

FRENTE: MATEMÁTICA IV

PROFESSOR(A): MARCELO MENDES

ASSUNTO: PRINCÍPIO DA INCLUSÃO-EXCLUSÃO

EAD - ITA

AULAS 30 A 32



Resumo Teórico

Princípio da Inclusão-Exclusão

• Sejam A_1, A_2, \dots, A_n conjuntos finitos. Daí,

$$I. n = 2: |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

$$II. n = 2: |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| + |A_3 \cap A_1|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$III. \text{Em geral: } \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = |A_1| + \dots + |A_n| - (|A_1 \cap A_2| + \dots + |A_{n-1} \cap A_n|) + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

Permutações Caóticas

Uma permutação simples dos elementos a_1, a_2, \dots, a_n é dita caótica quando nenhum dos a_i está em sua posição original e a quantidade desse tipo de permutação é dado por

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right).$$



Exercícios de Fixação

- (ITA) Denotemos por $n_{(x)}$ o número de elementos de um conjunto finito X . Sejam A, B, C conjuntos tais que $n(A \cup B) = 8$, $n(A \cup C) = 9$, $n(B \cup C) = 10$, $n(A \cup B \cup C) = 11$ e $n(A \cap B \cap C) = 2$. Então, $n(A) + n(B) + n(C)$ é igual a:
A) 11
B) 14
C) 15
D) 18
E) 25
- (ITA) Quantos números inteiros existem, de 1000 a 10000, não divisíveis nem por 5 e nem por 7?
- Quantas funções $f: \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ sobrejetoras existem?

- Seja $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$ um número natural e sua fatoração canônica em primos. A função de Euler $\varphi(n)$ representa a quantidade de números inteiros positivos menores que n e primos com n . Mostre que $\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$.

- (IME) Um elevador com 7 pessoas parte do andar térreo de um prédio e faz 4 paradas em andares diferentes. Determinar de quantas maneiras diferentes todas aquelas 7 pessoas podem desembarcar até a 4ª parada, inclusive.



Exercícios Propostos

- Do conjunto de todos os números naturais $n \leq 200$, retiram-se os múltiplos de 5 e, em seguida, os múltiplos de 6. Calcule a soma dos números que permanecem no conjunto.
- Quantas são as permutações da palavra CAMELO em que C, A ou M estão na posição original.
- Dentre os números inteiros menores que ou iguais a 1.000.000, inclusive, quantos não são quadrados perfeitos, cubos perfeitos e nem quartas potências perfeitas?
- Seja m um inteiro positivo dado. Sendo p_1, p_2, \dots, p_r números menores que ou iguais a m e primos entre si, encontre uma fórmula para o cálculo do número de inteiros positivos menores que ou iguais a m e que não são divisíveis por $p_i, 1 \leq i \leq r$.
- Quantos são os inteiros positivos menores que ou iguais a 30 que não são divisíveis por 3, 5 ou 8?
- De quantos modos n casais podem sentar-se ao redor de uma mesa circular de tal forma que marido e mulher não fiquem juntos?
- Determine o número de permutações simples dos elementos a_1, a_2, \dots, a_n , determine o número daquelas em que a_1 não está na primeira posição, a_2 não está na segunda posição e nem a_3 está na terceira posição.
- Quantas permutações dos inteiros 1, 2, 3, ..., 9, 10 têm exatamente 4 dos números em suas posições originais?

09. Quantos são os anagramas da palavra DESAFIO que apresentam exatamente duas letras na posição original?
- A) 120
B) 144
C) 336
D) 440
E) 924
10. (ITA) Sejam A e B dois conjuntos com 3 e 5 elementos, respectivamente. Quantas funções sobrejetivas $f: B \rightarrow A$ existem?

Gabarito

Exercícios de Fixação

01	02	03	04	05
D	*	*	–	*

*02. 6171

03. $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i n^{n-k}$

05. 8400

Exercícios Propostos

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
*	*	*	*	*	*	*	*	E	*

*01. 13354

02. 294

03. 998910

04. $m - \sum_i \left\lfloor \frac{m}{p_i} \right\rfloor + \sum_{i < j} \left\lfloor \frac{m}{p_i p_j} \right\rfloor - \dots + (-1)^r \left\lfloor \frac{m}{p_1 p_2 \dots p_r} \right\rfloor$

05. 14

06. $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i 2^i (2n-1-i)!$

07. $n! - 3(n-1)! + 3(n-2)! - (n-3)!$

08. $\binom{10}{4} \cdot D_6 = 55650$

10. 150