INEQUAÇÕES DE PRIMEIRO E SEGUNDO GRAU

Vamos estudar inequações, isto é, a comparação de expressões por meio de desigualdades.

Uma inequação é uma expressão que compara duas parcelas por meio de desigualdades, usando os símbolos $<, \leq, >, \geq, \neq$ como comparativos.

Exemplo: A expressão $3x + 2 > 0$ é uma inequação.

Assim como no caso das equações, podemos somar e multiplicar valores dos dois lados da inequação, mas devemos prestar atenção a um detalhe muito importante:

Quando multiplicamos ou dividimos ambos os lados de uma inequação por um número negativo, o sinal da desigualdade deve ser invertido.

Exemplo: Considere a inequação $4x - 5 > 2$.

Se multiplicarmos ambos os lados da expressão por -1, devemos inverter o sinal da desigualdade e obtemos $-(4x - 5) < (-2)$.

INEQUAÇÕES DE PRIMEIRO GRAU

Se pelo menos uma das parcelas de uma inequação for uma expressão de primeiro grau, dizemos que a inequação é de primeiro grau.

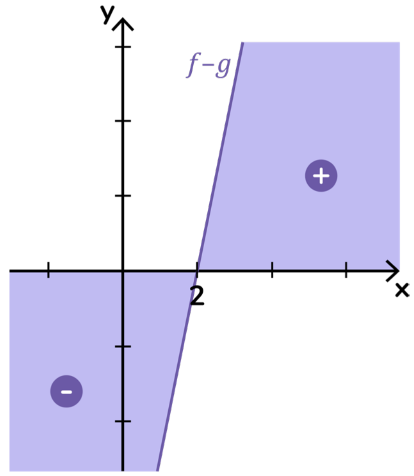
Para resolver inequações de primeiro grau, vamos usar nossos conhecimentos a respeito de funções afim e do estudo do sinal de funções. Primeiramente, iremos interpretar os dois lados da inequação como funções afim, de forma que a inequação se tornará algo como $f(x)>g(x)$. Em seguida, iremos resolver a equação $f(x) - g(x) = 0$ e, finalmente, analisar o sinal da função $f-g$ para ver quando ela é positiva ou negativa. O exemplo a seguir ilustra estes passos.

Exemplo: Resolva a inequação $6x - 8 \leq x + 2$.

Primeiramente, vamos definir $f(x) = 6x - 8$ e $g(x) = x + 2$. Agora, vamos resolver $f(x) - g(x) = 0$:

$$f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow 6x - 8 - x - 2 = 0 \Rightarrow 5x - 10 = 0 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$$

Vamos analisar o sinal da função $(f - g)(x)$. Se $x < 2$, digamos $x = 0$, temos $(f - g)(0) = -10$, ou seja, para $x < 2$, $(f - g)(x)$ é negativa. Ainda, se $x > 2$, digamos $x = 4$, temos $(f - g)(4) = 10$, ou seja, $(f - g)(x)$ é positiva para todo $x > 2$:



Agora, voltamos à inequação. Queremos ter $6x - 8 \leq x + 2$, isto é, $f(x) - g(x) \leq 0$. Segundo o estudo do sinal da função, os pontos que satisfazem essa condição são $x \leq 2$. Logo, a solução da inequação é o intervalo $(-\infty, 2]$.

INEQUAÇÕES DE SEGUNDO GRAU

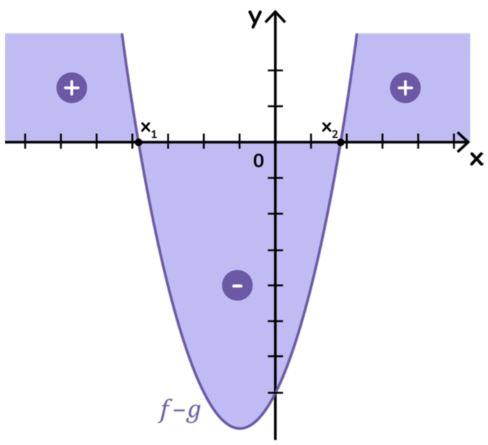
Assim como as inequações de primeiro grau, as inequações de segundo grau são comparações de expressões por meio de desigualdades representadas pelos símbolos $<$, $\leq$, $>$, $\geq$, $\neq$. Neste caso, porém, pelo menos uma das parcelas comparadas é de segundo grau:

> Uma inequação de segundo grau é uma inequação tal que ao menos uma das parcelas comparadas é uma expressão de grau dois.

Para resolver uma inequação de segundo grau, seguimos os mesmos passos feitos para as inequações de primeiro grau. O exemplo a seguir ilustra os passos:

Exemplo: Considere a inequação $x^2 + 2x - 5 > 2$.

Para resolvê-la, iremos considerar $f(x) = x^2 + 2x - 5$ e $g(x) = 2$. Primeiramente, devemos resolver a equação $x^2 + 2x - 5 - 2 = 0$, isto é, encontrar as raízes de $x^2 + 2x - 7$. Pela Fórmula de Bhaskara, temos $x_1 = -1 - 2\sqrt{2}$ e $x_2 = 2\sqrt{2} - 1$. Agora, vamos realizar o estudo do sinal de $f - g$. Como $1 > 0$, sabemos que $(f - g)(x)$ será positiva para todo $x > x_2$ e para todo $x < x_1$, nula em x_1 e em x_2 e negativa para $x_1 < x < x_2$, conforme a imagem a seguir.



Voltando para a inequação, queremos ter $x^2 + 2x - 5 > 2$, isto é, $f(x) - g(x) > 0$. Assim, do estudo de sinal que realizamos, podemos concluir que os pontos que satisfazem essa desigualdade são todos os x tais que $x > x_2$ e $x < x_1$, ou seja, a solução da inequação do exemplo é $(-\infty, -1 - 2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2} - 1, \infty)$.

Note que o intervalo é aberto nos valores das raízes porque o exemplo não se preocupou com os valores de x que zeram a inequação.

INEQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

Podemos utilizar as inequações para comparar uma expressão com duas outras simultaneamente. Neste caso, escrevemos algo como

$$h(x) \leq f(x) < g(x)$$

Observação: Inequações simultâneas podem aparecer com outras desigualdades, nem sempre será da forma acima.

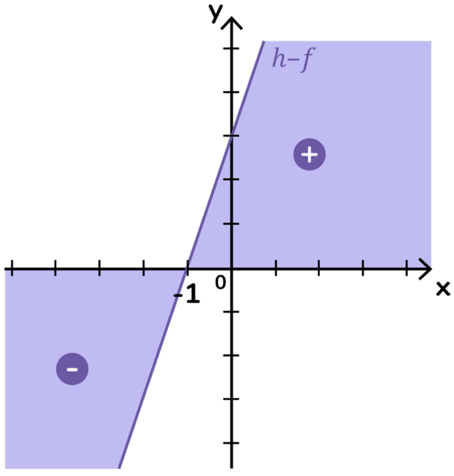
Para resolver inequações simultâneas, resolvemos cada uma das inequações separadamente e, em seguida, fazemos a intersecção das soluções. Observe o exemplo a seguir:

Exemplo: Considere a inequação simultânea $4x + 8 \leq x + 5 < -3x + 9$.

Primeiramente, definimos $h(x) = 4x + 8$, $g(x) = -3x + 9$ e $f(x) = x + 5$. Vamos resolver $h(x) \leq f(x)$. Seguindo os passos indicados anteriormente, temos:

$$h(x) \leq f(x) \Rightarrow h(x) - f(x) \leq 0 \Rightarrow 4x + 8 - x - 5 \leq 0 \Rightarrow 3x + 3 \leq 0$$

Resolvendo a equação $3x + 3 = 0$, temos que $(h - f)(x)$ se anula quando $x = -1$. Agora, analisando o sinal de $(h - f)(x)$, temos que a função é positiva para $x > -1$ e negativa para $x < -1$:

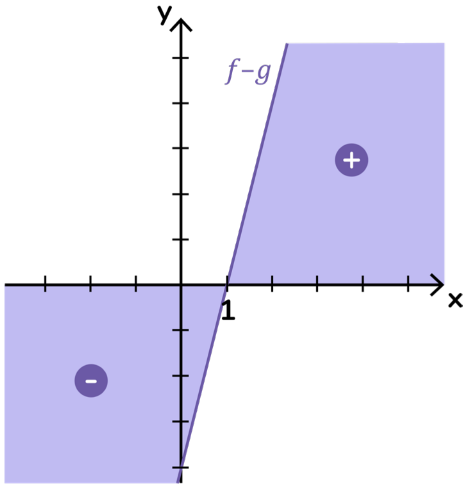


Assim, a solução de $h(x) \leq f(x)$ ocorre quando $h(x) - f(x) \leq 0$, isto é, quando $x \leq -1$.

Agora, vamos resolver a inequação $f(x) < g(x)$:

$$f(x) < g(x) \Rightarrow x + 5 < -3x + 9 \Rightarrow x + 5 + 3x - 9 < 0 \Rightarrow 4x - 4 < 0$$

Resolvendo a equação $4x - 4 = 0$, temos que $(f - g)(x)$ se anula quando $x = 1$. Estudando o sinal de $(f - g)(x)$, temos que $(f - g)(x)$ é positiva para $x > 1$ e negativa para $x < 1$, conforme a imagem:



Assim, a solução de $f(x)<g(x)$ é o intervalo $(-\infty,1)$. Fazendo a intersecção das soluções das duas inequações, temos que a solução da inequação simultânea é

$$(-\infty,-1]\cap(-\infty,1)=(-\infty,-1]$$

Observação: Nem sempre a intersecção entre as soluções das inequações que compõem uma inequação simultânea existe, isto é, pode ocorrer de a intersecção entre as soluções ser vazia. Neste caso, dizemos que a inequação simultânea não possui solução.

ANOTAÇÕES