,5\text{s}$$

Entretanto, como dissemos, a única forma de o macaco escapar do tiro é se ele chegar ao solo antes de ser alvejado, ou seja, antes do instante $t = 2,5$ s. Ora, como 2,5 s é maior do que o tempo de queda do macaco ($2,5 \text{ s} > 1,78 \text{ s}$), vemos que o macaco já terá chegado ao solo no instante $t = 2,5$ s e, portanto, a trajetória parabólica seguida pelo projétil (em relação à Terra) atingirá o solo antes de chegar ao macaco, levando o projétil ao repouso. Nesse caso, o macaco escapa de ser alvejado.

Chamo a atenção do leitor para o fato de que essa estratégia de usar o referencial em queda livre para “desligar a gravidade” só dá o efeito desejado quando esse referencial inicia a sua queda juntamente com os corpos da questão, a fim de que o tempo de queda Δt em $1/2 \cdot g \cdot \Delta t^2$ seja igual para todos. Para isso, os corpos, por sua vez, precisam iniciar seus movimento no campo gravitacional uniforme *simultaneamente*. Em problemas em que os projéteis não foram disparados simultaneamente, não há como “desligar a gravidade do problema”.

Questão 114 - Solução

a) Conforme a resolução da questão anterior, no referencial em queda livre, o projétil se moverá em MRU na direção exata do macaco e, conforme o enunciado da questão, atingirá o macaco no instante dado por:

$$t = \frac{D}{V_o} = \frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{V_o}$$

b) No referencial da Terra, o macaco cai em queda livre e, no instante t encontrado no item a, já terá sofrido o deslocamento:

$$\Delta y = \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2} \left(\frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{V_o} \right)^2 = \frac{g \cdot (d^2 + h^2)}{2 \cdot V_o^2}$$

Logicamente que, ao admitir que o macaco é atingido pelo projétil, o enunciado está garantindo que o macaco não chega ao solo antes de ser alvejado, ou seja, que o deslocamento Δy calculado anteriormente é menor do que a altura inicial do macaco em relação ao solo ($\Delta y < h$).

Questão 115 - Solução

a) Conforme a resolução da questão 113, no referencial em queda livre (ou seja, desligando a gravidade), os projéteis descrevem trajetórias retilíneas em MRU e, portanto, para que eles sempre colidam, as distancias percorridas por cada um devem satisfazer a lei dos senos:

$$\frac{V_A \cdot t}{\text{sen}\beta} = \frac{V_o \cdot t}{\text{sen}\alpha} \quad \Rightarrow \quad V_A \text{sen}\alpha = V_o \text{sen}\beta \quad (\text{eq1})$$

Essa condição eq1 equivale a igualar as componentes verticais das velocidades de lançamento dos projéteis, o que faz sentido. Afinal, se essas componentes verticais forem iguais, os projéteis estarão necessariamente na

mesma altura, em qualquer instante, o que é uma condição necessária para que eles sempre colidam, mas não é suficiente.

b) Para que a colisão entre os projéteis ocorra efetivamente, ela deve acontecer antes de eles caírem no solo (obviamente ☺). Em suma, o instante da colisão deve ser anterior ao instante em que os projéteis chegam ao solo. O instante t da colisão pode ser determinado estudando as componentes horizontais dos movimentos uniformes de cada projétil:

$$V_A \cdot \cos \alpha \cdot t + V_B \cos \beta \cdot t = D \quad \Rightarrow \quad t = \frac{D}{V_A \cdot \cos \alpha + V_B \cos \beta} \quad (\text{eq2})$$

O tempo de permanência no ar ($T_{V_{00}}$) dos projéteis é o mesmo, devido à condição já imposta pela relação eq1. Ele vale:

$$T_{V_{00}} = \frac{2 \cdot V_A \cdot \text{sen} \alpha}{g} = \frac{2 \cdot V_B \cdot \text{sen} \beta}{g} \quad (\text{eq3})$$

Assim, para que a colisão entre os projéteis ocorra enquanto eles ainda estejam no ar, devemos ter:

$$t < T_{V_{00}} \quad \Rightarrow \quad \frac{D}{V_A \cdot \cos \alpha + V_B \cos \beta} < \frac{2 \cdot V_A \cdot \text{sen} \alpha}{g}$$

$$D < \frac{2V_A \text{sen} \alpha \cdot (V_A \cos \alpha + V_B \cos \beta)}{g}$$

Questão 116 - Solução

Conforme a resolução da questão 113, no referencial em queda livre (ou seja, desligando a gravidade), os projéteis descrevem trajetórias retilíneas em MRU.

Assim, as abscissas de A e B, em função do tempo, são dadas por:

$$x_A = v_A \cdot \cos \alpha \cdot t \quad \text{e} \quad x_B = 2h + v_B \cdot \cos \beta \cdot t$$

Fazendo $x_A = x_B$, vem: $v_A \cdot \cos \alpha \cdot t = 2h + v_B \cdot \cos \beta \cdot t$ (eq1)

As ordenadas de A e B, em função do tempo, são dadas por:

$$y_A = h + v_A \cdot \text{sen} \alpha \cdot t \quad \text{e} \quad y_B = v_B \cdot \text{sen} \beta \cdot t$$

Fazendo $y_A = y_B$, vem: $h + v_A \cdot \text{sen} \alpha \cdot t = v_B \cdot \text{sen} \beta \cdot t$ (eq2)

Isolando h em eq2 e substituindo em eq1,

$$v_A \cdot \cos \alpha - v_B \cdot \cos \beta = 2v_B \cdot \text{sen} \beta - 2v_A \cdot \text{sen} \alpha$$

Dividindo todos os termos por v_B , vem:

$$\frac{v_A}{v_B} \cos \alpha - \cos \beta = 2 \text{sen} \beta - 2 \cdot \frac{v_A}{v_B} \text{sen} \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{v_A}{v_B} = \frac{2 \cdot \text{sen} \beta + \cos \beta}{2 \text{sen} \alpha + \cos \alpha}$$

Chamo a atenção do leitor para o fato de que essa estratégia de usar o referencial em queda livre para “desligar a gravidade” só dá o efeito desejado quando esse referencial inicia a sua queda juntamente com os corpos da questão, a fim de que o tempo de queda Δt em $1/2 \cdot g \cdot \Delta t^2$ seja igual para todos, ou seja, a fim de que a duração do processo seja a mesma para todos os corpos em movimento. Para isso, os corpos, por sua vez, precisam iniciar seus movimento no campo gravitacional uniforme *simultaneamente*. Em problemas em que os projéteis não foram disparados simultaneamente, não há como “desligar a gravidade do problema”.

Questão 117 - Solução

Admita que as partículas sejam lançadas da origem (0, 0) do sistema de coordenadas cartesianas e que colidam no ponto P de coordenadas (x, y). Sejam t_1 e t_2 os tempos que as partículas levam para ir da origem até o ponto P (x, y). Queremos determinar o valor de $t_1 - t_2$.

Para a partícula 1, podemos escrever:

$$x = v \cdot \cos \alpha \cdot t_1 \quad (\text{eq1})$$

$$y = v \cdot \sin \alpha \cdot t_1 - \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \quad (\text{eq2})$$

Para a partícula 2, podemos escrever:

$$x = v \cdot \cos \beta \cdot t_2 \quad (\text{eq3})$$

$$y = v \cdot \sin \beta \cdot t_2 - \frac{1}{2} g \cdot t_2^2 \quad (\text{eq4})$$

Dividindo eq1 e eq3, membro a membro, vem: $\frac{t_1}{t_2} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \quad (\text{eq5})$

$$\frac{t_1}{t_2} + 1 = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} + 1 \Rightarrow \frac{t_1 + t_2}{t_2} = \frac{\cos \beta + \cos \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow t_2 = \frac{(t_1 + t_2) \cdot \cos \alpha}{\cos \beta + \cos \alpha} \quad (\text{eq6})$$

Das relações eq2 e eq4, vem:

$$v \cdot (\sin \alpha \cdot t_1 - \sin \beta \cdot t_2) = \frac{1}{2} g \cdot (t_1^2 - t_2^2) \Rightarrow v \cdot t_2 \cdot (\sin \alpha \cdot \frac{t_1}{t_2} - \sin \beta) = \frac{1}{2} g \cdot (t_1^2 - t_2^2) \quad (\text{eq7})$$

Substituindo eq5 e eq6 em eq7, vem:

$$v \cdot \frac{(t_1 + t_2) \cdot \cos \alpha}{\cos \beta + \cos \alpha} \cdot (\sin \alpha \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} - \sin \beta) = \frac{1}{2} g \cdot (t_1^2 - t_2^2)$$

$$t_1 - t_2 = \frac{2v}{g} \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta + \cos \alpha} \quad \text{☺ legal, né?}$$

Nesse problema, não podemos usar a estratégia de “desligar a gravidade” (veja a solução da questão 113) visto que os projéteis não foram disparados simultaneamente.

Questão 118

Dica: Segue a mesma sequência de passos da resolução da questão 117

Resposta: $t_1 - t_2 = \frac{2v}{g} \cdot \frac{\text{sen}(\alpha - \beta)}{\text{cos}\beta + \text{cos}\alpha}$

Questão 119 - Solução

a) O projétil tem uma componente de velocidade $u \cdot \text{cos}(\alpha - \beta)$ na direção da rampa e $u \cdot \text{sen}(\alpha - \beta)$ na direção normal à rampa. As componentes da aceleração da gravidade são $g \cdot \text{sen}\beta$ ao longo da rampa e $g \cdot \text{cos}\beta$ na direção normal à rampa. Para determinar o tempo de voo, podemos escrever na direção normal à rampa:

$$V = V_0 + a \cdot t$$

$$0 = u \cdot \text{sen}(\alpha - \beta) - g \cdot \text{cos}\beta \cdot t \Rightarrow t = \frac{u \cdot \text{sen}(\alpha - \beta)}{g \cdot \text{cos}\beta} \Rightarrow t_{\text{voo}} = 2t = \frac{2u \cdot \text{sen}(\alpha - \beta)}{g \cdot \text{cos}\beta}$$

b) Ao longo da direção da rampa, o projétil executa um MRUV com velocidade inicial $u \cdot \text{cos}(\alpha - \beta)$ sendo retardado pela componente da aceleração da gravidade $g \cdot \text{sen}\beta$. Assim, o alcance OP ao longo da rampa é dado por:

$$OP = V_0 \cdot t_{\text{voo}} + \frac{a}{2} \cdot (t_{\text{voo}})^2 = u \cdot \text{cos}(\alpha - \beta) \cdot \frac{2u \cdot \text{sen}(\alpha - \beta)}{g \cdot \text{cos}\beta} - \frac{g \cdot \text{sen}\beta}{2} \left(\frac{2u \cdot \text{sen}(\alpha - \beta)}{g \cdot \text{cos}\beta} \right)^2$$

$$OP = \frac{2u^2}{g} \cdot \left(\frac{\text{sen}(\alpha - \beta) \cdot \text{cos}(\alpha - \beta) \cdot \text{cos}\beta}{\text{cos}^2\beta} - \frac{\text{sen}^2(\alpha - \beta) \cdot \text{sen}\beta}{\text{cos}^2\beta} \right)$$

$$OP = \frac{2u^2 \text{sen}(\alpha - \beta)}{g \text{cos}^2\beta} \cdot [\text{cos}\beta \cdot \text{cos}(\alpha - \beta) - \text{sen}\beta \cdot \text{sen}(\alpha - \beta)]$$

$$OP = \frac{2u^2 \text{sen}(\alpha - \beta)}{g \text{cos}^2\beta} \cdot \text{cos}(\beta + \alpha - \beta) \Rightarrow OP = \frac{2u^2 \text{sen}(\alpha - \beta) \cdot \text{cos}\alpha}{g \text{cos}^2\beta} \quad (\text{eq1})$$

c) Para que OP seja máximo devemos maximizar a função trigonométrica:

$$F(\alpha) = \text{sen}(\alpha - \beta) \cdot \text{cos}\alpha \quad (\text{eq2})$$

Note que β é um ângulo fornecido no problema, portanto, é uma constante. Queremos achar o valor de α para que a função $F(\alpha)$ acima assumo seu valor máximo. Fazendo $\theta_1 = \alpha - \beta$ e $\theta_2 = \alpha$, a função $F(\alpha)$ pode ser reescrita como:

$F = \text{sen}\theta_1 \cdot \text{cos}\theta_2$, com $(\theta_1 - \theta_2) = \alpha - \beta - \alpha = -\beta = \text{constante}$

Da trigonometria, a função F pode ser reescrita como:

$$F = \text{sen}\theta_1 \text{cos}\theta_2 = \frac{1}{2} \cdot [\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) + \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

Entretanto, sendo $(\theta_1 - \theta_2) = \text{constante}$, podemos escrever:

$$F = \frac{1}{2} \cdot [\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) + \text{constante}]$$

Assim, para que F seja máxima, $\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)$ deve ser máximo, portanto:

$$\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ \Rightarrow \alpha - \beta + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2} + 45^\circ \quad (\text{eq3})$$

d) Determinaremos o valor máximo do alcance OP encontrado no item b, que ocorre para ângulo de disparo α dado pela relação eq3. Analisando primeiramente a parte trigonométrica da relação eq1, vem:

$$Y = \frac{\text{sen}(\alpha - \beta) \cdot \text{cos}\alpha}{\text{cos}^2\beta} = \frac{\text{sen}(90^\circ - \alpha) \cdot \text{cos}\alpha}{\text{cos}^2\beta} = \frac{\text{cos}^2\alpha}{\text{cos}^2\beta}$$

Usando que $\text{cos}(2\alpha) = 2 \cdot \text{cos}^2\alpha - 1 \Rightarrow \text{cos}^2\alpha = \frac{1 + \text{cos}2\alpha}{2}$, vem:

$$Y = \frac{\text{cos}^2\alpha}{\text{cos}^2\beta} = \frac{1 + \text{cos}2\alpha}{2 \text{cos}^2\beta} = \frac{1 + \text{cos}(\beta + 90^\circ)}{2 \text{cos}^2\beta} = \frac{1 - \text{sen}\beta}{2 \cdot (1 - \text{sen}^2\beta)} = \frac{1}{2 \cdot (1 + \text{sen}\beta)}$$

Assim, o valor máximo do alcance OP é dado por:

$$OP_{\max} = \frac{2u^2 \text{sen}(\alpha - \beta) \cdot \text{cos}\alpha}{g \text{cos}^2\beta} = \frac{2u^2}{g} \frac{1}{2 \cdot (1 + \text{sen}\beta)} \Rightarrow OP_{\max} = \frac{u^2}{g \cdot (1 + \text{sen}\beta)}$$

Questão 120 - Resposta:

$$a) \frac{2u \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}{g \cdot \text{cos}\beta}, \quad b) \frac{2u^2 \text{sen}(\alpha + \beta) \cdot \text{cos}\alpha}{g \text{cos}^2\beta}, \quad c) \frac{u^2}{g(1 - \text{sen}\beta)}$$

Questão 121

Essa tese é facilmente demonstrada fazendo uso dos resultados já obtidos na resolução da questão 119.

Questão 122: Resposta: $\text{tg}\beta = 1/3$

Dica: Estude a resolução da questão 119.

Questão 123 - Solução

O projétil tem uma componente de velocidade $u \cdot \cos(\alpha - \beta)$ na direção da rampa e $u \cdot \sin(\alpha - \beta)$ na direção normal à rampa. As componentes da aceleração da gravidade são $g \cdot \sin \beta$ ao longo da rampa e $g \cdot \cos \beta$ na direção normal à rampa. Para determinar o tempo de voo, podemos escrever na direção normal à rampa:

$$V = V_0 + a \cdot t$$

$$0 = u \cdot \sin(\alpha - \beta) - g \cdot \cos \beta \cdot t \Rightarrow t = \frac{u \cdot \sin(\alpha - \beta)}{g \cdot \cos \beta} \Rightarrow t_{\text{voo}} = 2t = \frac{2u \cdot \sin(\alpha - \beta)}{g \cdot \cos \beta}$$

Ao longo da direção da rampa, o projétil executa um MRUV com velocidade inicial $u \cdot \cos(\alpha - \beta)$ sendo retardado pela componente da aceleração da gravidade $g \cdot \sin \beta$. Como o projétil incide normalmente à superfície da rampa, a componente da velocidade no projétil na direção da rampa, no instante da colisão ($t = t_{\text{voo}}$), deve ser nula:

$$V = V_0 + a \cdot t$$

$$0 = u \cdot \cos(\alpha - \beta) - g \cdot \sin \beta \cdot t, \text{ no instante } t = \frac{2u \cdot \sin(\alpha - \beta)}{g \cdot \cos \beta}$$

$$0 = u \cdot \cos(\alpha - \beta) - g \cdot \sin \beta \cdot \frac{2u \cdot \sin(\alpha - \beta)}{g \cdot \cos \beta} \Rightarrow 2 \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \cot \beta$$

$$2 \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \cot \beta \Rightarrow 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha - 2 \cdot \operatorname{tg} \beta = \cot \beta + \operatorname{tg} \alpha$$

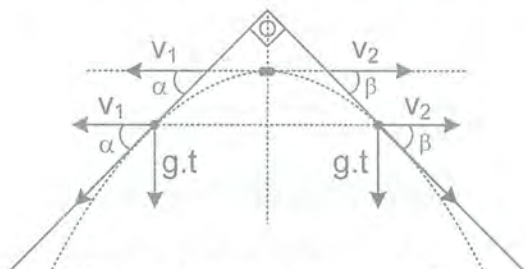
$$\operatorname{tg} \alpha = 2 \cdot \operatorname{tg} \beta + \cot \beta$$

Questão 124 - Solução

Na figura, temos:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \cos \beta \Rightarrow \frac{g \cdot t}{\sqrt{g^2 t^2 + v_1^2}} = \frac{v_2}{\sqrt{g^2 t^2 + v_2^2}}$$

$$g^4 t^4 + g^2 t^2 v_2^2 = g^2 t^2 v_2^2 + v_2^2 \cdot v_1^2 \Rightarrow g^4 t^4 = v_2^2 \cdot v_1^2 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{v_1 \cdot v_2}}{g}$$



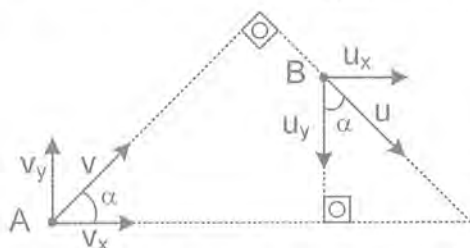
Como os projéteis estão sempre a uma mesma altitude, a distância entre eles será apenas horizontal, sendo dada por:

$$D = (v_1 + v_2) \cdot t = \frac{(v_1 + v_2) \sqrt{v_1 \cdot v_2}}{g}$$

Questão 125 - Solução

O projétil lançado do ponto A descreve uma trajetória parabólica e atinge a posição B t segundos depois. Da condição de perpendicularismo entre \mathbf{v} e \mathbf{u} , podemos escrever:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{u_x}{u_y} \Rightarrow u_y = u_x \cot \alpha = (v \cdot \cos \alpha) \cdot \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \Rightarrow u_y = \frac{v \cdot \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$



Adotando o referencial positivo apontando para cima \hat{u} , as componentes verticais das velocidades se relacionam por:

$$(-u_y) = (+v_y) + (-g) \cdot t \Rightarrow \left(-\frac{v \cdot \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \right) = (+v \cdot \operatorname{sen} \alpha) - g \cdot t$$

$$g \cdot t = v \cdot \operatorname{sen} \alpha + \frac{v \cdot \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{v \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{v \cdot \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{v \cdot (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$t = \frac{v}{g \cdot \operatorname{sen} \alpha}$$

Questão 126 - Solução

A velocidade relativa entre as partícula na horizontal vale:

$$V_{x\text{-rel}} = v \cdot (\cos \alpha + \cos \beta)$$

A velocidade relativa entre as partícula na vertical vale:

$$V_{y\text{-rel}} = (v \cdot \operatorname{sen} \alpha - g \cdot t^2 / 2) - (v \cdot \operatorname{sen} \beta - g \cdot t^2 / 2) = v \cdot (\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta)$$

Assim, a velocidade relativa resultante entre as partículas vale:

$$V_{\text{rel}} = \sqrt{V_{x\text{-rel}}^2 + V_{y\text{-rel}}^2} = \sqrt{v^2 (\cos \alpha + \cos \beta)^2 + v^2 (\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta)^2}$$

$$V_{\text{rel}} = v \sqrt{2 + 2 \cdot \cos(\alpha + \beta)} \quad (\text{eq1})$$

Da trigonometria, são conhecidas as seguintes relações trigonométricas:

$$\cos(2y) = 2 \cdot \cos^2 y - 1 \Rightarrow 2 + 2 \cos(2y) = 4 \cdot \cos^2 y, \text{ fazendo } y = x/2, \text{ vem:}$$

$2 + 2\cos x = 4 \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$, fazendo $x = (\alpha + \beta)$, vem:

$$2 + 2\cos(\alpha + \beta) = 4 \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad (\text{eq2})$$

Substituindo eq2 em eq1, vem:

$$V_{\text{rel}} = v\sqrt{2 + 2\cos(\alpha + \beta)} = v\sqrt{4 \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)} \Rightarrow V_{\text{rel}} = 2 \cdot v \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad (\text{eq3})$$

A relação eq3 nos diz que a velocidade de uma partícula em relação à outra é constante no tempo. O efeito da gravidade não é sentido no referencial dessas partículas. No referencial de uma delas, a outra não cai (a mesma idéia que aprendemos na resolução da questão 113), mas sim, se afasta da primeira em MRU com velocidade constante dada pela relação eq3.

Assim, a distância entre elas, t segundos após o lançamento, é dada por:

$$D = V_{\text{rel}} \times t \Rightarrow D = 2 \cdot v \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot t$$

Esse problema também poderia ter sido resolvido usando a estratégia de “desligar a gravidade” mostrada na resolução do problema 113.

Questão 127 – Resposta:

$$\frac{2v \cdot \cos \alpha}{g} \sqrt{v \cdot \sin^2 \alpha + 2gh}$$

Questão 128 - Solução

O alcance horizontal D de um projétil é dado por: $D = \frac{V_0^2}{g} \sin(2\alpha)$

O valor máximo desse alcance (para $\alpha = 45^\circ$) vale: $A = \frac{V_0^2}{g}$ (eq1)

Conforme vimos no capítulo 6, página 226, equação eq3, a equação da trajetória parabólica no lançamento de projéteis é dada por:

$$y = \text{tg}\alpha \cdot x - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot V_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \quad (\text{eq2})$$

Segundo o enunciado, a trajetória do projétil desse problema deve passar pelo ponto de coordenadas:

$$(x, y) = \left(\frac{A}{4}, \frac{A}{4}\right) = \left(\frac{V_0^2}{4g}, \frac{V_0^2}{4g}\right)$$

Assim, substituindo-se esses valores de x e y na relação eq2, vem:

$$\frac{V_o^2}{4g} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{V_o^2}{4g} - \frac{g}{2 \cdot V_o^2} \cdot \sec^2 \alpha \cdot \left(\frac{V_o^2}{4g} \right)^2$$

$$1 = \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2 \cdot V_o^2} \cdot (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) \cdot \frac{V_o^2}{4g} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha - 8 \cdot \operatorname{tg}\alpha + 9 = 0$$

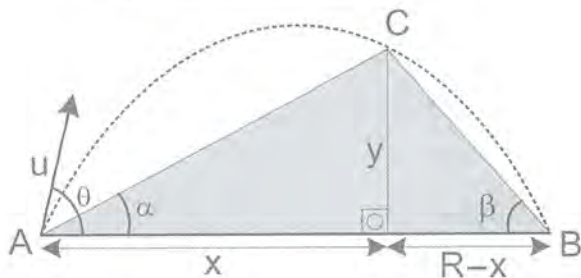
As soluções dessa equação do 2º grau são as tangentes dos ângulos de lançamento α_1 e α_2 para os quais o projétil passa pelo ponto desejado. O valor de $\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2$ é a soma das raízes dessa equação:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-8)}{1} = 8 \quad \text{☺ (legal, né?)}$$

Questão 129 - Solução

O alcance horizontal R atingido pelo projétil vale:

$$AB = R = \frac{V^2}{g} 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{cos}\alpha \quad \text{(eq1)}$$



Do triângulo, vemos que:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{y}{x} + \frac{y}{R-x} = \frac{y(R-x) + yx}{x(R-x)} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{y \cdot R}{x(R-x)} \quad \text{(eq2)}$$

Da equação da trajetória parabólica, vem:

$$y = \operatorname{tg}\theta \cdot x - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v^2 \cdot \operatorname{cos}^2 \theta} = \operatorname{tg}\theta \cdot x \left[1 - \frac{g \cdot x}{2v^2 \operatorname{cos}^2 \theta \cdot \operatorname{tg}\theta} \right]$$

$$y = \operatorname{tg}\theta \cdot x \left[1 - \frac{x}{\frac{2 \cdot v^2}{g} \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{cos}\theta} \right] \stackrel{\text{(eq1)}}{=} \operatorname{tg}\theta \cdot x \left[1 - \frac{x}{R} \right] = \operatorname{tg}\theta \cdot \frac{x \cdot (R-x)}{R}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{R.y}{x.(R-x)} \quad (\text{eq3})$$

Comparando eq2 e eq3, vem:

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta \quad \text{☺ massa, né?}$$

Questão 130 - Solução

A partícula é lançada da origem O com velocidade u formando um ângulo α com a horizontal. Considere que a partícula atinja o solo no ponto K, após ter raspado os quatro vértices superiores F, E, D e C do hexágono regular ABCDEF de lado c .

Seja $c = 2a$. Do vértice F descemos um segmento de reta vertical FL.

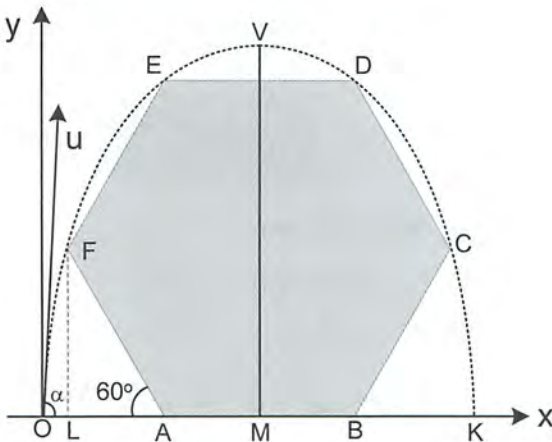
Seja OL = h .

$$AL = 2a \cdot \cos 60^\circ = a, \quad FL = 2a \cdot \sin 60^\circ = a\sqrt{3} \quad \text{e} \quad EA = 2FL = 2a\sqrt{3}$$

As coordenadas dos vértices F e E são $(h, a\sqrt{3})$ e $(h+a, 2a\sqrt{3})$ respectivamente.

A equação da trajetória parabólica é dada por:

$$y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot u^2 \cdot \cos^2 \alpha} \quad (\text{eq1})$$



A trajetória parabólica (eq1) passa pelo ponto E $(h+a, 2a\sqrt{3})$:

$$2a\sqrt{3} = (h+a) \cdot \operatorname{tg}\alpha - \frac{g \cdot (h+a)^2}{2 \cdot u^2 \cdot \cos^2 \alpha} \quad (\text{eq2})$$

A trajetória parabólica (eq1) também passa pelo ponto F $(h, a\sqrt{3})$:

$$a\sqrt{3} = h \cdot \operatorname{tg}\alpha - \frac{g \cdot h^2}{2 \cdot u^2 \cdot \cos^2 \alpha} \quad (\text{eq3})$$

Subtraindo eq2 e eq3, membro a membro, vem:

$$a\sqrt{3} = a \cdot \operatorname{tg}\alpha - \frac{g \cdot (2h + a^2)}{2 \cdot u^2 \cdot \cos^2 \alpha} \Rightarrow \sqrt{3} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{g \cdot (2h + a)}{2 \cdot u^2 \cdot \cos^2 \alpha} \quad (\text{eq4})$$

O alcance OK no plano horizontal é dado por: $OK = 2u^2 \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha / g$

$2 \cdot OM = 2u^2 \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha / g$, onde M é o ponto médio de OK.

$OL + LA + AM = u^2 \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha / g \Rightarrow h + a + a = u^2 \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha / g \Rightarrow$

$$u^2 = \frac{g \cdot (h + 2a)}{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha} \quad (\text{eq5})$$

Substituindo eq5 em eq4, vem: $\sqrt{3} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{g \cdot (2h + a) \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}{2 \cdot g \cdot (h + 2a) \cos^2 \alpha}$

$$\sqrt{3} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{(2h + a) \cdot \operatorname{tg}\alpha}{(2h + 4a)} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{3a \cdot \operatorname{tg}\alpha}{2h + 4a} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{2(h + 2a)}{a\sqrt{3}} \quad (\text{eq6})$$

Da relações eq5 e eq6: $(h + 2a) = \frac{u^2 \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}{g} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha}{2} \Rightarrow$

$$a\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{2u^2 \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}{g} \Rightarrow u^2 \cos^2 \alpha = \frac{a \cdot g \sqrt{3}}{2} \quad (\text{eq7})$$

Substituindo eq6 e eq7 em eq3, vem:

$$a\sqrt{3} = h \cdot \operatorname{tg}\alpha - \frac{g \cdot h^2}{2 \cdot u^2 \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{2h(h + 2a)}{a\sqrt{3}} - \frac{g \cdot h^2}{a\sqrt{3} \cdot g}$$

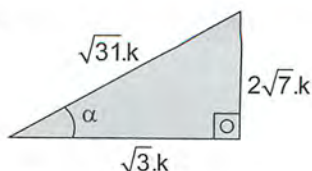
$$3a^2 = h^2 + 4a \cdot h \Rightarrow h^2 + 4ah - 3a^2 = 0 \Rightarrow h = \frac{-4a + \sqrt{16a^2 + 12a^2}}{2}$$

$$h = -2a + a\sqrt{7} \Rightarrow h + 2a = a\sqrt{7} \quad (\text{eq8})$$

Substituindo eq8 em eq6, vem: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2(h + 2a)}{a\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{7}}{a\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

Conhecendo a $\operatorname{tg}\alpha$, fazemos uso do Pitágoras no triângulo retângulo para obter $\operatorname{sen}\alpha$ e $\operatorname{cos}\alpha$:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{31}}, \quad \operatorname{cos}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{31}}$$



De eq7, vem: $u^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{31}} \right)^2 = \frac{a \cdot g \sqrt{3}}{2} \Rightarrow u^2 = \frac{31 \cdot a \cdot g}{2\sqrt{3}}$ (eq9)

O alcance vale: $OK = 2u^2 \cdot \frac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{cos}\alpha}{g} = 2 \cdot \frac{31 \cdot a \cdot g}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{g} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{31}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{31}} = 2a\sqrt{7} = c\sqrt{7}$

Massa, né? 😊

Questão 131 - Solução

A trajetória do gafanhoto é uma parábola que tangencia o tronco em dois pontos B e B* simétricos em relação ao eixo vertical que passa pelo centro da secção circular. Até agora não sabemos nada sobre esses dois pontos B e B*. Eles podem ou não coincidir com o ponto E no topo do tronco.

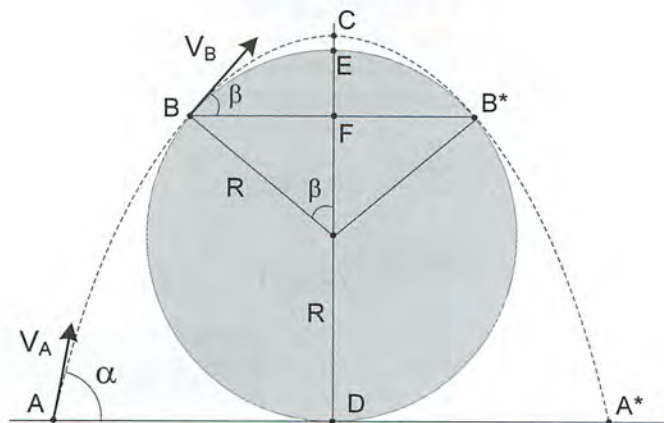
O gafanhoto salta do ponto A com velocidade inicial V_A fazendo um ângulo α com a horizontal. Nos pontos de tangência B e B*, o gafanhoto tem velocidade V_B fazendo um ângulo β com a horizontal.

No ponto B, a componente vertical da velocidade vale:

$$V_B \cdot \operatorname{sen}\beta = g \cdot t_2 \quad (\text{eq1})$$

onde t_2 é o tempo de vôo para o trecho BC (C é o ponto mais alto da trajetória parabólica). O correspondente deslocamento horizontal BF vale:

$$V_B \cdot \operatorname{cos}\beta \cdot t_2 = R \cdot \operatorname{sen}\beta \quad (\text{eq2})$$



Multiplicando-se eq1 e eq2, membro a membro, obtemos:

$$V_B^2 = \frac{g.R}{\cos\beta} \quad (\text{eq3})$$

Da equação de Torricelli para a componente vertical do movimento (MUV), do ponto A ao ponto B, temos:

$$V_B^2 \cdot \text{sen}^2\beta = V_A^2 \cdot \text{sen}^2\alpha - 2.g.R.(1 + \cos\beta)$$

$$V_A^2 \cdot \text{sen}^2\alpha = V_B^2 \cdot \text{sen}^2\beta + 2.g.R.(1 + \cos\beta) \quad (\text{eq4})$$

Como a componente horizontal da velocidade permanece constante, podemos escrever:

$$(V_A \cos\alpha)^2 = (V_B \cos\beta)^2 \Rightarrow V_A^2(1 - \text{sen}^2\alpha) = V_B^2(1 - \text{sen}^2\beta) \quad (\text{eq5})$$

Somando eq4 e eq5, vem: $V_A^2 = V_B^2 + 2.g.R.(1 + \cos\beta)$ (eq6)

A relação eq6 poderia ter sido obtida diretamente, sem fazer uso das relações eq4 e eq5, através da conservação da energia mecânica entre as posições A e B do movimento do gafanhoto. Como esse assunto só será abordado no volume 2 desta obra, optei por fazer uso apenas de recursos cinemáticos para a resolução do problema.

Substituindo eq3 em eq6, vem:

$$V_A^2 = \frac{g.R}{\cos\beta} + 2.g.R.(1 + \cos\beta) \Rightarrow V_A^2 = 2Rg \cdot \left(1 + \cos\beta + \frac{1}{2\cos\beta} \right) \quad (\text{eq7})$$

Para determinar o valor mínimo da velocidade (em eq7), devemos determinar o valor mínimo da expressão trigonométrica:

$$Y = \cos\beta + \frac{1}{2\cos\beta} \quad (\text{eq8})$$

Para isso, podemos partir do fato de que qualquer número elevado ao quadrado é maior ou igual a zero. Se isso é verdade para qualquer número, certamente será verdadeira a sentença matemática abaixo:

$$\left(\sqrt{\cos\beta} - \sqrt{\frac{1}{2\cos\beta}} \right)^2 \geq 0$$

$$\left(\sqrt{\cos\beta} \right)^2 - 2 \cdot \sqrt{\cos\beta} \cdot \sqrt{\frac{1}{2\cos\beta}} + \left(\sqrt{\frac{1}{2\cos\beta}} \right)^2 \geq 0$$

$$\cos\beta - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\cos\beta} \geq 0 \Rightarrow \cos\beta + \frac{1}{2\cos\beta} \geq \sqrt{2} \quad (\text{eq9})$$

Assim, vemos que o valor mínimo da expressão trigonométrica mostrada em eq8 vale $\sqrt{2}$, mínimo esse que é atingido exatamente no caso em que os termos $\cos\beta$ e $1/(2\cos\beta)$ são iguais entre si, ou seja:

$$\cos\beta = \frac{1}{2\cos\beta} \Rightarrow \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta = 45^\circ$$

Substituindo o valor $\beta = 45^\circ$ em eq7, encontramos:

$$V_{A \text{ min}} = \sqrt{2Rg(1+\sqrt{2})}$$

A expressão acima fornece a velocidade mínima que o gafanhoto deve ter para conseguir saltar o tronco cilíndrico.

Para aprender as melhores táticas para a determinação de máximos e mínimos de uma grande variedade de funções, sem usar derivada, recomendo fortemente o fantástico livro **Tópicos de Matemática – volume 1**, de autoria dos profs. Carlos Gomes e José Maria Gomes, a venda no site da Livraria VestSeller.

Questão 132 - Solução

No referencial da Terra, as partículas têm coordenadas cartesianas (x, y) dadas, em função do tempo, por:

$$\text{Partícula 1: } (u.\cos\alpha.t, \quad u.\text{sen}\alpha.t - g.t^2/2)$$

$$\text{Partícula 2: } (v.\cos\beta.t, \quad v.\text{sen}\beta.t - g.t^2/2)$$

$$\text{Partícula 3: } (w.\cos\gamma.t, \quad w.\text{sen}\gamma.t - g.t^2/2)$$

O problema será mais facilmente resolvido num referencial em queda livre (veja a resolução da questão 113), o que equivale a desligar a gravidade. Nesse referencial, as partículas têm coordenadas cartesianas dadas, em função do tempo, por:

$$\text{Partícula 1: } (u.\cos\alpha.t, \quad u.\text{sen}\alpha.t)$$

$$\text{Partícula 2: } (v.\cos\beta.t, \quad v.\text{sen}\beta.t)$$

$$\text{Partícula 3: } (w.\cos\gamma.t, \quad w.\text{sen}\gamma.t)$$

Da Geometria Analítica, a condição para o alinhamento das três partículas é

$$\begin{vmatrix} u.\cos\alpha.t & u.\text{sen}\alpha.t & 1 \\ v.\cos\beta.t & v.\text{sen}\beta.t & 1 \\ w.\cos\gamma.t & w.\text{sen}\gamma.t & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$u.w.\text{sen}\alpha.\cos\gamma.t^2 + u.v.\text{sen}\beta.\cos\alpha.t^2 + v.w.\text{sen}\gamma.\cos\beta.t^2 - u.v.\text{sen}\alpha.\cos\beta.t^2 - v.w.\text{sen}\beta.\cos\gamma.t^2 - u.w.\text{sen}\gamma.\cos\alpha.t^2 = 0$$

$$u.v.(\text{sen}\beta.\text{cos}\alpha - \text{sen}\alpha.\text{cos}\beta) + v.w.(\text{sen}\gamma.\text{cos}\beta - \text{sen}\beta.\text{cos}\gamma) + u.w.(\text{sen}\alpha.\text{cos}\gamma - \text{sen}\gamma.\text{cos}\alpha) = 0$$

$$u.v.\text{sen}(\beta - \alpha) + v.w.\text{sen}(\gamma - \beta) + u.w.\text{sen}(\alpha - \gamma) = 0$$

Dividindo cada termo por $u.v.w$, vem:

$$\frac{\text{sen}(\beta - \alpha)}{w} + \frac{\text{sen}(\gamma - \beta)}{u} + \frac{\text{sen}(\alpha - \gamma)}{v} = 0$$

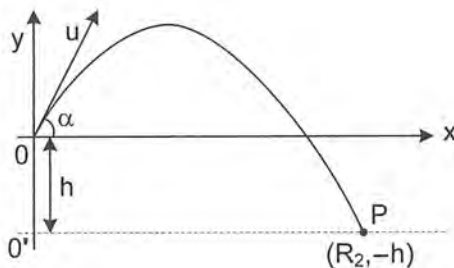
Logicamente que, se os projéteis encontram-se alinhados no referencial em queda livre, eles estão alinhados em qualquer outro referencial, inclusive em relação à Terra.

Questão 133 - Solução

Seja $A = R_1$ o alcance do canhão quando ele se encontra ao nível do mar:

$$R_1 = \frac{2u^2 \text{sen}\alpha \text{cos}\alpha}{g} \quad (\text{eq1})$$

Agora admita que o canhão esteja montado sobre uma plataforma de altura h . Ajustando a origem $(0, 0)$ do sistema de coordenadas cartesianas de forma que ela coincida com a nova posição do canhão, a bala do canhão cairá na água no ponto P de coordenadas $(R_2, -h)$, onde R_2 é o alcance nessa nova situação, ou seja, $O'P = R_2$.



A equação da trajetória parabólica (relação eq3, página 226) é:

$$y = \text{tg}\alpha \cdot x - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot u^2 \cdot \text{cos}^2 \alpha}$$

Essa trajetória parabólica passa pelo ponto $(R_2, -h)$, portanto:

$$-h = \operatorname{tg}\alpha \cdot R_2 - \frac{g \cdot R_2^2}{2 \cdot u^2 \cdot \cos^2 \alpha} \Rightarrow gR_2^2 - 2u^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha R_2 - 2u^2 h \cos^2 \alpha = 0$$

Usando eq1, vem: $gR_2^2 - gR_1R_2 - 2u^2 h \cos^2 \alpha = 0$

$$R_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow R_2 = \frac{gR_1 + \sqrt{g^2R_1^2 + 4g \cdot 2u^2 \cdot h \cdot \cos^2 \alpha}}{2g} \quad (\text{eq2})$$

Extraindo $\cos\alpha$ de eq1 e substituindo em eq2, vem:

$$R_2 = \frac{gR_1 + \sqrt{g^2R_1^2 + 8g \cdot u^2 \cdot h \cdot \left(\frac{g^2R_1^2}{4u^4 \operatorname{sen}^2 \alpha}\right)}}{2g}$$

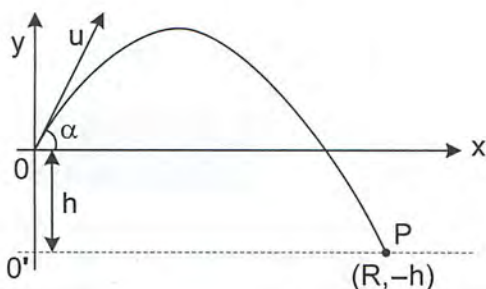
$$R_2 = \frac{R_1}{2} + \frac{R_1}{2} \sqrt{1 + \frac{2gh}{u^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}} = R_1 - \frac{R_1}{2} + \frac{R_1}{2} \sqrt{1 + \frac{2gh}{u^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}}$$

$$R_2 - R_1 = \frac{R_1}{2} \sqrt{1 + \frac{2gh}{u^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}} - \frac{R_1}{2}, \quad \text{com } R_1 = A \quad \text{e} \quad \Delta A = R_2 - R_1$$

$$\Delta A = \frac{A}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2gh}{u^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}} - 1 \right)$$

Questão 134 - Solução

O canhão localizado no alto de uma colina de altura h inicialmente dispara o primeiro projétil com velocidade inicial u formando um ângulo α com a horizontal. Fixando a origem $(0, 0)$ do sistema de coordenadas cartesianas no canhão, a bala do canhão cai no solo no ponto P de coordenadas $(R, -h)$, onde R é o alcance horizontal obtido no solo.



A equação da trajetória parabólica (relação eq3, página 226) é:

$$y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot u^2 \cdot \cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}\alpha \cdot x - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot u^2} \sec^2 \alpha$$

Essa trajetória parabólica passa pelo ponto $(R, -h)$, portanto:

$$-h = \operatorname{tg}\alpha \cdot R - \frac{g \cdot R^2}{2 \cdot u^2} (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) \Rightarrow h = \frac{g \cdot R^2}{2 \cdot u^2} (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) - \operatorname{tg}\alpha \cdot R \quad (\text{eq1})$$

O segundo projétil, disparado com a mesma velocidade u numa direção que forma um ângulo β com a horizontal, atinge o mesmo alcance horizontal do primeiro projétil. A equação da trajetória parabólica do segundo projétil é:

$$y = \operatorname{tg}\beta \cdot x - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot u^2 \cdot \cos^2 \beta} = \operatorname{tg}\beta \cdot x - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot u^2} \sec^2 \beta$$

Essa nova trajetória parabólica também passa pelo ponto $(R, -h)$, portanto:

$$-h = \operatorname{tg}\beta \cdot R - \frac{g \cdot R^2}{2 \cdot u^2} (\operatorname{tg}^2 \beta + 1) \Rightarrow h = \frac{g \cdot R^2}{2 \cdot u^2} (\operatorname{tg}^2 \beta + 1) - \operatorname{tg}\beta \cdot R \quad (\text{eq2})$$

Subtraindo eq1 e eq2, membro a membro, vem:

$$\frac{g \cdot R^2}{2 \cdot u^2} (\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta) = R \cdot (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) \Rightarrow R = \frac{2u^2}{g \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)} \quad (\text{eq3})$$

Substituindo-se eq3 em eq1, vem:

$$h = \frac{g}{2 \cdot u^2} \left[\frac{2u^2}{g \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)} \right]^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) - \operatorname{tg}\alpha \left[\frac{2u^2}{g \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)} \right]$$

$$h = \frac{g}{2 \cdot u^2} \frac{4u^4}{g^2 \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)^2} (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) - \frac{2u^2 \cdot (\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta)}{g \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)^2}$$

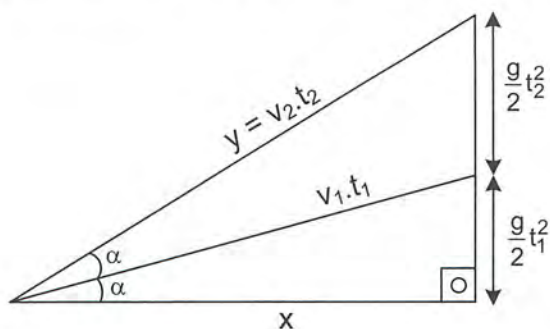
$$h = \frac{2u^2}{g \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)^2} (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta)$$

$$h = \frac{2u^2 \cdot (1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta)}{g \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)^2} \Rightarrow h = \frac{2u^2}{g} \cdot \frac{\cot g(\alpha + \beta)}{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)} \quad (\text{massa, né? } \textcircled{smiley})$$

Nesse problema, não podemos usar a estratégia de “desligar a gravidade” (veja a solução da questão 113) visto que, apesar de os projéteis terem sido disparados simultaneamente, a duração Δt do movimento deles não é a mesma visto que um chega ao solo antes do outro.

Questão 135 - 1ª Solução (por Leone William dos Santos – Duque de Caxias - RJ)

Para compreender essa solução, o leitor deve ter lido e compreendido bem a solução da questão 113 página 34. Lá eu ensino a interpretar o lançamento oblíquo como uma superposição de um MRU com uma queda livre a partir do repouso. Se necessário, retorne à questão 113 antes de prosseguir.



Teorema da bissetriz interna: $\frac{x}{\frac{g}{2} t_1^2} = \frac{y}{\frac{g}{2} t_2^2} \Rightarrow y = x \cdot \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2$ (eq1)

Teorema de Pitágoras: $x^2 + \left(\frac{g}{2}(t_1^2 + t_2^2)\right)^2 = y^2$ (eq2)

Substituindo eq1 em eq2, vem:

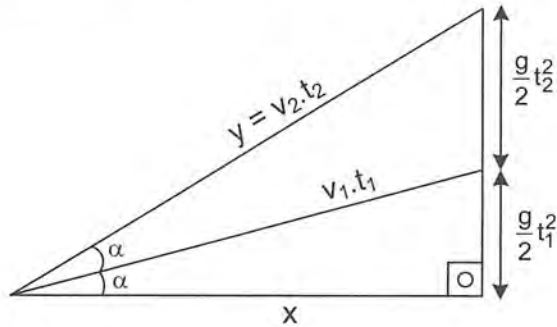
$$x^2 + \left(\frac{g}{2}(t_1^2 + t_2^2)\right)^2 = x^2 \cdot \frac{t_2^4}{t_1^4} \Rightarrow \frac{g^2}{4}(t_1^2 + t_2^2)^2 = \frac{x^2}{t_1^4}(t_2^4 - t_1^4)$$

$$\frac{g^2}{4}(t_1^2 + t_2^2)(t_1^2 + t_2^2) = \frac{x^2}{t_1^4}(t_2^2 - t_1^2)(t_2^2 + t_1^2)$$

$$x = \frac{g}{2} \cdot t_1^2 \sqrt{\frac{t_1^2 + t_2^2}{t_2^2 - t_1^2}}$$

Questão 135 - 2ª Solução

Para compreender essa solução, o leitor deve ter lido e compreendido bem a solução da questão 113 página 34. Lá eu ensino a interpretar o lançamento oblíquo como uma superposição de um MRU com uma queda livre a partir do repouso. Se necessário, retorne à questão 113 antes de prosseguir.



Da trigonometria, sabemos que $\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$ (eq1)

Da figura, temos: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{g}{2x} t_1^2$ (eq2) e $\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{g}{2x} (t_1^2 + t_2^2)$ (eq3)

Substituindo eq2 e eq3 em eq1, vem:

$$\frac{g}{2x} (t_1^2 + t_2^2) = \frac{2 \frac{g}{2x} t_1^2}{1 - \left(\frac{g}{2}\right)^2 \frac{t_1^4}{x^2}} \Rightarrow 1 - \left(\frac{g}{2}\right)^2 \frac{t_1^4}{x^2} = \frac{2t_1^2}{(t_1^2 + t_2^2)}$$

$$\frac{t_2^2 - t_1^2}{(t_1^2 + t_2^2)} = \left(\frac{g}{2}\right)^2 \frac{t_1^4}{x^2} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{g}{2}\right)^2 t_1^4 \frac{t_2^2 + t_1^2}{(t_2^2 - t_1^2)}$$

$$x = \frac{g}{2} \cdot t_1^2 \sqrt{\frac{t_1^2 + t_2^2}{t_2^2 - t_1^2}}$$

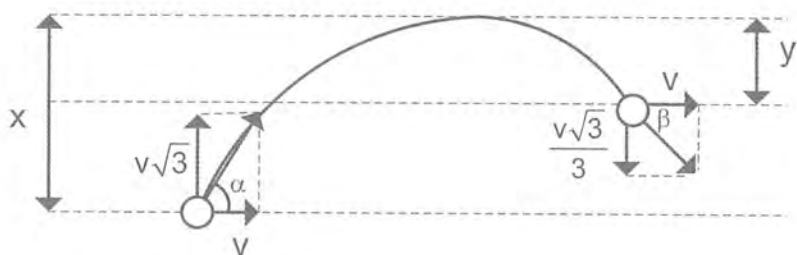
Questão 136 - Solução

Durante esse movimento, apenas a componente $V_x = v$ permanece constante no tempo. A componente vertical, inicialmente, é dada por :

$$V_{0y} = v \cdot \operatorname{tg}\alpha = v \cdot \operatorname{tg}(60^\circ) = v \cdot \sqrt{3}$$

Quatro segundos depois, a componente vertical tem intensidade igual a:

$$V_y = v \cdot \operatorname{tg}(30^\circ) = v \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Na vertical, podemos escrever:

$$V_y = V_{0y} - g \cdot t \Rightarrow -v \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = v \cdot \sqrt{3} - 10 \cdot 4$$

$$\frac{4 \cdot v \sqrt{3}}{3} = 40 \Rightarrow v \sqrt{3} = 30 \text{ m/s}$$

Para determinar a distância x subida verticalmente, aplica-se a equação de Torricelli:

$$V^2 = V_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta s$$

$$0 = (v \sqrt{3})^2 - 2 \cdot 10 \cdot x \Rightarrow 0 = (30)^2 - 20 \cdot x \Rightarrow x = 45 \text{ m}$$

Para determinar a distância y descida verticalmente, aplica-se a equação de Torricelli:

$$V^2 = V_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta s \Rightarrow \left(\frac{v \sqrt{3}}{3}\right)^2 = 0 + 2 \cdot (10) \cdot y \Rightarrow \left(\frac{30}{3}\right)^2 = 20 \cdot y$$

$$\Rightarrow y = 5 \text{ m}$$

Portanto, a distância percorrida na vertical, pela pedra, vale:

$$x + y = 45 + 5 = 50 \text{ m}$$

Questão 137 - Solução

O menor diâmetro para esse poço, para que nenhum fragmento da granada atinja a superfície, ocorre quando a parábola de segurança (a envoltória de todas as possíveis trajetórias dos fragmentos) desse lançador (localizado na origem do sistema de coordenadas) passar exatamente sobre as bordas do poço.

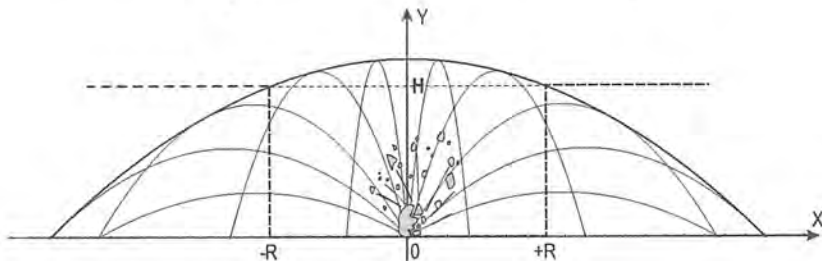
Em outras palavras, o ponto de coordenadas cartesianas $(x, y) = (R, H)$ pertence à parábola de segurança (P.S.). Assim, podemos escrever:

$$y = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2} \cdot x^2$$

Substituindo $x = R$ e $y = H$ na equação da P.S., vem:

$$H = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2} \cdot R^2 \Rightarrow 2V_0^2 \cdot gH = V_0^4 - g^2 \cdot R^2 \Rightarrow$$

$$R^2 = \frac{V_0^4 - 2V_0^2 \cdot gH}{g^2} \Rightarrow R = \frac{V_0 \cdot \sqrt{V_0^2 - 2gH}}{g}$$



Assim, o diâmetro D pedido vale: $D = 2 \cdot R \Rightarrow D = \frac{2 \cdot V_0 \cdot \sqrt{V_0^2 - 2gH}}{g}$

Para saber mais sobre as propriedades da **Parábola de Segurança**, leia o Tópico Especial 1 - capítulo 6.

Questão 138 - Resposta: 8 m

Dica: use a Parábola de Segurança – leia o Tópico Especial 1 - capítulo 6.

Questão 139 - Resposta

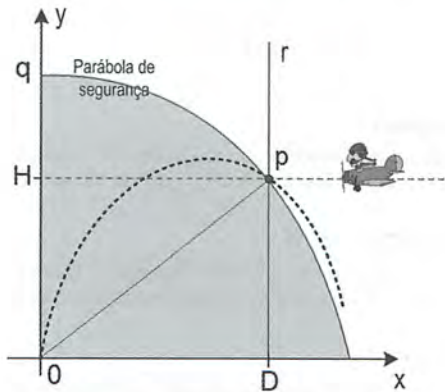
Apenas os itens **a** e **c** são falsos.

Questão 140 - Solução

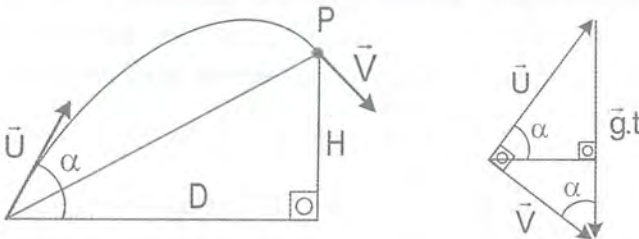
a) Enquanto o avião estiver fora da região cinza, ele se encontrará na zona de segurança desse lançador. A posição mais distante em que o avião já pode ser abatido é o ponto p mostrado na figura abaixo, de coordenadas (D, H). Esse ponto pertence à parábola de segurança desse lançador, assim, podemos escrever:

$$Y = \frac{U^2}{2.g} - \frac{g}{2.U^2}.X^2, \text{ com } Y = H \text{ e } X = D$$

$$H = \frac{U^2}{2.g} - \frac{g}{2.U^2}.D^2 \Rightarrow D = \frac{U}{g}\sqrt{U^2 - 2gH} \quad (\text{eq1})$$



b) Conforme a propriedade 5 da parábola de segurança (veja capítulo 6, página 243), na condição de alcance máximo, as velocidades inicial \vec{U} e final \vec{V} são necessariamente perpendiculares entre si. Adicionalmente, $\vec{V} = \vec{U} + \vec{g}.t$. Todas essas relações geométricas são mostradas na figura a seguir:



Da conservação da energia mecânica, vem:

$$\frac{m.U^2}{2} = m.g.H + \frac{m.V^2}{2} \Rightarrow U^2 = 2gH + V^2 \Rightarrow$$

$$V = \sqrt{U^2 - 2gH} \quad (\text{eq2})$$

Do triângulo retângulo, usando eq2, vem: $\text{tg}\alpha = \frac{U}{V} \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{U}{\sqrt{U^2 - 2gH}}$

Note que também poderíamos ter obtido o resultado mostrado em eq1 sem fazer uso direto da equação da parábola de segurança, mas sim, da sua propriedade 5 (capítulo 6 – página 243. Veja:

$$U^2 + V^2 = (gt)^2 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{g}$$

$$D = U_x \cdot t = U \cdot \cos\alpha \cdot t = U \cdot \frac{V}{\sqrt{V^2 + U^2}} \cdot \frac{\sqrt{V^2 + U^2}}{g} \Rightarrow D = \frac{U}{g} \sqrt{U^2 - 2gH}$$

Questão 141 - Resposta: 10 m/s

Dica: use a Parábola de Segurança – leia o Tópico Especial 1 - Capítulo 6, Exemplo Resolvido 2. Tente também resolver seguindo a mesma estratégia usada na solução da Questão 140.

Questão 142 - Resposta: 15 m

Dica: use a Parábola de Segurança – leia o Tópico Especial 1 - Capítulo 6, Exemplo Resolvido 1. Tente também resolver seguindo a mesma estratégia usada na solução da Questão 140.

Questão 143 - Solução

O ponto do solo mais distante que pode ser atingido pelo lançador é o ponto P em que a “parábola de segurança” toca o solo.

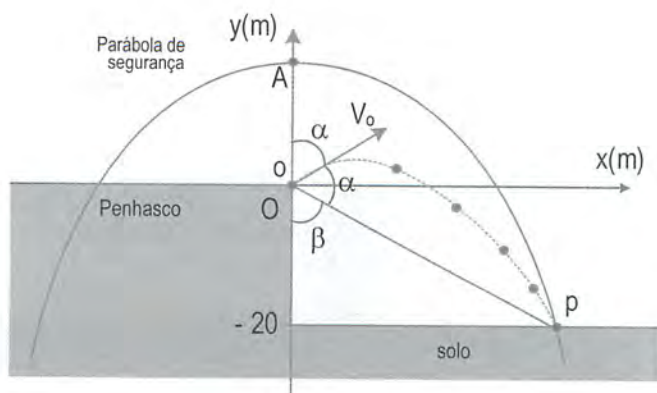
A equação da parábola de segurança–padrão admite que o lançador de projéteis se encontre na origem do sistema de coordenadas ($x = 0, y = 0$). Como, nessa questão, o lançador se encontra na extremidade do penhasco, ali foi colocada a origem do sistema de coordenadas.

- Equação da parábola de segurança de um lançador de projéteis, localizado na origem ($x = 0, y = 0$) do sistema de coordenadas:

$$y = \frac{V_o^2}{2.g} - \frac{g}{2.V_o^2} \cdot x^2 \quad \text{com } V_o = 14 \text{ m/s}$$

Determinemos a abscissa x_P do ponto P, em que a parábola toca o solo, fazendo $y = -20$ na equação da parábola de segurança:

$$Y = \frac{V_o^2}{2.g} - \frac{g}{2.V_o^2} \cdot x^2 \Rightarrow -20 = \frac{(14)^2}{20} - \frac{10}{2.(14)^2} \cdot x_P^2 \Rightarrow x_P \cong 34,1 \text{ m}$$



Determinando α e β na figura: $\operatorname{tg} \beta \cong \left| \frac{x_p}{y_p} \right| \cong \left| \frac{34,1}{-20} \right| \cong 1,71 \Rightarrow \beta \cong 60^\circ$

$$2\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

Da propriedade 4 da parábola de segurança (veja o Tópico Especial 1, no capítulo 6), o projétil deve ser disparado na bissetriz do ângulo pOA, isto é, na bissetriz do ângulo 2α . Assim, a direção do disparo do projétil forma um ângulo $90 - \alpha = 30^\circ$ com a horizontal.

Questão 144 - Solução

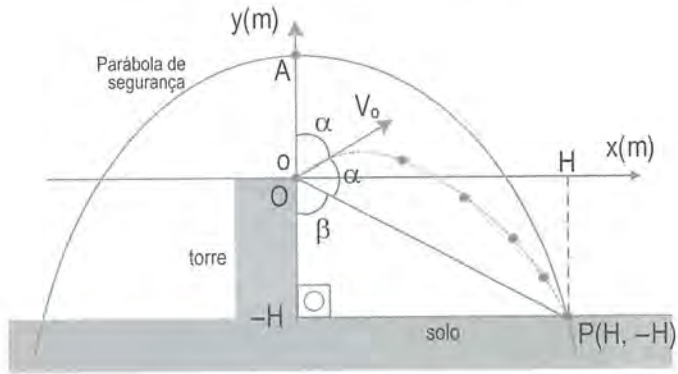
a) A figura mostra a torre e o ponto P visado no chão. A mínima velocidade de disparo V_0 que já consegue atingir esse ponto é a velocidade associada à parábola de segurança que passa por P (seção 6.4 – capítulo 6 – página 232).

A origem (0, 0) do sistema de coordenadas, como sempre, coincide com a posição do lançador. Como a parábola de segurança deve passar pelo ponto P de coordenadas (H, -H), vem:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2, \quad \text{com } x = H, y = -H$$

$$-H = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} \cdot H^2 \quad \Rightarrow \quad -2v_0^2 \cdot gH = v_0^4 - g^2 H^2$$

$$v_0^4 + 2v_0^2 \cdot gH - g^2 H^2 = 0$$



$$V_0^2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = \frac{-2gH + \sqrt{4g^2H^2 + 4g^2H^2}}{2} = \frac{-2gH + 2\sqrt{2}.gH}{2}$$

$$v_0 = \sqrt{g.H.(\sqrt{2} - 1)}$$

b) Conforme a propriedade 4 da parábola de segurança, o projétil deve ser disparado na bissetriz do ângulo AOP. Sendo $\beta = 45^\circ$, já que o triângulo retângulo de hipotenusa OP é isósceles, vem:

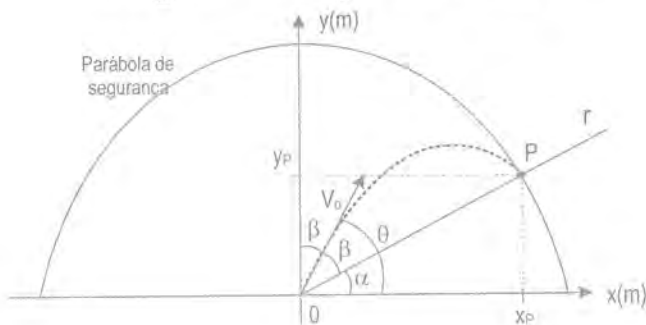
$$2\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 67,5^\circ$$

Questão 145 - Solução

Conforme a propriedade 4 da parábola de segurança (veja capítulo 6, Tópico Especial 1), o alcance máximo ao longo de uma rampa é obtido quando a bola é chutada na direção da bissetriz do ângulo formado entre a rampa (direção OP) e a vertical que passa pela bola.

O ângulo de disparo com a horizontal, portanto, é dado por :

$$\theta = \frac{\alpha}{2} + 45^\circ = \frac{30^\circ}{2} + 45^\circ = 60^\circ$$



O ponto P de maior alcance obtido ao longo dessa rampa é o ponto P de interseção entre a reta r (OP) e a parábola de segurança desse lançador.

- Equação da reta r que define a direção OP da rampa : $y = a.x + b$, com coeficiente angular $a = \text{tg}(30^\circ)$ e coeficiente linear $b = 0$

$$y = \text{tg}(30^\circ).x \quad (\text{eq1})$$

- Equação da parábola de segurança: $y = \frac{V_0^2}{2.g} - \frac{g}{2.V_0^2}.x^2 \Rightarrow$

$$y = \frac{(30)^2}{20} - \frac{10}{2.(30)^2}.x^2 \Rightarrow y = 45 - \frac{x^2}{180} \quad (\text{eq2})$$

Para determinar o ponto de interseção da reta r com a parábola de segurança, resolvemos o sistema de equações simultâneas eq1 e eq2. Substituindo Y da eq1 na eq2, vem:

$$\text{tg}(30^\circ).x = 45 - \frac{x^2}{180} \Rightarrow x^2 + 60.\sqrt{3}.x - 45 \times 180 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau na variável x, determinamos $x = 30\sqrt{3}$ m, substituindo em eq1, determinamos $y = 30$ m. Assim, as coordenadas do ponto P de máximo alcance sobre a reta r são $x = x_P = 30\sqrt{3}$ m e $y = y_P = 30$ m. A altura máxima que a bola pode atingir, ao longo rampa, vale $H_{\max} = y_P = 30$ m

Questão 146 - Resposta

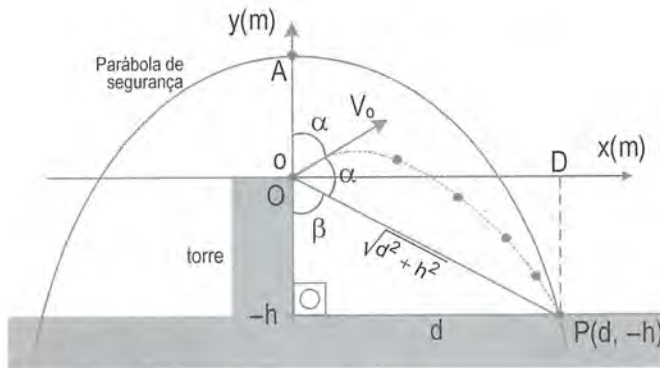
a) 15 m (Tente também resolver seguindo a mesma estratégia usada na solução da Questão 140).

b) $\alpha = \frac{1}{2}.\text{arctg}\left(\frac{3}{4}\right) + 45^\circ \cong 63,43^\circ$ (Propriedade 4 da parábola de

segurança). Por outro lado, seguindo o mesmo raciocínio usado na resolução da questão 140 para determinar tangente de α , obteremos $\text{tg}\alpha = 2$, que também nos leva a $\alpha = 64,43^\circ$

Questão 147 - Solução

Seja P o ponto no solo correspondente ao alcance máximo. Esse ponto, de coordenadas P (d, -h) deve pertencer à parábola de segurança associada ao lançador posicionado na origem do sistema de coordenadas, no alto da torre.



Da equação da parábola de segurança, vem:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2, \quad \text{com } x = d, y = -h$$

$$-h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} \cdot d^2 \quad \Rightarrow \quad -2v_0^2 \cdot gh = v_0^4 - g^2 d^2$$

$$d = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh} \quad (\text{eq1})$$

A relação eq1 acima fornece o alcance máximo d que pode ser atingido no solo. Da propriedade 4 da parábola de segurança, para atingir o ponto P, o projétil deve ser disparado na bissetriz do ângulo AOP. Da figura, vemos que:

$$\cos \beta = \frac{h}{\sqrt{h^2 + d^2}} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{v_0^2}{g^2}(v_0^2 + 2gh)}} = \frac{gh}{\sqrt{(g^2 h^2 + v_0^4 + 2v_0^2 gh)}}$$

$$\cos \beta = \frac{gh}{\sqrt{(v_0^2 + gh)^2}} \quad \Rightarrow \quad \cos \beta = \frac{gh}{v_0^2 + gh} \quad (\text{eq2})$$

Da figura, temos que: $2\alpha = 180^\circ - \beta \Rightarrow \cos(2\alpha) = \cos \beta$, usando eq2, vem:

$$\cos 2\alpha = \frac{gh}{v_0^2 + gh} \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = \arccos\left(\frac{gh}{v_0^2 + gh}\right)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{gh}{v_0^2 + gh}\right)$$

Questão 148 - Resposta: $u_{\min} = \sqrt{g \cdot h \cdot (1 + \operatorname{cosec} \beta)}$

Questão 149 - Solução

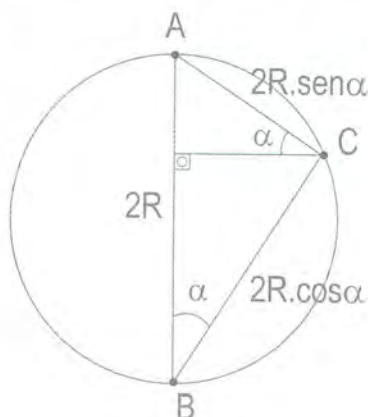
Ao descer o trecho $AB = 2R$, a continha cai sob ação exclusiva da aceleração da gravidade ($a_{AB} = g$). Assim, vem:

$$\Delta S_{AB} = a_{AB} \cdot \frac{t_{AB}^2}{2} \Rightarrow 2R = g \cdot \frac{t_{AB}^2}{2} \Rightarrow t_{AB} = 2\sqrt{R/g}$$

Ao descer a rampa $AC = 2R \cdot \text{sen}\alpha$, a continha se move com aceleração $a_{AC} = g \cdot \text{sen}\alpha$ produzida pela componente do peso ($P \cdot \text{sen}\alpha$) ao longo da direção AC. Assim, vem:

$$\Delta S_{AC} = a_{AC} \cdot \frac{t_{AC}^2}{2} \Rightarrow 2R \cdot \text{sen}\alpha = g \cdot \text{sen}\alpha \cdot \frac{t_{AC}^2}{2}$$

$$t_{AC} = 2\sqrt{R/g}$$



Ao descer a rampa $CB = 2R \cdot \text{cos}\alpha$, a continha se move com aceleração $a_{CB} = g \cdot \text{cos}\alpha$ produzida pela componente do peso ($P \cdot \text{cos}\alpha$) ao longo da direção CB. Assim, vem:

$$\Delta S_{CB} = a_{CB} \cdot \frac{t_{CB}^2}{2} \Rightarrow 2R \cdot \text{cos}\alpha = g \cdot \text{cos}\alpha \cdot \frac{t_{CB}^2}{2}$$

$$t_{CB} = 2\sqrt{R/g}$$

Assim, $t_{AB} = t_{AC} = t_{CB}$.

Questão 150 - Solução

A rampa AB tem comprimento $AB = L/\text{cos}\alpha$. O corpo abandonado em B desce a rampa com aceleração $a = g \cdot \text{sen}\alpha$. Assim, o tempo de descida é dado por:

$$\Delta S = V_0 \cdot t + a \cdot \frac{t^2}{2} \Rightarrow \frac{L}{\text{cos}\alpha} = 0 + g \cdot \text{sen}\alpha \cdot \frac{t^2}{2} \Rightarrow t^2 = \frac{4L}{2 \cdot \text{sen}\alpha \cdot \text{cos}\alpha}$$

$$t = \sqrt{\frac{4L}{g \cdot \text{sen}2\alpha}}$$

Assim, o tempo de descida será mínimo quando $\text{sen}2\alpha$ assumir o seu valor máximo:

$$\text{sen}2\alpha = 1 \Rightarrow 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Esse tempo mínimo valerá: $t_{\min} = \sqrt{\frac{4L}{g \cdot 1}} = 2\sqrt{\frac{L}{g}}$

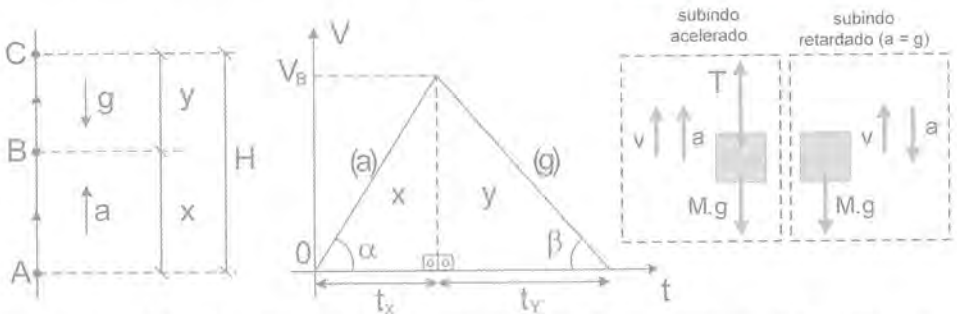
Questão 151 - Solução

Para se levar uma pedra desde o solo até uma altura vertical H, partindo do repouso e parando ao final do movimento, como se deve proceder para fazê-lo em tempo mínimo? Ora, deve-se impor à pedra a máxima aceleração

disponível inicialmente, a fim de que sua velocidade cresça o mais rápido possível e, a partir de um certo ponto da subida (ponto B), deve-se impor a máxima desaceleração disponível de forma que ela atinja o repouso (no ponto C) no menor espaço de tempo.

Inicialmente, a caixa subirá sob ação das forças tração $T \uparrow$ e peso $P \downarrow$ e a máxima aceleração disponível, a ser usada no trecho inicial AB, é limitada pelo máximo valor da tração T suportada pelo fio sem que ele se rompa. A segunda lei de Newton, durante a subida acelerada (trecho AB), permite escrever:

$$F_R = (T - M \cdot g) = M \cdot a \Rightarrow a = \left(\frac{T - M \cdot g}{M \cdot g} \right) \cdot g \Rightarrow \frac{g}{a} = \left(\frac{M \cdot g}{T - M \cdot g} \right) \quad (\text{eq1})$$



No trecho BC seguinte, para se obter máxima desaceleração da caixa em sua subida retardada, é preciso fazer uso de uma máxima força resultante se opondo à velocidade $V \uparrow$ da caixa, isto é, de uma máxima força resultante $F_R \downarrow$ para baixo, o que é obtido largando-se a corda a fim de anular a tração ($T=0$), permitindo que a própria força peso $\downarrow P$ faça o papel de força resultante $F_R \downarrow$ e freie a caixa com aceleração g .

Como a inclinação do gráfico $V \times t$ está relacionada à aceleração do móvel em cada trecho um dos trechos AB e BC (veja gráfico acima), podemos escrever as seguintes relações:

$$a = \text{tg} \alpha \Rightarrow a = \frac{V_B}{t_x} \quad (\text{eq2}) \quad \text{e} \quad g = \text{tg} \beta \Rightarrow g = \frac{V_B}{t_y} \quad (\text{eq3})$$

A área sob o gráfico $v \times t$ da figura anterior é numericamente igual à distância H percorrida pelo móvel em todo o percurso ABC de subida, o que nos permite escrever:

$$\text{área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} \Rightarrow \frac{(t_x + t_y) \cdot V_B}{2} = H \quad (\text{eq4})$$

Isolando t_x em eq2, t_y em eq3 e substituindo em eq4, vem:

$$\left(\frac{V_B}{a} + \frac{V_B}{g} \right) \cdot \frac{V_B}{2} = H \Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{g} \right) \cdot \frac{(V_B)^2}{2} = H \Rightarrow V_B = \sqrt{2H \cdot \left(\frac{a \cdot g}{a + g} \right)} \quad (\text{eq5})$$

Portanto, o tempo total da subida será:

$$t = t_x + t_y = \frac{V_B}{a} + \frac{V_B}{g} = V_B \cdot \left(\frac{a+g}{a \cdot g} \right) \stackrel{\text{eq5}}{=} \sqrt{2H \cdot \left(\frac{a \cdot g}{a+g} \right)} \cdot \left(\frac{a+g}{a \cdot g} \right)$$

$$t = t_x + t_y = \sqrt{\frac{2H}{g} \cdot \frac{(a+g)}{a}} = \sqrt{\frac{2H}{g} \cdot \left(1 + \frac{g}{a} \right)} \quad (\text{eq6})$$

Substituindo a relação eq1 em eq6, vem:

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g} \cdot \left(1 + \frac{g}{a} \right)} = \sqrt{\frac{2H}{g} \cdot \left(1 + \frac{M \cdot g}{T - M \cdot g} \right)} = \sqrt{\frac{2H}{g} \cdot \left(\frac{T}{T - M \cdot g} \right)}$$

Questão 152 - Solução

Seja N_1 a força de contato entre os cilindros B e C, N_2 a força de contato entre A e B e N_3 a força de contato entre A e C. Inicialmente, investiguemos a força F máxima de forma que as bolas ainda permaneçam em contato entre si. Nesse caso, teremos $N_3 = 0$, pois o cilindro A estará prestes a rolar por cima de B. Assim, para o cilindro A, teremos:

$$F_x = m \cdot a_x \Rightarrow N_2 \cdot \cos 60^\circ = m \cdot a \quad (\text{eq1})$$

$$F_y = m \cdot a_y \Rightarrow N_2 \cdot \sin 60^\circ - m \cdot g = 0 \quad (\text{eq2})$$

Das relações eq1 e eq2, encontramos: $a = g \sqrt{3}/3$. Essa é a maior aceleração que o conjunto pode compartilhar de forma que todos os corpos se movam juntos.

Agora, investiguemos a força F mínima de forma que as bolas ainda permaneçam em contato entre si. Nesse caso, teremos $N_1 = 0$, pois o cilindro B estará prestes a perder o contato com C.

Assim, para o cilindro C, teremos:

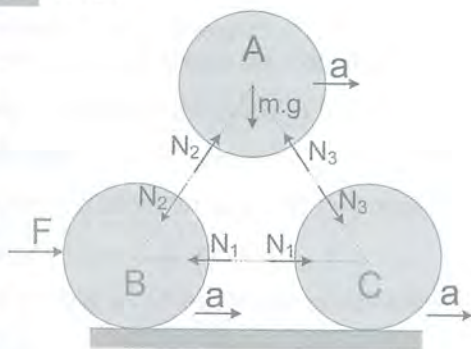
$$F_x = m \cdot a_x \Rightarrow N_3 \cdot \cos 60^\circ = m \cdot a \quad (\text{eq3})$$

Assim, para o cilindro A, teremos:

$$F_x = m \cdot a_x \Rightarrow N_2 \cdot \cos 60^\circ - N_3 \cdot \cos 60^\circ = m \cdot a \quad (\text{eq4})$$

$$F_y = m \cdot a_y \Rightarrow N_2 \cdot \sin 60^\circ + N_3 \cdot \sin 60^\circ - m \cdot g = 0 \quad (\text{eq5})$$

Das relações eq4, eq5 e eq6, encontramos: $a = g \sqrt{3}/9$. Essa é a menor aceleração que o conjunto pode compartilhar de forma que todos os corpos se movam juntos.



Combinando os resultados obtidos, vemos que a aceleração do sistema deve estar compreendida no intervalo:

$$g\sqrt{3}/9 < a < g\sqrt{3}/3$$

Questão 153 - Solução

A fim de determinar a aceleração com que todo o sistema se moverá, inicialmente tomaremos os blocos do lado esquerdo como sendo um só bloco de massa “ $M + m$ ”. Podemos usar essa tática, sempre que os blocos compartilharem da mesma aceleração em relação à Terra, isto é, quando eles se moverem juntos. Aplicando a 2ª lei de Newton no referencial inercial para cada bloco da figura a seguir, vem:



Como o bloco esquerdo tem aceleração para baixo $\downarrow a$, a força resultante (total) agindo nele é para baixo $\downarrow F_R$, donde se conclui que $(M+m).g > T$.

Aplicando a segunda lei de Newton ao bloco da esquerda, temos:

$$F_R = \text{massa} \cdot a \Rightarrow (M+m).g - T = (M+m).a \quad (\text{eq1})$$

Aplicando a segunda no bloco da direita, tendo em vista que $T > M.g$, temos:

$$F_R = \text{massa} \cdot a \Rightarrow T - M.g = M.a \quad (\text{eq2})$$

Somando as equações eq1 e eq2, membro a membro, vem:

$$m.g = (2M + m).a \Rightarrow a = \frac{m.g}{(2M + m)} \quad (\text{eq3})$$

Essa é a aceleração com que todos os blocos se movem. Isolando agora somente o bloquinho de massa m (veja figura), vemos que sobre ele age a normal $\uparrow N$ e o seu peso $m.g \downarrow$.

Adicionalmente, sua aceleração (cujo valor também é dada pela relação eq3) aponta para baixo $\downarrow a$, o que garante nos permite concluir que a força resultante (total) $F_R \downarrow$ que age sobre o bloquinho aponta para baixo, o que nos leva a concluir que $m.g > N$.

Assim, aplicando a segunda lei de Newton ao bloquinho, vem:

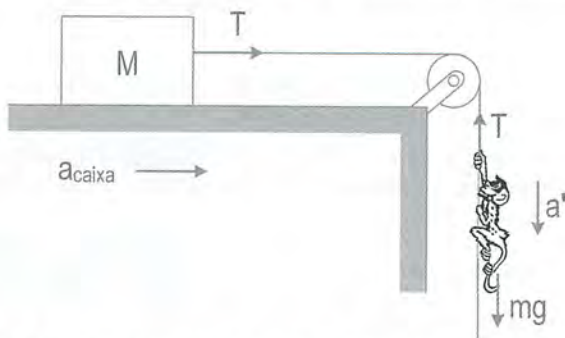
$$F_R = \text{massa} \cdot a \Rightarrow (m.g - N) = m.a \Rightarrow$$

$$N = m.g - m.a = m.(g - a) \stackrel{\text{eq3}}{=} m.\left(g - \frac{m.g}{(2M+m)}\right) = \frac{2mMg}{2M+m}$$

Assim, determinamos o valor da força de contato N trocada entre o bloquinho e bloco maior.

Questão 154 - Solução

A figura mostra as duas força T e $m.g$ que agem no macaco que, por sua vez, possui aceleração a' no referencial da Terra (suposta inercial). A segunda lei de Newton ($F_R = m.a'$) relaciona a força resultante agindo num corpo com a sua aceleração num referencial inercial (a Terra nesse caso).



Sejam \vec{a}' , \vec{b} e \vec{a} as acelerações definidas conforme a seguir:

- \vec{a}' = aceleração do macaco em relação à Terra;
- \vec{b} = aceleração do macaco em relação ao trecho vertical da corda;
- \vec{a} = aceleração do trecho vertical da corda em relação à Terra;

As equações gerais do movimento relativo permitem escrever a relação vetorial: $\vec{a}' = \vec{b} + \vec{a}$ (eq1)

a) segundo o enunciado, nesse item, a aceleração do macaco em relação à corda é admitida nula ($\vec{b} = \vec{0}$), portanto a relação eq1 permite escrever:

$$\vec{a}' = \vec{b} + \vec{a} = \vec{0} + \vec{a} \Rightarrow \vec{a}' = \vec{a} \quad (\text{eq2})$$

Da segunda lei de Newton para o macaco, temos:

$F_R = m.a'$, onde a' é a aceleração do macaco em relação à Terra.

$F_R = m.g - T = m.a'$, considerando a relação eq2, vem: $m.g - T = m.a$ (eq3)

A segunda lei de Newton para a caixa permite escrever: $F_R = T = M.a$ (eq4), onde a é o módulo da aceleração da caixa em relação à Terra.

Somando eq3 e eq4, membro a membro, determinamos a aceleração do macaco e da caixa no referencial inercial (Terra):

$$m.g = (M + m).a \Rightarrow a = m.g / (M+m) \Rightarrow a' = a = m.g / (M+m)$$

b) Nesse item, a aceleração do macaco em relação à corda é vertical e para baixo. Em notação vetorial, temos: $\vec{b} = \downarrow b$. A relação eq1 permite determinar a aceleração \vec{a}' do macaco no referencial da Terra (referencial inercial):

$$\vec{a}' = \vec{b} + \vec{a} = \downarrow b + \downarrow a = (b + a)\downarrow \Rightarrow \vec{a}' = (b + a)\downarrow \Rightarrow a' = b + a \quad (\text{eq5})$$

Da segunda lei de Newton para o macaco, temos:

$F_R = m.a'$, onde a' é a aceleração do macaco em relação à Terra.

$$F_R = m.g - T = m.a', \text{ considerando eq5, vem: } m.g - T = m.(b + a) \quad (\text{eq6})$$

Da segunda lei de Newton para a caixa, temos:

$F_R = T = M.a$ (eq7), onde a é o módulo da aceleração da caixa em relação à Terra.

Somando eq6 e eq7, membro a membro, determinamos o módulo da aceleração da caixa (no referencial inercial):

$$m.g = m.b + m.a + M.a \Rightarrow a = m.(g-b) / (M+m)$$

A aceleração do macaco no referencial inercial (Terra) tem módulo dado pela relação eq5:

$$a' = b + a = b + \frac{m.(g-b)}{M+m} \Rightarrow a' = \frac{m.g + M.b}{M+m}$$

c) Nesse item, a aceleração do macaco em relação à corda é vertical e para cima. Em notação vetorial, temos: $\vec{b} = \uparrow b$. A relação eq1 permite determinar a aceleração \vec{a}' do macaco no referencial da Terra (referencial inercial), supondo $a > b$:

$$\vec{a}' = \vec{b} + \vec{a} = \uparrow b + \downarrow a = (a - b)\downarrow \Rightarrow |\vec{a}'| = |(a - b)\downarrow| \Rightarrow a' = a - b \quad (\text{eq8})$$

Da segunda lei de Newton para o macaco, temos:

$F_R = m.a'$, onde a' é a aceleração do macaco em relação à Terra.

$$F_R = m.g - T = m.a', \text{ da relação eq8, vem: } m.g - T = m.(a - b) \quad (\text{eq9})$$

Da segunda lei de Newton para a caixa, temos: $F_R = T = M.a$ (eq10)

onde a é o módulo da aceleração da caixa em relação à Terra.

Somando eq9 e eq10, membro a membro, determinamos o módulo da aceleração da caixa (no referencial inercial da Terra):

$$m.g = m.a - m.b + M.a \Rightarrow a = m.(g+b) / (M+m)$$

A aceleração do macaco, no referencial inercial (Terra), tem módulo dado pela relação eq8:

$$a' = a - b = \frac{m.(g+b)}{M+m} - b \Rightarrow a' = \frac{m.g - M.b}{M+m}$$

Nessa questão, enfatizamos bastante os aspectos relacionados à questão do referencial adotado ao se fazer uso das leis de Newton. Conforme

discutimos amplamente no capítulo 2, as leis de Newton só são válidas em referenciais inerciais. Como de costume, a Terra foi tomada como referencial inercial na resolução.

Questão 155 – Solução

a) Aplicando a 2ª lei de Newton a cada caixa, vem:

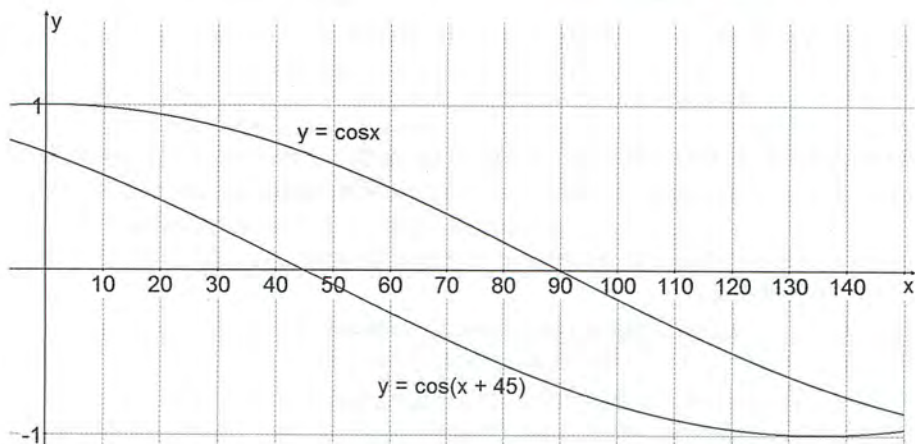
$$T - m \cdot g \cdot \sin \alpha = m \cdot a \quad (\text{eq1})$$

$$m \cdot g \cdot \sin(90^\circ - \alpha) - T = m \cdot a \Rightarrow m \cdot g \cdot \cos \alpha - T = m \cdot a \quad (\text{eq2})$$

Somando eq1 e eq2, membro a membro, vem:

$$m \cdot g \cdot (\cos \alpha - \sin \alpha) = 2 \cdot m \cdot a \Rightarrow a = \frac{g}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha)$$

$$a = g \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right) \Rightarrow a = g \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\alpha + 45^\circ) \quad (\text{eq3})$$



É fácil ver que a função $y = \cos(x + 45^\circ)$, para $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$, assume valor máximo para $x = 0^\circ$. Assim, para $\alpha = 0^\circ$, a aceleração dada por eq3 assume o seu valor máximo:

$$a_{\max} = g \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\alpha + 45^\circ) = g \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(0^\circ + 45^\circ) = g \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_{\max} = \frac{g}{2}$$

a) Para $\alpha = 0^\circ$ e $a = g/2$, a relação eq2 fornece:

$$m \cdot g \cdot \cos \alpha - T = m \cdot a \Rightarrow m \cdot g \cdot \cos 0^\circ - T = m \cdot (g/2) \Rightarrow T = m \cdot g / 2$$

Questão 156 – Solução no Referencial Inercial (Terra)

As caixas A e B estão conectadas entre si por meio de um fio ideal inextensível. O fato desse fio não esticar obriga que o deslocamento de uma caixa seja exatamente igual ao deslocamento da outra (embora em sentidos contrários) no referencial em que a polia se encontra fixa (elevador).

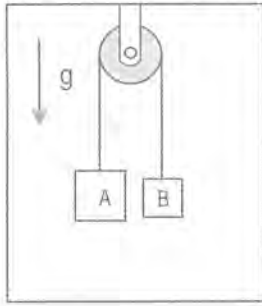


Figura 85 – aceleração do elevador em relação à Terra

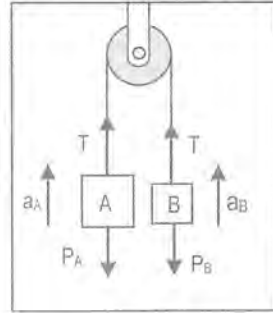


Figura 86 – acelerações das caixas em relação à Terra

Em outras palavras, as caixas sempre sofrerão deslocamentos iguais (em módulo), apresentarão velocidades iguais e acelerações iguais (em módulo), no referencial do elevador, em qualquer instante. Note, entretanto, que esses fatos se aplicam ao referencial do elevador, mas não se aplicam ao referencial da Terra, visto que o elevador está se movendo em relação à Terra. Para esclarecer, admita que, num certo intervalo de tempo Δt , o elevador se deslocou $\uparrow d$ em relação à Terra para cima, ao passo que as caixas A e B sofreram deslocamentos respectivamente iguais a $x\downarrow$ e $x\uparrow$ em relação ao elevador.

É fácil ver que, em relação à Terra, as caixas terão sofrido os deslocamentos distintos $(d-x)\uparrow$ e $(d+x)\uparrow$, respectivamente (supondo $d > x$).

A mesma idéia pode ser estendida às velocidades e acelerações das caixas. Admita que o elevador move-se com aceleração $\uparrow a$ em relação à Terra, ao passo que as caixas A e B apresentam acelerações respectivamente iguais a $\downarrow a'$ e $\uparrow a'$ (de mesma intensidade, visto que o fio não estica) em relação ao elevador. Assim, em relação à Terra, as caixas apresentarão acelerações:

$$\bar{a}_A = (a - a')\uparrow \quad (\text{eq1}) \quad \text{e} \quad \bar{a}_B = (a + a')\uparrow \quad (\text{eq2}), \text{ supondo } a > a'.$$

É importante lembrar que a segunda lei de Newton diz respeito à aceleração do móvel no referencial inercial (referencial não acelerado) como, por exemplo, a Terra.

Para a caixa A, temos: $a_A \uparrow$, $F_R \uparrow$, portanto $T > P_A$

$F_R = T - P_A = M_A \cdot a_A$, onde a_A é a aceleração da caixa A em relação à Terra. Usando eq1, vem:

$$T - M_A \cdot g = M_A \cdot (a - a') \quad (\text{eq3})$$

Para a caixa B, temos: $a_B \uparrow, F_R \uparrow$, portanto $T > P_B$

$F_R = T - P_B = M_B \cdot a_B$, onde a_B é a aceleração da caixa B em relação à Terra. Usando eq2, vem:

$$T - M_B \cdot g = M_B \cdot (a + a') \quad (\text{eq4})$$

Subtraindo, membro a membro, a relação eq4 da relação eq3, vem:

$$M_A \cdot g - M_B \cdot g = (M_A + M_B) \cdot a' - (M_A - M_B) \cdot a \Rightarrow a' = \frac{(M_A - M_B) \cdot (a + g)}{(M_A + M_B)} \quad (\text{eq5})$$

Após termos determinado a aceleração a' das caixas em relação ao elevador, podemos determinar as acelerações das caixas A e B em relação à Terra, usando as relações eq1 e eq2:

$$a_A = a - a' = a - \frac{(M_A - M_B) \cdot (a + g)}{(M_A + M_B)} \quad \therefore a_A = \frac{2 \cdot M_B \cdot a - (M_A - M_B) \cdot g}{(M_A + M_B)}$$

$$a_B = a + a' = a + \frac{(M_A - M_B) \cdot (a + g)}{(M_A + M_B)} \quad \therefore a_B = \frac{2 \cdot M_A \cdot a + (M_A - M_B) \cdot g}{(M_A + M_B)}$$

A determinação da tração T no fio pode ser feita somando-se, membro a membro, as relações eq3 e eq4:

$2T - (M_A + M_B) \cdot g = (M_A + M_B) \cdot a - (M_A - M_B) \cdot a'$. Usando eq5, vem:

$$2T = (M_A + M_B) \cdot (a + g) - (M_A - M_B) \cdot \frac{(M_A - M_B) \cdot (a + g)}{(M_A + M_B)} = \frac{4 \cdot M_A \cdot M_B \cdot (a + g)}{(M_A + M_B)}$$

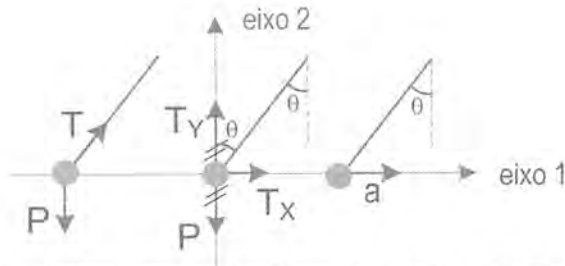
$$T = \frac{2 \cdot M_A \cdot M_B \cdot (a + g)}{(M_A + M_B)}$$

Uma resolução mais simples, objetiva e elegante para essa questão será dada no capítulo 4, Exemplo Resolvido 4, página 149, quando estudarmos os Referenciais Não-Inerciais.

Questão 157 - Solução

A bola do pêndulo descreve uma trajetória horizontal retilínea em relação à Terra, compartilhando da mesma aceleração horizontal $\rightarrow a$ do vagão. Sobre a bola agem apenas as forças T (tração) e P (peso). Quais forças devemos decompor?

Usando o par de eixos-padrão – eixo 1, coincidindo com a trajetória retilínea (na mesma direção da velocidade) e eixo 2, perpendicular à velocidade – devemos decompor as forças que não estiverem sobre o par de eixos-padrão, no caso, a tração T, que será substituída por suas componentes T_x e T_y .



O diagrama de forças precisa justificar de onde vem aquela aceleração horizontal $\rightarrow a$ da bola, bem como justificar por que a bola não apresenta aceleração vertical alguma, isto é, está em equilíbrio na vertical. Ora, a aceleração horizontal da bola é causada pela força resultante horizontal T_X e se relacionam pela segunda lei de Newton:

Na horizontal: $F_{RX} = T_X = m.a \Rightarrow T.\text{sen}\theta = m.a$ (eq1)

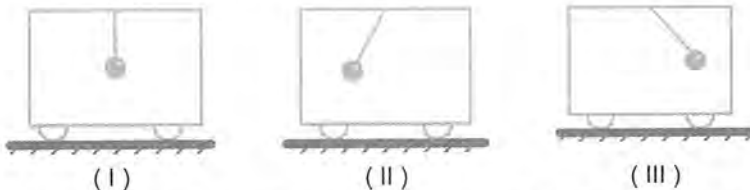
A ausência de aceleração vertical justifica-se pelo equilíbrio das forças naquela direção:

Na vertical: $F_{RY} = T_Y - P = 0 \Rightarrow T_Y = m.g \Rightarrow T.\text{cos}\theta = m.g$ (eq2)

Curiosamente, o diagrama de forças não precisa justificar porque a bola apresenta aquela velocidade, naquele instante, ou porque está se movendo naquele sentido e, não no sentido contrário naquela ocasião. Na verdade, o diagrama de forças relaciona as forças que agem no corpo com a aceleração com que eles estão se movendo, naquele instante, de acordo com a segunda lei de Newton.

Assim, se a força resultante agindo na bola é $T_X \rightarrow$ horizontal para a direita, ela proporcionará à bola uma aceleração horizontal para a direita $a \rightarrow$. Sobre a velocidade da bola, isto é, para qual lado ela está indo, nada se pode afirmar apenas com base no diagrama de forças. A bola que apresenta aceleração para a direita tem duas opções para a cinemática do seu movimento horizontal :

- estar se movendo para a direita ($\rightarrow V$) em movimento acelerado ($a \rightarrow$);
- estar se movendo para a esquerda ($\leftarrow V$) em movimento retardado ($a \rightarrow$).



Para esclarecer, observe a inclinação mantida pelo pêndulo em relação ao vagão, nas situações mostradas em cada figura acima. Com base nas figuras, o que se pode afirmar sobre o movimento do vagão ?

Figura I - a força resultante sobre a bola é nula, podendo ela estar parada ou em MRU;

Figura II - a força resultante sobre a bola é $T_x \rightarrow$, a bola apresenta aceleração $\rightarrow a$ horizontal para a direita, mas nada podemos garantir sobre a sua velocidade. A bola pode estar se movendo aceleradamente para a direita ($V \rightarrow, a \rightarrow$) ou retardadamente para a esquerda ($V \leftarrow, a \rightarrow$);

Figura III - a força resultante sobre a bola é $T_x \leftarrow$, a bola apresenta aceleração $\leftarrow a$ horizontal para a esquerda, mas nada podemos garantir sobre a sua velocidade. A bola pode estar se movendo aceleradamente para a esquerda ($V \leftarrow, a \leftarrow$) ou retardadamente para a direita ($V \rightarrow, a \leftarrow$).

Para determinar o valor da aceleração $a \rightarrow$ compartilhada pelo vagão e pela bola do pêndulo, no problema em questão, dividimos, membro a membro, as relações eq1 e eq2:

$$\frac{T \cdot \text{sen} \theta}{T \cdot \text{cos} \theta} = \frac{m \cdot a}{m \cdot g} \Rightarrow \text{tg} \theta = \frac{a}{g} \Rightarrow a = g \cdot \text{tg} \theta \quad (\text{eq3})$$

Substituindo os valores numéricos, temos:

$$a = g \cdot \text{tg} \theta = 10 \cdot (0,6 / 0,8) \Rightarrow a = 7,5 \text{ m/s}^2$$

Substituindo os valores numéricos na relação eq2, vem:

$$T \cdot \text{cos} \theta = m \cdot g \Rightarrow T \cdot (0,8) = 4 \times 10 \Rightarrow T = 50 \text{ N}$$

Questão 158 - Solução

A condição para que os corpos A, B e C se movam juntos, como se fossem um só bloco, é que eles compartilhem de uma mesma aceleração a (e velocidade) no referencial da Terra (referencial inercial).

- O corpo B se desloca em trajetória retilínea horizontal, o que implica ausência de aceleração vertical, ou seja, equilíbrio de forças na vertical:

$$N = P_B = m_B \cdot g \quad (\text{eq1})$$

- A tração T fornece a aceleração de B no referencial da Terra:

$$F_R = m_B \cdot a \Rightarrow T = m_B \cdot a \quad (\text{eq2})$$

- O corpo C se desloca em trajetória retilínea horizontal:

$$T_Y = P_C \Rightarrow T \cdot \text{cos} \alpha = m_C \cdot g \quad (\text{eq3})$$

- A componente T_X da tração T fornece a aceleração de C no referencial da Terra: $F_R = m_C \cdot a \Rightarrow T_X = T \cdot \text{sen} \alpha = m_C \cdot a \quad (\text{eq4})$

- O carrinho A move-se em trajetória retilínea horizontal:

$$N + T \cdot \text{cos} \alpha + P_A = N' \quad (\text{eq5})$$

- O carrinho A apresenta aceleração horizontal (\rightarrow) a :

$$F - T - T \cdot \text{sen}\alpha = m_A \cdot a \quad (\text{eq6})$$

Dividindo as equações eq4 e eq2 membro a membro, vem:

$$\frac{T \cdot \text{sen}\alpha}{T} = \frac{m_C \cdot a}{m_B \cdot a} \Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{6 \text{ kg}}{10 \text{ kg}} = 0,6 \Rightarrow \text{sen}\alpha = 0,6, \text{cos}\alpha = 0,8$$

Dividindo as equações eq4 e eq3 membro a membro, vem:

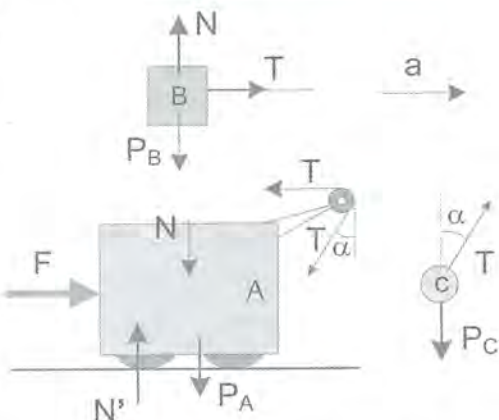
$$\frac{T \cdot \text{sen}\alpha}{T \cdot \text{cos}\alpha} = \frac{m_C \cdot a}{m_C \cdot g}$$

$$a = g \cdot \text{tg}\alpha = 10 \cdot \frac{0,6}{0,8} \Rightarrow a = 7,5 \text{ m/s}^2$$

Somando, membro a membro, as equações eq2, eq4 e eq6, vem:

$$F = (m_A + m_B + m_C) \cdot a \quad (\text{eq7})$$

$$F = (44 + 10 + 6) \cdot 7,5 = 450 \text{ N}$$



A relação eq7 nos diz que é possível tomar os 3 corpos juntos como se fossem um só corpo sob ação da força externa F, pelo fato de que eles compartilham da mesma aceleração resultante a.

Questão 159 - Resposta

$$F = (M + m) \cdot g \cdot \text{tg}\alpha, \quad \text{Dica: Leia o Exemplo Resolvido 1, página 56}$$

Questão 160 – Solução

a) Para ter uma base sólida em Mecânica, aconselho o leitor a ler a teoria do livro e não, somente, ler as resoluções. Sugiro que o leitor só prossiga na leitura da resolução dessa questão caso já tenha lido o conteúdo teórico das páginas 54 a 59. Caso contrário, leia essa teoria agora e retorne em seguida.

De acordo com o exposto na teoria, a fim de determinar quais forças deveremos decompor, devemos fazer uso do Par de Eixos Padrão. Nesse problema, a trajetória seguida pelo bloco em relação à Terra é uma reta horizontal, o que define o eixo padrão número 1 mostrado na figura. O eixo padrão 2 é sempre tomado perpendicularmente ao eixo 1.

Quais forças deveremos decompor? Como sempre, decomparamos as forças que **não se encontram** sobre esse par eixos padrão, nesse caso, a normal N e a tração T. Esse problema pede que o bloco esteja na iminência de perder o contato com a rampa, assim, consideraremos $N \cong 0$.

Na direção do eixo 1, a 2ª lei de Newton permite escrever:

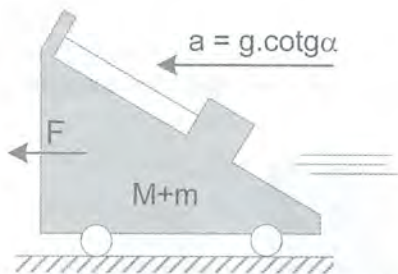
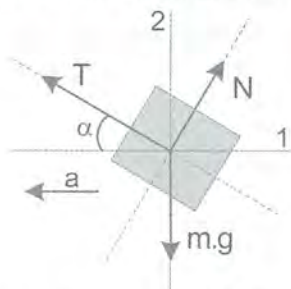
$$F_{R1} = m \cdot a_1 \Rightarrow T \cdot \cos \alpha = m \cdot a \quad (\text{eq1})$$

Como a trajetória seguida pelo corpo é retilínea (não tem concavidade), as forças ao longo do eixo 2 (eixo centrípeto, radial ou normal) devem se equilibrar, de forma que a resultante sobre esse eixo é nula. Na direção do eixo 2, a 2ª lei de Newton permite escrever:

$$F_{R2} = m \cdot a_2 \Rightarrow T \cdot \sin \alpha - m \cdot g = 0 \quad (\text{eq2})$$

Das relações eq1 e eq2, encontramos: $a = g \cdot \cot \alpha$ (eq3)

Assim, para que o bloco esteja na iminência de perder o contato com a rampa, o conjunto deverá compartilhar de uma aceleração $a = g \cdot \cot \alpha$ em relação à Terra (referencial inercial).



Com que força externa F se deve puxar todo o conjunto de massa $M+m$ para que ele se mova com essa aceleração? A 2ª lei de Newton responde:

$$F_R = (M + m) \cdot a \Rightarrow F = (M+m) \cdot g \cdot \cot \alpha$$

b) Das relações eq1 e eq3, vem:

$$T = \frac{m \cdot a}{\cos \alpha} = \frac{m}{\cos \alpha} \cdot (g \cdot \cot \alpha) = \frac{m}{\cos \alpha} \cdot \frac{g \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow T = m \cdot g \cdot \operatorname{cosec} \alpha$$

Questão 161 – Solução

a) A figura mostra o diagrama das forças agindo no pêndulo, bem como toda a geometria do problema.

De acordo com o exposto na teoria, a fim de determinar quais forças deveremos decompor, devemos fazer uso do Par de Eixos Padrão. Nesse problema, a trajetória seguida pelo pêndulo em relação à Terra é uma reta horizontal, o que define o eixo padrão número 1 mostrado na figura. O eixo padrão 2 é sempre tomado perpendicularmente ao eixo 1.

Quais forças deveremos decompor? Como sempre, decomparamos as forças que **não se encontram** sobre esse par eixos padrão, nesse caso, a tração T . Esse problema pede que o pêndulo esteja na iminência de perder o contato com o solo, assim, consideraremos $N \cong 0$.

Na direção do eixo 1, a 2ª lei de Newton permite escrever:

$$F_{R1} = m \cdot a_1 \Rightarrow T \cdot \text{sen} \alpha = m \cdot a \quad (\text{eq1})$$

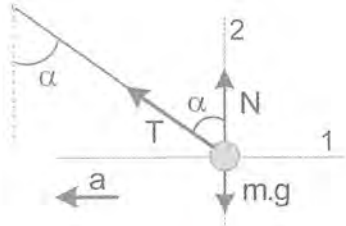
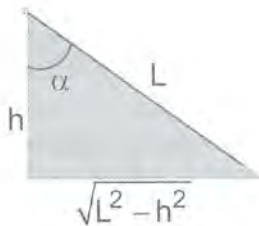
Como a trajetória seguida pelo pêndulo é retilínea (não tem concavidade), as forças ao longo do eixo 2 (eixo centrípeto, radial ou normal) devem se equilibrar, de forma que a resultante sobre esse eixo é nula. Na direção do eixo 2, a 2ª lei de Newton permite escrever:

$$F_{R2} = m \cdot a_2 \Rightarrow T \cdot \text{cos} \alpha - m \cdot g = 0 \quad (\text{eq2})$$

Das relações eq1 e eq2, encontramos:

$$a = g \cdot \text{tg} \alpha = g \frac{\sqrt{L^2 - h^2}}{h} \Rightarrow a = g \cdot \sqrt{\frac{L^2}{h^2} - 1} \quad (\text{eq3})$$

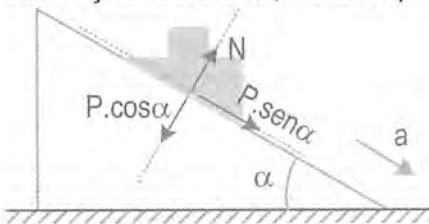
Assim, para que o pêndulo esteja na iminência de perder o contato com o solo, o conjunto (caminhão+pêndulo) deverá se mover em relação à Terra (referencial inercial) com a aceleração dada em eq3.



b) Da relação eq2, vem: $T = \frac{m \cdot g}{\text{cos} \alpha} = \frac{m \cdot g}{h/L} \Rightarrow T = m \cdot g \frac{L}{h}$

Questão 162 – Solução

Como os corpos movem-se juntos com a mesma aceleração resultante a , podemos inicialmente considerá-los como um único corpo e determinar a aceleração do sistema, causada pela componente $P \cdot \text{sen} \alpha$:



$$F_R = \text{massa} \cdot a$$

$$(m_A + m_B) \cdot g \cdot \text{sen} \alpha = (m_A + m_B) \cdot a$$

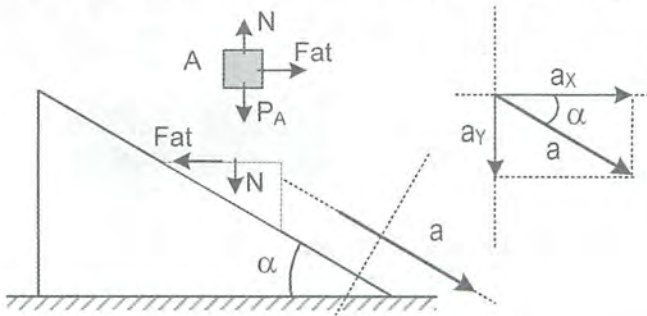
$$a = g \cdot \text{sen} \alpha = 10 \cdot 0,6 = 6 \text{ m/s}^2$$

$$a = 6 \text{ m/s}^2$$

Bloco e prisma compartilham dessa mesma aceleração $a = 6 \text{ m/s}^2$. Sobre o bloco agem as forças N , P_A e Fat , responsáveis pelas componentes a_x e a_y da sua aceleração, conforme a segunda lei de Newton :

$$F_{RX} = m_A \cdot a_x \Rightarrow Fat = m_A \cdot (a \cdot \cos\alpha) \Rightarrow Fat = 10 \times (6 \times 0,8) \Rightarrow \text{Fat} = 48 \text{ N}$$

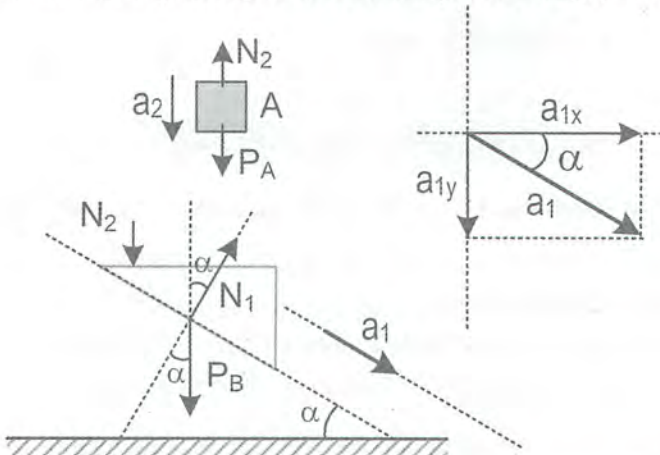
$$F_{RY} = m_A \cdot a_y \Rightarrow P_A - N = m_A \cdot (a \cdot \sin\alpha) \Rightarrow 100 - N = 10 \times (6 \times 0,6) \Rightarrow \text{N} = 64 \text{ N}$$



Questão 163 - Resposta: 480 N

Questão 164

Solução: Nesse problema, todas as superfícies são lisas. Escrevendo a segunda lei de Newton para o prisma B na direção da rampa, vem:



$$F_R = M \cdot a_1 \Rightarrow (P_B + N_2) \cdot \sin\alpha = M \cdot a_1 \Rightarrow M \cdot g \cdot \sin\alpha + N_2 \cdot \sin\alpha = M \cdot a_1 \quad (\text{eq1})$$

$$\text{Para o bloco A, temos: } F_R = m \cdot a_2 \Rightarrow P_A - N_2 = m \cdot a_2 \Rightarrow m \cdot g - N_2 = m \cdot a_2 \quad (\text{eq2})$$

Na direção vertical, o bloco A desce acompanhando a componente vertical do movimento do prisma B (vínculo geométrico), o que nos permite escrever:

$$a_2 = a_{1Y} \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot \text{sen}\alpha \quad (\text{eq3})$$

Dividindo eq1 por $\text{sen}\alpha$ e somando membro a membro com eq2, considerando eq3, vem:

$$(M+m) \cdot \text{sen}\alpha = a_1 \cdot \left(\frac{M}{\text{sen}\alpha} + m \cdot \text{sen}\alpha \right) \Rightarrow a_1 = \frac{(M+m) \cdot g \cdot \text{sen}\alpha}{(M+m \cdot \text{sen}^2\alpha)}$$

$$a_2 = a_1 \cdot \text{sen}\alpha \Rightarrow a_2 = \frac{(M+m) \cdot g \cdot \text{sen}^2\alpha}{(M+m \cdot \text{sen}^2\alpha)}$$

Questão 165 – Solução

Seja M' a massa do prisma. Da condição de equilíbrio inicial, podemos escrever:

$$M \cdot g = T = M' \cdot g \cdot \text{sen}30^\circ \Rightarrow M' = 2M \quad (\text{eq1})$$

Apoiando-se o bloco sobre o prisma, poderemos escrever a segunda lei de Newton para cada parte do sistema:

$$(M + M') \cdot g \cdot \text{sen}30^\circ - T = (M + M') \cdot a \quad (\text{eq2})$$

$$T - M \cdot g = M \cdot a \quad (\text{eq3})$$

Somando (eq2) e (eq3) membro a membro, vem:

$$(M + M') \cdot g \cdot \text{sen}30^\circ - M \cdot g = (2M + M') \cdot a \quad (\text{eq4})$$

Substituindo a relação eq1 e $\text{sen}30^\circ = 1/2$ na relação eq4, vem $a = g/8$.

Isolando agora apenas o bloco, de forma semelhante à questão 162, percebemos que sobre ele agem as forças normal $N \uparrow$ e peso $P \downarrow$ e $F_{at} \rightarrow$ responsáveis pelas componentes vertical $\downarrow a_Y = a \cdot \text{sen}30^\circ$ e horizontal $\rightarrow a_X = a \cdot \text{cos}30^\circ$ da aceleração $a \searrow$ do bloco ladeira abaixo.

Assim, aplicando a segunda lei de Newton ao bloquinho isolado, nas direções X e Y, respectivamente, vem:

$$F_{RX} = M \cdot a_X \Rightarrow F_{at} = M \cdot (a \cdot \text{cos}30^\circ) \Rightarrow F_{at} = M \cdot \frac{g}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow F_{at} = \frac{M \cdot g \cdot \sqrt{3}}{16}$$

$$F_{RY} = M \cdot a_Y \Rightarrow M \cdot g - N = M \cdot (a \cdot \text{sen}30^\circ) \Rightarrow M \cdot g - N = M \cdot \frac{g}{8} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow N = \frac{15 \cdot M \cdot g}{16}$$

Questão 166 - Solução

A polia ideal tem massa nula, portanto a força resultante agindo nela é sempre nula, independente da sua aceleração. Por esse motivo, a tração T em cada extremidade da corda que envolve a polia (Figura 87) deve ser tal que $T + T = F$, portanto $T = F/2$. A polia ideal fraciona a força F em duas partes iguais ($F/2$ cada).

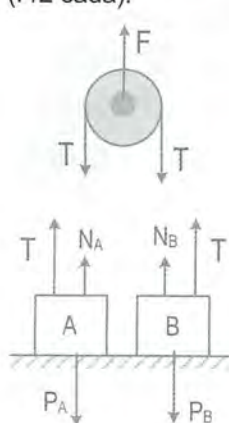


Figura 87

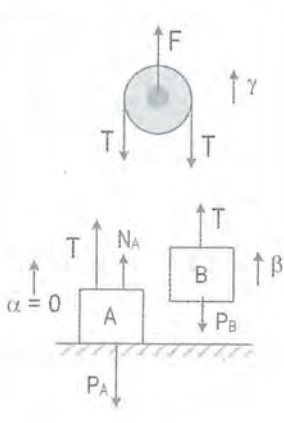


Figura 88

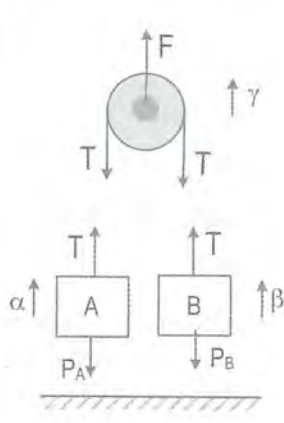


Figura 89

Assim, a tração $T = F/2$, agindo em uma dada caixa, só será capaz de acelerá-la para cima, caso supere o seu peso ($T > P$).

a) Sendo $F = 400\text{N}$, teremos $T = F/2 = 200\text{N}$, com $P_A = 400\text{N}$ e $P_B = 240\text{N}$. Assim, visto que $T < P_A$ e $T < P_B$, todo o sistema permanecerá em equilíbrio, (Figura 87) portanto, teremos $\alpha = \beta = \gamma = 0\text{ m/s}^2$. Adicionalmente, do equilíbrio na Figura 87, podemos escrever:

$$N_A + T = P_A \Rightarrow N_A + 200 = 400 \Rightarrow N_A = 200\text{ N}$$

$$N_B + T = P_B \Rightarrow N_B + 200 = 240 \Rightarrow N_B = 40\text{ N}$$

b) Sendo $F = 720\text{ N}$, teremos $T = F/2 = 360\text{N}$, com $P_A = 400\text{N}$ e $P_B = 240\text{ N}$. Assim, visto que $T < P_A$ e $T > P_B$, apenas a caixa B e a polia acelerarão para cima, enquanto a caixa A permanecerá em repouso permanente no solo ($\alpha = 0\text{ m/s}^2$). Da segunda lei de Newton na Figura 88, podemos escrever:

$$F_{RB} = m_B \cdot \beta \Rightarrow T - P_B = m_B \cdot \beta \Rightarrow 360 - 240 = 24 \cdot \beta \Rightarrow \beta = 5\text{ m/s}^2$$

$$N_A + T = P_A \Rightarrow N_A + 360 = 400 \Rightarrow N_A = 40\text{ N}, \alpha = 0\text{ m/s}^2$$

Conforme visto no Tópico Especial 2 (capítulo 7, página 247, caso 2) sobre Vínculos Geométricos, as acelerações α (caixa A), β (caixa B) e γ (polia) estarão relacionadas entre si pela expressão:

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (\text{eq1})$$

Portanto, para $\alpha = 0$ e $\beta = 5 \text{ m/s}^2$, vem:

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{0 + 5}{2} = 2,5 \text{ m/s}^2$$

Sendo $F = 1200\text{N}$, teremos $T = F/2 = 600\text{N}$, com $P_A = 400\text{N}$ e $P_B = 240\text{N}$. Assim, visto que $T > P_A$ e $T > P_B$, tanto as caixas quanto a polia acelerarão para cima. Da segunda lei de Newton na Figura 89, podemos escrever:

$$FR_A = m_A \cdot \alpha \Rightarrow T - P_A = m_A \cdot \alpha \Rightarrow 600 - 400 = 40 \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = 5 \text{ m/s}^2$$

$$FR_B = m_B \cdot \beta \Rightarrow T - P_B = m_B \cdot \beta \Rightarrow 600 - 240 = 24 \cdot \beta \Rightarrow \beta = 15 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Portanto, para } \alpha = 5, \beta = 15 \text{ m/s}^2, \text{ vem: } \gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{5 + 15}{2} = 10 \text{ m/s}^2$$

Questão 167 - Resposta

a) 80 N, b) $a_1 = 15 \text{ m/s}^2$, $a_2 = 2,5 \text{ m/s}^2$, $a_P = (a_1 + a_2) / 2 = 8,75 \text{ m/s}^2$

Questão 168 - Solução

Escrevendo a segunda lei de Newton para cada caixa e levando em conta o vínculo geométrico (leia o Tópico Especial 2, capítulo 7, sobre vínculos geométricos), temos:

$$\text{Caixa A: } F_R = m_A \cdot a_A \Rightarrow T = m_A \cdot a_A \quad (\text{eq1})$$

$$\text{Caixa B: } F_R = m_B \cdot a_B \Rightarrow T = m_B \cdot a_B \quad (\text{eq2})$$

$$\text{Polia ideal (} m = 0 \text{): } F_R = m \cdot a \Rightarrow T' - 2T = 0 \cdot a \Rightarrow T' = 2T \quad (\text{eq3})$$

$$\text{Caixa C: } F_R = m_C \cdot a_C \Rightarrow P_C - T' = m_C \cdot a_C \Rightarrow P_C - 2T = m_C \cdot a_C \quad (\text{eq4})$$

Vínculo geométrico:

$$a_C = \frac{a_A + a_B}{2} \quad (\text{eq5})$$

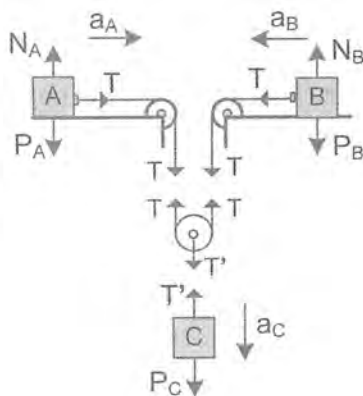
Resolvendo o sistema de equações simultâneas eq1, eq2, eq4 e eq5, vem:

$$a_A = 4 \text{ m/s}^2$$

$$a_B = 6 \text{ m/s}^2$$

$$a_C = 5 \text{ m/s}^2$$

$$T = 60 \text{ N}$$



Questão 169 - Solução:

Não se esforce para tentar prever inicialmente o sentido das acelerações de cada caixa. Arbitre para cada uma delas um sentido que facilite determinar a relação entre as mesmas, com base no vínculo geométrico do sistema.

Considerando os sentidos arbitrados para a aceleração de cada bloco na Figura 90, temos:

$$\text{Vínculo geométrico: } a_B = \frac{a_A + a_C}{2} \quad (\text{eq1})$$

$$\text{Caixa A: } F_R = m_A \cdot a_A \Rightarrow T - m_A \cdot g = m_A \cdot a_A \Rightarrow T - 30 = 3 \cdot a_A \quad (\text{eq2})$$

$$\text{Caixa C: } F_R = m_C \cdot a_C \Rightarrow T - m_C \cdot g = m_C \cdot a_C \Rightarrow T - 10 = 1 \cdot a_C \quad (\text{eq3})$$

$$\text{Polia ideal (m = 0): } F_R = m \cdot a \Rightarrow T' - 2T = 0 \cdot a \Rightarrow T' = 2T \quad (\text{eq4})$$

$$\text{Caixa B: } F_R = m_B \cdot a_B \Rightarrow P_B - T' = m_B \cdot a_B \xrightarrow{\text{eq4}} 20 - 2T = 2 \cdot a_B \quad (\text{eq5})$$

O sentido das acelerações foi arbitrado de forma a facilitar o equacionamento do vínculo geométrico. A relação eq1 acima, por exemplo, só é válida para para esses sentidos arbitrados. Se outros sentidos forem arbitrados, essa equação mudará. Note que, quando a aceleração da caixa é arbitrada para cima, a força resultante nela deverá ser equacionada como sendo "as forças para cima menos as forças para baixo" como ocorreu às caixas A e C (Figura 90). Quando a aceleração da caixa é arbitrada para baixo, a força resultante deverá ser equacionada como sendo "as forças para baixo menos as forças prá cima" como ocorreu no equacionamento da caixa B (Figura 90).

Da relação eq1, vem: $6 \cdot a_B = 3 \cdot a_A + 3 \cdot a_C \quad (\text{eq6})$

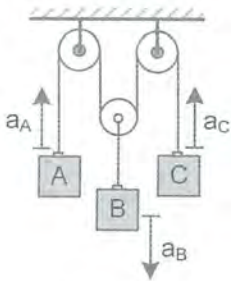


Figura 90

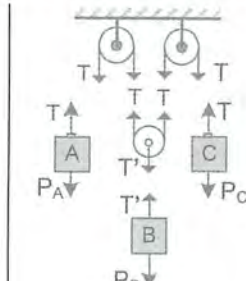


Figura 91

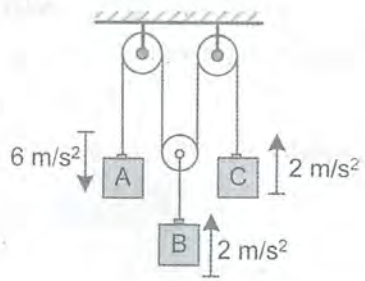


Figura 92

Substituindo eq2, eq3, eq4 em eq6, vem:

$$3 \cdot (20 - 2T) = (T - 30) + 3 \cdot (T - 10) \Rightarrow T = 12N$$

Substituindo o valor obtido para T em eq2, eq3, eq5, vem:

$$T - 30 = 3 \cdot a_A \Rightarrow 12 - 30 = 3 \cdot a_A \Rightarrow a_A = -6 \text{ m/s}^2$$

$$T - 10 = 1 \cdot a_C \Rightarrow 12 - 10 = 1 \cdot a_C \Rightarrow a_C = 2 \text{ m/s}^2$$

$$20 - 2T = 2 \cdot a_B \Rightarrow 20 - 2 \cdot (12) = 2 \cdot a_B \Rightarrow a_B = -2 \text{ m/s}^2$$

As acelerações cujos sinais algébricos resultaram negativos serão computadas em módulo e seus sentidos serão invertidos para efetuar a correção de sinal. Assim, o resultado final correto é mostrado na Figura 92.

Questão 170 $a_A = 3g/5 \uparrow$, $a_B = a_C = g/5 \downarrow$ (veja questão 169)

Questão 171 $a_A = 2 \text{ m/s}^2$, $a_B = 1 \text{ m/s}^2$, $T = 36 \text{ N}$ (veja questão 168)

Questão 172 $a_A = 12 \text{ m/s}^2$, $a_B = 6 \text{ m/s}^2$, $T = 24 \text{ N}$ (veja questão 168)

Questão 173 $a_A = 8 \text{ m/s}^2$, $a_B = 2 \text{ m/s}^2$, $T = 6 \text{ N}$ (veja figura 8 pág 252)

Questão 174 - Solução

Em nossa resolução, estamos adotando o referencial inercial da Terra, portanto, todas as acelerações são tomadas em relação à Terra. Escrevendo a segunda lei de Newton para cada caixa e levando em conta o vínculo geométrico (leia o Tópico Especial 2, capítulo 7, sobre vínculos geométricos), temos:

Caixa 2: $F_R = m_2 \cdot a_2$, com $m_2 = 2m$

$$2m \cdot g - T = 2m \cdot a_2 \quad (\text{eq1})$$

Caixa 3: $F_R = m_3 \cdot a_3$, com $m_3 = m$

$$m \cdot g - T = m \cdot a_3 \quad (\text{eq2})$$

Polia ideal ($m = 0$): $F_R = m \cdot a$

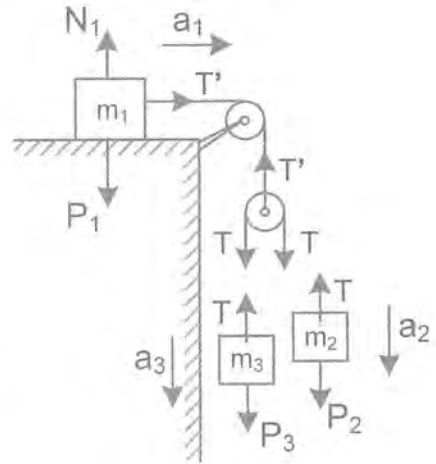
$$T' - 2T = 0 \cdot a \Rightarrow T' = 2T \quad (\text{eq3})$$

Caixa 1: $F_R = m_1 \cdot a_1$, com $m_1 = m$

$$T' = m \cdot a_1 \stackrel{\text{eq3}}{\Rightarrow} 2T = m \cdot a_1 \quad (\text{eq4})$$

Vínculo geométrico: $a_1 = \frac{a_2 + a_3}{2}$

$$2 \cdot a_1 = a_2 + a_3 \quad (\text{eq5})$$



O sentido das acelerações foi arbitrado de forma a facilitar o equacionamento do vínculo geométrico. A relação eq5 acima, por exemplo, só é válida para para esses sentidos arbitrados. Se outros sentidos forem arbitrados, essa equação mudará. Note também que, como as acelerações das caixas 2 e 3 foram arbitradas para baixo, a força resultante em cada uma dessas caixas foi equacionada como sendo "as forças para baixo menos as forças para cima".

Isolando a_1 , a_2 e a_3 de eq1, eq2 e eq4 e substituindo em eq5, vem:

$$2 \cdot \left(\frac{2T}{m} \right) = \left(g - \frac{T}{2m} \right) + \left(g - \frac{T}{m} \right) \Rightarrow 2g = \frac{11 \cdot T}{2m} \Rightarrow T = \frac{4mg}{11} \quad (\text{eq6})$$

Substituindo eq6 em eq4, vem: $a_1 = \frac{8g}{11}$.

Substituindo eq6 em eq1, vem: $a_2 = \frac{9g}{11}$.

Substituindo eq6 em eq2, vem: $a_3 = \frac{7g}{11}$.

Questão 175 - Solução

Em nossa resolução, estamos adotando o referencial inercial da Terra, portanto, todas as acelerações são tomadas em relação à Terra. Escrevendo a segunda lei de Newton para cada caixa e levando em conta o vínculo geométrico (leia o Tópico Especial 2, capítulo 7, sobre vínculos geométricos), temos:

Caixa 2: $F_R = m_2 \cdot a_2$, com $m_2 = 2m$

$$2m \cdot g - T = 2m \cdot a_2 \quad (\text{eq1})$$

Caixa 3: $F_R = m_3 \cdot a_3$, com $m_3 = m$

$$m \cdot g - T = m \cdot a_3 \quad (\text{eq2})$$

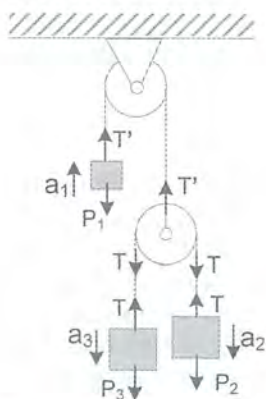
Polia ideal ($m = 0$): $F_R = m \cdot a$

$$T' - 2T = 0 \cdot a \Rightarrow T' = 2T \quad (\text{eq3})$$

Caixa 1: $F_R = m_1 \cdot a_1$, com $m_1 = m$

$$T' - m \cdot g = m \cdot a_1, \text{ usando eq3, vem:}$$

$$2T - m \cdot g = m \cdot a_1 \quad (\text{eq4})$$



Vínculo geométrico: $a_1 = \frac{a_2 + a_3}{2} \Rightarrow 2 \cdot a_1 = a_2 + a_3 \quad (\text{eq5})$

O sentido das acelerações foi arbitrado de forma a facilitar o equacionamento do vínculo geométrico. A relação eq5 acima, por exemplo, só é válida para para esses sentidos arbitrados. Se outros sentidos forem arbitrados, essa equação mudará. Note que, quando a aceleração da caixa é arbitrada para cima, a força resultante nela deverá ser equacionada como sendo "as forças para cima menos as forças para baixo" como ocorreu à caixa 1. Quando a aceleração da caixa é arbitrada para baixo, a força resultante deverá ser equacionada como sendo "as forças para baixo menos as forças para cima" como ocorreu no equacionamento das caixas 2 e 3

Isolando a_1 , a_2 e a_3 de eq1, eq2 e eq4 e substituindo em eq5, vem:

$$2 \cdot \left(\frac{2T}{m} - g \right) = \left(g - \frac{T}{2m} \right) + \left(g - \frac{T}{m} \right) \Rightarrow 4g = \frac{11 \cdot T}{2m} \Rightarrow T = \frac{8mg}{11} \quad (\text{eq6})$$

Substituindo eq6 em eq4, vem: $a_1 = \frac{5g}{11}$

Substituindo eq6 em eq1 e eq2, vem: $a_2 = \frac{7g}{11}$ e $a_3 = \frac{3g}{11}$

Questão 176 – Resposta

$$a_A = \frac{7g}{17} \uparrow, a_B = \frac{5g}{17} \downarrow, a_C = \frac{g}{17} \downarrow \quad (\text{veja a resolução da questão 175})$$

Questão 177 – Resposta

$$\text{a) } a_A = \frac{g}{7} \uparrow, a_B = \frac{3g}{7} \downarrow, a_C = \frac{g}{7} \uparrow \quad (\text{veja a resolução da questão 175})$$

$$\text{b) } h_A = h_{0A} + v_{0A}t + a_A t^2/2 = 0 + 0 + (g/7)t^2/2 \Rightarrow h_A = \frac{g}{7} \cdot \frac{t^2}{2}$$

$$h_C = h_{0C} + v_{0C}t + a_C t^2/2 = 0 + 0 + (g/7)t^2/2 \Rightarrow h_C = \frac{g}{7} \cdot \frac{t^2}{2}$$

Assim, vemos que $h_A = h_C$, para qualquer instante t .

Questão 178 – Resposta

$$a_A = \frac{24g}{29} \rightarrow, a_B = \frac{25g}{29} \downarrow, a_C = \frac{23g}{29} \downarrow \quad (\text{veja a resolução da questão 174})$$

Questão 179 - Solução

Em nossa resolução, estamos adotando o referencial inercial da Terra, portanto, todas as acelerações e deslocamentos são tomados em relação à Terra. Quando o número de polias cresce bastante, torna-se vantajoso adotar um eixo referencial para baixo \downarrow e dar um tratamento escalar para as grandezas vetoriais. Para isso, atribui-se um sinal algébrico positivo para aquelas que apontarem a favor do eixo \downarrow e um sinal algébrico negativo para aquelas que apontarem contra \uparrow o eixo.

Os vínculos geométricos do sistema permitem determinar as relações entre as acelerações escalares de cada caixa. Note que se as caixas A e B têm acelerações $a_A \downarrow$ e $a_B \downarrow$ (todas tomadas em relação à Terra), o ponto p da corda acima (veja figura) terá necessariamente aceleração $a_p \downarrow$ dada por:

$$a_p = \frac{a_A + a_B}{2} \quad (\text{eq1})$$

Se esse ponto p tem aceleração $a_p \downarrow$ e a caixa C tem aceleração $a_C \downarrow$, então o ponto q da corda acima (veja figura) necessariamente terá aceleração a_q dada por:

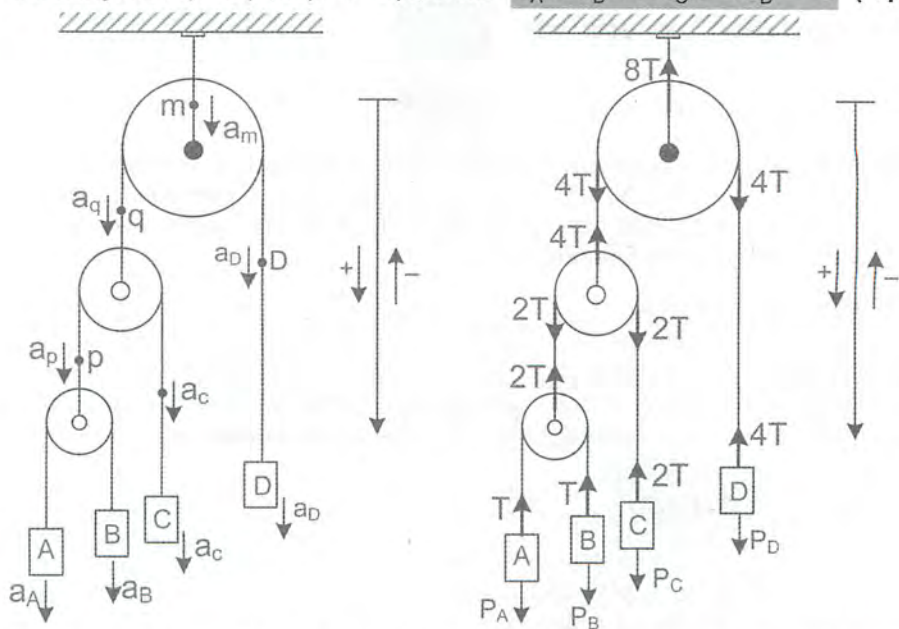
$$a_q = \frac{a_p + a_C}{2} \quad (\text{eq2})$$

Se esse ponto q tem aceleração $a_q \downarrow$ e a caixa D tem aceleração $a_D \downarrow$, então o ponto m da corda acima (veja figura) necessariamente terá aceleração a_m dada por:

$$a_m = \frac{a_q + a_D}{2} \quad (\text{eq3})$$

Entretanto, como o ponto m é fixo ao teto, temos: $a_m = 0$ (eq4)

Das relações eq1, eq2, eq3 e eq4, vem: $a_A + a_B + 2a_C + 4a_D = 0$ (eq5)



Lembre-se que, em todas as relações encontradas até aqui, as grandezas vetoriais estão recebendo tratamento escalar, portanto, cada uma tem seu sinal algébrico de acordo com a convenção de sinais adotada $\downarrow +$ e $\uparrow -$. Forças que apontam para baixo também serão tomadas como positivas, forças que apontam para cima serão tomadas como negativas. O mesmo vale para as acelerações. Aplicando-se a segunda lei de Newton para cada caixa, vem:

$$P_A - T = m_A \cdot a_A \Rightarrow m \cdot g - T = m \cdot a_A \quad (\text{eq6})$$

$$P_B - T = m_B \cdot a_B \Rightarrow 2m \cdot g - T = 2m \cdot a_B \quad (\text{eq7})$$

$$P_C - 2T = m_C \cdot a_C \Rightarrow 3m \cdot g - 2T = 3m \cdot a_C \quad (\text{eq8})$$

$$P_D - 4T = m_D \cdot a_D \Rightarrow 6m \cdot g - 4T = 6m \cdot a_D \quad (\text{eq9})$$

Isolando a_A em eq6, a_B em eq7, a_C em eq8, a_D em eq9 e substituindo todas em eq5, vem:

$$\left(g - \frac{T}{m}\right) + \left(g - \frac{T}{2m}\right) + 2\left(g - \frac{2T}{3m}\right) + 4\left(g - \frac{2T}{3m}\right) = 0 \Rightarrow T = \frac{48 \cdot m \cdot g}{33} \quad (\text{eq10})$$

Substituindo eq10 em eq6, vem: $a_A = \frac{-15g}{33}$

Substituindo eq10 em eq7, vem: $a_B = \frac{+9g}{33}$

Substituindo eq10 em eq8, vem: $a_C = \frac{+g}{33}$

Substituindo eq10 em eq9, vem: $a_D = \frac{+g}{33}$

Como a_A resultou negativa, isso indica que, na verdade, a aceleração do bloco A vale $a_A = 15g/33$ para cima (no sentido contrario ao eixo). Todas as outras acelerações resultaram positivas, indicando que todas elas de fato apontam para baixo (a favor do eixo).

Questão 180 - Solução

a) Seguindo um raciocínio semelhante ao demonstrado na resolução da questão anterior, podemos determinar a relação entre as acelerações dos corpos fazendo uso dos vínculos geométricos. Sendo $a_1\downarrow$ e $a_2\downarrow$ as acelerações das massas m_1 e m_2 , a aceleração $a_x\downarrow$ da corda acima é dada por:

$$a_x = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad (\text{eq1})$$

Sendo $a_3\downarrow$ e $a_4\downarrow$ as acelerações das massas m_3 e m_4 , a aceleração $a_y\downarrow$ da corda acima (veja figura) é dada por:

$$a_y = \frac{a_3 + a_4}{2} \quad (\text{eq2})$$

A aceleração $a_m\downarrow$ da corda acima (veja figura) se relaciona com $a_x\downarrow$ e $a_y\downarrow$ por:

$$a_m = \frac{a_x + a_y}{2} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \quad (\text{eq3})$$

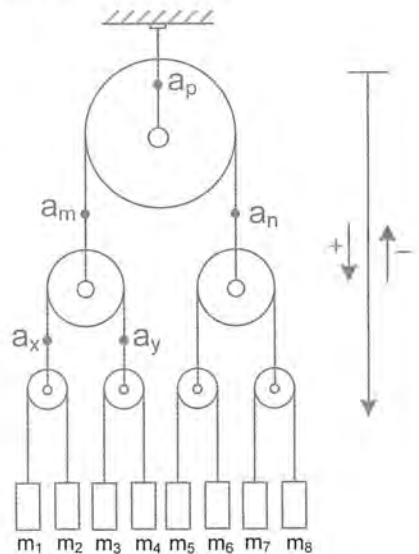
Analogamente, a aceleração $a_n\downarrow$ também será dada por:

$$a_n = \frac{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}{4} \quad (\text{eq4})$$

A aceleração $a_p\downarrow$ da corda acima (veja figura) se relaciona com $a_m\downarrow$ e $a_n\downarrow$ por:

$$a_p = \frac{a_m + a_n}{2} \quad (\text{eq5})$$

Entretanto, como o ponto p é fixo ao teto, temos: $a_p = 0$ (eq6)



De eq3, eq4, eq5 e eq6, vem:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 = 0 \quad (\text{eq7})$$

Como todas as polias e cordas são ideais, vemos que cada uma das trações $T_1, T_2, T_3, \dots, T_7$ e T_8 nos fios presos diretamente aos blocos é igual a um oitavo da tração na corda extremo superior, isto é, a corda que prende a polia maior ao teto. Dessa forma, deduzimos que:

$$T_1 = T_2 = T_3 = \dots = T_8 = T \quad (\text{eq8})$$

Para cada um dos blocos, podemos escrever a segunda lei de Newton:

$$m_i \cdot g - T = m_i \cdot a_i, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, 8$$

Dividindo toda a equação por m_i , vem: $g - \frac{T}{m_i} = a_i$ (eq9)

Escrevendo a relação eq9 para cada um dos 8 blocos e somando membro a membro, vem:

$$g - \frac{T}{m_1} = a_1$$

$$g - \frac{T}{m_2} = a_2$$

$$g - \frac{T}{m_3} = a_3$$

.....

$$g - \frac{T}{m_8} = a_8$$

$$8g - T \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \dots + \frac{1}{m_8} \right) = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8$$

Usando eq7, vem:

$$8g - T \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \dots + \frac{1}{m_8} \right) = 0$$

$$T = \frac{8g}{\frac{1}{M}} = 8M \cdot g, \quad \text{com} \quad \frac{1}{M} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \dots + \frac{1}{m_8}$$

O termo M é a chamada massa reduzida do sistema.

Usando eq8, vem: $T_1 = T_2 = T_3 = \dots = T_8 = T = 8 \cdot M \cdot g$

b) As acelerações $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$ de cada bloco podem ser determinadas com base na relação eq9, usando o resultado da tração T determinada no item a. Fazendo $i = 1$ em eq9, vem:

$$a_1 = g - \frac{T}{m_1} = g - \frac{8 \cdot Mg}{m_1} \Rightarrow a_1 = g \cdot \left(\frac{m_1 - 8M}{m_1} \right)$$

Fazendo $i = 2$ em eq9, vem:

$$a_2 = g - \frac{T}{m_2} = g - \frac{8 \cdot Mg}{m_2} \Rightarrow a_2 = g \cdot \left(\frac{m_2 - 8M}{m_2} \right)$$

E assim sucessivamente, até $i = 8$, quando obteremos:

$$a_8 = g - \frac{T}{m_8} = g - \frac{8 \cdot Mg}{m_8} \Rightarrow a_8 = g \cdot \left(\frac{m_8 - 8M}{m_8} \right)$$

No caso geral, para um k genérico variando de 1 a 8, a aceleração a_k é dada por:

$$a_k = g - \frac{T}{m_k} = g - \frac{8 \cdot Mg}{m_k} \Rightarrow a_k = g \cdot \left(\frac{m_k - 8M}{m_k} \right)$$

Questão 181 - Solução

Admitindo $m_1 > m_2$, a segunda lei de Newton permite escrever:

$$m_1 \cdot g - T = m_1 \cdot a \quad \text{e} \quad T - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a$$

Somando, membro a membro, vem:

$$m_1 \cdot g - m_2 \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2) \cdot g}{m_1 + m_2}$$

Substituindo, vem: $m_1 \cdot g - T = m_1 \cdot a$

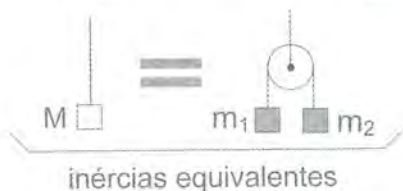
$$m_1 \cdot g - T = m_1 \cdot \frac{(m_1 - m_2) \cdot g}{m_1 + m_2}$$

$$T = \frac{2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot g}{m_1 + m_2}$$

Como as polias são ideais, a tração no fio superior vale: $T' = 2T = \frac{4 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot g}{m_1 + m_2}$

Entretanto, para que o bloco de massa M permaneça em repouso, devemos ter:

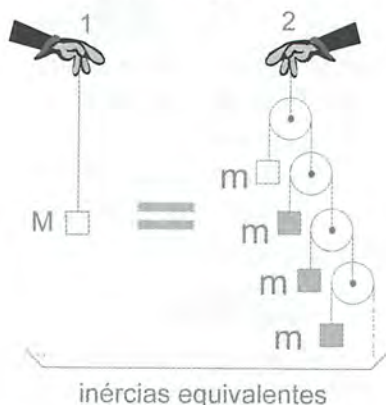
$$T' = M \cdot g \Rightarrow \frac{4 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot g}{m_1 + m_2} = M \cdot g \Rightarrow M = \frac{4 \cdot m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{eq1})$$



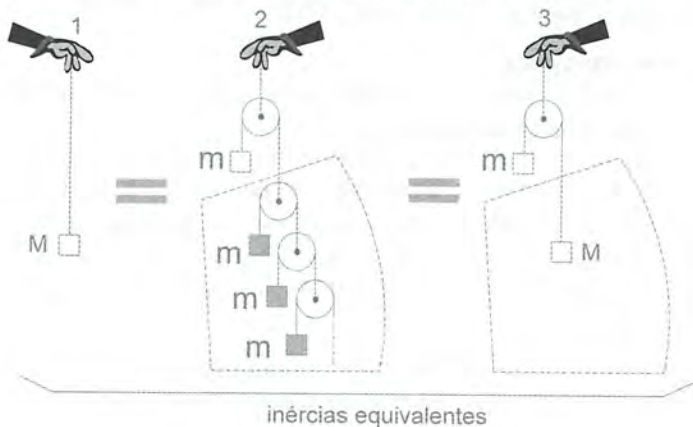
Assim, quando as massas M , m_1 e m_2 satisfazem a relação eq1, dizemos que os dois sistemas da figura têm inércias equivalentes, o que faz com que M permaneça em repouso no sistema de polias dessa questão. O significado físico dessa inércia equivalente será mais bem compreendido na resolução da próxima questão.

Questão 182 – Solução (Antes de ler essa resolução, veja o apêndice 10 sobre infinitos)

a) Seja M a inércia equivalente do sistema com infinitos blocos e polias. Isso significa que a força que um operador 1 deve fazer para sustentar o bloco M em repouso é a mesma força que um operador 2 deve fazer para manter suspenso o conjunto com infinitos blocos, ambos sujeitos ao mesmo campo gravitacional, uniforme como mostra a figura abaixo:



Ora, mas se M é a inércia equivalente do sistema com infinitas polias, M também é a inércia equivalente do sistema com “infinitas menos uma” polias. Afinal, a retirada de apenas uma polia e um bloco de um sistema com infinitos blocos e polias não altera a inércia equivalente desse sistema.



Ora, mas se os sistemas 1 e 3 mostrados na figura têm inércias equivalentes, de acordo com a relação eq1 obtida na resolução da questão 181, podemos escrever:

$$M = \frac{4.M.m}{M+m} \Rightarrow 1 = \frac{4.m}{M+m} \Rightarrow M+m = 4m \Rightarrow \boxed{M = 3m} \quad (\text{eq1})$$

Esse resultado nos fornece a inércia equivalente do sistema formado por infinitos blocos e polias! 😊

Agora, podemos facilmente calcular a aceleração a do primeiro bloco de cima:

$$a = \frac{(M-m).g}{M+m} = \frac{(3m-m).g}{3m+m} \Rightarrow \boxed{a = \frac{g}{2}}$$

b) A tração no fio que prende a primeira polia ao teto é exatamente a força que o operador aplica no fio para suspender qualquer um dos sistemas 1, 2 ou 3 mostrados anteriormente, visto que eles têm inércias equivalentes. Em particular, a tração que o operador aplica ao sistema 1 é dada simplesmente por:

$$T = M.g \Rightarrow \boxed{T = 3m.g}$$

Essa é a tração no fio que prende a primeira polia ao teto. O mesmo resultado pode ser encontrado calculando-se a força que o operador aplica ao fio do sistema 3. Verifique esse resultado.

É curioso que, apesar de o sistema ser composto por infinitos blocos e polias, sua inércia equivalente seja finita e valha apenas $3m$.

Veja uma resolução mais elegante para esse problema no capítulo 4 sobre Referenciais Não-Inerciais, página 190, questão 322, a qual não faz uso da relação eq1 obtida na solução da questão 181.

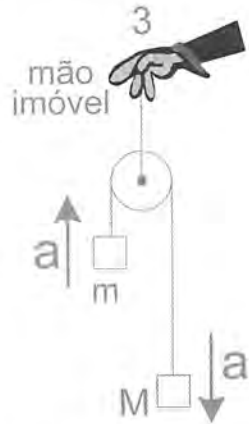
Questão 183 - Resposta

- a) O sistema ficará perfeitamente balanceado, perfeitamente equilibrado e a aceleração de cada bloco será nula;
- b) Agora, a tração em cada um dos fios será nula ($T = 0$) e todos os corpos cairão com a aceleração da gravidade $a = g$.

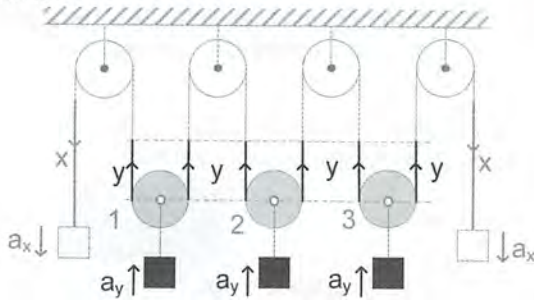
É admirável que a retirada de uma massa $m/2^n$ supostamente tão pequena (para grandes valores de n) produza uma mudança tão radical no comportamento do sistema, em especial, na aceleração dos seus blocos.

Questão 184 - Solução

Esse sistema é composto por N polias móveis (polias cinza) que sustentam N caixas pretas, além de duas caixas brancas que ficam nas extremidades. Na figura, foi desenhado o caso $N = 3$.



Para analisar o vínculo geométrico (leia o tópico especial 2 sobre vínculos geométricos, capítulo 7), admita que, um deslocamento $\uparrow y$ das caixas pretas para cima seja compensado por um deslocamento $x \downarrow$ das duas caixas brancas das extremidades para baixo, de forma que o comprimento total do fio permaneça constante.



Assim, podemos dizer que: $+2x - 6y = 0 \Rightarrow +2 \cdot a_x - 6 \cdot a_y = 0 \Rightarrow a_x = 3 \cdot a_y$
onde a_x e a_y são as acelerações verticais dos blocos indicadas na figura.

Entretanto, para uma quantidade genérica N de polias móveis, os deslocamentos correspondentes $x \downarrow$ e $y \uparrow$ se relacionam por:

$$+2x - 2N \cdot y = 0 \Rightarrow +2 \cdot a_x - 2N \cdot a_y = 0 \Rightarrow a_x = N \cdot a_y \quad (\text{eq1})$$

Escrevendo a segunda lei de Newton para os blocos brancos, vem:

$$m \cdot g - T = m \cdot a_x \Rightarrow 2m \cdot g - 2T = 2m \cdot a_x \quad (\text{eq2})$$

Escrevendo a segunda lei de Newton para os blocos pretos, vem:

$$2T - m \cdot g = m \cdot a_y \quad (\text{eq3})$$

Somando eq2 e eq3, membro a membro, e considerando eq1, vem:

$$2m \cdot g - m \cdot g = m \cdot (2a_x + a_y) \Rightarrow m \cdot g = m \cdot (2N \cdot a_y + a_y)$$

$$a_y = \frac{g}{2N+1}$$

$$\text{De eq1, vem: } a_x = N \cdot a_y = N \cdot \frac{g}{2N+1} \Rightarrow a_x = \frac{N \cdot g}{2N+1}$$

Questão 185 - Solução

a) A exemplo do que já foi feito nas resoluções das questões 180 e 181, novamente daremos um tratamento escalar para o problema, adotando um eixo referencial apontando para baixo e atribuindo um sinal algébrico para deslocamentos e acelerações que apontem para baixo \downarrow e sinal negativo caso apontem para cima.

Sejam $x_1 \downarrow$, $x_2 \downarrow$, $x_3 \downarrow$, ..., $x_N \downarrow$ os deslocamentos escalares sofridos simultaneamente por cada um dos blocos do sistema em relação à Terra. Como o comprimento total do fio é constante, podemos escrever:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N = 0 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N = 0 \quad (\text{eq1})$$

A relação eq1 nos diz que algumas acelerações escalares são positivas (apontam para baixo), outras são negativas (apontam para cima) e a soma algébrica de todas elas é nula.

Seja T a tração no fio ideal que sustenta todas as polias. A segunda lei de Newton para um bloco genérico do sistema permite escrever:

$$2T - m_i \cdot g = m_i \cdot a_i \Rightarrow \frac{2T}{m_i} - g = a_i \quad (\text{eq2})$$

Escrevendo a relação eq2 para cada um dos N blocos e somando membro a membro, vem:

$$\frac{2T}{m_1} - g = a_1$$

$$\frac{2T}{m_2} - g = a_2$$

$$\frac{2T}{m_3} - g = a_3$$

.....

$$\frac{2T}{m_N} - g = a_N$$

$$2T \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \dots + \frac{1}{m_N} \right) - N \cdot g = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Usando eq1, vem:

$$2T \left(\frac{1}{M} \right) - N \cdot g = 0, \quad \text{com} \quad \frac{1}{M} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \dots + \frac{1}{m_N}$$

onde M é a chamada massa reduzida do sistema.

Finalmente, a tração T no fio é dada por: $T = \frac{N \cdot M \cdot g}{2} \quad (\text{eq3})$

Substituindo eq3 em eq2, vem: $a_i = \frac{2T}{m_i} - g = \frac{2}{m_i} \frac{N \cdot M \cdot g}{2} - g$

$$a_i = g \left(\frac{N \cdot M}{m_i} - 1 \right)$$

b) Se apenas uma das caixas tiver massa nula ($m_k = 0$), o fio ficará frouxo ($T=0$) e todas as outras $N-1$ caixas cairão com aceleração $a_k = +g$. A aceleração da única caixa de massa nula pode agora ser encontrada com base em eq1:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N = 0$$

$$(N-1) \cdot (+g) + 1 \cdot a = 0$$

$$a = -(N-1) \cdot g$$

c) Nesse caso, o fio ficará com tração literalmente nula $T \cong 0$, a única caixa de massa muito grande dominará o sistema (quase ignorando a existência das outras $N-1$ remanescentes) e cairá com aceleração $a = +g$. A aceleração das $N-1$ caixas remanescentes (de massa muito pequena) é novamente determinada com base em eq1:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N = 0$$

$$1 \cdot (+g) + (N-1) \cdot a_i = 0$$

$$a_i = -g / (N-1)$$

Questão 186 - Solução

Quando o bloco de cima sofre um deslocamento $x \downarrow$ para baixo, a primeira polia móvel sofre um deslocamento $x/2 \uparrow$ para cima, a segunda polia móvel sofre um deslocamento $x/2^2 \uparrow$ para cima, a terceira polia móvel sofre um deslocamento $x/2^3 \uparrow$ para cima, e assim por diante, até que a N -ésima polia móvel sofre um deslocamento $x/2^N \uparrow$ para cima, deslocamento esse que coincide com o deslocamento sofrido pelo bloco inferior. Assim, se o bloco de cima apresenta uma aceleração $a \downarrow$ para baixo, o bloco de baixo apresenta aceleração $a/2^N \uparrow$ para cima.

A segunda lei de Newton para o bloco de cima permite escrever:

$$m \cdot g - T = m \cdot a \quad (\text{eq1})$$

A segunda lei de Newton para o bloco de baixo permite escrever:

$$2^N \cdot T - m \cdot g = m \cdot a \cdot 2^{-N} \quad (\text{eq2})$$

Multiplicando eq1 por 2^N e somando com eq2, membro a membro, vem:

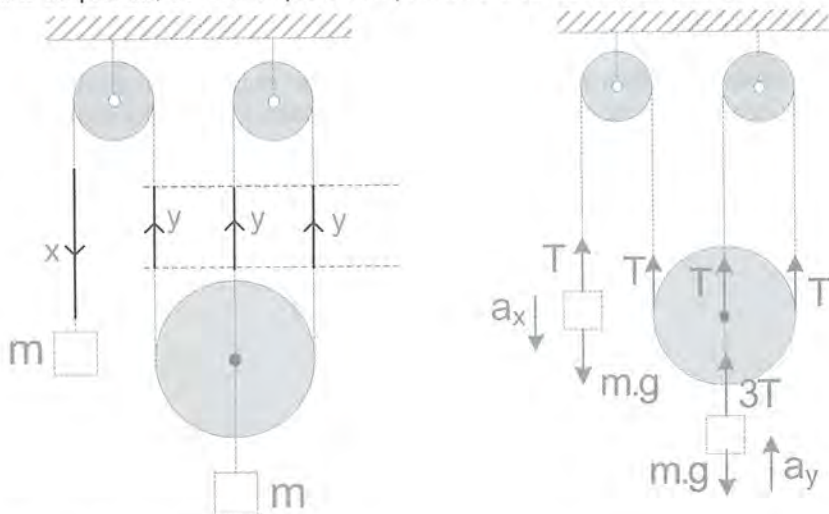
$$2^N m \cdot g - m \cdot g = m \cdot a \cdot (2^N + 2^{-N}) \quad \Rightarrow \quad a = g \left(\frac{2^N - 1}{2^N + 2^{-N}} \right) \quad (\text{eq3})$$

A expressão eq3 fornece a aceleração do bloco de cima. A aceleração do bloco inferior é dada por:

$$2^{-N}a = 2^{-N}g \left(\frac{2^N - 1}{2^N + 2^{-N}} \right) = g \left(\frac{1 - 2^{-N}}{2^N + 2^{-N}} \right) = g \left(\frac{2^N - 1}{2^{2N} + 1} \right)$$

Questão 187 - Solução

Para analisar o vínculo geométrico (leia o tópico especial 2 sobre vínculos geométricos, capítulo 7), admita que, um deslocamento \hat{y} do conjunto formado pela caixa e pela polia inferior seja compensado por um deslocamento $x \downarrow$ da caixa esquerda, de forma que o comprimento total do fio permaneça constante.



Assim, podemos escrever:

$$+x - 3y = 0 \Rightarrow a_x - 3a_y = 0 \Rightarrow a_x = 3a_y \quad (\text{eq1})$$

onde a_x e a_y são as acelerações verticais dos blocos indicadas na figura.

A segunda lei de Newton para cada bloco permite escrever:

$$m \cdot g - T = m \cdot a_x \Rightarrow 3m \cdot g - 3T = 3m \cdot a_x \quad (\text{eq2})$$

$$3T - m \cdot g = m \cdot a_y \quad (\text{eq3})$$

Somando eq2 e eq3, membro a membro, e considerando eq1, vem:

$$3m \cdot g - m \cdot g = m \cdot (3a_x + a_y) \Rightarrow 2m \cdot g = m \cdot (3 \cdot 3a_y + a_y)$$

$$2m \cdot g = 10 \cdot m \cdot a_y \Rightarrow a_y = g/5 \quad \text{e} \quad a_x = 3g/5$$

Questão 188 - Solução

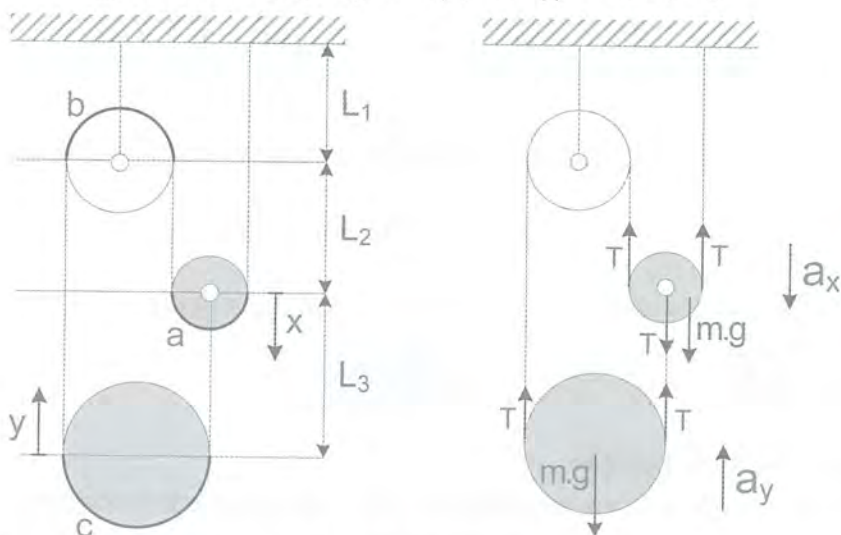
Essa corda tem um comprimento total L_{total} dado por:

$$L_{\text{total}} = L_1 + L_2 + a + L_2 + b + L_2 + L_3 + c + L_3 = L_1 + 3L_2 + 2L_3 + a + b + c$$

Para analisar o vínculo geométrico (leia o tópico especial 2 sobre vínculos geométricos, capítulo 7), admita que um deslocamento $x \downarrow$ da polia intermediária seja compensado por um deslocamento $y \uparrow$ da polia inferior, de forma que o comprimento total do fio permaneça constante.

Assim, o trecho de comprimento L_2 aumentou para $L_2 + x$ ao passo que o trecho de comprimento L_3 diminuiu para $L_3 - x - y$. Assim, o comprimento total da corda no final agora é dado por:

$$L_{\text{total}} = L_1 + 3(L_2 + x) + 2.(L_3 - x - y) + a + b + c$$



Entretanto, como o comprimento total do fio é constante, podemos escrever :

$$L_1 + 3(L_2 + x) + 2.(L_3 - x - y) + a + b + c = L_1 + 3L_2 + 2L_3 + a + b + c$$

$$3x - 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y \Rightarrow a_x = 2a_y \quad (\text{eq1})$$

Escrevendo a 2ª lei de Newton para a polia inferior e para a polia central, vem:

$$2T - m.g = m.a_y \quad (\text{eq2})$$

$$m.g + T - 2T = m.a_x \Rightarrow 2m.g - 2T = 2m.a_x \quad (\text{eq3})$$

Somando eq2 e eq3, membro a membro, e considerando eq1, vem:

$$2m.g - m.g = m.(a_y + 2a_x) \Rightarrow m.g = m.(a_y + 2 \cdot 2a_y)$$

$$a_y = g/5 \quad \text{e} \quad a_x = 2g/5$$

Questão 189 – Solução

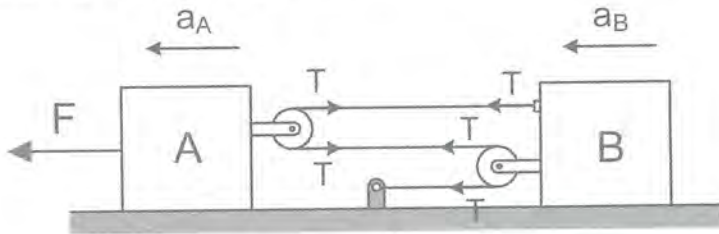
Escrevendo a segunda lei de Newton para cada caixa e levando em conta o vínculo geométrico (leia o tópico especial 2 sobre vínculos geométricos, capítulo 7, caso 4), temos:

Caixa A: $F_R = m_A \cdot a_A \Rightarrow F - 2T = m_A \cdot a_A$ (eq1)

Caixa B: $F_R = m_B \cdot a_B \Rightarrow 3.T = m_B \cdot a_B$ (eq2)

Vínculo geométrico (veja a relação eq38, página 253): $3 \cdot a_B = 2 \cdot a_A$ (eq3)

Substituindo eq3 e eq2 em eq1, vem:



$$F - 2T = m_A \cdot a_A \Rightarrow F - 2 \cdot \frac{m_B \cdot a_B}{3} = m_A \cdot \frac{3 \cdot a_B}{2}$$

$$6F - 4 \cdot m_B \cdot a_B = 9 \cdot m_A \cdot a_B \Rightarrow 6 \cdot (14) - 4 \cdot (6) \cdot a_B = 9 \cdot (2) \cdot a_B$$

$$a_B = 2 \text{ m/s}^2, \quad a_A = \frac{3 \cdot a_B}{2} \Rightarrow a_A = 3 \text{ m/s}^2$$

Questão 190 - Solução

Escrevendo a segunda lei de Newton para cada caixa e levando em conta o vínculo geométrico (leia o tópico especial 2 sobre vínculos geométricos – capítulo 7, caso 5), temos:

Corpo A: Translação vertical: $F_R = M_A \cdot a_A \Rightarrow P_A - N_Y = M_A \cdot a_a$

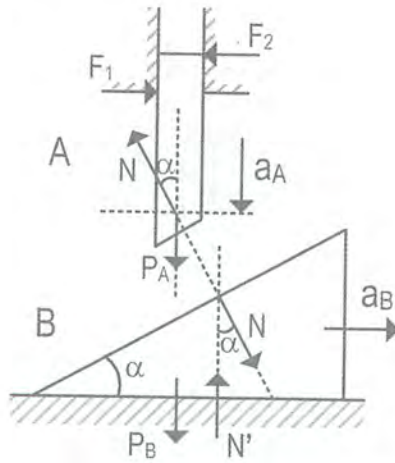
$$M_A \cdot g - N \cdot \cos \alpha = M_A \cdot a_a$$
 (eq1)

Corpo B: Translação horizontal: $F_R = M_B \cdot a_B \Rightarrow N_X = M_B \cdot a_B$

$$N \cdot \sin \alpha = M_B \cdot a_B, \text{ com } M_B = \eta \cdot M_A$$

$$N \cdot \sin \alpha = \eta \cdot M_A \cdot a_B$$
 (eq2)

Vínculo geométrico (caso 5, página 253): $a_A = a_B \cdot \text{tg} \alpha$ (eq3)



Multiplicando eq1 por $\text{sen}\alpha$, eq2 por $\text{cos}\alpha$ e somando-as, membro a membro, vem:

$$M_A \cdot g \cdot \text{sen}\alpha = M_A \cdot a_A \cdot \text{sen}\alpha + \eta \cdot M_A \cdot a_B \cdot \text{cos}\alpha,$$

usando eq3, vem:

$$g \cdot \text{sen}\alpha = a_B \cdot \text{tg}\alpha \cdot \text{sen}\alpha + \eta \cdot a_B \cdot \text{cos}\alpha$$

$$a_B = \frac{g}{\text{tg}\alpha + \eta \cdot \text{cotg}\alpha}$$

usando eq3, vem:

$$a_A = a_B \cdot \text{tg}\alpha = \frac{g}{\text{tg}\alpha + \eta \cdot \text{cotg}\alpha} \cdot \text{tg}\alpha$$

$$a_A = \frac{g}{1 + \eta \cdot \text{cotg}^2\alpha}$$

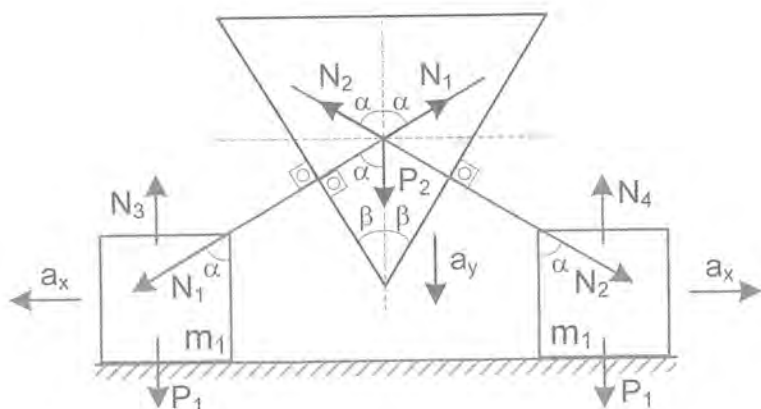
Questão 191 - Solução

A figura abaixo mostra o diagrama de forças de cada corpo. Observe os pares ação-reação formados pelas normais N_1 e N_1 , bem como as normais N_2 e N_2 .

Pela simetria do sistema, podemos afirmar que: $N_1 = N_2 = N$ (eq1)

Sendo o triângulo equilátero, temos: $\alpha = 60^\circ$ e $\beta = 30^\circ$ (eq2)

O vínculo geométrico desse sistema (leia o tópico especial 2 sobre vínculos geométricos – capítulo 7, caso 5) permite relacionar as acelerações $a_y \downarrow$ e $a_x \rightarrow$ dos blocos pela expressão: $a_x = a_y \cdot \text{tg}\beta$ (eq3)



Aplicando a segunda lei de Newton ao prisma, em seu movimento vertical, temos:

$$F_R = m_2 \cdot a_y$$

$$P_2 - N_1 \cdot \cos \alpha - N_2 \cdot \cos \alpha = m_2 \cdot a_y$$

$$m_2 \cdot g - 2 \cdot N \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot a_y \Rightarrow 20 - N = 2 \cdot a_y \quad (\text{eq4})$$

Analisando o movimento horizontal dos cubos, vemos que eles adquirem aceleração a_x às custas da componente horizontal da normal N_2 que recebem, isto é, às custas da componente N_{2x} que faz o papel de força resultante em cada cubo. Aplicando a segunda lei de Newton a um dos cubos, temos:

$$F_R = m_1 \cdot a_x \Rightarrow N_{2x} = m_1 \cdot a_x$$

$$N_2 \cdot \sin \alpha = m_1 \cdot a_x \Rightarrow N \cdot \sin 60^\circ = 3 \cdot a_y \cdot \text{tg} 30^\circ$$

$$N \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \cdot a_y \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow N = 2 \cdot a_y \quad (\text{eq5})$$

Substituindo eq5 em eq4, vem: $20 - 2 \cdot a_y = 2 \cdot a_y \Rightarrow a_y = 5 \text{ m/s}^2$

Questão 192 – Resposta: a) $a_A = 3 \text{ m/s}^2$ e $a_B = 4 \text{ m/s}^2$, b) $T = 8 \text{ N}$

Dica: veja resolução da questão 189

Questão 193 – Resposta: a) 5 m/s^2 , b) $2,5 \text{ m/s}^2$

Dica: veja resolução da questão 190

Questão 194 – Resposta: 5 m/s^2

Dica: veja resolução da questão 191

Questão 195 - Solução

O vínculo geométrico associado ao fato de que o fio não estica permite concluir que:

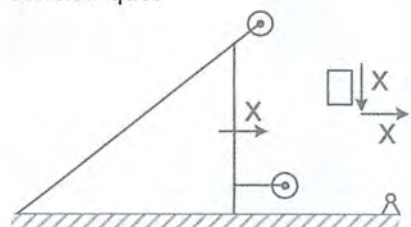


Figura 93- sempre que o bloco descer verticalmente uma distância $x \downarrow$, todo o conjunto (bloco+ polias + prisma) simultaneamente se moverá essa mesma distância $x \rightarrow$ para a direita.

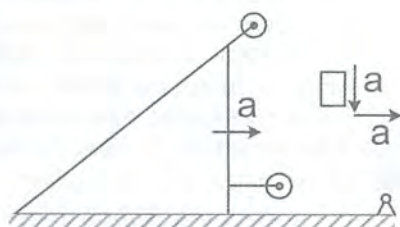
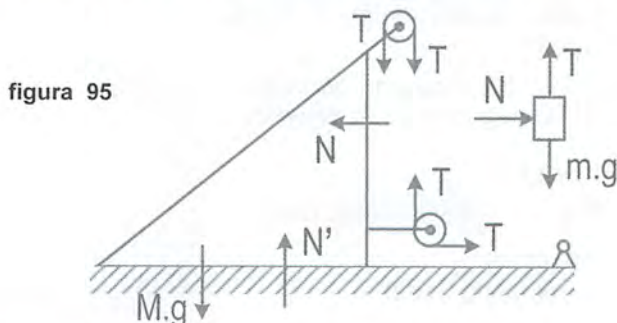


Figura 94- quando o bloco apresentar uma aceleração $a \downarrow$ para baixo, todo o conjunto compartilhará essa mesma aceleração (em módulo) $a \rightarrow$ para a direita.

A conclusão obtida na Figura 94 acima decorre da Regra Prática de Derivação. (leia o Tópico Especial 2, capítulo 7, sobre vínculos geométricos).



Assim, observando tanto as forças que agem no conjunto “prisma+polias” quanto as forças que agem no bloco (Figura 95), com base nas acelerações mostradas na Figura 94, podemos escrever:

Prisma na horizontal : $F_R = M.a \Rightarrow T - N = M.a$ (eq1)

Bloco na horizontal: $F_R = m.a \Rightarrow N = m.a$ (eq2)

Bloco na vertical : $F_R = m.a \Rightarrow m.g - T = m.a$ (eq3)

Somando as relações eq1, eq2 e eq3, membro a membro, vem:

$$m.g = M.a + 2m.a \Rightarrow a = \frac{m.g}{(M + 2m)}$$

Questão 196 – Resposta: $a = m.g / (M + 2m)$ **Dica:** veja resolução da questão 195

Questão 197 - Solução

As Figuras 96 e 97 relacionam os deslocamentos dos corpos A e B. Percebe-se que, quando o corpo A move-se $x \rightarrow$ para a direita, o cordão inextensível folga um comprimento x tanto no trecho horizontal inferior como no superior, de forma que a sua extremidade conectada à caixa B, inevitavelmente, se deslocará $2x \downarrow$ para baixo.

Em síntese, sempre que o corpo A se deslocar $x \rightarrow$ para a direita, o corpo B, além de transladar $x \rightarrow$ para a direita (acompanhando o corpo A), também se moverá $2x \downarrow$ para baixo.

Esse raciocínio, aliado à regra prática de derivação (leia o Tópico Especial 2 – Vínculos Geométricos na Mecânica – capítulo 7), nos permite relacionar as acelerações dos móveis entre si como mostra a Figura 98.

A Figura 99 mostra o diagrama de corpo livre de A e B. Da segunda lei de Newton, vem:

Corpo A: $F_R = M \cdot a$
 $T + T - N = M \cdot a \Rightarrow 2T - N = M \cdot a$ (eq1)

Corpo B - Horizontal:
 $F_R = m \cdot a \Rightarrow N = m \cdot a$ (eq2)

Corpo B - vertical:
 $F_R = m \cdot (2a) \Rightarrow P_B - T = m \cdot (2a)$ (eq3)

Multiplicando eq3 por 2 e somando, membro a membro, com eq1 e eq3, vem:

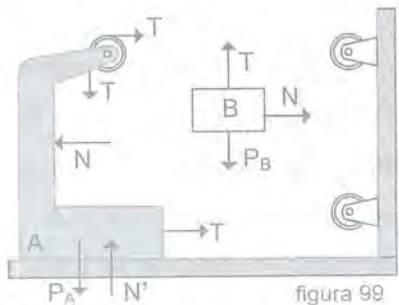
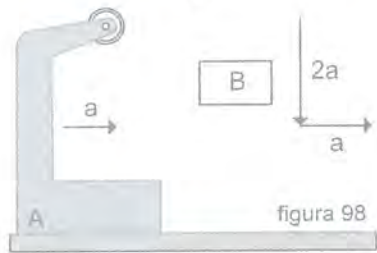
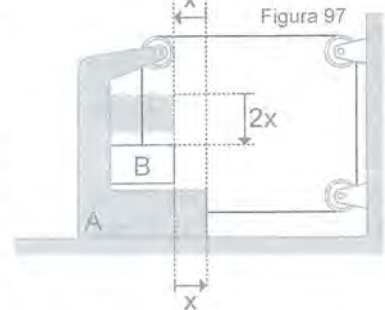
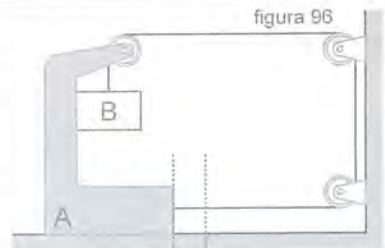
$$2 \cdot P_B = 5 \cdot m \cdot a + M \cdot a$$

$$2 \cdot m \cdot g = 5 \cdot m \cdot a + M \cdot a$$

$$a = \left(\frac{2m}{M+5m} \right) \cdot g$$

O corpo B, na vertical, percorrerá uma distância h em MUV partindo do repouso:

$$h = \frac{a_B \cdot t^2}{2} \Rightarrow h = \frac{(2a) \cdot t^2}{2} = \left(\frac{2m}{M+5m} \right) \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{h \cdot (M+5m)}{2 \cdot m \cdot g}}$$



Questão 198 - Solução

A Figura 100 mostra o diagrama de forças que agem no bloco (A) e no prisma (B). O vínculo geométrico desse sistema é o fato de que a trajetória descrita pelo bloco A, no referencial do prisma, coincide com a superfície inclinada do prisma, ou seja, é uma reta que forma um ângulo α com a horizontal.

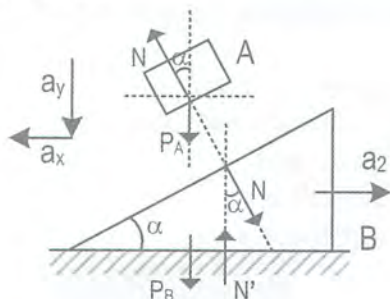


Figura 100

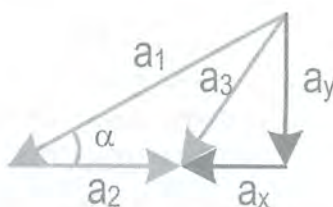


Figura 101

No diagrama vetorial da Figura 101, descrito pela legenda abaixo, tanto está implícito esse vínculo geométrico, quanto a relação vetorial entre as acelerações relativas:

a_1 = aceleração do bloco em relação ao prisma

a_2 = aceleração do prisma em relação à Terra

a_3 = aceleração do bloco em relação à Terra

a_x = componente horizontal de a_3

a_y = componente vertical de a_3

$$\vec{a}_{\text{bloco/prisma}} + \vec{a}_{\text{prisma/terra}} = \vec{a}_{\text{bloco/terra}}$$

ou

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}_3$$

Conforme nossa discussão sobre referenciais, sabemos que as forças que agem sobre o bloco A estão diretamente relacionadas à sua aceleração \vec{a}_3 em relação à Terra (referencial inercial) pela 2ª lei de Newton ($F_R = m \cdot a$), constituindo grave erro tentar relacionar tais forças à aceleração \vec{a}_1 do bloco em relação ao prisma, visto que este não é um referencial inercial por estar acelerado em relação à Terra.

Da Figura 101, podemos determinar as componentes de a_3 :

$$a_y = a_1 \cdot \text{sen}\alpha \quad (\text{eq1})$$

$$a_x = a_1 \cdot \text{cos}\alpha - a_2 \quad (\text{eq2})$$

Observando o diagrama de forças na Figura 100, podemos relacionar forças e acelerações no referencial inercial (Terra):

Bloco na vertical: $P_A - N_y = m \cdot a_y$, usando eq1, vem:

$$m \cdot g - N \cdot \text{cos}\alpha = m \cdot a_1 \cdot \text{sen}\alpha \quad (\text{eq3})$$

Bloco na horizontal: $N_x = m \cdot a_x \Rightarrow N \cdot \text{sen} \alpha = m \cdot (a_1 \cdot \text{cos} \alpha - a_2)$

$$N \cdot \text{sen} \alpha = m \cdot a_1 \cdot \text{cos} \alpha - m \cdot a_2 \quad (\text{eq4})$$

Prisma na horizontal: $N_x = M \cdot a_2 \Rightarrow N \cdot \text{sen} \alpha = M \cdot a_2 \quad (\text{eq5})$

Igualando eq4 e eq5, vem: $m \cdot a_1 \cdot \text{cos} \alpha - m \cdot a_2 = M \cdot a_2$

$$m \cdot a_1 = (M + m) \cdot a_2 / \text{cos} \alpha \quad (\text{eq6})$$

Multiplicando eq3 por $\text{sen} \alpha$, eq4 por $\text{cos} \alpha$ e somando, membro a membro, vem:

$$m \cdot g \cdot \text{sen} \alpha = m \cdot a_1 \cdot \text{sen}^2 \alpha + m \cdot a_1 \cdot \text{cos}^2 \alpha - m \cdot a_2 \cdot \text{cos} \alpha$$

$$m \cdot g \cdot \text{sen} \alpha = m \cdot a_1 - m \cdot a_2 \cdot \text{cos} \alpha, \quad \text{usando eq6, vem:}$$

$$m \cdot g \cdot \text{sen} \alpha = (M + m) \cdot a_2 / \text{cos} \alpha - m \cdot a_2 \cdot \text{cos} \alpha$$

$$m \cdot g \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{cos} \alpha = (M + m) \cdot a_2 - m \cdot a_2 \cdot \text{cos}^2 \alpha$$

$$m \cdot g \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{cos} \alpha = M \cdot a_2 + m \cdot a_2 - m \cdot a_2 \cdot \text{cos}^2 \alpha$$

$$m \cdot g \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{cos} \alpha = M \cdot a_2 + m \cdot a_2 \cdot \text{sen}^2 \alpha \Rightarrow a_2 = \frac{m \cdot g \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{cos} \alpha}{M + m \cdot \text{sen}^2 \alpha}$$

Usando eq6, é possível determinar a aceleração a_1 do bloco no referencial do prisma:

$$a_1 = \frac{(M + m)}{m \cdot \text{cos} \alpha} \cdot a_2 = \frac{(M + m)}{m \cdot \text{cos} \alpha} \cdot \left(\frac{m \cdot g \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{cos} \alpha}{M + m \cdot \text{sen}^2 \alpha} \right) \Rightarrow a_1 = \frac{(M + m) \cdot g \cdot \text{sen} \alpha}{(M + m \cdot \text{sen}^2 \alpha)}$$

Uma resolução mais simples e elegante dessa questão é dada no Exemplo Resolvido 7, página 155, quando usaremos o Referencial Não-inercial.

Questão 199 - Resposta: $a = g / 5$, veja a resolução da questão 198.

Questão 200 - Solução

A Figura 101 mostra o diagrama de forças que agem no bloco (A) e no prisma (B). O vínculo geométrico desse sistema é o fato de que a trajetória descrita pelo bloco A, no referencial do prisma, coincide com a superfície inclinada do prisma, ou seja, é uma reta que forma um ângulo α com a horizontal.

No diagrama vetorial da Figura 103, descrito pela legenda abaixo, está implícito tanto esse vínculo geométrico, quanto a relação vetorial entre as acelerações relativas:

a_1 = aceleração do bloco em relação ao prisma

a_2 = aceleração do prisma em relação à Terra

a_3 = aceleração do bloco em relação à Terra

a_x = componente horizontal de a_3

a_y = componente vertical de a_3

$$\vec{a}_{\text{bloco}/\text{prisma}} + \vec{a}_{\text{prisma}/\text{terra}} = \vec{a}_{\text{bloco}/\text{terra}}$$

ou

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}_3$$

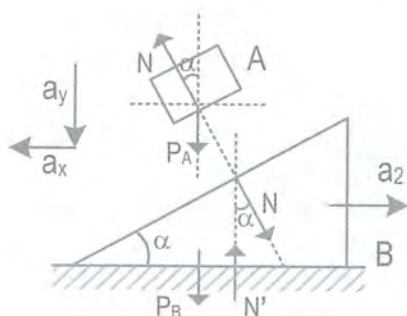


Figura 102

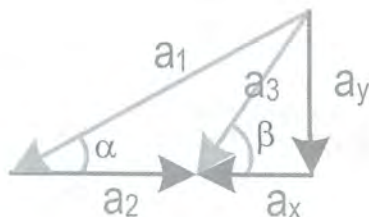


Figura 103

No bloco A, de massa m , a segunda lei de Newton (Figura 103) na direção horizontal permite escrever:

$$F_R = m \cdot a_x \Rightarrow N_x = N \cdot \text{sen} \alpha = m \cdot a_x \quad (\text{eq1})$$

No prisma B, de massa M , a segunda lei de Newton (Figura 102) na direção horizontal permite escrever:

$$F_R = M \cdot a_2 \Rightarrow N_x = N \cdot \text{sen} \alpha = M \cdot a_2 \quad (\text{eq2})$$

De eq1 e eq2, vem: $\frac{a_2}{a_x} = \frac{m}{M}$ (eq3)

Da Figura 103, vem: $\text{tg} \beta = \frac{a_y}{a_x}$, $\text{tg} \alpha = \frac{a_y}{a_2 + a_y}$, portanto:

$$a_x \cdot (\text{tg} \beta - \text{tg} \alpha) = \text{tg} \alpha \cdot a_2 \Rightarrow \frac{\text{tg} \beta - \text{tg} \alpha}{\text{tg} \alpha} = \frac{a_2}{a_x} \stackrel{\text{eq3}}{=} \frac{m}{M} \Rightarrow m = M \cdot \left(\frac{\text{tg} \beta - \text{tg} \alpha}{\text{tg} \alpha} \right)$$

Questão 201 - Solução

A Figura 104 mostra o diagrama das forças que agem em cada corpo do sistema. Basicamente, dois vínculos geométricos estão presentes: (1) a trajetória descrita pelo bloco A, no referencial do prisma, coincide com a superfície inclinada do prisma, ou seja, é uma reta que forma um ângulo α com a horizontal; (2) o fato de o fio que conecta os corpos B e C não esticar obriga que esses corpos se movam com acelerações iguais ($a_B = a_C = a_2$).

No diagrama vetorial da Figura 105, descrito pela legenda abaixo, está implícita a relação entre as acelerações relativas:

a_1 = aceleração do bloco A em relação ao prisma B;

a_2 = aceleração do prisma B em relação à Terra;

a_3 = aceleração do bloco A em relação à Terra;

a_x = componente horizontal de a_3 ;

a_y = componente vertical de a_3 .

$$\vec{a}_{\text{bloco/prisma}} + \vec{a}_{\text{prisma/terra}} = \vec{a}_{\text{bloco/terra}} \quad \text{ou}$$

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}_3$$

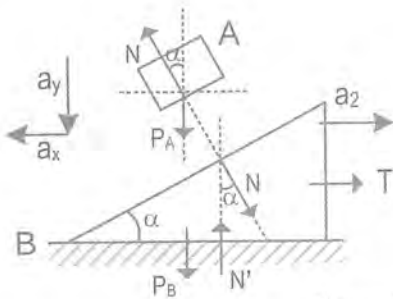


Figura 104

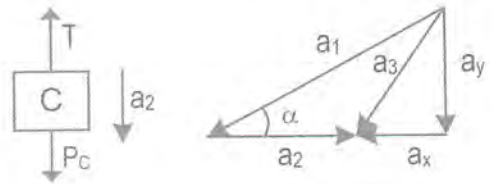
Diagrama de
acelerações

Figura 105

Conforme nossa discussão sobre referenciais, sabemos que as forças que agem sobre o bloco A estão diretamente relacionadas à sua aceleração \vec{a}_3 em relação à Terra (referencial inercial) através da 2ª lei de Newton ($F_R = m \cdot a$), constituindo grave erro tentar relacionar tais forças à aceleração \vec{a}_1 do bloco A em relação ao prisma B, visto que este não é um referencial inercial por estar acelerado em relação à Terra.

Da Figura 105, podemos determinar as componentes de a_3 :

$$a_y = a_1 \cdot \text{sen} \alpha \quad (\text{eq1})$$

$$a_x = a_1 \cdot \text{cos} \alpha - a_2 \quad (\text{eq2})$$

Observando o diagrama de forças na Figura 104, podemos relacionar forças e acelerações no referencial inercial (Terra) :

- Bloco A na vertical: $P_A - N_y = m_A \cdot a_y$, usando eq1, vem:

$$m_A \cdot g - N \cdot \text{cos} \alpha = m_A \cdot a_1 \cdot \text{sen} \alpha \Rightarrow 40 - N \cdot \text{cos} \alpha = 4 \cdot a_1 \cdot \text{sen} \alpha \quad (\text{eq3})$$

- Bloco A na horizontal: $N_x = m_A \cdot a_x \Rightarrow N \cdot \text{sen} \alpha = m_A \cdot (a_1 \cdot \text{cos} \alpha - a_2)$

$$N \cdot \text{sen} \alpha = m_A \cdot a_1 \cdot \text{cos} \alpha - m_A \cdot a_2 \Rightarrow N \cdot \text{sen} \alpha = 4 \cdot a_1 \cdot \text{cos} \alpha - 4 \cdot a_2 \quad (\text{eq4})$$

- Prisma B na horizontal: $N_x + T = m_B \cdot a_2 \Rightarrow N \cdot \text{sen} \alpha + T = m_B \cdot a_2 \quad (\text{eq5})$

- Bloco C na vertical: $P_C - T = m_C \cdot a_2 \quad (\text{eq6})$

Somando eq5 e eq6, membro a membro, vem: $N \cdot \text{sen} \alpha + 20 = 8 \cdot a_2 \quad (\text{eq7})$

Somando eq3 e eq4, membro a membro (com $\text{sen} \alpha = \text{cos} \alpha$), vem:

$$40 = 8 \cdot a_1 \cdot \text{sen} \alpha - 4 \cdot a_2 \quad (\text{eq8})$$

Eliminando $N \cdot \text{sen} \alpha$ nas relações eq4 e eq7, vem:

$$4 \cdot a_1 \cdot \text{cos} \alpha = 12 \cdot a_2 - 20 \quad (\text{eq9})$$

De eq8 e eq9, (com $\text{sen} \alpha = \text{cos} \alpha$) vem: $a_2 = 4 \text{ m/s}^2$

Substituindo o valor de a_2 em eq9, encontramos: $a_1 = 7\sqrt{2} \text{ m/s}^2$

Da lei dos cossenos (Figura 105), vem: $(a_3)^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 - 2.a_1.a_2.\cos\alpha$

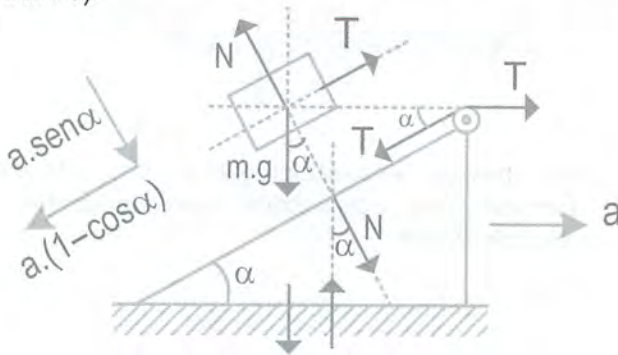
$$(a_3)^2 = (7\sqrt{2})^2 + (4)^2 - 2.(7\sqrt{2}).(4).\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_3 = \sqrt{58} \text{ m/s}^2$$

Questão 202 - Resposta

$$\frac{(m_1 + m_2 + m_3)}{m_2} = \sqrt{3}, \quad \text{Dica: Veja o Exemplo Resolvido 1, página 56.}$$

Questão 203 - Solução

A figura mostra o diagrama de forças que agem no bloco e no prisma. O Vínculo Geométrico desse sistema, que permite determinar a relação entre as acelerações do prisma e do bloco no referencial inercial (Terra), foi amplamente discutido no apêndice (Tópico Especial 2 – Vínculos Geométricos – capítulo 7, caso 6).



Observando o diagrama de forças na figura, podemos relacionar forças e acelerações no referencial inercial (Terra):

Bloco na direção da normal : $m.g.\cos\alpha - N = m.a.\text{sen}\alpha$ (eq1)

Bloco na direção da tração : $m.g.\text{sen}\alpha - T = m.a.(1 - \cos\alpha)$ (eq2)

Cunha na direção horizontal : $T - T.\cos\alpha + N.\text{sen}\alpha = M.a$

$$T.(1 - \cos\alpha) + N.\text{sen}\alpha = M.a \quad \text{(eq3)}$$

Multiplicando eq1 por $\text{sen}\alpha$, eq2 por $(1 - \cos\alpha)$ e somando, membro a membro com a relação eq3, vem :

$$m.g.\text{sen}\alpha = m.a.\text{sen}^2\alpha + m.a.(1 - \cos\alpha)^2 + M.a$$

$$m.g.\text{sen}\alpha = 2m.a.(1 - \cos\alpha) + M.a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{m.g.\text{sen}\alpha}{M + 2m.(1 - \cos\alpha)}$$

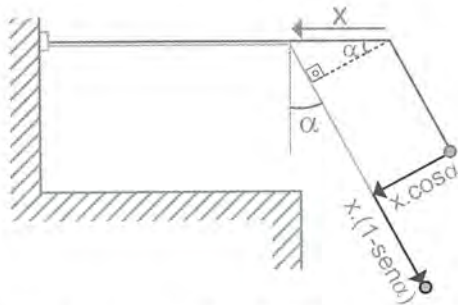
Uma resolução mais simples e elegante dessa questão é dada no exemplo resolvido 8, página 157, quando usaremos o referencial não-inercial.

Questão 204 - Resposta: $a = g / 4$ Dica: veja resolução da questão 203

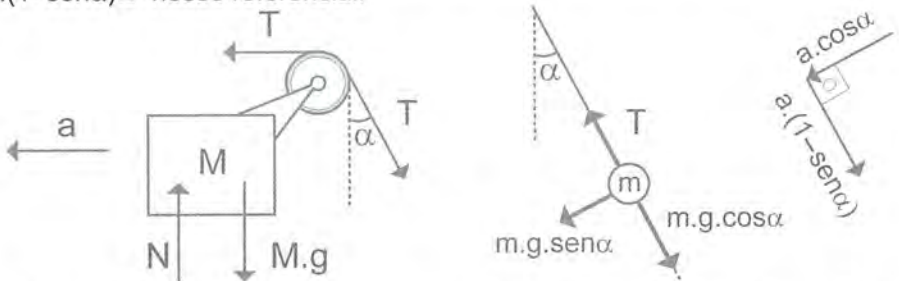
Questão 205 - Solução

O prof. Renato Brito solucionará o problema no referencial inercial (Terra). Para entender melhor essa resolução, é necessário ler previamente o Tópico Especial 2 sobre vínculos geométricos – capítulo 7, caso 6.

A figura a seguir mostra que, quando o conjunto caixa+polia move-se uma distância $x \leftarrow$ no referencial da Terra, a esfera do pêndulo sofre deslocamentos correspondentes $x \cdot \cos\alpha \leftarrow$ e $x \cdot (1 - \sin\alpha) \downarrow$ nesse mesmo referencial.



Assim, se a caixa possuir uma aceleração $a \leftarrow$ no referencial inercial, a esfera do pêndulo terá acelerações correspondentes $a \cdot \cos\alpha \leftarrow$ e $a \cdot (1 - \sin\alpha) \downarrow$ nesse referencial.



A figura acima mostra o diagrama das forças que agem em cada corpo. Aplicando a segunda lei de Newton a cada um deles, vem:

Para a bloco, na horizontal: $F_R = M \cdot a \Rightarrow T - T \cdot \sin\alpha = M \cdot a$

$$T \cdot (1 - \sin\alpha) = M \cdot a \quad (\text{eq1})$$

Para a esfera, na direção da tração: $F_R = m \cdot a \cdot (1 - \sin\alpha)$

$$m \cdot g \cdot \cos\alpha - T = m \cdot a \cdot (1 - \sin\alpha) \quad (\text{eq2})$$

Para a esfera, na direção da componente $m \cdot g \cdot \sin\alpha$: $F_R = m \cdot a \cdot \cos\alpha$

$$m \cdot g \cdot \sin\alpha = m \cdot a \cdot \cos\alpha \Rightarrow a = g \cdot \tan\alpha \quad (\text{eq3})$$

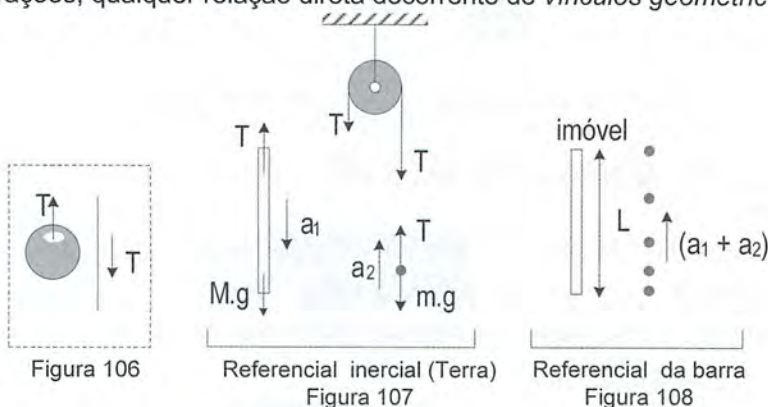
Multiplicando a relação eq2 por $(1 - \text{sen}\alpha)$, somando membro a membro com a relação eq1 e levando em conta a relação eq3, após redução dos termos semelhantes, obtém-se:

$$M = \frac{m \cdot (1 - \text{sen}\alpha)^2}{\text{sen}\alpha}$$

Uma resolução mais simples e elegante dessa questão é dada no exemplo resolvido 9, página 160, quando usaremos o referencial não-inercial.

Questão 206 - Solução:

Na Figura 106, vemos o fio passando através de um furo existente na bolinha, trocando com a mesma um par de atritos internos de escorregamento, que tracionarão o fio e a bolinha. Essa interação foi representada na Figura 106 por um par de forças tração T . Devido ao escorregamento relativo entre a bolinha e o fio, eles terão acelerações distintas ($a_1 \neq a_2$) no referencial da Terra, não havendo, entre tais acelerações, qualquer relação direta decorrente de *vínculos geométricos*.



Arbitrando uma aceleração $\downarrow a_1$ para a barra e $a_2 \uparrow$ para a bolinha (Figura 107), a segunda lei de Newton permite escrever:

Para a barra: $F_R = M \cdot a_1 \Rightarrow M \cdot g - T = M \cdot a_1$ (eq1)

Para a bolinha: $F_R = m \cdot a_2 \Rightarrow T - m \cdot g = m \cdot a_2$ (eq2)

A cinemática do problema será equacionada no referencial da barra (Figura 108), no qual esta se encontra imóvel, assistindo ao movimento da bolinha. Nesse referencial, a bolinha parte do repouso e move-se com aceleração $a_{\text{rel}} = a_1 + a_2$ constante, percorrendo uma distância L até atingir a extremidade oposta da barra imóvel. Assim, a cinemática do MUV permite escrever:

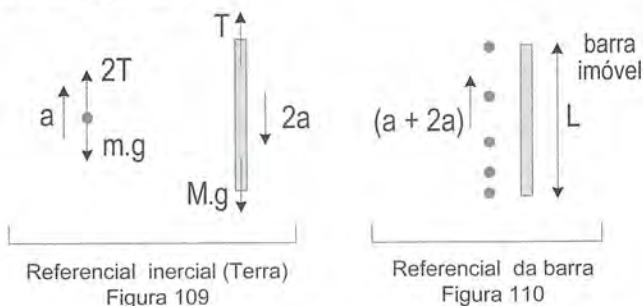
$$L = \frac{(a_1 + a_2) \cdot t^2}{2} \Rightarrow a_1 + a_2 = \frac{2 \cdot L}{t^2} \text{ (eq3)}$$

Isolando a_1 e a_2 em eq1 e eq2 e substituindo em eq3, vem:

$$\left(g - \frac{T}{M}\right) + \left(\frac{T}{m} - g\right) = \frac{2L}{t^2} \Rightarrow T = \frac{2.L.M.m}{(M-m).t^2}$$

Questão 207 - Solução

A bolinha está fixa à extremidade do fio. O vínculo geométrico desse problema está associado ao fato de que, sempre que a bolinha sobe uma distância $x \uparrow$, a barra desce uma distância correspondente $2x \downarrow$, por causa da polia móvel. Assim, se a bolinha possui uma aceleração $\uparrow a$, a barra tem uma aceleração correspondente $\downarrow 2a$ (leia o Tópico Especial 2 – Vínculos Geométricos – no capítulo 7).



A segunda lei de Newton, aplicada a cada corpo, na Figura 109, permite escrever:

Para a barra: $F_R = M.(2a) \Rightarrow M.g - T = M.(2a)$ (eq1)

Para a bolinha: $F_R = m.a \Rightarrow 2T - m.g = m.a$ (eq2)

Somando eq1 e eq2, membro a membro, considerando que $m = \eta.M$, vem:

$$2M.g - m.g = 4.M.a + m.a$$

$$2M.g - \eta.M.g = 4.M.a + \eta.M.a \Rightarrow a = \frac{g.(2 - \eta)}{(4 + \eta)} \text{ (eq3)}$$

A cinemática do problema será equacionada no referencial da barra (Figura 110), no qual esta se encontra imóvel, assistindo ao movimento da bolinha.

Nesse referencial, a bolinha parte do repouso (Figura 110) e move-se com aceleração " $a_{rel} = a + 2a$ " constante, percorrendo uma distância L até atingir a extremidade oposta da barra imóvel. Assim, a cinemática do MUV permite escrever:

$$L = \frac{(a + 2a).t^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2.L}{3.a}} \stackrel{\text{eq3}}{=} \sqrt{\frac{2.L.(4 + \eta)}{3.g.(2 - \eta)}}$$

Questão 209 - Solução

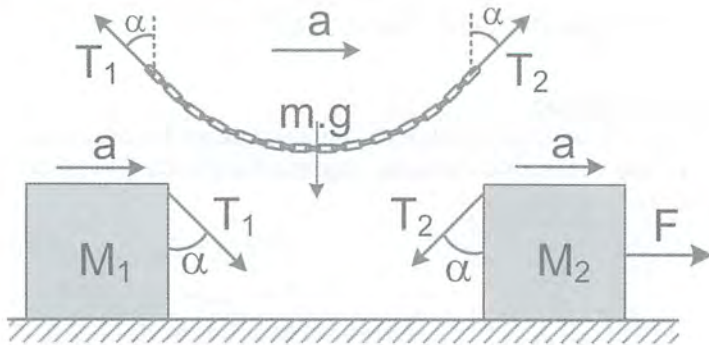
As trações em cada extremidade da corrente terão intensidades diferentes ($T_1 \neq T_2$), visto que a corrente não tem massa nula. Observando o diagrama das forças que agem em cada corpo, podemos escrever:

Para a corrente na vertical: $T_1 \cdot \cos \alpha + T_2 \cdot \cos \alpha = m \cdot g$ (eq1)

Para a corrente na horizontal: $T_2 \cdot \sin \alpha - T_1 \cdot \sin \alpha = m \cdot a$ (eq2)

Caixa 1: $T_1 \cdot \sin \alpha = M_1 \cdot a$ (eq3)

Caixa 2: $F - T_2 \cdot \sin \alpha = M_2 \cdot a$ (eq4)



Equação global para sistema: $F = (M_1 + M_2 + m) \cdot a$ (eq5)

Da relação eq5, vem: $30 = (8 + 8 + 4) \cdot a \Rightarrow a = 1,5 \text{ m/s}^2$

Dividindo eq2 por eq3, membro a membro, vem:

$$\frac{T_2 - T_1}{T_1} = \frac{m}{M_1} = \frac{4}{8} \Rightarrow 3 \cdot T_1 = 2 \cdot T_2 \text{ (eq6)}$$

Dividindo eq2 por eq1, membro a membro, considerando eq6, vem:

$$\frac{\left(T_2 - \frac{2 \cdot T_2}{3}\right) \cdot \sin \alpha}{\left(\frac{2 \cdot T_2}{3} + T_2\right) \cdot \cos \alpha} = \frac{m \cdot a}{m \cdot g} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

Da relação eq3, vem: $T_1 \cdot \frac{3}{5} = 8 \cdot (1,5) \Rightarrow T_1 = 20 \text{ N}$

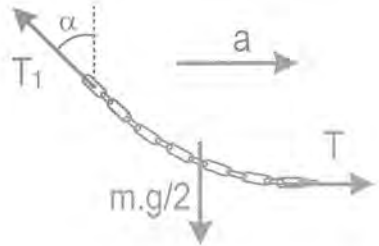
Substituindo em eq4, vem: $T_2 = 30 \text{ N}$

Partindo a corda em seu ponto mais baixo, onde a tração vale $T \rightarrow$, temos, a 2ª lei de Newton na horizontal permite escrever:

$$F_R = (m/2).a$$

$$T - T_1 \cdot \text{sen} \alpha = (m/2).a$$

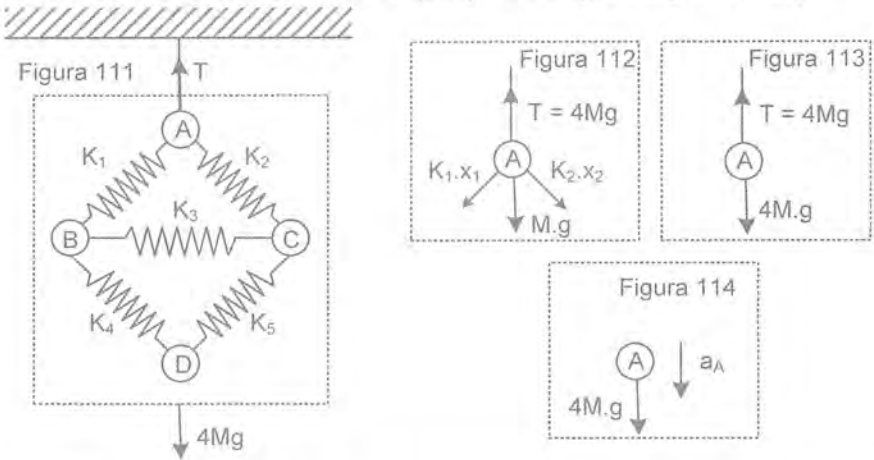
$$T - 20.(0,6) = 2.(1,5) \Rightarrow T = 15\text{N}$$



Questão 210 - Resposta: a) $2.T.\text{sen} \alpha$, b) $T.\text{cos} \alpha$

Questão 211 - Solução

Sejam A, B, C e D as quatro bolas de mesma massa M, conectadas entre si através de molas ideais (massa nula), sujeitas à ação da gravidade g.



A tração no fio superior pode ser determinada tomando o sistema como sendo uma caixa-preta de massa total $4M$ (Figura 111), em equilíbrio estático sob ação exclusiva as forças externas tração T e peso $4M.g$. Da condição de equilíbrio na Figura 111, vem:

$$T = 4.M.g \quad (\text{eq1})$$

Cada uma das bolas da Figura 111 está em equilíbrio estático individualmente. Assim, analisando, isoladamente, a bola superior A (Figura 112), vemos que sobre ela agem 4 forças T , $k_1.x_1$, $k_2.x_2$ e $M.g$. Como T vale $4M.g$ (eq1), a resultante das outras forças $k_1.x_1$, $k_2.x_2$ e $M.g$ também deve valer $4.Mg$ (Figura 113), para garantir equilíbrio de forças.

Admita agora que, repentinamente, o fio superior se rompeu (Figura 114), anulando a tração ($T = 0$). Se observarmos o sistema “logo antes” e “logo depois” do rompimento do fio, nesse lapso, as deformações x_1 e x_2 das molas ainda não sofreram alteração alguma (porque não deu tempo), de forma que as forças $k_1 \cdot x_1$, $k_2 \cdot x_2$ ainda permanecem momentaneamente inalteradas.

Assim, logo após o corte do fio, as forças remanescentes $k_1 \cdot x_1$, $k_2 \cdot x_2$ e $M \cdot g$ agindo na bola A ainda têm resultante $4M \cdot g \downarrow$. Assim, a segunda lei de Newton permite determinar a aceleração da bola A (na Figura 114) logo após o corte do fio:

$$a_A = \frac{F_R}{M} = \frac{4M \cdot g}{M} = 4g$$

Desta forma, vemos que a “chave” é o leitor perceber que, “logo antes” e “logo após” o corte do fio, apenas a tração sofre alteração (T se anula), permanecendo todas as demais forças (pesos e forças elásticas) momentaneamente invariáveis, o que permite determinar a aceleração de cada bola no instante “logo após” o corte do fio, partindo da hipótese de que cada uma delas se encontrava em equilíbrio antes do corte.

Seguindo esse mesmo raciocínio, é fácil ver que as demais bolas terão aceleração nula no instante “logo após” o corte do fio. A bola B, por exemplo, estava inicialmente em equilíbrio sob ação de 4 forças $k_1 \cdot x_1$, $k_3 \cdot x_3$, $k_4 \cdot x_4$ e $M \cdot g$, cuja resultante vetorial era nula antes do corte do fio. Entretanto, logo após o corte, nenhuma dessas forças em nada se altera, de forma que ainda apresentam resultante vetorial nula ($F_R = 0$), o que garante que a aceleração da bola ainda é momentaneamente nula, logo após o corte do referido fio. O mesmo ocorrerá a cada uma das bolas B, C e D:

$$a_B = a_C = a_D = 0 \quad (\text{no instante “logo após” o corte do fio})$$

Questão 212 - Resposta:

$$a_1 = (m_1 + m_2) \cdot g / m_1, \quad a_2 = 0$$

Questão 213 - Solução

a) Para garantir o equilíbrio vertical temos:

$$\begin{aligned} F_{1\rightarrow} &= F_{2\leftarrow} + Fat_{\leftarrow} \\ 50 &= 20 + Fat \\ Fat &= 30_{\leftarrow} \end{aligned}$$

Assim, vemos que a força de atrito estática agindo na caixa vale $Fat = 30 \text{ N } \leftarrow$. Sabemos que a força de atrito estática é variável (em direção, sentido e valor) e seu módulo pode assumir qualquer valor no intervalo $0 \leq Fat \leq \mu_E \cdot N$. Em linhas gerais, não existe uma fórmula pronta para se calcular o valor da força de atrito estática agindo num corpo (assim como não existe uma fórmula pronta para se calcular a normal N , a tração T num fio etc.). A

intensidade do F_{at} estático agindo num corpo é usualmente determinada indiretamente pela aplicação da segunda lei de Newton ($F_R = m \cdot a$).

O máximo valor que a força de atrito na fronteira de contato entre dois corpos pode assumir vale $F_{at,max} = \mu_E \cdot N$, valor esse que só é atingido quando o escorregamento relativo entre as superfícies é iminente. Por esse motivo, a relação $F_{at} = \mu_E \cdot N$ é conhecida como a **condição para iminência de escorregamento**, sendo válida apenas nessa situação. Em qualquer outra situação, teremos sempre $F_{at} < \mu_E \cdot N$.

b) Apesar da tentação de escrever $F_{at} = \mu_E \cdot N$, com $F_{at} = 30$ e $N = 20$, note que essa relação $F_{at} = \mu_E \cdot N$ só é válida na situação de iminência de escorregamento. O enunciado disse apenas que o corpo encontra-se em equilíbrio estático, não mencionando nada sobre iminência de escorregar. Assim, nessa questão, temos duas possibilidades:

- 1) A caixa da questão ainda não atingiu a situação de iminência de escorregar e, portanto, temos $F_{at} < \mu_E \cdot N$;
- 2) A caixa da questão já se encontra na situação de iminência, situação em que $F_{at} = \mu_E \cdot N$.

Como estamos em dúvida, o máximo que podemos garantir a cerca do valor do F_{at} agindo na caixa é a união dessas duas possibilidades, isto é, $F_{at} \leq \mu_E \cdot N$. Assim, vem:

$$F_{at} \leq \mu_E \cdot N \Rightarrow 30 \leq \mu_E \cdot 20 \Rightarrow \mu_E \geq 1,5$$

Alguns estudantes ficam desapontados com a impossibilidade de se determinar o valor do coeficiente de atrito estático entre a caixa e o solo.

c) Para que a caixa permanecesse em equilíbrio estático, deveríamos ter:

$$\begin{aligned} F_{1 \rightarrow} &= F_{2 \leftarrow} + F_{3 \leftarrow} + F_{at \leftarrow} \\ 50 \rightarrow &= 20 \leftarrow + 15 \leftarrow + F_{at \leftarrow} \\ &F_{at} = 15 \text{ N.} \end{aligned}$$

Será que a força de atrito estático entre a caixa e o solo é capaz de atingir esse valor $F_{at} = 15 \text{ N}$? Ora, como a força de atrito atingiu o valor $F_{at} = 30 \text{ N}$ no item a, ela certamente é capaz de assumir qualquer valor na união desses intervalos abaixo intervalo:

$$0 \leq F_{at} \leq 30 \quad \text{ou} \quad 0 \leq F_{at} \leq \mu_E \cdot N$$

Sendo $15 < 30$, a força de atrito consegue atingir 15 N e, portanto, valerá 15 N nessa situação, bancando o equilíbrio estático da caixa.

d) Para que a caixa permanecesse em equilíbrio estático, deveríamos ter:

$$\begin{aligned} F_{1 \rightarrow} + F_{at \rightarrow} &= F_{2 \leftarrow} + F_{3 \leftarrow} \\ 50 \rightarrow + F_{at \rightarrow} &= 20 \leftarrow + 80 \leftarrow \\ &F_{at} = 50 \text{ N.} \end{aligned}$$

Será que a força de atrito estático entre a caixa e o solo é capaz de atingir esse valor $F_{at} = 50 \text{ N}$? Ora, como vimos no item c, a força de atrito é capaz de assumir qualquer valor na união desses intervalos abaixo intervalo:

$$0 \leq \text{Fat} \leq 30 \quad \text{ou} \quad 0 \leq \text{Fat} \leq \mu_E \cdot N$$

O valor $\text{Fat} = 50$ não pertence ao intervalo $0 \leq \text{Fat} \leq 30$ e não podemos garantir que ele pertença ao intervalo $0 \leq \text{Fat} \leq \mu_E \cdot N$ visto que o valor do μ_E não é conhecido. Assim, não temos dados suficiente para deduzir o que ocorrerá nessa situação. Não temos como afirmar se a caixa escorregará ou se permanecerá em equilíbrio estático nessa situação por desconhecermos o coeficiente de atrito estático μ_E . Isso pode ser frustrante para o leitor, mas é o conceitualmente correto.

e) Para que a caixa permaneça em equilíbrio estático, deveríamos ter:

$$F_{1 \rightarrow} + \text{Fat}_{\rightarrow} = F_{2 \leftarrow} + F_{3 \leftarrow}$$

O maior valor de F_3 para o qual podemos garantir que a caixa não escorrega tem a ver com o maior valor que podemos garantir para a força de atrito. Ora, como a força de atrito é capaz de assumir qualquer valor na união desses intervalos abaixo intervalo:

$$0 \leq \text{Fat} \leq 30 \quad \text{ou} \quad 0 \leq \text{Fat} \leq \mu_E \cdot N$$

o maior valor que podemos garantir para ela será $\text{Fat} = 30$ N. Será que ela é capaz de atingir valores maiores do que 30 N ? Ora, pode ser que sim, pode ser que não, mas nada podemos afirmar por desconhecermos o valor do μ_E . O maior valor que podemos garantir para o Fat nesse problema, de fato, é $\text{Fat} = 30$ N. Assim, vem:

$$\begin{aligned} F_{1 \rightarrow} + \text{Fat}_{\rightarrow} &= F_{2 \leftarrow} + F_{3 \leftarrow} \\ 50_{\rightarrow} + 30_{\rightarrow} &= 20_{\leftarrow} + F_{3 \leftarrow} \\ F_3 &= 60 \text{ N} \end{aligned}$$

Portanto, se a força F_3 atingir o valor 60 N, podemos garantir que a caixa ainda permanecerá em equilíbrio estático. Se F_3 superar 60 N, mais uma vez, nada poderemos afirmar.

Questão 214 - Resposta (Dica: veja resolução da questão 213)

- a) Não é possível determinar o coeficiente de atrito estático. A expressão $\text{Fat} = \mu_E \cdot N$ só é válida na situação de iminência de escorregamento.
b) 4m

Questão 215 - Solução

A força de atrito só age na fronteira entre duas superfícies se houver, no mínimo, **tendência** de escorregamento relativo. Se já tiver escorregando, a força de atrito agirá certamente. Entretanto, nesse problema, como $P_A = P_B \cdot \sin 30^\circ$, o sistema não tem nem sequer tendência de escorregamento. Assim, a força de atrito não atuará, portanto, teremos $\text{Fat} = 0$.

Resposta correta: Letra E

Questão 216 - Solução

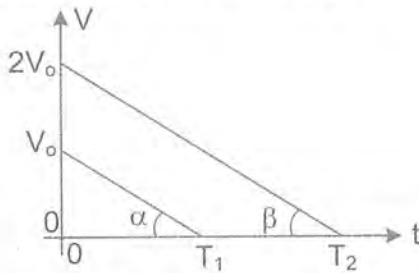
Durante o escorregamento da caixa, sua aceleração $\leftarrow a$ é produzida pela força de atrito cinético $\text{Fat} \leftarrow$ agindo sobre o bloco. Pela segunda lei de Newton, podemos escrever:

$$F_R = m \cdot a \Rightarrow \text{Fat} = m \cdot a \Rightarrow \mu_C \cdot N = m \cdot a \Rightarrow \mu_C \cdot m \cdot g = m \cdot a \Rightarrow \mathbf{a = \mu_C \cdot g}$$

Vemos, portanto, que a aceleração retardatória da caixa só depende do coeficiente de atrito cinético entre a caixa e o solo μ_c e da gravidade g do planeta.

O coeficiente de atrito cinético entre a caixa e o solo μ_c , por sua vez, só depende dos materiais de que são feitos a caixa e o solo, bem como do grau de polimento das superfícies.

Vemos, portanto, que a aceleração com que a caixa será freada não depende da sua massa nem da velocidade inicial com que ela foi lançada no solo. Independente de ela ter sido lançada no solo com velocidade inicial V_0 ou $2V_0$, a aceleração retardatória dela será sempre a mesma: $a = \mu_c \cdot g$



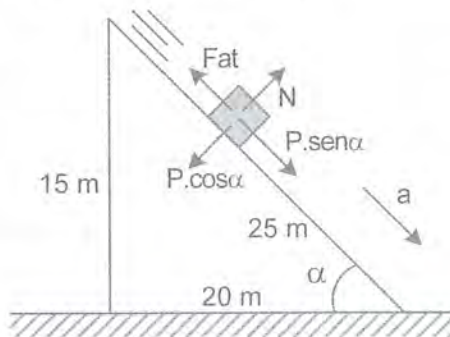
Por esse motivo, as inclinações das duas retas no gráfico $V \times t$ acima são iguais ($\alpha = \beta$). A semelhança entre os dois triângulos retângulos nos permite concluir que $T_2 = 2.T_1$. A distância percorrida pela caixa até parar, em cada caso, é dada pela área sob o gráfico. É fácil ver que a área do triângulo maior é quatro vezes maior que a área do triângulo menor.

Resposta: Alternativa d

Questão 217 - Solução

A caixa desce a rampa com aceleração constante a em MRUV a partir do repouso $v_0 = 0$ e percorre uma distância $\Delta s = 25$ m em 5 segundos. Assim, da cinemática, vem:

$$\Delta s = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} \Rightarrow 25 = 0 + \frac{a \cdot (5)^2}{2} \Rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2$$



Analisando a Dinâmica do movimento, a segunda lei de Newton permite escrever:

$$F_R = m.a \Rightarrow m.g.\text{sen}\alpha - \text{Fat} = m.a, \quad \text{com } \text{Fat} = \mu.N = \mu.m.g.\text{cos}\alpha$$

$$m.g.\text{sen}\alpha - \mu.m.g.\text{cos}\alpha = m.a \Rightarrow a = g.(\text{sen}\alpha - \mu.\text{cos}\alpha)$$

$$2 = 10.(0,6 - \mu.0,8) \Rightarrow \mu = 0,5$$

Questão 218 - Solução

Inicialmente, trataremos da descida sem atrito. Aplicando a 2ª lei de Newton na direção da rampa, vem:

$$F_R = m.a \Rightarrow m.g.\text{sen}\alpha = m.a \Rightarrow a = g.\text{sen}\alpha$$

Agora com atrito, aplicando a 2ª lei de Newton na direção da rampa, vem:

$$F_R = m.a' \Rightarrow m.g.\text{sen}\alpha - \text{Fat} = m.a'$$

$$m.g.\text{sen}\alpha - \mu.m.g.\text{cos}\alpha = m.a'$$

$$g.\text{sen}\alpha - \mu.g.\text{cos}\alpha = a'$$

Conforme solicitado no enunciado, temos:

$$a' = a/2 \Rightarrow a = 2.a' \Rightarrow g.\text{sen}\alpha = 2.(g.\text{sen}\alpha - \mu.g.\text{cos}\alpha)$$

$$\text{sen}\alpha = 2.\text{sen}\alpha - 2\mu.\text{cos}\alpha$$

$$\text{sen}\alpha = 2.\mu.\text{cos}\alpha, \quad \text{para } \alpha = 45^\circ, \text{ vem:}$$

$$\mu = 0,5$$

Questão 219 - Solução

a) Da 2ª lei de Newton, na subida, vem:

$$F_R = m.a_s \Rightarrow m.g.\text{sen}\alpha + \text{Fat} = m.a_s$$

$$m.g.\text{sen}\alpha + \mu.m.g.\text{cos}\alpha = m.a_s$$

$$a_s = g.(\text{sen}\alpha + \mu.\text{cos}\alpha) \quad (\text{eq1})$$

Da 2ª lei de Newton, na descida, vem:

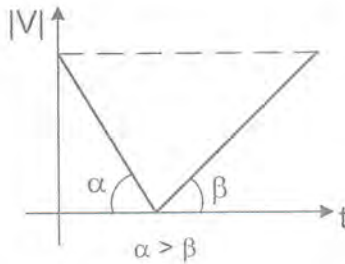
$$F_R = m.a_d \Rightarrow m.g.\text{sen}\alpha - \text{Fat} = m.a_d$$

$$m.g.\text{sen}\alpha - \mu.m.g.\text{cos}\alpha = m.a_d$$

$$a_d = g.(\text{sen}\alpha - \mu.\text{cos}\alpha) \quad (\text{eq2})$$

De eq1 e eq2, vemos que a aceleração do bloco assume valores constantes a_s e a_d durante a subida e durante a descida (visto que μ , α e g são constantes), com $a_s > a_d$. O gráfico que melhor descreve esse comportamento do módulo da aceleração é mostrado na figura II.

b) Como temos $a_s > a_d$, a inclinação do gráfico $|V| \times t$ deve ser maior nos instantes iniciais (durante a subida), tendo uma inclinação menor durante a descida. Simbolicamente, temos: $a_s > a_d \Rightarrow \alpha > \beta$. O gráfico $|V| \times t$ correto é mostrado na figura IV.



Questão 220 - Solução

a) Considere os seguintes parâmetros:

D = distância que o corpo percorre ao longo da rampa até parar.

a_s = aceleração na subida

t_s = tempo de subida

a_d = aceleração na descida

t_d = tempo de descida

Das equações do MUV, vem: $D = \frac{a_s \cdot (t_s)^2}{2} = \frac{a_d \cdot (t_d)^2}{2}$ (eq1)

Profinho..... por que foi usada essa relação eq1 durante a subida, se a velocidade inicial na subida nem é zero? Num tá errado não?



Claudete, veja o apêndice sobre cinemática na página 492 onde expliquei exatamente essa sua dúvida.

Da 2ª lei de Newton, na subida, vem:

$$F_R = m \cdot a_s \Rightarrow m \cdot g \cdot \text{sen} \alpha + F_{at} = m \cdot a_s$$

$$m \cdot g \cdot \text{sen} \alpha + \mu \cdot m \cdot g \cdot \text{cos} \alpha = m \cdot a_s$$

$$a_s = g \cdot (\text{sen} \alpha + \mu \cdot \text{cos} \alpha) \quad (\text{eq2})$$

Da 2ª lei de Newton, na descida, vem:

$$F_R = m \cdot a_d \Rightarrow m \cdot g \cdot \text{sen} \alpha - F_{at} = m \cdot a_d$$

$$m \cdot g \cdot \text{sen} \alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \text{cos} \alpha = m \cdot a_d$$

$$a_d = g \cdot (\text{sen} \alpha - \mu \cdot \text{cos} \alpha) \quad (\text{eq3})$$

De eq1, eq2 e eq3, vem:

$$t_s = \sqrt{\frac{2D}{g(\text{sen}\alpha + \mu \cdot \text{cos}\alpha)}} \quad (\text{eq4})$$

e

$$t_d = \sqrt{\frac{2D}{g(\text{sen}\alpha - \mu \cdot \text{cos}\alpha)}} \quad (\text{eq5})$$

De eq5 e eq6, concluímos que temos $t_d > t_s$.

b) De eq4 e eq5, o quociente pedido vale: $\frac{t_d}{t_s} = \sqrt{\frac{\text{sen}\alpha + \mu \cdot \text{cos}\alpha}{\text{sen}\alpha - \mu \cdot \text{cos}\alpha}}$

Questão 221 - Solução

Considere os seguintes parâmetros:

D = comprimento da rampa

a_s = aceleração na subida

t_s = tempo de subida

a_d = aceleração na descida

t_d = tempo de descida

Das equações do MUV, vem: $D = \frac{a_s \cdot (t_s)^2}{2} = \frac{a_d \cdot (t_d)^2}{2}$ (eq1)

Profinho..... por que foi usada essa relação eq1 durante a subida, se a velocidade inicial na subida nem é zero ? Num tá errado não ?



Claudete, veja o apêndice sobre cinemática na página 492 onde expliquei exatamente essa sua dúvida.



Conforme solicitado no enunciado, temos:

$$t_s = t_d / n \Rightarrow t_d = n \cdot t_s \Rightarrow t_d^2 = n \cdot t_s^2 \quad (\text{eq2})$$

De eq1 e eq2, vem: $a_s = n^2 \cdot a_d$ (eq3)

Da 2ª lei de Newton, na subida, vem:

$$\begin{aligned} F_R = m \cdot a_s &\Rightarrow m \cdot g \cdot \text{sen}\alpha + \text{Fat} = m \cdot a_s \\ m \cdot g \cdot \text{sen}\alpha + \mu \cdot m \cdot g \cdot \text{cos}\alpha &= m \cdot a_s \\ g \cdot \text{sen}\alpha + \mu \cdot g \cdot \text{cos}\alpha &= a_s \quad (\text{eq4}) \end{aligned}$$

Da 2ª lei de Newton, na descida, vem:

$$\begin{aligned} F_R = m \cdot a_d &\Rightarrow m \cdot g \cdot \text{sen}\alpha - \text{Fat} = m \cdot a_d \\ m \cdot g \cdot \text{sen}\alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \text{cos}\alpha &= m \cdot a_d \\ g \cdot \text{sen}\alpha - \mu \cdot g \cdot \text{cos}\alpha &= a_d \quad (\text{eq5}) \end{aligned}$$

Substituindo eq4 e eq5 em eq3, vem:

$$(g.\text{sen}\alpha + \mu.g.\text{cos}\alpha) = n^2 \cdot (g.\text{sen}\alpha - \mu.g.\text{cos}\alpha)$$

Reduzindo os termos semelhantes, vem: $\mu = \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right) \text{tg}\alpha$

Questão 222 - Solução

a) Inicialmente calcularemos qual deveria ser o valor de F_{at} para que o sistema permanecesse em equilíbrio estático. Da condição de equilíbrio, vem:

$$P_B = T = F_{at} \Rightarrow F_{at} = P_B = m_B.g = 20 \text{ N} \Rightarrow F_{at} = 20 \text{ N}$$

Concluimos que o F_{at} agindo na caixa vale efetivamente 20 N ? Não, esse é o valor que ele deveria atingir para bancar o equilíbrio do sistema. Mas será que a força de atrito na fronteira entre o bloco A e a superfície horizontal consegue atingir esse valor ? Calculemos o maior valor que F_{at} é capaz de atingir:

$$F_{at,max} = \mu_E.N = \mu_E.P_A = 0,5 \times 80 = 40 \text{ N} \Rightarrow 0 \leq F_{at} \leq 40 \text{ N}$$

Como 20 N pertence ao intervalo $0 \leq F_{at} \leq 40 \text{ N}$, a força de atrito certamente conseguirá bancar o equilíbrio estático desse sistema.

Assim, teremos, de fato: $P_B = T = F_{at} = 20 \text{ N}$

b) Inicialmente calcularemos qual deveria ser o valor de F_{at} para que o sistema permanecesse em equilíbrio estático. Da condição de equilíbrio, vem:

$$P_B = T = F_{at} \Rightarrow F_{at} = P_B = m_B.g = 80 \text{ N} \Rightarrow F_{at} = 80 \text{ N}$$

Concluimos que o F_{at} agindo na caixa vale efetivamente 80 N ? Não, esse é o valor que ele deveria atingir para bancar o equilíbrio do sistema. Mas será que a força de atrito na fronteira entre o bloco A e a superfície horizontal consegue atingir esse valor ? Calculemos o maior valor que F_{at} é capaz de atingir:

$$F_{at,max} = \mu_E.N = \mu_E.P_A = 0,8 \times 20 = 16 \text{ N} \Rightarrow 0 \leq F_{at} \leq 16 \text{ N}$$

Como 80 N está fora do intervalo $0 \leq F_{at} \leq 16 \text{ N}$, a força de atrito não é capaz de bancar o equilíbrio estático desse sistema, que finda por escorregar acelerado.

Como A escorregará, o atrito que agirá nele será cinético e valerá:

$$F_{at} = \mu_C.N = \mu_C.P_A = 0,4 \times 20 = 8 \text{ N} \Rightarrow F_{at} = 8 \text{ N}$$

Como o fio não estica (fio ideal indeformável), A e B compartilham de uma mesma aceleração escalar a que é determinada pela segunda lei de Newton:

$$F_{RA} = m_A.a \Rightarrow T - F_{at} = m_A.a \Rightarrow T - 8 = 2.a \quad (\text{eq1})$$

$$F_{RB} = m_B.a \Rightarrow P_B - T = m_B.a \Rightarrow 80 - T = 8.a \quad (\text{eq2})$$

Resolvendo o sistema das equações eq1 e eq2, vem: $a = 7,2 \text{ m/s}^2$ e $T = 22,4 \text{ N}$

Questão 223 - Resposta

Para bancar o equilíbrio estático, F_{at} precisaria atingir o valor 36N, porém, F_{at} está limitado ao intervalo $0 \leq F_{at} \leq 22,4 \text{ N}$, portanto o conjunto não ficará em equilíbrio estático, ele escorregará acelerado (todo movimento que parte do repouso é acelerado).

Portanto, o F_{at} agindo na caixa será cinético e valerá $F_{at} = 16 \text{ N}$.

Escrevendo a segunda lei de Newton para cada bloco e resolvendo o sistema de duas equações, encontramos: $T = 48 \text{ N}$, $a = 2 \text{ m/s}^2$.

Questão 224 - Solução

A Figura 115 mostra o diagrama das forças que agem nos corpos. Do equilíbrio vertical, podemos escrever:

$$N_2 = P_A \Rightarrow N_2 = 40 \text{ N} \quad \text{e} \quad N_1 = N_2 + P_B = 40 + 80 \Rightarrow N_1 = 120 \text{ N}$$

Se a força F fosse grande demais, A escorregaria para trás \leftarrow em relação a B (Figura 116). Para tentar impedir esse escorregamento relativo entre A e B , B exerce em A um F_{at} para frente \rightarrow , A devolve em B a reação F_{at} \leftarrow para trás como mostrado no diagrama de forças.

A questão pergunta o maior valor de F a fim de que A e B compartilhem da mesma aceleração $a_A = a_B = a$ em relação à Terra.

Escrevendo a segunda lei de Newton para cada bloco, vem:

$$F_{RA} = m_A \cdot a \Rightarrow F_{at} = m_A \cdot a \quad (\text{eq1})$$

$$F_{RB} = m_B \cdot a \Rightarrow F - F_{at} = m_B \cdot a \quad (\text{eq2})$$

$$F = (m_A + m_B) \cdot a \quad (\text{eq3})$$

A relação eq1 mostra que a aceleração que A adquire em relação à Terra é toda proveniente da ação da F_{at} . Entretanto, como a força de atrito é limitada, a aceleração que a caixa A adquire também é limitada. De acordo com eq1, a maior aceleração $a \rightarrow$ que a caixa A consegue acompanhar está diretamente relacionada com o maior valor que o F_{at} pode atingir. Assim, eq1 pode ser reescrita como:

$$F_{at_{\max}} = m_A \cdot a_{\max} \quad (\text{eq4})$$

A força de atrito máxima na fronteira entre A e B se relaciona com a força normal (N_2) trocada na fronteira entre A e B por:

$$F_{at_{\max}} = \mu_E \cdot N_2 = 0,2 \times 40 \quad F_{at_{\max}} = 8 \text{ N} \quad (\text{eq5})$$

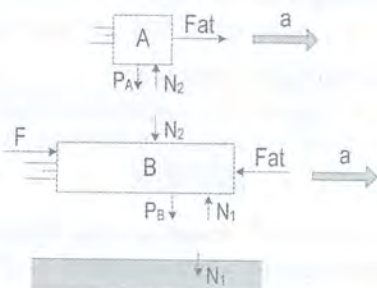


Figura 115 - Diagrama de forças

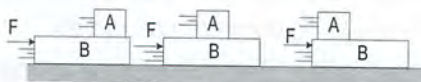


Figura 116 - se F for muito grande, a caixa B acelerará mais do que a caixa A , e ultrapassará a caixa A .

Substituindo em eq4, vem: $F_{at_{max}} = m_A \cdot a_{max} \Rightarrow 8 = 4 \cdot a_{max} \Rightarrow a_{max} = 2 \text{ m/s}^2$

Sendo $a = 2 \text{ m/s}^2$ a maior aceleração que A consegue adquirir (acompanhar) em relação à Terra, para que A e B compartilhem de uma mesma aceleração em relação à Terra, a aceleração de B não deve superar esse valor. Assim, a maior aceleração que A e B podem compartilhar vale $a = 2 \text{ m/s}^2$. O valor da força F que produz essa aceleração no sistema é dado pela relação eq3:

$$F = (m_A + m_B) \cdot a \Rightarrow F = (4 + 8) \times 2 = 24 \text{ N}$$

A maior força $F \rightarrow$ que pode ser aplicada em B de forma que A e B se movam juntos em relação à Terra, isto é, de forma que o atrito entre A e B ainda seja estático, vale $F = 24 \text{ N}$.

Se uma força maior do que 24 N for aplicada, o atrito requerido na fronteira entre os blocos (para que não haja escorregamento relativo) será maior do que 8 N, o que é impossível com base em eq5. Nesse caso, haveria escorregamento relativo, o atrito entre os blocos seria estático e ocorreria $a_B > a_A$ como mostrado na Figura 116.

Questão 225 - Solução

a) A Figura 117 mostra o diagrama das forças que agem nos corpos. Do equilíbrio vertical, podemos escrever:

$$N_2 = P_A \Rightarrow N_2 = 40 \text{ N} \quad \text{e} \quad N_1 = N_2 + P_B = 40 + 80 \Rightarrow N_1 = 120 \text{ N}$$

Se a força F fosse grande demais, A escorregaria \rightarrow em relação a B (Figura 118). Para tentar impedir esse escorregamento relativo entre A e B, B exerce em A um F_{at} para trás \leftarrow , A devolve em B a reação $F_{at} \rightarrow$ para frente como mostrado no diagrama de forças.

Inicialmente, determinaremos o maior valor de F a fim de que A e B compartilhem da mesma aceleração $a_A = a_B = a$ em relação à Terra.

Escrevendo a segunda lei de Newton para cada bloco, vem:

$$F_{RA} = m_A \cdot a \Rightarrow F - F_{at} = m_A \cdot a \quad (\text{eq1})$$

$$F_{RB} = m_B \cdot a \Rightarrow F_{at} = m_B \cdot a \quad (\text{eq2})$$

$$F = (m_A + m_B) \cdot a \quad (\text{eq3})$$

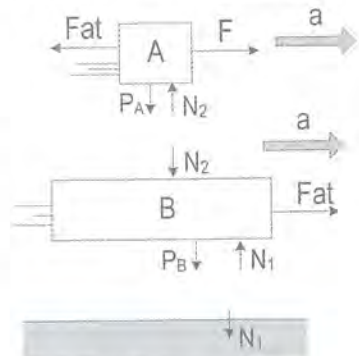


Figura 117 - Diagrama de forças

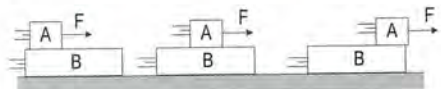


Figura 118 - se F for muito grande, a caixa A acelerará mais do que a caixa B, e ultrapassará a caixa B.

A relação eq1 mostra que a aceleração que B adquire em relação à Terra é toda proveniente da ação da F_{at} . Entretanto, como a força de atrito é

limitada, a aceleração que a caixa B adquire também é limitada. De acordo com eq2, a maior aceleração $a \rightarrow$ que a caixa A consegue acompanhar está diretamente relacionada com o maior valor que o F_{at} pode atingir. Assim, eq2 pode ser reescrita como:

$$F_{at_{\max}} = m_B \cdot a_{\max} \quad (\text{eq4})$$

A força de atrito máxima na fronteira entre A e B se relaciona com a força normal (N_2) trocada na fronteira entre A e B por:

$$F_{at_{\max}} = \mu_E \cdot N_2 = 0,2 \times 40 \Rightarrow F_{at_{\max}} = 8 \text{ N} \quad (\text{eq5})$$

Substituindo em eq4, vem: $F_{at_{\max}} = m_B \cdot a_{\max}$

$$8 = 8 \cdot a_{\max} \Rightarrow a_{\max} = 1 \text{ m/s}^2$$

Assim, a maior aceleração que A e B podem compartilhar, de forma que o atrito entre eles ainda seja estático, vale $a = 1 \text{ m/s}^2$. O valor da força F que produz essa aceleração no sistema é dado pela relação eq3:

$$F = (m_A + m_B) \cdot a \Rightarrow F = (4 + 8) \times 1 = 12 \text{ N}$$

A maior força $F \rightarrow$ que pode ser aplicada em B de forma que A e B se movam juntos em relação à Terra, isto é, de forma que o atrito entre A e B ainda seja estático, vale $F = 12 \text{ N}$.

Entretanto, segundo o enunciado, será aplicado ao bloco A uma força horizontal $F = 14,4 \text{ N} > 12 \text{ N}$, portanto, haverá escorregamento relativo entre os blocos e o atrito entre eles será cinético. Os blocos não compartilharão a mesma aceleração em relação à Terra, pois teremos $a_A > a_B$ como mostrado na Figura 118.

A força de atrito que efetivamente atuará na fronteira entre os blocos vale:

$$F_{at} = \mu_C \cdot N_2 = 0,16 \times 40 \Rightarrow F_{at} = 6,4 \text{ N}$$

Escrevendo a segunda lei de Newton para cada bloco, vem:

$$F_{RA} = m_A \cdot a_A \Rightarrow F - F_{at} = m_A \cdot a_A \Rightarrow 14,4 - 6,4 = 4 \cdot a_A \Rightarrow a_A = 2 \text{ m/s}^2$$

$$F_{RB} = m_B \cdot a_B \Rightarrow F_{at} = m_B \cdot a_B \Rightarrow 6,4 = 8 \cdot a_B \Rightarrow a_B = 0,8 \text{ m/s}^2$$

b) No referencial do B, o próprio bloco B está parado e o bloco A se move sobre B com aceleração relativa:

$$a_{AB} = a_A - a_B = 2 - 0,8 = 1,2 \text{ m/s}^2$$

Nesse referencial, A precisará percorrer, a partir do repouso, uma distância igual ao comprimento L do bloco B até cair de cima dele, com $L = 2,4 \text{ m}$. Assim, vem:

$$L = a_{AB} \frac{t^2}{2} \Rightarrow 2,4 = 1,2 \cdot \frac{t^2}{2} \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

Questão 226 - Resposta

a) 18 N, b) 1 s **Dica:** veja a resolução da questão 225 página 84.

Questão 227 - Solução

Para que haja tensão (atrito) na fronteira de separação entre A e B (veja figura), é necessário que B esteja acelerando em relação a A, ou escorregando em relação a A. Como nada disso está ocorrendo, A e B se comportarão como se fossem um só bloco AB de massa $2M + 4M = 6M$.

Quando a força F for gradativamente aumentada, em qual fronteira - BC ou C-chão - o escorregamento tenderá a ocorrer primeiro? Para responder a essa pergunta, precisamos analisar o sistema com paciência.

Equilíbrios verticais:

$$N_B = P_{AB} \Rightarrow N_B = 6.M.g$$

$$N_C = N_B + P_C$$

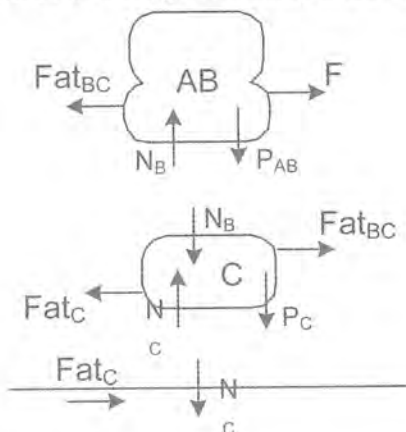
$$N_C = 6.M.g + 8.M.g = 14.M.g$$

Determinando os valores de Fat max:

$$Fat_{BC \max} = \mu_{BC} \cdot N_B = 0,3 \cdot 6.M.g \Rightarrow Fat_{BC \max} = 1,8 .M.g$$

$$Fat_{C\text{-chão} \max} = \mu_{C\text{-chão}} \cdot N_C = 0,1 \cdot 14.M.g \Rightarrow Fat_{C\text{-chão} \max} = 1,4 .M.g$$

Suponhamos que B atinja a iminência de escorregar em relação a C antes de C atingir a iminência de escorregar em relação ao chão.



Nesse caso, teríamos:

$$\text{No corpo AB: } F = Fat_{BC \max} = 1,8.M.g$$

$$\text{No corpo C, teríamos: } Fat_{BC \max} = Fat_C \Rightarrow Fat_C = 1,8.M.g$$

O resultado obtido configura um absurdo, visto que levaria a força de atrito entre o corpo C e o chão a atingir um valor maior do que o máximo atrito possível para a fronteira entre eles C e o chão, isto é: $Fat_C > Fat_{C\text{-chão} \max}$

Dessa forma, concluímos que a iminência de escorregar ocorre, inicialmente, na fronteira C-chão. Nesse caso, as relações corretas são:

$$\text{No corpo C : } \text{Fat}_{BC} = \text{Fat}_{C\text{-chão max}} = 1,4.M.g$$

$$\text{No corpo AB: } F = \text{Fat}_{BC} \Rightarrow F = 1,4.M.g$$

O maior valor possível de F para que todos permaneçam imóveis entre si e em relação ao solo vale $F = 1,4.M.g$.

Questão 228 - Solução

a) Supondo, inicialmente, que todos os corpos se movam juntos com uma mesma aceleração escalar no referencial da Terra $a_1 = a_2 = a_3 = a$ (sem que m_1 escorregue em relação a m_2), temos:

$$F_{R1} = m_1 \cdot a \Rightarrow \text{Fat} = m_1 \cdot a \quad (\text{eq1})$$

$$F_{R2} = m_2 \cdot a \Rightarrow T - \text{Fat} = m_2 \cdot a \quad (\text{eq2})$$

$$F_{R3} = m_3 \cdot a \Rightarrow m_3 \cdot g - T = m_3 \cdot a \quad (\text{eq3})$$

Somando as equações eq1, eq2 e eq3, vem :

$$m_3 \cdot g = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a$$

$$m_3 \cdot g = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a$$

$$30 \cdot (10) = (5 + 10 + 30) \cdot a \Rightarrow a = 6,66 \text{ m/s}^2$$

Substituindo em eq1, vem :

$$\text{Fat} = m_1 \cdot a \Rightarrow \text{Fat} = 5 \times 6,6666$$

$$\text{Fat} = 33,33 \text{ N}$$

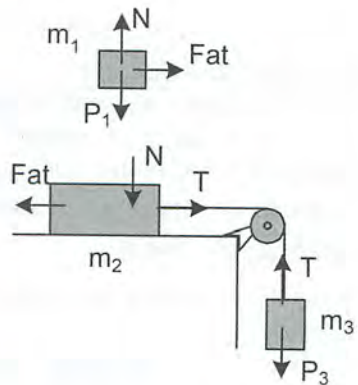
Qual, no entanto, é o maior valor possível para a força de atrito (Fat_{max}) na superfície de contato entre os blocos m_1 e m_2 ?

$$\text{Fat}_{\text{max}} = \mu_E \cdot N = \mu_E \cdot P_1 = 0,6 \times 50 = 30 \text{ N} \Rightarrow \text{Fat}_{\text{max}} = 30 \text{ N}$$

Desta forma, vemos que nossa hipótese inicial de que todos juntos sem que m_1 escorregasse em relação a m_2 se mostrou inviável. Isto porque, para que m_1 e m_2 se movessem juntos (sem escorregamento relativo), seria requerido um $\text{Fat} = 33,33 \text{ N}$, mas os cálculos efetuados nos mostraram que a máxima intensidade possível para o Fat naquela fronteira é $\text{Fat}_{\text{max}} = 30 \text{ N}$.

Do exposto, concluímos que haverá escorregamento relativo entre os corpos 1 e 2 e o Fat , portanto, será cinético. Calculemos o Fat_{cin} :

$$\text{Fat}_{\text{cin}} = \mu_c \cdot N = 0,4 \times 50 = 20 \text{ N} \Rightarrow \text{Fat} = 20 \text{ N}$$



Reescrevendo as leis de Newton para cada caixa, lembrando que, na verdade, a caixa infelizmente está escorregando, ($a_1 < a_2 = a_3 = a$), vem:

$$F_{R1} = m_1 \cdot a \Rightarrow Fat = m_1 \cdot a_1 \Rightarrow 20 = 5 \cdot a_1 \Rightarrow a_1 = 4 \text{ m/s}^2$$

$$F_{R2} = m_2 \cdot a \Rightarrow T - Fat = m_2 \cdot a_2 \Rightarrow T - 20 = 10 \cdot a \quad (\text{eq4})$$

$$F_{R3} = m_3 \cdot a \Rightarrow m_3 \cdot g - T = m_3 \cdot a_3 \Rightarrow 300 - T = 30 \cdot a \quad (\text{eq5})$$

Eliminando a aceleração a , nas equações eq4 e eq5, vem:

$$3T - 60 = 300 - T \Rightarrow 4T = 360 \Rightarrow T = 90 \text{ N}$$

b) A caixa B exerce na caixa A uma normal $N \uparrow$ de valor 50 N e um $Fat \rightarrow$ de valor 20 N. Assim, a força total que B exerce em A será a resultante vetorial dessa normal com esse Fat , dada por:

$$R = \sqrt{Fat^2 + N^2} = \sqrt{20^2 + 50^2} \Rightarrow R = 53,85 \text{ N}$$

Questão 229 - Solução

a) Na situação em que o carro C desenvolver a máxima aceleração a possível, o bloco A estará na iminência de escorregar em relação à superfície horizontal, o que nos permite escrever:

Condição de iminência de escorregamento:

$$Fat = \mu_E \cdot N_1 \quad (\text{eq1})$$

O equilíbrio vertical de cada corpo permite escrever:

$$N_2 = P_C \Rightarrow N_2 = m \cdot g \quad (\text{eq2})$$

$$N_1 = N_2 + P_A = m \cdot g + m \cdot g$$

$$N_1 = 2 \cdot m \cdot g \quad (\text{eq3})$$

$$T = P_B \Rightarrow T = m \cdot g \quad (\text{eq4})$$

A segunda lei de Newton para o carro C permite escrever:

$$F_R = m \cdot a \Rightarrow F = m \cdot a \quad (\text{eq5})$$

O equilíbrio estático do bloco A sobre a mesa, na horizontal, permite escrever:

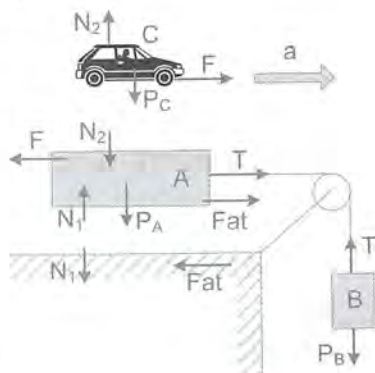
$$T + Fat = F \Rightarrow m \cdot g + \mu_E \cdot 2m \cdot g = m \cdot a \Rightarrow a = g \cdot (2\mu_E + 1) \quad (\text{eq6})$$

b) Se os blocos A e B se movem com velocidade constante em relação à Terra, eles se movem em equilíbrio ($F_R = 0$). Nesse caso, o atrito entre o bloco A e a superfície horizontal será cinético, o que nos permite escrever:

$$\text{Equilíbrio cinético: } Fat = \mu_C \cdot N_1 \quad (\text{eq7})$$

O equilíbrio vertical de cada corpo permite escrever:

$$N_2 = P_C \Rightarrow N_2 = m \cdot g \quad (\text{eq8})$$



$$N_1 = N_2 + P_A = m.g + m.g \Rightarrow N_1 = 2.m.g \quad (\text{eq9})$$

$$T = P_B \Rightarrow T = m.g \quad (\text{eq10})$$

A segunda lei de Newton para o carro C permite escrever:

$$F_R = m.a \Rightarrow F = m.a \quad (\text{eq11})$$

O equilíbrio cinético ($F_R = 0$) do bloco A sobre a mesa, na horizontal, permite escrever:

$$T + F_{at} = F \Rightarrow m.g + \mu_C.2mg = m.a \Rightarrow a = g.(2\mu_C + 1) \quad (\text{eq12})$$

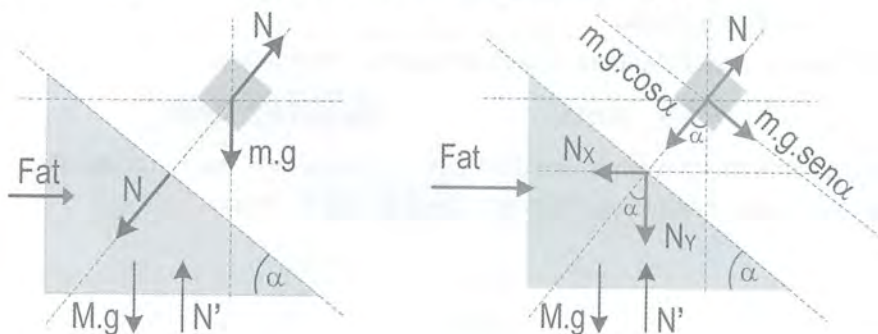
Questão 230 - Solução

Na direção da normal N , o bloco se encontra em equilíbrio, o que permite escrever: $N = m.g.\cos\alpha$ (eq1)

Na direção horizontal, o prisma encontra-se em equilíbrio, o que permite escrever: $F_{at} = N_x$ (eq2)

Da condição de iminência de escorregar (μ min), vem: $F_{at} = \mu.N'$ (eq3)

Do equilíbrio vertical do prisma, vem: $N' = M.g + N_y$ (eq4)



Usando eq2, eq3 e eq4, vem:

$$F_{at} = N_x \Rightarrow \mu.N' = N.\text{sen}\alpha \Rightarrow \mu.(M.g + N_y) = N.\text{sen}\alpha$$

$$\mu.(M.g + N.\cos\alpha) = N.\text{sen}\alpha, \text{ usando eq1, vem:}$$

$$\mu.(M.g + m.g.\cos 2\alpha) = m.g.\text{sen}\alpha.\cos\alpha, \text{ de onde encontramos:}$$

$$\mu = \frac{m.g.\text{sen}\alpha.\cos\alpha}{M.g + m.g.\cos^2\alpha},$$

Para $m = 2 \text{ kg}$, $M = 4 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\alpha = 45^\circ$, vem:

$$\mu = \frac{20 \cdot (0,5)}{40 + 20 \cdot (0,5)} \Rightarrow \mu = 0,2$$

Questão 231 - Solução

1ª etapa - enquanto não houver escorregamento: inicialmente, o ângulo α vai aumentando até que seja atingida a iminência de escorregar. Nessa etapa inicial, enquanto a caixa não escorrega, teremos uma força de atrito estática cujo módulo será dado por $F_{at} = P \cdot \sin \alpha$, isto é, terá inicialmente um comportamento senoidal para o módulo da força de atrito, em função do ângulo α . Quanto maior for o ângulo α , maior será o valor do respectivo F_{at} .

2ª etapa – caixa já escorregando: desse ponto em diante, o F_{at} será cinético e seu módulo será dado por:

$$F_{at} = \mu_C \cdot N = \mu_C \cdot P \cdot \cos \alpha$$

Assim, após a caixa começar a escorregar, o valor de F_{at} passará a ter um comportamento cossenoidal em função do ângulo α .

O gráfico da **letra C** registra cada um desses comportamentos da força de atrito, à medida que o ângulo α vai, gradativamente, aumentado entre 0° e 90° .

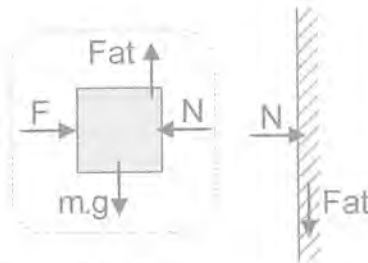
Questão 232 - Solução

Para que a caixa esteja em equilíbrio estático, devemos ter:

$$F = N \quad (\text{eq1}),$$

$$F_{at} = m \cdot g \quad (\text{eq2})$$

Adicionalmente, devemos lembrar que a intensidade da força de atrito é limitada, sendo restrita ao intervalo: $0 \leq F_{at} \leq \mu_E \cdot N$ (eq3)



Ressalto que a condição eq3 não tem com ser violada. É impossível satisfazer a relação eq2 sem satisfazer juntamente a relação eq3. Mesmo que a relação eq2 seja violada (e a caixa acabe escorregando), a relação eq3 ainda assim é satisfeita.

Qual a condição geral que garante o equilíbrio estático da caixa, levando em consideração as relações eq1, eq2 e eq3? Para encontrá-la, substituiremos as relações eq1 e eq2 em eq3:

$$F_{at} \leq \mu_E \cdot N \Rightarrow m \cdot g \leq \mu_E \cdot F \quad (\text{eq4})$$

Acabamos de concluir que, se $m \cdot g \leq \mu_E \cdot F$, então teremos $F_{at} = m \cdot g$ e a caixa permanecerá em equilíbrio estático. Caso contrário (isto é, caso $m \cdot g > \mu_E \cdot F$), a caixa escorregará ($F_{at} < m \cdot g$) e o atrito será cinético ($F_{at} = \mu_C \cdot N$).

a) Da condição geral determinada em eq4, vem:

$$m \cdot g \leq \mu_E \cdot F \Rightarrow 80 \times 10 \leq 0,4 \times F \Rightarrow F \geq 2000 \text{ N}$$

Assim, vemos que a solução do item a não é um único valor de força, mas sim, um intervalo de valores para a força F . Para qualquer força F tal que $F \geq 2000 \text{ N}$, teremos $F_{at} = P = 800 \text{ N}$. A força mínima para que a caixa não escorregue vale 2000 N , mas, logicamente, uma força $F = 2500 \text{ N}$ também garante o equilíbrio estático dela.

b) Da condição geral determinada em eq4, vem:

$$m \cdot g \leq \mu_E \cdot F \Rightarrow 80 \times 10 \leq \mu_E \times 400 \Rightarrow \mu_E \geq 2$$

Mais uma vez, vemos que a solução do item b não é um único valor de μ_E , mas sim, um intervalo de valores para μ_E . Para qualquer coeficiente de atrito no intervalo $\mu_E \geq 2$, teremos $F_{at} = P = 800 \text{ N}$. O coeficiente de atrito mínimo para que a caixa não escorregue vale $\mu_E = 2$, mas, logicamente, um coeficiente $\mu_E = 2,5$ também garante o equilíbrio estático dela.

c) Da condição geral determinada em eq4, vem:

$$m \cdot g \leq \mu_E \cdot F \Rightarrow m \times 10 \leq 0,4 \times 400 \Rightarrow m \leq 16 \text{ kg}$$

Mais uma vez, vemos que a solução do item c não é um único valor de massa m , mas sim, um intervalo de valores. Para qualquer caixa de massa no intervalo $m \leq 16 \text{ kg}$, teremos $F_{at} = P = m \cdot g$. A maior massa possível para que a caixa não escorregue vale $m = 16 \text{ kg}$, mas, logicamente, uma massa $m = 12 \text{ kg}$ também permanece imóvel.

Questão 233 - Resposta

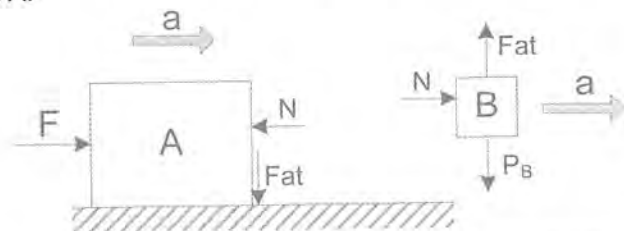
a) a caixa escorrega para cima ↑

b) $F_{at}^{\text{cinético}} = 12 \text{ N}$ ↓

c) $a = 4 \text{ m/s}^2$

Questão 234 - Solução

No referencial inercial da Terra, as caixas A e B compartilharão da mesma aceleração $a \rightarrow$. Adicionalmente, a caixa B não deve escorregar verticalmente, em relação a A.



A segunda lei de Newton para as caixas A e B, na horizontal, permite escrever:

$$F_{RA} = m_A \cdot a \Rightarrow F - N = m_A \cdot a \quad (\text{eq1})$$

$$F_{RB} = m_B \cdot a \Rightarrow N = m_B \cdot a \quad (\text{eq2})$$

$$\text{Somando eq1 e eq2, membro a membro, vem: } F = (m_A + m_B) \cdot a \quad (\text{eq3})$$

$$\text{Para a caixa B não escorregar verticalmente, devemos ter: } F_{at} = P_B \quad (\text{eq4})$$

$$\text{A força de atrito é limitada: } F_{at} \leq \mu_E \cdot N \quad (\text{eq5})$$

Substituindo-se eq4 e eq2 em eq5, vem:

$$F_{at} \leq \mu_E \cdot N \Rightarrow m_B \cdot g \leq \mu_E \cdot m_B \cdot a \Rightarrow a \geq \frac{g}{\mu_E} \quad (\text{eq6})$$

A relação eq6 fornece a condição que deve ser satisfeita (aceleração mínima do sistema) a fim de que a caixa B não escorregue em relação a caixa A, ou seja, a condição que deve ser satisfeita para atender a relação eq4 sem perder de vista a condição implacável imposta por eq5.

Isolando "a" em eq3 e substituindo em eq6, vem:

$$a \geq \frac{g}{\mu_E} \Rightarrow \frac{F}{(M+m)} \geq \frac{g}{\mu_E} \Rightarrow F \geq \frac{(M+m) \cdot g}{\mu_E} \quad (\text{eq7})$$

A relação eq7 determina a força mínima requerida para satisfazer a condição do problema.

a) Usando a relação eq6, vem: $a \geq \frac{g}{\mu_E} \Rightarrow a \geq \frac{10}{0,25} \Rightarrow a \geq 40 \text{ m/s}^2$

b) Usando a relação eq7, vem: $F \geq \frac{(M+m) \cdot g}{\mu_E} \Rightarrow F \geq \frac{(4+6) \cdot 10}{0,25} \Rightarrow F \geq 400 \text{ N}$

c) Usando a relação eq6, vem: $a \geq \frac{g}{\mu_E} \Rightarrow 25 \geq \frac{10}{\mu_E} \Rightarrow \mu_E \geq 0,4$

Questão 235 - 1ª solução - analítica :

a) Equilíbrio vertical: $N + F \cdot \text{sen} \alpha = M \cdot g \Rightarrow N = M \cdot g - F \cdot \text{sen} \alpha$ (eq1)

Iminência de escorregar : $F_{at} = F_{at_{\max}} = \mu \cdot N$ (eq2)

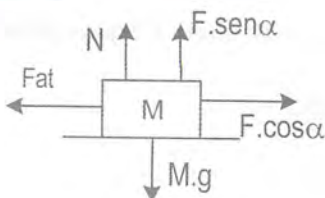
Equilíbrio horizontal: $F \cdot \text{cos} \alpha = F_{at}$ (eq3)

De eq1, eq2 e eq3, vem:

$$F \cdot \text{cos} \alpha = \mu \cdot N = \mu \cdot (M \cdot g - F \cdot \text{sen} \alpha)$$

$$F \cdot \text{cos} \alpha + \mu \cdot F \cdot \text{sen} \alpha = \mu \cdot M \cdot g$$

$$F = \frac{\mu \cdot M \cdot g}{\text{cos} \alpha + \mu \cdot \text{sen} \alpha} \text{ (eq4)}$$



b) Seja a função $g(\alpha) = 1 \cdot \text{cos} \alpha + \mu \cdot \text{sen} \alpha$, denominador da relação eq4.

Multipli-cando em cima e embaixo por $\sqrt{1 + \mu^2}$, vem:

$$g(\alpha) = \sqrt{1 + \mu^2} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \cdot \text{cos} \alpha + \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \cdot \text{sen} \alpha \right]$$

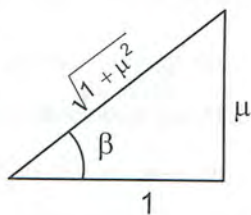
$$g(\alpha) = \sqrt{1 + \mu^2} \cdot [\text{cos} \beta \cdot \text{cos} \alpha + \text{sen} \beta \cdot \text{sen} \alpha]$$

$$g(\alpha) = \sqrt{1 + \mu^2} \cdot \text{cos}(\alpha - \beta), \text{ onde } \beta \text{ é um ângulo tal que}$$

$\text{tg} \beta = \mu$ (veja triângulo retângulo).

Assim, substituindo em eq4, vem:

$$F = \frac{\mu \cdot M \cdot g}{\text{cos} \alpha + \mu \cdot \text{sen} \alpha} = \frac{\mu \cdot M \cdot g}{\sqrt{1 + \mu^2} \cdot \text{cos}(\alpha - \beta)}, \text{ com } \text{tg} \beta = \mu.$$



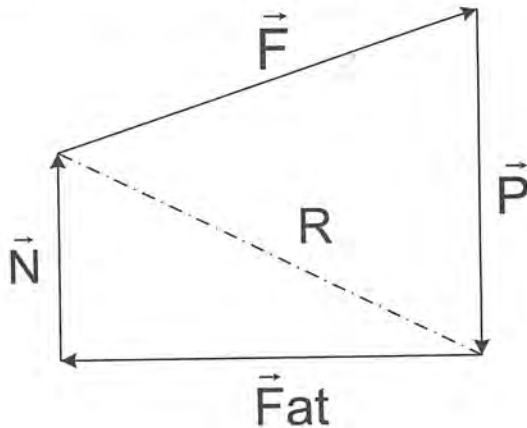
c) Assim, a expressão acima nos fornece o valor de F que torna iminente o escorregamento da caixa, em função de α . Os demais termos β , M , g , μ são parâmetros constantes. Vemos que o menor valor de F ocorrerá quando tivermos o maior valor para $\text{cos}(\alpha - \beta)$, valor máximo este que vale 1 para $\alpha = \beta$, isto é, $\alpha = \beta = \text{arctg} \mu$

d) Sendo $F = \frac{\mu \cdot M \cdot g}{\sqrt{1 + \mu^2} \cdot \text{cos}(\alpha - \beta)}$, fazendo $\text{cos}(\alpha - \beta) = 1$, temos:

$$F_{\min} = \frac{\mu \cdot M \cdot g}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

Questão 235 - 2ª Solução – gráfica – geométrica

Para que as forças $M.g$, F_{at} , N e F tenham resultante nula, tais vetores devem formar uma linha poligonal fechada quando dispostos em série, um após o outro. A figura abaixo mostra a disposição dos vetores em série.



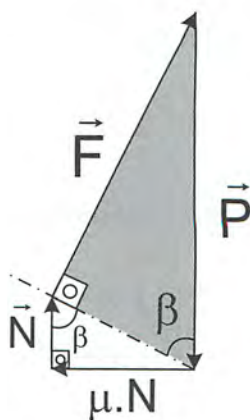
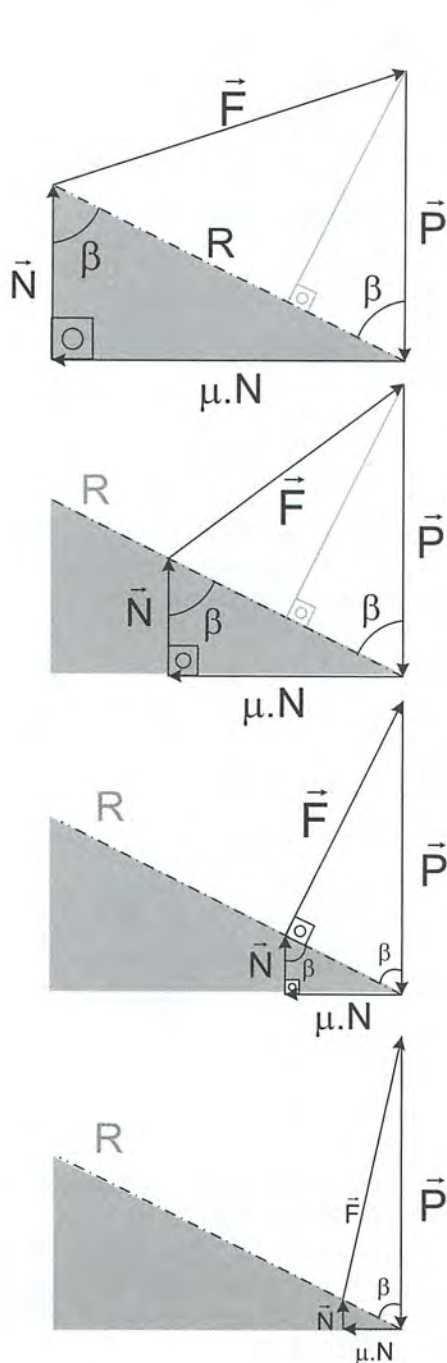
Se $F_{at} = \mu.N$, podemos redesenhar conforme a seguir:

Note que os vetores normal N e $F_{at} = \mu.N$ definem um triângulo retângulo com um ângulo agudo β muito bem definido pela relação $\text{tg}\beta = \mu$.

Veja que dados o peso P , o coeficiente de atrito μ e fixada a proporção $\text{tg}\beta = \mu$, é possível fazer a origem do vetor F correr ao longo da reta R , mantendo fixa a extremidade de F na origem do vetor peso P dado inicialmente.

Assim, vemos graficamente que, fixados os valores de P e μ , existem inúmeros valores de F que satisfazem a construção, à medida que a origem do vetor F corre ao longo da reta R (veja figura na página seguinte).

O menor módulo do vetor F ocorrerá quando este for perpendicular à reta R , como mostra a figura na página seguinte. Esse raciocínio faz uso do conceito geométrico de *distância de um ponto a uma reta*.

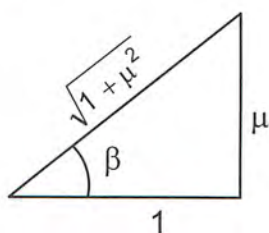


Observando a figura acima, vemos que a condição para F_{min} ocorrerá para:

$$\text{sen } \beta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{F}{P}$$

Conforme vimos, β é um ângulo agudo cuja tangente vale μ . Assim, o triângulo retângulo ao lado fornece todas as funções trigonométricas $\text{sen } \beta$, $\text{cos } \beta$ e $\text{tg } \beta$.

Assim, a partir do seno de β , temos:



$$\text{sen } \beta = \frac{F}{P} = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \Rightarrow$$

$$\frac{F}{Mg} = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \Rightarrow F = \frac{\mu \cdot M \cdot g}{\sqrt{\mu^2 + 1}}$$

Questão 236 - Solução

Usando o resultado da questão anterior, vem:

$$F_{\min} = \frac{\mu.M.g}{\sqrt{\mu^2 + 1}} = \frac{0,75 \times 20 \times 10}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1}} = \frac{150}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = 120 \text{ N}$$

Questão 237 – Resposta (veja a resolução da questão 235)

$$\text{a) } F_{\min} = \frac{M.g}{\text{sen}\alpha + \mu.\text{cos}\alpha}$$

$$\text{b) } F_{\min} = \frac{M.g}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \text{ para } \text{tg}\alpha = 1/\mu \Rightarrow \alpha = \text{arctg}(1/\mu)$$

$$\text{c) } -90^\circ \leq \alpha \leq -45^\circ$$

Questão 238 - Solução

Para que as forças $M.g$, F , N e F tenham resultante nula, tais vetores devem formar uma linha poligonal fechada quando dispostos em série, um após o outro. A Figura 119 mostra a disposição dos vetores em série.

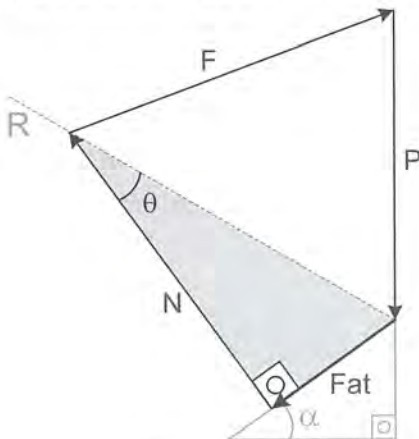


Figura 119

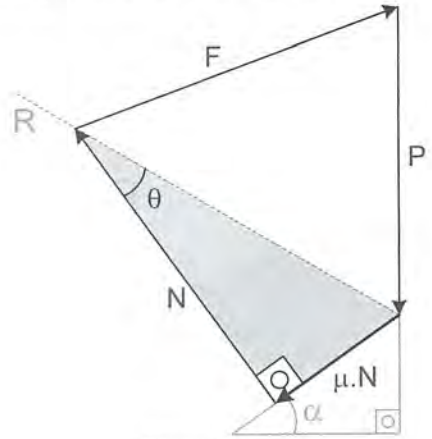


Figura 120

Se $F_{at} = \mu.N$, podemos redesenhar conforme a Figura 120.

Note que os vetores normal N e $F_{at} = \mu.N$ definem um triângulo retângulo com um ângulo agudo θ muito bem definido pela relação $\text{tg}\theta = \mu$.

Veja que, dados o peso P e o coeficiente de atrito μ e fixada a proporção $\text{tg}\theta = \mu$, é possível fazer a origem do vetor F correr ao longo da reta R , mantendo fixa a extremidade de F na origem do vetor peso P dado inicialmente como mostram as Figuras 121a, 121b e 121c.

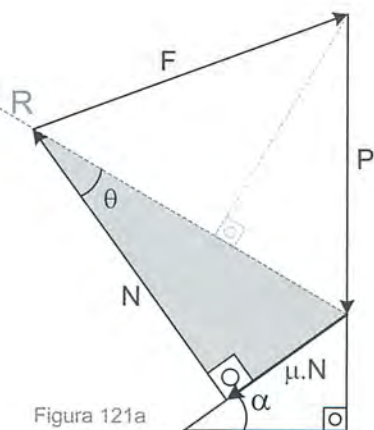


Figura 121a

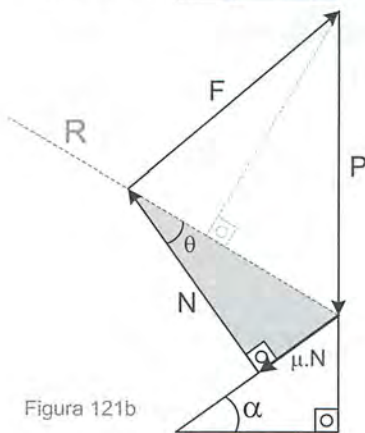


Figura 121b

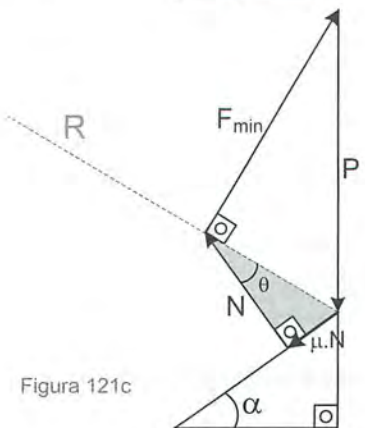


Figura 121c

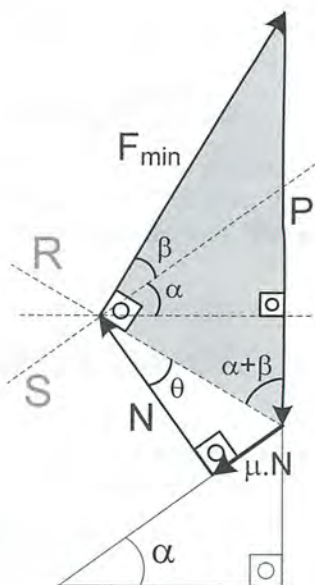


Figura 122

Assim, vemos graficamente que, fixados os valores de P e μ , existem inúmeros valores de F que satisfazem a construção, à medida que a origem do vetor F corre ao longo da reta R como mostra a Figura 121.

O menor módulo do vetor F ocorrerá quando este for perpendicular à reta R , como mostra a Figura 121c. Esse raciocínio faz uso do conceito geométrico de *distância de um ponto a uma reta*.

Na Figura 122, ampliamos os detalhes da Figura 121c. A reta S é paralela à rampa, formando um ângulo α com a horizontal. Segundo o enunciado, F forma um ângulo β com a direção da rampa, portanto, forma um ângulo β com a reta S . Observando a Figura 122, vemos que a condição para F_{\min} ocorrerá para:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{F_{\min}}{P}$$

$$F_{\min} = m \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)$$

b) Observando a extremidade do vetor peso P na Figura 123, vemos 3 ângulos adjacentes $\alpha + \beta$, $90^\circ - \theta$ e $90^\circ - \alpha$ cuja soma totaliza 180° . Assim, vem:

$$\alpha + \beta + 90^\circ - \theta + 90^\circ - \alpha = 180^\circ$$

$$\beta = \theta, \text{ com } \theta = \text{arctg} \mu$$

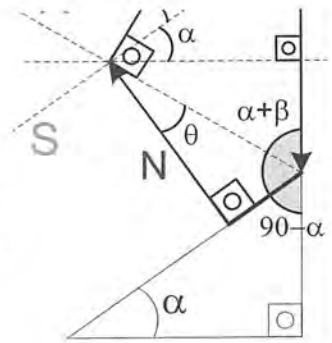


Figura 123

Questão 239 - Solução

Estando em equilíbrio estático, podemos escrever:

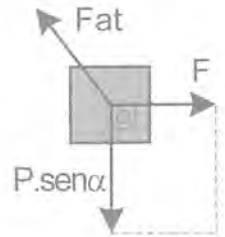
$$F^2 + (P \cdot \text{sen} \alpha)^2 = F_{at}^2 \Rightarrow F = \sqrt{F_{at}^2 - (m \cdot g \cdot \text{sen} \alpha)^2} \text{ (eq1)}$$

Da condição de iminência de escorregar, vem:

$$F_{at} = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g \cdot \text{cos} \alpha \text{ (eq2)}$$

De eq1 e eq2, vem: $F = \sqrt{(\mu \cdot m \cdot g \cdot \text{cos} \alpha)^2 - (m \cdot g \cdot \text{sen} \alpha)^2}$

$$F = m \cdot g \cdot \sqrt{(\mu \cdot \text{cos} \alpha)^2 - \text{sen}^2 \alpha}$$



Questão 240 - Solução

O vínculo geométrico, associado ao fato de que o fio não estica, permite concluir que:

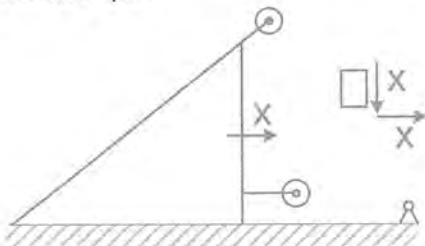


Figura 124 - sempre que o bloco descer verticalmente uma distância $x \downarrow$, todo o conjunto (bloco + polias + prisma) simultaneamente se moverá essa mesma distância $x \rightarrow$ para a direita

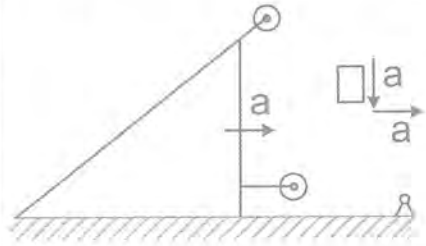
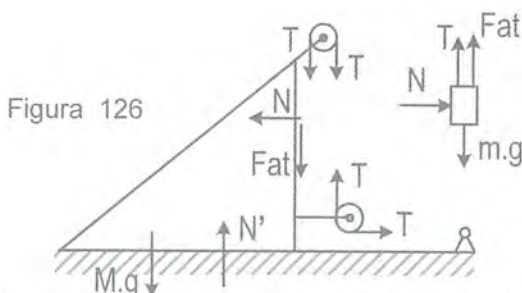


Figura 125 - quando o bloco apresentar uma aceleração $a \downarrow$ para baixo, todo o conjunto compartilhará essa mesma aceleração (em módulo) $a \rightarrow$ para a direita.

A conclusão obtida na figura 125 decorre da regra prática de derivação. (leia o tópico especial 2 – vínculos geométricos na mecânica – capítulo 7).



Assim, observando tanto as forças que agem no conjunto “prisma+polias” quanto as forças que agem no bloco (Figura 126), com base nas acelerações mostradas na Figura 125, podemos escrever:

Prisma na horizontal: $F_R = M.a \Rightarrow (T - N) = M.a$ (eq1)

Bloco na horizontal: $F_R = m.a \Rightarrow N = m.a$ (eq2)

Bloco na vertical: $F_R = m.a \Rightarrow (m.g - T - Fat) = m.a$ (eq3)

Somando as relações eq1, eq2 e eq3, membro a membro, vem:

$$m.g - Fat = M.a + 2m.a, \text{ com } Fat = \mu.N$$

$$m.g - \mu.N = M.a + 2m.a, \text{ usando eq2, vem:}$$

$$m.g - \mu.m.a = M.a + 2m.a \Rightarrow a = \frac{m.g}{M + m.(2 + \mu)}$$

A expressão acima fornece a aceleração do prisma em relação à Terra.

A aceleração da caixa em relação à Terra é a soma de duas componentes de aceleração “ $a \downarrow + a \rightarrow$ ” (conforme a Figura 125) totalizando uma aceleração $a.\sqrt{2}$ cujo módulo foi determinado pelo Teorema de Pitágoras. Assim, a aceleração da caixa, em relação à Terra, é dada por:

$$a' = a.\sqrt{2} = \frac{m.g.\sqrt{2}}{M + m.(2 + \mu)}$$

Questão 241 – Solução

Equilíbrio na direção normal: $N.\sqrt{2} = P.\cos\alpha \Rightarrow N = m.g.\cos\alpha.\sqrt{2}/2$ (eq1)

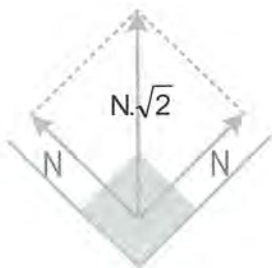
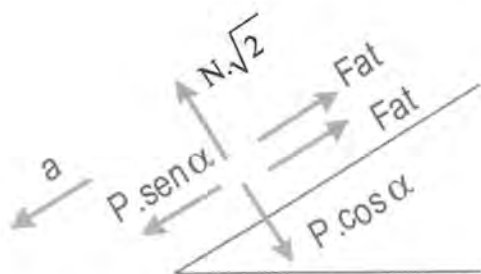
A 2ª lei de Newton na direção ladeira abaixo (veja figura) permite escrever:

$$F_R = m.a \Rightarrow (P.\sen\alpha - 2.Fat) = m.a \Rightarrow m.g.\sen\alpha - 2.\mu.N = m.a.$$

Usando eq1, vem:

$$m.g.\sen\alpha - \mu.m.g.\cos\alpha.\sqrt{2} = m.a \Rightarrow a = g.\sen\alpha - \mu.g.\cos\alpha.\sqrt{2}$$

$$a = g.(\sen\alpha - \mu.\sqrt{2} \cos\alpha)$$

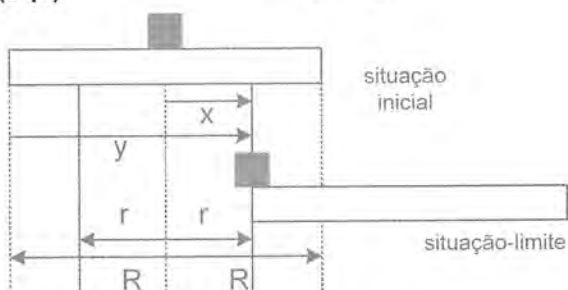
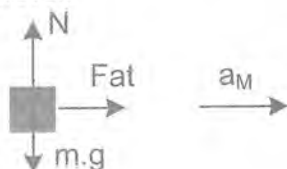


Questão 242 – Resposta: 37,5 N

Questão 243 - Solução

No referencial da Terra (inercial), a moeda se moverá com aceleração a_M , devido ao atrito cinético que recebe do cartão, durante o puxão do cartão. Assim, para a moeda de massa m , podemos escrever:

$$\begin{aligned} F_R &= m \cdot a_M \\ \text{Fat cin} &= m \cdot a_M \\ \mu \cdot N &= m \cdot a_M \\ \mu \cdot m \cdot g &= m \cdot a_M \\ \mathbf{a_M = \mu \cdot g} & \quad \text{(eq1)} \end{aligned}$$



A maior aceleração a com que se deve puxar o cartão em relação à Terra, a fim de que a moeda ainda caia dentro do copo, será aquela que fará a moeda percorrer uma distância $x = r$ (veja figura) no mesmo tempo T em que o cartão percorrer a distância crítica $y = R + r$, ambos em MUV, partindo do repouso.

Da cinemática, podemos escrever:

$$x = \frac{a_M \cdot T^2}{2} \Rightarrow \mathbf{r = \frac{a_M \cdot T^2}{2}} \quad \text{(eq2)}$$

$$y = \frac{a \cdot T^2}{2} \Rightarrow \mathbf{R + r = \frac{a \cdot T^2}{2}} \quad \text{(eq3)}$$

Dividindo eq3 por eq2, membro a membro, e usando eq1, vem:

$$\frac{R+r}{r} = \frac{a}{a_M} \Rightarrow a = \frac{(R+r).a_M}{r} = \frac{(R+r).\mu.g}{r} \Rightarrow a = \frac{(R+r).\mu.g}{r}$$

Na verdade, para qualquer $a > \frac{(R+r).\mu.g}{r}$, a moeda cairá dentro do copo.

Questão 244 – Resposta: alternativa E

Questão 245 - Solução

a) De acordo com a resolução da questão 59, página 20, o carretel rola para a esquerda para $\alpha > \arccos(r/R)$, rola para a direita para $\alpha < \arccos(r/R)$ e permanece imóvel sem rolar para $\alpha = \arccos(r/R)$.

b) A máxima tração para a qual o carretel permanece imóvel (nem escorrega nem rola) é aquela mantém o carretel na iminência de escorregar, com a tração T inclinada de α com a horizontal, tal que $\cos\alpha = r/R$ (para que o carretel também não role). Do equilíbrio vertical do carretel, vem:

$$N + T_y = P \Rightarrow N = P - T_y \Rightarrow N = m.g - T.\text{sen}\alpha \quad (\text{eq1})$$

Na horizontal, teremos: $T_x = F_{at}$, com $F_{at} = \mu.N$ (condição de iminência)

$$T.\cos\alpha = \mu.N = \mu.(m.g - T.\text{sen}\alpha)$$

$$T.\cos\alpha = \mu.m.g - \mu.T.\text{sen}\alpha \Rightarrow T = \frac{\mu.m.g}{\cos\alpha + \mu.\text{sen}\alpha}, \text{ com } \cos\alpha = r/R$$

c) Usando o mesmo artifício trigonométrico mostrado na 1ª resolução (solução analítica) da questão 235 (página 435), podemos mostrar que:

$$T = \frac{\mu.m.g}{\cos\alpha + \mu.\text{sen}\alpha} = \frac{\mu.m.g}{\sqrt{1+\mu^2}.\cos(\alpha-\beta)} \quad (\text{eq2}), \text{ com } \text{tg}\beta = \mu$$

Assim, o valor mínimo dessa tração que torna iminente o escorregamento do carretel ocorrerá para:

$$\cos(\alpha-\beta) = 1 \Rightarrow \alpha = \beta, \text{ com } \text{tg}\beta = \mu \Rightarrow \text{tg}\alpha = \mu$$

O valor mínimo procurado para essa tração em eq2, portanto, vale:

$$T_{\min} = \frac{\mu.m.g}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

O valor correspondente de r pode ser encontrado lembrando $\cos\alpha = r/R$ (condição para não haver rolamento) e que $\text{tg}\alpha = \mu$ (condição para tração mínima), fazendo uso da seguinte identidade trigonométrica:

$$\text{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \Rightarrow \mu^2 + 1 = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \Rightarrow r = \frac{R}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

Questão 246 - Solução

a) Durante a frenagem, a força de atrito $\leftarrow \text{Fat}$ é a força resultante horizontal responsável pela aceleração horizontal do bloco, assim, vem:

$$F_R = m.a \Rightarrow \text{Fat} = m.a \quad (\text{eq1})$$

O atrito cinético tem módulo dado por $\text{Fat} = \mu.N = \mu.m.g$ (eq2)

De eq1 e eq2, vem: $\mu.m.g = m.a \Rightarrow a = \mu.g$ (eq3)

Da equação de Torricelli do MUV, vem:

$$V^2 = V_0^2 - 2.a.D \Rightarrow 0 = V_0^2 - 2.a.D \Rightarrow a = \frac{V_0^2}{2D} \quad (\text{eq4})$$

De eq3 e eq4, vem: $a = \frac{V_0^2}{2D} = \mu.g \Rightarrow \mu = \frac{V_0^2}{2gD}$

b) O solo aplica sobre o bloco uma normal $N \uparrow$ e uma força de atrito $\text{Fat} \leftarrow$, portanto, a força total que o solo aplica sobre o bloco será a resultante vetorial entre elas:

$$F_R = \sqrt{N^2 + \text{Fat}^2}, \text{ com } N = m.g \text{ e } \text{Fat} = m.a = \frac{m.V_0^2}{2D}$$

$$F_R = \sqrt{(m.g)^2 + \left(\frac{m.V_0^2}{2D}\right)^2} \Rightarrow F_R = m.g \sqrt{1 + \left(\frac{V_0^2}{2.gD}\right)^2}$$

Questão 247 – Resposta: alternativa B

Dica: $V = V_0 - a.t$, com $V_0 = \omega.R$ e $a = \mu.g$

Questão 248 - Solução

O bloco (imóvel em relação à cunha) descreve uma trajetória retilínea horizontal em relação à Terra. Para decidir quais as forças que devem ser decompostas e o motivo, fazemos uso do Par de Eixos Padrão largamente explicado nas páginas 54 a 61.

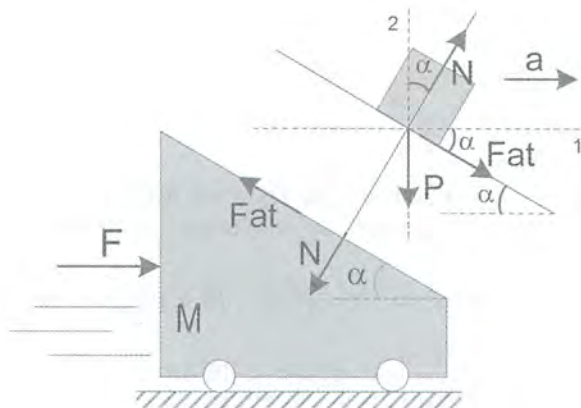
Assim, o eixo 1 será o eixo horizontal, o eixo 2 será o eixo vertical, e serão decompostas todas as forças que não estejam sobre esse par de eixos (ou seja, N e Fat).

Como a trajetória do corpo é retilínea (não tem concavidade), as forças devem se equilibrar ao longo do eixo 2, o que permite escrever:

$$N_y = \text{Fat}_y + P \Rightarrow N.\cos\alpha = \text{Fat}.\text{sen}\alpha + m.g \quad (\text{eq1})$$

Da condição de iminência de escorregar, vem: $\text{Fat} = \mu_E.N$ (eq2)

De eq1 e eq2, vem: $N.\cos\alpha = \mu_E.N.\text{sen}\alpha + m.g$ (eq3)



Na direção do eixo 1 (eixo horizontal), como de costume, escrevemos a 2ª lei de Newton:

$$F_R = m.a \Rightarrow Fat_x + N_x = m.a \Rightarrow \mu_E.N.\cos\alpha + N.\sen\alpha = m.a \quad (\text{eq4})$$

Isolando a normal N em eq3 e eq4 e igualando, vem:

$$N = \frac{m.g}{\cos\alpha - \mu_E.\sen\alpha} = \frac{m.a}{\sen\alpha + \mu_E.\cos\alpha} \Rightarrow a = g \cdot \left(\frac{\sen\alpha + \mu_E.\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu_E.\sen\alpha} \right)$$

Sendo $\sen\alpha = 0,6$, $\cos\alpha = 0,8$ e $\mu_E = 0,5$, vem: $a = 2g$

Nesse problema, bloco e cunha se moverão juntos, em relação à Terra, compartilhando dessa mesma aceleração $a = g/2 \rightarrow$ em relação à Terra. A máxima aceleração horizontal que pode ser compartilhada por eles vale $a = g/2$.

Para uma aceleração superior a esta, o bloco aceleraria ladeira acima e os corpos teriam acelerações diferentes em relação à Terra.

Assim, a máxima força externa $F \rightarrow$ para a qual o bloco ainda permanece em repouso em relação à cunha pode ser determinada tratando o bloco e a cunha como se fossem um único corpo de massa $m+M$:

$$F_R = (M+m).a \Rightarrow F = (M+m).g/2$$

O leitor deve ter ficado tentado a resolver esse problema no referencial da cunha. A resolução de problemas de Dinâmica no referencial acelerado é exatamente o tema central desse livro e será abordado nos capítulos 4 e 5.

Até lá, precisaremos treinar exaustivamente a resolução de problemas no referencial da Terra mesmo (referencial inercial) para melhor compreender, posteriormente, o referencial acelerado.

Questão 249 – Resposta (veja a resolução das questões 225 e 226)

$$t = \sqrt{\frac{2L}{\mu \cdot \left(1 + \frac{m}{M}\right) \cdot g \cdot \cos \alpha}}$$

Questão 250 – Solução

a) O sabonete dará a volta ao redor da Terra em MCU sob ação exclusiva do peso do sabonete, que fará o papel de resultante centrípeta. Assim, vem:

$$F_{R_{ctp}} = m \cdot g \Rightarrow \frac{m \cdot v^2}{R} = m \cdot g \Rightarrow v = \sqrt{R \cdot g} = \sqrt{6,4 \cdot 10^6 \cdot 10} = 8000 \text{ m/s} = 8 \text{ km/s}$$

$$b) T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{V} = \frac{2 \times 3,14 \times 6400 \text{ km}}{8 \text{ km/s}} = 5024 \text{ s} = 1 \text{ h} 24 \text{ min}$$

Questão 251 – Solução

a) Como a velocidade do móvel é tangente à trajetória em cada instante, e a aceleração resultante numa curva tem que apontar para dentro da curva, a partícula só pode estar passando pela posição **a**;

b) A componente da aceleração resultante que aponta na direção perpendicular à velocidade chama-se aceleração centrípeta. Assim, vem:

$$a_{ctp} = a \times \sin 30^\circ = 24 \times (1/2) = 12 \text{ m/s}^2$$

c) Usando o resultando do item b, vem:

$$a_{ctp} = \frac{V^2}{R} \Rightarrow 12 = \frac{V^2}{3} \Rightarrow V = 6 \text{ m/s}$$

d) A componente da aceleração resultante que aponta na mesma direção da velocidade é a componente tangencial. Esta componente está apontando a favor da velocidade, o que indica que o movimento é acelerado naquela ocasião, ou seja, o módulo da velocidade é crescente naquele instante.

Questão 252 – Solução

a) a velocidade do móvel

Comparando com a função geral $S = S_0 + V_0 \cdot t + (a/2) \cdot t^2$, temos que:

$$S_0 = 2 \text{ m}, V_0 = -8 \text{ m/s}, a/2 = 3 \Rightarrow a = 6 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Assim, } V = V_0 + a \cdot t \Rightarrow V = -8 + 6 \cdot t$$

$$\text{Para } t = 2 \text{ s, temos que } V = -8 + 6 \cdot t = -8 + 6 \times 2 \Rightarrow V = 4 \text{ m/s}$$

b) a intensidade da componente tangencial da força resultante

a aceleração escalar é o módulo da aceleração tangencial a cada instante:

$a_{tg} = a = 6 \text{ m/s}^2$, conforme determinamos inicialmente, a partir da função horária.

Aplicando a 2ª lei de Newton na direção tangencial, vem:

$$F_{tg} = m \cdot a_{tg} \Rightarrow F_{tg} = 10 \times 6 \Rightarrow F_{tg} = 60 \text{ N}$$

c) a intensidade da componente centrípeta da força resultante

$a_{CTP} = V^2 / R$, com $V = 4 \text{ m/s}$ (em $t = 2 \text{ s}$) e $R = 2 \text{ m}$, assim:

$$a_{CTP} = V^2 / R = 4^2 / 2 \Rightarrow a_{CTP} = 8 \text{ m/s}^2$$

Aplicando a 2ª lei de Newton na direção tangencial, vem:

$$F_{CTP} = m \cdot a_{CTP} \Rightarrow F_{CTP} = 10 \times 8 \Rightarrow F_{CTP} = 80 \text{ N}$$

d) a intensidade da força resultante

Achando a resultante das duas componentes perpendiculares entre si, pelo teorema de Pitágoras, vem:

$$(F_R)^2 = (F_{tg})^2 + (F_{CTP})^2 \Rightarrow (F_R)^2 = (60)^2 + (80)^2 \Rightarrow F_R = 100 \text{ N}$$

Questão 253 – Resposta

$$R = \frac{V^2}{a \cdot \operatorname{sen} \alpha}$$

Questão 254 – Solução

a) Escrevendo a segunda lei de Newton na direção radial (centrípeta), vem:

$$F_{R_{ctp}} = F_{in} - F_{out} = \frac{m \cdot V^2}{R}$$

No ponto C, temos: $N_C - m \cdot g = \frac{m \cdot V_C^2}{R}$ (eq1)

No ponto A, temos: $N_A + m \cdot g - 0 = \frac{m \cdot V_A^2}{R}$ (eq2)

No ponto B, temos: $N_B - 0 = \frac{m \cdot V_B^2}{R}$ (eq3)

No ponto D, temos: $N_D - 0 = \frac{m \cdot V_D^2}{R}$ (eq4)

b) Para que a moto dar a volta completa sem perder o contato, ela precisa tocar o ponto A mais alto do globo. Assim, da relação eq2, vem:

$$N_A \geq 0 \Rightarrow \frac{m \cdot V_A^2}{R} - m \cdot g \geq 0 \Rightarrow V_A \geq \sqrt{R \cdot g} \quad (\text{eq5})$$

De acordo com eq5, a velocidade mínima que o motoqueiro deve ter para conseguir passar pelo ponto mais alto do globo e conseguir dar a volta completa é

$$V_{min} = \sqrt{R \cdot g}$$

Se a velocidade for menor do que essa, a moto perde o contato com o globo antes de atingir o ponto A, entra numa trajetória parabólica e cairá, sofrendo um acidente.

Assim, vem: $V_{\min} = \sqrt{R.g} = \sqrt{3,6 \times 10} \Rightarrow V_{\min} = 6 \text{ m/s}$

c) Substituindo os valores em eq2, vem:

$$N_A + m.g - 0 = \frac{m.V_A^2}{R}$$

$$N_A + 400.(10) = \frac{400.(12)^2}{3,6} \Rightarrow N_A = 12.000 \text{ N}$$

Questão 255 – Resposta: alternativa D

Dica: Leia a teoria das página 104 e 105

Questão 256 – Resposta: alternativa E

Dica: Leia a teoria das página 104 e 105

Questão 257 – Resposta: alternativa D

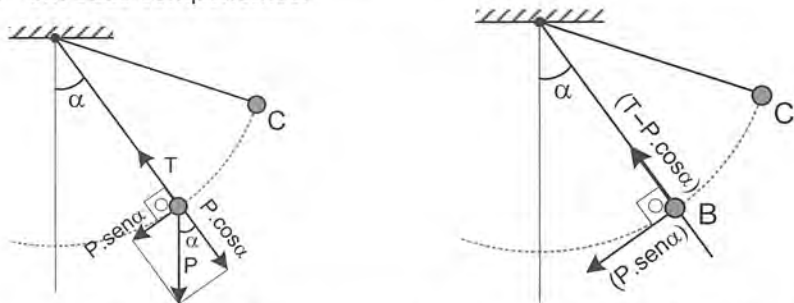
Dica: Leia a teoria das página 104 e 105

Questão 258 – Resposta: alternativa A

Dica: Leia a teoria das página 104 e 105

Questão 259 – Solução

Escrevendo Apenas a tração T e o peso P agem sobre a bolinha do pendulo. Usando o par de eixos padrão (tangencial e radial), decomposmos a força peso P em suas componentes:

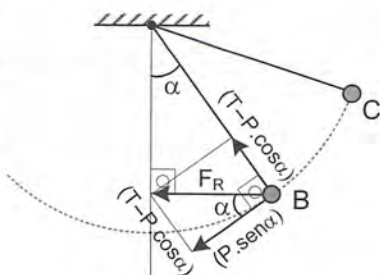


Em seguida, identificamos a componente tangencial ($F_{tg} = P.\text{sen}\alpha$) da força resultante F_R e a componente centrípeta ($F_{ctp} = T - P.\text{cos}\alpha$) da força resultante F_R . Finalmente, encontramos a força resultante agindo na bolinha:

Se a força resultante F_R aponta na direção horizontal, o triângulo retângulo nos permite escrever:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{T - P \cdot \cos \alpha}{P \cdot \operatorname{sen} \alpha}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{T - P \cdot \cos \alpha}{P \cdot \operatorname{sen} \alpha} \Rightarrow T = P \cdot \sec \alpha$$



Resposta: alternativa d

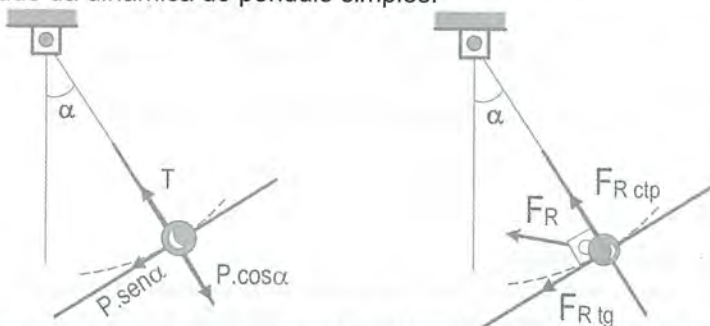
Questão 260 – Resposta

$$T_A = 12 \text{ N}, T_B = 46 \text{ N}$$

Dica: Aplicação direta da equação geral do pêndulo simples, página 103

Questão 261 – Solução

A figura mostra a decomposição de forças padrão (eixo radial e centrípeto) para o estudo da dinâmica do pêndulo simples.



A segunda lei de Newton na direção radial (centrípeta) permite escrever:

$$F_{R\text{ctp}} = T - P \cdot \cos \alpha = \frac{m \cdot V^2}{R} = \frac{6 \cdot (5)^2}{3,75} = 40 \text{ N}$$

$$F_{R\text{ctp}} = 40 \text{ N}$$

Na direção tangencial, a força resultante tangencial vale:

$$F_{R\text{tg}} = P \cdot \operatorname{sen} \alpha = 60 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = 60 \cdot 0,5 = 30 \text{ N}$$

$$F_{R\text{tg}} = 30 \text{ N}$$

Assim, a força resultante agindo na bola é dada pelo teorema de Pitágoras:

$$(FR)^2 = (FR\text{ctp})^2 + (FR\text{tg})^2$$

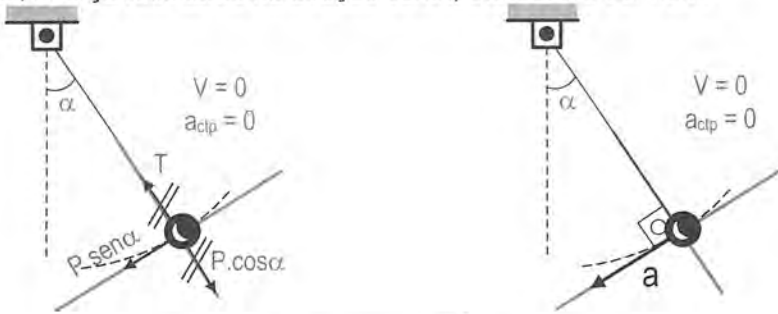
$$(FR)^2 = (40)^2 + (30)^2$$

$$F_R = 50 \text{ N}$$

Resposta: Alternativa b

Questão 262 - Solução

Quando a bola atingir a extremidade esquerda ou direita, ela momentaneamente terá velocidade $V = 0$ e, conseqüentemente, $a_{ctp} = V^2 / R = 0$ naquele instante. Ora, o fato de, momentaneamente, apresentar $a_{ctp} = 0$ implica que, naquele instante, a força resultante na direção centrípeta deverá ser nula:



$$F_{ctp} = T - P \cdot \cos \alpha = m \cdot \frac{V^2}{R}, \text{ com } V = 0$$

$$T - P \cdot \cos \alpha = 0 \Rightarrow T = P \cdot \cos \alpha$$

Assim, quando a esfera parar a fim de inverter o sentido do movimento, a força resultante sobre ela será apenas a componente tangencial $P \cdot \sin \alpha$, que causará uma aceleração resultante também tangencial de módulo:

$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{P \cdot \sin \alpha}{m} = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m} = g \cdot \sin \alpha$$

Questão 263 - Solução

Inicialmente, temos um problema de **equilíbrio estático**, onde qualquer par de eixos pode ser usado para resolver a questão. Escolhemos, portanto, o par de eixos que simplifique nossos cálculos. Devido à simetria do triângulo equilátero (Figura 127), a tração nos dois fios tem o mesmo valor T_A dada por:

$$T_A \cdot \cos 30^\circ + T_A \cdot \cos 30^\circ = P$$

$$2 \cdot T_A \cdot \cos 30^\circ = P \Rightarrow T_A = P / (2 \cdot \cos 30^\circ)$$

Em seguida, o fio 1 será cortado. O sistema se comportará como um pêndulo simples, momentaneamente em repouso ($v = 0$), na sua posição extrema, onde ele pára a fim de inverter o sentido do movimento.

Logo após o corte do fio, portanto, o pêndulo **já estará acelerado**, visto que ele terá aceleração tangencial, causada pela componente tangencial do pêndulo, $P \cdot \sin 30^\circ$. Haverá equilíbrio momentâneo apenas na direção radial (centrípeta), visto que, momentaneamente, ainda não há velocidade ($v=0$), portanto, momentaneamente ainda não haverá aceleração centrípeta.

A segunda lei de Newton na direção centrípeta, logo após o corte do fio (Figura 128), permite escrever:

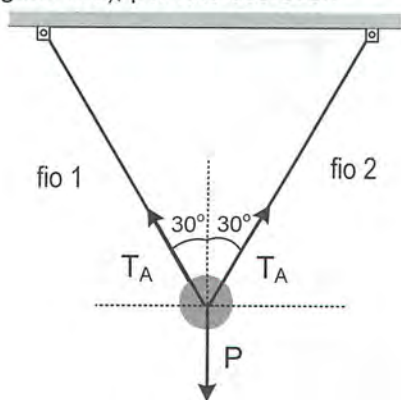


Figura 127

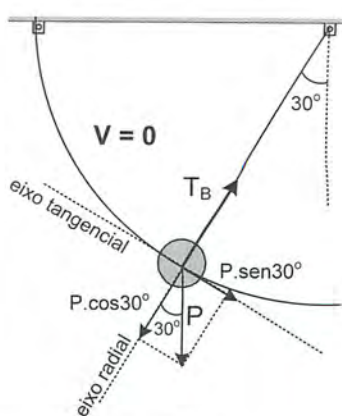


Figura 128

$$FR_{\text{ctp}} = F_{\text{in}} - F_{\text{out}} = M \cdot V^2 / R$$

$$FR_{\text{ctp}} = T_B - P \cdot \cos(30^\circ) = M \cdot V^2 / R, \text{ com } V = 0. \text{ Assim:}$$

$$FR_{\text{ctp}} = T_B - P \cdot \cos(30^\circ) = 0 \Rightarrow T_B = P \cdot \cos(30^\circ)$$

Assim, temos que:

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{\frac{P}{2 \cdot \cos 30^\circ}}{P \cdot \cos 30^\circ} = \frac{1}{2 \cdot \cos^2 30^\circ} = \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2 \times \frac{3}{4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Resposta: Alternativa E

Questão 264 – Resposta: Alternativa C (Veja a questão 263)

Questão 265 – Resposta: Alternativa B

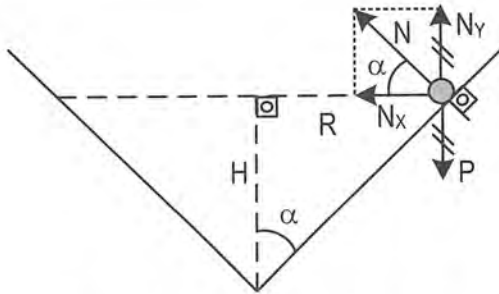
Questão 266 - Solução

A esfera descreve um MCU num plano horizontal. Sobre ela agem apenas duas forças: a normal N e o peso P . Seguiremos o diagrama de forças-padrão para esse tipo de movimento, conforme explicado na eq8 e eq9, página 107.

Como, durante o MCU, a esfera só apresenta aceleração radial (a_{ctp}), estando em equilíbrio na vertical, podemos escrever:

$$\text{Na direção radial: } FR_{\text{ctp}} = N_x = m \cdot a_{\text{ctp}} \Rightarrow N \cdot \cos \alpha = m \cdot \frac{V^2}{R} \quad (\text{eq1})$$

$$\text{Na direção vertical (equilíbrio): } N_y = P \Rightarrow N \cdot \sin \alpha = m \cdot g \quad (\text{eq2})$$



Do triângulo retângulo na figura anterior, podemos determinar $\text{tg}\alpha$ pela geometria:

$$\text{Tg}\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{R}{H} \quad (\text{eq3})$$

Dividindo eq2 por eq1, e usando eq3, vem:

$$\frac{N \cdot \text{sen}\alpha}{N \cdot \text{cos}\alpha} = \frac{m \cdot g}{m \cdot V^2} = \frac{R \cdot g}{V^2} \Rightarrow \text{Tg}\alpha = \frac{R \cdot g}{V^2} = \frac{R}{H} \Rightarrow V = \sqrt{g \cdot H}$$

Resposta: alternativa a

Questão 267 – Resposta: Alternativa d

Questão 268 - Solução

Apenas duas forças agem num pêndulo: a tração T e o peso P.



No caso do pêndulo cônico, a resultante centrípeta é dada por:

$$FR_{\text{ctp}} = F_{\text{in}} - F_{\text{out}} = (T \cdot \text{sen}\alpha - 0) = T \cdot \text{sen}\alpha = m \cdot (\omega^2 \cdot R) \quad (\text{eq1})$$

Na direção vertical, podemos escrever: $T \cdot \text{cos}\alpha = m \cdot g$ (eq2)

$$\text{Dividindo eq1 por eq2, vem: } \text{tg}\alpha = \frac{\omega^2 \cdot R}{g} \quad (\text{eq3})$$

O triângulo retângulo permite determinar a $\text{tg}\alpha$: $\text{tg}\alpha = R / H$ (eq4)

Das relações eq3 e eq4, podemos escrever:

$$\text{tg}\alpha = \frac{\omega^2 \cdot R}{g} = \frac{R}{H}, \text{ Cancelando } R, \text{ vem: } \omega = \sqrt{\frac{g}{H}}$$

Resposta – alternativa a

Questão 269 - Solução

A partir do resultado da questão 268, vem :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{H}} \Rightarrow \omega^2 \cdot H = g = \text{constante (g não muda, concorda?)}$$

Assim, podemos dizer que:

$$\omega_{\text{antes}}^2 \cdot H_{\text{antes}} = \omega_{\text{depois}}^2 \cdot H_{\text{depois}} = g = \text{constante}$$

$$(6)^2 \cdot 1 = (3)^2 \cdot H_{\text{depois}} \Rightarrow H_{\text{depois}} = 4 \text{ m}$$

Resposta: alternativa c

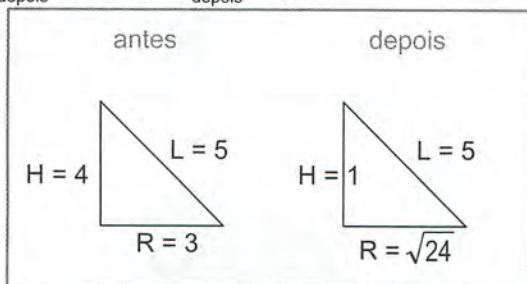
Questão 270 - Solução

Aproveitando a resolução da questão 269, temos:

$$\omega_{\text{antes}}^2 \cdot H_{\text{antes}} = \omega_{\text{depois}}^2 \cdot H_{\text{depois}} = g = \text{constante}$$

$$\text{Antes: } 2,5 \times H_{\text{antes}} = 10 \Rightarrow H_{\text{antes}} = 4 \text{ m}$$

$$\text{Depois: } 10 \times H_{\text{depois}} = 10 \Rightarrow H_{\text{depois}} = 1 \text{ m}$$



Assim, o pêndulo sofreu uma variação de altura $\Delta H = 4 - 1 = 3 \text{ m}$

Questão 271 - Resposta: Alternativa A - (Dica: Veja figura 46, página 109)

Questão 272 - Solução

Apenas duas forças agem num pêndulo: a tração T e o peso P . No caso do pêndulo cônico, a resultante centrípeta é dada por:

$$F_R \text{ ctp} = F_{\text{in}} - F_{\text{out}} = (T \cdot \text{sen}\alpha - 0) = T \cdot \text{sen}\alpha = m \cdot (\omega^2 \cdot R) \text{ (eq1)}$$

$$\text{Na direção vertical, podemos escrever: } T \cdot \text{cos}\alpha = m \cdot g \text{ (eq2)}$$

A caixa sobre a mesa está em equilíbrio e na iminência de escorregar. Assim, podemos escrever:

Condição de equilíbrio da caixa: Vertical: $T \cdot \text{sen} \alpha + N = M \cdot g$ (eq3)

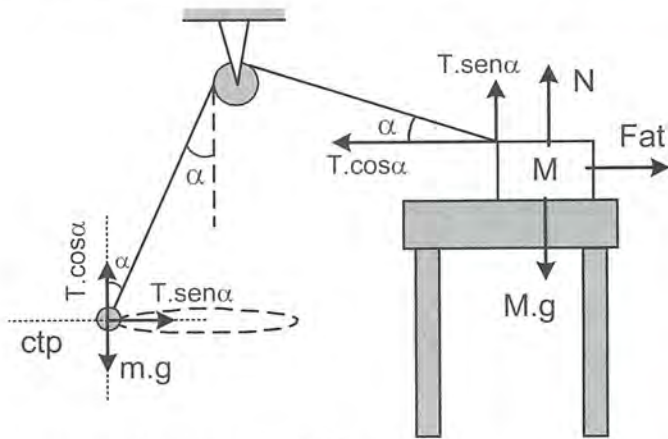
Condição de equilíbrio da caixa: Horizontal: $T \cdot \text{cos} \alpha = \text{Fat}$ (eq4)

Condição de iminência: $\text{Fat} = \text{Fat}_{\text{max}}$: $\text{Fat} = \mu \cdot N$ (eq5)

Note que a tração T que age na caixa é a mesma tração T que age no pêndulo, visto que se trata do mesmo fio ideal.

Substituindo eq1 em eq3, vem:

$$T \cdot \text{sen} \alpha + N = M \cdot g \Rightarrow m \cdot (\omega^2 \cdot R) + N = M \cdot g \Rightarrow N = M \cdot g - m \cdot (\omega^2 \cdot R) \quad (\text{eq6})$$



Substituindo eq6, eq2 e eq4 na relação eq5, vem:

$$\text{Fat} = \mu \cdot N$$

$$T \cdot \text{cos} \alpha = \mu \cdot N$$

$$T \cdot \text{cos} \alpha = \mu \cdot (M \cdot g - m \cdot \omega^2 \cdot R)$$

$$m \cdot g = \mu \cdot (M \cdot g - m \cdot \omega^2 \cdot R) \Rightarrow \mu = \frac{m \cdot g}{M \cdot g - m \cdot \omega^2 \cdot R}$$

$$\mu = \frac{m \cdot g}{M \cdot g - m \cdot \omega^2 \cdot R} = \frac{2 \times 10}{2,4 \times 10 - 2 \times 2^2 \times 0,5} = \frac{20}{20} = 1$$

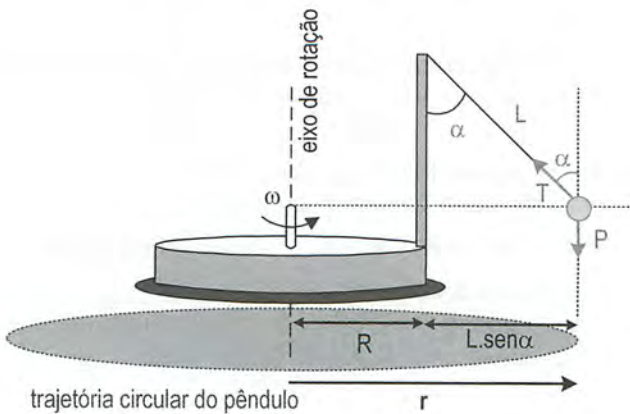
Resposta: alternativa E

Questão 273 - Solução

Apenas duas forças agem num pêndulo: a tração T e o peso P . No caso do pêndulo cônico, a resultante centrípeta é dada por:

$$F_R \text{ ctp} = F_{\text{in}} - F_{\text{out}} = (T \cdot \text{sen} \alpha - 0) = T \cdot \text{sen} \alpha = m \cdot (\omega^2 \cdot r) \quad (\text{eq1})$$

Na direção vertical, podemos escrever: $T \cdot \text{cos} \alpha = m \cdot g$ (eq2)



A esfera do pêndulo descreve um movimento circular de raio r em torno do eixo de rotação, tal que:

$$r = R + L \cdot \sin \alpha = 1,5 + 10 \times 0,6 = 7,5 \text{ m} \Rightarrow \boxed{r = 7,5 \text{ m}}$$

Dividindo a equação eq1 por eq2, vem:

$$\tan \alpha = \frac{\omega^2 \cdot r}{g} \Rightarrow \frac{0,6}{0,8} = \frac{\omega^2 \cdot 7,5}{10} \Rightarrow \boxed{\omega = 1 \text{ rad/s}}$$

Questão 274 - Solução

Resolvendo, inicialmente, o sistema de duas massas e uma polia, aplicando a segunda lei de Newton a cada caixa m_1 e m_2 , vem:

$$m_1 \cdot g - T = m_1 \cdot a \Rightarrow 30 - T = 3 \cdot a$$

$$T - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a \Rightarrow T - 10 = 1 \cdot a$$

$$a = 5 \text{ m/s}^2, T = 15 \text{ N}$$

Em seguida, sendo a polia A ideal (massa nula), temos que:

$$T' = 2T \Rightarrow T' = 2 \cdot 15 \Rightarrow$$

$$\boxed{T' = 30 \text{ N}}$$

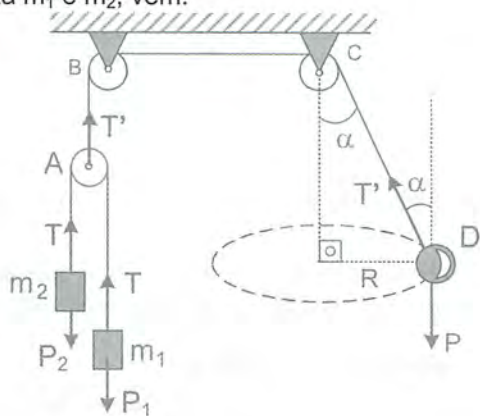
Achada a tração T' no fio CD, passamos a resolver o pêndulo cônico, conforme aprendemos na página 106, Figura 42.

Na direção radial vem:

$$F_{R \text{ ctp}} = F_{in} - F_{out} = m \cdot a_{\text{ctp}} \Rightarrow T' \cdot \sin \alpha - 0 = m \cdot \omega^2 \cdot R, \text{ com } R = CD \cdot \sin \alpha$$

$$T' \cdot \sin \alpha = m \cdot \omega^2 \cdot (CD \cdot \sin \alpha) \Rightarrow T' = m \cdot \omega^2 \cdot (CD) \Rightarrow$$

$$30 = m \cdot (5)^2 \cdot (0,8) \Rightarrow \boxed{m = 1,5 \text{ kg}}$$



Questão 275 - Solução

As esferas podem move-se ao longo do arco, no plano vertical, sem atrito. A força normal N que o aro exerce sobre as esferas é normal ao aro e, portanto, radial, passando pelo centro.

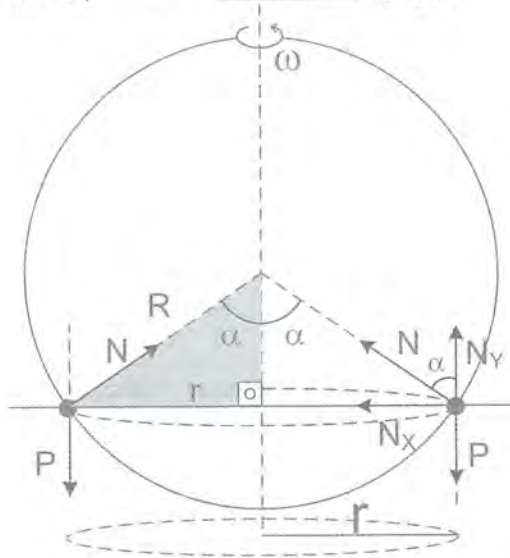
Cada esfera descreve um MCU no plano horizontal de raio r , que será equacionado conforme aprendemos na página 106, Figura 42.

Na vertical, podemos escrever: $N_y = P \Rightarrow N \cdot \cos \alpha = m \cdot g$ (eq1)

Na direção radial, podemos escrever:

$F_R \text{ ctp} = F_{in} - F_{out} = m \cdot a_{ctp} \Rightarrow N_x - 0 = m \cdot \omega^2 \cdot r$, com $r = R \cdot \sin \alpha$

$N \cdot \sin \alpha = m \cdot \omega^2 \cdot (R \cdot \sin \alpha) \Rightarrow N = m \cdot \omega^2 \cdot R$ (eq2)



Substituindo eq2 em eq1, vem: $m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \cos \alpha = m \cdot g \Rightarrow \cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 \cdot R}$

O resultado obtido acima mostra que, se ω tende a infinito, $\cos \alpha$ tenderá a zero, o que implica que α tenderá a 90°

Questão 276 - Solução

Sobre a bolinha agem as trações T_1 e T_2 , bem como o seu peso P . A bolinha descreve um MCU no plano horizontal, que será equacionado conforme aprendemos na página 106, Figura 42:

Equilíbrio vertical: $T_1 \cdot \cos \alpha = m \cdot g + T_2 \cdot \sin \alpha$ (eq1)

Na direção radial, podemos escrever:

$$FR_{ctp} = F_{in} - F_{out} = m \cdot a_{ctp}$$

$$T_1 \cdot \text{sen} \alpha + T_2 \cdot \text{cos} \alpha - 0 = m \cdot \omega \cdot R \quad (\text{eq2})$$

Multiplicando eq1 por $\text{cos} \alpha$, eq2 por $\text{sen} \alpha$ e somando, membro a membro, vem

$$\begin{aligned} T_1 \cdot \text{cos}^2 \alpha - T_2 \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{cos} \alpha &= m \cdot g \cdot \text{cos} \alpha \\ T_1 \cdot \text{sen}^2 \alpha + T_2 \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{cos} \alpha - 0 &= m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \text{sen} \alpha \end{aligned}$$

$$T_1 = m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \text{sen} \alpha + m \cdot g \cdot \text{cos} \alpha$$

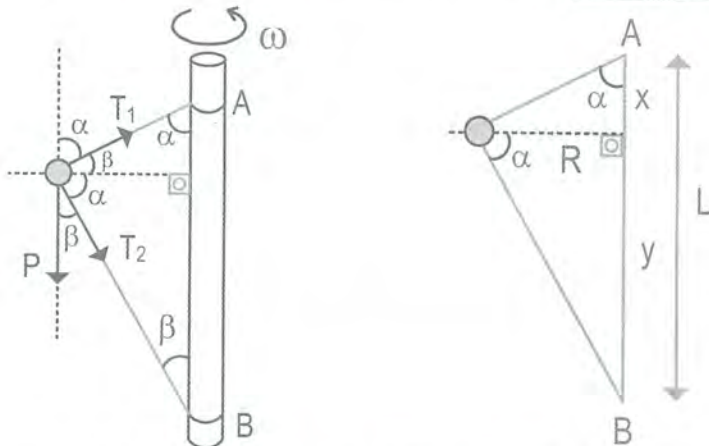
Multiplicando eq1 por $-\text{sen} \alpha$, eq2 por $+\text{cos} \alpha$ e somando, membro a membro, vem:

$$\begin{aligned} T_1 \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{cos} \alpha + T_2 \cdot \text{cos}^2 \alpha - 0 &= m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \text{cos} \alpha \\ -T_1 \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{cos} \alpha + T_2 \cdot \text{sen}^2 \alpha &= -m \cdot g \cdot \text{sen} \alpha \end{aligned}$$

$$T_2 = m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \text{cos} \alpha - m \cdot g \cdot \text{sen} \alpha$$

Após termos determinado os valores das trações T_1 e T_2 , podemos determinar o valor de ω que tornaria o fio inferior frouxo, isto é, que anularia o valor da tração T_2 :

$$T_2 = m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \text{cos} \alpha - m \cdot g \cdot \text{sen} \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g \cdot \text{tg} \alpha}{R}}$$



Como o raio R da trajetória, contudo, não foi fornecido no problema, como determinar esse raio R em função da distância $AB = L$ e do ângulo α ?

$$\text{tg} \alpha = \frac{R}{x} \Rightarrow x = R \cdot \text{cotg} \alpha, \quad \text{tg} \alpha = \frac{y}{R} \Rightarrow y = R \cdot \text{tg} \alpha$$

$$L = x + y = R \cdot \text{cotg} \alpha + R \cdot \text{tg} \alpha \quad \Rightarrow \quad R = \frac{L}{\text{tg} \alpha + \text{cotg} \alpha}$$

Questão 277 - Solução

Apenas duas forças agem no carro (veja figura adiante): a normal N e o peso P , visto que o enunciado afirma que a curva está sendo traçada sem a ajuda da força de atrito, graças à inclinação da pista. Trata-se de um MCU no plano horizontal, portanto, seguiremos o diagrama de forças-padrão para esse tipo de movimento, conforme explicado na eq8 e eq9, página 107 :

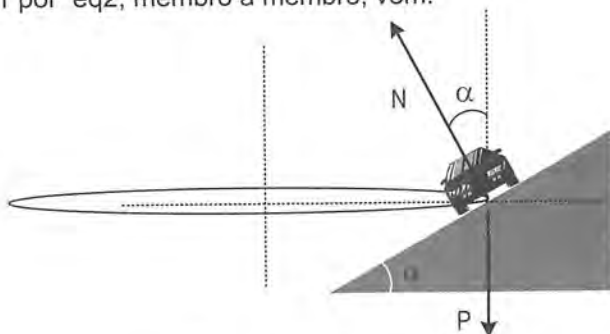
A resultante centrípeta é dada por:

$$F_{R \text{ ctp}} = F_{in} - F_{out} = (N_x - 0) = N \cdot \sin \alpha = m \cdot (V^2 / R) \quad (\text{eq1})$$

Na direção vertical, podemos escrever: $N_y = N \cdot \cos \alpha = m \cdot g \quad (\text{eq2})$

Com $V = 180 \text{ km/h} = 50 \text{ m/s}$ e $R = 820 \text{ m}$

Dividindo eq1 por eq2, membro a membro, vem:



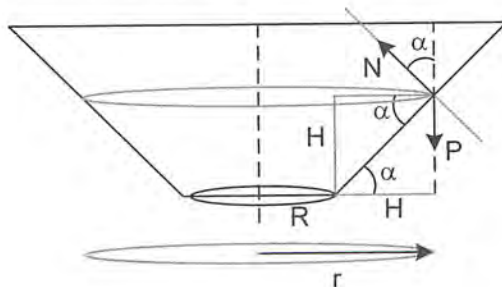
$$\tan \alpha = \frac{V^2}{R \cdot g} = \frac{50^2}{820 \times 10} = \frac{2500}{8200} = 0,304$$

Consultando a tabela trigonométrica fornecida na questão, vemos que $\tan 17^\circ = 0,306$ e, portanto, $\alpha = 17^\circ$.

Resposta: alternativa D

Questão 278 - Solução

Trata-se de um MCU no plano horizontal, portanto, seguiremos o diagrama de forças-padrão para esse tipo de movimento, conforme explicado na eq8 e eq9, página 107:



A resultante centrípeta agindo na bolinha é dada por :

$$F_{R \text{ ctp}} = F_{in} - F_{out} = (N_x - 0) = N \cdot \text{sen} \alpha = m \cdot \omega^2 \cdot r \quad (\text{eq1})$$

Note que r é o raio da trajetória circular descrita pela bolinha, sendo dado por $r = R + H$ (eq2)

Na direção vertical, a bolinha se encontra em equilíbrio, o que nos permite escrever: $N_y = N \cdot \text{cos} \alpha = m \cdot g$ (eq3)

Note que, sendo $\alpha = 45^\circ$, os triângulos retângulos que aparecem na figura anterior são isósceles, de lado H .

Dividindo eq1 por eq3 e considerando eq2, vem:

$$\frac{N \cdot \text{sen} \alpha}{N \cdot \text{cos} \alpha} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot r}{m \cdot g}, \text{ sendo } \alpha = 45^\circ, \text{ vem: } \omega^2 \cdot r = g$$

$$\omega^2 \cdot r = g \Rightarrow \omega^2 \cdot (R + H) = g \Rightarrow H = \frac{g}{\omega^2} - R$$

Assim, na situação inicial, temos $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $\omega = 10 \text{ rad/s}$, donde:

$$H_{\text{inicial}} = \frac{g}{\omega^2} - R = \frac{10}{(10)^2} - R = \frac{10}{100} - R$$

Na situação final, temos $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $\omega = 20 \text{ rad/s}$, donde:

$$H_{\text{final}} = \frac{g}{\omega^2} - R = \frac{10}{(20)^2} - R = \frac{10}{400} - R$$

Assim, vemos que $H_{\text{final}} < H_{\text{inicial}}$, a bola **desce** quando ω é duplicada.

$$|\Delta H| = H_{\text{inicial}} - H_{\text{final}} = \left(\frac{10}{100} - R \right) - \left(\frac{10}{400} - R \right) = 0,075 \text{ m} = 7,5 \text{ cm}$$

Questão 279 - Solução

O diagrama abaixo mostra as forças que agem na vasilha, quando a bolinha passa pela extremidade direita da sua trajetória circular.

Do equilíbrio vertical da vasilha, podemos escrever:

$$N' = M \cdot g + N_y = M \cdot g + N \cdot \text{cos} \alpha$$

Considerando a relação eq3 da resolução da questão 278, podemos escrever:

$$N' = M \cdot g + N \cdot \text{cos} \alpha \Rightarrow N' = M \cdot g + m \cdot g \quad (\text{eq4})$$

Do equilíbrio horizontal da vasilha, podemos escrever: $N_x = F_{at}$ (eq5)

Como desejamos determinar o mínimo coeficiente de atrito que impede o escorregamento, conclui-se que a vasilha se encontra na iminência de escorregar, o que permite escrever: $F_{at} = \mu \cdot N'$ (eq6)

A partir das relações eq4, eq5 e eq6, vem:

$$N_x = F_{at} = \mu \cdot N' \Rightarrow N \cdot \text{sen} \alpha = \mu \cdot N' \Rightarrow N \cdot \text{sen} \alpha = \mu \cdot (M + m) \cdot g$$

Considerando a relação eq3 da resolução da questão 278, sendo $\alpha = 45^\circ$:

$$N \cdot \text{sen} \alpha = N \cdot \text{cos} \alpha = m \cdot g = \mu \cdot (M + m) \cdot g \Rightarrow \mu = \frac{m}{M + m}$$

Questão 280 - Solução

No referencial da Terra (inercial), a pessoa no interior do rotor descreve um movimento circular no plano horizontal, portanto, seguiremos o diagrama de forças-padrão para esse tipo de movimento, conforme explicado na eq8 e eq9, página 107:

A resultante centrípeta agindo na pessoa é dada por:

$$F_{R \text{ clp}} = F_{in} - F_{out} = (N - 0) = m \cdot \omega^2 R \quad (\text{eq1})$$

Na direção vertical, a pessoa não tem aceleração (se encontra em equilíbrio), o que nos permite escrever:

$$F_{at} = P \Rightarrow F_{at} = m \cdot g \quad (\text{eq2})$$

A força de atrito é limitada, sendo restrita ao intervalo:

$$F_{at} \leq \mu_E \cdot N \quad (\text{eq3})$$

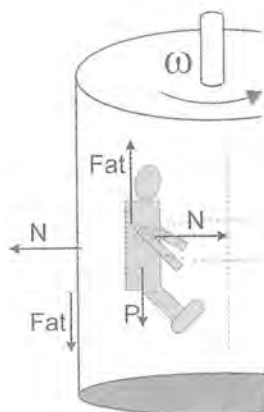
Substituindo eq1 e eq2 em eq3, vem:

$$F_{at} \leq \mu_E \cdot N \Rightarrow m \cdot g \leq \mu_E \cdot m \cdot \omega^2 R$$

$$g \leq \mu_E \cdot \omega^2 R \quad (\text{eq4})$$

A relação eq4 é a condição geral para que o garoto acompanhe o movimento do rotor sem escorregar para baixo. A partir de eq4, tanto podemos determinar ω_{\min} , como também podemos determinar $\mu_{E \min}$, R_{\min} ou g_{\max} de tal forma que o garoto gire junto com o rotor sem escorregar. Isolando ω em eq4, vem:

$$\omega^2 \geq \frac{g}{\mu_E \cdot R} \Rightarrow \omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{\mu_E \cdot R}}$$



Questão 281 - Resposta

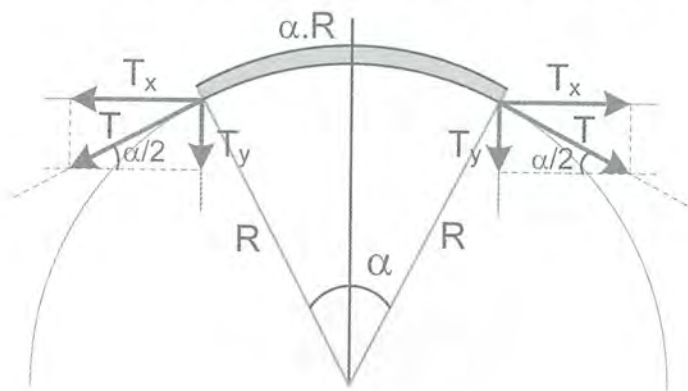
$$T_1 = 20 \text{ N}, T_2 = 18 \text{ N}, T_4 = 8 \text{ N}$$

Questão 282 - Solução

Se a corda tem comprimento total L e massa m , sua densidade linear é dada por:

$$\lambda = \frac{m}{L}$$

Um pedaço de corrente que subtenda um ângulo central α (veja figura) terá um comprimento $\Delta L = \alpha \cdot R$ e uma massa $\Delta m = \lambda \cdot \Delta L = (m/L) \cdot \alpha \cdot R$



Observando a figura temos: $F_{R\text{CTP}} = 2T_y = (2T) \cdot \text{sen}(\alpha/2)$

Uma vez que o ângulo α é pequeno, temos: $\text{sen}(\alpha/2) \cong \alpha/2$. Assim, vem:

$$F_{R\text{CTP}} = 2T_y = (2T) \cdot (\alpha/2)$$

Escrevendo a segunda lei de Newton para esse pequeno segmento da corrente representado na figura, vem:

$$2T \frac{\alpha}{2} = \left(\frac{m}{L} \alpha R \right) \cdot \omega^2 R \quad \Rightarrow \quad T = \frac{m}{L} \omega^2 R^2 \quad (\text{eq1})$$

Sendo $L = 2\pi \cdot R$ e $\omega = 2\pi \cdot f$, vem:

$$T = \frac{m}{L} \omega^2 R^2 = \frac{m}{L} (2\pi f)^2 \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad T = m \cdot L \cdot f^2 \quad (\text{eq2})$$

Substituindo $m = 40 \cdot 10^{-3}$ kg, $L = 0,6$ m e $f = 50$ Hz, vem:

$$T = m \cdot L \cdot f^2 = 40 \cdot 10^{-3} \times 0,6 \times 50^2 \quad \Rightarrow \quad T = 60 \text{ N}$$

Questão 283 - Solução

Seja $L_0 = 2\pi \cdot r$ o comprimento inicial do aro circular quando em repouso, e $L = 2\pi \cdot R$ o comprimento final do aro, com já está girando com velocidade angular ω . A tração T nesse aro é diretamente proporcional à deformação x sofrida por ele (lei de Hooke), de forma que:

$$T = K \cdot x \Rightarrow T = K \cdot (L - L_0) \quad (\text{eq3})$$

A partir da relação eq2 da resolução da questão anterior e da relação eq3, vem:

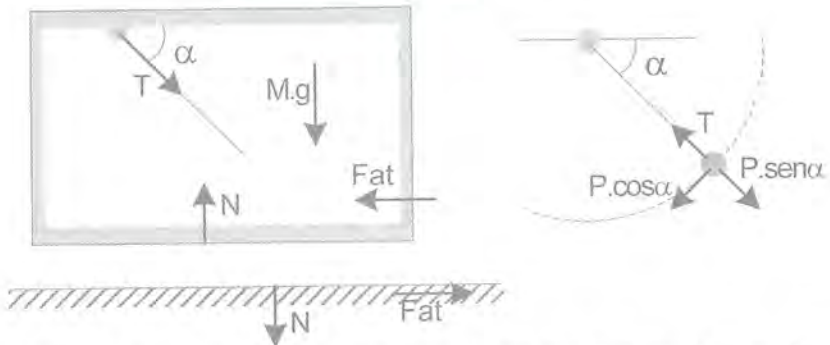
$$T = m\omega^2 L = K(L - L_0) \Rightarrow K L_0 = (K - m\omega^2) L \Rightarrow K \cdot (2\pi r) = (K - m\omega^2) \cdot (2\pi R)$$

$$R = \frac{K \cdot r}{K - m\omega^2} = \frac{K \cdot r}{K - m \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2} \Rightarrow R = \frac{4\pi^2 K \cdot r}{4\pi^2 K - m \cdot \omega^2}$$

Questão 284 - Solução

Aplicando a segunda lei de Newton na direção radial (centrípeta) do pêndulo simples, podemos escrever:

$$T - m \cdot g \cdot \text{sen} \alpha = \frac{m \cdot v^2}{R} \quad (\text{eq1})$$



Do equilíbrio das forças que agem na caixa, na direção vertical, podemos escrever:

$$N = T_y + M \cdot g \Rightarrow N = T \cdot \text{sen} \alpha + M \cdot g \quad (\text{eq2})$$

Do equilíbrio das forças que agem na caixa, na direção horizontal, podemos escrever:

$$T_x = \text{Fat} \Rightarrow T \cdot \text{cos} \alpha = \text{Fat} \quad (\text{eq3})$$

Da condição de iminência de escorregar, podemos escrever: $\text{Fat} = \mu \cdot N$ (eq4)

Substituindo eq2 e eq4 em eq3, vem:

$$T \cdot \cos \alpha = \mu \cdot N = \mu \cdot (T \cdot \sin \alpha + M \cdot g)$$

$$T \cdot (\cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha) = \mu \cdot M \cdot g \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\mu \cdot M \cdot g}{\cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha} \quad (\text{eq5})$$

De eq1 e eq5, vem: $m \cdot g \cdot \sin \alpha + \frac{m \cdot v^2}{R} = \frac{\mu \cdot M \cdot g}{\cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha}$, com $R = L$.

$$v = \sqrt{\frac{\mu \cdot M \cdot g}{m \cdot (\cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha)} - g \cdot L \cdot \sin \alpha}$$

Questão 285 - Solução

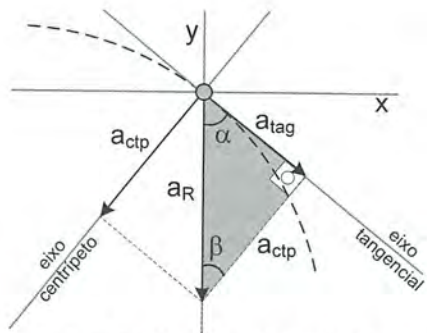
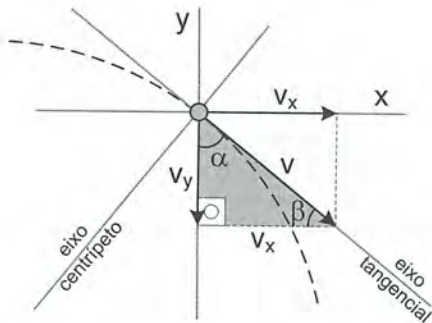
Durante o movimento parabólico do projétil sob ação exclusiva da força peso, a aceleração resultante em cada ponto da trajetória é vertical e para baixo, com módulo constante dado por:

$$a_R = \frac{F_R}{m} = \frac{P}{m} = \frac{m \cdot g}{m} \quad \Rightarrow \quad a_R = g \downarrow$$

O projétil tem velocidade $V_x = 40 \text{ m/s}$ constante e uma velocidade V_y cujo módulo aumenta de 10 m/s em 10 m/s a cada 1 segundo , portanto, $0, 10 \text{ m/s}, 20 \text{ m/s}, 30 \text{ m/s}$, no instante $t = 3 \text{ s}$ teremos $V_y = 30 \text{ m/s}$ e velocidade resultante dada por:

$$V = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2} = \sqrt{(40)^2 + (30)^2} = 50 \text{ m/s.}$$

As figuras abaixo o diagrama com a aceleração resultante e suas componentes, bem como o diagrama da velocidade resultante e suas componentes, ambos em $t = 3 \text{ s}$.



Os diagramas acima mostram a velocidade e a aceleração do móvel num mesmo instante. Esses diagramas trazem o par de eixos cartesianos e também o par de eixos padrão (tangencial e radial). Denominamos α o ângulo formado entre o eixo tangencial e o eixo vertical nas duas figuras e $\beta = 90^\circ - \alpha$.

A velocidade foi decomposta no par de eixos cartesianos xoy , e a aceleração foi decomposta em suas componentes tangencial e radial.

Os ângulos α , $\beta = 90^\circ - \alpha$ e 90° aparecem nos dois triângulos retângulos semelhantes em destaque nos diagramas. A semelhança de triângulos nos permite determinar as componentes tangencial e centrípeta da aceleração resultante $a_R = g \downarrow$:

$$\frac{\overset{\text{oposto}}{\underset{a \ \alpha}{V_x}}}{a_{\text{ctp}}} = \frac{\overset{\text{oposto}}{\underset{a \ \beta}{V_y}}}{a_{\text{tg}}} = \frac{\overset{\text{oposto a}}{\underset{90 \text{ graus}}{V}}}{a_R} \Rightarrow \frac{40 \text{ m/s}}{a_{\text{ctp}}} = \frac{30 \text{ m/s}}{a_{\text{tg}}} = \frac{50 \text{ m/s}}{10 \text{ m/s}^2}$$

Assim, em $t = 3\text{s}$, temos $a_{\text{ctp}} = 8 \text{ m/s}^2$ e $a_{\text{tg}} = 6 \text{ m/s}^2$. A alternativa correta é o item B.

Se você se empolgar, pode até determinar o raio de curvatura da trajetória parabólica em $t = 3\text{s}$:

$$a_{\text{ctp}} = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{a_{\text{ctp}}} = \frac{50^2}{8} = 312,5\text{m}$$

Questão 286 – Resposta: Alternativa correta - item C.

O raio de curvatura da trajetória parabólica em $t = 4\text{s}$ vale:

$$R = \frac{2500}{6} = 416,66\text{m}$$

Questão 287 - Solução

A velocidade V_x do projétil é constante e vale $V_x = V_0$ em qualquer instante t posterior (até o projétil tocar o solo). A velocidade V_y em qualquer instante t posterior é dada por:

$$V_y = V_{0y} + gt = 0 + g \cdot t \Rightarrow V_y = g \cdot t$$

A velocidade resultante, em qualquer instante t posterior é dada por:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \Rightarrow V = \sqrt{V_0^2 + (g \cdot t)^2}$$

Assim, usando a semelhança de triângulos mostrada na resolução da questão 285, vem:

$$\frac{\overset{\text{oposto}}{\underset{a \ \alpha}{V_x}}}{a_{\text{ctp}}} = \frac{\overset{\text{oposto}}{\underset{a \ \beta}{V_y}}}{a_{\text{tg}}} = \frac{\overset{\text{oposto a}}{\underset{90 \text{ graus}}{V}}}{a_R} \Rightarrow \frac{V_0}{a_{\text{ctp}}} = \frac{g \cdot t}{a_{\text{tg}}} = \frac{\sqrt{V_0^2 + (g \cdot t)^2}}{g}$$

Assim, vem:

$$a_{\text{tg}} = \frac{g^2 t}{\sqrt{V_0^2 + (g \cdot t)^2}}, \quad a_{\text{ctp}} = \frac{V_0 \cdot g}{\sqrt{V_0^2 + (g \cdot t)^2}}$$

Questão 293 - Resposta: a) 7,5 m/s², b) 1,2 m/s², veja exemplo 5, pág 150.

Questão 294 – Solução

No referencial da Terra, a lâmpada, ao se soltar do teto, já possui velocidade $V_0 \uparrow$ para cima e irá subir em movimento retardado até parar e retornar em queda livre acelerada. Já o piso do elevador está subindo em MRUV.

Para determinar o instante em que a lâmpada tocará o piso do elevador, é preciso escrever a função horária do MUV descrito pela lâmpada, a função horária do MRUV descrito pelo piso do elevador, igualar as funções horárias para achar o instante t desejado. Vemos que a resolução desse problema no referencial da Terra é bem burocrática.

Já no referencial do elevador, a lâmpada simplesmente se desprende do teto e cai a partir do repouso com a aceleração $a' = g' = g + a$ e percorre uma distância $\Delta S' = H = 2,94$ m até atingir o piso do elevador, piso esse que encontra-se imóvel nesse referencial. Assim, vem:

$$\Delta S' = V_0' \cdot t + \frac{a' \cdot t^2}{2} \Rightarrow 2,94 = 0 + \frac{(10+2) \cdot t^2}{2} \Rightarrow t = 0,7 \text{ s}$$

Note que fizemos a mudança de referencial Terra→elevador porque a análise cinemática do problema é bem mais simples no referencial do elevador. Entretanto, ao passarmos de um referencial inercial para um não-inercial, precisamos pagar um preço que é fazer uso do Princípio da Equivalência, por isso, foi computada uma gravidade $g' = g + a$ no referencial do elevador.

Questão 295 – Solução

A exemplo do que foi feito na resolução da questão anterior, faremos a mudança de referencial Terra→elevador porque a análise cinemática do problema é bem mais simples no referencial do elevador. Dessa vez, entretanto, tanto a Terra quando o elevador em MRU são referenciais inerciais, portanto, é desnecessário fazer uso do Princípio da Equivalência nesse caso. Do ponto de vista da Dinâmica (das leis de Newton), os referenciais já são equivalentes.

Assim, no referencial desse elevador, a lâmpada simplesmente se desprende do teto e cai a partir do repouso com a aceleração $a' = a = g$ e percorre uma distância $\Delta S' = H = 3,2$ m até atingir o piso do elevador, piso esse que encontra-se imóvel nesse referencial. Assim, vem:

$$\Delta S' = V_0' \cdot t + \frac{a' \cdot t^2}{2} \Rightarrow 3,2 = 0 + \frac{10 \cdot t^2}{2} \Rightarrow t = 0,8 \text{ s}$$

Questão 296 – Resposta: Alternativa a

O raio de curvatura é dado por:

$$\text{actp} = \frac{V^2}{R} = \frac{V_0 \cdot g}{\sqrt{V_0^2 + (g \cdot t)^2}} \Rightarrow \frac{V_0^2 + (g \cdot t)^2}{R} = \frac{V_0 \cdot g}{\sqrt{V_0^2 + (g \cdot t)^2}}$$

$$R = \frac{(V_0^2 + (g \cdot t)^2)^{3/2}}{V_0 \cdot g}$$

Questão 288 – Resposta: Alternativa a (Dica: veja questões 285 e 287)

Questão 289 – Resposta: Alternativa b (Dica: veja questões 285 e 287)

Questão 290 – Resposta

$$\text{actp} = \frac{V_0 \cdot g \cdot \cos \alpha}{\sqrt{(V_0 \cos \alpha)^2 + (V_0 \sin \alpha - g \cdot t)^2}}$$

$$\text{atg} = \frac{(V_0 \sin \alpha - g \cdot t) \cdot g}{\sqrt{(V_0 \cos \alpha)^2 + (V_0 \sin \alpha - g \cdot t)^2}}$$

$$R = \frac{[(V_0 \cos \alpha)^2 + (V_0 \sin \alpha - g \cdot t)^2]^{3/2}}{V_0 \cdot g \cdot \cos \alpha}$$

Questão 291 - Resposta: a) 6 m/s², b) 36N, veja Exemplo Resolvido 4, pág 149.

Questão 292 - Solução

O elevador possui aceleração $\uparrow a = 5 \text{ m/s}^2$ no referencial da Terra. Entretanto, no referencial do próprio elevador, ele não possui essa aceleração que, pelo Princípio da Equivalência, será computada como uma gravidade adicional $\downarrow a = 5 \text{ N/kg}$. Assim, no referencial do elevador, a gravidade resultante vale:

$$\downarrow g' = g \downarrow + a \downarrow = 10 \text{ N/kg} + 5 \text{ N/kg} \Rightarrow g' = 15 \text{ N/kg}$$

Durante a descida da rampa, agem no bloco as forças normal N e o peso $P' = m \cdot g'$, sendo que a componente $m \cdot g' \cdot \cos \alpha$ é equilibrada pela normal N , restando a componente $m \cdot g' \cdot \sin \alpha$ para acelerar o bloco, proporcionando a ele uma aceleração $a' = g' \cdot \sin \alpha = 15 \cdot (0,6) = 9 \text{ m/s}^2 \searrow$ no referencial do elevador.

O comprimento da rampa vale $\Delta S' = h / \sin \alpha = 2,7 / 0,6 = 4,5 \text{ m}$.

Assim, o tempo que o bloco levará para descer toda a rampa, a partir do repouso, vale:

$$\Delta S' = V_0' \cdot t + \frac{a' \cdot t^2}{2} \Rightarrow 4,5 = 0 + \frac{9 \cdot t^2}{2} \Rightarrow t = 1 \text{ s}$$

13 Referências na internet

Professores e estudantes podem encontrar bons materiais e dicas de estudo para a preparação para os vestibulandos IME ITA nos seguintes sítios na internet:

- **www.vestseller.com.br** - editora brasileira especialista em publicações para vestibulandos IME ITA, tais como os livros da renomada Editora MIR e outros excelentes livros de autores nacionais. Confirmam.
- **www.rumoaoita.com.br** - sítio mantido por alunos Júlio Sousa e seus amigos que estão no ITA, tais como o Caio Guimarães. Contém muito material de apoio para vestibulandos IME ITA;
- **www.fisicaju.com.br/projetoimeita** - A maior comunidade do ORKUT de discussão sobre assuntos IME, ITA, AFA, EM e escolas militares em geral, tais como livros para estudos, técnicas de estudo, dicas sobre horário de estudo, dúvidas sobre questões etc. Vale a pena acessar. O prof Renato Brito participa ativamente dessa lista;
- **www.sassabetudo.cjb.net** - sítio mantido pelo sassá (Alex), meu ex aluno do Colégio Militar de Fortaleza, atualmente no ITA. Contém um vasto acervo de provas do IME, ITA, AFA, Escola Naval, dos últimos 20 anos;
- **www.etapa.com.br** – sítio do Curso Etapa de São Paulo, com vasto acervo de provas comentadas do IME, ITA, Fuvest, Unicamp, Unesp, Mackenzie, UFSCAR, FEI dentre outros.
- **www.fisicaju.com.br** - sítio pessoal do prof Renato Brito com listas de exercícios para download;
- **www.vestseller.com.br/erratas/mecanica1** – esse sítio contém comentários do professor, traz pequenas correções de gabarito encontradas no volume 1 do livro Fundamentos de Mecânica. Algumas questões que não estão resolvidas no próprio livro estão resolvidas nesse site. Recomenda-se que todo usuário desse livro deve visitar esse site periodicamente;
- **www.vestseller.com.br/erratas/mecanica2**– esse sítio contém comentários do professor, traz pequenas correções de gabarito encontradas no volume 2 do livro Fundamentos de Mecânica. Algumas questões que não estão resolvidas no próprio livro estão resolvidas nesse site. Recomenda-se que todo usuário desse livro deve visitar esse site periodicamente;

Questão 297 – Resposta: Alternativa b

Questão 298 – Solução

- a) Aceleração → independe do referencial inercial (grandeza absoluta)
- b) Massa → independe do referencial inercial (grandeza absoluta)
- c) Força → independe do referencial inercial (grandeza absoluta)
- d) Deslocamento → depende do referencial inercial (grandeza relativa)
- e) Velocidade → depende do referencial inercial (grandeza relativa)
- f) Energia cinética → depende do referencial inercial (grandeza relativa)
- g) Q.D.M. → depende do referencial inercial (grandeza relativa)
- h) Intervalo de tempo → independe do referencial inercial (grandeza absoluta)
- i) Impulso → independe do referencial inercial (grandeza absoluta)
- j) Trabalho → depende do referencial inercial (grandeza relativa)

Note que as grandezas força F e intervalo de tempo Δt independem do referencial inercial, por esse motivo, o impulso $I = F \cdot \Delta t$ também independe do referencial inercial. O deslocamento d sofrido por um corpo, entretanto, depende do referencial inercial, por esse motivo, o trabalho realizado $\tau = F \cdot d$ depende do referencial inercial.

Questão 299 – Solução

Se a soma das quantidades de movimento dos corpos de um sistema, antes e após um intervalo de tempo Δt , permanece constante, num referencial inercial, essa soma das quantidades de movimento também permanecerá constante em qualquer outro referencial inercial.

Generalizando, qualquer lei física que é satisfeita num referencial inercial, também é satisfeita em qualquer outro referencial inercial. As leis físicas são as mesmas em qualquer referencial inercial. Não existe referencial inercial privilegiado, todos eles são equivalentes do ponto de vista da Dinâmica (das leis de Newton).

Esse é exatamente o primeiro postulando da Teoria da Relatividade de Einstein, cuja idéia já era bem conhecida desde os tempos de Galileu. Já no século XVII, o cientista italiano enunciou o chamado Princípio da Relatividade de Galileu que diz que “as leis da Mecânica são as mesmas, em qualquer referencial inercial”. O primeiro postulando da Teoria da Relatividade de Einstein é, portanto, uma generalização do Princípio da Relatividade de Galileu que se restringe apenas ao domínio da Mecânica.

Questão 300 – Resposta: alternativa a

Questão 301 – Resposta: alternativa c

Questão 302 – Resposta: alternativa b

Questão 303 – Resposta: alternativa e

Questão 304 - Resposta: $\frac{g \cdot (\mu - \operatorname{tg} \alpha)}{(1 + \mu \cdot \operatorname{tg} \alpha)}$, veja exemplo resolvido 10, pág. 162.

Questão 305 - Solução

Seja a a aceleração que o prisma possui em relação à Terra. Efetuando uma mudança do referencial inercial (Terra) para o referencial acelerado do prisma, abandonamos a aceleração $\rightarrow a$ e a computamos, no referencial do prisma, na forma de uma gravidade $\leftarrow a$ (veja figura) que causará forças gravitacionais fictícias $M.a \leftarrow$ e $M.a \leftarrow$ em cada um dos corpos de mesma massa M do sistema, respectivamente, com base no Princípio da Equivalência de Einstein.

Caixa 1 – Equilíbrio vertical: $N_1 = M.g$ (eq1)

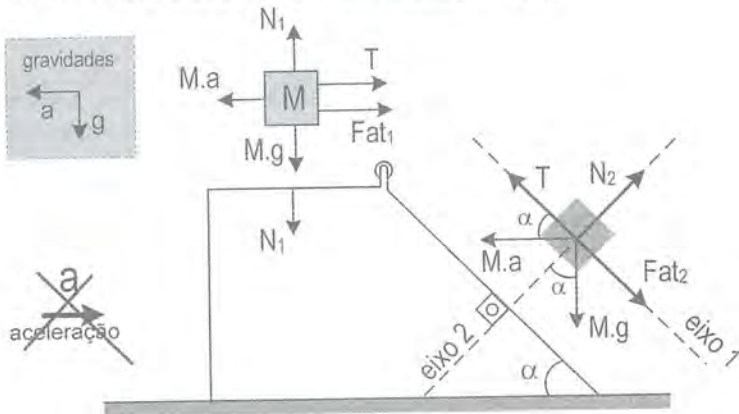
Equilíbrio horizontal: $T + Fat_1 = M.a$ (eq2)

Iminência de escorregar: $Fat_1 = \mu.N_1$ (eq3)

Caixa 2 – Equilíbrio na direção do eixo 2: $N_2 = M.a.\text{sen}\alpha + M.g.\text{cos}\alpha$ (eq4)

Equilíbrio na direção do eixo 1: $Fat_2 + M.g.\text{sen}\alpha = T + M.a.\text{cos}\alpha$ (eq5)

Iminência de escorregar: $Fat_2 = \mu.N_2$ (eq6)



Somando, membro a membro, eq2 e eq5, vem:

$$Fat_1 + Fat_2 + M.g.\text{sen}\alpha = M.a + M.a.\text{cos}\alpha$$

$$\mu.N_1 + \mu.N_2 + M.g.\text{sen}\alpha = M.a + M.a.\text{cos}\alpha$$

$$\mu.M.g + \mu.(M.a.\text{sen}\alpha + M.g.\text{cos}\alpha) + M.g.\text{sen}\alpha = M.a + M.a.\text{cos}\alpha$$

$$\mu.g + \mu.a.\text{sen}\alpha + \mu.g.\text{cos}\alpha + g.\text{sen}\alpha = a + a.\text{cos}\alpha$$

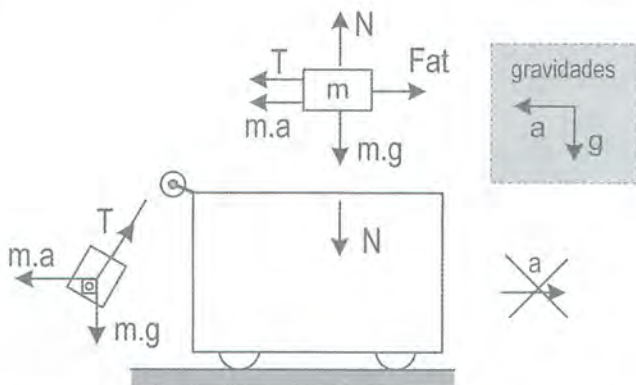
$$\mu.g + \mu.g.\text{cos}\alpha + g.\text{sen}\alpha = a + a.\text{cos}\alpha - \mu.a.\text{sen}\alpha$$

$$\mu.g + \mu.g.\text{cos}\alpha + g.\text{sen}\alpha = a.(1 + \text{cos}\alpha - \mu.\text{sen}\alpha)$$

$$5 + 4 + 6 = a.(1 + 0,8 - 0,3) \Rightarrow a = 10 \text{ m/s}^2 \text{ ou } a = g$$

Questão 306 - Solução

Seja a a aceleração que o prisma possui em relação à Terra. Efetuando uma mudança do referencial inercial (Terra) para o referencial acelerado do carro, abandonamos a aceleração $\rightarrow a$ e a computamos, no referencial do carro, na forma de uma gravidade $\leftarrow a$ (veja figura) que causará forças gravitacionais fictícias $m \cdot a \leftarrow$ e $m \cdot a \leftarrow$ em cada um dos corpos de mesma massa m do sistema, respectivamente, com base no Princípio da Equivalência de Einstein.



No referencial do carro, todos os blocos estão em equilíbrio (relativo). Assim, do equilíbrio do bloco pendular, temos:

$$\text{Pitágoras: } T^2 = (m \cdot a)^2 + (m \cdot g)^2 \Rightarrow T = m \cdot \sqrt{g^2 + a^2} \quad (\text{eq1})$$

Do equilíbrio do bloco apoiado sobre o carro, podemos escrever:

$$\text{Fat} = T + m \cdot a \Rightarrow \mu \cdot N = T + m \cdot a, \text{ com } N = m \cdot g$$

$$\mu \cdot m \cdot g = T + m \cdot a \Rightarrow T = m \cdot (\mu \cdot g - a) \quad (\text{eq2})$$

$$\text{Comparando eq1 e eq2, vem: } (\mu \cdot g - a) = \sqrt{g^2 + a^2}$$

$$\text{Elevando ao quadrado e isolando } a, \text{ encontramos: } a = \frac{g \cdot (\mu^2 - 1)}{2 \cdot \mu}$$

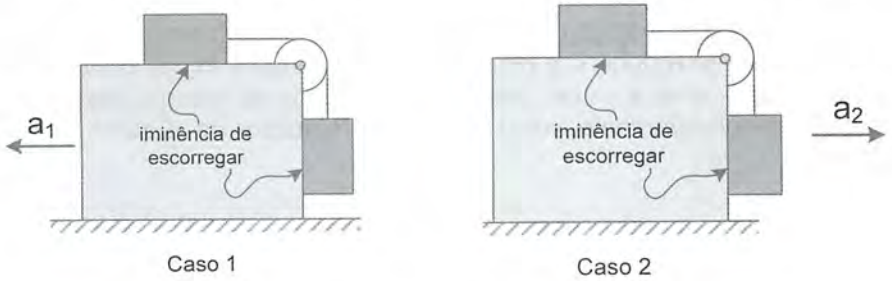
Questão 307 - Solução

Seja a_1 a aceleração que a mesa deve possuir para a esquerda a fim de tornar iminente o escorregamento dos blocos em relação a ela; seja a_2 , por sua vez, a aceleração que a mesa deve possuir para a direita a fim de tornar iminente o escorregamento dos blocos em relação a ela (veja figura).

É intuitivo o fato de que $a_2 > a_1$ visto que o escorregamento ocorrerá mais dificilmente quando a mesa é acelerada para a direita (caso 2). Portanto, equacionaremos o caso 2 da figura.

Seja a a aceleração que a mesa possui em relação à Terra. Efetuando uma mudança do referencial inercial (Terra) para o referencial acelerado do carro, abandonamos a aceleração $\rightarrow a$ e a computamos, no referencial da mesa, na forma de uma gravidade $\leftarrow a$ (veja figura) que causará forças gravitacionais

fictícias $m \cdot a \leftarrow$ e $m \cdot a \leftarrow$ em cada um dos blocos de mesma massa m do sistema, respectivamente, com base no Princípio da Equivalência de Einstein.

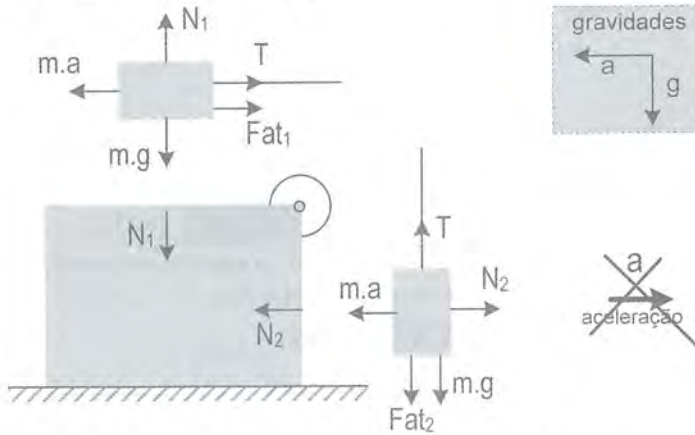


Para o equilíbrio (relativo) do bloco de cima, podemos escrever:

$$F_{at_1} + T = m \cdot a$$

$$\mu \cdot N_1 + T = m \cdot a, \text{ com } N_1 = m \cdot g \text{ (equilíbrio)}$$

$$\mu \cdot (m \cdot g) + T = m \cdot a \text{ (eq1)}$$



Para o equilíbrio do bloco pendurado, podemos escrever:

$$F_{at_2} + m \cdot g = T$$

$$\mu \cdot N_2 + m \cdot g = T, \text{ com } N_2 = m \cdot a \text{ (equilíbrio relativo)}$$

$$\mu \cdot (m \cdot a) + m \cdot g = T \text{ (eq2)}$$

Somando eq1 e eq2, membro a membro, temos:

$$\mu \cdot (m \cdot g) + \mu \cdot (m \cdot a) = m \cdot a - m \cdot g$$

$$\mu \cdot (m \cdot g) + m \cdot g = m \cdot a - \mu \cdot (m \cdot a)$$

$$g \cdot (1 + \mu) = a \cdot (1 - \mu) \Rightarrow a = \frac{g \cdot (1 + \mu)}{(1 - \mu)} g$$

Questão 308

$a = g/5$, resolva no referencial não inercial dessa vez.

Questão 309

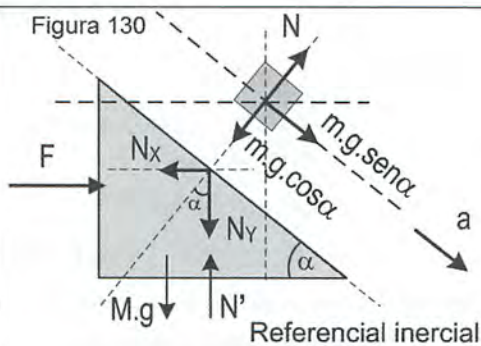
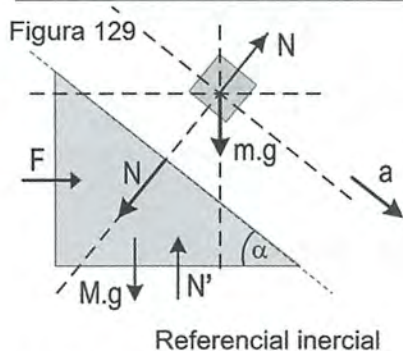
$a = g/4$, resolva no referencial não inercial dessa vez, veja exemplo resolvido 8, pág. 157.

Questão 310

400g, veja exemplo resolvido 9, pág. 160.

Questão 311

Alternativa b, veja exemplo resolvido 5, pág. 150.

Questão 312 - Solução

Inicialmente, o prisma permanece em repouso em relação ao solo, enquanto o bloco desce a rampa aceleradamente. O prof. Renato Brito analisará a descida do bloco no referencial inercial (Figuras 129 e 130):

Equilíbrio do bloco na direção normal: $N = m.g.\cos\alpha$ (eq1)

Aceleração de descida do bloco (Figura 130) ladeira abaixo :

$$F_R = m.a \Rightarrow m.g.\sen\alpha = m.a \Rightarrow a = g.\sen\alpha \text{ (eq2)}$$

O equilíbrio horizontal da rampa permite escrever: $F = N_x \Rightarrow F = N.\sen\alpha$

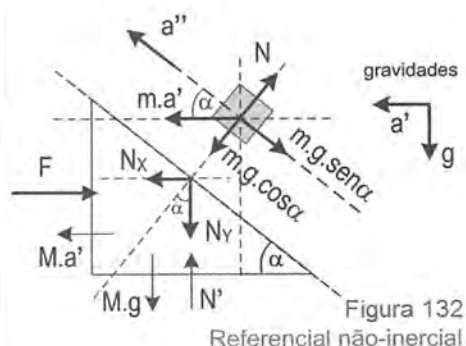
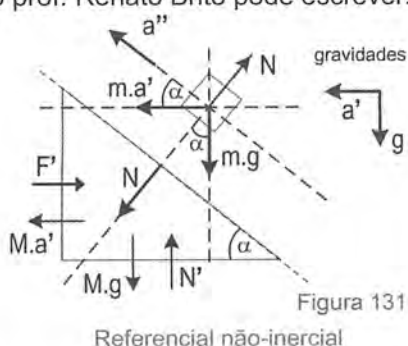
$$F \stackrel{\text{eq1}}{=} (m.g.\cos\alpha).\sen\alpha = m.g.\sen45^\circ.\cos45^\circ \Rightarrow F = m.g/2 \text{ (eq3)}$$

Agora, o prisma será empurrado por uma força horizontal $F' = K.F$ e vai adquirir uma aceleração a' no referencial da Terra (inercial). Analisaremos o movimento de subida do bloco ao longo da rampa no referencial não inercial (referencial do prisma) considerando o Princípio da Equivalência de Einstein.

Nesse referencial, o prisma não possui mais a aceleração horizontal ($a' \rightarrow$), porém uma gravidade extra (gravidade $a' \leftarrow$) causará uma força gravitacional (fictícia) $M.a'$ no prisma e $m.a'$ no bloco (Figuras 131 e 132). A seguir,

o prof. Renato Brito mostrará o novo diagrama de forças, agora no referencial do prisma (não inercial).

Nesse referencial, o prisma se encontra em equilíbrio relativo na direção horizontal, sob ação das forças F' , N_x e $M.a''$ (veja Figura 132). O bloquinho possui uma aceleração a'' na direção do movimento ladeira acima, e se encontra em equilíbrio relativo, na direção normal. A partir desses fatos, o prof. Renato Brito pode escrever:



Equilíbrio relativo do prisma:

$$F' = M.a' + N_x \Rightarrow K.F = M.a' + N_x \quad (\text{eq4})$$

Equilíbrio relativo do bloco na direção normal:

$$N = m.g.\cos\alpha + m.a'.\text{sen}\alpha \quad (\text{eq5})$$

Aceleração de subida do bloco (Figura 132) ladeira acima :

$$F_R = m.a'' \Rightarrow m.a'.\cos\alpha - m.g.\text{sen}\alpha = m.a''$$

$$a'' = a'.\cos\alpha - g.\text{sen}\alpha \quad (\text{eq6})$$

Segundo o enunciado, o tempo de descida do bloco no primeiro caso é igual ao tempo subida do bloco no segundo caso. Ora, em ambos os casos, há um bloco se movendo em MUV a partir do repouso ($D = a.t^2/2$). Em cada caso, a distância percorrida pelo bloco será a mesma no referencial do prisma, coincidindo com o comprimento D da rampa. Portanto, tempos iguais e distâncias iguais ($D = a.t^2/2$) implicam acelerações de módulos iguais, isto é, a aceleração do bloco no referencial do prisma será a mesma, na subida e na descida ($a = a''$).

Conforme vimos inicialmente, a aceleração de descida do bloco é dada pela relação eq2. Na subida (Figura 132), a aceleração do bloco no referencial do prisma vale a'' dada pela relação eq6. Assim, de eq2 e eq7, vem:

$$a = a'' \Rightarrow g.\text{sen}\alpha = a'.\cos\alpha - g.\text{sen}\alpha \Rightarrow$$

$$a' = 2.g.\text{sen}\alpha / \cos\alpha = 2g \text{sen}45^\circ / \cos45^\circ \Rightarrow a' = 2g \text{ (eq7)}$$

A relação eq3 informa o valor da força F que mantém o prisma imóvel durante a descida do bloco.

A partir da relação 4, determinaremos a força $F' = K.F$ com que o bloco deve ser empurrado para mover-se com aceleração a dada pela relação eq7:

$$K.F = M.a' + N_x \stackrel{\text{eq7}}{=} M.(2g) + N.\text{sen}\alpha \stackrel{\text{eq5}}{=} 2.Mg + (m.g.\cos\alpha + m.a'.\text{sen}\alpha).\text{sen}\alpha$$

Usando eq8 novamente, $M = 2m$ e $\alpha = 45^\circ$ vem:

$$K.F = 2Mg + mg/2 + m.(2g)/2 = 4mg + mg/2 + mg$$

$$K.F = 11.m.g / 2$$

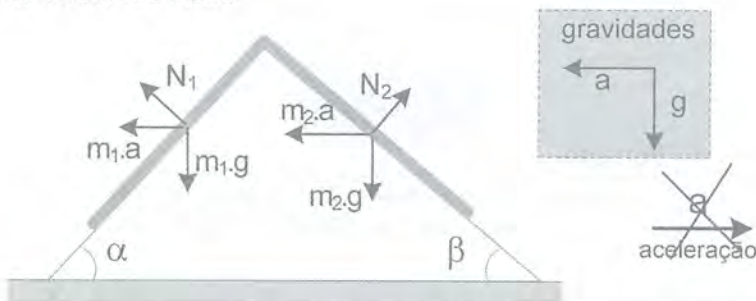
Como a relação eq3 afirma que $F = m.g / 2$, finalmente vem $K = 11!$ ☺

Questão 313 – Resposta (veja exemplo resolvido 6, pág. 153)

a) $7g / 5$, b) $g.\sqrt{2} / 5$,

Questão 314 - Resposta

Seja a a aceleração que o prisma possui em relação à Terra. Efetuando uma mudança do referencial inercial (Terra) para o referencial acelerado do prisma, abandonamos a aceleração $\rightarrow a$ e a computamos, no referencial do prisma, na forma de uma gravidade $\leftarrow a$ (veja figura) que causará forças gravitacionais fictícias $m_1.a \leftarrow$ e $m_2.a \leftarrow$ em cada uma das partes da corda de massas m_1 e m_2 do sistema, respectivamente, com base no Princípio da Equivalência de Einstein.

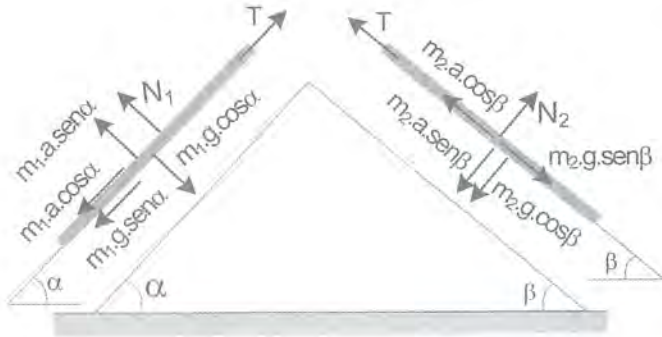


Decompondo das forças na direção da rampa e na direção normal à rampa, obtemos o diagrama de forças mostrado na próxima figura. Para que cada trecho da corda esteja em “equilíbrio relativo” no referencial do prisma, vem:

$$T = m_1.g.\text{sen}\alpha + m_1.a.\cos\alpha \quad \text{(eq1)}$$

$$m_2.g.\text{sen}\beta = T + m_2.a.\cos\beta \quad \text{(eq2)}$$

Sendo $m_1 = m_2 = m$, eliminando a tração T em eq1 e eq2, vem:



$$g.\text{sen}\beta - a.\text{cos}\beta = g.\text{sen}\alpha + a.\text{cos}\alpha \Rightarrow a = g \cdot \left(\frac{\text{sen}\beta - \text{sen}\alpha}{\text{cos}\beta + \text{cos}\alpha} \right) \quad (\text{eq3})$$

Considere as identidades trigonométricas abaixo:

$$\text{sen}x - \text{sen}y = 2.\text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right).\text{cos}\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\text{cos}x + \text{cos}y = 2.\text{cos}\left(\frac{x+y}{2}\right).\text{cos}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

A relação eq3, portanto, pode ser reescrita como:

$$a = g \cdot \left(\frac{\text{sen}\beta - \text{sen}\alpha}{\text{cos}\beta + \text{cos}\alpha} \right) = g \cdot \frac{2.\text{sen}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right).\text{cos}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{2.\text{cos}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right).\text{cos}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = g \cdot \frac{\text{sen}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}{\text{cos}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}$$

$$a = g \cdot \text{tg}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$$

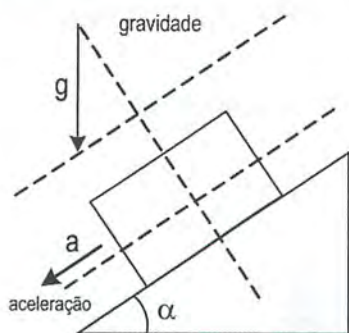
Questão 315 - Solução

O vagão desce a rampa com aceleração $a = g.\text{sen}\alpha$ no referencial inercial, aceleração essa causada pela força resultante $P.\text{sen}\alpha$ que age sobre o sistema (Figura 133).

O prof. Renato Brito, contudo, analisará o que ocorre no interior do vagão a partir do referencial não inercial do vagão. Para isso, a aceleração $a = g.\text{sen}\alpha$ é abandonada (Figura 134) visto que o vagão não possui aceleração em relação ao vagão.

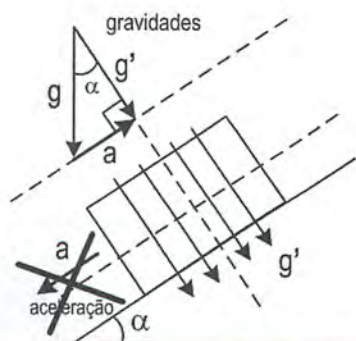
Pelo Princípio da Equivalência de Einstein, essa aceleração com que o referencial não inercial (vagão) se move em relação ao referencial inercial (Terra, rampa) é "sentida", para quem está no referencial não inercial (quem está no interior do vagão), como uma gravidade-extra de mesma direção,

mesmo valor e sentido oposto ao da antiga aceleração a que inexistiu nesse referencial (Figura 134).



Referencial inercial

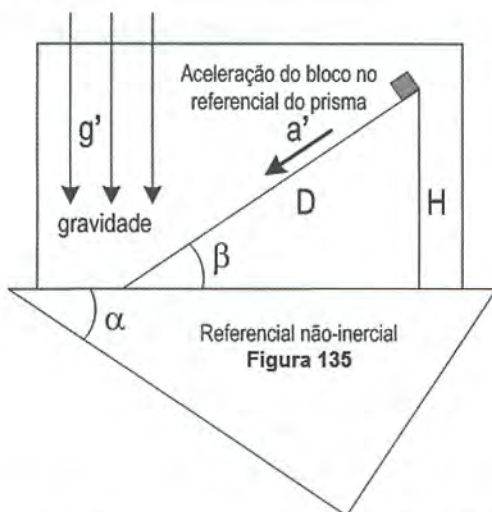
Figura 133



Referencial não-inercial

Figura 134

Assim, para quem está no interior do vagão, este se encontra imóvel em seu referencial e, em seu interior, age duas gravidades, g e a , cujo efeito resultante (soma de vetores) é uma gravidade resultante g' perpendicular ao piso do vagão. Para quem está no interior do vagão, a gravidade $g' = g \cdot \cos \alpha$ define a nova direção vertical em seu interior.



Referencial não-inercial

Figura 135

Para facilitar a visualização, giramos as Figuras 133 e 134 de tal forma que a gravidade g' ficasse orientada na vertical-padrão e, conseqüentemente, a superfície inclinada da rampa ficasse horizontal. Dessa forma, obtivemos a Figura 135.

Observando a descida do bloco a partir do referencial do vagão pela Figura 135, temos um típico caso de MUV a partir do repouso com a famosa aceleração $a' = g'.\text{sen}\beta$ ao longo do plano inclinado. O tempo de descida do bloco é dado por:

$$D = \frac{a'.t^2}{2}, \text{ com } \text{sen}\beta = H/D, a' = g'.\text{sen}\beta \text{ e } g' = g.\text{cos}\alpha$$

$$D = \frac{a'.t^2}{2} \Rightarrow \frac{H}{\text{sen}\beta} = \frac{g'.\text{sen}\beta.t^2}{2} = \frac{g.\text{cos}\alpha.\text{sen}\beta.t^2}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g.\text{sen}^2\beta.\text{cos}\alpha}}$$

Questão 316 - Resposta: a) $m.g.\text{sen}\beta.\text{cos}\alpha$, b) $\mu = \text{arctg}\beta$

Questão 317 - Solução

De acordo com a segunda lei de Newton, o sistema de massa total M subirá a rampa com aceleração retardadora de módulo a (no referencial da Terra) dado por :

$$F_R = M.a \Rightarrow (P.\text{sen}\alpha + F_{at}) = M.a$$

$$M.g.\text{sen}\alpha + \mu.N = M.a, \text{ com a reação normal } N \text{ dada por } N = P.\text{cos}\alpha$$

$$M.g.\text{sen}\alpha + \mu.M.g.\text{cos}\alpha = M.a \Rightarrow a = g.\text{sen}\alpha + \mu.g.\text{cos}\alpha \text{ (eq1)}$$

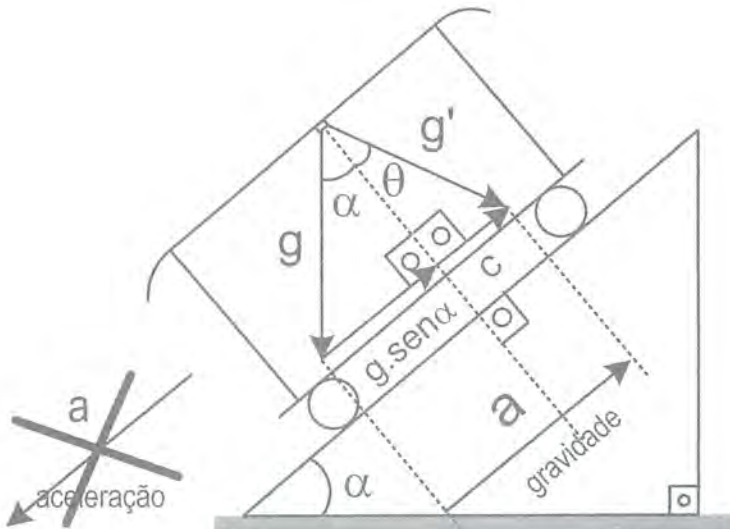


Figura 136 – diagrama das forças que agem na cunha, no referencial acelerado

No referencial do próprio vagão, todavia, essa aceleração $a \swarrow$ será equivalente a uma gravidade $a \nearrow$, que será adicionada vetorialmente à gravidade local $g \downarrow$ para totalizar a gravidade resultante g' (no referencial do vagão) como mostra a Figura 136.

Da geometria da Figura 136, temos que:

$$g \cdot \text{sen} \alpha + c = a \Rightarrow a = g \cdot \text{sen} \alpha + c \quad (\text{eq2})$$

Comparando eq1 e eq2, vem: $c = \mu \cdot g \cdot \text{cos} \alpha$ (eq3)

É sabido que o pêndulo permanece em equilíbrio relativo sem oscilar, no referencial do vagão, quando posicionado na nova vertical definida pela direção da gravidade resultante g' , conforme a Figura 136.

Para determinar o ângulo $\beta = \alpha + \theta$ formado entre a direção de g' e a direção vertical de g , lançaremos mão da identidade trigonométrica:

$$\text{Tg}(\alpha + \theta) = \frac{\text{tg} \alpha + \text{tg} \theta}{1 - \text{tg} \alpha \cdot \text{tg} \theta} \quad (\text{eq4})$$

Do triângulo retângulo da Figura 136, temos que:

$$\text{Tg} \theta = \frac{c}{g \cdot \text{cos} \alpha} \stackrel{\text{eq3}}{=} \frac{\mu \cdot g \cdot \text{cos} \alpha}{g \cdot \text{cos} \alpha} = \mu \quad (\text{eq5})$$

Sendo $\beta = \alpha + \theta$, a partir de eq4 e eq5, vem:

$$\text{Tg} \beta = \text{Tg}(\alpha + \theta) = \frac{\text{tg} \alpha + \text{tg} \theta}{1 - \text{tg} \alpha \cdot \text{tg} \theta} = \frac{\text{tg} \alpha + \mu}{1 - \text{tg} \alpha \cdot \mu} \Rightarrow \text{Tg} \beta = \frac{\text{tg} \alpha + \mu}{1 - \text{tg} \alpha \cdot \mu}$$

Questão 318 - Solução

Na situação ordinária, o pêndulo simples oscila com período $T = 1\text{ s}$, o que permite escrever:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} = 1\text{ s} \quad (\text{eq1})$$

Conforme aprendemos na relação eq56, página 166, um pêndulo oscilando fixo ao teto de um vagão que desce uma rampa com aceleração $a = g \cdot \text{sen} \alpha$ oscilará, no interior desse vagão, com período dado por:

$$T' = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g \cdot \text{cos} \alpha}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\text{cos} \alpha}} = 1\text{ s} \cdot \sqrt{\frac{1}{\text{cos} 60^\circ}} = \sqrt{2}\text{ s}$$

Questão 319 - Solução

Na situação ordinária, o pêndulo simples oscila com período $T = 1\text{ s}$, o que permite escrever:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} = 1\text{ s} \quad (\text{eq1})$$

Conforme aprendemos na relação eq20, página 139, um pêndulo, fixo ao teto de um vagão que move-se acelerado horizontalmente, oscila na direção da nova gravidade g' de módulo $g/\cos\alpha$ com período dado por :

$$T' = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g'}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{\frac{g}{\cos\alpha}}}$$

onde α é o ângulo formando entre g e g' . Nessa questão, após o vagão ser acelerado, a posição de equilíbrio do pêndulo subiu 36 cm o que, conforme a figura ao lado, mostra que o ângulo α formado entre g e g' tem um cosseno dado por:

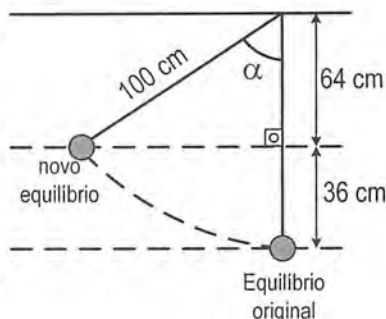
$$\cos\alpha = \frac{64}{100} = 0,64$$

Assim, o novo período do pêndulo, nessas condições, será:

$$T' = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g'}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{\frac{g}{\cos\alpha}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \sqrt{\cos\alpha} = 1 \cdot \sqrt{0,64} = 0,8\text{ s}$$

Com esse período mais curto que o original, o relógio oscilará mais ligeirinho, com maior frequência do que a original e acabará adiantando.

Note que, a cada 0,8 s, esse relógio dá uma oscilação completa, significando que, a cada oscilação completa ele adianta 0,2 s (que ele deixa de computar). Assim, se ele adianta 0,2s a cada 0,8 s, ele adiantará 15 s a cada 60 s.



Resposta correta – Letra A

Questão 320 - Solução

O bloco, juntamente com a cunha, desce a rampa ladeira abaixo com aceleração $a = g \cdot \sin\alpha$ no referencial da Terra (veja figura adiante).

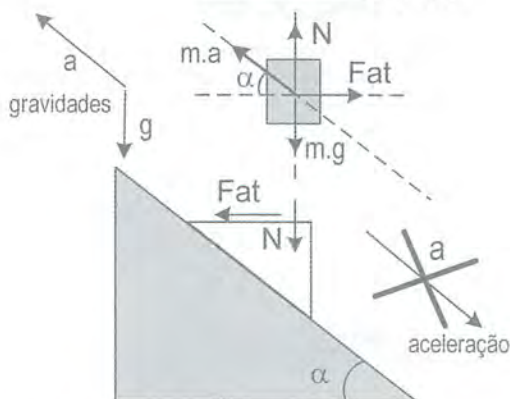
Efetuada uma mudança do referencial da Terra (inercial) para o referencial da cunha (não inercial), essa aceleração $a = g \cdot \sin\alpha$ será abandonada, sendo substituída, no referencial acelerado, por uma gravidade $\kappa a = g \cdot \sin\alpha$.

de mesmo valor, mesma direção e sentido contrário que causará força gravitacional fictícia $m.a \uparrow$ no bloco de massa m .

No referencial da cunha, o bloco se encontra em equilíbrio (relativo), o que permite escrever:

$$m.a.\text{sen}\alpha + N = m.g \Rightarrow N = m.g - m.a.\text{sen}\alpha \quad (\text{eq1})$$

$$\text{Fat} = m.a.\text{cos}\alpha \quad (\text{eq2})$$



Como o problema pede que se determine o menor coeficiente de atrito μ que ainda impede o escorregamento relativo entre o bloco e a cunha, devemos admitir que o bloco esteja na iminência de escorregar em relação à cunha, o que permite escrever: $\text{Fat} = \mu.N$ (eq3)

A partir das relações eq1, eq2 e eq3, vem:

$$\text{Fat} = m.a.\text{cos}\alpha \Rightarrow \mu.N = m.a.\text{cos}\alpha \Rightarrow \mu.(m.g - m.a.\text{sen}\alpha) = m.a.\text{cos}\alpha$$

$$\mu = \frac{a.\text{cos}\alpha}{g - a.\text{sen}\alpha} \quad (\text{eq4})$$

Sendo $a = g.\text{sen}\alpha$, substituindo em eq4, vem:

$$\mu = \frac{a.\text{cos}\alpha}{g - a.\text{sen}\alpha} = \frac{g.\text{sen}\alpha.\text{cos}\alpha}{g - g.\text{sen}\alpha.\text{sen}\alpha} = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{cos}\alpha} = \text{tg}\alpha \Rightarrow \mu = \text{tg}\alpha$$

(Veja também a questão 162, página 66)

Questão 321 - Solução

a) Solução no referencial não inercial do carro:

Sobre o carrinho, agem as forças de interação normal N_1 , normal N_2 , seu peso $m.g$ (no centro de massa G), a força de atrito Fat que o solo exerce na roda dianteira tracionada (conectada ao motor), bem como a força de inércia $m.a$ (no seu centro de massa).

O carro se encontra em equilíbrio de momentos (relativo) em relação a qualquer ponto do referencial do carro. Tomando o momento total nulo em relação ao ponto O de contato da roda dianteira com o solo, vem:

$$m.a.C + m.g.B - N_1.(A+B) = 0 \quad (\text{eq1})$$

Adicionalmente, estando o carro em equilíbrio (relativo) no seu próprio referencial não inercial, podemos escrever na horizontal:

$$\text{Fat} = m.a \quad (\text{eq2})$$

Sabemos que o atrito estático tem intensidade variável, aumentando desde o valor nulo até o valor máximo $\text{Fat}_{\text{max}} = \mu.N$

Comentário: o atrito entre o pneu carro e o solo é estático pelo fato de que o pneu apenas rola ao longo do solo, sem que o ponto de contato da roda com o solo escorregue em relação a este, não ocorrendo derrapagem.

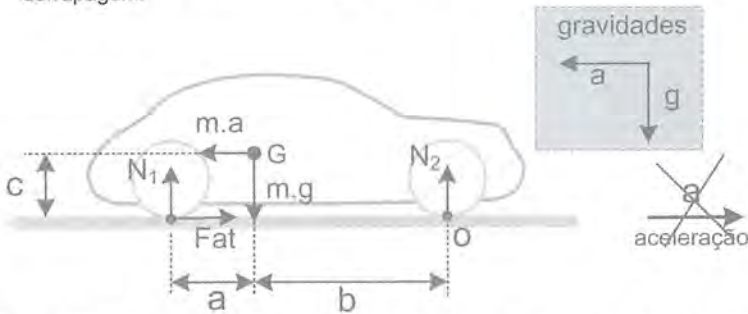


Figura 137 - Diagrama das forças que agem no carro, no referencial acelerado

A expressão eq2 mostra que, quanto maior for a intensidade da força de atrito, maior será a aceleração a que o carro adquirirá no referencial da Terra. Assim, para a condição de máxima aceleração, devemos ter:

$$\text{Fat} = \text{Fat}_{\text{max}} = \mu.N_1 \quad (\text{eq3})$$

Comentário: a intensidade do Fat_{max} é calculada fazendo-se uso da normal N_1 , por ser essa a força de contato normal trocada na fronteira em que surge esse atrito. Se o atrito fosse na roda dianteira, teríamos usado N_2 na relação eq3.

Isolando N_1 em eq1 e substituindo em eq3 e, em seguida, substituindo eq3 em eq2, vem:

$$\text{Fat} = \text{Fat}_{\text{max}} = \mu.N_1 = m.a \quad \Rightarrow \quad \mu \cdot \left(\frac{m.a.C + m.g.B}{A + B} \right) = m.a$$

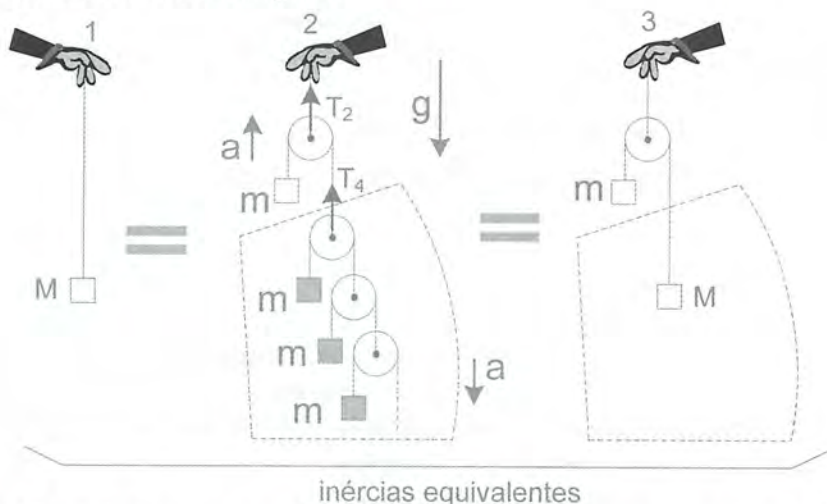
$$\mu.m.g.B + \mu.m.a.C = m.a.A + m.a.B \quad \Rightarrow \quad a = \left(\frac{\mu.g.B}{A + B - \mu.C} \right)$$

b) Resposta: $a = 2,72 \text{ m/s}^2$

Veja a resolução do item a dessa questão. Veja também o Exemplo Resolvido 16, página 175.

Questão 322 – Solução

Para entender a resolução dessa questão, é preciso ter lido as resoluções das questões 181 e 182. Caso ainda não tenha lido, sugiro que leia nesse momento e retorne em seguida.



Seja M a inércia equivalente do trecho que é sustentado pela tração $T_2 \uparrow$ na figura acima.

A inércia equivalente do trecho sustentado pela tração $T_4 \uparrow$ é exatamente a mesma (M), visto que a retirada de apenas uma polia e um bloco de um sistema com infinitos blocos e polias não altera a inércia equivalente desse sistema.

Porém, enquanto o trecho sustentado pela tração $T_2 \uparrow$ está sujeito a um campo gravitacional $g \downarrow$, o trecho abaixo sustentado pela tração $T_4 \uparrow$ está sujeito a um campo gravitacional $(g-a) \downarrow$ no referencial acelerado, pelo Princípio da Equivalência de Einstein.

Assim, podemos escrever: $T_2 = M \cdot g$ (eq1) e $T_4 = M \cdot (g-a)$ (eq2)

Como todas as polias são ideais, vem: $T_4 = T_2 / 2$ (eq3)

De eq1, eq2 e eq3, vem: $a = g/2$. ☺ massa, né ?

Aplicando a segunda lei de Newton para a primeira caixa de cima, vem:

$$F_R = m \cdot a \Rightarrow T_4 - m \cdot g = m \cdot a, \text{ com } a = g/2 \Rightarrow T_4 = 3mg/2$$

Assim, sendo $T_2 = 2 \cdot T_4$, vem: $T_2 = 3mg$

Questão 323 – Resposta: alternativa a

Questão 324 – Resposta: alternativa e

Questão 325 - Resposta:
$$V_{\min} = \sqrt{\frac{R \cdot g \cdot (\operatorname{sen} \alpha - \mu \cdot \operatorname{cos} \alpha)}{(\operatorname{cos} \alpha + \mu \cdot \operatorname{sen} \alpha)}}$$

Dica: Veja exemplo resolvido 22, pág. 203

Questão 326 - Resposta: **Dica:** Veja exemplo resolvido 24, pág. 209

a) $\mu = 2$, b) 60 m/s = 216 km/h c) 42,2 m/s = 152,7 km/h d) 6000 N

Questão 327 - Resposta: Alternativa c, **Dica:** veja exemplo resolvido 25, pág. 212

Questão 328 - Resposta:
$$V_{\max} = \sqrt{125} \text{ m/s} \cong 11,2 \text{ m/s} \cong 40,3 \text{ km/h}$$

Dica: Veja exemplo resolvido 25, pág. 212

Questão 329 – Solução

O cilindro sobre o disco girante descreve um MCU de raio igual a L , no referencial da Terra, e possui uma aceleração centrípeta $a_{\text{ctp}} (\leftarrow)$ de módulo $a_{\text{ctp}} = \omega^2 \cdot R = \omega^2 \cdot L$ nesse referencial. Entretanto, no referencial do próprio disco, o cilindro não apresenta nem aceleração nem velocidade encontrando-se em “equilíbrio relativo” (repouso permanente).

Pelo Princípio da Equivalência de Einstein, a aceleração centrípeta que o cilindro possui (no referencial da Terra) é “sentida”, no referencial girante do disco (referencial não-inercial), em forma de uma gravidade radial que aponta para fora da curva, denominada gravidade centrífuga $g_{\text{ctfg}} \rightarrow$, de módulo $g_{\text{ctfg}} = \omega^2 \cdot R = \omega^2 \cdot L$. Essa gravidade aplica sobre o centro de massa do cilindro uma força gravitacional fictícia (força de inércia) denominada força centrífuga $F_{\text{ctfg}} \rightarrow$ de módulo :

$$F_{\text{ctfg}} = m \cdot g_{\text{ctfg}} = m \cdot \omega^2 \cdot R = m \cdot \omega^2 \cdot L \quad (\text{eq1})$$

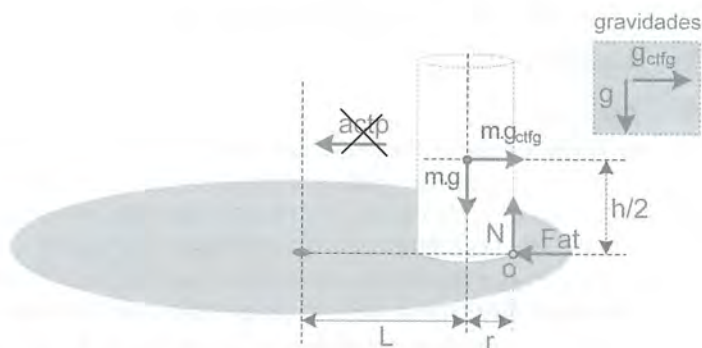
que empurra o cilindro radialmente para fora da curva. Como a intensidade dessa força centrífuga depende da velocidade angular ω de rotação do disco (em relação à Terra), quanto maior o valor dessa velocidade angular ω , maior será a força centrífuga $m \cdot \omega^2 \cdot L \rightarrow$, mais atrito estático \leftarrow será requerido para manter o cilindro imóvel sobre o disco, de forma que, a partir de um certo valor limite para ω , o cilindro findará escorregando radialmente para fora do disco.

A velocidade angular limite para que o cilindro esteja na iminência de escorregar é obtida a seguir:

Equilíbrio vertical: $N = m \cdot g \quad (\text{eq2})$

Equilíbrio relativo na direção radial: $F_{\text{at}} = F_{\text{ctfg}} \Rightarrow F_{\text{at}} = m \cdot \omega^2 \cdot L \quad (\text{eq3})$

A força de atrito é limitada: $F_{\text{at}} \leq \mu \cdot N \quad (\text{eq4})$



Substituindo eq2 e eq3 em eq4, vem:

$$Fat \leq \mu \cdot N \Rightarrow m \cdot \omega^2 \cdot L \leq \mu \cdot N \Rightarrow m \cdot \omega^2 \cdot L \leq \mu \cdot m \cdot g \Rightarrow \omega \leq \sqrt{\frac{\mu \cdot g}{L}}$$

$$\omega_{\min} = \sqrt{\mu \cdot \frac{g}{L}} \quad (\text{eq5})$$

O cilindro também tem tendência de tombar (capotar, cair, virar) para fora da curva, devido ao momento horário que a força centrífuga produz em relação ao ponto de apoio O (veja a figura). Para tentar impedir o tombamento, temos o momento anti-horário do peso do cilindro em relação ao ponto O. Estando o cilindro na iminência de tombar, a força normal $N \uparrow$ que age no cilindro já está posicionada no ponto O (último ponto de apoio do cilindro, antes de ele eventualmente vir a tombar). Assim, para não tombar, devemos ter:

Momento da força centrífuga \leq Momento do peso

$$F_{ctfg} \times (h/2) \leq P \cdot r, \quad \text{com } r = D/2$$

$$m \cdot \omega^2 \cdot L \cdot \frac{h}{2} \leq m \cdot g \cdot \frac{D}{2} \Rightarrow \omega \leq \sqrt{\frac{D}{h} \cdot \frac{g}{L}}$$

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{D}{h} \cdot \frac{g}{L}} \quad (\text{eq6})$$

Segundo o enunciado, temos $\mu > D/h$, o que nos permite concluir que:

$$\sqrt{\mu \cdot \frac{g}{L}} > \sqrt{\frac{D}{h} \cdot \frac{g}{L}}$$

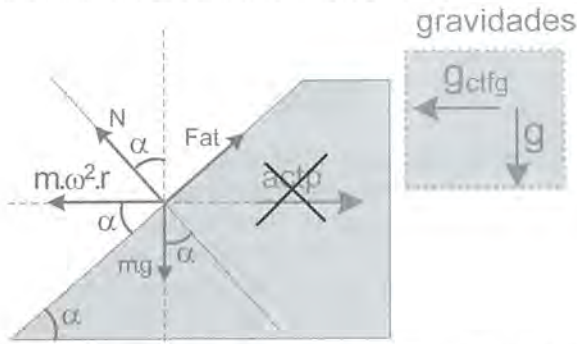
Assim, vemos que a velocidade angular mínima para não haver tombamento é menor que a velocidade angular mínima para não haver escorregamento. Assim, se a velocidade angular do disco giratório for aumentando muito lentamente, a velocidade angular crítica que é atingida primeiro é a do tombamento. Assim, o cilindro tombará antes de escorregar.

Questão 330 - Resposta: 20 cm, veja página 213, Exemplo Resolvido 26.

Questão 331 - Resposta: $\operatorname{tg}\alpha = \mu$

Questão 332 – Solução

No referencial da Terra, o objeto descreve um MCU animado de aceleração centrípeta $a_{\text{ctp}} = \omega^2 \cdot r \rightarrow$ apontando para o centro da curva. Entretanto, no próprio referencial em rotação do objeto, ele não possui nem velocidade nem aceleração centrípeta. Nesse referencial, a aceleração centrípeta é sentida pelo objeto na forma de uma gravidade centrífuga $g_{\text{ctfg}} = \omega^2 \cdot r \leftarrow$ (Princípio da Equivalência de Einstein), que produz uma força gravitacional fictícia centrífuga $F_{\text{ctfg}} = m \cdot g_{\text{ctfg}} = m \cdot \omega^2 \cdot r \leftarrow$ que age puxando o corpo radialmente para fora da curva. Devido à ação dessa força centrífuga, o objeto tem a tendência de escorregar ladeira abaixo e, por isso, sofre a ação de um F_{at} que age no sentido de tentar impedir o escorregamento do objeto.



Ao efetuarmos a mudança de referencial “Terra→referencial girante”, o nosso problema de “Dinâmica do MCU” é transformado num problema de “Estática”.

O corpo está em equilíbrio estático relativo, nesse referencial, o que nos permite adotar qualquer par de eixos para estudar o equilíbrio das forças.

Se fôssemos resolver o problema no referencial da Terra (inercial), seríamos obrigados a usar o par de eixos descrito na Figura 42 página 106, já que se trata de um MCU no plano horizontal. Nesse caso, teríamos que necessariamente decompor apenas as forças normal N e F_{at} .

Para facilitar a determinação da normal N , evitaremos decompô-la, adotando um par de eixos paralelo à rampa e normal à rampa. Nesse caso, decomporemos a força centrífuga $m \cdot \omega^2 \cdot r \leftarrow$ e o peso $m \cdot g \downarrow$.

Equilíbrio relativo na direção normal à rampa: $N + m \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \operatorname{sen}\alpha = m \cdot g \cdot \operatorname{cos}\alpha$ (eq1)

Equilíbrio relativo na direção da rampa: $F_{\text{at}} = m \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \operatorname{cos}\alpha + m \cdot g \cdot \operatorname{sen}\alpha$ (eq2)

A força de atrito é limitada: $Fat \leq \mu \cdot N$ (eq3)

Isolando N em eq1, Fat em eq2 e substituindo em eq3, vem:

$$Fat \leq \mu \cdot N \Rightarrow m \cdot \omega^2 r \cdot \cos \alpha + m \cdot g \cdot \sin \alpha \leq \mu \cdot (m \cdot g \cdot \cos \alpha - m \cdot \omega^2 r \cdot \sin \alpha)$$

$$\omega^2 \leq \frac{g \cdot (\mu \cdot \cos \alpha - \sin \alpha)}{r \cdot (\mu \cdot \sin \alpha + \cos \alpha)} \Rightarrow \omega^2 \leq \frac{10 \cdot (0,8 \times 0,86 - 0,5)}{0,2 \cdot (0,8 \times 0,5 + 0,86)} \Rightarrow \omega \leq 2,7 \text{ rad/s}$$

Portanto, temos $\omega_{\min} = 2,7 \text{ rad/s}$

Resposta Correta – Alternativa B

Questão 333 – Resposta: alternativa E – **Dica:** Veja a resolução da questão 332.

Questão 334 - Solução

Caso 1 - calculando o valor máximo de X: a Figura 138 mostra o diagrama das forças agindo no sistema, considerando que a distância x seja tão grande que o bloco A esteja na iminência de escorregar radialmente para fora da curva (puxado pela força centrífuga $F_{ctfg1} \rightarrow$ que age sobre ele em seu referencial acelerado), e levantar o bloco B que se encontra pendurado.

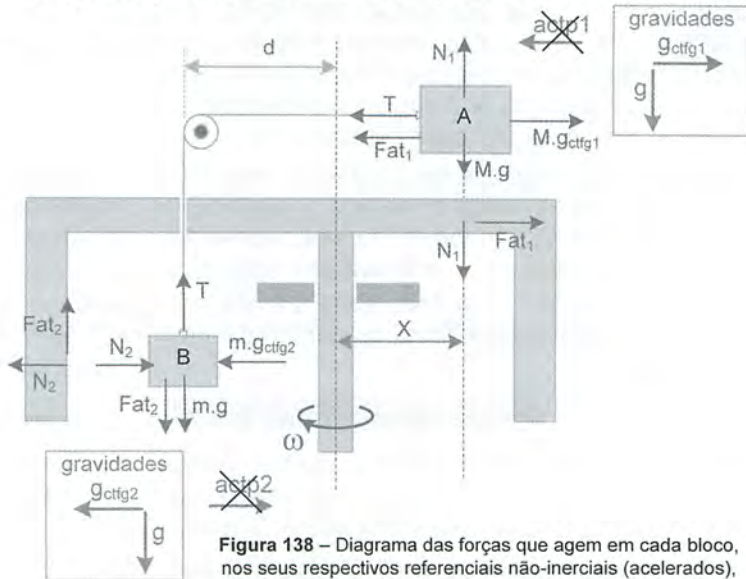


Figura 138 – Diagrama das forças que agem em cada bloco, nos seus respectivos referenciais não-inerciais (acelerados), para determinar o valor máximo de x que torna iminente o escorregamento dos blocos

O bloco A sobre a mesa girante descreve um MCU de raio igual a X , no referencial da Terra, e possui uma aceleração centrípeta $actp_1$ (\leftarrow) de módulo $actp_1 = \omega^2 \cdot R = \omega^2 \cdot X$ nesse referencial. Entretanto, em seu próprio referencial, o bloco A não apresenta nem aceleração nem velocidade (obviamente, ninguém possui a velocidade nem aceleração em relação a si

mesmo.....rsrsrs), encontrando-se em “equilíbrio relativo” (repouso permanente).

Pelo Princípio da Equivalência de Einstein, a aceleração centrípeta que A possui (no referencial da Terra) é “sentida”, no referencial girante da caixa A (referencial não-inercial), em forma de uma gravidade radial que aponta para fora da curva, denominada gravidade centrífuga $g_{ctfg1} \rightarrow$, de módulo $g_{ctfg1} = \omega^2 \cdot R = \omega^2 \cdot x$. Essa gravidade aplica sobre a caixa A uma força gravitacional fictícia (força de inércia) denominada força centrífuga $F_{ctfg1} \rightarrow$ (veja Figura 138), de módulo :

$$F_{ctfg1} = M \cdot g_{ctfg1} = M \cdot \omega^2 \cdot R = M \cdot \omega^2 \cdot x \quad (\text{eq1})$$

que empurra o bloco A radialmente para fora da curva (veja Figura 138). Como a intensidade dessa força centrífuga depende do raio (conforme a relação eq1), quanto maior o valor da distância x (raio), mais atrito estático será requerido para manter o bloco imóvel sobre a mesa, de forma que, a partir de um certo valor limite para x, o bloco A findará escorregando radialmente para fora da mesa, levantando o bloco B através do fio.

Uma análise semelhante pode ser feita para o corpo B pendurado no fio vertical (Figura 138). No referencial da Terra, este descreve um MCU e, portanto, possui uma aceleração centrípeta $a_{ctp2} (\rightarrow)$ de módulo $a_{ctp2} = \omega^2 \cdot r = \omega^2 \cdot d$. Entretanto, em seu próprio referencial, o bloco B não apresenta nem aceleração nem velocidade (obviamente, ninguém possui a velocidade nem aceleração em relação a si mesmo.....rsrsrs), encontrando-se em “equilíbrio relativo” (repouso permanente).

Pelo Princípio da Equivalência de Einstein, a aceleração centrípeta que B possui (no referencial da Terra) é “sentida”, no referencial girante da caixa B (referencial não-inercial) na forma de uma gravidade radial que aponta para fora da curva, denominada gravidade centrífuga $g_{ctfg2} \rightarrow$, de módulo $g_{ctfg2} = \omega^2 \cdot r = \omega^2 \cdot d$ (veja Figura 138). Essa gravidade aplica sobre a caixa A uma força gravitacional fictícia (força de inércia) denominada força centrífuga $F_{ctfg2} \rightarrow$, de módulo :

$$F_{ctfg2} = M \cdot g_{ctfg2} = m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot \omega^2 \cdot d \quad (\text{eq2})$$

que comprime o bloco B contra a parede vertical (veja Figura 138), trocando com esta um par de forças ação-reação: o bloco B aplica uma normal $N_2 \leftarrow$ na parede vertical e recebe desta a reação $\rightarrow N_2$.

Fato semelhante ocorre à força de atrito F_{at2} que age sobre o bloco B no sentido de impedir que ele escorregue parede acima. A reação a esse F_{at2} age na parede (veja a Figura 138). Ações e reações também foram mostradas nas interações entre o bloco A e a mesa, como pode ser visto na Figura 138.

Mas, o que dizer das força centrífugas F_{ctfg1} e F_{ctfg2} ? Onde agem as suas reações ? Ora, conforme o prof. Renato Brito enfatizou na Propriedade 11,

página 145, nenhuma força fictícia é fruto de uma interação, isto é, nenhuma força fictícia resulta da ação mútua entre dois corpos. Por esse motivo, todas elas não admitem reação. Assim, nunca esqueça:

As forças centrífugas, assim como qualquer outra força de inércia (força fictícia), não admitem reação. Elas surgem meramente na mudança de um referencial inercial (não acelerado) para um referencial não-inercial (acelerado) girante, com base no Princípio da Equivalência de Einstein, e o seu uso facilita enormemente a resolução de problemas em referenciais girantes, permitindo entender o efeito centrífugo (tendência de o corpo ser empurrado para fora da curva) de forma bem mais direta e intuitiva, sem precisar lançar mão dos conceitos de inércia (nem sempre intuitivos).

A partir desse ponto, equacionaremos o “equilíbrio relativo” de cada bloco no seu respectivo referencial acelerado.

- Equilíbrio do bloco A (Figura 138):

$$T + Fat_1 = F_{ctfg1} \stackrel{eq1}{\Rightarrow} T + Fat_1 = M \cdot \omega^2 \cdot x \quad (eq3)$$

- Condição de iminência de escorregar para o bloco A:

$$Fat_1 = Fat_{max1} = \mu \cdot N_1, \text{ com } N_1 = M \cdot g \Rightarrow Fat_1 = \mu \cdot M \cdot g \quad (eq4)$$

$$\text{De eq3 e eq4, temos: } T + \mu \cdot M \cdot g = M \cdot \omega^2 \cdot x \quad (eq5)$$

- Equilíbrio do bloco B (Figura 138): $Fat_2 + m \cdot g = T \quad (eq6)$

- Condição de iminência de escorregar para o bloco B ao longo da parede:

$$Fat_2 = Fat_{max2} = \mu \cdot N_2, \text{ com } N_2 = F_{ctfg2} \stackrel{eq2}{\Rightarrow} Fat_2 = \mu \cdot m \cdot \omega^2 \cdot d \quad (eq7)$$

$$\text{De eq6 e eq7, temos: } m \cdot g + \mu \cdot m \cdot \omega^2 \cdot d = T \quad (eq8)$$

Somando, membro a membro, as relações eq5 e eq8, vem:

$$m \cdot g + \mu \cdot m \cdot \omega^2 \cdot d + \mu \cdot M \cdot g = M \cdot \omega^2 \cdot x, \text{ substituindo os valores, temos:}$$

$$40 + 16 + 20 = 20 \cdot x \Rightarrow x_{max} = 3,8 \text{ m}$$

Caso 2 - calculando o valor mínimo de X: a Figura 139 mostra o diagrama das forças agindo no sistema, no caso em que a distância x é tão pequena (a força centrífuga $F_{ctfg1} = M \cdot \omega^2 \cdot x$ que atua na caixa A é tão pequena, quando comparada ao peso do bloco B) que o bloco A está na iminência de escorregar radialmente para dentro da curva (puxado pela tração T aplicada pela corda) indiretamente por conta do peso do bloco B.

Como, nesse caso 2, o sentido do escorregamento dos blocos é oposto ao sentido de escorregamento do caso 1, basicamente, o que mudará no diagrama de forças é apenas o sentido das forças de atrito agindo em cada bloco (na Figura 139). A partir desse ponto, equacionaremos o “equilíbrio relativo” de cada bloco no seu respectivo referencial acelerado.

- Equilíbrio do bloco A sobre a mesa (Figura 139):

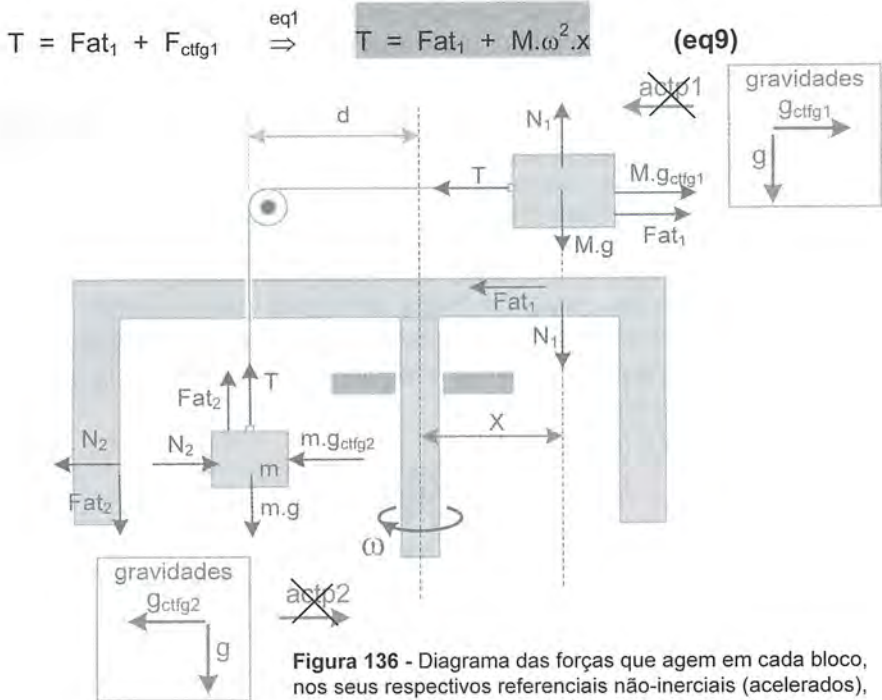


Figura 136 - Diagrama das forças que agem em cada bloco, nos seus respectivos referenciais não-inerciais (acelerados), para determinar o valor mínimo de x que torna iminente o escorregamento dos blocos

- Condição de iminência de escorregar para o bloco sobre a mesa:

$$Fat_1 = Fat_{\max 1} = \mu \cdot N_1, \text{ com } N_1 = M \cdot g \Rightarrow Fat_1 = \mu \cdot M \cdot g \quad (\text{eq10})$$

$$\text{De eq9 e eq10, temos: } T = \mu \cdot M \cdot g + M \cdot \omega^2 \cdot x \quad (\text{eq11})$$

- Equilíbrio do bloco B pendurado (Figura 139): $m \cdot g = T + Fat_2 \quad (\text{eq12})$

- Condição de iminência de escorregar para o bloco ao longo da parede:

$$Fat_2 = Fat_{\max 2} = \mu \cdot N_2, \text{ com } N_2 = F_{ctfg2} \xrightarrow{\text{eq2}} Fat_2 = \mu \cdot m \cdot \omega^2 \cdot d \quad (\text{eq13})$$

$$\text{De eq12 e eq13, temos: } m \cdot g = T + \mu \cdot m \cdot \omega^2 \cdot d \quad (\text{eq14})$$

Somando, membro a membro, as relações eq11 e eq14, vem:

$$m \cdot g = \mu \cdot m \cdot \omega^2 \cdot d + \mu \cdot M \cdot g + M \cdot \omega^2 \cdot x, \text{ substituindo os valores, temos:}$$

$$40 = 16 + 20 + 20 \cdot x \Rightarrow x_{\min} = 0,2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$$

Questão 335 - Resposta: $V \cong \sqrt{115} \cong 10,7 \text{ m/s}$ - letra c

Dica (veja página 209, exemplo resolvido 24)

Questão 336 – Solução

$$a) V = \omega \cdot R = 0,2 \times 40 = 8 \text{ m/s}$$

b) A única força que age sobre o homem é a força normal N que a superfície cilíndrica exerce sobre os pés dele. Essa força é radial, aponta para o centro da estação espacial em cada instante, e faz o papel de resultante centrípeta. Assim, escrevendo a segunda lei de Newton na direção radial (centrípeta) para o homem, vem:

$$F_{R\text{ctp}} = F_{\text{in}} - F_{\text{out}} = \frac{m \cdot v^2}{R} \Rightarrow N - 0 = \frac{m \cdot v^2}{R} \Rightarrow N = \frac{m \cdot v^2}{R} \quad (\text{eq1})$$

A nossa sensação de peso (peso aparente) é proveniente da normal N que age na gente. Quando nos sentimos mais pesados do que o de costume (por exemplo, no interior de um elevador subindo acelerado), é porque a normal N que está agindo na gente está maior que o de costume ($N > m \cdot g$). Ao contrário, quando nos sentimos mais leves que o de costume (por exemplo, no interior de um elevador descendo acelerado), é porque a força normal N que está agindo na gente está menor que o de costume ($N < m \cdot g$). Quando estamos no interior de um elevador em queda livre, embora a força peso esteja agindo sobre nós, não teremos sensação de peso pois, nesse caso, a normal N agindo em nossos pés será nula. A sensação de peso vem é da normal N .

A normal, por causa disso, é frequentemente chamada de “peso aparente”. Matematicamente, escrevemos:

$$N = P_{\text{aparente}} \Rightarrow N = m \cdot g_{\text{aparente}} \quad (\text{eq2})$$

$$m \cdot g_{\text{aparente}} = \frac{m \cdot v^2}{R} \Rightarrow g_{\text{aparente}} = \frac{v^2}{R} \quad (\text{eq3})$$

$$g_{\text{aparente}} = \frac{v^2}{R} = \frac{8^2}{40} = 1,6 \text{ m/s}^2 = 1,6 \text{ N/kg}$$

Concluimos que esse homem no interior dessa estação espacial sentirá uma gravidade $g = 1,6 \text{ m/s}^2$, por coincidência, é o mesmo valor da gravidade lunar.

Questão 337- Solução

De acordo com a resolução da questão anterior, a sensação de peso do astronauta, quando se encontra parado no interior da estação espacial, cuja periferia gira com velocidade tangencial u em relação às estrelas distantes (referencial inercial), é dada por:

$$N = P_{\text{apar}} = \frac{m \cdot u^2}{R} \quad (\text{eq1})$$

Ora, mas se o astronauta correr no interior da estação espacial, com velocidade v em relação a ela, no mesmo sentido do movimento dela, ele

terá uma velocidade tangencial total “ $u+v$ ” em relação às estrelas distantes (referencial inercial), e o seu peso aparente passará a valer:

$$N' = P_{\text{apar}}' = \frac{m \cdot (u+v)^2}{R} \quad (\text{eq2})$$

Segundo o enunciado, durante a corrida do astronauta, sua sensação de peso aumenta 21%, ou seja:

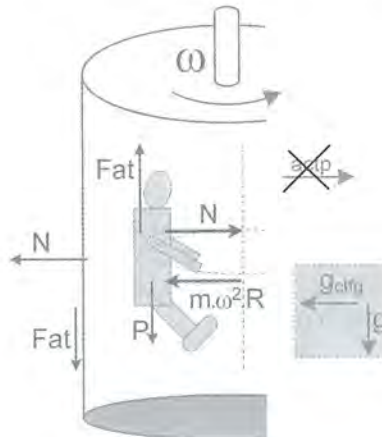
$$N' = 1,21 \cdot N \Rightarrow \frac{N'}{N} = 1,21 \Rightarrow \frac{\frac{m \cdot (u+v)^2}{R}}{\frac{m \cdot (u)^2}{R}} = 1,21 \Rightarrow \frac{u+v}{u} = \sqrt{1,21}$$

$$u + v = 1,1 \cdot u \Rightarrow v = u / 10, \text{ com } u = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi R_2}{T}$$

$$v = \frac{u}{10} = \frac{1}{10} \cdot \frac{2\pi R_2}{T} \Rightarrow v = \frac{\pi R_2}{5T}$$

Questão 338 – Solução

No referencial da Terra, a pessoa no interior do rotor descreve um MCU animado de aceleração centrípeta $a_{\text{ctp}} = \omega^2 \cdot R \rightarrow$ apontando para o centro da curva. Entretanto, no próprio referencial do rotor, a pessoa não possui nem velocidade nem aceleração centrípeta. Nesse referencial, a aceleração centrípeta é sentida pela pessoa na forma de uma gravidade centrífuga $g_{\text{ctfg}} = \omega^2 \cdot R \leftarrow$ (Princípio da Equivalência de Einstein), que produz uma força gravitacional fictícia centrífuga $F_{\text{ctfg}} = m \cdot g_{\text{ctfg}} = m \cdot \omega^2 \cdot R \leftarrow$ que age empurrando a pessoa radialmente para fora da curva, ou seja, contra a parede. A pessoa exercerá uma normal $N \leftarrow$ contra a parede, que reagirá aplicando uma normal $N \rightarrow$ na pessoa.



Ao efetuarmos a mudança de referencial “Terra→rotor”, o nosso problema de “Dinâmica do MCU” é transformado num problema de “Estática”. A pessoa que se encontra no interior do rotor está simplesmente em equilíbrio estático relativo, nesse referencial, o que nos permite escrever:

Equilíbrio das forças na vertical: $F_{at} = P \Rightarrow F_{at} = m \cdot g$ (eq1)

Equilíbrio relativo das forças na direção radial: $N = m \cdot \omega^2 \cdot R$ (eq2)

A força de atrito é limitada, sendo restrita ao intervalo:

$$F_{at} \leq \mu_E \cdot N \quad (\text{eq3})$$

Substituindo eq1 e eq2 em eq3, vem: $F_{at} \leq \mu_E \cdot N \Rightarrow m \cdot g \leq \mu_E \cdot m \cdot \omega^2 \cdot R$

$$g \leq \mu_E \cdot \omega^2 \cdot R \quad (\text{eq4})$$

A relação eq4 é a condição geral para que o garoto permaneça imóvel, no referencial do rotor (referencial não-inercial) sem escorregar para baixo. A partir de eq4, tanto podemos determinar ω_{\min} , como também podemos determinar

$\mu_{E \min}$, R_{\min} ou g_{\max} de tal forma que o garoto não escorregue em relação ao rotor. Isolando ω em eq4, vem:

$$\omega^2 \geq \frac{g}{\mu_E \cdot R} \Rightarrow \omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{\mu_E \cdot R}}$$

Nesse problema, quem é a reação à força centrífuga $F_{ctfg} = m \cdot \omega^2 \cdot R \leftarrow$ que age na pessoa localizada no interior do rotor ?

Ora, conforme já foi dito várias vezes, a força centrífuga não é uma força de interação, isto é, ela não decorre da interação entre dois corpos, portanto, ela não admite uma reação. Em outras palavras, ninguém aplicou essa força centrífuga na pessoa, portanto, ninguém sofrerá a reação a essa força.

Ela é apenas uma força fictícia que surge naturalmente quando fazemos uso do Princípio da Equivalência de Einstein, na mudança de um referencial inercial para um referencial em rotação. Nenhuma força fictícia admite reação. Ação e reação é um princípio que se aplica apenas a forças de interação.

Finalmente, lembramos o leitor que uma resolução alternativa desse problema, agora no referencial inercial, pode ser encontrada na página 460, questão 280. Compare as duas soluções, atentando para os diferentes argumentos utilizados na análise em cada referencial.

9 Apêndice sobre Cinemática

A Figura 1 mostra um MRUV onde o corpo parte do repouso ($v_0 = 0$) com aceleração a e atinge uma velocidade v_1 num tempo t_1 . Assim, essa aceleração é dada por $a = v_1 / t_1$, de forma que $v_1 = a \cdot t_1$. Qual a distância percorrida pelo móvel nesse tempo t_1 ? Ela pode ser determinada pela área sob a curva, ou seja:

$$d = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{t_1 \cdot v_1}{2} = \frac{t_1 \cdot (a \cdot t_1)}{2} \Rightarrow d = \frac{a \cdot t_1^2}{2} \quad (\text{eq1})$$

Esse mesmo resultado pode ser obtido analiticamente pela função horária do MUV:

$$d = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} = 0 \cdot t + \frac{a \cdot t_1^2}{2} \Rightarrow d = \frac{a \cdot t_1^2}{2}$$

Agora e se a cena ocorresse de trás para frente, como mostra a Figura 2?

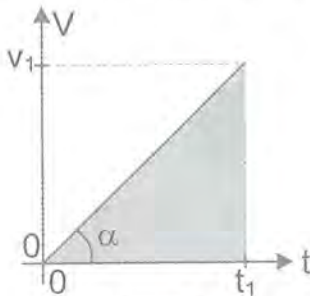


Figura 1

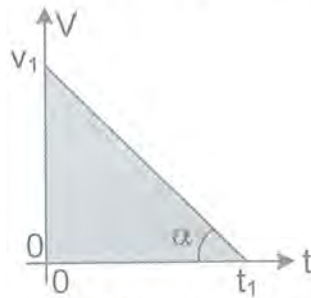


Figura 2

Nesse caso, o móvel inicia o movimento com velocidade v_1 e retarda uniformemente com aceleração escalar de módulo a , até atingir o repouso ($v = 0$) num tempo t_1 como mostra a Figura 2. O módulo da aceleração também é dado por $a = v_1 / t_1$, de forma que $v_1 = a \cdot t_1$. Qual a distância percorrida pelo móvel até atingir o repouso? Ela também pode ser determinada pela área sob a curva, ou seja:

$$d = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{t_1 \cdot v_1}{2} = \frac{t_1 \cdot (a \cdot t_1)}{2} \Rightarrow d = \frac{a \cdot t_1^2}{2}$$

Assim, graficamente, vemos que a distância percorrida pelo móvel nos casos mostrados nas Figuras 1 e 2 é a mesma, sendo dada pela relação eq1. Assim, a relação eq1 também é válida para calcular a distância percorrida pelo móvel mesmo no caso em que ele não parte do repouso, mas sim, retarda uniformemente até o repouso.

Ao efetuarmos a mudança de referencial “Terra→rotor”, o nosso problema de “Dinâmica do MCU” é transformado num problema de “Estática”. A pessoa que se encontra no interior do rotor está simplesmente em equilíbrio estático relativo, nesse referencial, o que nos permite escrever:

$$\text{Equilíbrio das forças na vertical: } F_{at} = P \Rightarrow F_{at} = m \cdot g \quad (\text{eq1})$$

$$\text{Equilíbrio relativo das forças na direção radial: } N = m \cdot \omega^2 \cdot R \quad (\text{eq2})$$

A força de atrito é limitada, sendo restrita ao intervalo:

$$F_{at} \leq \mu_E \cdot N \quad (\text{eq3})$$

Substituindo eq1 e eq2 em eq3, vem: $F_{at} \leq \mu_E \cdot N \Rightarrow m \cdot g \leq \mu_E \cdot m \cdot \omega^2 \cdot R$

$$g \leq \mu_E \cdot \omega^2 \cdot R \quad (\text{eq4})$$

A relação eq4 é a condição geral para que o garoto permaneça imóvel, no referencial do rotor (referencial não-inercial) sem escorregar para baixo. A partir de eq4, tanto podemos determinar ω_{\min} , como também podemos determinar

$\mu_{E \min}$, R_{\min} ou g_{\max} de tal forma que o garoto não escorregue em relação ao rotor. Isolando ω em eq4, vem:

$$\omega^2 \geq \frac{g}{\mu_E \cdot R} \Rightarrow \omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{\mu_E \cdot R}}$$

Nesse problema, quem é a reação à força centrífuga $F_{\text{ctfg}} = m \cdot \omega^2 \cdot R \leftarrow$ que age na pessoa localizada no interior do rotor ?

Ora, conforme já foi dito várias vezes, a força centrífuga não é uma força de interação, isto é, ela não decorre da interação entre dois corpos, portanto, ela não admite uma reação. Em outras palavras, ninguém aplicou essa força centrífuga na pessoa, portanto, ninguém sofrerá a reação a essa força.

Ela é apenas uma força fictícia que surge naturalmente quando fazemos uso do Princípio da Equivalência de Einstein, na mudança de um referencial inercial para um referencial em rotação. Nenhuma força fictícia admite reação. Ação e reação é um princípio que se aplica apenas a forças de interação.

Finalmente, lembramos o leitor que uma resolução alternativa desse problema, agora no referencial inercial, pode ser encontrada na página 460, questão 280. Compare as duas soluções, atentando para os diferentes argumentos utilizados na análise em cada referencial.

9 Apêndice sobre Cinemática

A Figura 1 mostra um MRUV onde o corpo parte do repouso ($v_0 = 0$) com aceleração a e atinge uma velocidade v_1 num tempo t_1 . Assim, essa aceleração é dada por $a = v_1 / t_1$, de forma que $v_1 = a \cdot t_1$. Qual a distância percorrida pelo móvel nesse tempo t_1 ? Ela pode ser determinada pela área sob a curva, ou seja:

$$d = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{t_1 \cdot v_1}{2} = \frac{t_1 \cdot (a \cdot t_1)}{2} \Rightarrow d = \frac{a \cdot t_1^2}{2} \quad (\text{eq1})$$

Esse mesmo resultado pode ser obtido analiticamente pela função horária do MUV:

$$d = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} = 0 \cdot t + \frac{a \cdot t_1^2}{2} \Rightarrow d = \frac{a \cdot t_1^2}{2}$$

Agora e se a cena ocorresse de trás para frente, como mostra a Figura 2?

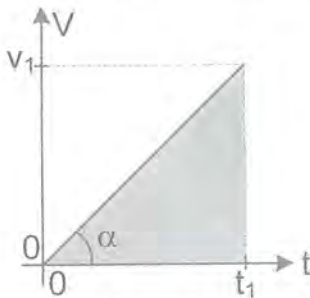


Figura 1

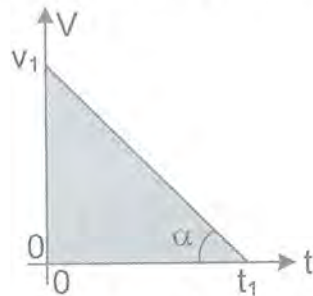


Figura 2

Nesse caso, o móvel inicia o movimento com velocidade v_1 e retarda uniformemente com aceleração escalar de módulo a , até atingir o repouso ($v = 0$) num tempo t_1 como mostra a Figura 2. O módulo da aceleração também é dado por $a = v_1 / t_1$, de forma que $v_1 = a \cdot t_1$. Qual a distância percorrida pelo móvel até atingir o repouso? Ela também pode ser determinada pela área sob a curva, ou seja:

$$d = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{t_1 \cdot v_1}{2} = \frac{t_1 \cdot (a \cdot t_1)}{2} \Rightarrow d = \frac{a \cdot t_1^2}{2}$$

Assim, graficamente, vimos que a distância percorrida pelo móvel nos casos mostrados nas Figuras 1 e 2 é a mesma, sendo dada pela relação eq1. Assim, a relação eq1 também é válida para calcular a distância percorrida pelo móvel mesmo no caso em que ele não parte do repouso, mas sim, retarda uniformemente até o repouso.

10 Apêndice sobre infinitos

Nesse pequeno apêndice, apresentarei uma técnica muito simples utilizada na Matemática para se resolver problemas que envolvem infinitos. Caso você ainda não a conheça, esse apêndice será vital para que você entenda a resolução da questão da questão 182 desse livro.

Determine o valor da expressão $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}$

Solução:

Chamemos a expressão desejada de x , ou seja :

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}$$

elevando ao quadrado, ambos os membros, vem:

$$x^2 = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$$

$$x^2 - 2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$$

Ora, mas o 2º membro da igualdade acima é o próprio x inicial. Assim, podemos escrever:

$$x^2 - 2 = x$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

resolvendo, vem :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2} = 2$$

Assim, concluímos que : $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}} = 2$

Note que numa sucessão de infinitos termos, retirar um deles não altera a sucessão.

Em outras palavras:

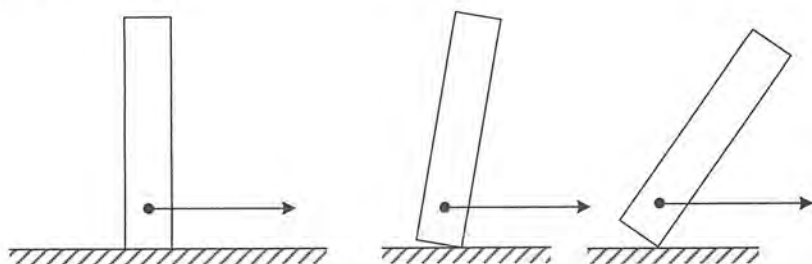
$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} = 2$$

Na verdade, nesse tipo de problema com infinitos termos, retirar uma quantidade qualquer finita deles não altera o valor da expressão.

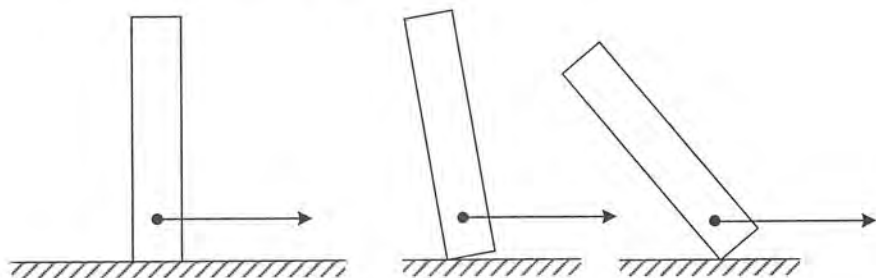


11 Apêndice sobre rolamento

Muitos leitores, ao se depararem com as questões 55 e 59, questionam por que o carretel não rola para a esquerda já que o fio está sendo puxado para a direita. Para esclarecer essas questões para o leitor, elaborei essas duas figuras abaixo. Veja:



Movendo-se a corda suavemente para a direita, a ação do atrito estático do chão sobre o bloco, juntamente com a pequena e suave tração exercida pela corda sobre ele, fazem-no tombar pra direita (sentido horário). Esse é o caso considerado nas questões de carretel nesse livro. O fio é suavemente tracionado de forma que o ponto de contato do corpo com o solo nem chega a escorregar, de forma que a força de atrito trocada entre o corpo e o solo é estático (e não cinético). Em suma: nas questões de rolamento de carretel nesse livro, o carretel sempre rola sem escorregar.



Puxando-se o fio bruscamente para a direita, dando um supapo bem firme e forte, o bloco fatalmente tombará para a esquerda (sentido anti-horário). Nesse caso o puxão é tão violento que o F_{at} é cinético, a base do bloco escorrega em relação ao solo durante o puxão. Esse não é o caso considerado nos problemas de carretel que desenrolam.

12 Referências Bibliográficas

* Alonso e Finn

Alonso, M.S & Finn, E.J. *Física – Um Curso Universitário*. São Paulo, Edgard Blucher, 1972.

* Beer & Johnston

Beer, Ferdinand P. & Johnston, E. Russel. *Mecânica vetorial para engenheiros*. São Paulo, McGraw-Hill / Makron books, 1991.

* Challenging Problems

Korsunsky, Boris. *Challenging problems for Physics. Florida – EUA, Saundes College, 1995.*

* Curso de Física de Berkeley

Kittel, Charles; Knight, Walter. D.; Ruderman, Malvin A. *Curso de Física de Berkeley*. São Paulo, Edgard Blücher, 1970.

* Física Clássica - Calçada

Calçada, Caio Sérgio; Sampaio, Jorge Luiz. *Física clássica*. São Paulo, Atual, 1985. v.2

* Irodov

Irodov, Igor Evgenevich. *Problems in General Physics*. Moscou, Mir, 1977.

* Kósel

Kósel, Stanislaw. *Problemas de Física Dirigidos por S. Kósel*. Moscou, Mir, 1977. (disponível para venda em www.vestseller.com.br)

* L. P. Maia

Maia, L. P. *Mecânica*. Rio de Janeiro, Nacionalista, 1964. (geralmente disponível para venda na Livraria Arte e Ciência - 0xx85 3231 0404)

* Nussenzveig

Nussenzveig, H. Moysés. *Curso de física básica – 1 mecânica – 2ª edição*. São Paulo, Edgard Blücher, 1981. v.1 e 2

* Pierre Lucie

Lucie, Pierre. *Física básica – mecânica 1*. Rio de Janeiro, Campus, 1979.

* Pinsky

Pinsky, A. A. *Problems in physics*. Moscou, Mir, 1980. (disponível para venda em www.urss.ru)

* Resnick & Halliday

Resnick, Robert & Halliday, D. *Física*. São Paulo, Livros Técnicos e Científicos, 1974. v.1

* Saraeva

Bukhovtsev, B. B.; Krivtchenkov, V.D.; Miakishev, G.Y.; Saraeva, I.M. *Problemas selecionados de física elementar*. Moscou, Mir, 1977. (disponível para venda em www.vestseller.com.br)

* Shames

Shames, Irving H. *Dinâmica: mecânica para engenharia*. São Paulo, Prentice Hall, 2003. v.2

* Tópicos da Física

Doca, Ricardo Helou; Biscuola, Gualter José; Boas, Newton Vilas. *Tópicos da Física*. São Paulo, Saraiva, 2001. v.1

* Tore Nils Johnson

Folmer-Johnson, Tore Nils Olof. *Física para vestibular*. São Paulo, Nobel, 1965.

* T.O.F

Gonçalves, Dalton; Bazin, Affonso Celso; Oliveira, Gilberto Seixas; Guimarães, Luiz Alberto; Machado, Luiz Antônio; Justo, Tomás Guisasola. *Testes orientados de Física*. Rio de Janeiro, Ao livro Técnico, 1974.

* Classical Mechanics

Morin, David. *Introduction to Classical Mechanics*. United States, Cambridge University, 2007.





excelentes autores nacionais, como o ilustre Caio Guimarães, de Matemática.

A VestSeller tem como objetivo maior incrementar o nível técnico e a qualidade dos livros de Ciências Exatas no Brasil disponíveis para professores e estudantes, democratizando o conhecimento para todos aqueles que o busquem.

Sua linha editorial é voltada exclusivamente para livros de ciências exatas para a preparação de estudantes tanto para olimpíadas de Matemática, Física e Química, quanto para os exames vestibulares mais difíceis do Brasil em especial, os do IME e do ITA.



Esse livro aborda as Leis de Newton sob uma perspectiva inovadora dentre os demais livros de Mecânica: analisa, tanto no Referencial Inercial quanto no Referencial Não-Inercial, toda a Dinâmica dos movimentos retilíneo e curvilíneo, tanto na ausência quanto na presença de atrito, explorando os mais variados vínculos geométricos. Além da teoria completa, o livro contém mais de 330 problemas propostos incluindo Cinemática Geral e Leis de Newton, dos quais, mais de 220 problemas encontram-se integralmente resolvidos e comentados.

O Princípio da Equivalência de Einstein, abordado nesse livro de forma muito didática e elucidativa, trata-se de uma ferramenta fantástica para a resolução de complexos problemas de Dinâmica pois, além de dar ao estudante uma nova visão das leis de Newton, propicia resoluções muito mais rápidas e elegantes. O estudante de Física que domina a análise de problemas de Dinâmica no Referencial Não-Inercial certamente tem um grande diferencial a seu favor, levando grande vantagem em Olimpíadas de Física e vestibulares IME ITA.

Essa coleção de Mecânica para vestibulandos IME ITA é composta de:

- Volume I - Cinemática e Leis de Newton
- Volume II - Trabalho e Energia, Impulso e Quantidade de Movimento, Dinâmica do Centro de Massa e Sistemas com Massa Variável.
- Volume III - Estática, Hidrostática, Gravitação e MHS.



www.VestSeller.com.br

ISBN 857564502-1



9 788575 645024