caderno de
revisão
PROFESSOR

MATEMÁTICA

conecte

Editora Saraiva

caderno de
revisão

MATEMÁTICA

conecte

Editora Saraiva

Elaboração de originais
Beto Paiva – Professor e coordenador pedagógico em escolas de ensino médio e cursos pré-vestibulares.
Leo Paulo de Assis – graduado em engenharia civil pela Escola de Engenharia de São Carlos – SP da Universidade de São Paulo.
Odimar Navas Ferrite – Graduado em matemática pelo Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas (Ibilce) da Universidade Estadual Paulista (Unesp) de São José do Rio Preto – SP.
Material originalmente publicado por Ético Sistema de Ensino

Gerente editorial	M. Esther Nejm
Editor responsável	Viviane de L. Carpegiani Tarraf
Editores	Maria Ângela de Camargo, Fernando Manenti Santos, Guilherme Reghin Gaspar
Auxiliares de serviços editoriais	Eduardo Oliveira Guaitoli, Felipe Ferreira Gonçalves (estagiário), Rafael Rabaçallo Ramos
Coordenador de revisão	Camila Christi Gazzani
Revisores	Luciana Azevedo, Maura Loria, Raquel Alves Taveira
Coordenador de iconografia	Cristina Akisino
Pesquisa iconográfica	Enio Lopes, Danielle Alcântara
Licenciamento de textos	Érica Brambila
Gerente de artes	Ricardo Borges
Coordenador de artes	José Maria de Oliveira
Produtor de artes	Narjara Lara
Design	Homem de Melo & Troia Design
Fotos de capa	Jules Frazier/Photodisc/Getty Images, Dan McCoy - Rainbow/Getty Images, PASIEKA/SPL/Getty Images, Ed Freeman/Photodisc/Getty Images, Getty Images, Thinkstock/Getty Images, Chad Baker/Photodisc/Getty Images, Rob A. Johnston/Walkabout Wolf Photography/Getty Images
Diagramação	Francisco Augusto da Costa Filho, Marcia Sasso
Assistente	Paula Regina Costa de Oliveira
Ilustrações	Alan Carlos Barbosa, José Ângelo Góes Mattei Júnior, José Segura Garcia Junior, Luciano Costa de Oliveira, Marcelo de Almeida, Paulo Sérgio Fritoli
Tratamento de imagens	Emerson de Lima
Produtor gráfico	Robson Cacau Alves
Impressão e acabamento	

731.908.002.001

Editora Saraiva

SAC 0800-0117875
De 2ª a 6ª, das 8h30 às 19h30
www.editorasaraiva.com.br/contato

Rua Henrique Schaumann, 270 – Cerqueira César – São Paulo/SP – 05413-909

Sumário

Fatoração algébrica

1. Principais casos de fatoração

Fatorar um polinômio é decompor esse polinômio em fatores, isto é, transformá-lo em um produto.

1º caso: Fator comum

Aplicando a propriedade distributiva no produto $a(x + y)$ temos:

$$a \cdot (x + y) = ax + ay$$

Assim:

$$\mathbf{a}x + \mathbf{a}y = \mathbf{a} \cdot (x + y)$$

Dizemos que o fator comum foi colocado **em evidência**.

2º caso: Agrupamento

Consideremos a expressão algébrica a seguir:

$$ax + ay + bx + by$$

Essa expressão não possui um fator comum, mas, se separarmos as parcelas em grupos, teremos o fator *a* comum às duas primeiras parcelas e o fator *b* comum às duas últimas. Então:

$$a \cdot (x + y) + b \cdot (x + y)$$

Essa nova situação, $x + y$ é um fator comum e, portanto, pode ser colocado em evidência:

$$(x + y) \cdot (a + b)$$

3º caso: Diferença de dois quadrados

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

4º caso: Trinômio quadrado perfeito

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

2. Produtos notáveis

I. $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$
II. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
III. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
IV. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
V. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Além desses, também temos:

VI. Soma de dois cubos:
$(a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
VII. Diferença de dois cubos:
$(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Atividades

1 Fatore as expressões:

a) $12x^2y^3 - 16x^3y^2 + 20x^4y$

$4x^2y \cdot (3y^2 - 4xy + 5x^2)$

b) $8a^2 - 4ac + 6ab - 3bc$

$4a \cdot (2a - c) + 3b \cdot (2a - c) = (2a - c) \cdot (4a + 3b)$

c) $x^4 - y^4$

$(x^2)^2 - (y^2)^2 = (x^2 - y^2) \cdot (x^2 + y^2) = (x - y) \cdot (x + y) \cdot (x^2 + y^2)$

d) $m^2 + 6mn^2 + 9n^4$

$(m + 3n^2)^2$

e) $27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$

$(3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2y + 3 \cdot (3x) \cdot (2y)^2 - (2y)^3 = (3x - 2y)^3$

2 (PUC-MG) A expressão $a^3 - 2a^2 - a + 2$ pode ser escrita na forma de um produto de três fatores. A soma desses fatores é igual a:

a) $a^2 + 2a - 4$
b) $a^2 + 2a$
c) $3a - 2$
d) $3a$

$a^3 - 2a^2 - a + 2 = a^2(a - 2) - (a - 2) =$

$= (a - 2) \cdot (a^2 - 1) = (a - 2) \cdot (a - 1) \cdot (a + 1)$

Soma: $a - 2 + a - 1 + a + 1 = 3a - 2$

Alternativa *c*

3 Sendo $a = 19$ e $b = 11$, calcule o valor da expressão A em cada caso:

a) $A = \dfrac{4a - 2ab}{ab - 2a}$

$A = \dfrac{4a - 2ab}{ab - 2a} \Rightarrow A = \dfrac{-2ab + 4a}{ab - 2a} \Rightarrow A = \dfrac{-2a \cdot (b - 2)}{a \cdot (b - 2)}$

$\therefore A = -2$

b) $A = \dfrac{(a + b)^2 - 5a - 5b}{a + b - 5}$

$A = \dfrac{(a + b)^2 - 5a - 5b}{a + b - 5} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \dfrac{(a + b) \cdot (a + b) - 5 \cdot (a + b)}{a + b - 5} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \dfrac{(a + b) \cdot \cancel{(a + b - 5)}}{\cancel{(a + b - 5)}} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = a + b \Rightarrow A = 19 + 11 \therefore A = 30$

4 Determine *a* e *b* de modo que $a - b = 1$ e $a^2 + b^2 = 41$.

$(a - b)^2 = 1^2 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 41 - 2ab = 1 \Rightarrow 2ab = 40 \therefore ab = 20$

$\left.\begin{matrix} a - b = 1 \\ a \cdot b = 20 \end{matrix}\right\} a = 5 \text{ e } b = 4$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 Sendo $a \neq 1$ e $a \neq -1$, simplifique a expressão

$$E = \frac{a - 1}{a + 1} + \frac{a + 1}{a - 1} - \frac{a^2 - a + 2}{a^2 - 1}$$

2 (Vunesp-SP) Se $x + \dfrac{1}{x} = \lambda$, calcule, em função de λ, o valor de $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

3 Considere os números naturais *m* e *n* tais que $m^2 - n^2 = 13$. Determine os possíveis valores de *m* e *n*.

4 (FGV-SP) Imagine dois números naturais não nulos. Seja D a diferença entre o cubo de sua soma e a soma de seus cubos. Mostre que D é múltiplo de 6.

5 O valor da expressão $\dfrac{x^2 - y^2}{x + y} \cdot \dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x - y}$, para $x = 1{,}25$ e $y = -0{,}75$, é:

a) $-0{,}25$
b) $-0{,}125$
c) 0
d) 0,125
e) 0,25

6 A expressão $\left(\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2} - 2\right) : \left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} - 2\right)$ é equivalente a:

a) $\dfrac{a^2 - b^2}{ab}$

b) $\dfrac{(a + b)^2}{ab}$

c) $\dfrac{a + b}{(ab)^2}$

d) $\dfrac{(a - b)^2}{ab}$

e) $\dfrac{a^2 + b^2}{ab}$

Porcentagem / Aumentos e descontos percentuais

1. Porcentagem

Razões de denominador 100 são chamados de taxas percentuais ou porcentagens. Elas podem ser representadas na forma de fração centesimal (denominador 100), ou na forma decimal.

Exemplos

• $2\% = \dfrac{2}{100} = 0{,}02$ • $35\% = \dfrac{35}{100} = 0{,}35$

Aumentos e descontos percentuais

Para um aumento

Sendo V_i o valor inicial e V_f o valor ao final de um aumento de x%, temos:

$$V_f = V_i + \frac{x}{100} \cdot V_i \Rightarrow \boxed{V_f = \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot V_i}$$

Para um desconto

Sendo V_i o valor inicial e V_f o valor ao final de um desconto de x%, temos:

$$V_f = V_i - \frac{x}{100} \cdot V_i \Rightarrow \boxed{V_f = \left(1 - \frac{x}{100}\right) \cdot V_i}$$

Para aumentos sucessivos e iguais

Sendo V_i o valor inicial de um produto e V_n o valor ao final de *n* acréscimos sucessivos de x%, ao final do enésimo acréscimo:

$$\boxed{V_n = \left(1 + \frac{x}{100}\right)^n \cdot V_i}$$

Para descontos sucessivos e iguais

Sendo V_i o valor inicial e V_n o valor ao final de *n* descontos sucessivos de x%, ao final do enésimo desconto:

$$\boxed{V_n = \left(1 - \frac{x}{100}\right)^n \cdot V_i}$$

2. Juro

Juro simples

Investido (ou emprestado) um **capital** C a uma **taxa** *i* (em porcentagem), durante *n* **períodos**, o cálculo do juro **simples** J é dado por:

$$\boxed{J = C \cdot i \cdot n}$$

Se o período for dado em "anos", a taxa deve ser "por cento ao ano", ou seja, a taxa deve acompanhar a unidade do período.

Juro composto

O cálculo do juro composto é feito da seguinte maneira:

$$\boxed{M = C \cdot (1 + i)^n}$$

em que: M é o **montante** (capital investido mais juros) a ser resgatado, *n* é o **período** de aplicação, C é o **capital inicial** e *i* é a **taxa**.

Nesse tipo de aplicação, o juro é incorporado ao capital, passando também a render juro.

Atividades

1 (PUC-MG) Um objeto que custava R$ 700,00 teve seu preço aumentado de R$ 105,00. O acréscimo percentual em relação ao custo anterior foi de:

a) 12% b) 15% c) 18% d) 20%

$105 = \dfrac{x}{100} \cdot 700 \Rightarrow x = 15\%$

Alternativa *b*

2 (Fuvest-SP) Em uma pesquisa relativa à aceitação de um determinado produto, 65% dos entrevistados são do sexo masculino. Apurados os resultados, verificou-se que 40% dos homens e 50% das mulheres aprovaram o produto. A porcentagem de pessoas que aprovou o produto é:

a) 43,5%
b) 45%
c) 90%
d) 17,5%
e) 26%

Se 65% é a porcentagem de homens, dentre os entrevistados, então a porcentagem de mulheres é 35%.

Aprovação:

(40% de 65%) + (50% de 35%) $= 0{,}40 \cdot 65\% + 0{,}50 \cdot 35\% = 43{,}5\%$

Alternativa *a*

3 (Vunesp-SP) Uma mercadoria teve um aumento de 25% e, logo depois, um aumento de 20% sobre isso. Para encontrar o preço da mercadoria após os aumentos, basta multiplicar o preço inicial por:

a) 1,45
b) 0,45
c) 1,50
d) 0,50
e) 3,75

$\left(1 + \frac{25}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right) = 1{,}25 \cdot 1{,}20 = 1{,}50$

Alternativa *c*

4 (UF-MS) O tanque de um carro tem 40 litros de uma mistura de álcool e gasolina, e o álcool representa 25% dessa mistura. A fim de que essa mistura apresente uma porcentagem de 60% de álcool, deve-se substituir *x* litros da mistura original por *x* litros de álcool. Assim, o valor de *x* é:

a) $8\frac{1}{3}$
b) $12\frac{2}{3}$
c) $18\frac{1}{3}$
d) $14\frac{2}{3}$
e) $18\frac{2}{3}$

Tirando *x* litros da mistura, ficaremos com $(40 - x)$ litros da mistura no tanque, onde: $\frac{25}{100}(40 - x) = \frac{40 - x}{4}$ é álcool.

Devemos ter:

$\frac{40 - x}{4} + x = \frac{\cancel{60}}{\cancel{100}} \cdot \cancel{40} \Rightarrow \frac{40 - x + 4x}{4} = 24 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x + 40 = 96 \Rightarrow 3x = 56 \Rightarrow x = \frac{56}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{54}{3} + \frac{2}{3} \Rightarrow x = 18 + \frac{2}{3} = 18\frac{2}{3}$ litros

Alternativa *e*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 Um objeto teve uma majoração de seu preço da ordem de 20% e, em seguida, uma redução do preço da ordem de 20%. Com relação ao preço inicial, depois dessa variação de preços podemos concluir que o objeto:

a) não variou de preço.
b) está 4% mais barato.
c) está 4% mais caro.
d) está 8% mais barato.
e) está 8% mais caro.

2 (PUC-SP) Ao responder a um teste, um aluno acertou 20 das 30 primeiras questões e errou 64% do número restante. Feita a correção, verificou-se que o total de acertos correspondia a 47,5% do número de questões. O número total de questões é:

a) 40
b) 50
c) 60
d) 80
e) 120

3 (Fuvest-SP) O preço de uma mercadoria subiu 25%. Calcule a porcentagem de que se deve reduzir seu preço atual para que volte a custar o que custava antes do aumento.

4 (UE-CE) Uma pessoa investiu R$ 3 000,00 em ações. No primeiro mês de aplicação, ela perdeu 30% do valor investido. No segundo mês, ela recuperou 40% do que havia perdido. Em porcentagem, com relação ao valor inicialmente investido, ao final do segundo mês houve um:

a) lucro de 10%.
b) prejuízo de 10%.
c) lucro de 18%.
d) prejuízo de 18%.

5 (Mackenzie-SP) Nos três primeiros meses de um ano, a inflação, em determinado país, foi de respectivamente 5%, 4% e 6%. Nessas condições, a inflação acumulada no trimestre foi de:

a) 15,752%
b) 15%
c) 12%
d) 18%
e) 15,36%

6 (UF-MT) Uma financiadora oferece empréstimos, por um período de 4 meses, sob as seguintes condições:

1ª) taxa de 11,4% ao mês, a juro simples;
2ª) taxa de 10% ao mês, a juro composto.

Uma pessoa fez um empréstimo de R$ 10 000,00, optando pela 1ª condição. Em quantos reais os juros cobrados pela 1ª condição serão menores que os cobrados pela 2ª condição?

Equações do 1º e do 2º graus

1. Equação do 1º grau

Chama-se equação do primeiro grau, na incógnita x, toda sentença que pode ser representada sob a forma:

$$ax + b = 0$$

em que a e b são números reais, com $a \neq 0$.

Raízes de uma equação

Raízes (ou soluções) da equação são os valores que, atribuídos à incógnita, tornam a sentença verdadeira.

Em $5x - 10 = 0$, o número 2 é raiz, pois: $5 \cdot 2 - 10 = 0$, e o número 3 não é raiz, pois: $5 \cdot 3 - 10 \neq 0$.

Conjunto solução (S)

Em $\mathbb{R}$, é o conjunto formado pelas raízes da equação.

No exemplo anterior, $5x - 10 = 0$, o conjunto solução é $S = \{2\}$.

Resolver uma equação significa encontrar seu conjunto solução.

Problemas envolvendo equação do 1º grau

Para resolvermos problemas que envolvam equações do 1º grau, é fundamental interpretarmos o enunciado. Acompanhe algumas interpretações para enunciados e suas respectivas expressões matemáticas.

Linguagem usual	Linguagem matemática
Um número	x
A sexta parte desse número	$\frac{x}{6}$
O dobro desse número	$2x$
A metade desse número "mais" sua terça parte	$\frac{x}{2} + \frac{x}{3}$
Esse número acrescido de 5 unidades	$x + 5$
Esse número acrescido de 20% dele	$x + \frac{20}{100}x$

2. Equação do 2º grau

Chama-se equação do segundo grau, na incógnita x, toda sentença que pode ser representada sob a forma:

$$\mathbf{a}\mathbf{x}^2 + \mathbf{b}\mathbf{x} + \mathbf{c} = 0$$

em que a, b e c são números reais, com $a \neq 0$.

Exemplos

a) $5x^2 + 3x + 9 = 0$
$a = 5$; $b = 3$; $c = 9$ e x é a incógnita.

b) $\frac{2}{7} \cdot r^2 + 1 = 0$
$a = \frac{2}{7}$; $b = 0$; $c = 1$ e r é a incógnita.

c) $\frac{-3t^2 + 5t}{3} = 0$
$a = -1$; $b = \frac{5}{3}$; $c = 0$ e t é a incógnita.

Nos exemplos *b* e *c*, temos o termo $b = 0$ e o termo $c = 0$, respectivamente; nesses casos, as equações são chamadas **incompletas**.

Fórmula resolutiva

A fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ é:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A expressão $\mathbf{b^2 - 4ac}$ é representada pela letra grega maiúscula delta (Δ) e é chamada **discriminante** da equação do 2º grau.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Discussão das raízes da equação do 2º grau

O discriminante da equação do 2º grau (Δ) informa a respeito das raízes dessa equação:

- Se $\Delta > 0$, então a equação admite duas raízes reais e distintas.
- Se $\Delta = 0$, então a equação admite duas raízes reais e iguais.
- Se $\Delta < 0$, então a equação não admite raízes reais.

Soma e produto das raízes da equação do 2º grau

Na equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, em que x_1 e x_2 são raízes, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Dividindo ambos os membros de $ax^2 + bx + c = 0$ por *a*, temos:

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$$

Podemos reescrever essa equação na forma:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

em que S é a soma das raízes e P é o produto das raízes.

Atividades

1 (PUC-MG) Uma garrafa cheia de água "pesa" 815 g e, quando cheia de água até $\frac{4}{5}$ de sua capacidade, "pesa" 714 g. O "peso" da garrafa vazia, em gramas, é:

a) 210 b) 265 c) 310 d) 385

A $\rightarrow$ água G $\rightarrow$ garrafa

$$\begin{cases} G + A = 815 \\ G + \frac{4A}{5} = 714 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G + A = 815 \\ 5G + 4A = 3\,570 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5G + 5A = 4\,075 \\ \underline{5G + 4A = 3\,570} \\ A = 505 \end{cases}$$

De $G + A = 815$, temos: $G + 505 = 815$

$G = 310$ g

Alternativa *c*

2 Resolver, no campo dos números reais, as equações:

a) $2x^2 - 11x + 5 = 0$

$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 81$

$x = \frac{11 \pm 9}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x^2 = 5 \end{cases} \therefore S = \left\{\frac{1}{2}; 5\right\}$

b) $x^2 - 8x + 16 = 0$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0$

$x = \frac{8 \pm 0}{2} \Rightarrow x_1 = x_2 = 4 \therefore S = \{4\}$

c) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -31 \therefore S = \varnothing$

d) $2x^2 - 7x = 0$

$2x^2 - 7x = 0 \Rightarrow x \cdot (2x - 7) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ ou $2x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2} \therefore S = \left\{0; \frac{7}{2}\right\}$

e) $2x^2 - 18 = 0$

$2x^2 = 18$

$x^2 = 9$

$x = 3$ ou $x = -3$

$S = \{-3, 3\}$

3 (U. E. Londrina-PR) Determine os valores de *m* para os quais a equação $3x^2 - mx + 4 = 0$ admite duas raízes reais e iguais.

Condição: $\Delta = 0$

$\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 \Rightarrow m^2 - 48 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2 = 16 \cdot 3 \therefore m = -4\sqrt{3}$ ou $m = 4\sqrt{3}$

4 A equação $2x^2 - 5x + 1 = 0$ possui as raízes x_1 e x_2. Determine:

a) $x_1 + x_2$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2}$

b) $x_1 \cdot x_2$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} = 5$

d) $x_1^2 + x_2^2$

$x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$

$(x_1 + x_2)^2 = \frac{25}{4}$

$x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 = \frac{25}{4}$

$x_1^2 + x_2^2 = \frac{25}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{21}{4}$

e) $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2$

$x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{4}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (Fuvest-SP) Um casal tem filhos e filhas. Cada filho tem o número de irmãos igual ao número de irmãs. Cada filha tem o número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs. Qual é o total de filhos e filhas do casal?

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

2 (Unicamp-SP) Roberto disse a Valéria: "Pense em um número, dobre esse número, some 12 ao resultado, divida o novo resultado por 2. Quanto deu?". Valéria disse: "15". Roberto imediatamente revelou o número original em que Valéria havia pensado. Calcule esse número.

3 (Mackenzie-SP) Uma pessoa quer distribuir, entre seus amigos, um determinado número de convites. Se der 2 convites a cada amigo, sobrarão 25 convites; entretanto, se pretender dar 3 convites a cada amigo, faltarão 15 convites. Caso essa pessoa prentenda dar 4 convites a cada amigo, ela precisará ter mais:

a) 45 convites.
b) 55 convites.
c) 40 convites.
d) 80 convites.
e) 70 convites.

4 (Mackenzie-SP) Se *x* e *y* são números reais e positivos, tais que $x^2 + y^2 + 2xy + x + y - 6 = 0$, então $x + y$ vale:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

5 (Unifor-CE) Sejam *a* e *b* as raízes da equação $2x^2 - 3x - 2 = 0$. A equação do 2º grau cujas raízes são $a + 1$ e $b + 1$ é:

a) $2x^2 - 7x + 3 = 0$
b) $2x^2 + 7x + 3 = 0$
c) $2x^2 - 5x + 3 = 0$
d) $x^2 + 5x = 0$
e) $x^2 - 5x = 0$

6 Resolva, considerando apenas os números reais, a equação $4x^4 - 3x^2 - 1 = 0$.

Funções / Função afim

1. Produto cartesiano

Dados dois conjuntos A e B não vazios, chama-se produto cartesiano de A por B ou $A \times B$ (A cartesiano B) o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) em que $x \in A$ e $y \in B$.

Exemplo

$A = \{2, 3, 4\}$

$B = \{4, 5\}$

$A \times B = \{(2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 4), (4, 5)\}$

$B \times A = \{(4, 2), (5, 2), (4, 3), (5, 3), (4, 4), (5, 4)\}$

$A \times A = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

$B \times B = \{(4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$

Se A possui *m* elementos e B possui *n* elementos, então $A \times B$ possui $m \cdot n$ elementos.

Representação de A × B

Sejam $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{4, 5\}$.

Forma escrita

$A \times B = \{(2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 4), (4, 5)\}$

Diagrama de flechas

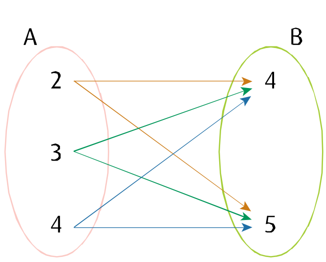
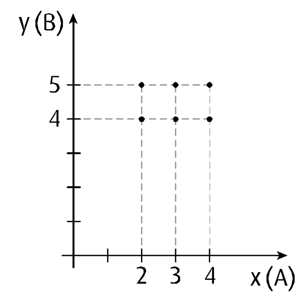


Gráfico cartesiano



Relação

Dados dois conjuntos A e B não vazios, chamamos **relação de A em B** qualquer subconjunto de $A \times B$.

Exemplo

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{5, 6\}$.

Eis algumas das relações de A em B:

$R_1 = \{(1, 5), (2, 6)\}$

$R_2 = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5)\}$

$R_3 = \varnothing$

$R_4 = A \times B$

2. Função

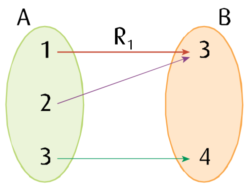
Dados dois conjuntos A e B não vazios, chama-se **função** de A em B toda relação na qual, para todo *x* pertencente a A, existe um único *y* pertencente a B e $y = f(x)$.

Notações $f: A \to B$ $y = f(x)$

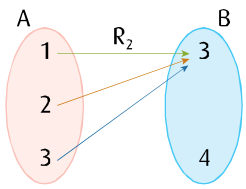
(lê-se: "*y* é função de *x*").

Assim, consideremos os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ e as relações a seguir:

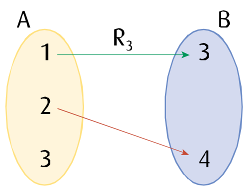
$R_1 = \{(1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$ ou



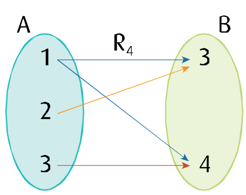
$R_2 = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$ ou



$R_3 = \{(1, 3), (2, 4)\}$ ou



$R_4 = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (3, 4)\}$ ou



Observemos que R_1 e R_2 são funções, pois todo elemento do conjunto A possui um único correspondente no conjunto B.

A relação R_3 *não* é função, pois existe elemento no conjunto A que não possui correspondente no conjunto B.

A relação R_4 *não* é função, pois existe elemento no conjunto A que possui mais de um correspondente no conjunto B.

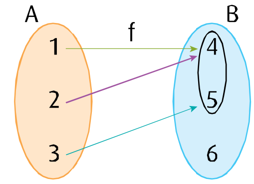
Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função

Dada uma função $f: A \rightarrow B$, temos que A é o conjunto de partida da função e B é o conjunto de chegada da função.

Desse modo:

A é o **domínio** da função.
B é o **contradomínio** da função.
Os elementos de B que têm correspondência de algum elemento de A formam o **conjunto imagem** da função.

Assim, na função a seguir, tem-se:



$f: A \rightarrow B$

Domínio da função ou $D_{f(x)} = \{1, 2, 3\}$

Contradomínio da função ou $CD_{f(x)} = \{4, 5, 6\}$

Imagem da função ou $Im_{f(x)} = \{4, 5\}$

Valor numérico de uma função

Seja *f* uma função: f(a) é o valor numérico dessa função quando *x* vale *a*. Podemos dizer que f(a) é a imagem do elemento *a*.

Exemplo

$A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$

$f: A \rightarrow B$ e $f(x) = x + 1$

Então:

$f(1) = 1 + 1 = 2$

$f(2) = 2 + 1 = 3$

$f(3) = 3 + 1 = 4$

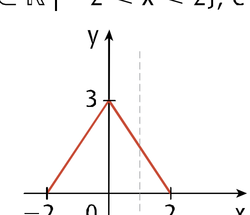
Os conjuntos A e B podem ser qualquer conjunto numérico. Assim, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ significa que o domínio da função são todos os reais e o contradomínio dessa função também são todos os reais.

Reconhecimento de uma função por meio de um gráfico

Dado um gráfico qualquer, para descobrirmos se ele representa o gráfico de uma função de A em B, traçamos **retas verticais** ao longo de seu domínio. Se cada uma dessas retas interceptar esse gráfico **em um único ponto**, concluímos tratar-se do gráfico de uma **função**.

Exemplos

a) $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, em que $[-2, 2]$ representa o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$, e seu gráfico é:

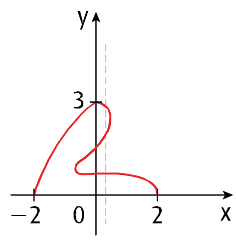


que é o gráfico de uma função.

$D_{f(x)} = [-2; 2]$ (variação do gráfico ao longo do eixo 0x)

$Im_{f(x)} = [0; 3]$ (variação do gráfico ao longo do eixo 0y)

b) f: $[-2; 2] \rightarrow \mathbb{R}$, e seu gráfico é:



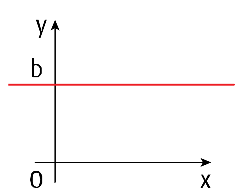
que não é o gráfico de uma função.

3. Função constante

Chama-se função constante uma função da forma **y = b**, em que *b* é um número real.

Representação gráfica

O gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo 0x que passa pelo ponto (0; b).



4. Função afim

Chama-se função afim ou função do 1º grau uma função da forma **y = ax + b**, em que *a* e *b* são números reais e $a \neq 0$.

Representação gráfica

O gráfico de uma função afim é uma reta oblíqua, ou seja, uma reta não paralela a nenhum dos eixos, 0x ou 0y.

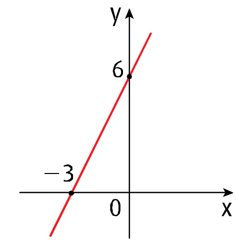
Exemplos

a) $y = 2x + 6$

A abscissa do ponto em que a reta intercepta o eixo 0x é a **raiz** ou o **zero** da função.

A ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo 0y é o **coeficiente linear** da reta.

x	y
0	6
−3	0

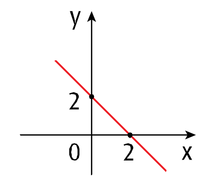


Para $a > 0$, temos:
- Se $x_1 > x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$
- Se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$

A função é **crescente**.

b) $y = -x + 2$

x	y
0	2
2	0



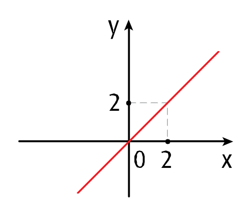
Para $a < 0$, temos:
- Se $x_1 > x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$
- Se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$

A função é **decrescente**.

c) $y = x$

Neste caso, ao atribuirmos o valor zero para *x*, encontramos o valor zero para *y*, então atribui-se um outro valor qualquer para *x* e encontra-se o *y* correspondente.

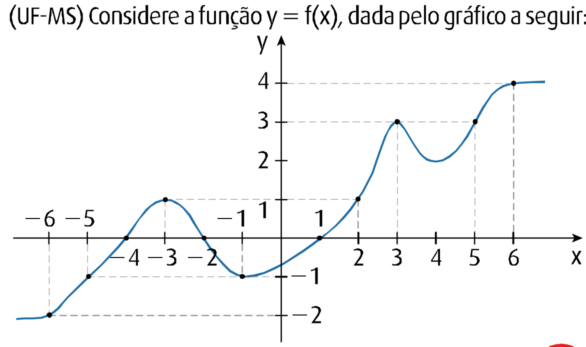
x	y
0	0
2	2



A função da forma y = ax é chamada função linear e é um caso particular da função **afim**.

Atividades

1 (UF-MS) Considere a função $y = f(x)$, dada pelo gráfico a seguir:



É correto afirmar que:

(01) se $x < 5$, então $f(x) \leqslant 3$.

(02) se $-4 < x < -2$, então $f(x) > 0$.

(04) se $-1 < f(x) < 3$, então $-5 < x < 5$.

(08) se $f(x) < 0$, então $-2 < x < 1$.

Dê a soma dos números dos itens corretos.

(01) V, pois $f(x) > 3$ se, e somente se, $x > 5$.

(02) V, pois, para qualquer valor de *x* entre -4 e -2, a sua imagem $f(x)$ está acima do eixo das abscissas.

(04) V, pois, para valores de *x* entre -5 e 5, verificamos que a imagem $f(x)$ é de -1 até 3.

(08) F, pois, se $x < -4$, teremos também $f(x) < 0$.

Soma = 7 (01 + 02 + 04)

2 Sejam as funções reais *f* e *g* dadas por $f(x) = \sqrt{x - 2}$ e $g(x) = \dfrac{\sqrt{6 - x}}{\sqrt[3]{x - 3}}$. Sendo o conjunto A o domínio da função *f* e o conjunto B o domínio da função *g*, a soma dos valores inteiros do conjunto $A \cap B$ é igual a:

a) 12
b) 9
c) 16
d) 20
e) 17

$x - 2 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 2 \therefore A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$

$\left.\begin{array}{l} 6 - x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 6 \\ x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3 \end{array}\right\} \therefore B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 6 \text{ e } x \neq 3\}$

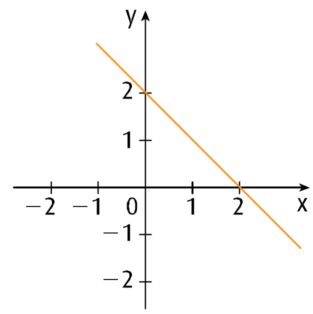
$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 6 \text{ e } x \neq 3\}$

Os números inteiros pertencentes ao conjunto $A \cap B$ são 2, 4, 5 e 6, e a soma deles é 17.

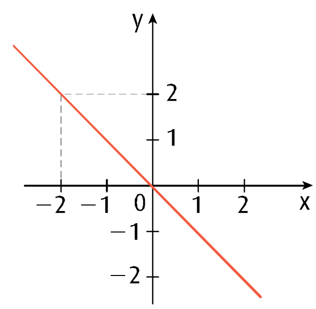
Alternativa *e*

3 (Fipel-MG) Dentre as alternativas a seguir, assinale aquela que mais bem representa a reta cuja equação é $y - x - 2 = 0$:

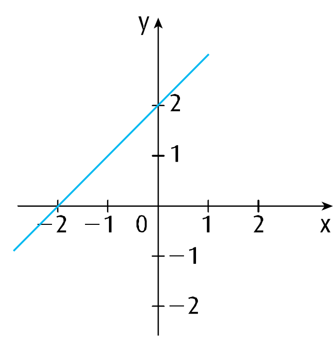
a)



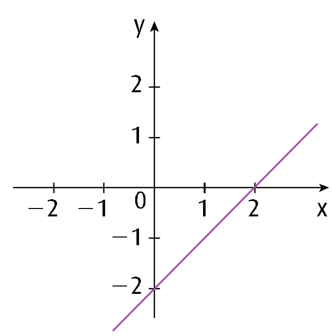
b)



c)

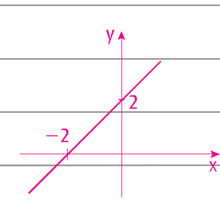


d)



$y - x - 2 = 0$

$y = x + 2$



Alternativa *c*

4 (UE-MT) Para que os pontos (1; 3) e (3; −1) pertençam ao gráfico da função dada por $f(x) = ax + b$, o valor de $b - a$ deve ser:

a) 7 c) 3 e) −7
b) 5 d) −3

$\begin{cases} f(1) = a \cdot 1 + b = 3 & \text{(I)} \\ f(3) = a \cdot 3 + b = -1 & \text{(II)} \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} \text{De (II)} - \text{(I)}: 2a = -4 \Rightarrow a = -2 \\ \text{Em (I)}: -2 + b = 3 \Rightarrow b = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow b - a = 5 - (-2) \therefore b - a = 7$

Alternativa *a*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (Fapa-RS) Na função real $f(x) = \dfrac{3x - 1}{2}$, o elemento 7 é a imagem do elemento:

a) 10 c) 7 e) 5
b) 8 d) 6

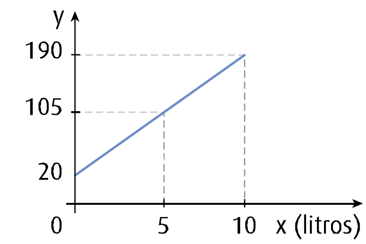
2 (Unifor-CE) Seja *f* a função real definida por $f(x) = 1 - \dfrac{x}{2}$, para todo *x* do intervalo [−3; 1]. Seu conjunto imagem é:

a) $\mathbb{R}$ c) $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$ e) $\left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{2}\right]$
b) $\left[-\dfrac{1}{2}; 1\right]$ d) $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{2}\right]$

3 Uma função real *f* do 1º grau é tal que $f(0) = 1 + f(1)$ e $f(-1) = 2 - f(0)$.
Então, f(3) é igual a:

a) −3 c) −1 e) $\dfrac{7}{2}$
b) $-\dfrac{5}{2}$ d) 0

4 (Fefisa-SP) O gráfico mostra como o dinheiro gasto (*y*) por uma empresa de cosméticos na produção de perfume varia com a quantidade de perfume produzida (*x*). Assim, é correto afirmar que:



a) quando a empresa não produz, não gasta.
b) para produzir três litros de perfume, a empresa gasta R$ 76,00.
c) para produzir dois litros de perfume, a empresa gasta R$ 54,00.
d) se a empresa gastar R$ 170,00, então ela produzirá cinco litros de perfume.
e) para fabricar o terceiro litro de perfume, a empresa gasta menos do que para fabricar o quinto litro.

5 (U. F. Ouro Preto-MG) O custo total *y* para se produzir um determinado produto é calculado por meio da soma de um custo variável, que depende da quantidade produzida *x*, cujo custo unitário de produção é de R$ 10,00 mais um custo fixo de R$ 1 000,00.

Pede-se:

a) a função que representa o custo total em relação à quantidade produzida;
b) o custo total na produção de 20 unidades;
c) o número de unidades que deverão ser produzidas para que o custo total seja de R$ 4 000,00;
d) o gráfico da função da quantidade produzida × custo total, destacando-se os dados obtidos nos itens anteriores.

6 (UF-RJ) Uma operadora de celular oferece dois planos no sistema pós-pago. No plano *A*, paga-se uma assinatura de R$ 50,00 e cada minuto em ligações locais custa R$ 0,25. No plano *B*, paga-se um valor fixo de R$ 40,00 para até 50 minutos em ligações locais e, a partir de 50 minutos, o custo de cada minuto em ligações locais é de R$ 1,50.

a) Calcule o valor da conta em cada plano para um consumo mensal de 30 minutos em ligações locais.
b) Determine a partir de quantos minutos, em ligações locais, o plano *B* deixa de ser mais vantajoso do que o plano *A*.

Função quadrática

1. Definição

Chama-se função quadrática ou do 2º grau uma função da forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

em que *a*, *b* e *c* são números reais e $a \neq 0$.

Raízes ou zeros da função quadrática

Seja a função, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

com $a \neq 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac$ (discriminante).

As raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são as **raízes** ou **zeros** da função $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$

Em relação à quantidade de raízes de uma função quadrática, temos:

I. Se $\Delta > 0$, então a função tem duas raízes reais e diferentes.

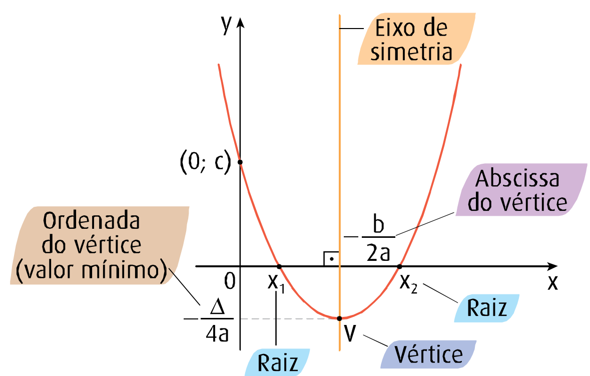
II. Se $\Delta = 0$, então a função tem duas raízes reais e iguais.

III. Se $\Delta < 0$, então a função não tem raízes reais.

Representação gráfica

O gráfico de uma função quadrática é uma **parábola**.

Vamos considerar uma parábola com $\Delta > 0$ e concavidade para cima ($a > 0$). Vejamos alguns pontos notáveis:



$$D_{(f)} = \mathbb{R}$$

$$Im_{(f)} = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{\Delta}{4a}\right\} \text{ ou } \left[-\frac{\Delta}{4a}; +\infty\right[$$

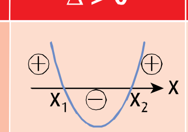
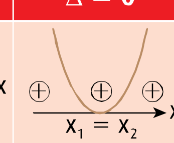
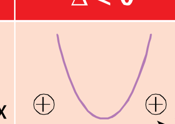
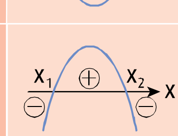
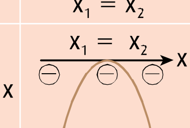
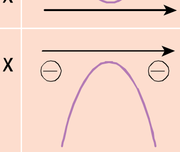
O gráfico dessa função obedece os seguintes parâmetros:

I. Se $a > 0$, então a parábola tem concavidade para cima.

II. Se $a < 0$, então a parábola tem concavidade para baixo.

Sinal

O gráfico da função quadrática pode assumir diferentes posições em relação ao eixo Ox, a saber:

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
a > 0			
a < 0			

em que x_1 e x_2 são as raízes de $ax^2 + bx + c = 0$.

Atividades

1 Construa o gráfico e dê o conjunto imagem da função real, do 2º grau, dada por $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

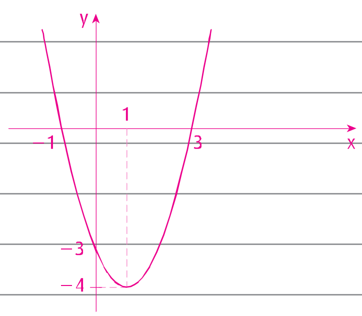
• $a = 1 \Rightarrow$ concavidade voltada para cima.

• $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 \Rightarrow$ duas raízes reais e distintas.

Raízes: $x = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = -1$ e $x_2 = 3$

Vértice: $x_V = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_V = 1$ e $y_V = \frac{-16}{4 \cdot 1} \Rightarrow y_V = -4$

Intersecção com o eixo *y*: $(0; -3)$.



$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -4\}$

2 (Unicamp-SP) Determine a função do 2º grau cujo gráfico passa pelos pontos $A(0; 2)$, $B(-1; 1)$ e $C(1; 1)$.

$y = ax^2 + bx + c$

I. $A(0; 2)$

$2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 2$

II. $B(-1; 1)$

$1 = a - b + 2 \Rightarrow a - b = -1$

III. $C(1; 1)$

$1 = a + b + 2 \Rightarrow a + b = -1$

De II e III temos:

$$\begin{cases} a - b = -1 \\ a + b = -1 \end{cases}$$

$2a = -2 \Rightarrow a = -1$ e $b = 0$

$\therefore y = -x^2 + 2$

3 (U. Gama Filho-RJ) O custo de produção, por hora, de uma fábrica de sapatos, é representado pela função quadrática $f(x) = x^2 - 6x + 8$. A variável *x* representa a quantidade de sapatos, em centenas de unidades, produzida em uma hora.

O número de sapatos que deverá ser produzido, por hora, para que o custo seja o menor possível é:

a) 100
b) 200
c) 300
d) 400
e) 500

$f(x) = x^2 - 6x + 8$

$x_V = \frac{6}{2} = 3$ em centenas de unidades

Deverão ser produzidos 300 sapatos.

Alternativa *c*

4 (Fuvest-SP) Para quais valores de *m* a equação

$$x^2 + mx + m^2 = 0$$

possui duas raízes reais e distintas?

a) Somente para $m = 0$.
b) Para todo $m > 0$.
c) Para todo $m < 0$.
d) Para todo real.
e) Para nenhum *m*.

Condição: $\Delta > 0$

$\Delta = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot m^2 \Rightarrow \Delta = -3m^2 \Rightarrow -3m^2 > 0$

(Não existe *m* real nessas condições.)

Alternativa *e*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (Vunesp-SP) Uma função quadrática tem o eixo *y* como eixo de simetria. A distância entre seus zeros é de 4 unidades e a função tem (−5) como valor mínimo. Essa função quadrática é:

a) $y = 5 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 5$

b) $y = 5 \cdot x^2 - 20$

c) $y = \frac{5}{4} \cdot x^2 - 5 \cdot x$

d) $y = \frac{5}{4} \cdot x^2 - 5$

e) $y = \frac{5}{4} \cdot x^2 - 20$

2 (Acafe-SC) Os fisiologistas afirmam que, para um indivíduo sadio e em repouso, o número N de batimentos cardíacos, por minuto, varia em função da temperatura ambiente *t* (em graus Celsius), segundo a função $N(t) = 0{,}1 \cdot t^2 - 4 \cdot t + 90$. O número mínimo de batimentos por minuto e a temperatura em que ocorre, respectivamente, são:

a) 60 e 30°

b) 50 e 40°

c) 80 e 20°

d) 50 e 20°

e) 60 e 40°

3 A função quadrática *f*, definida por

$$f(x) = (m - 1) \cdot x^2 + 2m \cdot x + 3m$$

assume somente valores estritamente positivos, para todo $x \in \mathbb{R}$, se, e somente se:

a) $m < 0$ ou $m > \frac{3}{2}$

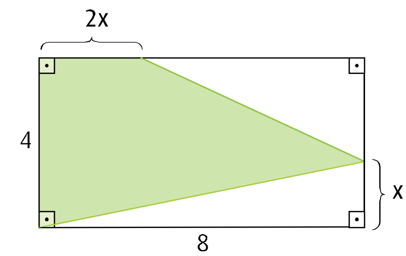
b) $0 < m < \frac{3}{2}$

c) $m > \frac{3}{2}$

d) $m < 1$

e) $m < 0$

4 (ESPM-SP) Na figura, fazendo-se o valor de *x* variar de 0 a 4, a área da região sombreada também varia. O valor máximo que essa área poderá ter é:



a) 30

b) 24

c) 20

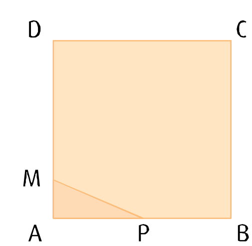
d) 18

e) 16

5 (Fund. Carlos Chagas-SP) Quantos números inteiros satisfazem este sistema de inequações?

$$\begin{cases} 2x + 1 > 3x - 2 \\ x^2 - 6x + 8 \leqslant 0 \end{cases}$$

6 (U. F. Ouro Preto-MG) Dado um quadrado ABCD, cujo lado mede 20 cm, marcam-se os pontos M em $\overline{AD}$ e P em $\overline{AB}$, tais que PB = 2AM.



Calcule a distância AM para que a área do triângulo AMP seja máxima.

Função, equação e inequação exponenciais

1. Função exponencial

Chama-se função exponencial toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por uma lei na forma:

$$\mathbf{f(x) = a^x}$$

em que *a* é um número real, $a > 0$ e $a \neq 1$.

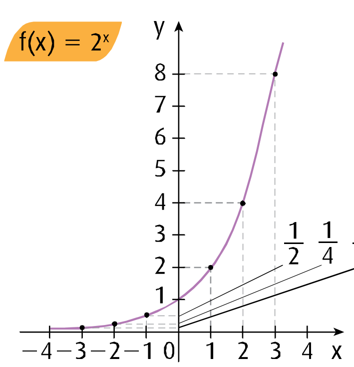
Gráficos

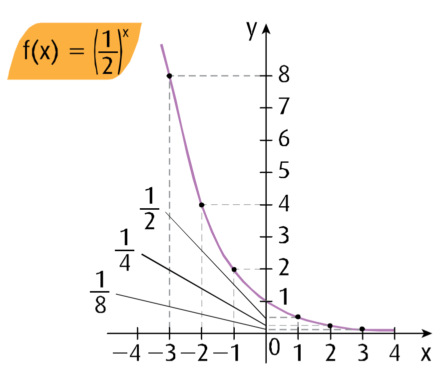
A função exponencial pode ser crescente ou decrescente, dependendo do valor de *a*.

- Se $a > 1$, a função é **crescente**.
- Se $0 < a < 1$, a função é **decrescente**.

Exemplo

Observe os gráficos da função $f(x) = 2^x$ e da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:





Propriedades da função exponencial

P_1 Da função $y = a^x$, temos que o gráfico cruza o eixo Oy em 1, pois $x = 0 \Rightarrow y = a^0 = 1$.

P_2 Se **$a > 1$**, então $f(x) = a^x$ é crescente, isto é: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}\ \forall \{x_1; x_2\} \subset D_f$

P_3 Se **$0 < a < 1$**, então $f(x) = a^x$ é decrescente, isto é: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}\ \forall \{x_1; x_2\} \subset D_f$

P_4 Se **$a > 0$** e **$a \neq 1$**, temos: $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2\ \forall \{x_1, x_2\} \subset D_f$

P_5 Conjunto imagem de $y = a^x$ é:

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\} = \mathbb{R}_+^*$

2. Equação exponencial

Uma equação é chamada **exponencial** quando apresenta incógnita no expoente de pelo menos uma de suas potências.

Sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, podemos generalizar:

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

A resolução de uma equação exponencial baseia-se nas propriedades da potenciação e nas propriedades da função exponencial.

Exemplos

a) Em $3^x = 9$, o conjunto solução é $S = \{2\}$:
$3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow S = \{2\}$

b) Em $13^{x^2 - 5x + 6} = 1$, o conjunto solução é $S = \{2, 3\}$:
$13^{x^2 - 5x + 6} = 1 \Rightarrow 13^{x^2 - 5x + 6} = 13^0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ e $x_2 = 3 \Rightarrow S = \{2, 3\}$

3. Inequação exponencial

Vimos em funções exponenciais que, dada a função

$f(x) = a^x$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$:

I. se $a > 1$, a função é crescente, ou seja:

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

II. se $0 < a < 1$, a função é decrescente, ou seja:

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

Para resolver equações exponenciais, podemos, então, reduzir os membros da inequação a potências de mesma base e aplicar essas propriedades.

Exemplos

a) Em $3^x > 3^2$, o conjunto solução é:

$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

b) Em $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^2$, o conjunto solução é:

$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

Atividades

1 Determine *x*, com $x \in \mathbb{R}$, em cada equação:

a) $2^x = 128$

$2^x = 128 \Rightarrow 2^x = 2^7 \Rightarrow x = 7 \therefore S = \{7\}$

b) $3^{x-1} + 3^{x+2} - 3^x = 25$

$3^{x-1} + 3^{x+2} - 3^x = 25 \Rightarrow \frac{3^x}{3} + 3^x \cdot 3^2 - 3^x = 25$

Fazendo $3^x = t$, temos:

$\frac{t}{3} + 9t - t = 25 \Rightarrow 25t = 75 \Rightarrow t = 3$, ou seja:

$3^x = 3 \Rightarrow 3^x = 3^1 \Rightarrow x = 1 \therefore S = \{1\}$

c) $4^x = 7 \cdot 2^x + 8$

$4^x = 7 \cdot 2^x + 8 \Rightarrow (2^2)^x - 7 \cdot 2^x - 8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2^x)^2 - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$

Fazendo $2^x = t$, temos:

$t^2 - 7 \cdot t - 8 = 0 \Rightarrow t = -1$ ou $t = 8$, ou seja:

$2^x = -1$ (Não convém.)

ou

$2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3 \therefore S = \{3\}$

d) $25^x = 5^x + 20$

$25^x = 5^x + 20 \Rightarrow (5^x)^2 - 5^x - 20 = 0$

Fazendo $5^x = t$, temos:

$t^2 - t - 20 = 0 \Rightarrow t = -4$ ou $t = 5$, ou seja:

$5^x = -4$ (Não convém.)

ou

$5^x = 5 \Rightarrow x = 1 \therefore S = \{1\}$

2 (Unama-PA) Em pesquisa realizada, constatou-se que a população (p) de determinada bactéria cresce segundo a expressão $p(t) = 25 \cdot 2^t$, em que *t* representa o tempo em horas. Para se atingir uma população de 400 bactérias, qual será o tempo necessário?

$p(t) = 400$

Assim, teremos:

$400 = 25 \cdot 2^t \Rightarrow 2^t = 16 \Rightarrow t = 4$

Será necessário um tempo de 4 horas.

3 (Mackenzie-SP) A soma das raízes da equação

$$2^{2x+1} - 2^{x+4} = 2^{x+2} - 32$$

é:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 6
e) 7

$2^{2x+1} - 2^{x+4} = 2^{x+2} - 32 \Rightarrow 2^{2x} \cdot 2^1 - 2^x \cdot 2^4 = 2^x \cdot 2^2 - 32 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot (2^x)^2 - 16 \cdot 2^x = 4 \cdot 2^x - 32 \Rightarrow 2 \cdot (2^x)^2 - 20 \cdot 2^x + 32 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2^x)^2 - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$

Fazendo $2^x = m$, vem:

$m^2 - 10m + 16 = 0$

$m^2 - 10m + 16 = 0 \begin{cases} m = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \therefore x = 1 \\ \text{ou} \\ m = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \therefore x = 3 \end{cases}$

$\therefore S = \{1; 3\}$

Alternativa *c*

4 (PUC-SP) A desigualdade $(0,4)^{x^2 + 6} < (0,4)^{5x}$ é verdadeira para todo *x* real tal que:

a) $x < 2$ ou $x > 3$
b) $2 < x < 3$
c) $x > 3$
d) $x > 2$
e) $x < 3$

$x^2 + 6 > 5x \Rightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \Rightarrow x < 2$ ou $x > 3$

Alternativa *a*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (UF-RS) Sabendo que $4^x - 4^{x-1} = 24$, então o valor de $x^{\frac{1}{2}}$ é igual a:

a) $\frac{\sqrt{2}}{5}$
b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
c) $\sqrt{2}$
d) $\frac{\sqrt{10}}{5}$
e) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

2 Se os inteiros *x* e *y* satisfazem a equação $3^{x+1} + 2^y = 2^{y+2} - 3^x$, então o valor de 3^x é:

a) 1
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{9}$
d) 3
e) 9

3 (Mackenzie-SP) Do sistema $\begin{cases} x^y = y^x \\ \frac{x}{y} = 2 \end{cases}$, com $x > 0$ e $y > 0$, $(5x - y)$ vale:

a) 14
b) 12
c) 18
d) 16
e) 20

4 (Unisinos-RS) Dado o sistema de equações $\begin{cases} 4^x + 3^y = 43 \\ 4^x - 3^y = -11 \end{cases}$, o valor de $x + y$ é:

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

5 (PUC-SP) Se $5^{3y} = 64$, o valor de 5^{-y} é:

a) $-\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{40}$
c) $\frac{1}{20}$
d) $\frac{1}{8}$
e) $\frac{1}{4}$

6 O menor número inteiro positivo que é solução da equação $(0,25)^{\frac{1}{x}} < \sqrt{8}$ é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Logaritmo: definição

1. Definição

Para resolvermos a equação exponencial $2^x = 8$, reduzimos os membros a potências de mesma base. Assim:

$2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

$S = \{3\}$

Consideramos, agora, a seguinte equação:

$2^x = 3$

Para resolver equações exponenciais como esta, as quais não conseguimos reduzir a potências de mesma base, aplicamos, então, os logaritmos, que veremos a seguir:

1. Sejam *a* e *b* números reais e positivos, com $a \neq 1$. Chama-se **logaritmo de *b* na base *a*** o expoente *x* a que se deve elevar *a*, de modo que a potência obtida seja igual a *b*.

Notação

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Dizemos que: *a* é a **base** do logaritmo; *b* é o **logaritmando** e *x* é o **logaritmo** de *b* na base *a*.

Se a base do logaritmo é 10 (**logaritmo decimal**), podemos usar a seguinte notação, omitindo a base:

$$\log_{10} b = \log b$$

Consequências da definição

Sejam $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$:

I. $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$.

II. $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$.

III. $a^{\log_a b} = b$, pois, sendo $\log_a b = c$, temos $a^c = b$.

Daí: $a^{\log_a b} = a^c = b$.

Logo, $a^{\log_a b} = b$.

IV. $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

Atividades

1 A soma dos valores inteiros de *x* para os quais a função $f(x) = \log_{(2x-1)}\left(1 - \frac{x}{4}\right)$ existe é igual a:

a) 6
b) 5
c) 4
d) 3
e) 2

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 1 > 0 \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \\ 2x - 1 \neq 1 \Rightarrow 2x \neq 2 \Rightarrow x \neq 1 \\ 1 - \frac{x}{4} > 0 \Rightarrow -\frac{x}{4} > -1 \Rightarrow x < 4 \end{array}\right\} \frac{1}{2} < x < 4 \text{ e } x \neq 1$$

Os valores inteiros de *x* são os números 2 e 3, cuja soma é 5.

Alternativa *b*

2 (Inatel-MG) Se $y = \log_5 (\log_2 32)$, então tem-se que:

a) $\log_5 y = 1$
b) $\log_5 y = 0$
c) $\log_2 y = 5$
d) $\log y = 10$
e) $y = 10$

$\log_2 32 = x \Rightarrow 2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$

$y = \log_5 5 = 1$

$\log_5 y = \log_5 1 = 0$

Alternativa *b*

3 (U. F. Lavras-MG) O valor de x que satisfaz a equação $[2^{\log_2 (x) + 1}]^2 = 8$ é igual a:

a) 0
c) 2
e) $2\sqrt{2}$
b) 1
d) $\sqrt{2}$

$[2^{\log_2 (x) + 1}]^2 = 8 \Rightarrow 2^{\log_2 (x) + 1} = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2^{\log_2 (x) + 1} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{2}^{\log_2 (x) + 1} = \cancel{2}^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \log_2 (x) + 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \sqrt{2}$

Alternativa *d*

4 (U. F. São Carlos-SP) Calcule os valores de x, tais que $\log_2 (8 + x - x^2) = 1 + \log_2 (2x - 5)$.

$\log_2 (8 + x - x^2) = 1 + \log_2 (2x - 5) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 (8 + x - x^2) = \log_2 2 + \log_2 (2x - 5) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 (8 + x - x^2) = \log_2 [2(2x - 5)] \Rightarrow$

$\Rightarrow 8 + x - x^2 = 4x - 10 \Rightarrow x^2 + 3x - 18 = 0$

$\begin{cases} x = -6 \text{ (Não satisfaz as condições de existência.)} \\ \text{ou} \\ x = 3 \end{cases}$

$\therefore S = \{3\}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (UF-BA) No sistema $\begin{cases} \left(\sqrt[8]{2}\right)^x = \sqrt{2} \\ \log_x \left(4\sqrt{2}\right) = y \end{cases}$, o valor de y é:

a) $\frac{3}{2}$
c) $\frac{5}{6}$
e) $\frac{9}{4}$
b) $\frac{5}{4}$
d) $\frac{9}{2}$

2 (Fabrai-MG) A condição de existência da função $f(x) = \log_{x-1} (x^2 - 2x - 3)$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 > x > 3\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ e } x \neq 2\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$

3 Em que base o logaritmo de $\frac{27}{8}$ é igual a -3?

4 Determine o valor da expressão a seguir:
$\log_3 \sqrt{27} + \log_\pi \pi - \log 1 + 2^{3 + \log_2 5} - 5^2$

a) $\frac{22}{3}$
c) $\frac{33}{2}$
e) $\frac{23}{11}$
b) 19
d) $\frac{35}{2}$

5 (Fumec-MG) Se $\log_x 125 = -3$ e $\log_{32} y = x$, sendo x um número real positivo, diferente de 1, y só pode ser o número:

a) -5
b) -2
c) 5
d) 2

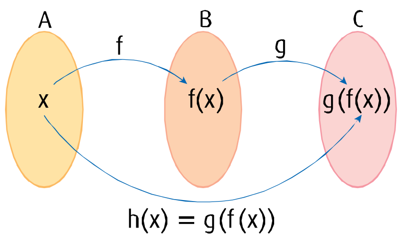
6 (Mackenzie-SP) A raiz real da equação $\log_3 (9^x - 2) = x$ é:

a) $\log_3 \sqrt{2}$
d) $\log_3 2$
b) $2 \cdot \log_3 2$
e) $\log_3 \sqrt{3}$
c) $\log_3 \frac{2}{3}$

Função composta e função inversa

1. Função composta

Considere a seguinte representação:



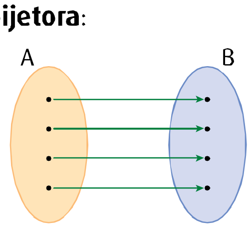
Sendo f: A → B e g: B → C, a **função composta** de *g* com *f* é a função h: A → C, definida por h(x) = g(f(x)). Indica-se essa função por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ — lê-se: "*g* composta com *f*" ou "*g* bola *f*".

2. Função inversa

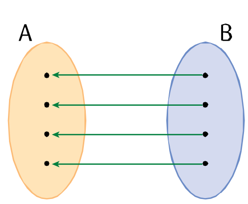
Uma função *f* é bijetora se:

- injetora – cada elemento *y*, pertencente ao conjunto imagem de *f*, é correspondido, por meio de *f*, com um único elemento *x* pertencente ao domínio de *f*;
- sobrejetora – o conjunto imagem é o próprio contradomínio de *f*.

Observe a representação, em diagramas, de uma função f: A → B, **bijetora**:



Notemos que, invertendo os sentidos das flechas, continuamos com a representação de uma função, agora de B em A.



Essa nova função é chamada **função inversa** de *f* e representa-se por f^{-1}.

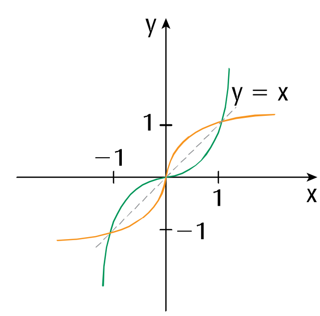
Notemos, ainda, que o domínio de *f* é o conjunto imagem de f^{-1}, e vice-versa.

Determinação da função inversa (f^{-1})

Para determinarmos a inversa de uma função bijetora, usamos uma regra prática:

- "trocamos" *x* por *y* e *y* por *x*;
- "isolamos" *y*.

Observação: O gráfico de $f^{-1}(x)$ são os pontos simétricos de f(x) em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares no plano cartesiano.



Atividades

1 Sendo $f(x) = \frac{x^2}{2}$ e $g(x) = 2x - 1$, determine:

a) $(g \circ f)(5)$

$(g \circ f)(5) = g(f(5)) = g\left(\frac{25}{2}\right) = 2 \cdot \frac{25}{2} - 1 = 24$

b) $(f \circ g)(5)$

$(f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(9) = \frac{81}{2}$

c) $(g \circ f)(x)$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{2x^2}{2} - 1 = x^2 - 1$

d) $(f \circ g)(x)$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 1) = \frac{(2x - 1)^2}{2} = \frac{4x^2 - 4x + 1}{2}$

2 Considere as funções $f(x) = 2x - 7$ e $f[g(x)] = 2x^2 - 5$. Determine a sentença que representa a função $g(x)$.

$g(x) = x^2 + 1$

$f(x) = 2x - 7 \Rightarrow f[g(x)] = 2 \cdot g(x) - 7$

$f[g(x)] = 2x^2 - 5$

$2 \cdot g(x) - 7 = 2x^2 - 5 \Rightarrow 2 \cdot g(x) = 2x^2 + 2 \therefore g(x) = x^2 + 1$

3 Determine a inversa das funções:

a) $f(x) = \frac{5x - 7}{2}$

$y = \frac{5x - 7}{2}$

Trocando *x* por *y* e vice-versa, temos:

$x = \frac{5y - 7}{2} \Rightarrow 2x = 5y - 7 \Rightarrow 2x + 7 = 5y$

$y = \frac{2x + 7}{5}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{2x + 7}{5}$

b) $f(x) = \frac{x - 1}{x + 2}$

$y = \frac{x - 1}{x + 2}$

Trocando *x* por *y* e vice-versa, temos:

$x = \frac{y - 1}{y + 2} \Rightarrow xy + 2x = y - 1 \Rightarrow xy - y = -2x - 1$

$y = \frac{-2x - 1}{x - 1}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{-2x - 1}{x - 1}$

4 (Unifor-CE) Seja a função *f*, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada por $f(x) = 2x + 1$. Se $f[f(x)] = ax + b$, então $a - b$ é igual a:

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow \begin{cases} f[f(x)] = a \cdot x + b \\ f[f(x)] = 2 \cdot f(x) + 1 \end{cases} \Rightarrow f[f(x)] = 2f(x) + 1$

$2 \cdot (2x + 1) + 1 = ax + b \Rightarrow 4x + 3 = ax + b \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 4$ e $b = 3 \therefore a - b = 1$

Alternativa *d*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (UF-AM) Considere $f(x) = 2x - 2$ e $g(x) = -x + 3$. Se $b = g(a)$, então $f(b)$ vale:

a) $-2a + 1$
b) $-2a + 4$
c) $-2a + 2$
d) $-2a - 8$
e) $-2a - 4$

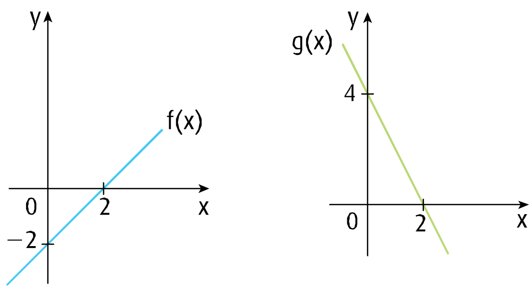
2 (UF-MG) Considere a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3^x, \text{ se } -1 \leq x \leq 1 \\ 5, \text{ se } 1 < x \leq 4 \\ x - 4, \text{ se } x > 4 \end{cases}$$

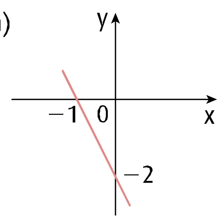
Pode-se afirmar que o valor de $f(f(f(2)))$ é:

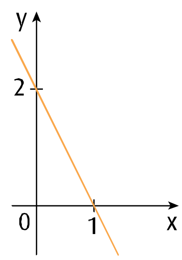
a) $\frac{1}{3}$
b) 1
c) 3
d) 5

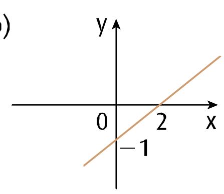
3 (U. Gama Filho-RJ) Atente para os gráficos:

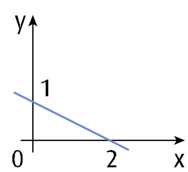


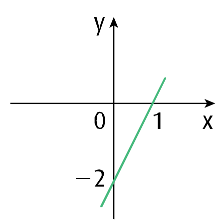
O gráfico que representa f(g(x)) é:

a)


d)


b)


e)


c)


4 (FEI-SP) Se a função real *f* definida por $f(x) = \frac{1}{x+1}$, para todo $x > 0$, então $f^{-1}(x)$ é igual a:

a) $\frac{1}{x} - 1$

b) $\frac{1}{x} + 1$

c) $x + 1$

d) $1 - x$

e) $\frac{1}{x+1}$

5 A função *f*, definida de $\mathbb{R} - \{3\}$ em B pela sentença $f(x) = \frac{2x - 4}{x - 3}$, admite inversa. O contradomínio B *é* dado por $\mathbb{R} - \{a\}$. O valor de *a* é:

a) 2

b) −2

c) 1

d) −1

e) 0

6 (U. F. Alfenas-MG) Seja *f* função real tal que $f(2x - 9) = x$ para todo *x* real. A igualdade $f(c) = f^{-1}(c)$ se verifica para *c* igual a:

a) 1

b) 9

c) 7

d) 3

e) 5

Noções gerais de polígono / Triângulos

1. Polígonos

Chama-se poligonal a figura formada pelo conjunto de segmentos de reta consecutivos com quaisquer dois vizinhos não colineares.

Polígono é uma poligonal simples (não se cruza) em que as extremidades coincidem.

Um polígono é **regular** quando todos os seus lados são congruentes e todos os ângulos internos são congruentes.

Soma das medidas dos ângulos internos

Seja um polígono qualquer de *n* lados. A soma S das medidas dos ângulos internos é dada por:

$$S = (n - 2) \cdot 180°$$

Soma das medidas dos ângulos externos

$$S = 360°$$

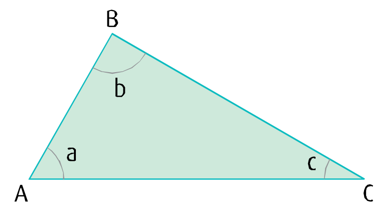
Número de diagonais (d)

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

2. Triângulos

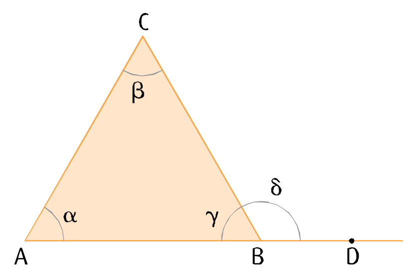
Triângulo é um polígono que possui três lados. É o polígono que possui o menor número de lados, ou seja, todo triângulo possui três vértices, três lados e três ângulos.

Na figura, temos:



- Vértices: A, B, C.
- Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.
- Ângulos internos: *a*, *b* e *c*.

Considere o triângulo ABC, de vértices A, B e C, da figura a seguir:



Os ângulos α, β e γ são chamados ângulos internos e δ é um ângulo externo.

Um ângulo interno e um ângulo externo adjacentes são suplementares, ou seja, a soma dos dois é igual a 180°.

Soma das medidas dos ângulos internos

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180°.

No nosso triângulo: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

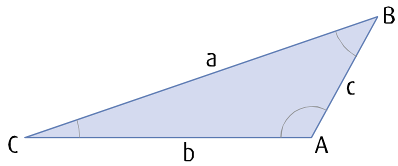
Teorema do ângulo externo

A medida de um ângulo externo de um triângulo qualquer é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes ao externo considerado.

No nosso triângulo: $\delta = \alpha + \beta$

Condição para a existência de um triângulo

Seja o triângulo ABC de lados *a*, *b* e *c*.



Para que exista esse triângulo, devemos ter:

I. $a < b + c$
II. $b < a + c$
III. $c < a + b$

Classificação

Os triângulos podem ser classificados quanto aos lados e quanto aos ângulos.

Quanto aos lados	
Triângulo equilátero	Possui os três lados congruentes. Cada ângulo interno mede 60°.
Triângulo isósceles	Possui dois lados congruentes. Os ângulos da base são congruentes. A altura divide a base em dois segmentos congruentes.
Triângulo escaleno	Possui os três lados não congruentes.
Quanto aos ângulos	
Triângulo acutângulo	Possui os três ângulos agudos.
Triângulo retângulo	Possui um ângulo reto (e dois agudos).
Triângulo obtusângulo	Possui um ângulo obtuso (e dois agudos).

Os triângulos possuem as duas classificações simultaneamente: um triângulo pode ser, por exemplo, retângulo isósceles.

Seja *a* o lado de maior medida de um triângulo:

- Se $a^2 = b^2 + c^2$: o triângulo é **retângulo**.
- Se $a^2 < b^2 + c^2$: o triângulo é **acutângulo**.
- Se $a^2 > b^2 + c^2$: o triângulo é **obtusângulo**.

Atividades

1 Determine a soma do número de lados com o número de diagonais de um polígono regular que apresenta ângulo externo de medida igual a 24º.

a) 90
b) 95
c) 105
d) 15
e) 45

$S_e = 360^\circ$ e $a_e = \frac{S_e}{n} \Rightarrow n = \frac{S_e}{a_e} \Rightarrow n = \frac{360^\circ}{24^\circ} \therefore n = 15$

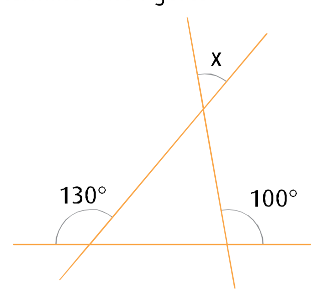
$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2} \Rightarrow d = \frac{15 \cdot (15 - 3)}{2} \therefore d = 90$

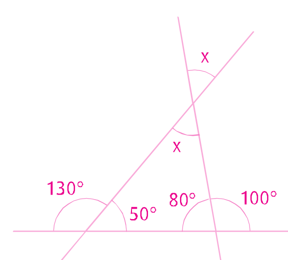
Assim: $n + d = 105$

Alternativa *c*

2 Determine *x* na figuras:

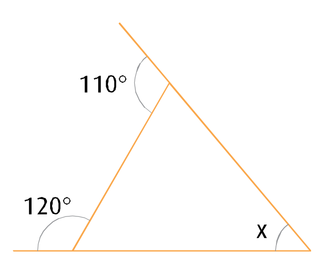
a)

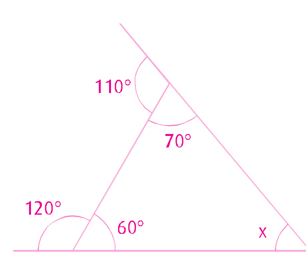




$x + 50^\circ + 80^\circ = 180^\circ \therefore x = 50^\circ$

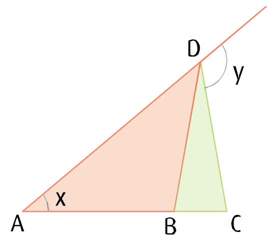
b)





$x + 60^\circ + 70^\circ = 180^\circ \therefore x = 50^\circ$

3 (Fuvest-SP) Na figura, AB = BD = CD.



Determine *y* em função de *x*.

O triângulo ABD é isósceles, portanto:

med($A\hat{D}B$) = x

med($C\hat{B}D$) = 2x (externo do $\triangle$ABD)

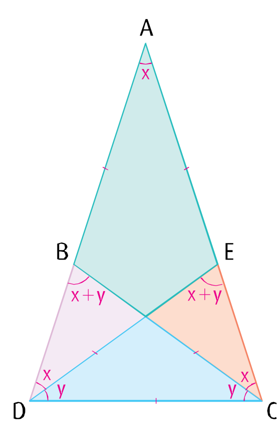
med($B\hat{D}C$) = 180º − 4x

Então: y + med($B\hat{D}C$) + med($A\hat{D}B$) = 180° ⇒

⇒ y + 180° − 4x + x = 180° ⇒ y = 3x

4 (UF-PE) Na figura ilustrada ao lado, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EA}$ são congruentes.

Determine, em graus, a medida do ângulo $C\hat{A}D$.



Observe a figura:

No triângulo ADC, temos:

3x + 2y = 180º

No triângulo DCE, temos:

2x + 3y = 180º

Assim: 3x + 2y = 2x + 3y ⇒ x = y

Portanto, voltando ao triângulo ADC, temos:

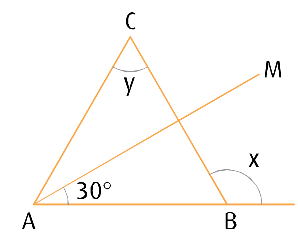
3x + 2x = 180º ⇒ 5x = 180º ⇒ x = $C\hat{A}D$ = 36º

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (PUC-SP) No triângulo a seguir, $\overline{AM}$ é bissetriz do ângulo $C\hat{A}B$.

Então, (x − y) vale:

a) 30º
b) 100º
c) 20º
d) 60º
e) 40º

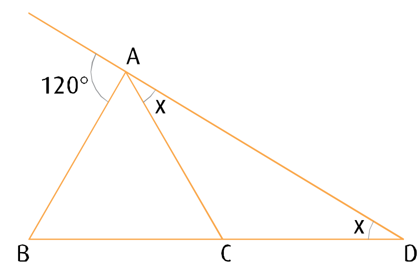


2 Os números x − 1, 2x + 1 e 10 representam, respectivamente, as medidas dos lados de um triângulo, e *x* é um número natural. O número de possibilidades de *x* é:

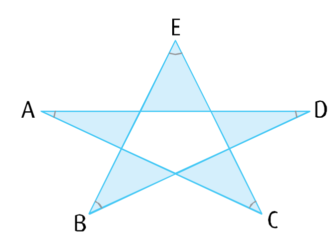
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

3 Considerando AB = AC e as informações apresentadas na figura, podemos afirmar que *x* vale:

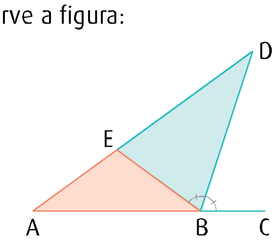
a) 30º
b) 40º
c) 50º
d) 60º
e) 70º



4 Determine a soma das medidas dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ e $\hat{E}$.



5 (UF-MG) Observe a figura:



Nessa figura, AB = BD = DE, e o segmento $\overline{BD}$ é bissetriz de $E\hat{B}C$. A medida de $A\hat{E}B$, em graus, é:

a) 96
b) 100
c) 104
d) 108

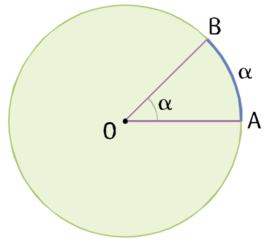
6 (ITA-SP) Seja *n* o número de lados de um polígono convexo. Se a soma das medidas de (n − 1) ângulos internos do polígono é 2 004°, determine o número *n* de lados do polígono.

Ângulos na circunferência

1. Tipos de ângulo

Ângulo central

Chama-se ângulo central o ângulo que possui o vértice no centro da circunferência.

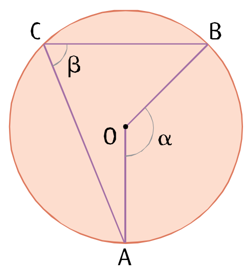


AÔB é um ângulo central de medida α.

Segundo a própria definição de grau, a medida do ângulo central é igual à medida do arco por ele determinado.

Ângulo inscrito

Dá-se o nome de ângulo inscrito ao ângulo que possui o vértice sobre a circunferência, e os lados secantes a essa circunferência.



AĈB é um ângulo inscrito de medida β.

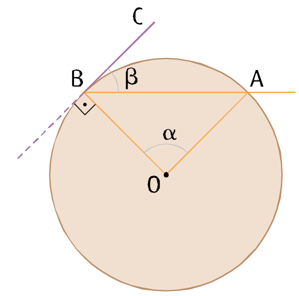
Teorema

A medida do ângulo inscrito é igual à metade da medida do arco por ele determinado.

$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$

Ângulo de segmento

É o ângulo que possui o vértice sobre a circunferência, um de seus lados é secante, e o outro é tangente a essa circunferência.



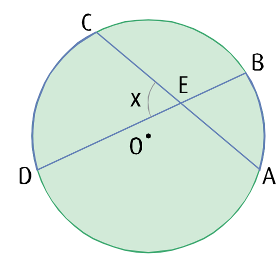
AB̂C é um ângulo de segmento de medida β.

Teorema

A medida do ângulo de segmento é igual à metade da medida do arco por ele determinado.

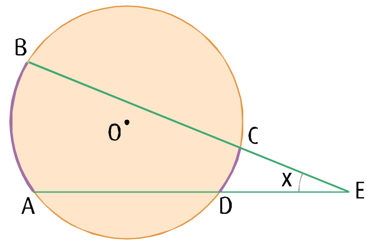
$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$

Ângulos excêntricos



O ângulo CÊD é chamado **excêntrico interno** e mede a média aritmética entre os arcos determinados por ele e por seu oposto pelo vértice.

$$x = \frac{med(\overset{\frown}{AB}) + med(\overset{\frown}{CD})}{2}$$



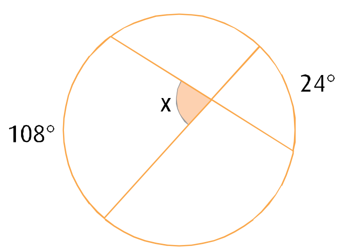
O ângulo AÊB é chamado **excêntrico externo** e mede a metade do módulo da diferença entre os arcos por ele determinados.

$$x = \frac{|med(\overset{\frown}{AB}) - med(\overset{\frown}{CD})|}{2}$$

Atividades

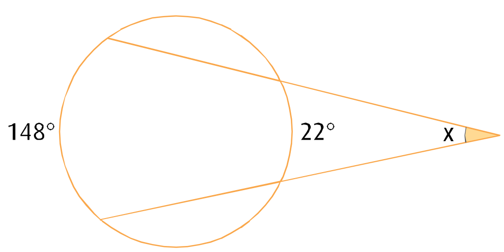
1 Determine a medida do ângulo *x* nas circunferências a seguir:

a)



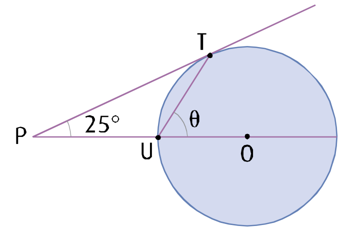
$x = \frac{108^o + 24^o}{2} \therefore x = 66^o$

b)



$x = \frac{|148^o - 22^o|}{2} \therefore x = 63^o$

2 (Unifor-CE) Seja uma circunferência λ de centro O. Por um ponto P traçam-se uma tangente $\overline{PT}$ e uma secante $\overline{PS}$, que contém o ponto O, como mostra a figura seguinte.



Se $U \in \overline{PS}$, a medida θ, do ângulo assinalado, é:

a) 85° c) 65° e) 45°
b) 75° 30′ d) 57° 30′

I. $med(\overset{\frown}{TS}) = 2\theta$

$med(\overset{\frown}{UT}) = x$

$x + 2\theta = 180^o$

II. $\frac{2\theta - x}{2} = 25^o \Rightarrow 2\theta - x = 50^o$

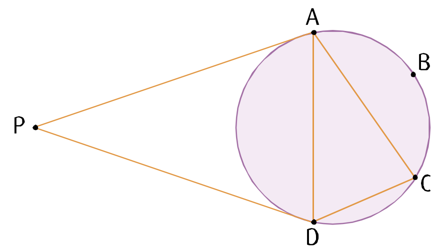
Somando (I) e (II), temos:

$4\theta = 230^o$

$\theta = 57{,}5^o = 57^o\,30'$

Alternativa *d*

3 (UF-ES) Na figura, os segmentos de reta $\overline{AP}$ e $\overline{DP}$ são tangentes à circunferência, o arco ABC mede 110 graus e o ângulo CAD mede 45 graus.



A medida, em graus, do ângulo APD é:

a) 15 c) 25 e) 35
b) 20 d) 30

O ângulo $A\hat{D}C$ é inscrito, de medida $\frac{110^o}{2} = 55^o$.

O ângulo $C\hat{A}D$ é inscrito, de medida 45°.

Logo, o arco DC mede 90°.

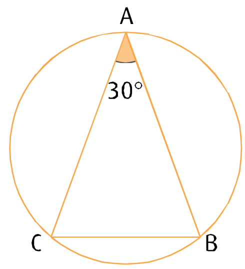
Em consequência, o arco $\overset{\frown}{AD}$ mede: 360° − 110° − 90° = 160°

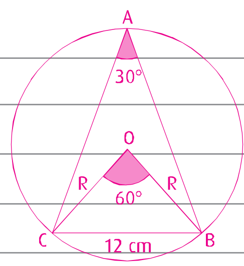
Assim: $med(A\hat{P}D) = \frac{med(\overset{\frown}{ABD}) - med(\overset{\frown}{AD})}{2} = \frac{200^o - 160^o}{2} = 20^o$

Alternativa *b*

4 (F. M. Santa Casa-SP) O triângulo ABC inscrito na circunferência de raio R tem ângulo $B\hat{A}C$ com medida 30° e o lado oposto valendo 12 cm. Então, o diâmetro dessa circunferência é igual a:

a) 12 cm
b) 6 cm
c) 18 cm
d) 30 cm
e) 24 cm





$med(B\hat{A}C) = 30° \Rightarrow med(B\hat{O}C) = 60°$

O triângulo OBC é isósceles ($OB = OC = R$) e, portanto:

$med(O\hat{B}C) = med(O\hat{C}B)$

Temos: $med(O\hat{B}C) + med(O\hat{C}B) + 60° = 180° \Rightarrow$

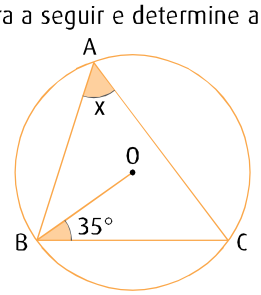
$\Rightarrow med(O\hat{B}C) = med(O\hat{C}B) = 60°$

Podemos concluir que o triângulo OBC é equilátero e o raio R da circunferência é igual a 12 cm. Sendo assim, o diâmetro da circunferência é igual a 24 cm.

Alternativa *e*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

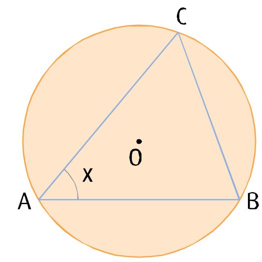
1 Observe a figura a seguir e determine a medida *x*.



2 (Unimontes-MG) Os pontos A, B e C pertencem a uma circunferência de centro O. Os pontos A e B estão na mesma semicircunferência, e o diâmetro passa por C. Sendo $med(O\hat{C}A) = 20°$ e $med(C\hat{O}B) = 80°$, o ângulo $A\hat{B}O$ mede:

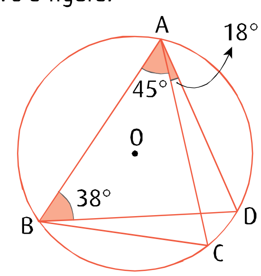
a) 120° b) 100° c) 80° d) 60°

3 (U. E. Feira de Santana-BA) Na figura abaixo, em que se tem um círculo de centro O, o arco $\overset{\frown}{AC}$ mede 130° e o ângulo $A\hat{C}B$ mede 62°. A medida *x*, do ângulo $B\hat{A}C$, é:



a) 65° c) 50° e) 28°
b) 53° d) 31°

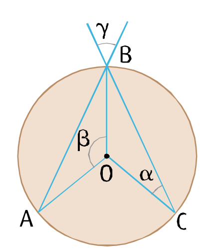
4 (UF-MG) Observe a figura:



Suponha que as medidas dos ângulos $B\hat{A}C$, $C\hat{A}D$ e $A\hat{B}C$, assinalados na figura, sejam 45°, 18° e 38°, respectivamente. A medida do ângulo $A\hat{C}B$, em graus, é:

a) 38 c) 79 e) 58
b) 63 d) 87

5 (Fatec-SP) Na figura, os pontos A, B e C pertencem à circunferência de centro O.

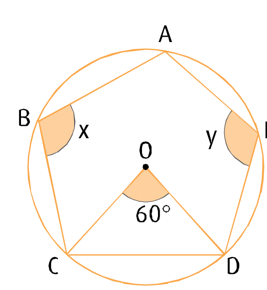


Se $\beta = 150°$ e $\gamma = 50°$, então α é igual a:

a) 30° c) 35° e) 20°
b) 45° d) 15°

6 (PUC-SP) O pentágono ABCDE da figura seguinte está inscrito em um círculo de centro O. O ângulo $C\hat{O}D$ mede 60°. Então, $x + y$ é igual a:

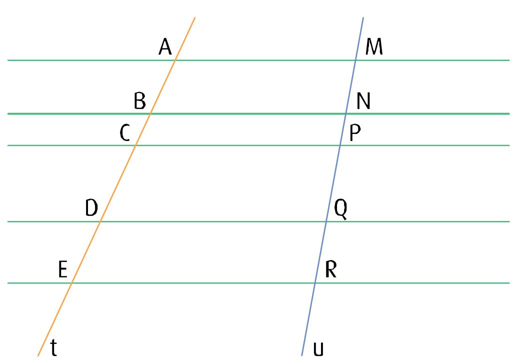
a) 180°
b) 185°
c) 190°
d) 210°
e) 250°



Teorema de Tales / Semelhança

1. Segmentos proporcionais

Considere um feixe de retas paralelas interceptado por duas retas transversais, *t* e *u*.



Chamam-se segmentos correspondentes aqueles que têm suas extremidades sobre as mesmas paralelas.

Dessa maneira, temos:

$\overline{DE}$ e $\overline{QR}$ são correspondentes;

$\overline{AE}$ e $\overline{MR}$ são correspondentes.

2. Teorema de Tales

A razão entre dois segmentos correspondentes quaisquer é constante. No feixe acima, temos:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{CD}{PQ}$$

Ainda: a razão entre dois segmentos quaisquer de uma das transversais é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal.

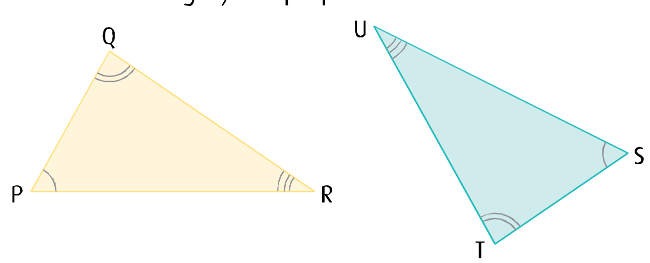
$$\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PQ}$$

3. Semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes (representa-se pelo símbolo $\sim$) quando existe uma correspondência entre seus ângulos internos de tal modo que:

I. dois ângulos correspondentes são congruentes;

II. lados opostos a ângulos correspondentes (lados homólogos) são proporcionais.



$$\triangle PQR \sim \triangle STU \Rightarrow \begin{cases} \hat{P} = \hat{S} \\ \hat{Q} = \hat{T} \\ \hat{R} = \hat{U} \end{cases} \text{e } \frac{PQ}{ST} = \frac{PR}{SU} = \frac{QR}{TU} = k$$

- O número real *k* é chamado **razão de semelhança** ou constante de proporcionalidade do triângulo PQR para o triângulo STU.
- A razão de semelhança se mantém quando se dividem dois elementos lineares homólogos (altura, raio do círculo inscrito, perímetro etc.).
- Se a razão de semelhança é igual a 1, os triângulos são chamados **congruentes**.

Casos de semelhança de triângulo

Para determinarmos a semelhança de triângulo, não é necessário verificarmos a congruência de todos os ângulos homólogos nem a proporcionalidade de seus lados; basta observarmos os casos de semelhança a seguir:

Caso AA (ângulo — ângulo)

Dois triângulos são semelhantes se possuem dois ângulos correspondentes congruentes.

Caso LAL (lado — ângulo — lado)

Dois triângulos são semelhantes se possuem dois pares de lados homólogos, respectivamente, proporcionais, e se os ângulos formados por estes pares de lados homólogos são congruentes.

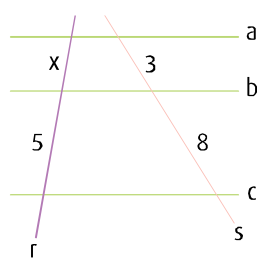
Caso LLL (lado — lado — lado)

Dois triângulos são semelhantes se possuem os lados homólogos, respectivamente, proporcionais.

Atividades

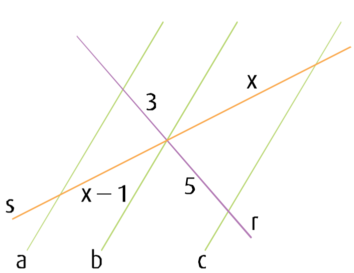
1 Determine x em cada figura, sabendo que as retas a, b e c são paralelas:

a)



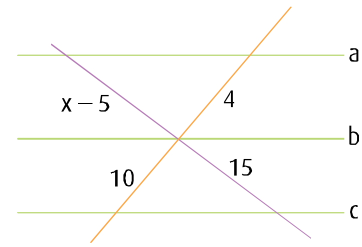
Pelo teorema de Tales, temos: $\frac{x}{5} = \frac{3}{8} \Rightarrow x = \frac{15}{8}$

b)



$\frac{x-1}{x} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5x - 5 = 3x \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

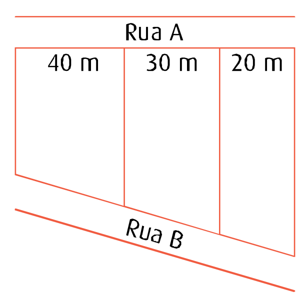
c)



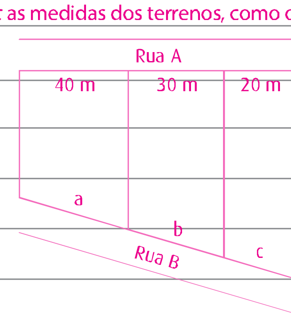
$\frac{x-5}{15} = \frac{4}{10} \Rightarrow \frac{x-5}{15} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5x - 25 = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x = 55 \Rightarrow x = 11$

2 (FEI-SP) Três terrenos têm frente para a rua A e para a rua B, conforme a figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua A. Qual a medida de frente para a rua B de cada lote, sabendo-se que a frente total para essa rua é 120 m?



Sejam *a*, *b* e *c* as medidas dos terrenos, como o indicado na figura.



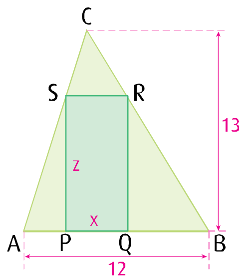
$\frac{(40 + 30 + 20)}{120} = \frac{40}{a} = \frac{30}{b} = \frac{20}{c}$

Assim:

$$\begin{cases} \frac{40}{a} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3a = 160 \therefore a = \frac{160}{3}\,\text{m} \\ \frac{30}{b} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3b = 120 \therefore b = 40\,\text{m} \\ \frac{20}{c} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3c = 80 \therefore c = \frac{80}{3}\,\text{m} \end{cases}$$

3 (PUC-RJ) A figura ao lado representa um retângulo PQRS, inscrito em um triângulo ABC, de base AB = 12 cm e altura 13 cm.

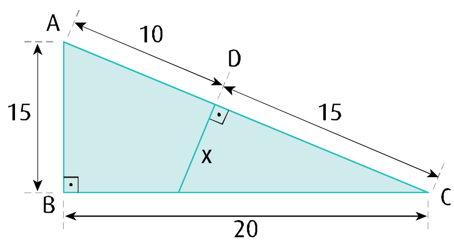
Seja x o comprimento de $\overline{PQ}$ e z o comprimento de $\overline{PS}$. Comparando os triângulos ABC e SRC, determine z em função de x.



$\frac{12}{13} = \frac{x}{13 - z} \Rightarrow 156 - 12z = 13x \Rightarrow 12z = 156 - 13x \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \frac{156 - 13x}{12}$

4 (Mackenzie-SP) Na figura a seguir, a medida x vale:



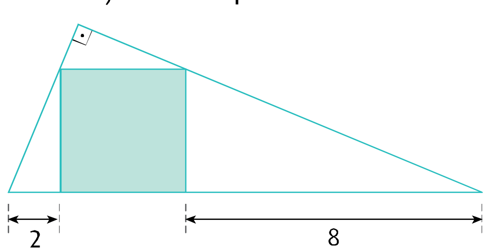
a) 12,75
b) 12,25
c) 11,75
d) 11,25
e) 11

$\frac{x}{15} = \frac{15}{20} \Rightarrow 20x = 15 \cdot 15 \Rightarrow x = \frac{225}{20} \therefore x = 11,25$

Alternativa *d*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (Mackenzie-SP) A área do quadrado assinalado na figura é:

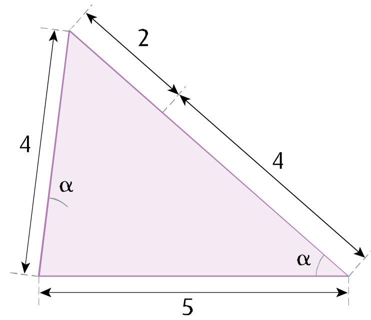


a) 20
b) 18
c) 25
d) 12
e) 16

2 (Cesgranrio-RJ) Certa noite, uma moça de 1,50 m de estatura estava a dois metros de distância de um poste de 4 m de altura. O comprimento da sombra da moça no chão era de:

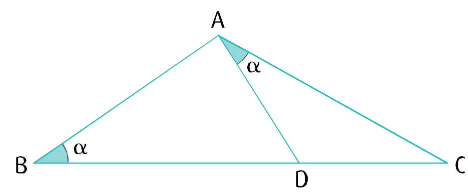
a) 0,75 m
b) 1,20 m
c) 1,80 m
d) 2,40 m
e) 3,20 m

3 (Unirio-RJ) Observe os dois triângulos representados a seguir. O perímetro do menor triângulo é:



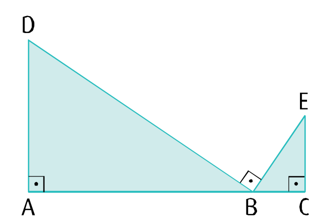
a) 3
b) $\frac{15}{4}$
c) 5
d) $\frac{15}{2}$
e) 15

4 (UF-SE) Na figura a seguir, são dados AC = 8 cm e CD = 4 cm. A medida de $\overline{BD}$, em centímetros, é:



a) 9
b) 10
c) 12
d) 15
e) 16

5 (Vunesp-SP) Na figura, B é um ponto do segmento de reta $\overline{AC}$, e os ângulos $D\hat{A}B$, $D\hat{B}E$ e $B\hat{C}E$ são retos.

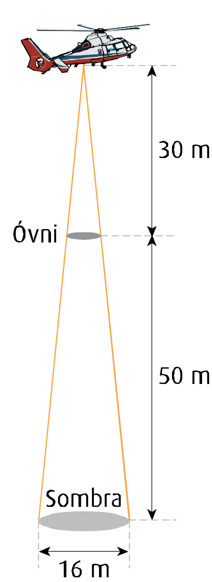


Se AD = 6 dm, AC = 11 dm e EC = 3 dm, as medidas possíveis de $\overline{AB}$, em dm, são:

a) 4,5 e 6,5
b) 7,5 e 3,5
c) 8 e 3
d) 7 e 4
e) 9 e 2

Observação: a figura está fora de escala.

6 (Unirio-RJ) Em uma cidade do interior, à noite, surgiu um objeto voador não identificado (óvni), em forma de disco, que estacionou a 50 m do solo, aproximadamente. Um helicóptero do Exército, situado a aproximadamente 30 m acima do objeto, iluminou-o com um holofote, conforme mostra a figura ao lado.



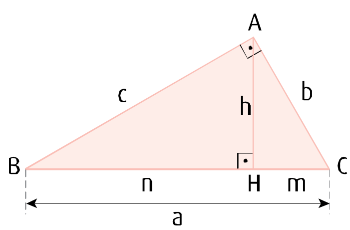
Sendo assim, pode-se afirmar que o raio do objeto voador mede, em *m*, aproximadamente:

a) 3,0
b) 3,5
c) 4,0
d) 4,5
e) 5,0

Relações métricas no triângulo retângulo

1. Triângulo retângulo

Considere um triângulo retângulo ABC, a altura $\overline{AH}$ relativa ao lado $\overline{BC}$ e as medidas indicadas na figura.



O segmento $\overline{BH}$ (de medida *n*) é a projeção do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa, e o segmento $\overline{HC}$ (de medida *m*) é a projeção de $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa.

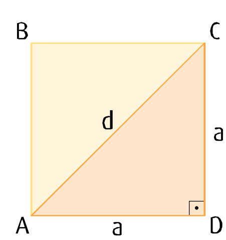
Nessa situação, são válidas as seguintes relações métricas para o triângulo retângulo ABC:

- $h^2 = m \cdot n$
- $b \cdot c = a \cdot h$
- $c^2 = a \cdot n$ ou $b^2 = a \cdot m$
- $c \cdot h = b \cdot n$ ou $b \cdot h = c \cdot m$
- $a^2 = b^2 + c^2$ (**teorema de Pitágoras**)

Aplicações do teorema de Pitágoras

Diagonal de um quadrado

Seja o quadrado ABCD de lado *a* e diagonal *d*, como mostra a figura ao lado.



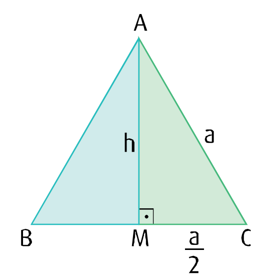
Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2 \cdot a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{d = a \cdot \sqrt{2}}$$

Altura de um triângulo equilátero

Seja o triângulo equilátero ABC, de lado *a* e de altura $\overline{AM}$, conforme a figura seguinte.



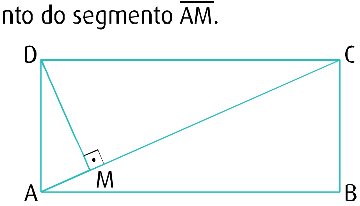
Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{3 \cdot a^2}{4} \Rightarrow \boxed{h = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}}$$

Atividades

1 (Faap-SP) No retângulo ABCD, AB = 4 cm e BC = 3 cm, o segmento $\overline{DM}$ é perpendicular à diagonal $\overline{AC}$. Calcule o comprimento do segmento $\overline{AM}$.



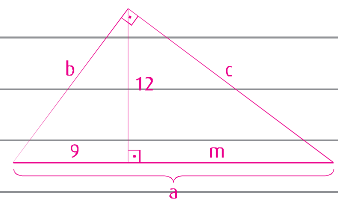
O comprimento do segmento AM é 1,8 cm.

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (AC)^2 = 4^2 + 3^2 \therefore AC = 5$

$(AD)^2 = (AC) \cdot (AM) \Rightarrow 3^2 = 5 \cdot (AM) \therefore AM = \frac{9}{5} \Rightarrow 1{,}8$ cm

2 (UF-RJ) Em um triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa mede 12 e o menor dos segmentos que ela determina sobre a hipotenusa, 9. O menor lado do triângulo mede:

a) 12,5
b) 13
c) 15
d) 16
e) 16,5



$12^2 = 9m \Rightarrow m = \frac{144}{9} \Rightarrow m = 16$ e $a = 25$

$b^2 = 25 \cdot 9 \Rightarrow b = 15$

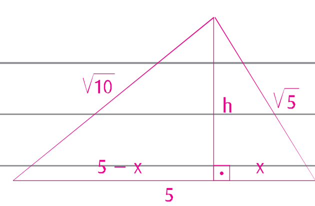
$c^2 = 25 \cdot 16 \Rightarrow c = 20$

O menor lado do triângulo mede 15 cm.

Alternativa *c*

3 (Fuvest-SP) Os lados de um triângulo medem $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ e 5.

a) Qual a medida da altura relativa ao maior lado?



$h^2 + x^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow h^2 = 5 - x^2$ (I)

$h^2 + (5 - x)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 \Rightarrow h^2 + 25 - 10x + x^2 = 10$ (II)

De (I) em (II): $5 - x^2 + 25 - 10x + x^2 = 10 \Rightarrow -10x = -20$

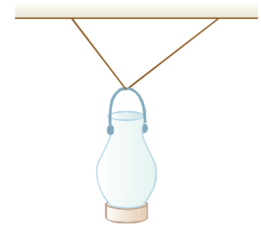
$\therefore x = 2$

Em (I): $h^2 = 5 - x^2 \Rightarrow h^2 = 5 - 2^2 \Rightarrow h^2 = 1 \therefore h = 1$

b) Qual a área desse triângulo?

$A_\triangle = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A_\triangle = \frac{5 \cdot 1}{2} \therefore A_\triangle = 2,5$

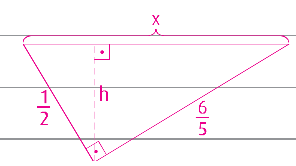
4 (UF-RS) O lampião representado na figura está suspenso por duas cordas perpendiculares presas ao teto.



Sabendo-se que essas cordas medem $\frac{1}{2}$ e $\frac{6}{5}$, a distância do lampião ao teto é:

a) 1,69
b) 1,3
c) 0,6
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{6}{13}$

Observando a figura, temos:



Pelo teorema de Pitágoras:

$x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{36}{25} = \frac{25 + 144}{100} \Rightarrow x^2 = \frac{169}{100} \therefore x = \frac{13}{10}$

Usando a relação $bc = ah$, temos:

$\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{13}{10} \cdot h \therefore h = \frac{6}{13}$

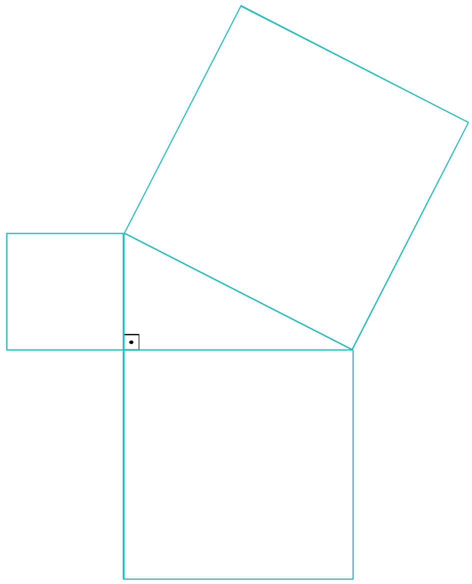
Alternativa *e*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (UE-CE) Uma escada de 2,5 m está encostada na parede vertical de um edifício de modo que o pé da escada está a 0,7 m do prédio. Se o topo da escada escorregar 0,4 m, quantos metros escorregará o pé da escada?

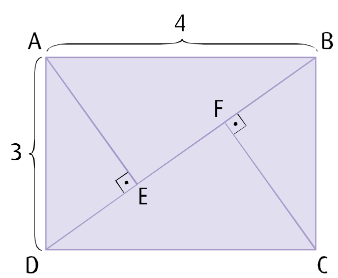
a) 1,0 m
b) 0,9 m
c) 0,8 m
d) 1,5 m

2 (Mackenzie-SP) Na figura, a soma das áreas dos três quadrados é 18. A área do quadrado maior é:



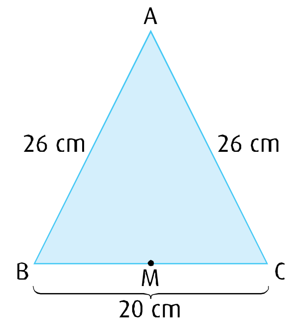
a) 9
b) 10
c) 12
d) 6
e) 8

3 (Fatec-SP) Na figura a seguir, ABCD é retângulo. A medida do segmento EF é:



a) 0,8
b) 1,4
c) 2,6
d) 3,2
e) 3,8

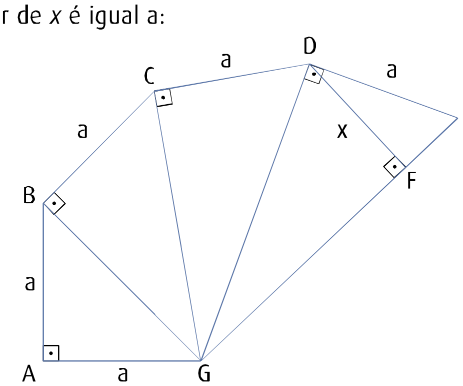
4 No triângulo isósceles da figura, M é o ponto médio da base $\overline{BC}$.



Determine a distância do ponto M até o lado $\overline{AB}$.

5 (Fuvest-SP) Um triângulo retângulo tem catetos AB = 3 e AC = 4. No cateto $\overline{AB}$, toma-se o ponto P equidistante do ponto A e da reta $\overleftrightarrow{BC}$. Qual a distância AP?

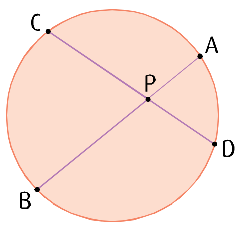
6 Sendo *a* um valor conhecido, tem-se que, na figura, o valor de *x* é igual a:



a) $\dfrac{2\sqrt{5} \cdot a}{5}$
b) $\sqrt{10} \cdot a$
c) $\sqrt{2} \cdot a$
d) $2 \cdot a$
e) 1

Relações métricas na circunferência

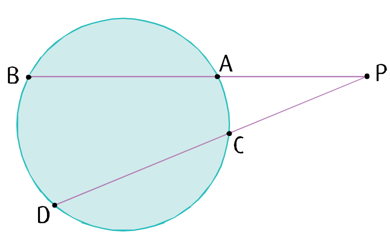
1. Ponto P interno à circunferência



Utilizando-se a semelhança de triângulos, demonstra-se que:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

2. Ponto P externo à circunferência

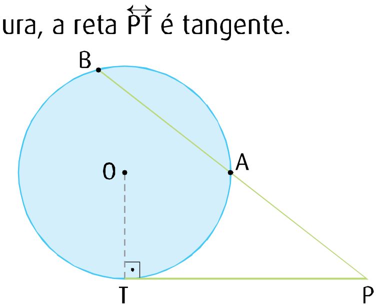


Utilizando-se a semelhança de triângulos, demonstra-se que:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Caso particular

Na figura, a reta $\overleftrightarrow{PT}$ é tangente.

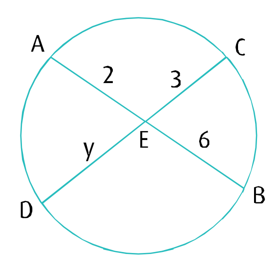


Utilizando-se a semelhança de triângulos, demonstra-se que:

$$(PT)^2 = PA \cdot PB$$

Atividades

1 (Cefet-SP) Sabendo que y é parte do segmento $\overline{DC}$ na circunferência ao lado, o valor de y é:



a) 1
b) 4
c) 9
d) 18

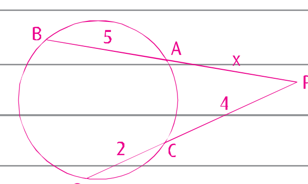
$(EA) \cdot (EB) = (EC) \cdot (ED) \Rightarrow 2 \cdot 6 = 3 \cdot y \therefore y = 4$

Alternativa *b*

2 Sejam P um ponto externo a uma circunferência e B e D pontos dessa circunferência. Os segmentos $\overline{PB}$ e $\overline{PD}$ interceptam essa circunferência nos pontos A e C, respectivamente, de tal forma que AB = 5, PD = 6 e PC = 4. A medida do segmento $\overline{PA}$ é igual a:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 6 e) 1

Seja PA = x

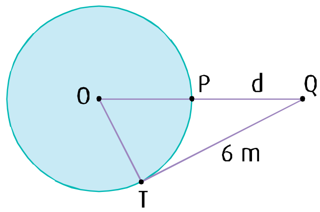


$(PA) \cdot (PB) = (PC) \cdot (PD) \Rightarrow x \cdot (x + 5) = 4 \cdot 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 5x = 24 \Rightarrow x^2 + 5x - 24 = 0 \begin{cases} x = -8 \text{ (Não convém.)} \\ \text{ou} \\ x = 3 \therefore PA = 3 \end{cases}$

Alternativa *b*

3 (Vunesp-SP) Em uma residência, há uma área de lazer com uma piscina redonda de 5 m de diâmetro. Nessa área, há um coqueiro, representado na figura por um ponto Q.



Se a distância de Q (coqueiro) ao ponto de tangência T (da piscina) é 6 m, a distância d = QP, do coqueiro à piscina, é:

a) 4 m
b) 4,5 m
c) 5 m
d) 5,5 m
e) 6 m

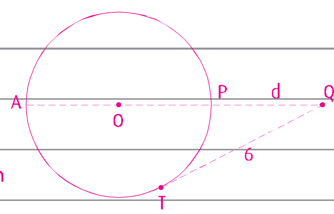
$QA \cdot QP = (QT)^2$

$(d + 5) \cdot d = 36$

$d^2 + 5d - 36 = 0$

$\Delta = 25 + 144 = 169$

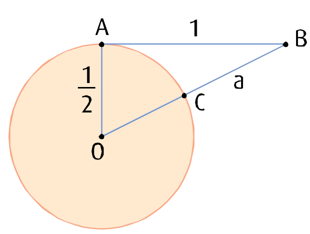
$d = \dfrac{-5 \pm 13}{2} \Rightarrow d = 4$ m



Alternativa *a*

4 (Fafipa-PR) Na figura, AB = 1, $OA = \dfrac{1}{2}$ e CB = a. Considerando-se que $\overline{OA}$ seja o raio do círculo, então *a* vale:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$
c) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$
d) $\dfrac{1}{2}$
e) 2



$BC \cdot BD = (AB)^2$

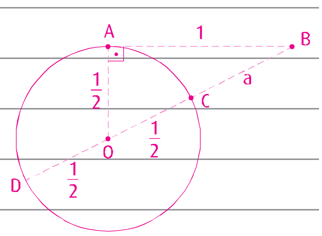
$a \cdot (a + 1) = 1 \Rightarrow a^2 + a - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 4 = 5$

$a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Como a > 0, vem:

$a = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

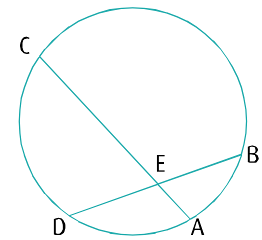


Alternativa *c*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 Na figura, são dados $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{1}{4}$, BE = 8 cm e ED = 6 cm.

O comprimento AC, em cm, é:

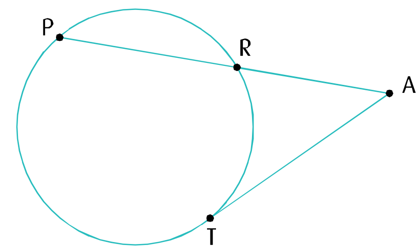


a) 10
b) 12
c) 16
d) 18
e) 20

2 (UF-MG) Em um círculo, a corda $\overline{CD}$ é perpendicular ao diâmetro $\overline{AB}$ no ponto E. Se $AE \cdot EB = 3$, a medida de $\overline{CD}$ é:

a) $\sqrt{3}$
b) $2\sqrt{3}$
c) 3
d) $3\sqrt{3}$

3 (Inatel-MG) Na figura a seguir, há uma tangente $\overleftrightarrow{AT}$ e uma secante $\overleftrightarrow{AP}$ a um círculo. Se AT = 12 cm e PR = 10 cm, calcule o comprimento AR.

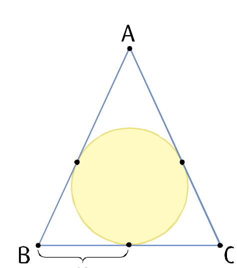


4 (Mackenzie-SP) Em uma circunferência de raio 5 cm, uma corda perpendicular a um diâmetro separa esse diâmetro em duas partes, uma das quais mede 2 cm. O comprimento da corda, em cm, é:

a) 4
b) 6
c) 7
d) 8
e) 5

5 (Fuvest-SP) Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se interceptam em um ponto P e são cordas perpendiculares de um mesmo círculo. Se AP = CP = 2 e PB = 6, determine o raio do círculo.

6 O triângulo ABC é circunscrito à circunferência.



Sendo AB = 8, AC = 9 e BC = 7, então *x* vale:

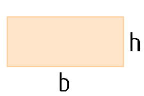
a) 1,5
b) 2,8
c) 3
d) 4,6
e) 5

Áreas das figuras planas

1. Área de polígonos

Área do retângulo

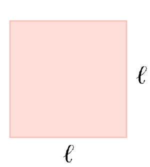
Retângulo é o quadrilátero que possui os quatro ângulos internos iguais a 90°. A área do retângulo é dada pelo produto da medida da base (b) pela medida da altura (h).



$$A = b \cdot h$$

Área do quadrado

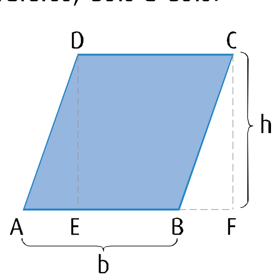
O quadrado é um retângulo cujas medidas da base e da altura são iguais; logo, a área de um quadrado de lado ℓ é dada por:



$$A = \ell^2$$

Área do paralelogramo

Paralelogramo é o quadrilátero que possui os lados opostos paralelos, dois a dois.



A área do paralelogramo ABCD (com base *b* e altura *h*) é igual à área do retângulo EFCD e é expressa por:

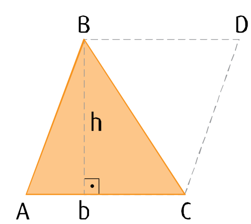
$$A = b \cdot h$$

Área do triângulo

A área do triângulo pode ser calculada de várias maneiras. Vejamos a seguir algumas delas.

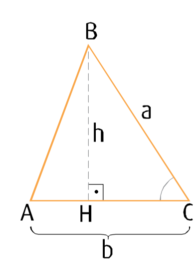
Em função das medidas da base e da altura relativa a essa base

A área do triângulo (com base *b* e altura *h*) é a metade da área do paralelogramo ABDC.



$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Em função das medidas de dois lados e da medida do ângulo formado por esses lados



No triângulo ao lado, temos:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Mas:

$$\text{sen}\ \hat{C} = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \text{sen}\ \hat{C}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen}\ \hat{C}$$

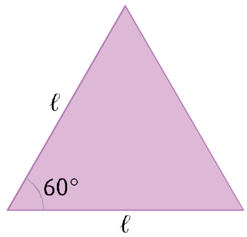
Em função das medidas dos lados e do semiperímetro

Seja o triângulo ABC de lados *a*, *b* e *c* e semiperímetro *p*. É válida a seguinte relação (também conhecida por fórmula de Hierão):

$$A = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

Área do triângulo equilátero

Considere o triângulo equilátero da figura:



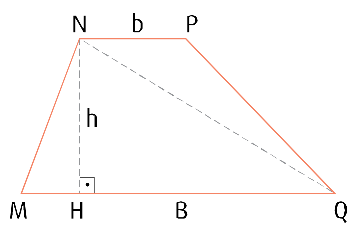
Empregando a fórmula $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen } \hat{C}$, temos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \ell \cdot \text{sen } 60° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \ell^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}$$

Área do trapézio

Chama-se trapézio o quadrilátero que possui pelo menos um par de lados paralelos.



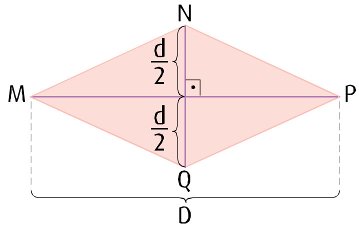
A área do trapézio (de base maior B, base menor *b* e altura *h*) é dada pela soma das áreas dos triângulos MNQ e NPQ, isto é:

$$A = \frac{Bh}{2} + \frac{bh}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}}$$

Área do losango

Losango é o paralelogramo que possui os quatro lados de mesma medida.

Observe a figura:

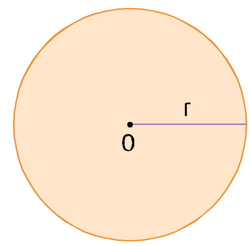


Como as diagonais do losango são perpendiculares entre si e se cruzam no ponto médio, podemos calcular a área do losango (com diagonal maior D e diagonal menor *d*) como a soma das áreas dos triângulos MNP e MQP:

$$A = \frac{D \cdot \frac{d}{2}}{2} \cdot 2 \Rightarrow \boxed{A = \frac{D \cdot d}{2}}$$

2. Área do círculo

Um círculo de raio *r* tem sua área expressa pela fórmula:



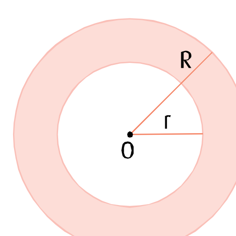
$$\boxed{A = \pi \cdot r^2}$$

Partes do círculo

Podemos calcular a área de apenas uma parte do círculo. Veja algumas com as quais trabalhamos com maior frequência e suas nomenclaturas.

Área da coroa circular

Chama-se coroa circular a região do plano compreendida entre dois círculos concêntricos.

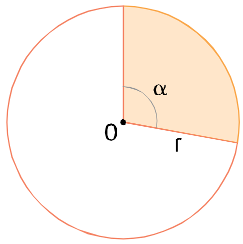


A área da coroa circular é a diferença entre as áreas dos dois círculos de raios R e *r*, respectivamente.

$$A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 \Rightarrow \boxed{A = \pi \cdot (R^2 - r^2)}$$

Área do setor circular

Chama-se setor circular a região do plano compreendida entre dois raios distintos de um mesmo círculo.



Sendo A a área do setor circular, *r* o raio do círculo e α o ângulo central medido em graus, temos:

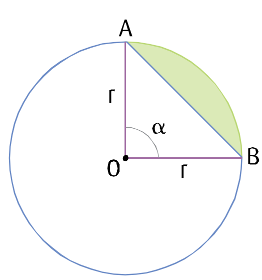
360°	———	πr^2
α	———	A

$$A = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot r^2}{360°}$$

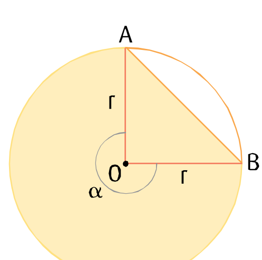
Área do segmento circular

Chama-se segmento circular a região do plano compreendida entre um círculo e uma corda desse círculo.

A área do segmento circular é calculada associando-se a área do setor circular e a área do triângulo formado pelos raios $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$. Assim, podemos ter:



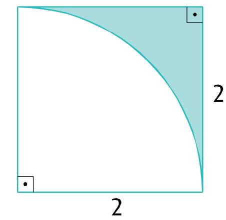
$$A = A_{\text{setor circular}} - A_{\text{triângulo}}$$



$$A = A_{\text{setor circular}} + A_{\text{triângulo}}$$

Atividades

1 (UF-SC) A área da figura sombreada é:



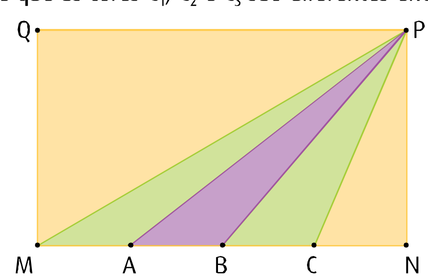
a) $(4 - \pi)$
b) $4 \cdot (1 - \pi)$
c) $2 \cdot (2 - \pi)$
d) 4
e) π

$S_{\text{sombreada}} = S_{\text{quadrado}} - \frac{1}{4} \cdot S_{\text{círculo}} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\text{sombreada}} = 2^2 - \frac{1}{4} \cdot (\pi \cdot 2^2) \therefore S_{\text{sombreada}} = 4 - \pi$

Alternativa *a*

2 (PUC-MG) A bandeira de um time de futebol tem o formato de um retângulo MNPQ. Os pontos A, B e C dividem o lado $\overline{MN}$ em quatro partes iguais. Os triângulos PAM e PCB são coloridos com uma determinada cor C_1, o triângulo PAB, com a cor C_2, e o restante da bandeira, com a cor C_3. Sabe-se que as cores C_1, C_2 e C_3 são diferentes entre si.



Que porcentagem da bandeira é ocupada pela cor C_1?

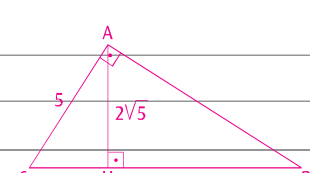
a) 12,5%
b) 15%
c) 22,5%
d) 25%
e) 28,5%

Os triângulos PAM, PAB, PBC e PCN possuem a mesma área, por isso representam a metade do △PMN.

Logo: $S = \frac{1}{4} \cdot$ MNPQ ou 25% da área do retângulo.

Alternativa *d*

3 (EEM-SP) Em um triângulo retângulo, um cateto mede 5 m e a altura relativa à hipotenusa mede $2\sqrt{5}$ m. Determine a área do triângulo.



No triângulo ACH:

• $(CH)^2 + (2\sqrt{5})^2 = 5^2 \Rightarrow (CH)^2 = 5 \therefore CH = \sqrt{5}$ m

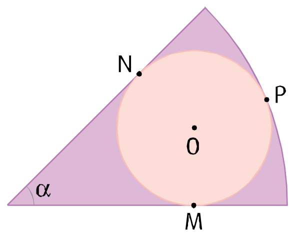
• $5^2 = CH \cdot CB$

$25 = \sqrt{5} \cdot CB$

$CB = \dfrac{25}{\sqrt{5}} \therefore CB = 5\sqrt{5}$ m

$S_{ABC} = \dfrac{(BC) \cdot (AH)}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{(5\sqrt{5}) \cdot (2\sqrt{5})}{2} \therefore S_{ABC} = 25\ m^2$

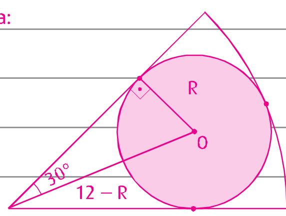
4 (Mackenzie-SP) No setor da figura, $\alpha = 60°$ e M, N e P são pontos de tangência.



Se o raio do setor é 12, a área do círculo de centro O é:

a) 18π
b) 16π
c) 9π
d) 4π
e) 12π

Observe a figura:



$\text{Sen } 30° = \dfrac{R}{12 - R} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{R}{12 - R} \Rightarrow 12 - R = 2R \Rightarrow$

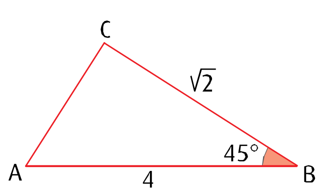
$\Rightarrow 3R = 12 \Rightarrow R = 4$

$A = \pi R^2 = 16\pi$

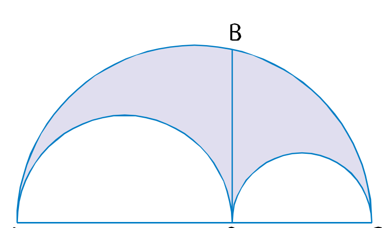
Alternativa *b*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (FEI-SP) Determine a área do triângulo ABC, da figura ao lado, sabendo que AB = 4, $BC = \sqrt{2}$ e med$(A\hat{B}C) = 45°$.



2 (U. F. São Carlos-SP) A figura representa três semicírculos, mutuamente tangentes dois a dois, de diâmetros $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$.

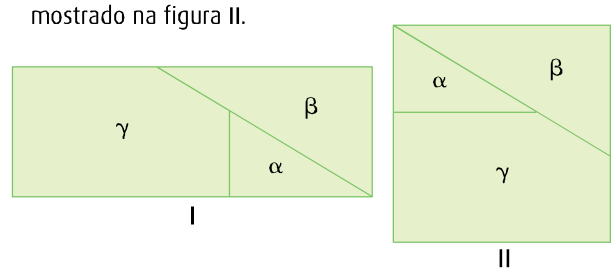


Sendo $\overline{BC}$ perpendicular a $\overline{AD}$, e sabendo que AB = 4 cm e DB = 3 cm, a medida da área da região sombreada na figura, em cm^2, é igual a:

a) $1{,}21 \cdot \pi$
b) $1{,}25 \cdot \pi$
c) $1{,}35 \cdot \pi$
d) $1{,}44 \cdot \pi$
e) $1{,}69 \cdot \pi$

3 (UF-MG) Na figura I, está representado um retângulo, cuja base mede 25 cm e cuja altura mede 9 cm. Esse retângulo está dividido nas regiões α, β e γ.

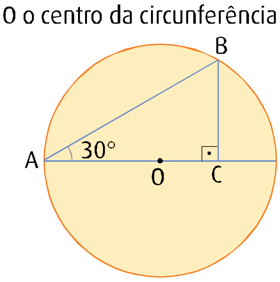
Sem que haja qualquer superposição delas, essas regiões podem ser reagrupadas, formando um quadrado, como mostrado na figura II.



Então, é correto afirmar que a área da região α mede:

a) 24 cm²
b) 28 cm²
c) 30 cm²
d) 32 cm²

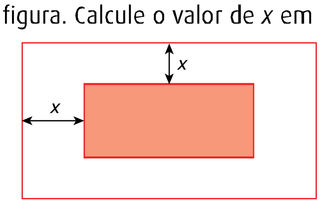
4 (PUC-PR) Seja O o centro da circunferência de raio unitário:



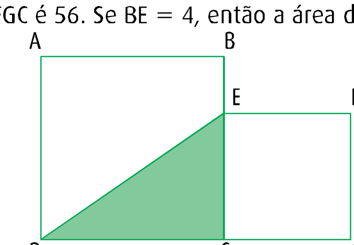
A área do triângulo retângulo ABC que tem o cateto $\overline{AC}$ no diâmetro vale:

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$
c) $\dfrac{3}{2}$
d) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$
e) $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

5 (PUC-SP) Um terreno de 120 m² contém uma piscina de 6 m por 8 m. A calçada ao redor da piscina tem largura *x*, conforme a figura. Calcule o valor de *x* em metros.



6 (Mackenzie-SP) Na figura, a diferença entre as áreas dos quadrados ABCD e EFGC é 56. Se BE = 4, então a área do triângulo CDE vale:

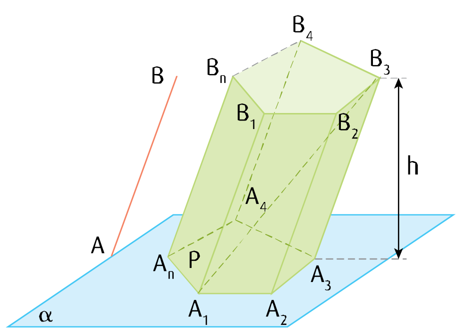


a) 18,5
b) 20,5
c) 22,5
d) 24,5
e) 26,5

Prisma / Pirâmide

1. Prisma

Considere um polígono P, convexo, contido em um plano α e um segmento AB com apenas uma de suas extremidades pertencente a α.



Chama-se **prisma** a união de todos os segmentos paralelos e congruentes a $\overline{AB}$, com uma de suas extremidades em P e contidos no mesmo semiespaço em que está contido o segmento $\overline{AB}$.

Elementos

Da figura anterior, temos:

- Os polígonos $A_1A_2A_3A_4...A_n$ e $B_1B_2B_3B_4...B_n$ são as **bases** (que são paralelas).
- A distância *h* entre as bases é a **altura** do prisma.
- Os pontos A_1, A_2, ..., A_n, B_1, B_2, ..., B_n são os **vértices**.
- Cada lado das bases é chamado **aresta da base**.
- Os segmentos $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, ..., $\overline{A_nB_n}$ são as **arestas laterais**.
- Os paralelogramos $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, $A_3A_4B_4B_3$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ são chamados **faces laterais**.
- O segmento que une dois vértices não consecutivos e pertencentes à mesma base é chamado **diagonal da base**.
- O segmento que une dois vértices não pertencentes à mesma base e não pertencentes à mesma face lateral é chamado **diagonal do prisma**.
- A área de uma base será indicada por A_b.
- A área de uma face lateral será indicada por A_f.
- A soma das áreas das faces laterais é chamada **área lateral** e será indicada por A_ℓ.
- A soma das áreas das bases com a área lateral é chamada **área total** e será indicada por A_t.

Nomenclatura

O nome de um prisma é dado de acordo com o polígono da base.

Um prisma cuja base é um triângulo é chamado prisma triangular; se a base é um quadrilátero, prisma quadrangular; se a base é um pentágono, prisma pentagonal; e assim sucessivamente.

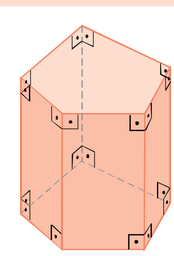
Volume

O volume de um prisma é dado pelo produto da área da base pela altura.

$$V = A_b \cdot h$$

Prisma reto

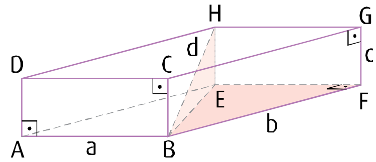
Um prisma é chamado reto quando as arestas laterais são perpendiculares às bases.



Repare que as faces laterais de um prisma reto são retangulares.

Paralelepípedo reto-retângulo

Dá-se o nome de paralelepípedo reto-retângulo ao prisma reto cuja base é um retângulo.



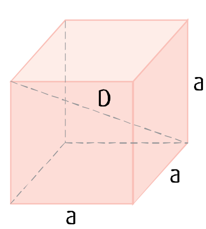
Considere um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões *a*, *b* e *c*.

- **Diagonal** $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- **Área total** $A_t = 2 \cdot (ab + ac + bc)$
- **Volume** $V = abc$

Cubo

O cubo é um paralelepípedo reto-retângulo que apresenta a particularidade de ter todas as arestas congruentes.

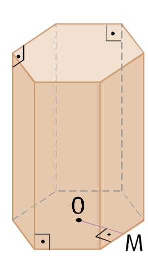
- **Diagonal**: $D = a \cdot \sqrt{3}$
- **Área total**: $A_t = 6 \cdot a^2$
- **Volume**: $V = a^3$



Prisma regular

Prisma regular é um prisma reto cujas bases são polígonos regulares.

O segmento $\overline{OM}$ que une o centro da base ao ponto médio M de uma aresta da base é chamado **apótema da base**.

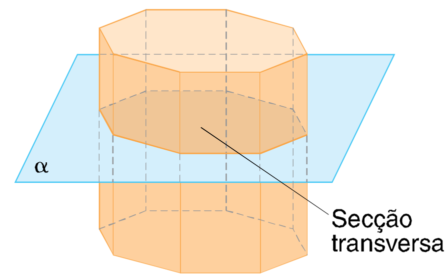


Nomenclatura

Para nomear um prisma regular, basta acrescentar a palavra "regular" ao seu nome, isto é, prisma hexagonal regular, prisma pentagonal regular etc.

Secção transversal

Chama-se secção transversal a intersecção de um prisma com um plano paralelo à sua base.



Volume

O volume de qualquer prisma é o produto da área da base pela altura.

Dados dois polígonos (P_1 e P_2) semelhantes, e valendo-nos da propriedade de semelhança, temos:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$$

em que a_1 e b_1 são arestas do polígono P_1 e a_2 e b_2 são arestas correspondentes no polígono P_2 que satisfazem a proporção, com *k* como a **constante de proporcionalidade**.

Temos, também:

$$\frac{A_1}{A_2} = k^2$$

em que A_1 é a área do polígono P_1 e A_2 é a área do polígono P_2.

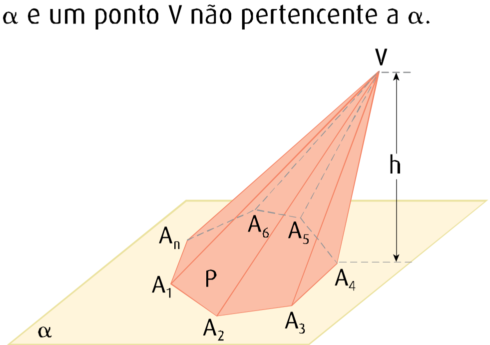
Dados dois sólidos (S_1 e S_2) semelhantes, vale também a seguinte relação:

$$\frac{V_1}{V_2} = k^3$$

em que V_1 é o volume do sólido S_1 e V_2 é o volume do sólido S_2.

2. Pirâmide

Considere um polígono P, convexo, contido em um plano α e um ponto V não pertencente a α.



Chama-se **pirâmide** a união de todos os segmentos com extremidades em P e V.

Elementos

Da figura anterior, temos:

- O polígono P é a **base**.
- O ponto V é o **vértice da pirâmide**.
- A distância *h* entre a base e o vértice da pirâmide é a **altura**.
- Os pontos A_1, A_2, ... e A_n são os **vértices da base**.
- Cada lado da base é chamado **aresta da base**.
- Os segmentos A_1V, A_2V, ..., A_nV são as **arestas laterais**.
- Os triângulos A_1A_2V, A_2A_3V, A_3A_4V, ..., A_nA_1V são chamados **faces laterais**.
- O segmento que une dois vértices da base não consecutivos é chamado **diagonal da base**.
- A área de uma base será indicada por A_b.
- A área de uma face lateral será indicada por A_f.
- A soma das áreas das faces laterais é chamada **área lateral** e será indicada por A_ℓ.
- A soma da área da base com a área lateral é chamada **área total** e será indicada por A_t.

Nomenclatura

O nome de uma pirâmide é dado de acordo com o polígono da base.

Uma pirâmide cuja base é um triângulo é chamada pirâmide triangular; se a base é um quadrilátero, pirâmide quadrangular; se a base é um pentágono, pirâmide pentagonal; e assim sucessivamente.

Volume

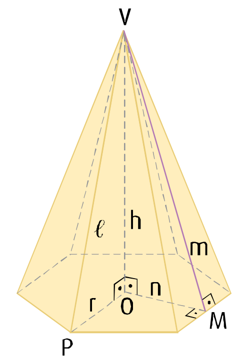
O volume de uma pirâmide é um terço do produto da área da base pela altura.

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

Pirâmide regular

Pirâmide regular é aquela cuja base é um polígono regular e a distância do vértice ao centro da base é a altura da pirâmide.

Na figura a seguir, temos uma pirâmide hexagonal regular (a base é um hexágono regular).



Elementos

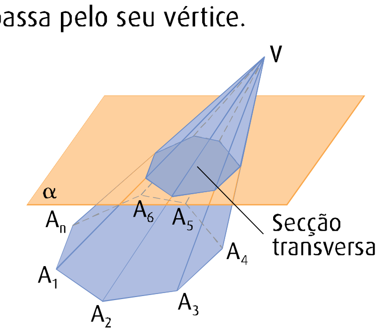
- A medida *h* do segmento $\overline{VO}$ é a **altura** da pirâmide.
- M é o ponto médio de uma aresta de base.
- O ponto O é o **centro** da base.
- O segmento $\overline{OM}$ de medida *n* é chamado **apótema da base**.
- O segmento $\overline{VP}$ de medida ℓ é uma **aresta lateral** da pirâmide.
- O segmento $\overline{VM}$ de medida *m* é o **apótema da pirâmide**.
- O segmento $\overline{OP}$ de medida *r* é o **raio** da circunferência circunscrita à base.
- Os triângulos PVO e MVO são retângulos, logo:
  $\ell^2 = h^2 + r^2$ e $m^2 = h^2 + n^2$

Nomenclatura

Para nomear uma pirâmide regular, basta acrescentar a palavra "regular" ao seu nome, isto é, pirâmide hexagonal regular, pirâmide pentagonal regular etc.

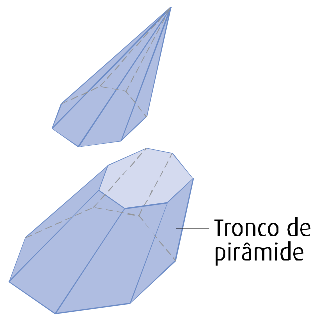
Secção transversal

Chama-se secção transversal a intersecção não vazia de uma pirâmide com um plano α paralelo à sua base e que não passa pelo seu vértice.



- A secção transversal é um polígono semelhante ao polígono da base.
- A distância do vértice da pirâmide até a secção transversal *dividida* pela altura da pirâmide é a **razão de semelhança**.
- A razão entre a área da secção transversal e a área da base, nesta ordem, é igual ao quadrado da razão de semelhança.

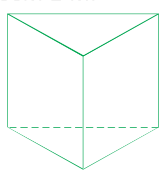
- O sólido compreendido entre a secção transversal e a base é chamado **tronco de pirâmide** de bases paralelas.



- A distância entre as bases é a **altura** do tronco.

Atividades

1 (Ucsal-BA) No prisma reto de base triangular, da figura, todas as arestas medem 2 m.

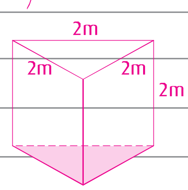


O volume desse prisma, em metros cúbicos, é:

a) $2\sqrt{2}$
b) $2\sqrt{3}$
c) 4
d) $4\sqrt{2}$
e) $4\sqrt{3}$

$V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = \left(\frac{2^2\sqrt{3}}{4}\right) \cdot 2 \therefore V = 2\sqrt{3}\ m^3$

Alternativa *b*



2 (U. F. Juiz de Fora-MG) A maior distância, em metros, entre dois vértices de um cômodo na forma de paralelepípedo retangular de 3 m de altura, com piso de dimensões 2 e 6 metros, é igual a:

a) $2\sqrt{10}$
b) $\sqrt{11}$
c) 7
d) $5\sqrt{2}$

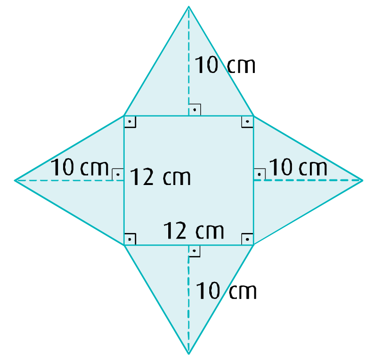
A distância pedida é a medida da diagonal do paralelepípedo:

$d = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} \Rightarrow d = \sqrt{9 + 4 + 36}$

$d = \sqrt{49} \Rightarrow d = 7\ m$

Alternativa *c*

3 (Acafe-SC) A figura a seguir mostra a planificação de um sólido. O volume desse sólido é:



a) $1\,152\ cm^3$
b) $1\,440\ cm^3$
c) $384\ cm^3$
d) $1\,200\ cm^3$
e) $240\ cm^3$

A figura é a planificação de uma pirâmide de base quadrada de lado 12 cm. O apótema (*m*) da pirâmide é 10 cm e o apótema (*a*) da base é 6 cm (metade do lado do quadrado).

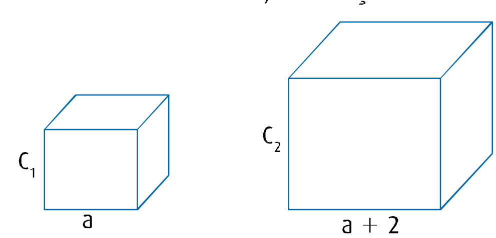
$m^2 = a^2 - h^2 \Rightarrow 100 - 36 = h^2 \Rightarrow h^2 = 64 \Rightarrow h = 8\ cm$

em que *h* é a altura da pirâmide.

$V = \frac{1}{3} \cdot S_B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (12)^2 \cdot 8 = \frac{144 \cdot 8}{3} = 384\ cm^3$

Alternativa *c*

4 (Vunesp-SP) Aumentando-se em 2 cm a aresta de um cubo C_1, obtemos um cubo C_2, cuja área da superfície total é aumentada em 216 cm², em relação à do cubo C_1.



Determine:

a) a medida da aresta do cubo C_1;

$(A_{lateral})_1 = 6 \cdot a^2$

$(A_{lateral})_2 = 6 \cdot (a + 2)^2$

Ainda: $(A_{lateral})_2 = (A_{lateral})_1 + 216 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 \cdot (a^2 + 4 \cdot a + 4) = 6 \cdot a^2 + 216 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + 4 \cdot a + 4 = a^2 + 36 \Rightarrow 4 \cdot a = 32 \therefore a = 8\ cm$

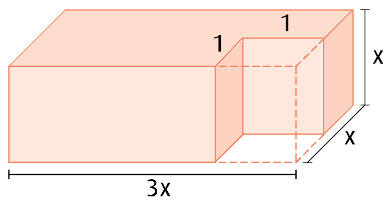
b) o volume do cubo C_2.

$V_2 = (a + 2)^3 \Rightarrow V_2 = 10^3 \therefore V_2 = 1000\ cm^3$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (EEM-SP) A diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo mede $\sqrt{14}$ m. Calcule o volume do paralelepípedo, sabendo que as medidas das três arestas são números inteiros consecutivos.

2 (FBJ-PR) De um paralelepípedo de dimensões 3x, *x* e *x*, em dm, retira-se um prisma de medidas 1 dm, 1 dm e *x* dm, conforme a figura. Se o sólido restante tem volume 22 dm³, o valor de *x*, em dm, é igual a:



a) 0,5
b) 1
c) 1,5
d) 2
e) 3

3 (Fuvest-SP) Qual a altura de uma pirâmide quadrangular que tem as oito arestas com medidas iguais a $\sqrt{2}$?

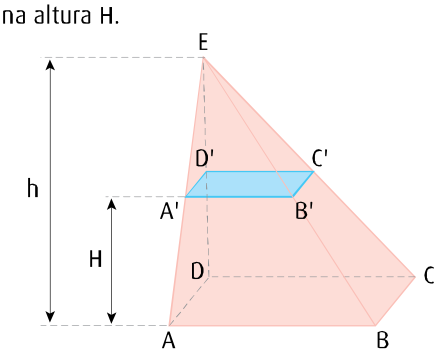
a) $\sqrt{1}$
b) $\sqrt{1,5}$
c) $\sqrt{2}$
d) $\sqrt{2,5}$
e) $\sqrt{3}$

4 (F. M. Santa Casa-SP) Dispondo-se de uma folha de cartolina, medindo 50 cm de comprimento por 30 cm de largura, pode-se construir uma caixa aberta, cortando-se um quadrado de 8 cm de lado de cada canto da folha. O volume dessa caixa, em cm³, será:

a) 1 244
b) 1 828
c) 2 324
d) 3 808
e) 12 000

5 Dado um cubo de aresta ℓ, qual é o volume do octaedro cujos vértices são os centros das faces do cubo?

6 (Vunesp-SP) A figura representa uma pirâmide com vértices no ponto E. A base é um retângulo ABCD, e a face EAB é um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice A. A pirâmide apresenta-se cortada por um plano paralelo à base, na altura H.



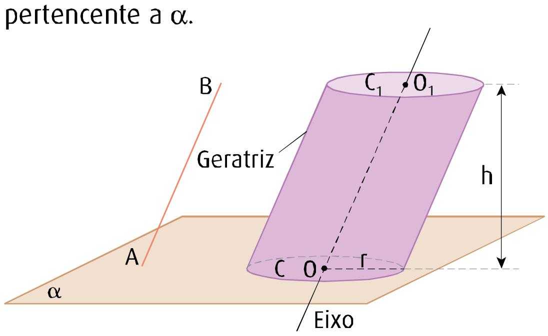
Esse plano divide a pirâmide em dois sólidos: uma pirâmide EA′B′C′D′ e um tronco de pirâmide de altura H. Sabendo que H = 4 cm, AB = 6 cm, BC = 3 cm e h = AE = 6 cm, determine:

a) o volume da pirâmide EA′B′C′D′;
b) o volume do tronco da pirâmide.

Cilindro / Cone

1. Cilindro

Considere um círculo C contido em um plano α e um segmento AB com apenas uma de suas extremidades pertencente a α.



Chama-se **cilindro** a união de todos os segmentos paralelos e congruentes a $\overline{AB}$, com uma de suas extremidades em C e contidos no mesmo semiespaço em que está contido o segmento $\overline{AB}$.

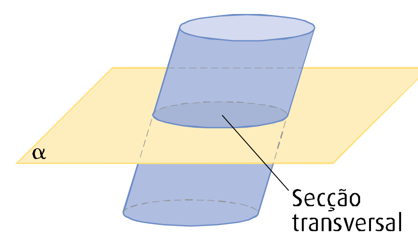
Elementos

Da figura anterior, temos:

- Os círculos C e C_1 são as **bases** de raio *r*.
- Os pontos O e O_1 são os **centros** das bases.
- A reta que passa pelos centros das bases é o **eixo** do cilindro.
- Qualquer segmento paralelo ao eixo e com extremidades nas circunferências das bases é chamado **geratriz** (g) do cilindro.
- A distância *h* entre as bases é a **altura** do cilindro.
- A área de uma base será indicada por A_b.
- A área lateral será indicada por A_ℓ.
- A soma das áreas das bases com a área lateral é chamada **área total** e será indicada por A_t.

Secção transversal

Chama-se secção transversal a intersecção não vazia de um cilindro com um plano paralelo à sua base.



Volume

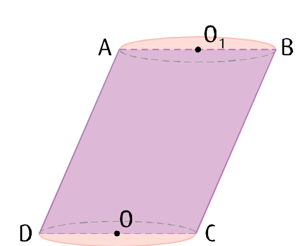
O volume de um cilindro é o produto da área da base pela altura.

Como a base do cilindro é um círculo, temos:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Secção meridiana

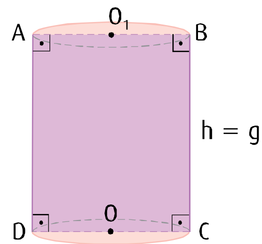
Chama-se secção meridiana a intersecção de um cilindro com um plano que passa pelos centros das bases.



O paralelogramo ABCD é a secção meridiana.

Cilindro reto

Um cilindro é chamado reto quando a sua secção meridiana é um retângulo.



Em um cilindro reto, a medida *g* da geratriz é igual à da altura do cilindro.

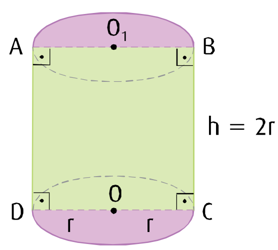
Área da secção meridiana

A secção meridiana de um cilindro reto é um retângulo de dimensões 2r e *h*; logo:

$$A_{secção} = 2 \cdot r \cdot h$$

Cilindro equilátero

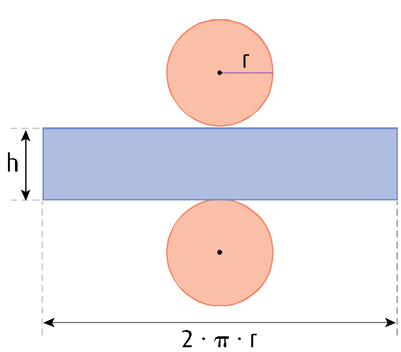
Um cilindro reto é chamado equilátero quando sua secção meridiana é um quadrado.



Em um cilindro equilátero, a altura *h*, a medida *g* da geratriz e o diâmetro da base são congruentes.

Planificação de um cilindro reto

A planificação da superfície de um cilindro reto é composta por um retângulo de comprimento $2\pi r$ e altura *h* e por dois círculos de raio *r*.



Área lateral de um cilindro reto

A área lateral é a área do retângulo, isto é:

$$A_\ell = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

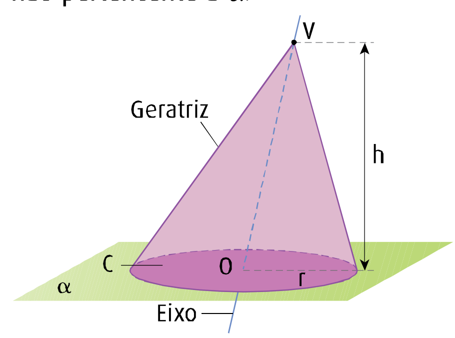
Área total de um cilindro reto

A área total é a soma da área lateral com as áreas das bases, isto é:

$$A_t = 2\pi rh + 2\pi r^2 \Rightarrow A_t = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (h + r)$$

2. Cone

Considere um círculo C contido num plano α e um ponto V não pertencente a α.



Chama-se **cone** a união de todos os segmentos com extremidades em C e V.

Elementos

Da figura anterior, temos:

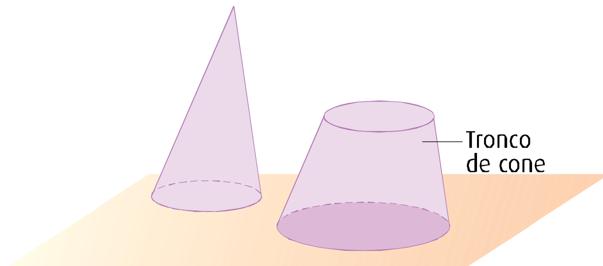
- O círculo C é a **base** de raio *r*.
- O ponto O é o **centro** da base.
- O ponto V é o **vértice** do cone.
- A reta que passa pelo centro da base e pelo vértice é o **eixo** do cone.
- Qualquer segmento com extremidades na circunferência da base e no vértice é chamado **geratriz** (g) do cone.
- A distância *h* entre o vértice e a base é a **altura** do cone.
- A área de uma base será indicada por A_b.
- A área lateral será indicada por A_ℓ.
- A soma da área da base com a área lateral é chamada **área total** e será indicada por A_t.

Secção transversal

Chama-se secção transversal a intersecção não vazia de um cone com um plano α paralelo à sua base e que não passa pelo seu vértice.

- A secção transversal e a base são círculos.
- A razão do raio da secção ($r_{secção}$) para o raio da base (r) é a razão de semelhança.

- A razão entre a área da secção e a área da base, nesta ordem, é igual ao quadrado da razão de semelhança.
- O sólido compreendido entre a secção transversal e a base é chamado **tronco de cone**, de bases paralelas.



- A distância entre as bases é a **altura** do tronco.

Volume

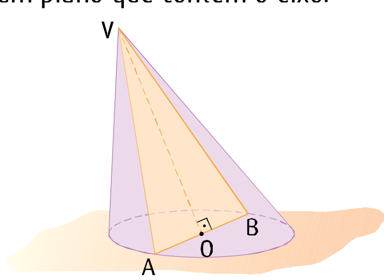
O volume de um cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

Como a base do cone é um círculo, temos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Secção meridiana

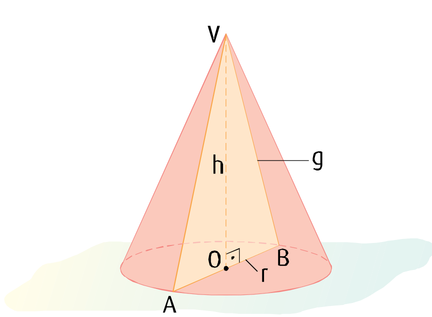
Chama-se secção meridiana a intersecção de um cone com um plano que contém o eixo.



O triângulo ABV é uma secção meridiana.

Cone reto

Um cone é chamado reto quando suas secções meridianas são triângulos isósceles.



Num cone reto, o triângulo OBV é retângulo, então:

$$g^2 = h^2 + r^2$$

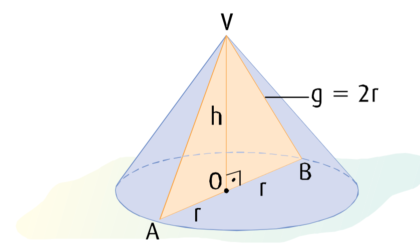
Área da secção meridiana

Sendo *r* o raio da base de um cone e *h* a sua altura, a secção meridiana é um triângulo de base 2r e altura *h*, logo:

$$A_{secção} = r \cdot h$$

Cone equilátero

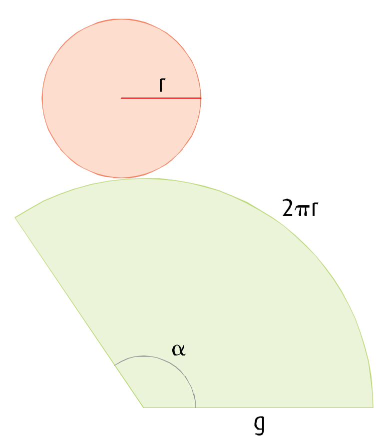
Um cone reto é chamado equilátero quando suas secções meridianas são triângulos equiláteros.



Num cone equilátero, a geratriz *g* tem como medida o diâmetro da base.

Planificação de um cone reto

A planificação da superfície de um cone reto é composta por um círculo de raio *r* (base do cone) e um setor circular (superfície lateral do cone), cujo arco tem comprimento $2\pi r$, ângulo central α, e o raio é a geratriz *g* do cone.



Medida do ângulo central em função do comprimento do arco do setor

$$\alpha = \frac{360° \cdot r}{g}$$

Ou, em radianos:

$$\alpha = \frac{2\pi \cdot r}{g}$$

Área lateral de um cone reto em função do ângulo do setor circular

$$A_\ell = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot g^2}{360°}$$

Ou, em radianos:

$$A_\ell = \frac{\alpha \cdot g^2}{2}$$

Área lateral de um cone reto em função do comprimento do arco do setor circular

$$A_\ell = \pi \cdot r \cdot g$$

Área total de um cone reto

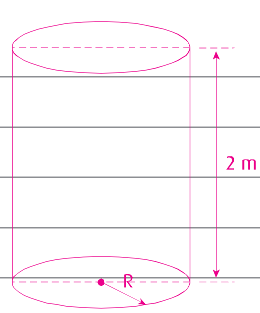
A área total é a soma da área lateral com a área da base, isto é:

$$A_t = \pi \cdot r \cdot (g + r)$$

Atividades

1 (Vunesp-SP) Um pedreiro deseja construir uma caixa-d'água, em forma de cilindro, com capacidade para 25,12 mil litros. Considerando $\pi = 3,14$, para que a altura desse reservatório seja 2 metros, a medida aproximada do raio da base, em metros, deverá ser:

a) 2,0
b) 2,8
c) 3,2
d) 4,0
e) 6,2



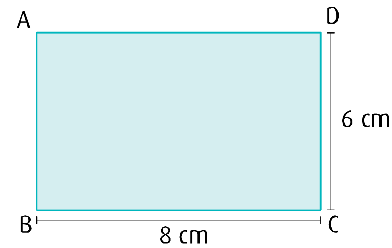
$V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = \pi \cdot R^2 \cdot h \Rightarrow 25,12 = 3,14 \cdot R^2 \cdot 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6,28 \cdot R^2 = 25,12 \Rightarrow R^2 = 4 \therefore R = 2$ m

Alternativa *a*

2 (U. F. Itajubá-MG) O retângulo ABCD a seguir sofre uma rotação de 45° em torno do eixo que contém o lado $\overline{AB}$. Calcule o volume do sólido gerado por essa rotação.

(Dados: CD = 6 cm; BC = 8 cm)



Se a rotação fosse de 360º, teríamos gerado um cilindro e bastaria encontrar o volume desse cilindro.

Como a rotação foi de 45° $\left(\text{ou seja, } \frac{360°}{8}\right)$, iremos calcular $\frac{1}{8}$ do volume do cilindro.

$V = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot 6 \Rightarrow V = 48\pi \text{ cm}^3$

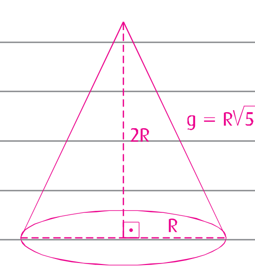
3 O raio da base de um cone reto mede a metade da altura. Sendo o volume desse cone igual a 18π m³, determine sua área lateral.

Se o raio da base for R, a altura será 2R.

Seja *g* a geratriz desse cone.

Assim:

$g^2 = R^2 + (2R)^2 \Rightarrow g^2 = 5R^2 \therefore g = R\sqrt{5}$



$V_{cone} = 18\pi \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot 2R = 18\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow R^3 = 27 \Rightarrow R = 3 \Rightarrow g = 3\sqrt{5}$

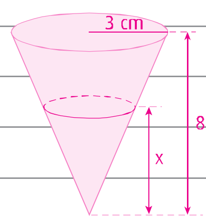
$S_{lateral} = \pi \cdot R \cdot g \Rightarrow S_{lateral} = \pi \cdot 3 \cdot 3\sqrt{5}$

$\therefore S_{lateral} = 9\sqrt{5} \cdot \pi \text{ m}^2$

4 (Fuvest-SP) Um copo tem a forma de um cone com altura 8 cm e raio da base 3 cm. Queremos enchê-lo com quantidades iguais de suco e de água. Para que isso seja possível, a altura *x*, em cm, atingida pelo primeiro líquido colocado deve ser:

a) $\frac{8}{3}$
b) 6
c) 4
d) $4\sqrt{3}$
e) $4\sqrt[3]{4}$

Seja V o volume do líquido e 2V o volume total do cone.



Observe, na figura, que os dois cones são semelhantes.

Então:

$\frac{2V}{V} = \left(\frac{8}{x}\right)^3 \Rightarrow 2 = \frac{512}{x^3} \Rightarrow x^3 = 256 \Rightarrow x = 4\sqrt[3]{4}$ cm

Alternativa *e*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (UE-CE) O volume de um cilindro circular reto é $(36\sqrt{6})\pi$ cm³. Se a altura desse cilindro mede $6\sqrt{6}$ cm, então a área total desse cilindro, em cm², é:

a) 72π
b) 84π
c) 92π
d) 94π
e) 96π

2 (Unicentro-PR) Um doce de leite é vendido em dois tipos de latas cilíndricas A e B. O raio da base da lata B é a metade do raio da base da lata A e a altura da lata B é o dobro da altura da lata A. O preço da lata de doce A é R$ 8,00 e o preço da lata de doce B é R$ 6,00. Sobre esta situação, considere as afirmativas a seguir.

I. Levando em consideração a relação entre preço e quantidade de doce, é vantajoso comprar a lata de doce A.

II. O volume de doce da lata B é a metade do volume de doce da lata A.

III. Se dobrarmos a altura da lata B, o volume de doce das duas latas será igual.

IV. As duas latas têm o mesmo volume de doce.

Estão corretas apenas as afirmativas:

a) I e II
b) II e IV
c) III e IV
d) I, II e III
e) I, III e IV

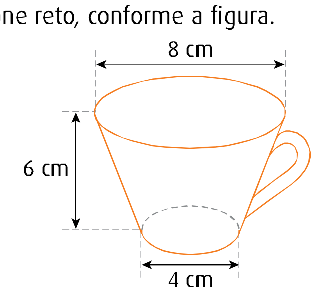
3 (Unisa-SP) Um cubo de lado 2 cm é inscrito em um cilindro. A área lateral do cilindro, em cm², é:

a) π
b) $\pi\sqrt{2}$
c) $2\pi\sqrt{2}$
d) $4\pi\sqrt{2}$
e) 8π

4 Em um cone equilátero, a área lateral mede 128π cm². O raio da base desse cone, em centímetros, mede:

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

5 (Mackenzie-SP) Uma xícara de chá tem a forma de um tronco de cone reto, conforme a figura.



Supondo $\pi = 3$, o volume de líquido que ela pode conter é:

a) 168 cm³
b) 172 cm³
c) 166 cm³
d) 176 cm³
e) 164 cm³

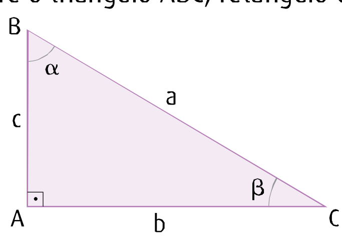
6 (F. M. Jundiaí-SP) A base de um cone circular reto está inscrita em uma das faces de um cubo e o vértice deste cone está no centro da face oposta a essa base. O volume desse cone é 18π cm³. Calculando-se a área total desse cubo, encontra-se:

a) 216 cm²
b) 108 cm²
c) $72\sqrt{3}$ cm²
d) $54\sqrt{4}$ cm²
e) 72 cm²

Trigonometria no triângulo retângulo

1. Relações trigonométricas

Considere o triângulo ABC, retângulo em A:



O lado $\overline{BC}$, oposto ao ângulo reto e de medida *a*, é chamado **hipotenusa**; os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, de medidas *c* e *b*, respectivamente, são chamados **catetos**.

Nesse triângulo, são definidas as seguintes relações para o ângulo agudo α:

$$\text{seno de } \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{cosseno de } \alpha = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tangente de } \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \frac{b}{c}$$

Analogamente, para o ângulo agudo β, temos:

$$\text{sen } \beta = \frac{c}{a} \qquad \cos \beta = \frac{b}{a} \qquad \text{tg } \beta = \frac{c}{b}$$

Note que:

- $\text{sen } \alpha = \cos \beta$, $\text{sen } \beta = \cos \alpha$ e, ainda, $\text{tg } \alpha = \dfrac{1}{\text{tg } \beta}$

  Isso ocorre porque α e β são ângulos complementares, isto é: $\alpha + \beta = 90°$.

- $\text{tg } \alpha = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$

Tabela de ângulos notáveis

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Recordando o teorema de Pitágoras

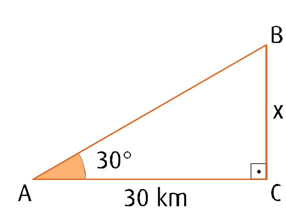
O teorema de Pitágoras relaciona a hipotenusa com os catetos da seguinte forma: o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Para o triângulo ABC, representado no item 1, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Atividades

1 Três cidades — A, B e C — são interligadas por estradas conforme mostra a figura.



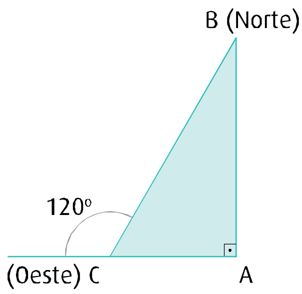
As estradas AC e AB são asfaltadas, a estrada CB é de terra e será asfaltada ainda este ano. Sabe-se que AC tem 30 km, que o ângulo entre AC e AB mede 30° e que o triângulo ABC é retângulo em C. Qual é o comprimento, em km, da estrada que será asfaltada?

a) $30\sqrt{3}$
b) $10\sqrt{3}$
c) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$
d) $8\sqrt{3}$
e) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\text{tg } 30° = \frac{x}{30} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{30} \therefore x = 10\sqrt{3}$

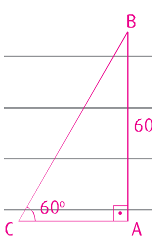
Alternativa *b*

2 (Vunesp-SP) Um pequeno avião deveria partir de uma cidade A rumo a uma cidade B ao norte, distante 60 quilômetros de A. Por um problema de orientação, o piloto seguiu erradamente rumo ao oeste. Ao perceber o erro, ele corrigiu a rota, fazendo um giro de 120° à direita em um ponto C, de modo que o seu trajeto, juntamente com o trajeto que deveria ter sido seguido, formaram, aproximadamente, um triângulo retângulo ABC, como mostra a figura.



Com base na figura, a distância em quilômetros que o avião voou partindo de A até chegar a B é:

a) $30\sqrt{3}$
b) $40\sqrt{3}$
c) $60\sqrt{3}$
d) $80\sqrt{3}$
e) $90\sqrt{3}$



I) $\text{tg } 60° = \frac{60}{AC} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{60}{AC} \Rightarrow AC = \frac{60\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AC = 20\sqrt{3}$ km

II) $\text{sen } 60° = \frac{60}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{BC} \Rightarrow BC\sqrt{3} = 120 \Rightarrow BC = \frac{120\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

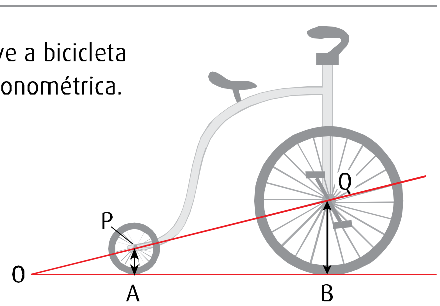
$\Rightarrow BC = 40\sqrt{3}$ km

Assim:

$AC + BC = 20\sqrt{3} + 40\sqrt{3} = 60\sqrt{3}$ km

Alternativa *c*

3 (UE-RJ) Observe a bicicleta e a tabela trigonométrica.



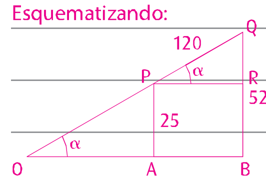
Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,242	0,970	0,249

Os centros das rodas estão a uma distância PQ igual a 120 cm, e os raios $\overline{PA}$ e $\overline{QB}$ medem, respectivamente, 25 cm e 52 cm.

De acordo com a tabela, o ângulo $A\hat{O}P$ tem o seguinte valor:

a) 10°
b) 11°
c) 12°
d) 13°
e) 14°

Esquematizando:



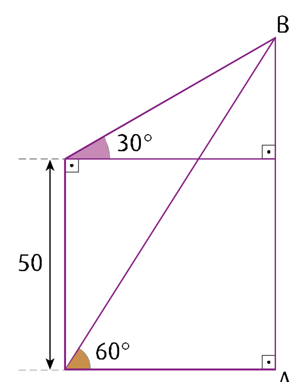
Isolando o triângulo PQR:

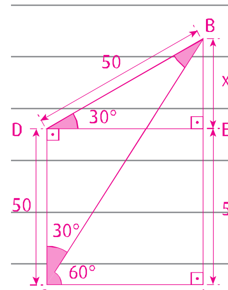
$\text{sen } \alpha = \frac{52 - 25}{120} = \frac{27}{120} = 0{,}225$

Pela leitura direta da tabela: $\alpha = 13°$

Alternativa *d*

4 (Mackenzie-SP) Na figura a seguir, determine a medida de AB.





O triângulo BCD é isósceles com base $\overline{BC}$ e, portanto, CD = BD.

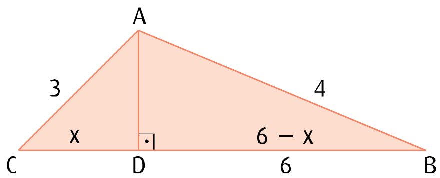
Assim, no triângulo BDE, temos:

$\text{sen } 30° = \frac{x}{50} \Rightarrow \frac{x}{50} = \frac{1}{2} \therefore x = 25$

$AB = AE + EB \Rightarrow AB = 50 + 25 \therefore AB = 75$

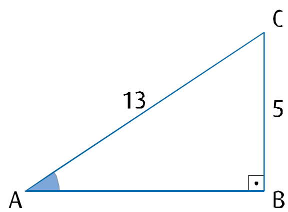
EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (Fuvest-SP) Na figura abaixo, têm-se AC = 3, AB = 4 e CB = 6. O valor de $\overline{CD}$ é:



a) $\frac{17}{12}$ b) $\frac{19}{12}$ c) $\frac{23}{12}$ d) $\frac{25}{12}$ e) $\frac{29}{12}$

2 (UF-CE) Na figura, o triângulo ABC é retângulo em B.



O cosseno do ângulo BÂC é:

a) $\frac{12}{13}$

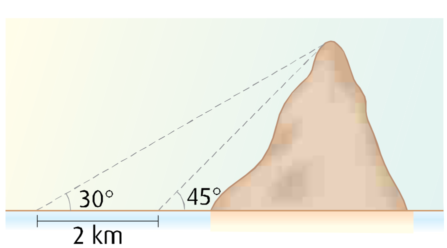
b) $\frac{11}{13}$

c) $\frac{10}{13}$

d) $\frac{6}{13}$

e) $\frac{1}{13}$

3 (U. F. Juiz de Fora-MG) Ao aproximar-se de uma ilha, o capitão de um navio avistou uma montanha e decidiu medir sua altura. Ele mediu um ângulo de 30° na direção do seu cume, como indicado na figura. Depois de navegar mais 2 km em direção à montanha, repetiu o procedimento, medindo um novo ângulo de 45°.



Então, usando $\sqrt{3} = 1{,}73$, o valor que mais se aproxima da altura dessa montanha, em quilômetros, é:

a) 2,1

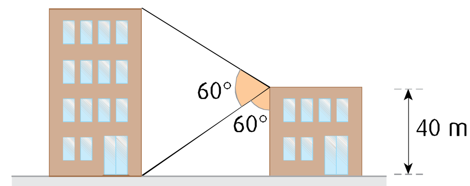
b) 2,2

c) 2,5

d) 2,7

e) 2,0

4 (U. F. Alfenas-MG) Um observador encontra-se no topo de um prédio de 40 m de altura. Ele vê um prédio em frente, em toda a sua extensão, sob um ângulo de 60°. Vê também, sob o mesmo ângulo, a "distância" entre os dois prédios, conforme ilustrado na figura a seguir. Desprezando a altura do observador, a altura do prédio que ele vê, em metros, é:



a) $40\sqrt{3}$

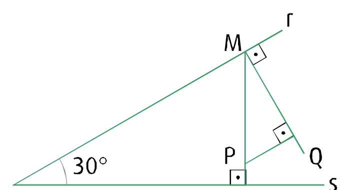
b) 80

c) 70

d) $35\sqrt{3}$

e) 90

5 (Fuvest-SP) Na figura a seguir, a reta suporte do segmento $\overline{MP}$ é perpendicular à reta *s*; o segmento $\overline{MQ}$ é perpendicular ao segmento $\overline{PQ}$ e MP = 6.



Então, PQ é igual a:

a) $3\sqrt{3}$

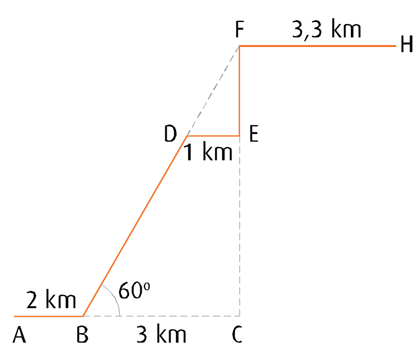
b) 3

c) $6\sqrt{3}$

d) $4\sqrt{3}$

e) $2\sqrt{3}$

6 (Vunesp-SP) Ao chegar de viagem, uma pessoa tomou um táxi no aeroporto para se dirigir ao hotel. O percurso feito pelo táxi, representado pelos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FH}$, está esboçado na figura, onde o ponto A indica o aeroporto, o ponto H indica o hotel, BCF é um triângulo retângulo com ângulo reto em C, o ângulo no vértice B mede 60° e $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$.



Assumindo o valor $\sqrt{3} = 1{,}7$ e sabendo-se que AB = 2 km, BC = 3 km, DE = 1 km e FH = 3,3 km, determine:

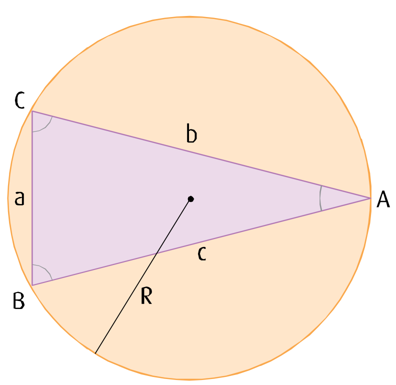
a) as medidas dos segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{EF}$ em quilômetros;

b) o preço que a pessoa pagou pela corrida (em reais), sabendo-se que o valor da corrida do táxi é dado pela função y = 4 + 0,8x, sendo *x* a distância percorrida em quilômetros e *y* o valor da corrida em reais.

Lei dos senos e lei dos cossenos

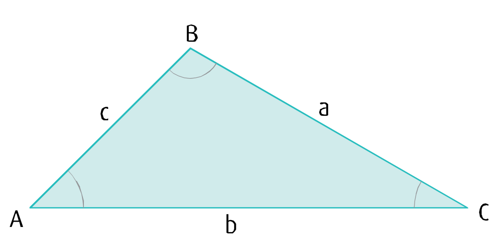
1. Lei dos senos

Sendo *a*, *b* e *c* as medidas dos lados de um triângulo ABC qualquer e R o raio da circunferência circunscrita a esse triângulo, então:



$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = 2R$$

2. Lei dos cossenos



Sejam *a*, *b* e *c* as medidas dos lados de um triângulo ABC qualquer, então:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

Atividades

1 (Fuvest-SP)

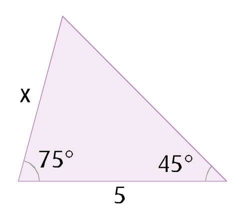


Figura 1

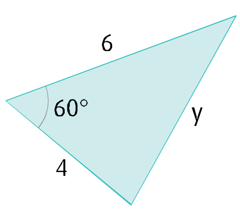


Figura 2

a) Na figura 1, calcular *x*.

Pelo teorema angular de Tales, o ângulo oposto ao lado de medida 5 vale 60º.

Pela lei dos senos, temos:

$\frac{5}{\operatorname{sen} 60º} = \frac{x}{\operatorname{sen} 45º} \Rightarrow 5 \cdot \operatorname{sen} 45º = x \cdot \operatorname{sen} 60º \Rightarrow \frac{5\sqrt{2}}{2} =$

$= \frac{x\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{5\sqrt{6}}{3}$

b) Na figura 2, calcular *y*.

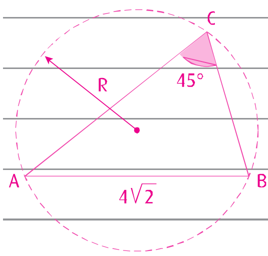
Pela lei dos cossenos, temos:

$y^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos 60°$

$y^2 = 36 + 16 - 48 \cdot \frac{1}{2}$

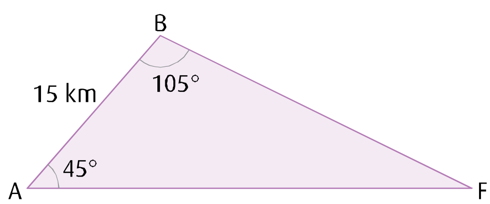
$y^2 = 52 - 24 \Rightarrow y^2 = 28 \Rightarrow y = 2\sqrt{7}$

2 (Fuvest-SP) Em um triângulo ABC, $AB = 4\sqrt{2}$ e o ângulo C oposto ao lado $\overline{AB}$ mede 45°. Determine o raio da circunferência que circunscreve o triângulo.



$$\frac{AB}{\operatorname{sen} \hat{C}} = 2R \Rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R \Rightarrow 2R = 4\sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \therefore R = 4$$

3 (Unicamp-SP) Observadores nos pontos A e B localizam um foco de incêndio em F. Conhecendo os ângulos $med(F\hat{A}B) = 45°$, $med(F\hat{B}A) = 105°$ e a distância $AB = 15$ km, determine as distâncias AF e BF.



Pelo teorema angular de Tales, o ângulo $A\hat{F}B$ mede 30°.

Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{BF}{\operatorname{sen} 45°} = \frac{15}{\operatorname{sen} 30°} \Rightarrow BF = \frac{15 \cdot \operatorname{sen} 45°}{\operatorname{sen} 30°} \Rightarrow BF = \frac{15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow BF = 15\sqrt{2}$ km

E pela lei dos cossenos:

$15^2 = (15\sqrt{2})^2 + (AF)^2 - 2 \cdot 15\sqrt{2} \cdot AF \cdot \cos 30°$

$225 = 450 + (AF)^2 - 2 \cdot 15\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AF$

$225 = 450 + (AF)^2 - 15\sqrt{6} \cdot AF$

$(AF)^2 - 15\sqrt{6} \cdot (AF) + 225 = 0$

$\Delta = 1\,350 - 900 = 450$

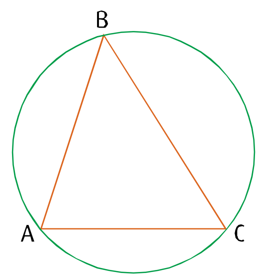
$AF = \frac{15\sqrt{6} \pm 15\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AF = \frac{15\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} + 1)}{2}$ km

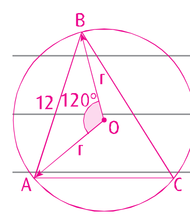
Professor, AF não poderia ser $\frac{15\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - 1)}{2}$ por se tratar do

do maior lado do triângulo ABF.

4 (UE-PA) Sobre uma circunferência de raio *r*, tomamos os pontos A, B e C, conforme mostra a figura. O arco $\widehat{AB}$ mede 120°, e a corda $\overline{AB}$ mede 12 cm. Calcule o valor de *r*.

$\left(\text{Dados: } \cos 120° = -\frac{1}{2} \text{ e } \operatorname{sen} 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$





$(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2(OA) \cdot (OB) \cdot \cos(A\hat{O}B) \Rightarrow$

$\Rightarrow 12^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow 144 = 2 \cdot r^2 + 2 \cdot r^2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3r^2 = 144 \Rightarrow r^2 = 48 \therefore r = 4\sqrt{3}$ cm

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (FEI-SP) Em um triângulo ABC, BC = a, AC = b, $med(\hat{A}) = 45°$ e $med(\hat{B}) = 30°$. Sendo $a + b = 1 + \sqrt{2}$, o valor de *a* é:

a) $\sqrt{2}$
b) 2
c) 1
d) $\sqrt{3}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2 (Vunesp-SP) Os lados de um triângulo medem $2\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ e $(3 + \sqrt{3})$. Determine a medida do ângulo oposto ao lado que mede $\sqrt{6}$.

a) 30°
b) 45°
c) 60°
d) 90°
e) 120°

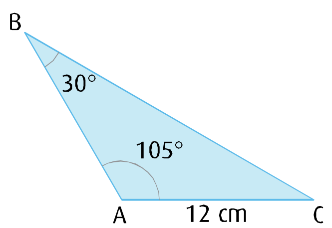
3 (UE-CE) A medida, em cm, da diagonal maior de um paralelogramo cujos lados medem 6 cm e 8 cm e o menor ângulo mede 60° é igual a:

a) $3\sqrt{37}$
b) $2\sqrt{37}$
c) $\sqrt{37}$
d) $\sqrt{\frac{37}{2}}$
e) $\sqrt{\frac{37}{3}}$

4 (UF-CE) As diagonais de um paralelogramo formam entre si um ângulo de 30° e seus comprimentos são $2\sqrt{3}$ cm e 4 cm, respectivamente. O perímetro desse paralelogramo, em centímetros, é: $\left(\text{Dados: } \cos 150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \operatorname{sen} 150° = \dfrac{1}{2}\right)$

a) $2\sqrt{13}$
b) $4\sqrt{13}$
c) $1 + \sqrt{13}$
d) $2 + 2\sqrt{13}$
e) $4 + 2\sqrt{13}$

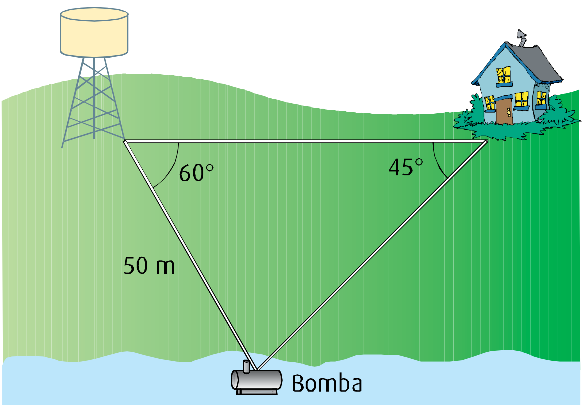
5 (Mackenzie-SP) Três ilhas, A, B e C, aparecem em um mapa, em escala 1 : 10 000, como na figura. Das alternativas, a que mais bem aproxima a distância, em km, entre as ilhas A e B é:



a) 2,3
b) 2,1
c) 1,9
d) 1,4
e) 1,7

6 (Cefet-MG) A água utilizada na casa de um sítio é captada e bombeada do rio para a caixa-d'água a 50 metros de distância. A casa está a 80 metros de distância da caixa-d'água e o ângulo formado pelas direções caixa-d'água-bomba e caixa-d'água-casa é de 60°. Se se pretende bombear água no mesmo ponto de captação diretamente até a casa, a quantidade, em metros, de encanamento necessário é de:

a) 40
b) 65
c) 70
d) 94
e) 100

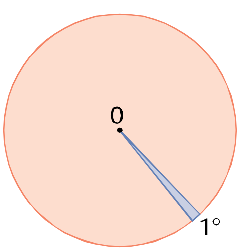


Ciclo trigonométrico / Seno e cosseno

1. Unidades de medida de arcos e de ângulos

Grau

Grau é o ângulo central determinado por um arco cujo comprimento é $\frac{1}{360}$ da circunferência que contém esse arco.



$$1° = \frac{1}{360} \cdot C \therefore C = 360°$$

Define-se que o ângulo central e o arco por ele determinado têm a mesma medida em graus.

Submúltiplos do grau

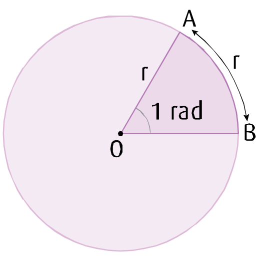
- **Minuto**: $1' = \frac{1°}{60}$
- **Segundo**: $1'' = \frac{1'}{60}$

Assim: $\begin{cases} 1° = 60' \\ 1' = 60'' \end{cases} \Rightarrow 1° = 3\,600''$

Radiano (rad)

Um radiano é o ângulo central determinado por um arco cujo comprimento é igual à medida do raio da circunferência que contém esse arco.

Define-se que o ângulo central e o arco por ele determinado têm a mesma medida em radianos.



$$\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = \frac{\text{comprimento do arco}}{\text{comprimento do raio}} \text{ rad}$$

Conversão de unidades

A circunferência mede 360°, o que equivale a 2π rad.

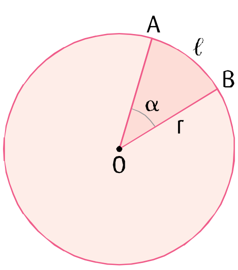
$$360° \text{ ——— } 2\pi \text{ rad}$$

ou, ainda:

$$180° \text{ ——— } \pi \text{ rad}$$

Essa expressão nos permite, por regra de três, converter grau em radiano ou radiano em grau.

Comprimento de arcos



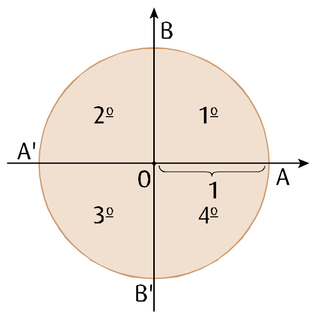
Seja uma circunferência de centro O, raio r e ângulo central α, medido em radianos. O comprimento ℓ do arco AB, em unidade de comprimento, é dado por:

$$\ell = \alpha \cdot r$$

2. Ciclo trigonométrico

Consideremos, no plano cartesiano, uma circunferência de **raio unitário** tal que o centro da circunferência coincida com a origem do sistema de eixos. Essa circunferência é denominada ciclo trigonométrico ou circunferência trigonométrica.

A circunferência fica, dessa forma, dividida em quatro partes iguais denominadas **quadrantes**. Os quadrantes são numerados, a partir do ponto A, percorrendo-se a circunferência no sentido anti-horário.

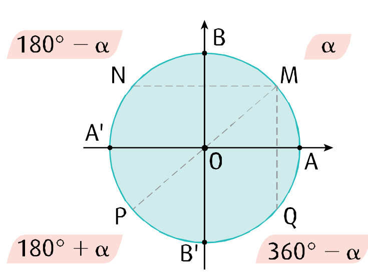


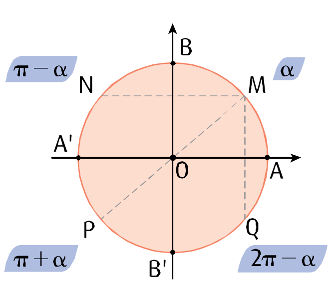
Os pontos A, B, A′ e B′ não pertencem a quadrante nenhum. São chamados pontos limítrofes de quadrante. Os arcos sobre essa circunferência têm origem no ponto A. Se orientados no sentido anti-horário, terão medidas algébricas positivas e, se orientados no sentido horário, terão medidas algébricas negativas.

Deste ponto em diante, vamos nos referir ao arco de medida α rad apenas como arco de medida α.

Pontos simétricos

No estudo da trigonometria, é muito importante e prático utilizarmos simetrias que envolvam pontos do primeiro quadrante. Assim:

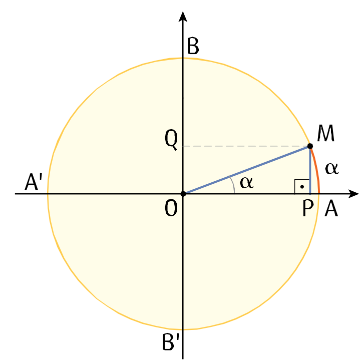




Dizemos que o ponto N é o correspondente de M no segundo quadrante, e vice-versa; o ponto P é o correspondente de M no terceiro quadrante, e vice-versa; e o ponto Q é o correspondente de M no quarto quadrante, e vice-versa.

3. Seno e cosseno de um arco

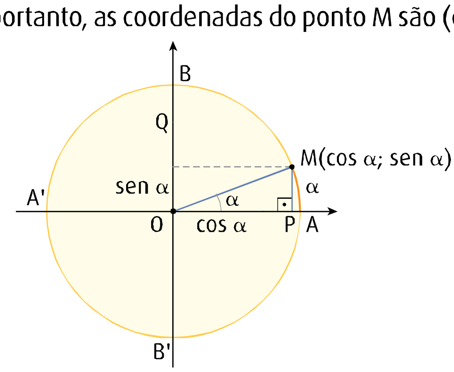
Considere, no ciclo trigonométrico, um arco $\overset{\frown}{AM}$ de medida α.



No triângulo retângulo OPM temos:

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{MP}{OM}$ e $\cos\alpha = \dfrac{OP}{OM}$ e, como o raio da circunferência trigonométrica vale 1, temos: $\text{sen}\,\alpha = MP$ e $\cos\alpha = OP$

Repare que OP é a abscissa do ponto M e $MP = OQ$ é a ordenada do ponto M; assim, podemos afirmar que **cos** α é a abscissa da extremidade do arco de medida α e **sen** α é a ordenada da extremidade do arco de medida α e, portanto, as coordenadas do ponto M são ($\cos\alpha$; $\text{sen}\,\alpha$).



O eixo $\overline{AA'}$ é chamado **eixo dos cossenos**, e o eixo $\overline{BB'}$ é chamado **eixo dos senos**.

Com base nesse estudo, concluímos:

- O maior valor que o seno pode assumir é 1, e o menor é −1, isto é:

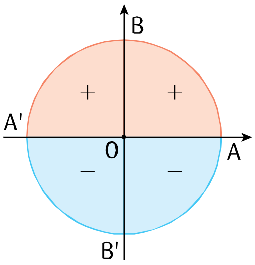
$$\mathbf{-1 \leqslant sen\,\alpha \leqslant 1}$$

- O maior valor que o cosseno pode assumir é 1, e o menor é −1, isto é:

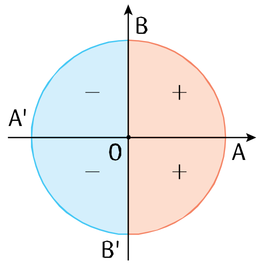
$$\mathbf{-1 \leqslant cos\,\alpha \leqslant 1}$$

Sinais do seno e do cosseno nos quatro quadrantes

Sinais do seno



Sinais do cosseno



Alguns valores notáveis

$\cos 0 = 1$ e $\text{sen } 0 = 0$

$\cos \frac{\pi}{2} = 0$ e $\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$

$\cos \pi = -1$ e $\text{sen } \pi = 0$

$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$ e $\text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1$

$\cos 2\pi = 1$ e $\text{sen } 2\pi = 0$

Conhecemos, agora, os valores de seno e cosseno nos pontos A, B, A′ e B′ e já conhecíamos, de módulos anteriores, a tabela de valores dos arcos notáveis do 1º quadrante.

	$30° \left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45° \left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60° \left(\frac{\pi}{3}\right)$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Seno e cosseno de um arco fora do 1º quadrante

Para se encontrar o valor do seno (ou do cosseno) de um arco dado cuja extremidade esteja fora do 1º quadrante:

- determina-se, no 1º quadrante, o correspondente do arco dado;
- mantém-se o sinal do seno (ou do cosseno) do quadrante ao qual a extremidade do arco dado pertence.

Exemplo

Encontre o valor de sen 225°.

Resolução

Observe que 225° está no 3º quadrante, portanto o valor do seno será negativo. Arcos no 3º quadrante são do tipo $180° + \alpha$.

$180° + \alpha = 225° \Rightarrow \alpha = 45° \therefore \text{sen } 225° =$

$= -\text{sen } 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. Relação trigonométrica fundamental

Para todo $x \in \mathbb{R}$, vale a seguinte relação:

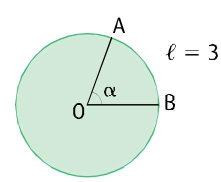
$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ **(Teorema de Pitágoras)**

De onde vem:

$\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ e $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$

Atividades

1 (UF-PR) Na circunferência a seguir, o raio mede 2 e o arco ℓ = AB mede 3.



Supondo-se $\pi \simeq 3,14$, o valor aproximado, em graus, do ângulo α será:

a) 78°
b) 82°
c) 86°
d) 90°
e) 94°

$\ell = \alpha \cdot r$ (com α em radianos)

$3 = \alpha \cdot 2 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$ rad

Conversão:

$180°$ ——— π

x ——— $\frac{3}{2}$

$\therefore \pi x = 270$

$x \simeq \frac{270}{3,14} \simeq 86°$

Alternativa c

2 Determine os valores reais de *m* para os quais é possível ocorrer $\text{sen } x = \frac{2m - 1}{3}$:

a) $-1 < m < 2$
b) $m \leqslant -1$ ou $m \geqslant 2$
c) $-1 < m \leqslant 2$
d) $-1 \leqslant m \leqslant 2$
e) $m < -1$ ou $m > 2$

$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant \frac{2m-1}{3} \leqslant 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3 \leqslant 2m - 1 \leqslant 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2 \leqslant 2m \leqslant 4 \therefore -1 \leqslant m \leqslant 2$

Alternativa *d*

3 (PUC-SP) Se $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$ e α é um ângulo do terceiro quadrante, então o valor de $\text{sen } \alpha$ é igual a:

a) $-\frac{\sqrt{15}}{4}$
b) $-\frac{\sqrt{13}}{4}$
c) $\frac{\sqrt{11}}{4}$
d) $\frac{\sqrt{13}}{4}$
e) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \frac{1}{16} = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = \frac{15}{16}$

$\therefore \begin{cases} \text{sen } \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4} \\ \text{ou} \\ \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ (Não convém.)} \end{cases}$

Alternativa *a*

4 Obtenha *x* no intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$ que verifique simultaneamente $\cos x = \frac{1}{m}$ e $\text{sen } x = \frac{\sqrt{m+1}}{m}$.

a) $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right\}$
b) $\left\{\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right\}$
c) $\left\{\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right\}$
d) $\left\{\frac{\pi}{6}; \pi\right\}$
e) $\left\{\frac{\pi}{3}; \pi\right\}$

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{m+1}}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{m^2} + \frac{m+1}{m^2} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + m + 1 = m^2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = -1$ ou $m = 2$

$\begin{cases} m = -1 \Rightarrow \cos x = -1 \text{ e } \text{sen } x = 0 \therefore x = \pi \\ \text{ou} \\ m = 2 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \text{ e } \text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore x = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

Alternativa *e*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 Converta:

a) $\frac{5\pi}{8}$ rad em graus;
b) 215° em radianos.

2 (UF-CE) Um relógio analógico marca que faltam 15 minutos para as duas horas. Então, o ângulo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos mede:

a) 142° 30′
b) 150°
c) 157° 30′
d) 135°
e) 127° 30′

3 (Ucsal-BA) Se $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$, os valores reais de *m*, para os quais $\cos \theta = \frac{3m - 1}{4}$, são tais que:

a) $m > \frac{1}{3}$
b) $m < 3$
c) $-1 < m < \frac{1}{3}$
d) $-\frac{1}{3} < m < 1$
e) $m > \frac{5}{3}$ ou $m < -1$

4 Sabendo que $\text{sen } (x) = \frac{4}{5}$ e *x* é um arco do 2º quadrante, encontre o valor da tg (x).

5 (Aman-RJ) A expressão $\frac{\text{sen } x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\text{sen } x}$ é igual a:

a) $\frac{\text{sen } x}{2}$
b) $\frac{1}{\cos x}$
c) $\frac{2}{\text{sen } x}$
d) $-\frac{\text{sen } x}{2}$
e) $-\frac{2}{\cos x}$

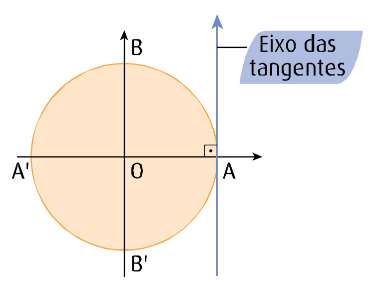
6 (Unirio-RJ) Se $\text{sen } x - \cos x = \frac{1}{2}$, o valor de $\text{sen } x \cdot \cos x$ é igual a:

a) $-\frac{13}{16}$
b) $-\frac{3}{8}$
c) $\frac{3}{8}$
d) $\frac{3}{4}$
e) $\frac{3}{2}$

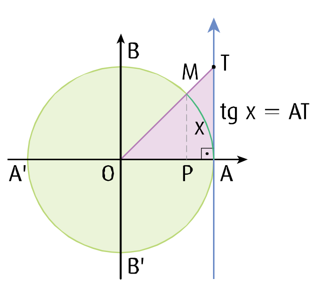
Tangente / Outras relações trigonométricas

1. Tangente de um arco

Considere, no ciclo trigonométrico, o eixo real de origem A(1, 0), perpendicular ao eixo dos cossenos e com a orientação do eixo dos senos. Esse eixo é chamado **eixo das tangentes**.



Prolonga-se o raio que passa pela extremidade de um arco AM, com M não pertencente ao eixo dos senos, até que esse prolongamento intercepte o eixo das tangentes num ponto T.



A medida algébrica do segmento $\overline{AT}$ é o valor da **tangente** do arco $\overset{\frown}{AM}$.

Demonstração

Estudamos, anteriormente, que $tg\ x = \dfrac{sen\ x}{cos\ x}$, com $cos\ x \neq 0$.

Consideremos um arco $\overset{\frown}{AM}$, de medida *x*, do primeiro quadrante. A projeção ortogonal do ponto M sobre o eixo dos cossenos determina o ponto P, conforme a figura anterior.

Os triângulos OAT e OPM são semelhantes, então:

$$\frac{AT}{OA} = \frac{MP}{OP}$$

Mas OA = 1 (raio), MP = sen x e OP = cos x, logo:

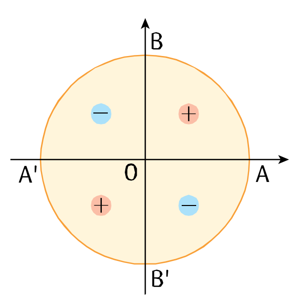
$$\frac{AT}{1} = \frac{sen\ x}{cos\ x} \therefore \boxed{AT = tg\ x}$$

- As demonstrações para arcos com medidas nos quadrantes 2, 3 e 4 são análogas à demonstração feita para o 1º quadrante, desde que respeitados os sinais do seno e do cosseno.
- Se cos x = 0, então a extremidade do arco estará no ponto B ou no ponto B′, logo o prolongamento do raio e o eixo das tangentes não se interceptarão, pois serão paralelos, assim:

$$tg\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x},\ com\ cos\ x \neq 0$$

Sinais da tangente

Com base nas observações anteriores, concluímos que os sinais da tangente nos quatro quadrantes são:



Valores notáveis

$tg\ 0 = 0$

$tg\ \dfrac{\pi}{2}$ (Não existe.)

$tg\ \pi = 0$

$tg\ \dfrac{3\pi}{2}$ (Não existe.)

$tg\ 2\pi = 0$

Arcos notáveis do 1º quadrante

	$30° \left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45° \left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60° \left(\frac{\pi}{3}\right)$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

2. Outras relações trigonométricas

Já estudamos que:

- $\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1$, para todo *x* real
- $\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$, com $\cos x \neq 0$

Agora, definimos as relações:

I. $\text{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}$, com $\text{sen}\, x \neq 0$

II. $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, com $\cos x \neq 0$

III. $\text{cossec}\, x = \frac{1}{\text{sen}\, x}$, com $\text{sen}\, x \neq 0$

e demonstram-se as identidades:

IV. $\text{cotg}\, x = \frac{1}{\text{tg}\, x} = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}$, com $\text{sen}\, x \neq 0$

V. $\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2\, x$, com $\cos x \neq 0$

VI. $\text{cossec}^2\, x = 1 + \text{cotg}^2\, x$, com $\text{sen}\, x \neq 0$

Atividades

1 (U. E. Londrina-PR) Seja *x* um ângulo agudo. Se $\sec x = \frac{3}{2}$, então tg x é igual a:

a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \frac{\text{sen}^2\, x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{tg}^2\, x + 1 = \sec^2 x \Rightarrow \text{tg}^2\, x = \sec^2 x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{tg}^2\, x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 \Rightarrow \text{tg}^2\, x = \frac{5}{4} \therefore \text{tg}\, x = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Alternativa *d*

2 Mostre que: $\frac{\text{tg}\, x}{1 + \text{tg}^2\, x} = \text{sen}\, x \cdot \cos x$

Desenvolvendo o 1º membro, temos:

$\frac{\text{tg}\, x}{1 + \text{tg}^2\, x} = \frac{\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}}{1 + \frac{\text{sen}^2\, x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x + \text{sen}^2\, x}{\cos^2 x}} = \frac{\text{sen}\, x \cdot \cos^2 x}{\cos x} =$

$= \text{sen}\, x \cdot \cos x$

3 (U. Marília-SP) Qual das expressões a seguir é idêntica a $\frac{1 - \text{sen}^2\, x}{\text{cotg}\, x \cdot \text{sen} x}$?

a) sen x
b) cos x
c) tg x
d) cossec x
e) cotg x

$\frac{1 - \text{sen}^2\, x}{\text{cotg}\, x \cdot \text{sen}\, x} = \frac{\cos^2 x}{\frac{\cos x \cdot \cancel{\text{sen}\, x}}{\cancel{\text{sen}\, x}}} = \frac{\cos^2 x}{\cos x} = \cos x$

Alternativa *b*

4 (UF-SC) Sabendo que $\text{cossec}\, x = \frac{5}{4}$ e *x* é um ângulo agudo, calcule o valor da expressão: $9 \cdot (\sec^2 x + \text{tg}^2\, x)$.

$\text{cossec}\, x = \frac{5}{4} \Rightarrow \text{sen}\, x = \frac{4}{5} \Rightarrow \text{sen}^2\, x = \frac{16}{25}$

$\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2\, x \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{9}{25}$

$9 \cdot (\sec^2 x + \text{tg}^2\, x) = 9 \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\text{sen}^2\, x}{\cos^2 x}\right) = \frac{9 \cdot (1 + \text{sen}^2\, x)}{\cos^2 x} =$

$= \frac{9 \cdot \left(1 + \frac{16}{25}\right)}{\frac{9}{25}} = \frac{9 \cdot \frac{41}{25}}{\frac{9}{25}} = 9 \cdot \frac{41}{25} \cdot \frac{25}{9} = 41$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 Sendo *x* um arco do 3º quadrante, com $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{5}$, então a tg x vale:

a) $\frac{\sqrt{23}}{2}$

b) $-\frac{\sqrt{23}}{2}$

c) $-\frac{\sqrt{23}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{46}}{2}$

e) $-\frac{\sqrt{46}}{2}$

2 (Udesc-SC) A forma mais simples para a expressão $1 + \frac{1}{\cos^2 x \cdot \text{cossec}^2 x} - \sec^2 x$ é:

a) 1

b) -1

c) 0

d) tg x

e) sen x

3 (UF-AM) A simplificação de $\frac{1 - \text{tg}^4 x}{\cos^4 x - \text{sen}^4 x}$ é:

a) $\text{cossec}^4 x$

b) $\cos^4 x$

c) $\text{sen}^4 x$

d) $\sec^4 x$

e) $\text{cotg}^4 x$

4 (UF-MS) Se $\text{sen}(x) = \frac{1}{2}$, em que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então o valor da expressão $y = \frac{\cos x}{\text{tg } x + \sec x}$ é:

a) 0

b) 1

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{1}{2}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

5 (Cefet-SP) A expressão trigonométrica $\frac{1 - \text{tg}^2 x}{1 - \sec^2 x}$, em que $\sec x \neq -1$ e $\sec x \neq 1$, equivale a:

a) $-\text{tg}^2 x - \text{cotg}^2 x$

b) $-\text{cotg}^2 x$

c) $1 - \text{tg}^2 x$

d) $1 - \text{cotg}^2 x$

e) $\text{cossec}^2 x$

6 (UE-MT) Na expressão:

$$\frac{\sec^2 x \cdot \cos x - \text{cotg } x \cdot \text{sen } x}{\text{cossec}^2 x \cdot \text{sen } x - \sec x \cdot \text{cotg } x + \text{cotg } x \cdot \cos x}$$

podemos afirmar:

I. O numerador é igual a sen x · tg x.

II. O denominador é igual a cos x · cotg x.

III. Podemos dizer que:

$$\frac{\sec^2 x \cdot \cos x - \text{cotg } x \cdot \text{sen } x}{\text{cossec}^2 x \cdot \text{sen } x - \sec x \cdot \text{cotg } x + \text{cotg } x \cdot \cos x} = \text{tg } x$$

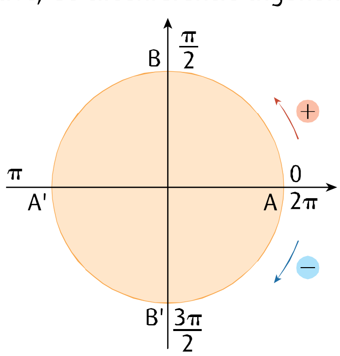
IV. Se considerarmos sec x · cotg x + cotg x · cos x isoladamente, então podemos substituí-la por sen x. O numerador é igual ao denominador; portanto, a expressão é igual a 1 (um).

Equação e inequação trigonométricas

1. O intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$

Resolver uma equação trigonométrica significa encontrar sua(s) raiz (raízes), isto é, encontrar o(s) valor(es) da incógnita que satisfaz(em) a igualdade.

A expressão $0 \leqslant x < 2\pi$ significa que os valores de *x* que estamos procurando devem estar na primeira volta, no sentido positivo, da circunferência trigonométrica.



Exercício resolvido

Resolver a equação sen x = 1, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Vimos, anteriormente, que sen x é a ordenada da extremidade do arco de medida *x*.

Observando o ciclo trigonométrico, notamos que o ponto B é o único que tem ordenada 1.

Logo, o arco *x* tem extremidade no ponto B e, como $0 \leqslant x < 2\pi$, vem:

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

2. Inequações trigonométricas

Para resolvermos inequações trigonométricas no domínio $0 \leqslant x < 2\pi$, devemos, inicialmente, encontrar as raízes da equação correspondentes à inequação e representá-las no ciclo trigonométrico.

Observaremos que elas dividirão o ciclo trigonométrico em arcos de circunferência. A solução dessa inequação é o conjunto dos pontos do(s) arco(s) de circunferência que satisfaz(em) a desigualdade.

Atividades

1 (U. F. Ouro Preto-MG) Resolva a equação trigonométrica: $\text{sen } x + 2 \text{ sen } x \cdot \cos x = 0$, para $x \in [0; 2\pi[$.

$\text{sen } x \cdot (1 + 2\cos x) = 0$

$\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$

ou

$1 + 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$

$S = \left\{0; \pi; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$

2 A soma das raízes da equação $1 + \cos x - \text{sen}^2 x = 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$, é igual a:

a) π
b) $\frac{\pi}{2}$
c) 2π
d) 3π
e) $\frac{3\pi}{2}$

Sendo $1 - \text{sen}^2 x = \cos^2 x$, temos:

$1 + \cos x - \text{sen}^2 x = 0 \Rightarrow (1 - \text{sen}^2 x) + \cos x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x \cdot (\cos x + 1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2} \\ \text{ou} \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi \end{cases}$$

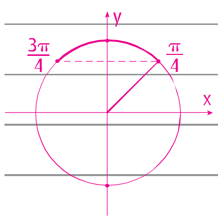
Assim, temos a soma: $\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + \pi = 3\pi$

Alternativa *d*

3 Resolva no intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$ as seguintes inequações:

a) $\text{sen } x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\text{sen } x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$



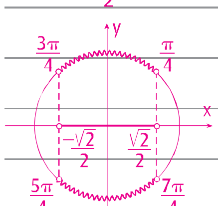
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4}\right\}$

b) $2\cos^2 x - 1 < 0$

$2\cos^2 x - 1 < 0 \Rightarrow 2\cos^2 x < 1 \Rightarrow \cos^2 x < \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

I) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$



De acordo com o domínio:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}\right\}$

4 (FGV-SP) Resolvendo a inequação $2 \cdot \cos x \leqslant 1$, no intervalo $[0, 2\pi[$, obtém-se:

a) $\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3}$

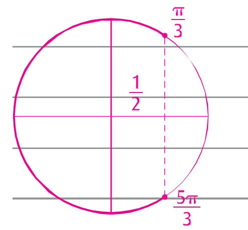
b) $x \geqslant \frac{\pi}{3}$

c) $\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3}$

d) $\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant 5\pi$

e) $x \leqslant \frac{1}{2}$

$2 \cdot \cos x \leqslant 1 \Rightarrow \cos x \leqslant \frac{1}{2}$



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3}\right\}$

Alternativa *c*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (UF-PI) O número de soluções da equação $\text{sen}^2 x - \cos^2 x = 0$ no intervalo $[0, 2\pi[$ é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

2 (FGV-SP) Resolva a equação $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

3 (Mackenzie-SP) A soma das soluções da equação $2 \cdot \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$, é:

a) π
b) 2π
c) 3π
d) 4π
e) 5π

4 (Fuvest-SP) A soma das raízes da equação $\text{sen}^2 x - 2\cos^4 x = 0$, que estão no intervalo $[0, 2\pi]$, é:

a) 2π
b) 3π
c) 4π
d) 6π
e) 7π

5 (PUC-SP) Para que valores de *x*, no intervalo $[0, 2\pi[$, verificam-se $\text{sen } x > \frac{1}{2}$ e $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$?

6 (PUC-SP) O conjunto solução da inequação $|\cos x| < \frac{1}{2}$ no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ é:

a) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right[$
b) $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right[$
c) $\left[0, \frac{\pi}{6}\right[$
d) $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$
e) $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$

Adição de arcos e arcos duplos

1. Algumas identidades

Sendo x e y as medidas de dois arcos quaisquer, são válidas as seguintes identidades:

- $\text{sen}\,(x + y) = \text{sen}\,x \cdot \cos y + \text{sen}\,y \cdot \cos x$
- $\text{sen}\,(x - y) = \text{sen}\,x \cdot \cos y - \text{sen}\,y \cdot \cos x$
- $\cos\,(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \text{sen}\,x \cdot \text{sen}\,y$
- $\cos\,(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \text{sen}\,x \cdot \text{sen}\,y$
- $\text{tg}\,(x + y) = \dfrac{\text{tg}\,x + \text{tg}\,y}{1 - \text{tg}\,x \cdot \text{tg}\,y}$
- $\text{tg}\,(x - y) = \dfrac{\text{tg}\,x - \text{tg}\,y}{1 + \text{tg}\,x \cdot \text{tg}\,y}$

Observações:

- $\text{sen}\,(x + y) \neq \text{sen}\,x + \text{sen}\,y$
- $\text{sen}\,(x - y) \neq \text{sen}\,x - \text{sen}\,y$
- $\cos\,(x + y) \neq \cos x + \cos y$
- $\cos\,(x - y) \neq \cos x - \cos y$
- $\text{tg}\,(x + y) \neq \text{tg}\,x + \text{tg}\,y$
- $\text{tg}\,(x - y) \neq \text{tg}\,x - \text{tg}\,y$

2. Arco duplo

Sendo x a medida de um arco trigonométrico qualquer, demonstram-se:

- $\text{sen}\,2x = 2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2\,x$
- $\text{tg}\,2x = \dfrac{2 \cdot \text{tg}\,x}{1 - \text{tg}^2\,x}$

Observações:

- $\text{sen}\,2x \neq 2 \cdot \text{sen}\,x$
- $\cos 2x \neq 2 \cdot \cos x$
- $\text{tg}\,2x \neq 2 \cdot \text{tg}\,x$

Atividades

1 (U. F. Ouro Preto-MG) A expressão $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$ é equivalente a:

a) tg x   b) cotg x   c) −tg x   d) −cotg x

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos x - \text{sen}\,\frac{\pi}{2} \cdot \text{sen}\,x}{\text{sen}\,\frac{\pi}{2} \cdot \cos x - \text{sen}\,x \cdot \cos\frac{\pi}{2}} = \frac{-\text{sen}\,x}{\cos x} =$$

$= -\text{tg}\,x$

Alternativa *c*

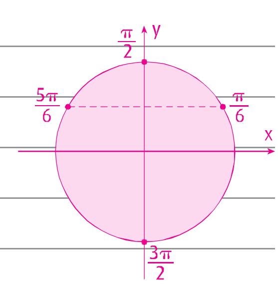
2 (U. F. São João del-Rei-MG) No intervalo $[0; 2\pi[$ a soma de todos os valores de x, tais que $\text{sen}\,2x = \cos x$, é igual a:

a) 2π b) π c) 3π d) 4π

$2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x - \cos x = 0$

$\cos x \cdot (2 \cdot \text{sen}\,x - 1) = 0$

$\cos x = 0$ ou $\text{sen}\,x = \dfrac{1}{2}$



$\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{3\pi}{2} = \dfrac{6\pi}{6} + \dfrac{4\pi}{2} = \pi + 2\pi = 3\pi$

Alternativa *c*

3 (Fuvest-SP) Um arco *x* tem extremidade no terceiro quadrante do ciclo trigonométrico e verifica a equação:

$$5 \cdot \cos 2x + 3 \cdot \text{sen } x = 4$$

Determine os valores do sen x e cos x.

$5 \cdot \cos(2x) + 3 \cdot \text{sen } x = 4 \Rightarrow 5 \cdot (1 - 2\,\text{sen}^2 x) + 3 \cdot \text{sen } x = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 - 10\,\text{sen}^2 x + 3\,\text{sen } x = 4 \Rightarrow 10\,\text{sen}^2 x - 3\,\text{sen } x - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } x = \dfrac{3 \pm 7}{20} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = -\dfrac{1}{5} \\ \text{sen } x = \dfrac{1}{2} \text{ (Não convém, pois } x \in 3^{\circ}\text{ Q.)} \end{cases}$

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{24}{25} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -\dfrac{2\sqrt{6}}{5} \\ \text{sen } x = \dfrac{2\sqrt{6}}{5} \text{ (Não convém, pois } x \in 3^{\circ}\text{ Q.)} \end{cases}$

4 (Cefet-CE) Considere que tg α e tg β sejam raízes da equação $2x^2 - x + 1 = 0$. Se $0 \leq \alpha + \beta \leq \pi$, a soma $\alpha + \beta$ é igual a:

a) 0
b) $\dfrac{\pi}{6}$
c) $\dfrac{\pi}{4}$
d) $\dfrac{\pi}{2}$
e) π

$\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{2}$

$\text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2}$

$\text{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}$

$\text{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

$\text{tg}(\alpha + \beta) = 1 \Rightarrow \text{tg}(\alpha + \beta) = \text{tg}\,\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$

Alternativa c

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (Cesgranrio-RJ) Sejam α um arco do primeiro quadrante e β um arco do segundo quadrante, tais que cos α = 0,8 e sen β = 0,6. O valor de sen (α + β) é:

a) 1,00
b) 0,96
c) 0,70
d) 0,48
e) 0,00

2 Determine o valor da expressão E = sen 75° + cos 105°.

3 Considere um ângulo agudo de medida *x* tal que:

$$\text{sen } x + \cos x = m$$

Então, é correto afirmar que o valor de sen (2x) é igual a:

a) 2m
b) m^2
c) m − 1
d) $m^2 - 1$
e) $\dfrac{m^2 - 1}{2}$

4 (Fesp-SP) No intervalo [0; π], o número de soluções da equação sen (2x) + sen x = 0 é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

5 (Mackenzie-SP) A soma dos valores inteiros de *k* para que a equação $\sqrt{3} \cdot \text{sen } x + \cos x = k - 3$ apresente soluções reais é:

a) 7
b) 10
c) 13
d) 15
e) 20

6 (Unisa-SP) Sabendo que x − y = 60°, assinale a alternativa que corresponde ao valor da expressão:

$$(\cos x + \cos y)^2 + (\text{sen } x + \text{sen } y)^2$$

a) 1
b) $\dfrac{1}{2}$
c) 2
d) 3
e) $\dfrac{3}{2}$

Fatorial / Número binomial / Triângulo de Pascal

1. Fatorial

Para $n \in \mathbb{N}$, define-se n! (lê-se: "*n* fatorial" ou "fatorial de *n*") como:

$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot 1$, com $n \geq 2$

$1! = 1$

$0! = 1$

Exemplos

a) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

b) $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$

c) $2! = 2 \cdot 1 = 2$

Propriedade fundamental

$$n! = n \cdot (n - 1)!\ \forall\ n, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*$$

Exemplos

a) $8! = 8 \cdot 7!$

b) $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6!$

c) $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!$

2. Número binomial

Sendo $\{n; p\} \subset \mathbb{N}$ de tal modo que $n \geq p$, define-se:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \cdot (n - p)!}$$

- O símbolo $\binom{n}{p}$ é lido como: número binomial *n* com classe *p*, ou simplesmente número binomial *n* sobre *p*.
- No símbolo $\binom{n}{p}$, *n* é o numerador e *p* é a classe ou denominador.

Exemplo

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot (6 - 4)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 2!} = 15$$

Propriedades

Satisfeitas as condições de existência, são válidas as seguintes propriedades para os números binomiais:

Binomiais complementares (P_1)

- Dois números binomiais, de mesmo numerador, serão chamados **complementares** quando a soma de seus denominadores for igual ao numerador comum.

Exemplo

$\binom{9}{2}$ e $\binom{9}{7}$ são binomiais complementares.

- Dois números binomiais complementares são iguais, isto é:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n - p}$$

Igualdade (P_2)

Dois números binomiais de mesmo numerador serão iguais se, e somente se, os denominadores forem iguais ou os números binomiais forem complementares, isto é:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{q} \Rightarrow \begin{cases} p = q \\ \text{ou} \\ p + q = n \end{cases}$$

Exemplos

a) $\binom{8}{3} = \binom{8}{3}$

b) $\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$

Relação de Stifel

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p + 1} + \binom{n + 1}{p + 1} \text{ com } n, p \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq p$$

Exemplo

$$\binom{7}{2} + \binom{7}{3} = \binom{8}{3}$$

3. Triângulo de Pascal

Chama-se triângulo de Pascal o triângulo formado por números binomiais da seguinte forma:

$$\binom{0}{0} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Corresponde à linha} \\ \rightarrow \text{Corresponde à coluna} \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \dots \binom{n}{n}
\end{array}$$

Substituindo cada binomial pelo seu respectivo valor, temos:

$$\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Para construirmos o triângulo de Pascal, basta aplicarmos algumas propriedades já vistas, lembrando que o primeiro e último valores de cada linha do triângulo de Pascal são iguais a 1.

Relação de Stifel

Observe no triângulo de Pascal esta propriedade:

A soma de dois elementos consecutivos de uma mesma linha do triângulo de Pascal resulta no elemento da linha posterior e mesma coluna do binomial de maior denominador (exceto para a primeira linha e para cada último elemento de cada linha). Observe:

$$\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
\boxed{1} & \boxed{2} & 1 & & & \\
1 & \boxed{3} & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & \boxed{6} & \boxed{4} & 1 & \\
1 & 5 & 10 & \boxed{10} & 5 & 1
\end{array}$$

Teorema das linhas

A soma dos elementos da linha *n* no triângulo de Pascal é 2^n.

Exemplo

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} =$$

$$= 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$$

Generalizando:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \binom{n}{5} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Atividades

1 (FDBEF-DF) Sendo $\frac{(n + 1) \cdot n!}{(n + 2)!} = \frac{1}{10}$ e tendo em vista que $n > 0$, o valor de *n* é:

a) 6 b) 8 c) 10 d) 12 e) 9

$$\frac{\cancel{(n + 1) \cdot n!}}{(n + 2) \cdot \cancel{(n + 1) \cdot n!}} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{n + 2} = \frac{1}{10} \Rightarrow n + 2 = 10 \Rightarrow n = 8$$

Alternativa *b*

2 A soma das raízes da equação $\binom{10}{2x} = \binom{9}{x} + \binom{9}{x + 1}$ é igual a:

a) 3 b) 4 c) 8 d) 5 e) 10

$$\binom{10}{2x} = \binom{9}{x} + \binom{9}{x + 1}$$

$$\binom{10}{2x} = \binom{10}{x + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = x + 1 \Rightarrow x = 1 \\ \text{ou} \\ 2x + x + 1 = 10 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

As raízes são 1 e 3 e a soma é 4.

Alternativa *b*

3 (Unifor-CE) Usando uma propriedade do triângulo de Pascal, a soma $\binom{50}{20} + \binom{50}{21} + \binom{51}{22} + \binom{52}{23}$ é igual a:

a) $\binom{53}{23}$
b) $\binom{52}{21}$
c) $\binom{52}{22}$
d) $\binom{51}{21}$
e) $\binom{51}{22}$

$\underbrace{\binom{50}{20}+\binom{50}{21}}_{\binom{51}{21}}+\binom{51}{22}+\binom{52}{23}=\underbrace{\binom{51}{21}+\binom{51}{22}}_{\binom{52}{22}}+\binom{52}{23}=\binom{52}{22}+\binom{52}{23}=\binom{53}{23}$

Alternativa *a*

4 (FGV-SP) Se $\binom{n-1}{5} + \binom{n-1}{6} = \frac{n^2 - n}{2}$, então *n* é igual a:

a) 4 b) 6 c) 9 d) 5 e) 8

$\binom{n-1}{5}+\binom{n-1}{6}=\binom{n}{6}$ (Relação de Stifel)

Então:

$\binom{n}{6}=\frac{n^2-n}{2} \Rightarrow \frac{n!}{6!\cdot(n-6)!}=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$

$\frac{\cancel{n}\cdot\cancel{(n-1)}\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)\cdot\cancel{(n-6)!}}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot\cancel{2!}\cdot\cancel{(n-6)!}}=\frac{\cancel{n}\cdot\cancel{(n-1)}}{\cancel{2}}$

$(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5) = 6\cdot5\cdot4\cdot3$

$\therefore n-2=6 \Rightarrow n=8$ e

$n-3=5 \Rightarrow n=8$ e

$n-4=4 \Rightarrow n=8$ e

$n-5=3 \Rightarrow n=8$

Alternativa *e*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 O conjunto solução da equação $(x!)^2 = 36$ é:

a) {3; −3}
b) {6; −6}
c) {3; 6}
d) {6}
e) {3}

2 (Vunesp-SP) São dados os números *n* e *m*, naturais:

a) Calcule o valor de *n* em que $\frac{(n+1)!}{n!} = 9$.

b) Sabendo que $b_m = \frac{(m+1)!}{(m+2)!} \cdot (m^2 - 4)$, calcule b_{137}.

3 (UF-AL) Determine o valor da seguinte soma:

$$\binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{8}{4} + \binom{9}{5}$$

4 (PUC-SP) O valor de *x* na equação $\binom{2n}{n} = x \cdot \binom{2n}{n-1}$ é:

a) $\frac{n+1}{n}$
b) $\frac{n-1}{n}$
c) $\frac{1-n}{n}$
d) $\frac{2n+1}{n}$
e) $\frac{2n-1}{n}$

5 (Cefet-PR) O(s) valor(es) de *x* na equação $\binom{26}{5x} = \binom{26}{x+8}$, cujos coeficientes binomiais são iguais, é(são):

a) 2 ou 3
b) 1 ou 0
c) 0 ou 3
d) 2 ou 0
e) 4

6 (Mackenzie-SP) Os números binomiais $\binom{k+2}{3}$ e $\binom{k+2}{5}$ são complementares, com $k \in \mathbb{N}$ e $k > 3$. Então, *k* vale:

a) 6 b) 15 c) 8 d) 5 e) 10

Binômio de Newton

1. Definição

Sejam a, b $\in \mathbb{R}$ e n $\in \mathbb{N}$. O binômio $(a + b)^n$ é denominado **binômio de Newton** e seu desenvolvimento é dado por:

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \cdot a^{n-p} \cdot b^p$$

Os números a seguir são resultados dos números binomiais vistos, anteriormente, no triângulo de Pascal.

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Acompanhe os exemplos:

I. $(a + b)^0 = \mathbf{1}$ (Observe que o coeficiente 1 é o da linha zero do triângulo de Pascal.)

II. $(a + b)^1 = a + b = \mathbf{1}a + \mathbf{1}b$ (Os coeficientes são os que aparecem na linha 1 do triângulo de Pascal.)

III. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \mathbf{1}a^2 + \mathbf{2}ab + \mathbf{1}b^2$ (Os coeficientes são os que aparecem na linha 2 do triângulo de Pascal, e na mesma ordem.)

IV. $(a + b)^3 = \mathbf{1}a^3 + \mathbf{3}a^2b + \mathbf{3}ab^2 + \mathbf{1}b^3$ (Os coeficientes são os que aparecem na linha 3 do triângulo de Pascal, e na mesma ordem.)

Deduzimos, então, que, para $(a + b)^4$, os coeficientes do binômio são os números que aparecem na linha 4 do triângulo de Pascal e nessa mesma ordem, ou seja: **1 4 6 4 1**.

Observe, nos exemplos anteriores, que as potências de *a* em $(a + b)^n$ decrescem de *n* até 0, e as potências de *b* crescem de 0 até *n*.

Assim, o desenvolvimento de $(a + b)^4$ é:

$$\mathbf{1}a^4 + \mathbf{4}a^3b + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}ab^3 + \mathbf{1}b^4 =$$

$$= 1a^4b^0 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1a^0b^4 =$$

$$= \binom{4}{0} \cdot a^4 \cdot b^0 + \binom{4}{1} \cdot a^3 \cdot b^1 + \binom{4}{2} \cdot a^2 \cdot b^2 +$$

$$+ \binom{4}{3} \cdot a^1 \cdot b^3 \binom{4}{4} \cdot a^0 \cdot b^4$$

$$\binom{4}{0} \cdot a^{4-0} \cdot b^0 + \binom{4}{1} \cdot a^{4-1} \cdot b^1 + \binom{4}{2} \cdot a^{4-2} \cdot b^2 +$$

$$+ \binom{4}{3} \cdot a^{4-3} \cdot b^3 + \binom{4}{4} \cdot a^{4-4} \cdot b^4$$

A potência de *a* é a diferença entre o numerador e o denominador do binominal, e a de *b* é o denominador do binominal.

Podemos representar essa expressão de uma forma simplificada, como segue:

$$(a + b)^4 = \sum_{p=0}^{4} \binom{4}{p} \cdot a^{4-p} \cdot b^p$$

Substituindo 4 por *n*, temos:

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \cdot a^{n-p} \cdot b^p$$

O termo de número p + 1, isto é, T_{p+1}, é determinado da seguinte maneira:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} \cdot a^{n-p} \cdot b^p$$

Soma dos coeficientes de $(x + y)^n$

Para encontrarmos a soma dos coeficientes de $(ax + by)^n$, com a, b $\in \mathbb{R}$ e n $\in \mathbb{N}$, basta substituirmos *x* e *y* por 1. Portanto, a soma dos coeficientes de $(ax + by)^n$ é:

$$(a \cdot 1 + b \cdot 1)^n = (a + b)^n$$

Atividades

1 (UF-RN) O coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $\left[x + \left(\frac{1}{x^2}\right)\right]^8$ é dado por:

a) 0 b) 1 c) 8 d) 28 e) 56

$\left[x+\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]^8 = (x + x^{-2})^8 \Rightarrow T_{K+1} = \binom{8}{k}\cdot x^{8-k}\cdot (x^{-2})^k \Rightarrow$

$\Rightarrow T_{K+1} = \binom{8}{k}\cdot x^{8-k}\cdot x^{-2k} \Rightarrow T_{K+1} = \binom{8}{k}\cdot x^{8-3k}$

O termo em x^5 apresenta $8 - 3k = 5$, ou seja, $k = 1$.

Assim, o seu coeficiente é dado por $\binom{8}{1}$, que é igual a 8.

Alternativa *c*

2 O termo independente de *x* no desenvolvimento de $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{10}$ é:

a) 252 c) 335 e) 96

b) −252 d) −335

$T_{p+1} = \binom{10}{p}\cdot x^{10-p}\cdot\left(\frac{-1}{x}\right)^p = \binom{10}{p}\cdot x^{10-p}\cdot x^{-p}\cdot(-1)^p$

$T_{p+1} = \binom{10}{p}\cdot x^{10-2p}\cdot(-1)^p$

Devemos ter: $10 - 2p = 0 \Rightarrow p = 5$

Assim:

$T_6 = \binom{10}{5}\cdot(-1)^5 = -\frac{10!}{5!\cdot 5!} = -\frac{\overset{2}{\cancel{10}}\cdot\overset{3}{\cancel{9}}\cdot\overset{2}{\cancel{8}}\cdot 7\cdot\overset{3}{\cancel{6}}\cdot\cancel{5}!}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{5}!} = -252$

Alternativa *b*

3 (FEI-SP) Considere a seguinte igualdade:

$$S = \binom{20}{0} + \binom{20}{1}\cdot 2 + \binom{20}{2}\cdot 2^2 + \ldots + \binom{20}{19}\cdot 2^{19} + \binom{20}{20}\cdot 2^{20}$$

A soma S é igual a:

a) 2^{40} b) 9^{10} c) 20^{22} d) 20^{20} e) 20!

$S = \binom{20}{0}\cdot 1^{20}\cdot 2^0 + \binom{20}{1}\cdot 1^{19}\cdot 2^1 + \binom{20}{2}\cdot 1^{18}\cdot 2^2 + \ldots +$

$+ \binom{20}{19}\cdot 1^1\cdot 2^{19} + \binom{20}{20}\cdot 1^2\cdot 2^{20} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \sum_{n=0}^{20}(1^{20-n}\cdot 2^n) \Rightarrow S = (1+2)^{20} \Rightarrow S = 3^{20} \Rightarrow S = 3^{2\cdot 10} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = (3^2)^{10} \therefore S = 9^{10}$

Alternativa *b*

4 (U. E. Londrina-PR) Se um dos termos do desenvolvimento do binômio $(x + a)^5$, com $a \in \mathbb{R}$, é $80x^2$, então o valor de *a* é:

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2

O termo em questão é o termo em x^2.

$T_{p+1} = \binom{5}{p}\cdot x^{5-p}\cdot a^p$

Devemos ter:

$5 - p = 2 \Rightarrow p = 3$

$T_4 = \binom{5}{3}\cdot x^2\cdot a^3 = 80x^2$

$\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot a^3 = 80 \Rightarrow \frac{5\cdot 4}{2}\cdot a^3 = 80 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$

Alternativa *e*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (Unatec-MG) No desenvolvimento do binômio $(x - 1)^{10}$, segundo potências decrescentes de *x*, o 8º termo é:

a) $-120\cdot x^3$ c) $45\cdot x^3$

b) $-45\cdot x^2$ d) $120\cdot x^3$

2 (UF-PA) No desenvolvimento do binômio $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^5$, qual o termo independente de *x*?

a) 2º b) 3º c) 4º d) 5º e) 6º

3 (Mackenzie-SP) Qual a soma dos coeficientes numéricos do desenvolvimento de $\left(3x^2 - \frac{2}{x}\right)^8$?

a) 256 b) 128 c) 4 d) 1 e) 0

4 (AFA-SP) Sabendo que, no desenvolvimento de $(1 + x)^{26}$, os coeficientes dos termos de ordem $(2r + 1)$ e $(r + 3)$ são iguais, pode-se afirmar que *r* é igual a:

a) 8 ou 4 b) 8 ou 2 c) 4 ou 2 d) 2 ou 1

5 (Unicentro-PR) O termo independente de *x*, no desenvolvimento de $\left(\frac{1}{x} - 3x^4\right)^{10}$, é igual a:

a) 2 b) 30 c) 120 d) 240 e) 405

6 (Iesville-SC) O binômio de Newton $(x^2 - 3x)^5$ tem:

a) quatro termos no seu desenvolvimento.

b) cinco termos no seu desenvolvimento.

c) um valor compreendido entre 32 e 243 para a soma de seus coeficientes.

d) um valor negativo para a soma de seus coeficientes.

e) um valor maior do que 243 para a soma de seus coeficientes.

Logaritmo: propriedades e mudança de base

1. Propriedades dos logaritmos

Vamos acompanhar as propriedades operatórias mais importantes dos logaritmos.

Respeitando as condições de existência dos logaritmos, temos:

P₁ $\log_a (n \cdot m) = \log_a n + \log_a m$

P₂ $\log_a \left(\dfrac{n}{m}\right) = \log_a n - \log_a m$

P₃ $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

P₄ $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a b$

P₅ $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a b$

2. Mudança de base

No uso dos logaritmos, encontramos as seguintes situações:

I. Temos o logaritmo de um determinado número numa certa base, mas precisamos do logaritmo desse número em outra base.

II. Estamos tentando efetuar uma operação que pode ser de adição ou de subtração de logaritmos, mas eles têm bases diferentes.

Vamos acompanhar o desenvolvimento a seguir, respeitando as condições de existência dos logaritmos:

$\log_a n = \alpha \Rightarrow a^\alpha = n \quad \text{(I)}$

$\log_b n = \beta \Rightarrow b^\beta = n \quad \text{(II)}$

$\log_a b = \gamma \Rightarrow a^\gamma = b \quad \text{(III)}$

Substituindo a equação (III) na equação (II), temos:

$b^\beta = n \Rightarrow (a^\gamma)^\beta = n \Rightarrow a^{\gamma \cdot \beta} = n \quad \text{(IV)}$

Comparando as equações (I) e (IV), temos:

$$a^{\gamma \cdot \beta} = a^\alpha \Rightarrow \gamma \cdot \beta = \alpha \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{\gamma}$$

Assim:

O logaritmo de um número, em uma base conveniente, é igual ao quociente entre o logaritmo do mesmo número em outra base escolhida e o logaritmo da base original na base escolhida.

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

Consequências da mudança de base

Sempre respeitando as condições de existência dos logaritmos, temos as seguintes propriedades:

I. $\log_a n = \dfrac{\log_n n}{\log_n a} \Rightarrow \boxed{\log_a n = \dfrac{1}{\log_n a}}$

II. $\log_a n = \dfrac{\log_b n}{\log_b a} \Rightarrow \boxed{\log_b a \cdot \log_a n = \log_b n}$

Atividades

1 Sabendo que $\log_2 7 = 2{,}80$, calcule:

a) $\log_2 14$

$\log_2 14 = \log_2 (2 \cdot 7) = \log_2 2 + \log_2 7 = 1 + 2{,}80 = 3{,}80$

b) $\log_2 49$

$\log_2 49 = \log_2 7^2 = 2 \cdot \log_2 7 = 2 \cdot 2{,}80 = 5{,}60$

c) $\log_2 3{,}5$

$\log_2 3{,}5 = \log_2 \frac{7}{2} = \log_2 7 - \log_2 2 = 2{,}80 - 1 = 1{,}80$

d) $\log_7 2$

$\log_7 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 7} = \frac{1}{2{,}80} \simeq 0{,}357$

2 (Fuvest-SP) Se $\log_{10} 8 = a$, então $\log_{10} 5$ vale:

a) a^3
b) $5a - 1$
c) $\frac{2a}{3}$
d) $1 + \frac{a}{3}$
e) $1 - \frac{a}{3}$

$\log_{10} 8 = a \Rightarrow \log_{10} 2^3 = a \Rightarrow 3 \cdot \log_{10} 2 = a \therefore \log_{10} 2 = \frac{a}{3}$

$\log_{10} 5 = \log_{10}\left(\frac{10}{2}\right) \Rightarrow \log_{10} 5 = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 \therefore \log_{10} 5 = 1 - \frac{a}{3}$

Alternativa *e*

3 Se $\log_{10} 2 = 0{,}30$ e $\log_{10} 3 = 0{,}48$, então é correto afirmar que $\log_{10} 3{,}6$ é igual a:

a) 0,78
b) 0,56
c) 1,56
d) 0,36
e) 0,48

$\log_{10} 3{,}6 = \log_{10}\left(\frac{2^2 \cdot 3^2}{10}\right) \Rightarrow \log_{10} 3{,}6 = \log_{10} 2^2 + \log_{10} 3^2 - \log_{10} 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{10} 3{,}6 = 2 \cdot \log_{10} 2 + 2 \cdot \log_{10} 3 - \log_{10} 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{10} 3{,}6 = 2 \cdot 0{,}30 + 2 \cdot 0{,}48 - 1 \therefore \log_{10} 3{,}6 = 0{,}56$

Alternativa *b*

4 (Unifor-CE) Se $\log_b a = x$, $\log_c b = y$ e $\log_a c = z$, então $x \cdot y \cdot z$ é igual a:

a) $\frac{5}{2}$
b) 2
c) $\frac{3}{2}$
d) 1
e) $\frac{1}{3}$

$x \cdot y \cdot z = \log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_a c =$

$= \frac{\log a}{\log b} \cdot \frac{\log b}{\log c} \cdot \frac{\log c}{\log a} = 1$

Alternativa *d*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 A relação entre as bases *a* e *b*, quando é válida a relação $\log_a N = k \cdot \log_b N$, é dada por:

a) $b = a^k$
b) $\log_b a = \frac{1}{k^2}$
c) $b^k = a$
d) $(ab)^k = 1$
e) $\log_a b = k^2$

2 (PUC-MG) Considere como verdadeiras as igualdades: $\log_2 A + \log_2 B = 2$; $\frac{A}{B} = 256$ e $A + B = \frac{N}{8}$. Nessas condições, o valor de N é:

a) 123
b) 146
c) 238
d) 257

3 Os valores reais de *x* e *y* que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 1 \\ 3x - 5y = 12 \end{cases}$$

são, respectivamente:

a) 5 e $\frac{3}{5}$
b) $\frac{3}{5}$ e 5
c) -1 e -3
d) 3 e $-\frac{3}{5}$
e) 1 e $-\frac{9}{5}$

4 Calcule o valor do produto:

$$\log_3 8 \cdot \log_7 9 \cdot \log_2 343$$

5 (U. F. São Carlos-SP) Um paciente de um hospital está recebendo soro por via intravenosa. O equipamento foi regulado para gotejar *x* gotas a cada 30 segundos. Sabendo-se que este número *x* é a solução $\log_4 x = \log_2 3$ e que cada gota tem volume de 0,3 mL, pode-se afirmar que o volume de soro que este paciente recebe em uma hora é de:

a) 800 mL
b) 750 mL
c) 724 mL
d) 500 mL
e) 324 mL

6 (U. E. Ponta Grossa-PR) Sendo $a \in \mathbb{R}$, com $a > 1$, é correto afirmar que:

(01) $\log \sqrt[5]{a} = 5 \log a$
(02) $\log_a 3 \cdot \log_3 a = 1$
(04) $\log_a 4 + \log_a 9 = 2 \log_a 6$
(08) $10^{\log 3} = 3$
(16) quando $A = \log_a 5$ e $B = \log_{a^2} 5$, então: $B = 2A$

Dê a soma dos números dos itens corretos.

Função, equação e inequação logarítmicas

1. Função logarítmica

A função logarítmica apresenta a variável no logaritmando.

Sentença

$$f(x) = \log_a x, \text{ com } x > 0,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Na expressão:

- *a* é a base;
- *x* é o logaritmando.

Gráfico

Para obtermos o gráfico da função logarítmica, vamos considerar duas sentenças:

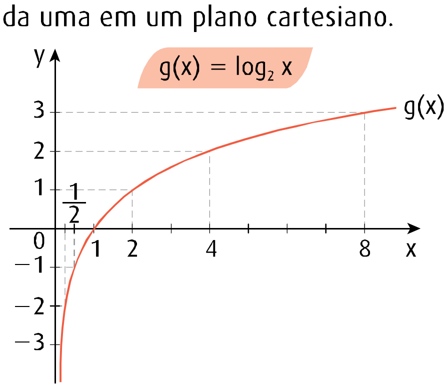
I. $g(x) = \log_2 x$

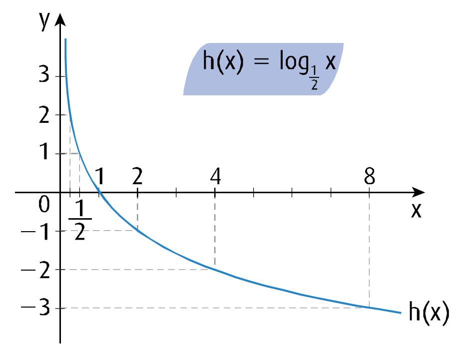
II. $h(x) = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)} x$

Vejamos a tabela abaixo.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
g(x)	−3	−2	−1	0	1	2	3
h(x)	3	2	1	0	−1	−2	−3

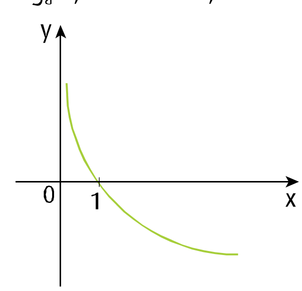
Vamos construir os gráficos das funções g(x) e h(x), cada uma em um plano cartesiano.





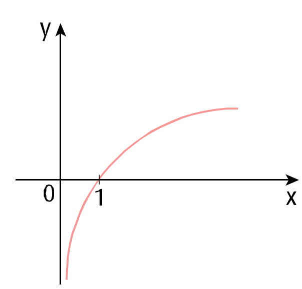
Com base nessas duas situações, podemos apresentar o gráfico da função logarítmica dada pela sentença:

$$f(x) = \log_a x, \text{ com } x > 0,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1$$



$0 < a < 1$

Função decrescente



$a > 1$

Função crescente

Para as duas bases, temos:

Domínio: $\mathbb{R}_+^*$

Contradomínio: $\mathbb{R}$

Conjunto imagem: $\mathbb{R}$

2. Tipos de equações logarítmicas

Equação logarítmica é aquela que traz um ou mais logaritmos com variável no logaritmando ou na base ou em ambos.

Para resolvermos uma equação logarítmica, devemos usar as propriedades dos logaritmos, vistas no módulo anterior, para que a equação fique em uma das formas apresentadas a seguir.

Igualdade entre um logaritmo e uma constante

$$\log_a E(x) = \alpha$$

Nesse caso, podemos usar a definição de logaritmo, ou seja, a constante α, que é o logaritmo, é o expoente a que se eleva a base *a* para que o resultado seja o logaritmando E(x), ou seja:

$$\log_a E(x) = \alpha \Leftrightarrow E(x) = a^\alpha$$

Igualdade entre dois logaritmos de mesma base

$$\log_a E_1(x) = \log_a E_2(x)$$

Nessa situação, podemos afirmar que, se os logaritmos são iguais e têm a mesma base, então os logaritmandos também serão iguais. Assim:

$$\log_a E_1(x) = \log_a E_2(x) \Rightarrow E_1(x) = E_2(x)$$

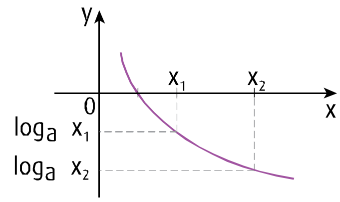
3. Inequação logarítmica

Chamamos inequação logarítmica a toda inequação que apresenta a incógnita no logaritmando ou na base (ou em ambos) de um ou mais logaritmos.

Pelo uso das propriedades dos logaritmos, conduzimos a inequação a uma desigualdade entre dois logaritmos de mesma base.

Quando a base for um número compreendido no intervalo aberto de 0 a 1, a função logarítmica é decrescente e, então, a desigualdade entre os logaritmandos apresenta sentido inverso daquele indicado para os logaritmos.

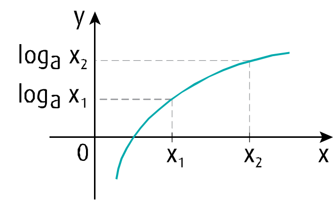
Vejamos o gráfico:



Generalizando:

$$\log_a x_m > \log_a x_p \Leftrightarrow x_m < x_p$$
$$\log_a x_m < \log_a x_p \Leftrightarrow x_m > x_p$$

Quando a base for um número maior que 1, a função logarítmica é crescente e, então, a desigualdade entre os logaritmandos apresenta o mesmo sentido daquele indicado para os logaritmos. Vejamos o gráfico:



Generalizando:

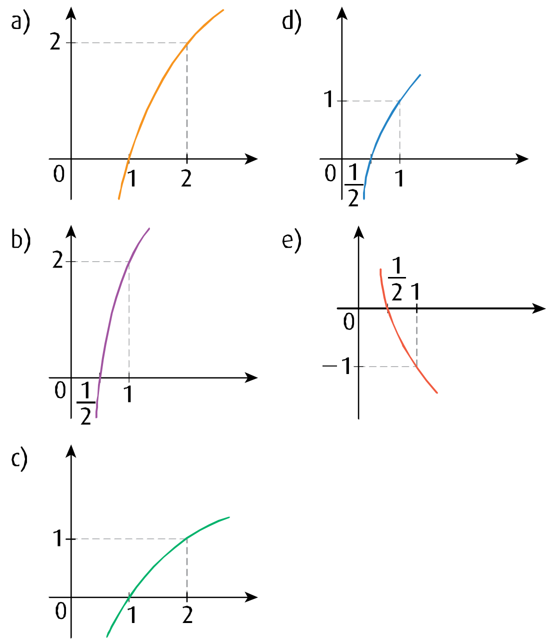
$$\log_a x_m > \log_a x_p \Leftrightarrow x_m > x_p$$
$$\log_a x_m < \log_a x_p \Leftrightarrow x_m < x_p$$

Tanto na equação como na inequação logarítmica, devemos nos preocupar com as **condições de existência** dos logaritmos. A diferença é que, na equação, podemos verificar os resultados no final da resolução; na inequação, devemos impor as condições de existência no começo da resolução.

Quadro-resumo ($a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$)	
$0 < a < 1$	$\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$
	$\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$
$a > 1$	$\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$
	$\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$
Inicie a resolução impondo as condições de existência dos logaritmos.	

Atividades

1 (Fuvest-SP) Qual das figuras a seguir é um esboço do gráfico da função $f(x) = \log_2 2x$?



Como a base é 2 e 2 é maior que 1, a função é crescente.

Se $x = \frac{1}{2}$, temos: $f(x) = \log_2\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \log_2 1 = 0$

Se $x = 1$, temos: $f(x) = \log_2 (2 \cdot 1) = \log_2 2 = 1$

Alternativa *d*

2 (UE-PB) Na equação logarítmica $\log_4 [\log_2 (\log_3 x)] = \frac{1}{2}$, o valor de *x* é:

a) um múltiplo de 5.
b) um número divisível por 3 e 9.
c) um número par.
d) um número decimal.
e) um número irracional.

$\log_4 [\log_2 (\log_3 x)] = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_2 (\log_3 x) = 4^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 (\log_3 x) = 2 \Rightarrow \log_3 x = 2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 x = 4 \Rightarrow x = 3^4 \Rightarrow x = 81$

Alternativa *b*

3 (Univale-MG) A solução da equação $\log x^2 + \log x = 1$ é:

a) 10^{-3} c) 1 e) $10^{\frac{1}{3}}$
b) 10^{-1} d) 10

$\log x^2 + \log x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot \log x + \log x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \cdot \log x = 1$

$\log x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 10^{\frac{1}{3}}$

Alternativa *e*

4 (PUC-SP) As soluções reais da inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_5 (x + 3)} > 1$ são todos os números tais que:

a) $-3 < x < -2$ d) $x < -2$
b) $x > -3$ e) $0 < x < 3$
c) $x > -2$

Condição de existência: $x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_5 (x + 3)} > 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_5 (x + 3)} > \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Rightarrow$

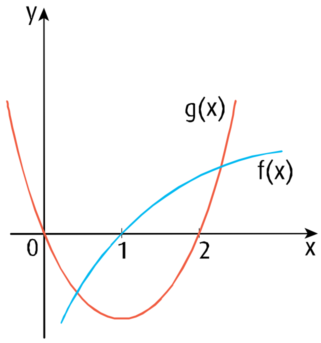
$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_5 (x + 3)} > \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Rightarrow \log_5 (x + 3) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_5 (x + 3) < \log_5 1 \Rightarrow x + 3 < 1 \Rightarrow x < -2 \therefore -3 < x < -2$

Alternativa *a*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (Unifesp-SP) A figura representa os gráficos das funções $f(x) = \log_{10} x$ e $g(x) = x^2 - 2x$.



Pode-se afirmar que a equação $x^2 - 2x = \log_{10} x$:

a) não tem solução.
b) tem somente uma solução.
c) tem duas soluções positivas.
d) tem duas soluções cujo produto é negativo.
e) tem duas soluções cujo produto é nulo.

2 (Vunesp-SP) Numa fábrica, o lucro originado pela produção de *x* peças é dado em milhares de reais pela função $L(x) = \log_{10}(100 + x) + k$, com *k* constante real.

a) Sabendo que sem produção não há lucro, determine *k*.
b) Determine o número de peças que é necessário produzir para que o lucro seja igual a mil reais.

3 (UF-SC) A solução da equação logarítmica

$\log_3 x + \log_3 x^2 + ... + \log_3 x^{49} + \log_3 x^{50} = 2550$ é:

a) $x = 1$
b) $x = 3$
c) $x = 9$
d) $x = \log_3 1275$
e) $x = \log_3 550$

4 (Faap-SP) Os valores de *x* para os quais

$\log x + \log (x + 3) < 1$ são:

a) $x > -5$
b) $x > 2$
c) $0 < x < 2$
d) $x < -5$ ou $x > 2$
e) $-5 < x < 2$

5 (U. F. Ouro Preto-MG) Para que se tenha

$\log_2 (x - 3) + \log_2 (x - 2) < 1$, deve-se ter:

a) $2 < x < 4$
b) $x < 2$ ou $x > 4$
c) $x < 3$ ou $x > 4$
d) $3 < x < 4$
e) $2 < x < 3$

6 (Udesc-SC) Os valores de *m*, com $m \in \mathbb{R}$, para os quais a equação $x^2 - 2x + \log_2 (m - 1) = 0$ possui raízes reais e distintas são:

a) $2 < m < 4$
b) $m < 3$
c) $m \leqslant 3$
d) $1 \leqslant m \leqslant 3$
e) $1 < m < 3$

Sequência / Progressão aritmética

1. Sequências numéricas

Se um conjunto de números se apresentar em uma determinada ordem ou sucessão, eles formarão uma **sequência numérica**. Cada elemento dessa sequência é chamado **termo**.

Observe a sucessão a seguir:

$$(1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; ...)$$

Nela, cada termo após os dois primeiros é a soma dos dois imediatamente precedentes (anteriores).

2. Progressão aritmética

Progressão aritmética, ou simplesmente PA, é uma sequência numérica na qual cada termo, a partir do segundo, é o anterior somado a uma constante *r*, denominada **razão** da PA.

Assim, para apresentarmos uma PA, devemos informar um de seus termos, representado por a_n, e qual é a razão *r*. O índice indica a posição do termo na sequência.

Seja a sequência (2; 5; 8; 11; 14; ...).

O primeiro termo (a_1) é o 2; o segundo termo (a_2) é o 5. Para obtermos o segundo termo, adicionamos 3 ao a_1.

Todos os demais termos são assim obtidos.

$a_1 = 2$ e $r = 3$

$a_2 = 2 + 3 = 5$

$a_3 = 5 + 3 = 8$ ou $a_3 = 2 + 3 + 3 = 8$

$a_4 = 8 + 3 = 11$ ou $a_4 = 2 + 3 + 3 + 3 = 11$

Portanto, 3 é a razão dessa PA.

Termo geral da PA

Vejamos o seguinte procedimento:

Primeiro termo: a_1

Razão: *r*

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r \therefore a_3 = a_1 + 2r$$
$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r \therefore a_4 = a_1 + 3r$$
$$\vdots$$
$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r}$$

Classificação da PA

Classificamos as progressões aritméticas de acordo com o valor dos seus termos da seguinte maneira:

I. **PA crescente**. O valor de cada termo é maior que o anterior: $r > 0$ $(-5; -2; 1; 4; 7; ...)$

II. **PA decrescente**. O valor de cada termo é menor que o anterior: $r < 0$ $(14; 8; 2; -4; -10; ...)$

III. **PA constante**. O valor de cada termo é igual ao anterior: $r = 0$ $(7; 7; 7; 7; 7; ...)$

Termos equidistantes dos extremos numa PA de *n* termos

Dois termos são equidistantes dos extremos de uma PA de *n* termos quando o número de termos que um deles apresenta após a_1 é igual ao número de termos que o outro apresenta antes de a_n.

Seja a PA (3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17).

Os termos 7 e 13, por exemplo, são ditos termos equidistantes dos extremos.

Observe o que acontece com os pares de termos equidistantes dessa PA.

Extremos

3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17

$9 + 11 = 20$

$7 + 13 = 20$

$5 + 15 = 20$

$3 + 17 = 20$

- Numa PA de *n* termos, a_p e a_q são termos equidistantes dos extremos se, e somente se:

$$p + q = 1 + n$$

- Numa PA de *n* termos, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma desses extremos.

Propriedade

Para **três termos consecutivos** de uma PA, o termo médio é igual à média aritmética dos outros dois termos.

$$\text{PA } (a; b; c) \Rightarrow \boxed{b = \frac{a + c}{2}}$$

Soma dos primeiros *n* termos de uma PA

Indicando por S_n a soma dos *n* primeiros termos de uma PA, temos:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}}$$

Representações especiais de uma PA

Existem situações nas quais é conveniente usarmos representações especiais para a PA.

PA de três termos

Representamos por *x* o termo central e subtraímos ou adicionamos a razão para obtermos, respectivamente, o primeiro e o terceiro termos.

$$(x - r; x; x + r)$$

PA de quatro termos

Por não possuir termo central, a PA de quatro termos será assim representada:

$$(x - 3r; x - r; x + r; x + 3r)$$

Interpolação aritmética

Seja a PA finita: $(a_1; a_2; a_3; ...; a_{n-1}; a_n)$.

Os termos $a_2; a_3; ...; a_{n-1}$ são denominados **meios aritméticos**.

Numa PA finita podemos interpolar (ou inserir) meios aritméticos.

Na PA (5; 8; 11; 14; 17), os termos 8, 11 e 14 são meios aritméticos.

Atividades

1 (Mackenzie-SP) Se f(n), com $n \in \mathbb{N}$ é uma sequência definida por $f(0) = 1$ e $f(n + 1) = f(n) + 3$, então f(200) é igual a:

a) 597 c) 601 e) 607
b) 600 d) 604

$a_1 = f(0) = 1 \Rightarrow a_1 = 1$

$a_2 = f(1) = f(0) + 3 \Rightarrow a_2 = 4$

$a_3 = f(2) = f(1) + 3 \Rightarrow a_3 = 7$

$a_4 = f(3) = f(2) + 3 \Rightarrow a_4 = 10$

PA: $a_1 = 1$ e $r = 3$

Determinar f(200) é calcular o termo a_{201} dessa PA. Assim:

$a_{201} = a_1 + (201 - 1) \cdot r \Rightarrow a_{201} = 1 + 200 \cdot 3 \therefore a_{201} = 601$

Alternativa *c*

2 (Cesgranrio-RJ) Em uma progressão aritmética, o termo de ordem *n* é a_n; $a_8 - a_7 = 3$ e $a_7 + a_8 = -1$. Nessa progressão, a_{15} vale:

a) 26 c) 22 e) 13
b) −22 d) −13

$$\begin{cases} a_8 - a_7 = 3 \\ a_7 + a_8 = -1 \end{cases} \oplus$$
$$2a_8 = 2 \Rightarrow a_8 = 1$$

e $a_7 = -2$

$r = a_8 - a_7 = 3$

$a_{15} = a_8 + 7r = 1 + 7 \cdot 3 = 22$

Alternativa *c*

3 (PUC-SP) As medidas dos ângulos internos de um triângulo estão em PA de razão 20°. O menor desses ângulos mede:

a) 30° c) 50° e) 80°
b) 40° d) 60°

Sejam α, β e θ os ângulos desse triângulo. Nessa ordem, eles formam uma PA.

Assim: $\alpha = \beta - 20°$ e $\theta = \beta + 20°$

Temos:

$\alpha + \beta + \theta = 180° \Rightarrow (\beta - 20°) + \beta + (\beta + 20°) = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\beta = 180° \Rightarrow \beta = 60° \therefore \alpha = 40°$ e $\theta = 80°$

Os ângulos desse triângulo são 40°, 60° e 80°, sendo o menor deles 40°.

Alternativa *b*

4 (Uniaraxá-MG) A soma dos 30 primeiros termos da PA (2; 5; ...) é:

a) 1825
b) 1365
c) 300
d) 180
e) 90

$a_{30} = a_1 + 29r \Rightarrow a_{30} = 2 + 29 \cdot 3 \Rightarrow a_{30} = 2 + 87 = 89$

$S_{30} = \dfrac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2}$

$S_{30} = (2 + 89) \cdot 15$

$S_{30} = 1365$

Alternativa *b*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (ITA-SP) O valor de *n* que torna a sequência

$$2 + 3n,\ -5n,\ 1 - 4n$$

uma progressão aritmética pertence ao intervalo:

a) $[-2; -1]$
b) $[-1; 0]$
c) $[0; 1]$
d) $[1; 2]$
e) $[2; 3]$

2 (Faap-SP) Calcule a soma dos números inteiros positivos inferiores a 501 que não sejam divisíveis por 7.

3 (U. Gama Filho-RJ) Um fazendeiro resolveu arborizar sua fazenda. Deu instruções aos empregados para fazerem o serviço da seguinte forma: no primeiro dia plantarem 3 mudas de árvore; no segundo dia, 7 mudas; no terceiro, 11, e assim sucessivamente. No final do décimo quinto dia, o número total de árvores plantadas será de:

a) 450
b) 455
c) 460
d) 465
e) 470

4 (FGV-SP) Um atleta corre sempre 500 m a mais do que no dia anterior. Sabendo-se que ao final de 15 dias ele correu um total de 67 500 m, o número de metros percorridos no terceiro dia foi:

a) 1000
b) 1500
c) 2000
d) 2500
e) 2600

5 (PUC-RJ) Três números estão em progressão aritmética. A soma dos três números é 21. Assinale a opção que apresenta o valor correto do termo do meio:

a) 2
b) 6
c) 7
d) 5
e) $2\sqrt{3}$

6 (F. M. Santa Casa-SP) Seja $S_n = 2n^2 - 8n$, com $n \in \mathbb{N}$, a expressão da soma dos *n* primeiros termos de uma PA. A razão dessa progressão é:

a) 4
b) 2
c) 0
d) -2
e) -4

Progressão geométrica

1. Definição

Progressão geométrica, ou simplesmente PG, é uma sequência numérica na qual cada termo, a partir do segundo, é o anterior multiplicado por uma constante *q*, denominada **razão** da PG.

Assim, para apresentarmos uma PG, devemos informar um de seus termos, representado por a_n, e qual é a razão *q*. O índice indica a posição do termo na sequência.

Observe esta sucessão:

$$(3;\ 6;\ 12;\ 24;\ 48)$$

O primeiro termo (a_1) é o 3, e o segundo termo (a_2) é o 6. Para se obter o termo a_2, multiplica-se a_1 por 2; portanto, 2 é a razão dessa PG.

Todos os demais termos são assim obtidos:

$a_1 = 3$

$a_2 = 3 \cdot 2 = 6$

$a_3 = 6 \cdot 2 = 12$ ou $a_3 = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$

$a_4 = 12 \cdot 2 = 24$ ou $a_4 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$

Termo geral da PG

Vamos determinar uma expressão geral que representa todos os termos de uma PG.

Primeiro termo: a_1

Razão: *q*

$a_2 = a_1 \cdot q$

$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q \therefore a_3 = a_1 \cdot q^2$

$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q \therefore a_4 = a_1 \cdot q^3$

$\vdots$

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

Classificação da PG

Classificamos as progressões geométricas de acordo com o valor do primeiro termo e da razão.

PG crescente. O valor de cada termo, a partir do segundo, é maior que o anterior:

$$a_1 > 0 \text{ e } q > 1 \text{ ou } a_1 < 0 \text{ e } 0 < q < 1$$

$$(2;\ 6;\ 18;\ 54;\ ...) \quad a_1 = 2 \text{ e } q = 3$$

$$\left(-4;\ -2;\ -1;\ \frac{-1}{2};\ ...\right) \quad a_1 = -4 \text{ e } q = \frac{1}{2}$$

PG decrescente. O valor de cada termo, a partir do segundo, é menor que o anterior:

$$a_1 > 0 \text{ e } 0 < q < 1 \text{ ou } a_1 < 0 \text{ e } q > 1$$

$$\left(9;\ 3;\ 1;\ \frac{1}{3};\ ...\right) \quad a_1 = 9 \text{ e } q = \frac{1}{3}$$

$$(-5;\ -10;\ -20;\ -40;\ ...) \quad a_1 = -5 \text{ e } q = 2$$

PG oscilante ou alternante. Cada termo, a partir do segundo, apresenta sinal contrário ao do anterior:

$$q < 0$$

$$(2;\ -4;\ 8;\ -16;\ 32;\ ...) \quad a_1 = 2 \text{ e } q = -2$$

PG constante. O valor de cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior:

$$q = 1$$

$$(5;\ 5;\ 5;\ 5;\ 5;\ ...) \quad a_1 = 5 \text{ e } q = 1$$

Termos equidistantes dos extremos numa PG de *n* termos

Veja o que acontece com os termos equidistantes dos extremos de uma PG:

$$(1;\ 3;\ 9;\ 27;\ 81;\ 243)$$

$9 \cdot 27 = 243$

$3 \cdot 81 = 243$

$1 \cdot 243 = 243$

- Numa PG de *n* termos, a_p e a_q são termos equidistantes dos extremos se, e somente se:

$$p + q = 1 + n$$

- Numa PG de *n* termos, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto desses extremos.

Propriedade

Para **três termos consecutivos** de uma PG, o termo médio é igual à média geométrica dos outros dois termos.

$$\text{PG } (a; b; c) \Rightarrow \boxed{b^2 = a \cdot c}$$

Soma dos *n* primeiros termos de uma PG

Indicando por S_n a soma dos *n* primeiros termos de uma PG (com $q \neq 1$), temos:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{(q - 1)}}$$

Se $q = 1$, temos:

$$\boxed{S_n = n \cdot a_1}$$

PG convergente

Vamos considerar a PG cujo primeiro termo é $a_1 = 4$ e a razão $q = \frac{1}{2}$.

$$\left(4; 2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \frac{1}{64}; ...\right)$$

Dizemos que PG **convergente** é aquela cujo termo a_n vai se aproximando do valor zero quanto maior é o valor de *n*.

A condição para uma PG ser convergente é $|q| < 1$, ou seja, $-1 < q < 1$.

Limite da soma

Quando trabalhamos com PG convergente, não calculamos a soma de seus termos, mas sim o limite da soma, que será indicado por S_n, para *n* tendendo ao infinito.

Temos, então:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{(q - 1)} \therefore \boxed{S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}}$$

No nosso exemplo, temos:

$$S_\infty = \left(4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + ...\right)$$

$$S_\infty = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} \Rightarrow S_\infty = 8$$

Representações especiais de uma PG

Existem situações nas quais é conveniente usarmos representações especiais para a PG.

PG de três termos

Representamos por *x* o termo central e dividimos ou multiplicamos pela razão para obtermos, respectivamente, o primeiro e o terceiro termos.

$$\left(\frac{x}{q}; x; x \cdot q\right)$$

PG de quatro termos

$$\left(\frac{x}{q^3}; \frac{x}{q}; x \cdot q; x \cdot q^3\right)$$

Produto dos *n* primeiros termos de uma PG

Seja a sequência $a_1; a_2; a_3; a_4; ...; a_n$ uma PG de razão *q*. O produto P_n dos *n* primeiros termos dessa sequência é dado por:

$$\boxed{P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

Atividades

1 (UF-RS) Em uma progressão geométrica, de razão positiva, o segundo termo é 8 e o oitavo é $\frac{1}{8}$. A soma dos dois primeiros termos é:

a) 24
b) 16
c) 12
d) 8
e) 4

$a_2 = a_1 \cdot q \Rightarrow a_1 \cdot q = 8$ (I)

$a_8 = a_1 \cdot q^7 \Rightarrow a_1 \cdot q \cdot q^6 = \frac{1}{8}$ (II)

De (I) e (II): $8 \cdot q^6 = \frac{1}{8} \Rightarrow q^6 = \frac{1}{64} \Rightarrow q^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

Em (I): $a_1 \cdot \frac{1}{2} = 8 \Rightarrow a_1 = 16$

Assim: $a_1 + a_2 = 16 + 8 \therefore a_1 + a_2 = 24$

Alternativa *a*

2 (Universitas-MG) O terceiro termo de uma sequência geométrica é 10, e o sexto termo é 80. Então, a razão é:

a) 1 b) -1 c) 3 d) 2

$a_6 = 80 \Rightarrow a_1 . q^5 = 80$ (I)

$a_3 = 10 \Rightarrow a_1 . q^2 = 10$ (II)

Fazendo (I) : (II), temos:

$q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$

Alternativa *d*

3 (U. E. Londrina-PR) A sequência $\left(2x + 5; x + 1; \frac{x}{2}; ...\right)$, com $x \in \mathbb{R}$, é uma progressão geométrica de termos positivos. O décimo terceiro termo dessa sequência é:

a) 2 c) 3^{-20} e) 3^{-40}
b) 3^{-10} d) 3^{-30}

$q = \frac{x+1}{2x+5} = \frac{\frac{x}{2}}{x+1} \Rightarrow \cancel{x^2} + 2x + 1 = \cancel{x^2} + \frac{5x}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x + 2 = 5x \Rightarrow x = 2$

$\left.\begin{array}{l} a_3 = \frac{x}{2} = 1 \\ a_2 = x + 1 = 3 \end{array}\right\} \therefore q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{3}$

Assim:

$a_{13} = a_3 \cdot q^{10} \Rightarrow a_{13} = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \therefore a_{13} = 3^{-10}$

Alternativa *b*

4 (Fuvest-SP) Em uma progressão geométrica de quatro termos positivos, a soma dos dois primeiros vale 1 e a soma dos dois últimos vale 9. Calcule a razão dessa progressão.

$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_3 + a_4 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 \cdot q = 1 \\ a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 = 9 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 \cdot (1 + q) = 1 & \text{(I)} \\ a_1 \cdot q^2 \cdot (1 + q) = 9 & \text{(II)} \end{cases}$

De (I e II), vem:

$q^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} q = -3 \text{ (Não convém.)} \\ \text{ou} \\ q = 3 \end{cases}$

A razão dessa PG vale 3.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (Faap-SP) Dados os números 1, 3 e 4, nessa ordem, determinar o número que se deve somar a cada um deles para que se tenha um progressão geométrica.

2 (FGV-SP) Os números *x*, *y*, *z* formam, nessa ordem, uma PA de soma 15. Os números *x*, y + 1 e z + 5 formam, nessa ordem, uma PG de soma 21. Sendo $0 \leqslant x \leqslant 10$, o valor de 3z é:

a) 36
b) 9
c) -6
d) 48
e) 21

3 (FEI-SP) Dada a progressão geométrica 1, 3, 9, 27, ... se a sua soma é 3 280, então ela apresenta:

a) 9 termos.
b) 8 termos.
c) 7 termos.
d) 6 termos.
e) 5 termos.

4 O valor de *x* na equação $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + ... = 10$ é:

a) 5
b) 10
c) 20
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{1}{4}$

5 (PUC-SP) Em uma progressão geométrica de termos positivos, o primeiro termo é igual à razão e o segundo termo é 3. O oitavo termo dessa progressão é igual a:

a) 81
b) 3^7
c) $7\sqrt{3}$
d) $\sqrt{273}$
e) 333

6 (Fuvest-SP) Seja S_n a soma dos *n* primeiros termos da sequência infinita $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, ..., 10^{-n}, ...$

a) Calcule S_5.
b) Qual o limite de S_n quando *n* tende ao infinito?

Matrizes e determinantes

1. Definição

Chamamos matriz do tipo $m \times n$ (lê-se: *m* por *n*) toda tabela numérica na qual os elementos (os números) estão distribuídos em *m* linhas e *n* colunas.

2. Representações

Representa-se uma matriz por uma letra latina maiúscula (A, B, C, ...) acompanhada de dois índices numéricos (o primeiro índice indica o número de linhas da matriz, e o segundo, o número de colunas).

$$A_{m \times n}$$

Número de linhas da matriz ← m; n → Número de colunas da matriz

Os elementos da matriz (os números) são colocados entre parênteses, colchetes ou dois pares de barras verticais.

Exemplo

$$A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 0 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

é a matriz A do tipo 3 por 2.

3. Elemento genérico

Costuma-se representar, genericamente, um elemento de uma matriz pela mesma letra com que se representou a matriz, porém minúscula, acompanhada de dois índices numéricos (o primeiro índice indica em qual linha está o elemento, e o segundo, em qual coluna).

$$a_{i\,j}$$

Número da linha do elemento ← i; j → Número da coluna do elemento

Exemplo

Sendo a matriz:

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & -9 & -1 \\ 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

seus elementos são:

$a_{11} = 3$ $\quad a_{21} = 6$

$a_{12} = -9$ $\quad a_{22} = -5$

$a_{13} = -1$ $\quad a_{23} = 0$

Matriz genérica

Em geral, uma matriz possui *m* linhas e *n* colunas e é formada por elementos genéricos.

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou: $A = (a_{ij})_{m \times n}$, em que $1 < i < m$ e $1 < j < n$.

4. Tipos de matriz

Acompanhe, a seguir, a classificação de algumas matrizes.

Matriz quadrada

Uma matriz A é chamada **quadrada** de ordem *n* (representa-se: A_n) quando possui *n* linhas e *n* colunas, isto é, o número de linhas é igual ao número de colunas.

$$A_3 = A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 9 & -2 \\ -6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz quadrada de ordem 3.

Diagonal principal e diagonal secundária

Na resolução de exercícios, é importante identificarmos na matriz quadrada estas diagonais.

Diagonal principal

Formada pelos elementos a_{ij}, em que i = j, ou seja, os índices são idênticos.

Diagonal secundária

Formada pelos elementos a_{ij}, em que $i + j = n + 1$, ou seja, a soma dos índices é igual à ordem da matriz mais 1 (uma) unidade.

Observe:

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Diagonal secundária

Diagonal principal

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & -3 & 4 \\ 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A diagonal principal é formada pelos elementos 2, −3 e 3; a diagonal secundária é formada pelos elementos 7, −3 e 8.

Matriz identidade

Uma matriz quadrada é chamada **matriz identidade** ou **unidade** quando:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Em outras palavras, todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e todos os outros elementos (se existirem) são iguais a zero.

Exemplo

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ é a matriz identidade de ordem 3.}$$

Matrizes transpostas

Duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ji})_{n \times m}$, são transpostas se, e somente se, $a_{ij} = b_{ji}$ para quaisquer *i* (com $1 < i < m$) e *j* (com $1 < j < n$).

A matriz $B_{n \times m}$ é representada por A^t.

Exemplo

$$A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } B_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$\therefore B_{2 \times 3} = A^t_{3 \times 2}$

Ou seja, B é a transposta de A.

5. Igualdade de matrizes

As matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, do mesmo tipo, são iguais se, e somente se, $a_{ij} = b_{ij}$ para quaisquer *i* (com $1 < i < m$) e *j* (com $1 < j < n$).

Em outras palavras, duas matrizes são iguais quando todos os seus elementos correspondentes são iguais.

Exemplo

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} a & b & -7 \\ 5 & 3 & c \end{bmatrix} \text{ e } B_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & -7 \\ 5 & d & -1 \end{bmatrix}$$

Para termos a igualdade, é necessário:

$$a = 9;\ b = 12;\ c = -1;\ d = 3$$

6. Operações com matrizes

As matrizes podem ser “operadas” em determinadas condições. Veremos que uma propriedade da multiplicação que conhecemos não é válida para o cálculo do produto de matrizes. Vamos, então, especificar essas operações.

Adição e subtração

Sendo $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ duas matrizes **do mesmo tipo**, a matriz soma de A e B (representa-se: A + B) é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, e a matriz diferença entre A e B (representa-se: A − B), nessa ordem, é a matriz $D = (d_{ij})_{m \times n}$ tal que $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, para quaisquer *i* (com $1 \leqslant i \leqslant m$) e *j* (com $1 \leqslant j \leqslant n$).

Em outras palavras, para se adicionarem duas matrizes de mesmo tipo, basta adicionar os elementos correspondentes e, para se subtraírem duas matrizes de mesmo tipo, basta subtrair os elementos correspondentes.

Produto de um número real por matriz

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A = (a_{ij})_{m \times n}$, o produto de α por A (indica-se: $\alpha \cdot A_{m \times n}$) é a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$, tal que $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$. Ou seja, para se multiplicar uma matriz por um número real α, basta multiplicar todos os elementos da matriz por α.

Exemplo

$$\text{Se } A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \text{ então:}$$

$$5 \cdot A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 5 \cdot (-4) & 5 \cdot 8 & 5 \cdot 5 \\ 5 \cdot 3 & 5 \cdot 0 & 5 \cdot (-2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -20 & 40 & 25 \\ 15 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

Propriedades

Se A e B são matrizes do mesmo tipo e α e β são números reais, então são válidas as propriedades:

P_1 Associativa: $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$

P_2 Comutativa: $\alpha \cdot A = A \cdot \alpha$

P_3 Distributiva: $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$ ou $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

P_4 Elemento neutro: $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$

Multiplicação de matrizes

Sendo $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$, o produto de A por B será a matriz $C = (c_{ij})_{m \times p}$ tal que:

$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$

Para existir o produto de duas matrizes, é necessário, e suficiente, que o número de colunas da primeira matriz fator seja igual ao número de linhas da segunda matriz fator. A matriz produto terá o número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da segunda.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \cdot 7 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 & 5 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 0 \\ 0 \cdot 7 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) - 1 \cdot 0 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 32 & 11 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

7. Definição de determinante

A toda matriz A, quadrada de ordem *n*, associa-se um único número chamado **determinante** da matriz A (indica-se: det A).

Representação

Representa-se o determinante colocando-se os elementos da matriz entre um par de barras verticais.

8. Cálculo do determinante

Dada uma matriz, precisamos conhecer sua ordem para calcular seu determinante.

Matriz unitária

O determinante de uma matriz A, unitária, é o próprio elemento da matriz A, isto é, sendo $A = [a_{11}]$, então $\det A = |a_{11}| = a_{11}$.

Matriz de ordem 2

- Multiplicam-se os elementos da diagonal principal.
- Multiplicam-se os elementos da diagonal secundária e troca-se o sinal do produto.
- Somam-se os resultados assim obtidos.

Exemplo

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 8 = 23$$

$-[(-2) \cdot 4] = 8$ $\quad$ $3 \cdot 5 = 15$

Matriz de ordem 3

Para esse cálculo, usaremos um algoritmo elaborado pelo matemático francês Pierre Frederic Sarrus (1798-1861). Essa resolução é chamada regra de Sarrus (lê-se: "Sarrís") e é feita da seguinte maneira:

- Repetem-se as duas primeiras colunas à direita da matriz.
- Multiplicam-se os elementos da diagonal principal e de suas paralelas que cortam três elementos.
- Multiplicam-se os elementos da diagonal secundária e de suas paralelas que cortam três elementos e trocam-se os sinais dos produtos.
- Somam-se os resultados assim obtidos.

Exemplo

Dada a matriz:

$$A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

temos:

$$\det A = \left|\begin{matrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{matrix} \Rightarrow$$

$-[(-1) \cdot 2 \cdot 1] = 2$

$-[(-2) \cdot 4 \cdot (-3)] = -24$

$-(3 \cdot 0 \cdot 3) = 0$

$-1 \cdot 0 \cdot (-3) = 0$

$3 \cdot 4 \cdot 1 = 12$

$-2 \cdot 2 \cdot 3 = -12$

$\Rightarrow \det A = 2 - 24 + 0 + 0 + 12 - 12 = -22$

Matriz de qualquer ordem $n > 2$

Para realizarmos esse cálculo, primeiramente vamos definir cofator.

Cofator de um elemento a_{ij} (A_{ij})

A cada elemento a_{ij} de uma matriz A, quadrada de ordem $n \geqslant 2$, é associado um número chamado **cofator** do elemento a_{ij}, representado por A_{ij} e definido como o produto do número $(-1)^{i+j}$ pelo determinante da matriz B, que se obtém quando se eliminam a linha ***i*** e a coluna ***j*** da matriz A, ou seja:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det B$$

Exemplo

Dada a matriz:

$$A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

temos:

O cofator do elemento a_{11} é:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 26 = 26$$

O cofator do elemento a_{23} é:

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 0 = 0$$

O cofator do elemento a_{32} é:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -1 \cdot 8 = -8$$

9. Teorema de Laplace

O matemático francês Pierre Simon (1749-1827), marquês de Laplace, enunciou o seguinte:

O determinante de uma matriz A, quadrada de ordem $n \geqslant 2$, é a soma dos produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) pelos seus respectivos cofatores.

Exemplo

Consideremos a matriz:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos aplicar o teorema de Laplace na segunda coluna.

$$\det A = 3 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} + (-2) \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{42} \quad \text{(I)}$$

Note que não é necessário calcular A_{22} e A_{42}, pois serão multiplicados por zero; assim:

O cofator do elemento a_{12} é:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-18) = 18$$

O cofator do elemento a_{32} é:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) = 1$$

Substituindo esses valores em (I), temos:

$\det A = 3 \cdot 18 + (-2) \cdot 1$

$\therefore \det A = 52$

É conveniente aplicar o teorema de Laplace na fila que tiver o maior número de zeros.

Atividades

1 Considere a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, com

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i < j \\ i - j, \text{ se } i \geqslant j \end{cases}, \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Determine a matriz X, de ordem 3×2, tal que $A^t + X = 2B$.

$$A = \begin{pmatrix} \underbrace{1-1}_{a_{11}} & \underbrace{1+2}_{a_{12}} & \underbrace{1+3}_{a_{13}} \\ \underbrace{2-1}_{a_{21}} & \underbrace{2-2}_{a_{22}} & \underbrace{2+3}_{a_{23}} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$A^t + X = 2B \Rightarrow X = 2B - A^t$

$$X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2 (UF-CE) O valor de *a* para que a igualdade matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

seja verdadeira é:

a) 1
b) 2
c) 0
d) −2
e) −1

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2-1 & -2+a \\ 1-1 & -1+a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2+a \\ 0 & -1+a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(I) $a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$

(II) $a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$

Alternativa *b*

3 Calcule os determinantes das matrizes nos casos a seguir:

a) $A = (3)$

$A = (3) \Rightarrow \det A = 3$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-2) \cdot 2$

$\therefore \det B = 8$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \det C = (1 \cdot 2 \cdot 4) + (2 \cdot 2 \cdot 1) +$

$+ (1 \cdot 0 \cdot 6) - (1 \cdot 2 \cdot 2) - (2 \cdot 0 \cdot 4) - (1 \cdot 1 \cdot 6) \Rightarrow$

$\Rightarrow \det C = 8 + 4 + 0 - 4 - 0 - 6$

$\therefore \det C = 2$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

O determinante dessa matriz não é definido, pois a matriz não é quadrada.

4 Calcule o valor do determinante da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando Laplace na primeira coluna, temos:

$$|A| = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 + 2 + 6 - 12 - 1 - 3 = -5$$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (Cefet-SP) Considere $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ a matriz dos elementos:

$$a_{ij} = \begin{cases} \cos(j \cdot \pi), \text{ se } i = j \\ \text{sen}\left(\dfrac{i \cdot \pi}{2}\right), \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Dessa forma, a matriz A^2 será igual a:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2 (U. E. Londrina-PR) Sejam as matrizes A e B, respectivamente, 3×4 e $p \times q$. Se a matriz $A \times B$ é 3×5, então é verdade que:

a) $p = 5$ e $q = 5$

b) $p = 4$ e $q = 5$

c) $p = 3$ e $q = 5$

d) $p = 3$ e $q = 4$

e) $p = 3$ e $q = 3$

3 (U. F. Viçosa-MG) Dada a matriz mostrada adiante

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

determine:

a) A^2

b) $A \cdot A^t$

c) $2A + 3A^t$

4 (UF-BA) O determinante da matriz $\begin{pmatrix} y & 2 & 1 \\ 0 & 2y & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ é igual à maior raiz da equação $x^2 + 20x + 96 = 0$. O maior valor de y é:

a) 0

b) $-\dfrac{5}{4}$

c) $\dfrac{5}{4}$

d) $-\dfrac{4}{5}$

e) $\dfrac{4}{5}$

5 (U. F. Santa Maria-RS) A equação

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 2 & x+1 & m \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

na variável x tem duas soluções reais:

a) somente para $m \in \mathbb{Z}$.

b) para todo $m \in \mathbb{R}$.

c) somente para $m = 0$.

d) somente para $m \neq \dfrac{1}{3}$.

6 (U. F. São Carlos-SP) Sejam a matriz A, apresentada a seguir, e a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \det A$.

$$A = \begin{pmatrix} x & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 3^x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k & x \end{pmatrix}$$

Se $x = 2$ é uma das raízes de $f(x)$, então k vale:

a) -1

b) -2

c) 1

d) 2

e) 8

Sistemas lineares

1. Sistema linear

Sistema linear é um conjunto de equações lineares consideradas simultaneamente.

Exemplos

$$S_1 \begin{cases} 3x + 2y = -5 \\ x - 2y = -7 \end{cases}$$

$$S_2 \begin{cases} 4x - 2y = 12 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

$$S_3 \begin{cases} 3x - y = 6 \\ 3x - y = -4 \end{cases}$$

Solução de um sistema linear

A solução de um sistema linear é toda *n*-upla ordenada que satisfaz, simultaneamente, todas as equações do sistema, sendo *n* o número de incógnitas do sistema.

Exemplo

No sistema $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 8 \end{cases}$, o par ordenado $(6, -2)$ satisfaz ambas as equações; logo, ele é solução do sistema. O conjunto formado pelas soluções do sistema é chamado **conjunto solução**.

No exemplo dado, temos: $S = \{(6, -2)\}$

Classificação de um sistema linear

Quanto ao número de soluções, um sistema linear pode ser classificado em possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível.

Sistema possível e determinado (SPD)

Um sistema linear é chamado **sistema possível e determinado** quando possui **uma única** solução.

Sistema possível e indeterminado (SPI)

Um sistema linear é chamado **sistema possível e indeterminado** quando possui **mais de uma** solução.

No campo dos números complexos, é possível provar que, se o sistema possui mais de uma solução, ele possui infinitas soluções.

Sistema impossível (SI)

Um sistema linear é chamado **sistema impossível** quando possui **conjunto solução vazio**, isto é, não existe *n*-upla ordenada que satisfaça as suas equações simultaneamente.

Esquematizando

$$\text{Sistema} \begin{cases} \text{Possível} \begin{cases} \text{Determinado (SPD)} \\ \text{Indeterminado (SPI)} \end{cases} \\ \\ \text{Impossível (SI)} \end{cases}$$

Sistema escalonado

Um sistema linear é chamado **escalonado** quando, admitindo-se uma mesma ordem para as incógnitas em todas as equações, o número de coeficientes nulos, que antecede o primeiro coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação.

Exemplo

$$\begin{cases} -2r + 4s + t - 2u = -5 \\ \phantom{-2r + {}} s + 2t + u = 0 \\ \phantom{-2r + 4s + t {}} -2u = 6 \end{cases}$$

2. Escalonamento de um sistema linear

Escalonar um sistema S significa transformá-lo num sistema equivalente S′ na forma escalonada.

Propriedades

A solução de um sistema linear não se altera se:

I. multiplicarmos uma equação do sistema por uma constante real diferente de zero;
II. permutarmos entre si as equações do sistema;
III. substituirmos uma equação pela sua soma com outra equação do sistema multiplicada por uma constante real não nula.

Exemplo

Seja o sistema não escalonado:

$$\begin{cases} x - y - z = -3 \\ 3x - 4y - z = 1 \\ -2x + y + 3z = 12 \end{cases}$$

Usando a propriedade III, multiplicamos a primeira equação por -3 e adicionamos o resultado à segunda:

$$\begin{cases} x - y - z = -3 \\ 3x - 4y - z = 1 \\ -2x + y + 3z = 12 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y - z = -3 \\ 0x - y + 2z = 10 \\ -2x + y + 3z = 12 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por 2 e adicionamos o resultado à terceira:

$$\begin{cases} x - y - z = -3 \\ 0x - y + 2z = 10 \\ -2x + y + 3z = 12 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y - z = -3 \\ 0x - y + 2z = 10 \\ 0x - y + z = 6 \end{cases}$$

Multiplicamos a segunda equação por -1 e adicionamos o resultado à terceira:

$$\begin{cases} x - y - z = -3 \\ 0x - y + 2z = 10 \\ 0x - y + z = 6 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y - z = -3 \\ 0x - y + 2z = 10 \\ 0x + 0y - z = -4 \end{cases}$$

Temos um sistema escalonado:

$$\begin{cases} x - y - z = -3 \\ \quad -y + 2z = 10 \\ \qquad\quad -z = -4 \end{cases}$$

Se durante o escalonamento ocorrer:

1) $\mathbf{0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \dots + 0x_n = 0}$, retira-se essa equação do sistema e verifica-se se o sistema remanescente está escalonado. Se não estiver, continua-se o escalonamento.
2) $\mathbf{0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \dots + 0x_n = k}$ **(com $k \neq 0$)**, o sistema será **impossível**.

3. Resolução de sistema linear escalonado

Existem somente dois tipos de sistemas lineares escalonados: aqueles em que o número de equações **é igual** ao número de incógnitas e aqueles em que o número de equações **é menor** que o número de incógnitas.

Sistema escalonado do primeiro tipo

O número de equações nesse sistema é **igual** ao número de incógnitas.

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ \quad\;\; y - z = -5 \\ \qquad\;\; 4z = 20 \end{cases}$$

Resolve-se um sistema escalonado do primeiro tipo "de baixo para cima", isto é, a última equação fornece o valor de uma das incógnitas.

$$4z = 20 \Rightarrow z = 5$$

Substitui-se o valor de *z* na segunda equação:

$$y - z = -5 \Rightarrow y - 5 = -5 \Rightarrow y = 0$$

Substituem-se os valores de *z* e de *y* na primeira equação:

$$2x + 3y + z = 1 \Rightarrow 2x + 3 \cdot 0 + 5 = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$$

Logo: $S = \{(-2, 0, 5)\}$

Todo sistema escalonado do primeiro tipo admite **uma única** solução, ou seja, é **possível e determinado** (SPD).

Sistema escalonado do segundo tipo

Esse tipo de sistema apresenta número de equações **menor** que o número de incógnitas.

$$\begin{cases} x - 3y - z = 12 \\ \quad\;\; y + 3z = -4 \end{cases}$$

Todo sistema escalonado do segundo tipo tem uma incógnita (ou mais de uma) que não é o primeiro termo de nenhuma equação. Essa incógnita é chamada **variável livre**, e o sistema é resolvido em função dela.

No nosso exemplo, *z* é variável livre.

$$y + 3z = -4$$
$$\therefore y = -4 - 3z$$

Substitui-se o valor de *y* na primeira equação:

$$x - 3 \cdot (-4 - 3z) - z = 12 \Rightarrow x + 12 + 9z - z = 12$$
$$\therefore x = -8z$$

Logo:

$S = \{(-8z, -4 - 3z, z)$, em que $z \in \mathbb{R}\}$

Todo sistema escalonado do segundo tipo admite **mais de uma** solução, ou seja, é **possível e indeterminado** (SPI).

Podemos, por exemplo, atribuir a z o valor 1:

$z = 1$

$x = -8z = -8 \cdot 1 \therefore x = -8$

$y = -4 - 3 \cdot z = -4 - 3 \cdot 1$

$\therefore y = -7$

Então, uma possível solução é:

$S = \{(-8, -7, 1)\}$

4. Discussão de um sistema linear

Discutir um sistema linear, em função de um parâmetro real, significa encontrar os valores do parâmetro que tornam o sistema SPD, os que tornam o sistema SPI e os que tornam o sistema SI.

Sistema linear quadrado

Para discutirmos um sistema linear quadrado (isto é, aquele em que o número de equações é igual ao número de incógnitas), devemos:

I. inicialmente, impor que o determinante geral (D), ou seja, formado pelos coeficientes, não seja zero e encontrar o(s) valor(es) que o(s) parâmetro(s) não pode(m) assumir para que ocorra um sistema possível e determinado;

II. substituir o parâmetro no sistema por aquele(s) valor(es) que anula(m) o determinante geral (D) e verificar, por meio de escalonamento, se acontece um sistema possível e indeterminado ou um sistema impossível.

Exercício resolvido

Discutir, em função de m: $\begin{cases} x + my = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$

Resolução

m é nosso parâmetro. De acordo com o item I, citado, devemos impor $D \neq 0$ para que ocorra SPD; logo:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \therefore 1 - m \neq 0$$

$\therefore m \neq 1 \Rightarrow \text{SPD}$

De acordo com o item II, admitimos $m = 1$ e verificamos a ocorrência de SPI e/ou SI.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 2 \\ 0x + 0y = 5 \end{cases} \therefore \text{SI}$$

Resumo: Se $m \neq 1$, então: SPD

Se $m = 1$, então: SI

Sistema não quadrado

Um sistema não quadrado não possui determinante geral; então, trabalha-se diretamente com o escalonamento. Acompanhe o exercício a seguir.

Exercício resolvido

Discutir o sistema linear em função de m:

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + y = 2 \\ x - y = m \end{cases}$$

Resolução

O sistema não é quadrado, então vamos escaloná-lo:

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + y = 2 \\ x - y = m \end{cases} \sim \begin{cases} x - y = m \\ x + y = 2 \\ mx + y = 1 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x - y = m \\ 2y = 2 - m \\ mx + y = 1 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x - y = m \\ 2y = 2 - m \\ (m + 1)y = 1 - m^2 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x - y = m \\ 2y = 2 - m \\ 0y = -\dfrac{m^2 - m}{2} \end{cases}$$

Temos:

Se $m = 0$, $y = 1$ e $x = 1$ $\therefore$ SPD

Se $m = -1$, $y = \dfrac{3}{2}$ e $x = \dfrac{1}{2}$ $\therefore$ SPD

Se $m \neq 0$ e $m \neq -1$ $\therefore$ SI

Resumo:

SPD
$m = 0$ ou $m = -1$

SI
$m \neq 0$ e $m \neq -1$

5. Sistema homogêneo

Chama-se **sistema homogêneo** qualquer sistema linear em que todos os termos independentes são nulos.

Exemplo

$$S \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ -3x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

1. O sistema homogêneo nunca é impossível, pois sempre admite a solução (0, 0, ..., 0), chamada **solução trivial**, solução imprópria ou, ainda, solução nula.
2. Se, num sistema homogêneo quadrado, o determinante geral for diferente de zero, o sistema será possível e determinado (SPD); se o determinante geral for igual a zero, o sistema será possível e indeterminado (SPI).

Atividades

1 (Fuvest-SP) O sistema $\begin{cases} x + (c + 1)y = 0 \\ cx + y = -1 \end{cases}$, com $c \neq 0$, admite uma solução (x, y), com x = 1. Então, o valor de *c* é:

a) -3 c) -1 e) 2
b) -2 d) 1

Se x = 1, então:

$\begin{cases} 1 + (c + 1) \cdot y = 0 \\ c \cdot 1 + y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + c \cdot y + y = 0 & \text{(I)} \\ y = -1 - c & \text{(II)} \end{cases}$

De (II) e (I), vem:

$1 + c \cdot (-1 - c) + (-1 - c) = 0 \Rightarrow 1 - c - c^2 - 1 - c = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c^2 + 2c = 0 \Rightarrow c = 0$ (Não convém.) ou $c = -2$

Alternativa *b*

2 (PUC-SP) Certo dia, em uma mesma casa de câmbio, Sassa trocou 40 dólares e 20 euros por R$ 225,00, e Lilli trocou 50 dólares e 40 euros por R$ 336,00. Nesse dia, 1 euro estava cotado em:

a) R$ 3,80 c) R$ 3,70 e) R$ 3,65
b) R$ 3,75 d) R$ 3,68

$\begin{cases} 40d + 20e = 225 & \times 5 \\ 50d + 40e = 336 & \times (-4) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 200d + 100e = 1\,125 & \text{(I)} \\ -200d - 160e = -1\,344 & \text{(II)} \end{cases}$

De (I) e (II), vem:

$-60e = -219 \Rightarrow e = \frac{-219}{-60}$

$\therefore e =$ R$ 3,65

Alternativa *e*

3 (Unifor-CE) O sistema $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 2y + z = k \\ x + y + kz = 2 \end{cases}$, nas variáveis *x*, *y*, *z*, admite uma única solução se, e somente se, *k* satisfizer a condição:

a) $k \neq -2$ ou $k \neq 2$
b) $k = 1$
c) $k \neq \frac{1}{2}$
d) $k \neq \frac{2}{3}$
e) $k \neq \frac{1}{3}$

$D \neq 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 4k + 1 + 1 - 2 - 2 - k \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3k - 2 \neq 0 \Rightarrow k \neq \frac{2}{3}$

Alternativa *d*

4 (UF-RS) O sistema de equações $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x + 3y - 3z = a \end{cases}$

tem solução se, e somente se, o valor de *a* é:

a) 6
c) 4
e) zero
b) 5
d) 2

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x + 3y - 3z = a \end{cases} \sim \begin{matrix} \\ -L_1 + L_2 \\ -L_1 + L_3 \end{matrix} \begin{cases} x + y - z = 3 & \text{(I)} \\ 0x - 2y + 2z = -2 & \text{(II)} \\ 0x + 2y - 2z = a - 3 & \text{(III)} \end{cases}$$

Somando (II) e (III), temos:

$0x + 0y + 0z = -2 + a - 3$

$\therefore -2 + a - 3 = 0 \Rightarrow a = 5$

Alternativa *b*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (U. F. Juiz de Fora-MG) Resolvendo o sistema de equações lineares apresentado a seguir, o valor de *y* é igual a:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 7 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

a) 1
c) 5
e) 4
b) 3
d) 2

2 (U. F. Juiz de Fora-MG) Dois garfos iguais, cinco colheres iguais e oito facas iguais "pesam" juntos 991 g. Um desses garfos, duas dessas colheres e três dessas facas "pesam" juntos 391 g. Portanto, um desses garfos, uma dessas colheres e uma dessas facas "pesam" juntos:

a) 117 g
d) 202 g
b) 155 g
e) 209 g
c) 182 g

3 (FGV-SP) Para que valores de *k* o sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x + ky = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ é indeterminado?

4 (UF-RS) O sistema linear $\begin{cases} x - y = 1 \\ 4x + my = 2 \end{cases}$ é possível e determinado se, e somente se:

a) $m = 2$
c) $m \neq -4$
e) $4m = 1$
b) $m = 4$
d) $m \neq 1$

5 (FGV-SP) Considere o sistema linear nas incógnitas *x* e *y*:

$$\begin{cases} mx - 2y = 3 \\ 4x + y = n \end{cases}$$

Determine para quais valores de *m* e *n* o sistema é:

a) possível e determinado;
b) possível e indeterminado;
c) impossível.

6 (PUC-MG) O sistema a seguir:

$$\begin{cases} x + my = 3 \\ 2x + 4y = 3m \end{cases}$$

é indeterminado.

O valor de $\dfrac{m^2}{2 + m}$ é:

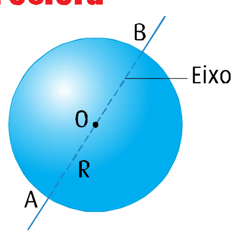
a) 0
c) 2
e) 4
b) 1
d) 3

Esfera

1. Definição

Chama-se **esfera** o sólido gerado pela revolução de um semicírculo de centro O em torno do seu diâmetro $\overline{AB}$.

Elementos da esfera



Na figura, o ponto O é o **centro** da esfera, $\overline{OA}$ é o **raio** (R), e a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é o **eixo de revolução** ou **eixo de rotação**.

Volume da esfera

O volume da esfera é dado pela fórmula:

$$V = \frac{4\pi \cdot R^3}{3}$$

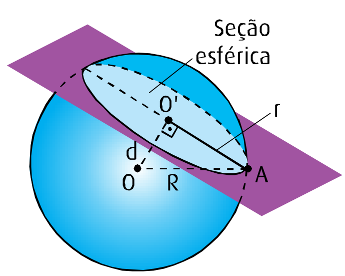
Área da superfície esférica

A área da superfície esférica é dada pela fórmula:

$$A = 4\pi \cdot R^2$$

Seção plana na esfera

Chama-se seção plana na esfera a interseção não vazia dessa esfera com um plano.



Na figura, o ponto O é o centro da esfera, o ponto O' é o centro da seção, que é um círculo, *r* é o raio da seção e *d* é a distância entre os centros e é tal que:

$$R^2 = d^2 + r^2$$

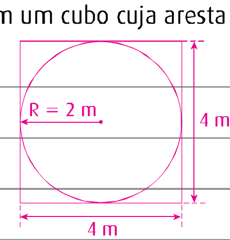
Círculo máximo

Círculo máximo é uma seção plana que passa pelo centro da esfera; portanto, o raio da seção é o próprio raio da esfera.

O círculo máximo divide a esfera em dois sólidos chamados **hemisférios**.

Atividades

1 Determine a área da superfície esférica e o volume da esfera inscrita em um cubo cuja aresta mede 4 m.



Área da esfera: $A = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \Rightarrow A = 4 \cdot \pi \cdot 2^2 \therefore A = 16\pi\ m^2$

Volume da esfera: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 \therefore V = \frac{32\pi}{3} m^3$

2 Um planeta possui uma área de superfície 81 vezes a área de seu satélite. Se ambos são esféricos, o diâmetro do satélite em relação ao diâmetro do planeta é de:

a) $\frac{1}{81}$ c) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{42}$

b) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{1}{18}$

S_I = área do planeta, cujo raio é *R*

S_{II} = área do satélite, cujo raio é *r*

$S_I = 81 \cdot S_{II} \Rightarrow 4\pi \cdot R^2 = 81 \cdot 4\pi \cdot r^2 \Rightarrow R^2 = 81 \cdot r^2 \Rightarrow R = 9 \cdot r$

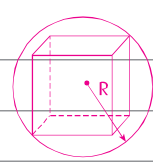
$\therefore r = \frac{R}{9}$

Alternativa *b*

3 (PUC-SP) A razão entre o volume de uma esfera de raio R e o cubo nela inscrito é dada por:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \pi$ c) $\sqrt{3} \cdot \pi$ e) $\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \pi$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \pi$ d) $\sqrt{2} \cdot \pi$



Volume da esfera: $V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$

O diâmetro da esfera é igual à diagonal do cubo. Sendo *a* a aresta do cubo, temos:

$a \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot R \Rightarrow a = \frac{2 \cdot R}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot R}{3}$

Volume do cubo:

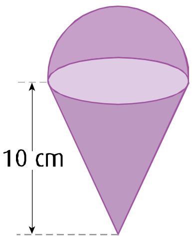
$V = a^3 \Rightarrow V_{cubo} = \left(\frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot R}{3}\right)^3 \Rightarrow V_{cubo} = \frac{8 \cdot \sqrt{3} \cdot R^3}{9}$

$\frac{V_{esfera}}{V_{cubo}} = \frac{\frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}}{\frac{8 \cdot \sqrt{3} \cdot R^3}{9}} \Rightarrow \frac{V_{esfera}}{V_{cubo}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3} \cdot \frac{9}{8 \cdot \sqrt{3} \cdot R^3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{V_{esfera}}{V_{cubo}} = \frac{3 \cdot \pi}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \therefore \frac{V_{esfera}}{V_{cubo}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \pi$

Alternativa *b*

4 (Univale-MG) O sólido da figura é formado por um hemisfério cujo raio mede 3 cm e um cone circular cuja altura é 10 cm.



Se o volume do sólido é 48π cm³, o volume, em cm³, do hemisfério é:

a) 36π d) 27π

b) 30π e) 32π

c) 18π

V_{cone} = volume do cone

V_{esfera} = volume da esfera

$V_{cone} + \frac{V_{esfera}}{2} = 48\pi \Rightarrow \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} + \frac{V_{esfera}}{2} = 48\pi$

$\frac{V_{esfera}}{2} = 48\pi - \frac{\pi \cdot 9 \cdot 10}{3} = 48\pi - 30\pi = 18\pi$

Outro modo: observe que o volume indicado (de todo o sólido) é irrelevante, pois precisamos apenas do raio para calcularmos o volume do hemisfério.

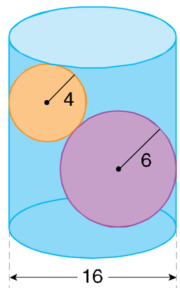
$V_{hem.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi \cdot R^3}{3} - \frac{2\pi \cdot 3^3}{3} = 18\pi \text{ cm}^3$

Alternativa *c*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 Calcular o volume do cilindro equilátero inscrito em uma esfera de raio R.

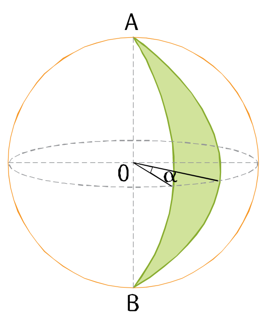
2 (U. F. Alfenas-MG) Em um recipiente que tem a forma de um cilindro circular reto, com diâmetro da base igual a 16 cm, são colocadas duas esferas de chumbo de raios iguais a 6 cm e 4 cm, conforme ilustra a figura abaixo.



A altura, em cm, necessária para que um líquido colocado no recipiente cubra totalmente as esferas é:

a) 15
b) 18
c) 16
d) 19
e) 17

3 Calcule o volume de uma cunha esférica e a área do fuso esférico da figura a seguir, sabendo que $\alpha = 20°$ e que a medida do segmento $\overline{OA}$ é igual a 12 cm.

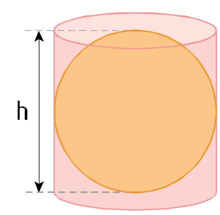


4 Uma esfera é secionada por um plano que dista 5 cm do seu centro. A área da seção assim obtida é de 144π cm². Determine o volume da esfera e a sua área.

5 (UF-RN) No final de um curso de geometria, o professor fez um experimento para saber a razão entre os diâmetros de duas bolinhas de gude de tamanhos diferentes. Primeiro, colocou a bola menor num recipiente cilíndrico graduado e observou que o nível da água se elevou 1,5 mm e, logo em seguida, colocando a bola maior, observou que o nível da água subiu 12,0 mm. O professor concluiu que a razão entre o diâmetro da bola maior e o diâmetro da bola menor é igual a:

a) 2
b) 3
c) 6
d) 8

6 (Unibratec-SP) Uma esfera está inscrita em um cilindro equilátero de diâmetro 8 cm, como mostra a figura.



Julgue (V ou F) as proposições a seguir:

I. A superfície da esfera é 64π cm².

II. O volume do cilindro é de 128π cm³.

III. A área lateral desse cilindro é 64π cm².

IV. Se secionarmos a esfera com um plano a uma distância de 2 cm do centro, teremos uma circunferência de raio $2\sqrt{3}$ cm.

V. Estando o cilindro da figura cheio de certo líquido e introduzindo nele essa mesma esfera, serão derramados 128π cm³ desse líquido.

Números complexos: forma algébrica e operações

1. Números complexos

Chama-se conjunto dos números complexos e indica-se por $\mathbb{C}$ o conjunto formado por elementos *z* na forma $z = a + bi$, em que *a* e *b* são números reais, isto é:

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi, \text{ com } a, b \subset \mathbb{R}\}$$

Na expressão:

- **a + bi** é a **forma algébrica** do número complexo *z*;
- ***a*** é chamado **parte real** do número complexo *z* e é indicado por $Re_{(z)}$;
- ***b*** é chamado **parte imaginária** do número complexo *z* e é indicado por $Im_{(z)}$;
- **i** é a **unidade imaginária** e é definida como:

$$i^2 = -1$$

Exemplos

a) $z_1 = 5 + 3i$
$Re_{(z)} = 5$ e $Im_{(z)} = 3$

b) $z_2 = 9 = 9 + 0i$
$Re_{(z)} = 9$ e $Im_{(z)} = 0$

Se $Im_{(z)} = 0$, então *z* é chamado número **real**.

c) $z_3 = 7i = 0 + 7i$
$Re_{(z)} = 0$ e $Im_{(z)} = 7$

Se $Re_{(z)} = 0$ e $Im_{(z)} \neq 0$, então *z* é chamado número **imaginário puro**.

Operações com números complexos na forma algébrica

Igualdade

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $\{a; b; c; d\} \subset \subset \mathbb{R}$, então $z_1 = z_2$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

Exemplo

Sejam $z_1 = a + 5i$ e $z_2 = -3 + bi$. Se $z_1 = z_2$, então: $a = -3$ e $b = 5$.

Adição e subtração

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $\{a; b; c; d\} \subset \subset \mathbb{R}$, então:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d) \cdot i$$

e

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d) \cdot i$$

Exemplo

Sejam $z_1 = -3 + 6i$ e $z_2 = 5 - 2i$, então:

$z_1 + z_2 = (-3 + 5) + [6 + (-2)]i = 2 + 4i$ e

$z_1 - z_2 = (-3 - 5) + [6 - (-2)]i = -8 + 8i$

Multiplicação

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $\{a; b; c; d\} \subset \subset \mathbb{R}$, então:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di)$$

Aplicando a propriedade distributiva, temos:

$$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + bci + bdi^2$$

Lembrando que $i^2 = -1$ e destacando a parte real e a parte imaginária, temos:

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Exemplo

Sendo $z_1 = -3 + 6i$ e $z_2 = 5 - 2i$, vamos determinar:

$$z_1 \cdot z_2 = (-3 + 6i) \cdot (5 - 2i)$$

Aplicando a propriedade distributiva, temos:

$$z_1 \cdot z_2 = -15 + 6i + 30i - 12i^2$$

Como $i^2 = -1$, temos:

$$z_1 \cdot z_2 = -15 + 36i + 12$$
$$\therefore z_1 \cdot z_2 = -3 + 36i$$

Complexos conjugados

Dois números complexos, z_1 e z_2, são chamados **conjugados** se, e somente se:

$$Re_{(z_1)} = Re_{(z_2)} \text{ e } Im_{(z_1)} = -Im_{(z_2)}$$

Em outras palavras, para determinarmos o conjugado de um número complexo, "trocamos" o sinal da parte imaginária.

$$z_1 = a + bi \text{ e } z_2 = a - bi$$

Temos: z_2 é o conjugado de z_1 ou z_1 é o conjugado de z_2.

Representa-se o conjugado de z por $\bar{z}$, então:

$$z_2 = \bar{z}_1 \text{ ou } z_1 = \bar{z}_2$$

Divisão

Sejam z_1, $z_2 \neq 0$ e z_3 três números complexos.

Teremos $\frac{z_1}{z_2} = z_3$ se, e somente se:

$$z_1 = z_2 \cdot z_3$$

O processo de divisão de dois números complexos pode ser agilizado por meio do seguinte procedimento:

Para dividirmos dois números complexos, multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador.

Exemplo

Se $z_1 = 4 - 2i$ e $z_2 = 5 + 3i$, então:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4 - 2i}{5 + 3i} \cdot \frac{5 - 3i}{5 - 3i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{20 - 12i - 10i + 6i^2}{(5)^2 - (3i)^2} =$$

$$= \frac{14 - 22i}{25 + 9} = \frac{14 - 22i}{34} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{7}{17} - \frac{11}{17} \cdot i$$

Propriedades dos complexos conjugados

Dados os complexos *z* e *w*, temos:

P_1 $\overline{(z + w)} = \bar{z} + \bar{w}$

P_2 $\overline{(z - w)} = \bar{z} - \bar{w}$

P_3 $\overline{(z \cdot w)} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

P_4 $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$, para $w \neq 0$

2. Potências de *i*

Se $n \in \mathbb{N}$, então i^n assume apenas quatro valores distintos:

$i^0 = \mathbf{1}$

$i^1 = \mathbf{i}$

$i^2 = \mathbf{-1}$

$i^3 = i^2 \cdot i = \mathbf{-i}$

Teorema

Se $\{n; r\} \subset \mathbb{N}$, então $i^n = i^r$, em que *r* é o resto da divisão de *n* por 4.

Demonstração

I. Para um expoente positivo:

Consideremos a divisão de *n* por 4:

$$\begin{array}{l|l} n & 4 \\ \hline r & q \end{array} \quad \therefore n = 4q + r$$

$$i^n = i^{4q + r} = i^{4q} \cdot i^r = [(i^2)^2]^q \cdot i^r =$$
$$= [(-1)^2]^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r$$
$$\therefore i^n = i^r$$

II. Para um expoente negativo:

$$i^{-n} = (i^n)^{-1} = (i^r)^{-1} = i^{-r} \Rightarrow \frac{1}{i^n} = \frac{1}{i^r}$$
$$\therefore i^n = i^r$$

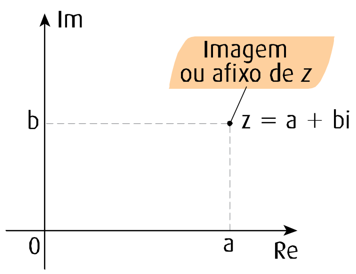
Duas consequências úteis na resolução de algumas potências de números complexos:

I) $(1 + i)^2 = 2i$

II) $(1 - i)^2 = -2i$

3. Plano de Argand-Gauss

A representação geométrica de um número complexo consiste em associar cada número complexo $z = a + bi$ ao ponto de coordenadas $(a; b)$ no plano cartesiano. Essa representação foi estudada independentemente pelos matemáticos Argand e Gauss (daí seu nome).

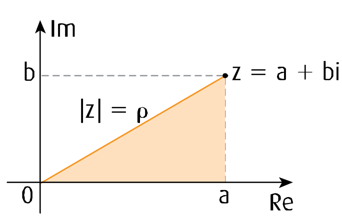


O ponto que representa o número z é chamado **imagem** ou **afixo** de z. O eixo vertical é chamado **eixo imaginário** (Im), e o eixo horizontal é o **eixo real** (Re).

Módulo de um número complexo

Chama-se **módulo** de um número complexo z a distância de sua imagem à origem do sistema cartesiano.

Representa-se o módulo de z por $|z|$ ou pela letra grega ρ (rô).



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo colorido, temos:

$$\rho^2 = a^2 + b^2 \therefore \boxed{\rho = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Propriedades do módulo de um número complexo

Se $\{z, w\} \subset \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, então:

P₁ $|z| \geqslant 0$

P₂ $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

P₃ $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$, para $w \neq 0$

P₄ $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

P₅ $|z^n| = |z|^n$, para $z \neq 0$

Atividades

1 (Fuvest-SP) Os números reais x e y, que satisfazem a equação $2x + (y - 3) \cdot i = 3y - 4 + x \cdot i$, são tais que:

a) $x + y = 7$
b) $x - y = 3$
c) $x \cdot y = 10$
d) $\dfrac{x}{y} = 3$
e) $x^y = 32$

$2x + (y - 3) \cdot i = 3y - 4 + x \cdot i \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 3y - 4 & \text{(I)} \\ y - 3 = x & \text{(II)} \end{cases}$

Da equação (II), temos: $y = x + 3$ (III)

Substituindo em (I): $2x = 3 \cdot (x + 3) - 4 \Rightarrow x = -5$

Substituindo em (III): $y = -5 + 3 \Rightarrow y = -2$

Assim: $x \cdot y = (-5) \cdot (-2) \Rightarrow x \cdot y = 10$

Alternativa *c*

2 (PUC-PR) Sabendo-se que o complexo $z = a + bi$ satisfaz a expressão $iz + 2z = 2i - 11$, então z^2 é igual a:

a) $16 - 9i$
b) $17 - 24i$
c) $25 - 24i$
d) $25 + 24i$
e) $7 - 24i$

$z = a + bi$

$iz + 2z = 2i - 11 \Rightarrow (a + bi)i + 2(a + bi) = 2i - 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow ai - b + 2a + 2bi = 2i - 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a + 2b)i + 2a - b = 2i - 11$

$\begin{cases} a + 2b = 2 \\ 2a - b = -11 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 2 \\ 4a - 2b = -22 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5a = -20 \Rightarrow a = -4$ e $b = 3$

$\therefore z = -4 + 3i$

$z^2 = (-4 + 3i)^2 = 16 - 24i - 9 = 7 - 24i$

Altenativa *e*

3 (Univale-MG) O módulo de $\dfrac{i + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - i}$ vale:

a) 0 c) $\sqrt{3}$ e) $\dfrac{1}{4}$

b) 1 d) $\dfrac{1}{2}$

$z = \dfrac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} = \dfrac{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} + i)}{(\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i)} =$

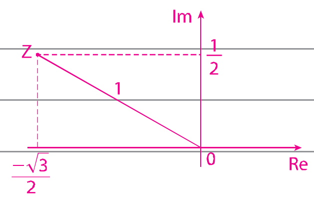
$= \dfrac{3 + 2\sqrt{3}i - 1}{3 + 1} = \dfrac{2 + 2\sqrt{3}i}{4} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$

$|z| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$

Alternativa *b*

4 Represente o complexo $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$ no plano cartesiano, destacando seu módulo.

$\rho = \sqrt{\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}} = 1$



EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 Determine o valor de *m*, com $m \in \mathbb{R}$, para que $z = \dfrac{1 + 3i}{3 + mi}$ seja um número:

a) real;

b) imaginário puro.

2 (Mackenzie-SP) Se *z* é um número complexo e $\bar{z}$ é seu conjugado, então o número de soluções da equação $\bar{z} = z^2$ é:

a) 0 c) 2 e) 4

b) 1 d) 3

3 (PUC-SP) São dados os seguintes complexos:

$$z_1 = a + 8 \cdot a \cdot i \text{ e } z_2 = -4 + b \cdot i$$

Determine os números reais *a* e *b* tais que $z_1 + z_2$ seja imaginário puro.

4 (Fuvest-SP) O valor de $\left(\dfrac{i^{246} + i^{121}}{i^{34}}\right)^2$ é:

a) 1 c) $-i$ e) 2

b) $2i$ d) $-2i$

5 (U. E. Londrina-PR) Seja o número complexo $z = \dfrac{2i^{342}}{(1 - i)^2}$. A imagem de *z* no plano complexo é um ponto que pertence ao:

a) eixo imaginário. d) terceiro quadrante.

b) eixo real. e) quarto quadrante.

c) segundo quadrante.

6 Calcule: $\left|\dfrac{(1 + i)^4}{(3 - 3i)^3}\right|$.

Polinômio: teoremas do resto e de D'Alembert

1. Polinômio

Polinômio, ou função polinomial, na variável complexa *x*, é toda e qualquer função que pode ser representada sob a forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$

em que *x* é a **variável complexa**, $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ são números complexos chamados **coeficientes**, a_0 é o **termo independente** e $\{1, 2, 3, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$.

Grau de um polinômio

Grau de um polinômio P(x) — indica-se por $\delta(P)$ e lê-se "del P" — é o maior expoente da variável cujo coeficiente é diferente de zero.

O coeficiente da variável que determina o grau é chamado **coeficiente dominante**.

Polinômio completo e polinômio incompleto

O polinômio de grau *n*:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$

é chamado **completo** quando $a_n \neq 0$; $a_{n-1} \neq 0$; $a_{n-2} \neq 0, \ldots, a_0 \neq 0$, e é chamado **incompleto** se $a_n \neq 0$ e pelo menos um dos coeficientes $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ for igual a zero.

Valor numérico de um polinômio

Valor numérico do polinômio P(x) para x = a é o número encontrado quando substituímos *x* por *a*, isto é, P(a).

Se P(a) = 0, então o número *a* é chamado **raiz** (ou **zero**) do polinômio.

Exemplo

No polinômio $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$, temos:

a) $P(5) = 5^3 - 3 \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 + 12 \Rightarrow P(5) = 42$

b) $P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 12 \Rightarrow P(1) = 6$

Note que **P(1) é a soma dos coeficientes de P(x)**.

c) $P(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 12 \Rightarrow P(0) = 12$

Note que **P(0) é o termo independente de P(x)**.

d) $P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(2) = 0$ (2 é raiz)

e) $P(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(-2) = 0$ (−2 é raiz)

Identidade de polinômios

Os polinômios

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$

e $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x^1 + b_0$

são chamados **idênticos** se, e somente se:

$$a_n = b_n;\ a_{n-1} = b_{n-1};\ a_{n-2} = b_{n-2};\ \ldots;\ a_0 = b_0$$

Representa-se essa identidade por $P(x) \equiv Q(x)$ e lê-se: "P de *x* é idêntico a Q de *x*".

Consequência

$P(x) \equiv Q(x)$ se, e somente se, $P(\alpha) = Q(\alpha)$ para qualquer $\alpha \in \mathbb{C}$.

Você encontrará, principalmente em questões de vestibulares, a notação P(x) = Q(x) na intenção de $P(x) \equiv Q(x)$.

Polinômio identicamente nulo

O polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x^1 + a_0$ é chamado polinômio identicamente nulo ou, simplesmente, **polinômio nulo**, se, e somente se:

$$a_n = a_{n-1} = a_{n-2} = \ldots = a_0 = 0$$

Representa-se o polinômio nulo por $P(x) \equiv 0$ e lê-se: "P de *x* é identicamente nulo".

Consequências

1) $P(x) \equiv 0$ se, e somente se, $P(a) = 0$ para qualquer $a \in \mathbb{C}$.
2) Se $P(x) \equiv 0$, então não se define $\delta(P)$.

2. Operações com polinômios

Vamos estudar as operações com polinômios empregando a noção de termos semelhantes.

Adição e subtração

A adição e a subtração de polinômios são feitas somando-se ou subtraindo-se os coeficientes dos termos semelhantes.

Multiplicação

A multiplicação de polinômios é feita por meio da propriedade distributiva e da redução de termos semelhantes.

Divisão

Dividir o polinômio P(x) pelo polinômio não nulo S(x), em que $\delta(P) \geqslant \delta(S)$, significa encontrar os polinômios Q(x) e R(x) tais que $P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x)$, ou seja:

$$\begin{cases} P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x) \\ \text{e} \\ \delta(R) < \delta(S) \text{ ou } R(x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l} P(x) & S(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

Na expressão: P(x) é o **dividendo**, S(x) é o **divisor**, Q(x) é o **quociente** e R(x) é o **resto**.

Temos, ainda:

$\delta(Q) = \delta(P) - \delta(S)$

Dizemos que o polinômio P(x) é **divisível** por S(x) se, e somente se, $R(x) = 0$.

Divisão pelo método dos coeficientes a determinar (método de Descartes)

Para dividir P(x) por S(x), com $\delta(P) > \delta(S)$, seguimos as etapas:

- Determinamos o grau do quociente Q(x): $\delta(Q) = \delta(P) - \delta(S)$
- Consideramos o maior grau possível para o resto R(x), sabendo que $\delta(R) < \delta(S)$ ou $R(x) = 0$.
- Escrevemos Q(x) e R(x) com coeficientes literais e impomos que $P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

Divisão pelo método da chave

A divisão pelo método da chave obedece ao seguinte procedimento:

- Completa-se o polinômio dividendo com coeficientes nulos.
- Divide-se o primeiro termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor.
- Multiplica-se o quociente dessa divisão por todo o divisor, colocam-se os produtos obtidos embaixo dos termos semelhantes do dividendo e subtrai-se.
- Divide-se o primeiro termo do resto parcial pelo primeiro termo do divisor e repete-se o processo anterior até que o grau do resto seja menor que o grau do divisor ou o resto seja zero.

3. Teorema do resto

O resto da divisão de um polinômio P(x), de grau $n \geqslant 1$, pelo binômio do primeiro grau $bx - a$, com $b \neq 0$, é o valor numérico de P(x) para *x* igual à raiz do divisor, ou seja, $P\left(\frac{a}{b}\right)$.

Demonstração

$$\begin{array}{c|l} P(x) & bx - a \\ \cline{2-2} R & Q(x) \end{array}$$

Portanto: $P(x) = (bx - a) \cdot Q(x) + R$.

Fazendo $x = \frac{a}{b}$, temos:

$$P\left(\frac{a}{b}\right) = \underbrace{\left(b \cdot \frac{a}{b} - a\right)}_{\text{zero}} \cdot Q\left(\frac{a}{b}\right) + R \Rightarrow P\left(\frac{a}{b}\right) = R$$

4. Teorema de D'Alembert

Um polinômio P(x), de grau $n \geq 1$, é divisível pelo binômio do primeiro grau $bx - a$, com $b \neq 0$, se, e somente se, o valor numérico de P(x) para *x* igual à raiz do divisor é igual a zero, ou seja, $P\left(\frac{a}{b}\right) = 0$.

Demonstração

$$\begin{array}{l|l} P(x) & bx - a \\ \cline{2-2} R & Q(x) \end{array}$$

Portanto: $P(x) = (bx - a) \cdot Q(x) + R$.

Pelo teorema do resto, $P\left(\frac{a}{b}\right) = R$, mas, se $R = 0$, então P(x) é divisível por $bx - a$.

Atividades

1 (Mackenzie-SP) O polinômio

$P(x) = (m - 4)x^3 + (m^2 - 16)x^2 + (m + 4)x + 4$ é de grau 2:

a) se, e somente se, $m = 4$ ou $m = -4$.
b) se, e somente se, $m \neq 4$.
c) se, e somente se, $m \neq -4$.
d) se, e somente se, $m \neq 4$ e $m \neq -4$.
e) para nenhum valor de *m*.

I) $m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4$

II) $m^2 - 16 \neq 0 \Rightarrow m^2 \neq 16 \Rightarrow m \neq -4$ e $m \neq 4$

Portanto, de I e II, conclui-se que para nenhum valor de *m* esse polinômio será de grau 2.

Alternativa *e*

2 (Unisa-SP) Se os polinômios $ax^3 + bx^2 + cx + d$ e $x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$ são idênticos, então:

a) $a = 0$
b) $b = 1$
c) $c = 2$
d) $d = 3$
e) $a + b + c + d = 1$

$ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv (x^2 - x) \cdot (x - 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv x^3 - 3x^2 + 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 2 \\ d = 0 \end{cases}$

Alternativa *c*

3 (Mackenzie-SP) O resto da divisão do polinômio $p(x) = 4x^3 + 2x^2 - mx + 5$ pelo binômio $(x + 2)$ é 1. Então *m* é igual a:

a) 22
b) −20
c) 20
d) 10
e) −10

$p(x) : (x + 2) \Rightarrow R = p(-2)$

$R = 1 \Rightarrow p(-2) = 1$

$p(-2) = 1 \Rightarrow 4 \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - m \cdot (-2) + 5 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -32 + 8 + 2m + 5 = 1 \Rightarrow 2m = 20 \therefore m = 10$

Alternativa *d*

4 (Fuvest-SP) Seja P(x) um polinômio divisível por $x - 3$. Dividindo P(x) por $x - 1$, obtemos quociente Q(x) e resto $R = 10$. O resto da divisão de Q(x) por $x - 3$ é:

a) −5 b) −3 c) 0 d) 3 e) 5

$P(x) = (x - 1) \cdot Q(x) + 10$

Temos: $P(3) = 0$

Então:

$(3 - 1) \cdot Q(3) + 10 = 0 \Rightarrow Q(3) = -5$

O resto da divisão de Q(x) por $x - 3$ é Q(3), ou seja, −5.

Alternativa *a*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 Seja $P(x) = x^4 + mx^3 - mx^2 + x - 2$, com $x \in \mathbb{C}$ e $m \in \mathbb{R}$.

a) Calcule $P(0)$.

b) Mostre que 1 é raiz de $P(x)$.

2 (UF-SC) Se o polinômio $2x^3 - ax^2 + bx + 2$ é divisível por $2x^2 + 5x - 2$, qual o valor de $a - b$?

3 (ITA-SP) Dividindo o polinômio $P(x) \equiv x^3 + x^2 + x + 1$ pelo polinômio $Q(x)$, obtemos o quociente $S(x) \equiv 1 + x$ e o resto $R(x) \equiv x + 1$. O polinômio $Q(x)$ satisfaz:

a) $Q(2) = 0$

b) $Q(3) = 0$

c) $Q(0) \neq 0$

d) $Q(1) \neq 0$

e) $Q(4) = 2$

4 (U. F. Viçosa-MG) O polinômio
$P(x) = x^5 - 4x^3 + mx + 1$ é divisível pelo binômio $(x - 1)$. O valor de *m* é:

a) 1

b) 2

c) −2

d) 0

e) −1

5 Dividindo-se por $2x^2 - 3x + 1$ o polinômio $P(x)$, obtém-se quociente $3x^2 + 1$ e resto $-x + 2$. Nessas condições, o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 1$ é:

a) 2

b) 1

c) 0

d) −1

e) −2

6 (Faap-SP) Os valores de *a*, *b* e *c* para os quais o polinômio $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx + c$ é divisível pelo polinômio $Q(x) = x^3 - 7x + 6$ são, respectivamente:

a) −14, 9 e 4

b) 2, −1 e 0

c) −7, 11 e 5

d) 14, −9 e 3

e) −14, 33 e −18

Polinômio: critérios de divisibilidade

1. Dispositivo prático de Briöt-Ruffini

A divisão de um polinômio P(x), de grau $n \geqslant 1$, por um binômio do 1º grau na forma $x - a$ pode ser feita, de forma rápida e simplificada, por meio de um método conhecido como dispositivo de Briöt-Ruffini, exemplificado a seguir.

Para dividir o polinômio $P(x) = 3x^4 - 5x^2 + x - 1$ pelo binômio $S(x) = x - 2$, constrói-se o seguinte esquema:

I. Desenham-se dois segmentos: um horizontal e outro vertical.

II. Acima do segmento horizontal e à direita do segmento vertical, colocam-se os coeficientes do polinômio dividendo, P(x), completo e, abaixo do segmento horizontal e à esquerda do segmento vertical, coloca-se a raiz do polinômio divisor, S(x).

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & \multicolumn{5}{c}{\text{Coeficientes de P(x) completo}} \\
 & 3 & 0 & -5 & 1 & -1 \\
\hline
\underbrace{2}_{\text{Raiz do divisor}} & & & & &
\end{array}$$

III. Repete-se o coeficiente dominante abaixo do segmento horizontal.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 3 & 0 & -5 & 1 & -1 \\
\hline
2 & 3 & & & &
\end{array}$$

IV. Multiplica-se a raiz do divisor pelo coeficiente dominante, que acabou de ser escrito abaixo do segmento horizontal, e soma-se esse produto ao próximo coeficiente acima do segmento horizontal.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 3 & 0 & -5 & 1 & -1 \\
\hline
2 & 3 & 6 & & &
\end{array}$$

V. Repete-se o item IV até chegar-se ao termo independente do dividendo.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 3 & 0 & -5 & 1 & -1 \\
\hline
2 & 3 & 6 & 7 & 15 & 29
\end{array}$$

VI. O último número escrito abaixo do segmento horizontal (29) é o resto R da divisão, e os números que estão entre a raiz do divisor e o resto da divisão (3, 6, 7 e 15) são os coeficientes do polinômio quociente Q(x), nessa ordem.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & \multicolumn{5}{c}{\text{Coeficientes de P(x) completo}} \\
 & 3 & 0 & -5 & 1 & -1 \\
\hline
2 & 3 & 6 & 7 & 15 & 29 \\
\text{Raiz do divisor} & \multicolumn{4}{c}{\text{Coeficientes de Q(x)}} & \text{Resto R}
\end{array}$$

Assim, dividindo-se $P(x) = 3x^4 - 5x^2 + x - 1$ pelo binômio $S(x) = x - 2$, obtêm-se o quociente $Q(x) = 3x^3 + 6x^2 + 7x + 15$ e o resto $R = 29$.

No caso de o polinômio divisor ser um binômio na forma $S(x) = bx - a$, com $b \neq 0$, temos:

$$\begin{array}{l|l}
P(x) & bx - a \\
\cline{2-2}
R & Q(x)
\end{array}$$

$$P(x) = (bx - a) \cdot Q(x) + R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x) = b \cdot \left(x - \frac{a}{b}\right) \cdot Q(x) + R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x) = \left(x - \frac{a}{b}\right) \cdot b \cdot Q(x) + R$$

Fazendo $b \cdot Q(x) = Q'(x)$, vem:

$P(x) = \left(x - \frac{a}{b}\right) \cdot Q'(x) + R$, ou seja, aplicando-se Briöt-Ruffini na divisão por $x - \frac{a}{b}$, obtêm-se $Q'(x)$ e resto R e, portanto, para se obter $Q(x)$, basta dividir $Q'(x)$ por *b*.

Exemplo

Vamos dividir o polinômio $P(x) = 4x^3 + 3$ pelo binômio $S(x) = 2x + 1$.

Coeficientes de P(x) completo

	4	0	0	3
$-\frac{1}{2}$	4	-2	1	$\frac{5}{2}$

Raiz do divisor | Coeficientes de Q′(x) | Resto R

Para obtermos o quociente $Q(x)$ da divisão de $P(x)$ por $S(x)$, dividimos os coeficientes de $Q'(x)$ por 2, assim:

$$Q(x) = 2x^2 - x + \frac{1}{2} \text{ e } R = \frac{5}{2}$$

2. Divisão pelo produto $(x - a) \cdot (x - b)$

Se um polinômio $P(x)$, de grau $n \geqslant 2$, é divisível pelo binômio $x - a$ e também por $x - b$, com $a \neq b$, então $P(x)$ é divisível pelo produto $(x - a) \cdot (x - b)$, e a recíproca é verdadeira.

Demonstração

$$\begin{array}{l|l} P(x) & (x - a) \cdot (x - b) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

Portanto: $P(x) = (x - a) \cdot (x - b) \cdot Q(x) + R(x)$.

Como $\delta(R) < 2$ ou $R(x) = 0$, façamos $R(x) = cx + d$, então: $P(x) = (x - a)(x - b) \cdot Q(x) + cx + d$

Sabemos que $P(x)$ é divisível pelo binômio $x - a$ e também por $x - b$, com $a \neq b$; assim, pelo teorema de D'Alembert, $P(a) = 0$ e $P(b) = 0$:

$$P(a) = (a - a)(a - b) \cdot Q(a) + ca + d = 0$$
$$P(b) = (b - a)(b - b) \cdot Q(b) + cb + d = 0$$

$$\begin{cases} ca + d = 0 \\ cb + d = 0 \end{cases}$$

Subtraindo as igualdades, membro a membro, temos:

$$c(a - b) = 0 \Rightarrow a = b \text{ (Absurdo!) ou } c = 0$$

Substituindo o valor de *c* no sistema, encontramos: $d = 0$, logo: $R(x) = cx + d = 0$.

Recíproca

Se um polinômio $P(x)$, de grau $n \geqslant 2$, é divisível pelo produto $(x - a) \cdot (x - b)$, então $P(x)$ é divisível pelo fator $x - a$ e, também, por $x - b$.

Demonstração

$$\begin{array}{l|l} P(x) & (x - a) \cdot (x - b) \\ \cline{2-2} 0 & Q(x) \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x) = (x - a)(x - b) \cdot Q(x)$$

Calculemos $P(a)$ e $P(b)$:

$P(a) = (a - a)(a - b) \cdot Q(a) = 0$, então, pelo teorema de D'Alembert, concluímos que $P(x)$ é divisível por $x - a$.

$P(b) = (b - a)(b - b) \cdot Q(b) = 0$; então, pelo teorema de D'Alembert, concluímos que $P(x)$ é divisível por $x - b$.

Atividades

1 (Fatec-SP) Os restos da divisão de um polinômio P por $(x - 1)$ e por $(x + 2)$ são, respectivamente, 1 e -23. O resto da divisão de P por $(x - 1)(x + 2)$ é:

a) -23
b) $-22x$
c) $x - 2$
d) $3x + 1$
e) $8x - 7$

$P(1) = 1$ e $P(-2) = -23$

e

$$\begin{array}{l|l} P(x) & (x - 1) \cdot (x + 2) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

$R(x) = ax + b$

Daí: $P(x) = (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot Q(x) + ax + b$

Portanto:

$P(1) = a + b = 1$

$P(-2) = -2a + b = -23$

Resolvendo o sistema, encontramos: $a = 8$ e $b = -7$

$\therefore R(x) = 8x - 7$

Alternativa *e*

2 (Fuvest-SP) O quociente da divisão de $2x^4 - 5x^3 - 10x - 1$ por $x - 3$ é:

a) $2x^3 - 11x^2 + 23x - 68$

b) $2x^3 - 11x^2 + 33x - 109$

c) $2x^3 + x^2 + 3x - 1$

d) $2x^3 - 11x^2 + 33x + 109$

e) $2x^2 + x - 7$

$$\begin{array}{c|cccc|c} 3 & 2 & -5 & 0 & -10 & -1 \\ \hline & 2 & 1 & 3 & -1 & -4 \end{array}$$

$\underbrace{2 \quad 1 \quad 3 \quad -1}_{\text{Quociente}}$ $\underbrace{-4}_{\text{Resto}}$

$Q(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 1$

Alternativa *c*

3 (UE-CE) Se $Q_1(x)$ é o quociente da divisão de $x^2 + 2$ por $x + 1$ e $Q_2(x)$ é o quociente da divisão de $x^2 + 2$ por $x - 1$, então $Q_1(3) + Q_2(4)$ é igual a:

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10

Aplicando Briöt-Ruffini na divisão de $x^2 + 2$ por $x + 1$, temos:

$$\begin{array}{c|ccc} -1 & 1 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & 3 \end{array}$$

$Q_1(x) = x - 1 \Rightarrow Q_1(3) = 3 - 1 = 2$

Aplicando Briöt-Ruffini na divisão de $x^2 + 2$ por $x - 1$, temos:

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 3 \end{array}$$

$Q_2(x) = x + 1 \Rightarrow Q_2(4) = 4 + 1 = 5$

$\therefore Q_1(3) + Q_2(4) = 2 + 5 = 7$

Alternativa *a*

4 (UE-CE) Se *m* e *n* são números reais tais que o polinômio $P(x) = x^5 + 3x^2 + mx + n$ é divisível por $x^2 - 3x + 2$, então $m + n$ é igual a:

a) 0 c) 4 e) −6

b) −4 d) 6

Temos: $x^2 - 3x + 2 = (x - 1) \cdot (x - 2)$

Se P(x) é divisível pelo produto $(x - 1) \cdot (x - 2)$, então P(x) é divisível, separadamente, por $(x - 1)$ e por $(x - 2)$, ou seja, $P(1) = 0$ e $P(2) = 0$.

$$\begin{cases} P(1) = 1^5 + 3 \cdot 1^2 + m \cdot 1 + n = 0 \\ P(2) = 2^5 + 3 \cdot 2^2 + m \cdot 2 + n = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(1) = m + n = -4 \\ P(2) = 2m + n = -44 \end{cases}$$

Alternativa *b*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (Universitas-MG) Os valores de *a*, *b* e *c* que tornam o polinômio $A(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$ divisível por $B(x) = x^2 - 2$ e $C(x) = x - 1$ são:

a) $a = 0, b = 3, c = 7$

b) $a = 5, b = 0, c = 0$

c) $a = 8, b = 1, c = 10$

d) $a = 1, b = -2, c = 2$

2 Dividindo-se o polinômio P(x) por $(2x - 1)$, obtêm-se quociente $(x^2 - x)$ e resto *m*. Se $P(-1) = 0$, então o valor de *m* é:

a) 0 c) 3 e) 6

b) 1 d) 4

3 (PUC-PR) Se o polinômio $x^4 + px^2 + q$ é divisível pelo polinômio $x^2 - 6x + 5$, então $p + q$ vale:

a) −1 c) 5 e) 10

b) 3 d) −4

4 (FGV-SP) Dividindo-se um polinômio P(x) por $(x - 2)$, obtém-se resto 6. Dividindo-se o mesmo polinômio por $(x + 2)$, obtém-se resto 10. Então, o resto da divisão do polinômio P(x) por $(x - 2) \cdot (x + 2)$ será:

a) 0 c) $16 + x$ e) $x - 6$

b) $8 - x$ d) $x - 4$

5 (Acafe-SC) Determine $p + q$ para que o polinômio $P(x) = 2x^4 + 3x^3 + px^2 + qx - 3$ seja divisível por $(x + 1) \cdot (x - 3)$.

a) −23 c) −42 e) −19

b) 4 d) −4

6 (F. M. Santa Casa-SP) Dividindo-se um polinômio f(x) por $x^2 - 3x + 1$, obtêm-se quociente $x + 1$ e resto $2x + 1$. O resto da divisão de *f* por $x + 1$ é:

a) −2 c) 3 e) $2x + 1$

b) −1 d) $2x - 1$

Equação polinomial

1. Definição

Equação polinomial, também conhecida por **equação algébrica**, de grau *n*, com $n \geqslant 1$, é todo e qualquer polinômio de grau *n* igualado a zero, isto é:

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \\ + \ldots + a_1 \cdot x^1 + a_0 = 0$$

Exemplos

a) $2x - 6 = 0$ é uma equação polinomial do primeiro grau cuja raiz é o número complexo 3.

b) $3x^2 + 12 = 0$ é uma equação polinomial do segundo grau cujas raízes são os números complexos $2i$ e $-2i$.

c) $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ é uma equação polinomial do quinto grau cujas raízes são os números complexos 0, 2, 3, *i* e $-i$.

2. Teorema fundamental da álgebra

Toda equação polinomial de grau $n \geqslant 1$ possui pelo menos uma raiz complexa.

Teorema da decomposição

Sendo $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ um polinômio de grau $n \geqslant 1$ e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ suas raízes, então P(x) pode ser fatorado na forma:

$$P(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$$

Decorrência do teorema da decomposição

Toda equação polinomial de grau $n \geqslant 1$ possui exatamente ***n* raízes complexas**.

Exercício resolvido

Resolver, no campo dos números complexos, a equação polinomial $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 20x + 24 = 0$, sabendo-se que duas de suas raízes são os números 2 e 3.

Resolução

Se 2 e 3 são raízes, então a equação polinomial pode ser decomposta na forma $(x - 2) \cdot Q_1(x) = 0$, em que $Q_1(x) = (x - 3) \cdot Q_2(x)$. Assim, por Briöt-Ruffini, temos:

	1	−5	10	−20	24
2	1	−3	4	−12	0

Coeficientes de $Q_1(x)$

$Q_1(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$

	1	−3	4	−12
3	1	0	4	0

Coeficientes de $Q_2(x)$

$Q_2(x) = x^2 + 4$, assim:

$(x - 2) \cdot Q_1(x) = 0$

$(x - 2) \cdot (x - 3) \cdot Q_2(x) = 0$

$(x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x^2 + 4) = 0$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\sqrt{-4}$ ou $x = \sqrt{-4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -2i$ ou $x = 2i$

$\therefore S = \{2; 3; 2i; -2i\}$

3. Multiplicidade de uma raiz

Considere a resolução da equação polinomial de quarto grau escrita sob a forma de um produto de quatro fatores do primeiro grau:

$$\underbrace{(x-5)}_{\text{I}} \cdot \underbrace{(x-5)}_{\text{II}} \cdot \underbrace{(x-5)}_{\text{III}} \cdot \underbrace{(x+6)}_{\text{IV}} = 0$$

O produto é nulo se, e somente se, um dos fatores é nulo, logo:

I. $x - 5 = 0 \quad \therefore x = 5$ ou
II. $x - 5 = 0 \quad \therefore x = 5$ ou
III. $x - 5 = 0 \quad \therefore x = 5$ ou
IV. $x + 6 = 0 \quad \therefore x = -6$

$S = \{-6; 5\}$

Note que o número 5 é raiz dessa equação "três vezes" e o número -6 é raiz apenas "uma vez".

Chama-se **multiplicidade** de uma raiz complexa α a quantidade de vezes que o número α aparece como raiz de uma equação polinomial.

Portanto, no nosso exemplo, 5 é raiz tripla (ou de multiplicidade 3) e -6 é raiz simples (ou de multiplicidade 1).

Atividades

1 (FGV-SP) A equação polinomial

$(x - 1) \cdot (x^2 + 1) + (x + 1) \cdot (x^2 - 1) = 0$

apresenta:

a) três raízes inteiras.
b) uma raiz igual a -1.
c) duas raízes complexas conjugadas.
d) duas raízes irracionais.
e) três raízes irracionais.

$(x - 1) \cdot (x^2 + 1) + (x + 1) \cdot (x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 1) \cdot (x^2 + 1) + (x + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 1) \cdot [(x^2 + 1) + (x + 1) \cdot (x + 1)] = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 1) \cdot (x^2 + 1 + x^2 + 2x + 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 1) \cdot (2x^2 + 2x + 2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) = 0$

Possui uma raiz inteira e duas raízes complexas conjugadas.

Alternativa *c*

2 (Fuvest-SP) As raízes do polinômio $P(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$ são 1, 2 e 3. O quociente da divisão de $P(x)$ por $(x - 3)$ é:

a) $x^2 + 2$
b) $x^2 - 3x + 2$
c) $x^2 + 3x - 2$
d) $x^2 - 2x + 1$
e) $x^2 - 2$

$P(x) = a_0 \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$

Para $a_0 = 1$, temos: $P(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$

Assim, o quociente da divisão de $P(x)$ por $(x - 3)$ é

$(x - 1) \cdot (x - 2)$, ou seja, $x^2 - 3x + 2$.

Alternativa *b*

3 (UnB-DF) Sabe-se que $P(x)$ é um polinômio que possui unicamente as raízes $\frac{2}{3}$ (com multiplicidade 2) e $\frac{1}{2}$ (com multiplicidade 3). Então $P(x)$ poderá ser:

a) $5x^6 - 8x^4 + 7x^2 + 4$
b) $x^6 + x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 9x + 2$
c) $(9x^2 - 12x + 4) \cdot (8x^3 - 12x^2 + 6x - 1)$
d) $(3x - 2)^3 \cdot (2x - 1)^2$
e) $(2x - 3)^2 \cdot (x - 2)^3$

$\frac{(3x - 2)^2}{9} \cdot \frac{(2x - 1)^2}{8} = 0$

$(3x - 2)^2 \cdot (2x - 1)^3 = 0$

$P(x) = (3x - 2)^2 \cdot (2x - 1)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(x) = (9x^2 - 12x + 4) \cdot (8x^3 - 12x^2 + 6x - 1)$

Alternativa *c*

4 (Fuvest-SP) O polinômio $P(x) = x^3 - x^2 + x + a$ é divisível por $(x - 1)$. Determine todas as raízes complexas de $P(x)$.

Se $P(x)$ é divisível por $(x - 1)$, então $P(1) = 0$.

Portanto, $x = 1$ é uma das raízes de $P(x)$.

	1	−1	1	a
1	1	0	1	a + 1

$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = -i$ ou $x = i$

As raízes complexas de $P(x)$ são os números 1, *i* e –*i*.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (PUC-SP) Sabe-se que -1 é raiz do polinômio $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$. As demais raízes desse polinômio são números:

a) irracionais.

b) não reais.

c) racionais não inteiros.

d) inteiros positivos.

e) inteiros e opostos entre si.

2 (Universitas-MG) Encontre o valor de k de modo que 1 seja raiz da equação $x^3 + kx^2 + x + 1 = 0$ e, em seguida, resolva a equação.

3 (PUC-SP) Um polinômio do terceiro grau anula-se para $x = 1$ e para $x = -3$; assume os valores -12 para $x = 0$ e 30 para $x = 2$. Esse polinômio é:

a) $P(x) = (x + 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 4)$

b) $P(x) = (x + 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - 4)$

c) $P(x) = (x - 1) \cdot (x + 3) \cdot (x + 4)$

d) $P(x) = (x + 1) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4)$

e) $P(x) = 2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 3) \cdot (x + 4)$

4 (Cesgranrio-RJ) Um dos fatores do polinômio $P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$ é $2x - 1$. A maior raiz de $P(x)$ é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 6

5 (Mackenzie-SP) As raízes de um polinômio do terceiro grau são 0, 1 e 2. Sabendo-se $P\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$, é correto afirmar que:

a) $P(x) = 4x^3 - 12x^2 - 8x$

b) $P(x) = -4x^3 + 12x^2 - 8x$

c) $P(x) = -4x^3 + 12x^2 + 8x$

d) $P(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x$

e) $P(x) = -4x^3 - 12x^2 - 8x$

6 (PUC-SP) A raiz $x = 1$ da equação $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$:

a) é simples.

b) é dupla.

c) é tripla.

d) é quádrupla.

e) é quíntupla.

Relações de Girard / Teorema das raízes complexas

1. Relações de Girard

Para um polinômio de grau 2

Considere o polinômio $P(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, cujas raízes são x_1 e x_2.

São válidas as seguintes relações de Girard para os coeficientes de um polinômio do segundo grau:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Para um polinômio de grau 3

Considere o polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$, cujas raízes são x_1, x_2 e x_3.

São válidas as seguintes relações de Girard para os coeficientes de um polinômio do terceiro grau:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

Para um polinômio de grau *n*

Considere o polinômio de grau *n*, a seguir:

$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \dots + a_1 \cdot x^1 + a_0$, com $a \neq 0$, cujas raízes são $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Estas são as relações de Girard, para um polinômio de grau *n*:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + \dots + x_{n-1} \cdot x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + \dots + x_{n-2} \cdot x_{n-1} \cdot x_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n = \dfrac{(\pm 1)^n \cdot a_0}{a_n} \end{cases}$$

2. Teorema das raízes complexas

Considere $\{a; b\} \subset \mathbb{R}$ e $b \neq 0$.

Se o número complexo $z = a + b \cdot i$ é raiz de uma equação polinomial de coeficientes reais, então o conjugado de *z*, $\overline{z} = a - b \cdot i$, também é raiz dessa equação.

Em toda equação polinomial de coeficientes reais:

I. A multiplicidade de uma raiz imaginária *z* é igual à multiplicidade de seu conjugado $\overline{z}$.
II. O número de raízes imaginárias é sempre par.
III. Toda equação polinomial de grau ímpar admite pelo menos uma raiz real.

Exercício resolvido

Resolver, em $\mathbb{C}$, a equação $x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 17x^2 - 4x - 20 = 0$, sabendo-se que o número $2 - i$ é uma de suas raízes.

Resolução

Se $2 - i$ é raiz, então $2 + i$ também o é.

Pelo dispositivo prático de Briöt-Ruffini, temos:

	1	−3	−3	17	−4	20
$2 - i$	1	$-1 - i$	$-6 - i$	$4 + 4i$	$8 + 4i$	0
$2 + i$	1	1	−4	−4	0	

$(x - 2 + i)(x - 2 - i)(x^3 + x^2 - 4x - 4) = 0$

I. $x - 2 + i = 0 \Rightarrow x = 2 - i$

II. $x - 2 - i = 0 \Rightarrow x = 2 + i$

III. $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2(x + 1) - 4(x + 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 1)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x^2 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -2$ ou $x = 2$

$S = \{2 - i; 2 + i; -2; -1; 2\}$

Atividades

1 (Mackenzie-SP) A equação $x^3 - 4x^2 - 4x + 16$ tem raízes *a*, *b* e *c* tais que $a = b + c$. O valor de $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{b}{a \cdot c}$ é:

a) -16

b) -4

c) 4

d) $\frac{1}{4}$

e) $-\frac{1}{4}$

• $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-a_1}{a_0} \Rightarrow a + \underbrace{b + c}_{a} = 4 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$

• $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{-a_3}{a_0} \Rightarrow a \cdot b \cdot c = -16 \Rightarrow 2 \cdot b \cdot c = -16 \Rightarrow$

$\Rightarrow b \cdot c = -8$

• $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{b}{a \cdot c} = \frac{b \cdot c + a \cdot c + b^2}{a \cdot b \cdot c} = \frac{b \cdot (b + c) + a \cdot c}{a \cdot b \cdot c} =$

$= \frac{a \cdot b + a \cdot c}{a \cdot b \cdot c} = \frac{a \cdot (b + c)}{a \cdot b \cdot c} = \frac{b + c}{b \cdot c} = \frac{a}{b \cdot c}$

• $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{b}{a \cdot c} = \frac{a}{b \cdot c} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{b}{a \cdot c} = \frac{2}{-8}$

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{b}{a \cdot c} = -\frac{1}{4}$

Alternativa *e*

2 (UE-MT) Se a equação $x^5 - 9x^4 + 28x^3 - 48x^2 + 44x - 20 = 0$ admite a raiz $1 - i$, com multiplicidade 2, então apresenta uma raiz real *x*, tal que:

a) $4 < x \leq 6$

b) $3 < x < 5$

c) $2 < x < 3$

d) $1 \leq x < 2$

e) $0 < x < 2$

Se $1 - i$ é uma raiz de multiplicidade 2, o número $1 + i$, conjugado de $1 - i$, é também raiz de multiplicidade 2.

Assim:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \frac{-a_1}{a_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1 + i) + (1 + i) + (1 - i) + (1 - i) + x_5 = \frac{-(-9)}{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 + x_5 = 9 \therefore x_5 = 5$

Alternativa *a*

3 (Mackenzie-SP) Um polinômio $P(x)$ de coeficientes reais e menor grau possível admite as raízes 1 e *i*. Se $P(0) = -1$, então $P(-1)$ vale:

a) -4

b) 4

c) -2

d) 2

e) 3

As raízes do polinômio são: 1; *i*; $-i$.

Sendo $a \in \mathbb{R}$, temos:

$P(x) = a \cdot (x - 1) \cdot (x - i) \cdot (x + i)$

$P(0) = -1 \Rightarrow a \cdot (-1) \cdot (-i) \cdot (i) = -1 \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1$

$\therefore P(x) = (x - 1) \cdot (x - i) \cdot (x + i)$

$P(-1) = -2 \cdot (-1 - i) \cdot (-1 + i) = -2 \cdot (1 - i + i + 1) = -4$

Alternativa *a*

4 (F. M. Santa Casa-SP) Seja a equação $x^3 + x^2 + kx + t = 0$, em que *k* e *t* são coeficientes reais. Se o complexo $1 - 2i$ é uma das raízes dessa equação, o produto das três raízes é:

a) -15
b) -12
c) -9
d) 9
e) 15

As raízes do polinômio são: $1 - 2i$; $1 + 2i$ e *p*.

Das relações de Girard, temos:

$1 - 2i + 1 + 2i + p = -1 \Rightarrow p = -3$

Logo:

$(1 - 2i) \cdot (1 + 2i) \cdot (-3) = (1 + 4) \cdot (-3) = -15$

Alternativa *a*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 Dada a equação algébrica $2x^3 + 4x^2 - 12x - 2 = 0$, e sendo x_1, x_2 e x_3 as suas raízes, encontre:

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$

b) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$

c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

d) $x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3^2$

2 (Mackenzie-SP) Se as soluções da equação $x^3 - 9x^2 + kx - 24 = 0$ estão em progressão aritmética, então *k* vale:

a) 16
b) 18
c) 20
d) 24
e) 26

3 As três raízes de $x^3 - 9x^2 + 33x - 65 = 0$ são *a*, *b* e 5. Determine o valor de $\sqrt{ab}$.

4 (UE-MT) Se a equação $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ apresenta duas raízes simétricas, a outra raiz é um número:

a) negativo.
b) irracional.
c) maior que 12.
d) entre 2 e 4.
e) entre 0 e 1.

5 (Mackenzie-SP) A equação $2x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 37x - 15 = 0$ tem uma raiz igual a $2 + i$. As outras raízes são:

a) $2 - i$, -3 e $\frac{1}{2}$
b) $-2 + i$, 3 e $-\frac{1}{2}$
c) $3 - i$, -3 e $\frac{1}{2}$
d) $3 + i$, -1 e $-\frac{3}{2}$
e) $2 - i$, 1 e $\frac{3}{2}$

6 (Vunesp-SP) A equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, de coeficientes reais, admite as raízes $2 - i$ e $3 + 2i$. Então *d* é:

a) 75
b) 65
c) 25
d) 15
e) 10

Arranjos / Permutações

1. Princípio fundamental da contagem

Como o próprio nome diz, o princípio fundamental da contagem é o fundamento, a base do processo da contagem.

Para seu entendimento, vamos analisar as duas situações descritas a seguir.

Situação 1

BIP

Ângela foi a um centro comercial para comprar uma blusa. Na loja A, interessou-se por três marcas de blusa e, na loja B, por duas. Considerando-se apenas essas informações, quantas opções de compra Ângela tem?

Acompanhe: a blusa será comprada na loja A (três opções) **ou** na loja B (duas opções); logo, Ângela tem três **mais** duas (cinco) opções de compra.

Situação 2

Ângela foi a um centro comercial para comprar uma blusa. Na loja A, interessou-se por três marcas de blusa, e cada uma das marcas é oferecida nas cores laranja, verde, branca e azul. Considerando-se apenas essas informações, quantas opções de compra Ângela tem?

Observe: ela deve escolher uma marca **e** uma cor. Vamos construir uma tabela de opções.

	Laranja (L)	Verde (V)	Branca (B)	Azul (A)
Marca M_1	(M_1, L)	(M_1, V)	(M_1, B)	(M_1, A)
Marca M_2	(M_2, L)	(M_2, V)	(M_2, B)	(M_2, A)
Marca M_3	(M_3, L)	(M_3, V)	(M_3, B)	(M_3, A)

Assim, Ângela tem doze (três **vezes** quatro) opções de compra.

Repare que na situação 1 tínhamos dois **experimentos**, a saber:

- Experimento E_1: comprar na loja A (três opções)
- Experimento E_2: comprar na loja B (duas opções)

Nossa personagem, Ângela, deveria realizar E_1 **ou** E_2, e o número total de opções foi o número de opções de E_1 **mais** o número de opções de E_2.

Já na situação 2, tínhamos também dois experimentos:

- Experimento E_1: escolher a marca (três opções)
- Experimento E_2: escolher a cor (quatro opções)

Nossa personagem deveria realizar E_1 **e** E_2, e o número total de opções foi o número de opções de E_1 **vezes** o número de opções de E_2.

Concluindo:

Experimento	Número de resultados
E_1	r_1
E_2	r_2
E_3	r_3
$\vdots$	$\vdots$
E_n	r_n
E_1 ou E_2 ou E_3 ou ... ou E_n	$r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_n$
E_1 e E_2 e E_3 e ... e E_n	$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot ... \cdot r_n$

2. Arranjos simples

Analisemos a seguinte situação-problema:

Quantos números naturais de dois algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3 e 4?

Sabemos, pelo princípio fundamental da contagem, que:

Dezenas		Unidades		
4	·	3	=	12

Logo, podemos formar 12 números nas condições do problema, a saber:

12	21	31	41
13	23	32	42
14	24	34	43

Como cada número é um agrupamento de dois algarismos, conseguimos formar 12 agrupamentos diferentes.

Tais agrupamentos são diferentes por dois motivos:

1º) Os elementos componentes do agrupamento são diferentes.

Exemplo

Os agrupamentos 12 e 13 são diferentes, pois são compostos por elementos diferentes, ou seja, os elementos são de naturezas diferentes.

2º) A ordem dos elementos nos agrupamentos é diferente.

Exemplo

Os agrupamentos 12 e 21 são diferentes, pois, embora sejam compostos pelos mesmos elementos (têm a mesma natureza), a ordem dos elementos nos agrupamentos é diferente.

Agrupamentos que diferem pela natureza dos elementos que os compõem ou pela ordem dos elementos em cada agrupamento são chamados arranjos simples.

Sejam $M = \{m_1; m_2; m_3; ...; m_n\}$ um conjunto com *n* elementos distintos e *p* um número natural tal que $n \geqslant p$. Chama-se **arranjo simples** toda sequência de *p* elementos tomados dentre os *n* elementos de M sem repetição.

Os arranjos simples são representados pela letra A maiúscula acrescida de dois índices numéricos, *n* e *p*, com $n \geqslant p$ e $\{n; p\} \subset \mathbb{N}$:

$$A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

O primeiro índice (n) indica de quantos elementos dispomos para formar os arranjos, e o segundo índice (p) mostra quantos elementos determinam um arranjo.

$A_{n,\,p}$ lê-se: "arranjos de *n* elementos tomados de *p* em *p*, ou arranjos de *n* elementos tomados *p* a *p*".

3. Permutações simples

Considere o seguinte problema:

Quantos números naturais de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2 e 3?

Sabemos, pelo princípio fundamental da contagem, que:

Centenas		Dezenas		Unidades		
3	·	2	·	1	=	6

Logo, podemos formar 6 números nas condições do enunciado do problema, a saber:

123	213	312
132	231	321

Observe que nos agrupamentos houve apenas "troca" da posição de seus elementos.

Tais agrupamentos diferem pela ordem dos elementos e, portanto, correspondem aos arranjos de três elementos tomados 3 a 3, isto é:

$$A_{3,\,3}$$

Quando os agrupamentos diferem apenas pela ordem dos elementos, isto é, quando os dois índices dos arranjos são iguais, eles são chamados permutações simples.

Seja $M = \{m_1; m_2; m_3; ...; m_n\}$ um conjunto com *n* elementos diferentes. Chama-se **permutação simples** toda sequência de *n* elementos tomados dentre os *n* elementos de M sem repetição.

As permutações simples de *n* elementos são representadas pela letra P maiúscula, acrescida do índice *n*:

P_n lê-se: "permutação de *n* elementos".

Fórmula das permutações simples

$$P_n = A_{n,\,n} \Rightarrow P_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Portanto:

$$\boxed{P_n = n!}$$

No problema que acabamos de resolver, temos:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Atividades

1 (Mackenzie-SP) O número de filas diferentes que podem ser formadas com dois homens e três mulheres de modo que os homens não fiquem juntos, é:

a) 96 c) 48 e) 120
b) 72 d) 84

H — M — H — M — M → 2 · 3 · 1 · 2 · 1 = 24 filas diferentes

M — H — M — H — M → 3 · 2 · 2 · 1 · 1 = 24 filas diferentes

M — M — H — M — H → 3 · 2 · 2 · 1 · 1 = 24 filas diferentes

São, no total, 72 filas diferentes.

Outro modo:

Total de filas: 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 120

Homens juntos: 2! · 4! = 48

Homens separados: 120 − 48 = 72

Alternativa *b*

2 (Mackenzie-SP) Os números pares com 4 algarismos distintos que podemos obter com os elementos do conjunto {0, 3, 4, 5, 6, 7, 8} são em número de:

a) 6 c) $5 \cdot 6^2$ e) 380
b) 420 d) $5 \cdot 4^3$

$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underset{0}{\underline{\quad}} + \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underset{4;\,6;\,8}{\underline{\quad}}$

$= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 + 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 120 + 300 = 420$

Alternativa *b*

3 (UF-RS) O valor de *n* que satisfaz a equação $\dfrac{A_{n-1,\,3}}{A_{n,\,3}} = \dfrac{3}{4}$ é igual a:

a) 4 c) 11 e) 13
b) 5 d) 12

$$\frac{A_{n-1,\,3}}{A_{n,\,3}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\dfrac{(n-1)!}{(n-1-3)!}}{\dfrac{n!}{(n-3)!}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n-4)!} \cdot \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-4)!}} \cdot \frac{(n-3) \cdot \cancel{(n-4)!}}{n \cdot \cancel{(n-1)!}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{n-3}{n} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4 \cdot (n-3) = 3n \Rightarrow 4n - 12 = 3n$

$\therefore n = 12$

Alternativa *d*

4 (ITA-SP) Listando-se em ordem crescente os números de cinco algarismos distintos, formados com os elementos do conjunto {1, 2, 4, 6, 7}, o número 62 417 ocupa o *n*-ésimo lugar. Então *n* é igual a:

a) 74 c) 79 e) 92
b) 75 d) 81

$\underset{3}{\boxed{1;2;4}} \cdot \underset{4}{\boxed{}} \cdot \underset{3}{\boxed{}} \cdot \underset{2}{\boxed{}} \cdot \underset{1}{\boxed{}} + \underset{1}{\boxed{6}} \cdot \underset{1}{\boxed{1}} \cdot \underset{3}{\boxed{}} \cdot \underset{2}{\boxed{}} \cdot \underset{1}{\boxed{}} +$

$\underset{1}{\boxed{6}} \cdot \underset{1}{\boxed{2}} \cdot \underset{1}{\boxed{1}} \cdot \underset{2}{\boxed{}} \cdot \underset{1}{\boxed{}} + \underset{1}{\boxed{6}} \cdot \underset{1}{\boxed{2}} \cdot \underset{1}{\boxed{4}} \cdot \underset{1}{\boxed{1}} \cdot \underset{1}{\boxed{7}} =$

$= 72 + 6 + 2 + 1 = 81$

Alternativa *d*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (Unicamp-SP) Em matemática, um número natural é chamado *palíndromo* se seus algarismos, escritos em ordem inversa, produzem o mesmo número. Por exemplo, 8; 22 e 373 são palíndromos. Pergunta-se:

Quantos números naturais palíndromos existem entre 1 e 9 999?

2 (Mackenzie-SP) A quantidade de números inteiros compreendidos entre 300 e 500 que podemos formar usando apenas os algarismos 3, 4 e 5 é:

a) 30
b) 24
c) 42
d) 52
e) 18

3 Considere todos os anagramas da palavra GRITO.

a) Quantos anagramas podem ser formados?
b) Quantos anagramas começam por consoante?
c) Quantos anagramas começam por consoante e terminam por vogal?
d) Quantos anagramas possuem as consoantes e as vogais alternadas?

4 (Vunesp-SP) Certo tipo de código usa apenas dois símbolos — o número zero (0) e o número um (1) — e, considerando esses símbolos como letras, podem-se formar palavras. Por exemplo: 0, 01, 00, 001 e 110 são algumas palavras de uma, duas e três letras desse código. O número máximo de palavras, com cinco letras ou menos, que podem ser formadas com esse código é:

a) 120
b) 62
c) 60
d) 20
e) 10

5 (Vunesp-SP) Quatro amigos, Pedro, Luísa, João e Rita, vão ao cinema, sentando-se em lugares consecutivos na mesma fila. O número de maneiras que os quatro podem ficar dispostos de forma que Pedro e Luísa fiquem sempre juntos e João e Rita fiquem sempre juntos é:

a) 2
b) 4
c) 8
d) 16
e) 24

6 (Unifor-CE) Três homens e três mulheres vão ocupar 3 degraus de uma escada para tirar uma foto. Essas pessoas devem se colocar de maneira que em cada degrau fique apenas um casal. Nessas condições, de quantas maneiras diferentes elas podem se arrumar?

a) 1 080
b) 720
c) 360
d) 288
e) 144

Permutações com repetição / Combinações

1. Permutações com elementos repetidos

Seja $a_1, a_1, \ldots, a_1, a_2, a_2, \ldots, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_k$ uma sequência com *n* elementos em que:

- o elemento a_1 aparece repetido n_1 vezes;
- o elemento a_2 aparece repetido n_2 vezes;
- o elemento a_3 aparece repetido n_3 vezes;

⋮

- o elemento a_k aparece repetido n_k vezes.

É possível provar que o número de permutações desses *n* elementos é dado por:

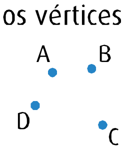
$$P_n^{(n_1;\, n_2;\, \ldots;\, n_k)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

2. Combinações simples

Vamos resolver o seguinte problema:

Quantas retas distintas ficam determinadas por quatro pontos distintos e não colineares três a três?

Considere que quatro pontos distintos e não colineares três a três são os vértices de um quadrilátero.



Como uma reta fica determinada por dois pontos distintos, vamos escrever todos os possíveis pares de pontos distintos.

AB	BA	CA	DA
AC	BC	CB	DB
AD	BD	CD	DC

Esses doze pares de pontos são os arranjos dos quatro pontos tomados dois a dois, isto é:

$$A_{4,\,2} = 4 \cdot 3$$

Repare que a reta determinada pelos pontos A e B e a reta determinada pelos pontos B e A não são distintas, isto é, a **ordem** em que tomamos os elementos no agrupamento **não importa**. Devemos, pois, excluir as retas que estão sendo contadas duas vezes e escrever apenas os pares de pontos que determinam retas distintas.

AB	BC
AC	BD
AD	CD

Logo, ficam determinadas seis retas distintas.

Agrupamentos que diferem apenas pelos elementos que os compõem (natureza), e não pela ordem dos elementos, são chamados combinações simples.

Sejam $M = \{m_1;\, m_2;\, m_3;\, \ldots;\, m_n\}$ um conjunto com *n* elementos diferentes e *p* um número natural tal que $n \geqslant p$. Chama-se **combinação simples** todo subconjunto de *p* elementos tomados dentre os *n* elementos de M sem repetição.

As combinações simples são representadas pela letra C maiúscula, acrescida de dois índices numéricos, *n* e *p*, com $n \geqslant p$ e $\{n;\, p\} \subset \mathbb{N}$:

$$C_{n,\,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n - p)!}$$

O primeiro índice (*n*) indica de quantos elementos dispomos para formar os agrupamentos, e o segundo índice (*p*) mostra quantos elementos determinam um agrupamento.

$C_{n,\,p}$ lê-se: "combinações de *n* elementos tomados de *p* em *p*, ou combinações de *n* elementos tomados *p* a *p*".

Atividades

1 (Unifor-CE) Seis pessoas classificadas para a etapa final de um concurso concorrem a seis prêmios: 2 deles distintos, correspondentes ao primeiro e segundo lugares da classificação, e 4 iguais, como prêmios de consolação aos demais classificados. De quantos modos poderá ocorrer a premiação dessas pessoas?

a) 120 c) 60 e) 30
b) 80 d) 40

$P_6^4 = \frac{6!}{4!} = 6 \cdot 5 = 30$

Alternativa *e*

2 (Fuvest-SP) Uma ONG decidiu preparar sacolas, contendo quatro itens distintos cada, para distribuir entre a população carente. Estes itens devem ser escolhidos entre oito tipos de produtos de limpeza e cinco tipos de alimentos não perecíveis. Em cada sacola, deve haver pelo menos um item que seja alimento não perecível e pelo menos um item que seja um produto de limpeza. Quantos tipos de sacolas distintas podem ser feitos?

a) 360 c) 540 e) 640
b) 420 d) 600

- 1 tipo de alimento e 3 produtos de limpeza:

  $n_1 = C_{5,1} \cdot C_{8,3} \Rightarrow n_1 = \frac{5}{1} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \therefore n_1 = 280$ tipos de sacolas

- 2 tipos de alimentos e 2 produtos de limpeza:

  $n_2 = C_{5,2} \cdot C_{8,2} \Rightarrow n_1 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \therefore n_2 = 280$ tipos de sacolas

- 3 tipos de alimentos e 1 produto de limpeza:

  $n_3 = C_{5,3} \cdot C_{8,1} \Rightarrow n_1 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{8}{1} \therefore n_3 = 80$ tipos de sacolas

Serão, no total, 640 tipos distintos de sacolas.

Alternativa *e*

3 (PUC-MG) Sobre a reta *r*, tomam-se três pontos; sobre a reta *s*, paralela a *r*, tomam-se cinco pontos. Nessas condições, o número de triângulos distintos e com vértices nesses pontos é:

a) 45 c) 47
b) 46 d) 48

1ª solução

$C_{3,1} \cdot C_{5,2} + C_{3,2} \cdot C_{5,1} = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 5 = 30 + 15 = 45$

2ª solução

$C_{8,3} - C_{3,3} - C_{5,3} = 56 - 1 - 10 = 45$

Alternativa *a*

4 (ITA-SP) Considere 12 pontos dispostos no plano, cinco dos quais estão em uma mesma reta. Qualquer outra reta do plano contém, no máximo, dois desses pontos. Quantos triângulos podemos formar com os vértices nesses pontos?

a) 210 c) 410 e) 521
b) 315 d) 415

Número de triângulos: $n = C_{12,3} - C_{5,3}$

$n = \frac{12!}{3! \cdot (12-3)!} - \frac{5!}{3! \cdot (5-2)!} \Rightarrow n = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 220 - 10 \therefore n = 210$ triângulos

Alternativa *a*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (Fuvest-SP) A primeira fase de um campeonato de xadrez cada jogador joga contra todos os demais. Nessa fase, foram realizados 78 jogos. Quantos eram os jogadores?

a) 10 c) 12 e) 14
b) 11 d) 13

2 (U. F. Santa Maria-RS) De quantas maneiras distintas se podem alinhar cinco estacas azuis idênticas, uma vermelha e uma branca?

a) 12
b) 30
c) 42
d) 240
e) 5 040

3 (U. F. Juiz de Fora-MG) Dada uma circunferência, o número de cordas que podemos traçar com seis pontos distintos sobre ela é:

a) 6
b) 12
c) 15
d) 24
e) 30

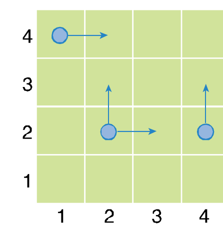
4 (Univale-MG) O número de comissões diferentes de 2 pessoas que podemos formar com os n diretores de uma firma é k. Se, no entanto, ao se formarem essas comissões, tivermos que indicar uma das pessoas para presidente e a outra para suplente, poderemos formar $k + 3$ comissões distintas. Então n vale:

a) 3
b) 10
c) 13
d) 30
e) 40

5 (Mackenzie-SP) Nove pessoas desejam subir à cobertura de um edifício dispondo, para isso, de dois elevadores, um com quatro lugares e outro com cinco. O número de formas diferentes de distribuí-las nos elevadores é:

a) 630
b) 252
c) 180
d) 378
e) 126

6 (Fuvest-SP) Um tabuleiro tem 4 linhas e 4 colunas. O objetivo de um jogo é levar uma peça da casa inferior esquerda (casa (1, 1)) para a casa superior direita (casa (4, 4)), e essa peça deve mover-se, de cada vez, para a casa imediatamente acima ou imediatamente à direita. Se apenas uma dessas casas existir, a peça irá mover-se necessariamente para ela. Por exemplo, dois caminhos possíveis para completar o trajeto são (1, 1) → (1, 2) → (2, 2) → (2, 3) → (3, 3) → (3, 4) → (4, 4) e (1, 1) → (2, 1) → (2, 2) → (3, 2) → (4, 2) → (4, 3) → (4, 4).

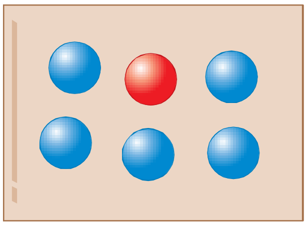


Por quantos caminhos distintos se pode completar esse trajeto?

Probabilidade

1. "Chance"

Suponha que uma urna contenha seis bolas, sendo cinco azuis e uma vermelha.



Se retirarmos aleatoriamente, isto é, ao acaso, uma bola dessa urna, é "mais fácil" sair uma bola azul que uma vermelha, pelo fato de que o número de bolas azuis é maior que o número de bolas vermelhas. Dizemos que a "chance" de sair uma bola azul é maior que a "chance" de sair uma bola vermelha. Essa "chance" é medida por um número real chamado **probabilidade**.

Espaço amostral

Chama-se **espaço amostral** o conjunto de todos os resultados possíveis na ocorrência de um fenômeno aleatório.

Exemplos

a) No lançamento de uma moeda não viciada, os resultados possíveis são: *cara* (C) ou *coroa* (K), e o espaço amostral é $E_1 = \{C; K\}$, sendo o número de elementos desse espaço amostral representado por $n(E_1) = 2$.

b) No lançamento de um dado não viciado, os resultados possíveis são: face 1, face 2, face 3, face 4, face 5 ou face 6, e o espaço amostral é: $E_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, sendo o número de elementos desse espaço amostral representado por $n(E_2) = 6$.

Sandra H. Bordini

Evento

Chama-se **evento** todo subconjunto de um espaço amostral.

Exemplo

Considere o experimento: lançamento de um dado.

Tal experimento tem como espaço amostral o conjunto $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ e $n(E) = 6$.

Considere, ainda, os conjuntos citados a seguir, que se referem ao lançamento desse dado:

a) $A = \{x \in E \mid x \text{ é par}\}$

O conjunto $A = \{2; 4; 6\}$ é um subconjunto de E, logo A é um evento de E, e o número de elementos desse evento é representado por $n(A) = 3$.

b) $B = \{x \in E \mid x \text{ é maior ou igual a } 5\}$

O conjunto $B = \{5; 6\}$ é um subconjunto de E, logo B é um evento de E, e o número de elementos desse evento é representado por $n(B) = 2$.

c) $C = \{x \in E \mid x \text{ é igual a } 13\}$
O conjunto $C = \varnothing$ é um subconjunto de E, logo C é um evento de E, e o número de elementos desse evento é representado por $n(C) = 0$.

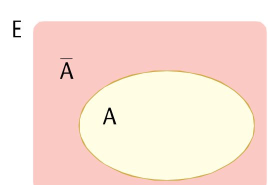
No lançamento de um dado nunca ocorrerá uma face igual a 13; logo, o conjunto C é chamado **evento impossível**.

d) $D = \{x \in E \mid x \text{ é menor que } 10\}$
O conjunto $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ é um subconjunto de E, logo D é um evento de E, e o número de elementos desse evento é representado por $n(D) = 6$.

No lançamento de um dado sempre ocorrerá uma face menor que 10; logo, o conjunto D é o próprio espaço amostral e é chamado **evento certo**.

Evento complementar

Chama-se **evento complementar** de um evento A, e é representado por $\overline{A}$, o conjunto formado por todos os elementos do espaço amostral E que não pertencem ao evento A.



$A \cap \overline{A} = \varnothing$

$A \cup \overline{A} = E$

Exemplo

Considere os eventos do exemplo do item anterior.

a) $A = \{x \in E \mid x \text{ é par}\}$ e $\overline{A} = \{y \in E \mid y \text{ é ímpar}\}$ são eventos complementares, pois:
$A = \{2, 4, 6\}$ e $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$, portanto:
$A \cup \overline{A} = E$ e $A \cap \overline{A} = \varnothing$

b) $B = \{x \in E \mid x \text{ é maior ou igual a } 5\}$ e
$\overline{B} = \{y \in E \mid y \text{ é menor que } 5\}$ são eventos complementares, pois:
$B = \{5, 6\}$ e $\overline{B} = \{1, 2, 3, 4\}$, portanto:
$B \cup \overline{B} = E$ e $B \cap \overline{B} = \varnothing$

c) $C = \{x \in E \mid x \text{ é igual a } 13\}$ e
$\overline{C} = \{y \in E \mid y \text{ é diferente de } 13\}$ são eventos complementares, pois:
$C = \varnothing$ e $\overline{C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, portanto:
$C \cup \overline{C} = E$ e $C \cap \overline{C} = \varnothing$
Repare que **o complementar do evento impossível é o evento certo**.

d) $D = \{x \in E \mid x \text{ é menor que } 10\}$ e
$\overline{D} = \{y \in E \mid y \text{ é maior ou igual a } 10\}$ são eventos complementares, pois:
$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e
$\overline{D} = \varnothing$, portanto: $D \cup \overline{D} = E$ e $D \cap \overline{D} = \varnothing$
Repare que **o complementar do evento certo é o evento impossível**.

2. Probabilidade

A probabilidade de ocorrência de um evento A, indicado por P(A), é o quociente entre o número de casos favoráveis à ocorrência desse evento e o número total de casos em que é possível ocorrer tal evento.

A probabilidade pode ser expressa por:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Em outras palavras:

A probabilidade de ocorrência de um evento A — P(A) — é o quociente entre o número de elementos do evento A — n(A) — e o número de elementos do espaço amostral E — n(E) — que contém tal evento.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)}$$

Exemplos

Para os exemplos a seguir, considere o experimento: lançamento de um dado, cujo espaço amostral é $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $n(E) = 6$.

a) Seja:
$A = \{x \in E \mid x \text{ é par}\}$
$A = \{2, 4, 6\}$ e $n(A) = 3$, então:
$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{3}{6} \therefore P(A) = \frac{1}{2}$

b) Seja:
$\overline{A} = \{y \in E \mid y \text{ é ímpar}\}$
$\overline{A} = \{1, 3, 5\}$ e $n(\overline{A}) = 3$, então:
$$P(\overline{A}) = \frac{n(\overline{A})}{n(E)} = \frac{3}{6} \therefore P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$$
Note que: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

c) Seja:
$B = \{x \in E \mid x \text{ é maior ou igual a } 5\}$
$B = \{5; 6\}$ e $n(B) = 2$, então:
$$P(B) = \frac{n(B)}{n(E)} = \frac{2}{6} \therefore P(B) = \frac{1}{3}$$

d) Seja:
$\overline{B} = \{y \in E \mid y \text{ é menor que } 5\}$
$\overline{B} = \{1, 2, 3, 4\}$ e $n(\overline{B}) = 4$, então:
$$P(\overline{B}) = \frac{n(\overline{B})}{n(E)} = \frac{4}{6} \therefore P(\overline{B}) = \frac{2}{3}$$
Note que: $P(B) + P(\overline{B}) = 1$

e) Seja:
$C = \{x \in E \mid x \text{ é igual a } 13\}$
$C = \varnothing$ e $n(C) = 0$, então:
$$P(C) = \frac{n(C)}{n(E)} = \frac{0}{6} \therefore P(C) = 0$$
Note que a probabilidade do evento impossível vale zero.

f) Seja:
$\overline{C} = \{y \in E \mid y \text{ é diferente de } 13\}$
$\overline{C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $n(\overline{C}) = 6$, então:
$$P(\overline{C}) = \frac{n(\overline{C})}{n(E)} = \frac{6}{6} \therefore P(\overline{C}) = 1$$

Note que:

- A probabilidade do evento certo vale um.
- $P(C) + P(\overline{C}) = 1$

g) Seja:
$D = \{x \in E \mid x \text{ é menor que } 10\}$
$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $n(D) = 6$, então:
$$P(D) = \frac{n(D)}{n(E)} = \frac{6}{6} \therefore P(D) = 1$$
De fato, a probabilidade do evento certo vale um.

h) Seja:
$\overline{D} = \{y \in E \mid y \text{ é maior ou igual a } 10\}$
$\overline{D} = \varnothing$ e $n(\overline{D}) = 0$, então:
$$P(\overline{D}) = \frac{n(\overline{D})}{n(E)} = \frac{0}{6} \therefore P(\overline{D}) = 0$$

Note que:

- A probabilidade do evento impossível vale zero.
- $P(D) + P(\overline{D}) = 1$

Propriedades da probabilidade

P_1. $P(\varnothing) = 0$

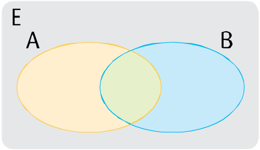
P_2. $P(E) = 1$

P_3. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

P_4. $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Adição de probabilidades

Sejam A e B dois eventos não vazios de um mesmo espaço amostral E.



Sabemos, pelo estudo de conjuntos, que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(E)} = \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(B)}{n(E)} - \frac{n(A \cap B)}{n(E)}$$

$$\therefore \boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Quando a intersecção de dois eventos, A e B, é vazia, os eventos são chamados **mutuamente exclusivos**, isto é, a ocorrência de um deles exclui a possibilidade de ocorrência do outro.

Sendo A e B eventos mutuamente exclusivos, temos:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Interferindo na probabilidade

Se a probabilidade de ocorrência de um evento A interfere na probabilidade de ocorrência de um evento B, então dizemos que a probabilidade de B está condicionada à probabilidade de A e é representada por P(B/A) (lê-se: “probabilidade de B dado A”).

Multiplicação de probabilidades

Se A e B são dois eventos não vazios de um mesmo espaço amostral E, então a probabilidade de B condicionado a A é expressa por:

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

Dividindo o numerador e o denominador do segundo membro da igualdade por n(E), temos:

$$P(B/A) = \frac{\dfrac{n(A \cap B)}{n(E)}}{\dfrac{n(A)}{n(E)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ou seja:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Eventos independentes

Dois eventos, A e B, são chamados independentes quando a probabilidade de ocorrência de um deles não interfere na probabilidade de ocorrência do outro, ou seja:

$$P(B/A) = P(B) \quad \text{ou} \quad P(A/B) = P(A)$$

Daí: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Atividades

1 (FGV-SP) Uma urna contém quatro bolinhas numeradas de 1 a 4. Uma bolinha é sorteada, seu número é anotado, e é recolocada na urna; em seguida, outra bolinha é sorteada. A probabilidade de a soma dos números observados ser 6 é igual a:

a) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{3}{8}$

b) $\frac{3}{16}$ d) $\frac{5}{16}$

$n(E) = 4 \cdot 4 = 16$

$A = \{(2; 4); (3; 3); (4; 2)\} \Rightarrow n(A) = 3$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} \therefore P(A) = \frac{3}{16}$

Alternativa *b*

2 (U. F. Alfenas-MG) Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1 a 100. A probabilidade de o bilhete sorteado ser um número maior que 40 ou um número par é de:

a) 60% d) 90%

b) 70% e) 50%

c) 80%

P(A) = probabilidade de o número ser maior que 40

P(B) = probabilidade de o número ser par

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\frac{60}{100} + \frac{50}{100} - \frac{30}{100} = \frac{80}{100}$

Alternativa *c*

3 (PUC-SP) De sua turma de 30 alunos, é escolhida uma comissão de três representantes. Qual a probabilidade de você fazer parte da comissão?

a) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{5}{24}$ e) $\frac{3}{8}$

b) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{1}{3}$

$n(E) = C_{30,\,3} = \frac{30!}{3! \cdot (30-3)!} = \frac{30!}{3! \cdot 27!}$

Se uma das pessoas, no caso "eu", já faz parte da comissão, é preciso escolher mais dois representantes entre os 29 alunos restantes.

$n(A) = C_{29,\,2} = \frac{29!}{2! \cdot (29-2)!} = \frac{29!}{2! \cdot 27!}$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} \Rightarrow P(A) = \frac{\dfrac{29!}{2! \cdot \cancel{27!}}}{\dfrac{30!}{3! \cdot \cancel{27!}}} \Rightarrow P(A) = \frac{29!}{2!} \cdot \frac{3!}{30!} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{29! \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 30 \cdot 29!} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{30} \therefore P(A) = \frac{1}{10}$

Alternativa *a*

4 (UF-PE) Um economista apresenta proposta de trabalho às empresas X e Y, de modo que: a probabilidade de ele ser contratado pela empresa X é de 0,61, a de ser contratado pela empresa Y é de 0,53 e a de ser contratado pelas duas empresas é de 0,27. Determine a probabilidade (P) de o economista não ser contratado por nenhuma das empresas e indique 100P.

$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$

em que $P(X)$ é a probabilidade de ser contratado pela empresa X;

$P(Y)$ é a probabilidade de ser contratado pela empresa Y.

$P(X \cup Y) = 0{,}61 + 0{,}53 - 0{,}27 = 0{,}87$

A probabilidade de não ser contratado por nenhuma delas é:

$P = 1 - P(X \cup Y) = 1 - 0{,}87 = 0{,}13$

$P = 0{,}13$

$100P = 13$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 100. Escolhendo-se, ao acaso, uma dessas bolas, qual é a probabilidade de se obter um número par ou múltiplo de 5?

2 (UF-CE) Sejam A e B dois eventos de um mesmo espaço amostral E. Sabendo-se que a probabilidade de ocorrer o evento A é igual a $\frac{5}{8}$ e a probabilidade de ocorrer o evento B é igual $\frac{1}{2}$ e, além disso, que a união dos eventos A e B é igual ao espaço amostral E, qual é a probabilidade de ocorrer um resultado que satisfaça tanto o evento A quanto o evento B?

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{8}$
c) $\frac{3}{8}$
d) $\frac{5}{8}$
e) $\frac{7}{8}$

3 (PUC-SP) Em uma urna, há dez fichas idênticas, numeradas de 1 a 10. Retiram-se duas fichas ao acaso (sem reposição). A probabilidade de que a soma dos dois números seja igual a 10 é igual a:

a) $\frac{1}{100}$
b) $\frac{9}{100}$
c) $\frac{3}{65}$
d) $\frac{1}{50}$
e) $\frac{4}{45}$

4 (Fuvest-SP)

a) Uma urna contém três bolas pretas e cinco bolas brancas. Quantas bolas azuis devem ser colocadas nessa urna de modo que, retirando-se uma bola ao acaso, a probabilidade de ela ser azul seja igual a $\frac{2}{3}$?

b) Considere agora uma outra urna que contém uma bola preta, quatro bolas brancas e *x* bolas azuis. Uma bola é retirada ao acaso dessa urna, a sua cor é observada e a bola é devolvida à urna. Em seguida, retira-se novamente, ao acaso, uma bola dessa urna. Para que valores de *x* a probabilidade de que as duas bolas sejam da mesma cor vale $\frac{1}{2}$?

5 (PUC-SP) Em uma caixa há quatro bolas vermelhas e sete bolas azuis, todas elas do mesmo tamanho. Um experimento consiste em retirar uma bola e, sem devolvê-la para a caixa, retirar uma segunda bola. Se a primeira bola retirada for azul, a probabilidade de que a segunda retirada seja vermelha é igual a:

a) 20%
b) 30%
c) 40%
d) 50%
e) 60%

6 (Unifesp-SP) Os alunos quartanistas do curso diurno e do curso noturno de uma faculdade se submeteram a uma prova de seleção, visando à participação numa olimpíada internacional. Dentre os que tiraram nota 9,5 ou 10,0 será escolhido um aluno, por sorteio.

Nota	Curso	
	Diurno	Noturno
9,5	6	7
10,0	5	8

Com base na tabela, a probabilidade de que o aluno sorteado tenha tirado nota 10,0 e seja do curso noturno é de:

a) $\frac{12}{26}$
b) $\frac{6}{14}$
c) $\frac{4}{13}$
d) $\frac{12}{52}$
e) $\frac{1}{6}$

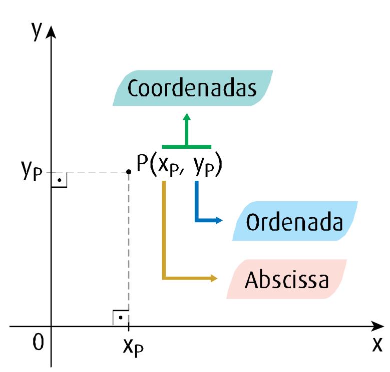
Coordenadas cartesianas e distância entre pontos

1. Sistema ortogonal

Recordando:

Dois eixos reais perpendiculares entre si determinam um único plano, chamado **sistema ortogonal de coordenadas cartesianas** ou, simplesmente, **plano cartesiano**. O ponto de cruzamento desses eixos é associado ao número zero, constituindo a origem do sistema cartesiano.

Um ponto qualquer desse plano é identificado por suas coordenadas:

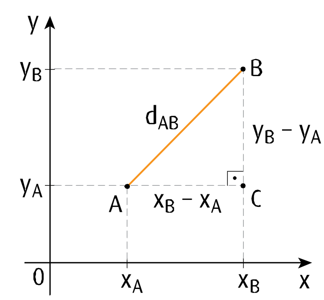


- Os pontos pertencentes ao eixo Ox possuem ordenada nula e são da forma: $(x_0, 0)$
- Os pontos pertencentes ao eixo Oy possuem abscissa nula e são da forma: $(0, y_0)$

Distância de ponto a ponto

A distância entre dois pontos, A e B, de coordenadas (x_A, y_A) e (x_B, y_B), respectivamente, é definida como o comprimento de $\overline{AB}$, sendo representada por d_{AB} ou AB e obtida pela fórmula a seguir.

$$d_{A,\,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



- $(x_B - x_A)^2 = (x_A - x_B)^2$ e $(y_B - y_A)^2 = (y_A - y_B)^2$, isto é, a ordem em que as subtrações são efetuadas não altera o resultado; logo, a fórmula pode ser escrita como:
$$d_{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$
em que Δx (lê-se: "delta *x*") representa a diferença entre as abscissas em qualquer ordem e Δy (lê-se: "delta *y*") representa a diferença entre as ordenadas em qualquer ordem.
- Se o segmento $\overline{AB}$ for paralelo a um dos eixos coordenados, a fórmula continua valendo.

Coordenadas do ponto médio

Sejam A e B dois pontos distintos representados no plano cartesiano pelas coordenadas (x_A, y_A) e (x_B, y_B), respectivamente.

Sendo M o ponto médio de $\overline{AB}$, então a abscissa do ponto M é a média aritmética entre as abscissas de A e B, e a ordenada do ponto M é a média aritmética entre as ordenadas de A e B, isto é:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Atividades

1 Calcule o valor de *k* sabendo que a distância entre os pontos A(−1, 2) e B(3, k) vale 5 unidades.

$d_{A,B} = 5$

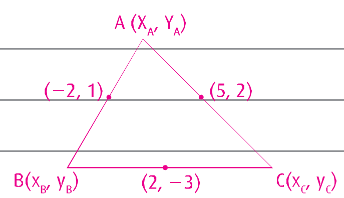
$\sqrt{(3 + 1)^2 + (k - 2)^2} = 5 \Rightarrow 16 + k^2 - 4k + 4 = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow k^2 - 4k - 5 = 0$

$k_1 = -1$ ou $k_2 = 5$

O ponto B pode ser B(3, −1) ou B(3, 5).

2 (EEM-SP) Determine as coordenadas dos vértices de um triângulo, sabendo-se que os pontos médios de seus lados são (−2, 1), (5, 2) e (2, −3).



$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_B}{2} = -2 \Rightarrow x_A + x_B = -4 \\ \dfrac{x_A + x_C}{2} = 5 \Rightarrow x_A + x_C = 10 \\ \dfrac{x_B + x_C}{2} = 2 \Rightarrow x_B + x_C = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = 1 \\ x_B = -5 \\ x_C = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{y_A + y_B}{2} = 1 \Rightarrow y_A + y_B = 2 \\ \dfrac{y_A + y_C}{2} = 2 \Rightarrow y_A + y_C = 4 \\ \dfrac{y_B + y_C}{2} = -3 \Rightarrow y_B + y_C = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_A = 6 \\ y_B = -4 \\ y_C = -2 \end{cases}$$

As coordenadas dos vértices são (1, 6), (−5, − 4) e (9, −2).

3 (Mackenzie-SP) Determine o ponto P distante 10 unidades do ponto A(−3, 6) com abscissa igual a 3.

$d_{AP} = 10 \Rightarrow \sqrt{(-3 - 3)^2 + (6 - y)^2} = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{36 + (6 - y)^2} = 10 \Rightarrow 36 + (6 - y)^2 = 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow (6 - y)^2 = 64 \Rightarrow \begin{cases} 6 - y = 8 \Rightarrow y = -2 \\ 6 - y = -8 \Rightarrow y = 14 \end{cases}$

Portanto: P(3, −2) ou P(3, 14).

4 As coordenadas do ponto P, situado a igual distância dos pontos M(4, 0), N(6, 4), Q(0, 4), são:

a) P(3, 3)
b) P(2, 2)
c) P(1, 1)
d) P(5, 5)
e) P(4, 4)

Seja P(x; y) o ponto procurado:

I) $d_{PM} = d_{PN}$

$(x - 4)^2 + y^2 = (x - 6)^2 + (y - 4)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 8y + 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x = 36 - 8y \Rightarrow x = 9 - 2y$

II) $d_{PM} = d_{PQ} \Rightarrow (x - 4)^2 + y^2 = x^2 + (y - 4)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = x^2 + y^2 - 8y + 16 \Rightarrow -8x = -8y \Rightarrow x = y$

Substituindo II em I, vem:

$x = 9 - 2x \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$

P(3, 3)

Professor(a), o ponto P é o circuncentro do △MNQ ou o centro da circunferência que contém os pontos M, N e Q.

Alternativa *a*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (F. U. Regional-RN) O ponto P, do eixo Oy, equidistante dos pontos Q(2, 0) e R(4, 2), é:

a) $\left(0, \dfrac{9}{12}\right)$
b) $\left(0, \dfrac{11}{2}\right)$
c) (0, 4)
d) (0, 3)
e) (0, 0)

2 Determine a natureza do triângulo de vértices A(5, 10), B(11, 2) e C(8, 11) quanto aos ângulos e calcule a área desse triângulo.

3 (UF-SC) Dados os pontos A(−1, −1), B(5, −7) e C(x, 2), determine *x*, sabendo que o ponto C é equidistante dos pontos A e B.

a) 8
b) 6
c) 15
d) 12
e) 7

4 O triângulo de vértices com coordenadas A(2, 0), B(−3, 3) e C(5, 3) tem circuncentro de coordenadas dadas por:

a) (2, 3)
b) (1, 4)
c) (−1, −4)
d) (0, 0)
e) (−2, −3)

5 (Fuvest-SP) Dados os pontos A(1, −4), B(1, 6) e C(5, 4) e sabendo que $(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2$, é correto afirmar que a soma das coordenadas do centro da circunferência que passa pelos pontos A, B e C é:

a) 2
b) 1
c) 3
d) 4
e) 5

6 (U. F. São Carlos-SP) Dados os pontos A(2, 0), B(2, 3) e C(1, 3), vértices de um triângulo, o raio da circunferência circunscrita a esse triângulo é:

a) $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$
b) $\dfrac{10}{3}$
c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
d) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$
e) $\sqrt{10}$

Estudo da reta

1. Equacionando a reta

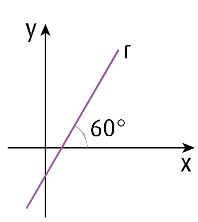
Coeficiente angular a partir da inclinação

Sendo α o ângulo de inclinação de uma reta, com $\alpha \neq 90°$, chama-se **coeficiente angular** da reta e representa-se por *m* o valor numérico da tangente de α, isto é:

$$m = \text{tg}\ \alpha$$

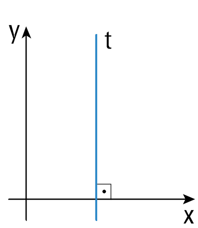
Exemplos

a)



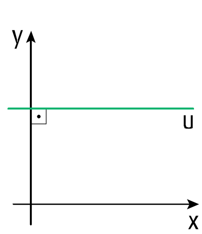
$m_r = \text{tg}\ 60° = \sqrt{3}$

b)



Como $\alpha = 90°$, $\nexists\ m_t$

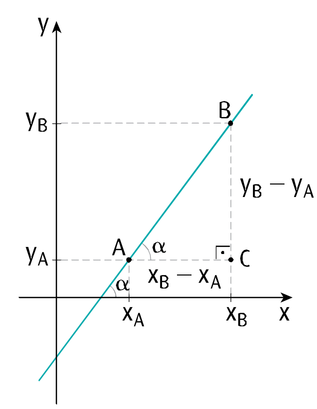
c)



$m_u = \text{tg}\ 0° = 0$

Coeficiente angular a partir de dois pontos

Considere, no plano cartesiano, uma reta não perpendicular ao eixo Ox e dois pontos distintos, A e B, dessa reta. Traçando por A a paralela ao eixo Ox, determinamos o ângulo $B\hat{A}C = \alpha$, conforme a figura abaixo.



Do triângulo retângulo ABC, temos:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Condição de alinhamento de três pontos

Sejam A, B e C três pontos distintos sobre uma mesma reta *r* não perpendicular ao eixo Ox.

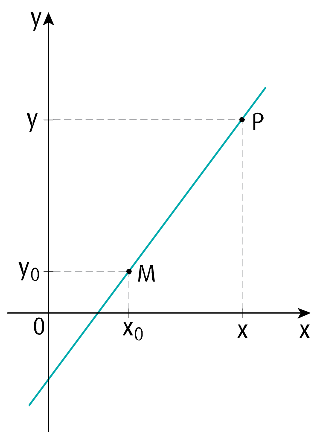
Como esses pontos estão alinhados, o coeficiente angular da reta *r* pode ser determinado pelas coordenadas de A e B ou A e C ou B e C, isto é:

$$m_r = m_{AB} = m_{AC} = m_{BC}$$

2. Tipos de equações

Equação fundamental da reta

Consideremos um ponto M, de coordenadas (x_0, y_0), e um ponto P, genérico, de coordenadas (x, y), ambos pertencentes a uma mesma reta não perpendicular ao eixo 0x.



O coeficiente angular da reta determinada por M e P é:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Multiplicando ambos os membros dessa igualdade por $x - x_0$, temos a expressão:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

que é chamada **equação fundamental** da reta.

Equação geral da reta

Chama-se **equação geral** da reta toda sentença que pode ser escrita sob a forma:

$$ax + by + c = 0$$

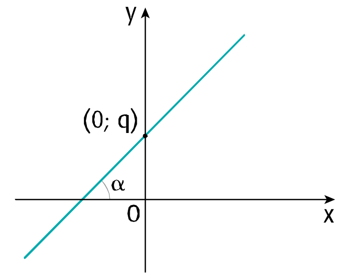
em que $\{a; b; c\} \subset \mathbb{R}$ e *a* e *b* não são nulos simultaneamente.

Equação reduzida da reta

Chama-se **equação reduzida** da reta toda sentença sob a forma:

$$y = mx + q$$

em que $\{m; q\} \subset \mathbb{R}$, *m* é o **coeficiente angular** da reta $(m = \text{tg } \alpha)$ e *q* é chamado **coeficiente linear** da reta, representando a ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo 0y.



Exemplos

a) $y = x - 2$ representa a equação reduzida da reta, em que $m = 1$ e $q = -2$.

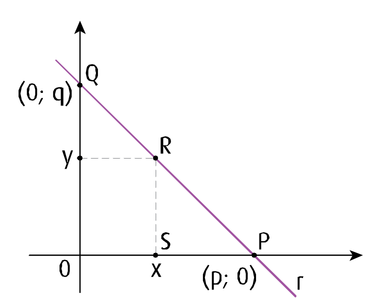
b) $y = \frac{3}{5}x$ representa a equação reduzidada reta, em que $m = \frac{3}{5}$ e $q = 0$.

c) $y = 0$ representa a equação reduzida da reta, em que $m = 0$ e $q = 0$.

- Se a reta é **paralela ao eixo 0x**, o coeficiente angular é igual a zero e existem as três equações: fundamental, geral e reduzida.
- Se a reta é **perpendicular ao eixo 0x**, não existem o coeficiente angular nem as equações fundamental e reduzida, mas existe a equação geral ($x - k = 0$, em que *k* é a abscissa por onde passa a reta).

Equação segmentária da reta

Seja *r* uma reta não paralela aos eixos 0x e 0y, conforme mostra a figura a seguir.



A equação da reta *r* pode ser determinada em função das medidas dos segmentos $0P = p$ e $0Q = q$, da seguinte maneira:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Essa expressão tem a propriedade de representar a reta *r* em função dos segmentos $\overline{OP}$ e $\overline{OQ}$, respectivamente, sendo chamada **equação segmentária** da reta *r*.

Equações paramétricas da reta

As abscissas e as ordenadas dos pontos de uma reta podem ser comparadas a um parâmetro real, obtendo-se assim as **equações paramétricas** da reta, isto é:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

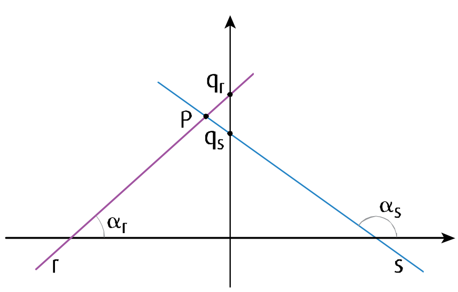
em que $t \in \mathbb{R}$.

Exemplo

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 4 \end{cases}, \text{ em que } t \in \mathbb{R}.$$

3. Retas concorrentes

Duas retas, *r* e *s*, são concorrentes quando possuem um único ponto comum.

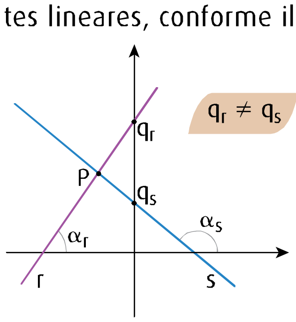


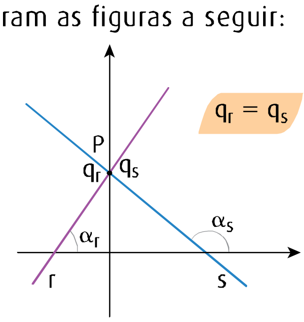
$$r \cap s = P$$

A condição necessária e suficiente para que duas retas coplanares sejam concorrentes é que tenham inclinações diferentes; consequentemente, se nenhuma delas for perpendicular ao eixo Ox, terão coeficientes angulares diferentes, isto é:

$$m_r \neq m_s$$

Nada se pode afirmar com relação aos coeficientes lineares, conforme ilustram as figuras a seguir:

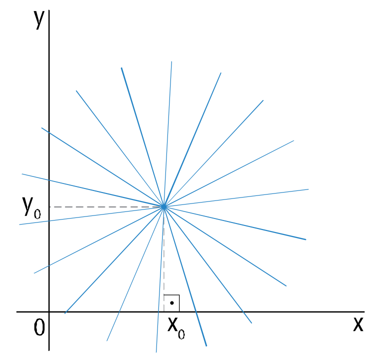




O ponto de concorrência das retas é determinado pela solução do sistema formado pelas equações dessas retas.

Feixe plano de retas concorrentes

Considere todas as retas de um mesmo plano que concorrem no ponto $P(x_0, y_0)$.



A esse conjunto de retas é dado o nome de **feixe plano de retas concorrentes de centro $P(x_0, y_0)$**.

Repare que, de todas essas infinitas retas, apenas uma não tem coeficiente angular: a reta perpendicular ao eixo Ox de equação $x = x_0$. Isso posto, a expressão:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0), \text{ em que } m \in \mathbb{R} \text{ ou } x = x_0,$$

tem a propriedade de representar qualquer reta do feixe plano de retas concorrentes de centro $P(x_0, y_0)$, sendo chamada **equação do feixe**.

Exemplo

A expressão $y - 5 = m(x - 2)$, em que $m \in \mathbb{R}$ ou $x = 2$, é a equação do feixe plano de retas concorrentes no ponto $(2, 5)$.

Perpendicularidade

A perpendicularidade entre duas retas coplanares é um caso particular de concorrência.

Sejam *r* e *s* duas retas coplanares e nenhuma delas perpendicular ao eixo Ox. A condição necessária e suficiente para que *r* e *s* sejam perpendiculares é que o produto de seus coeficientes angulares seja igual a -1, isto é:

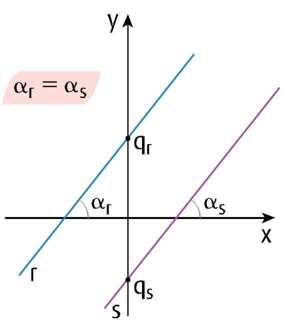
$$m_r \cdot m_s = -1$$

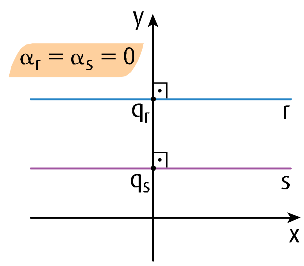
4. Retas paralelas

Duas retas, *r* e *s*, coplanares, são paralelas quando:

- não possuem ponto comum, sendo chamadas **paralelas distintas**;
- possuem todos os seus pontos comuns, sendo chamadas **paralelas coincidentes**.

Retas paralelas distintas





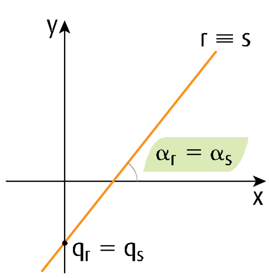
Sejam *r* e *s* duas retas coplanares e nenhuma delas perpendicular ao eixo Ox. Para serem paralelas **e** distintas, essas retas (*r* e s) devem ter coeficientes angulares iguais e coeficientes lineares diferentes, isto é:

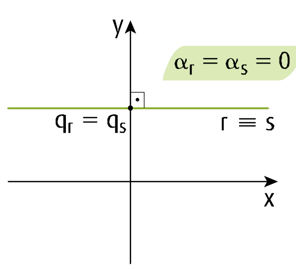
$$m_r = m_s$$

e

$$q_r \neq q_s$$

Retas paralelas coincidentes





Sejam *r* e *s* duas retas coplanares e nenhuma delas perpendicular ao eixo Ox. As condições para que *r* e *s* sejam paralelas coincidentes são: *r* e *s* devem ter coeficientes angulares iguais e coeficientes lineares também iguais, isto é:

$$m_r = m_s$$

e

$$q_r = q_s$$

5. Distância de ponto a reta

Dados um ponto $P(x_0, y_0)$ e uma reta *r* na sua forma geral $ax + by + c = 0$, a distância entre o ponto P e a reta *r* é:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

A fórmula também é válida nos casos em que *r* é perpendicular ao eixo Ox ou $P \in r$.

Exercício resolvido

Calcule a distância entre o ponto $A(-2; 3)$ e a reta *r*: $5x - 12y + 7 = 0$.

Resolução

Aplicação direta da fórmula:

$$d = \frac{|5 \cdot (-2) - 12 \cdot 3 + 7|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} \Rightarrow d = \frac{|-39|}{\sqrt{169}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = 3$$

Atividades

1 (U. Gama Filho-RJ) Os pontos A(0, 1), B(1, 0) e C(x, y) pertencem à reta *r*. Então devemos ter:

a) $x + y = 0$
b) $x - y = 0$
c) $x - y = 2$
d) $x + y = 1$
e) $x + y = 2$

$m_{AB} = m_{AC} \Rightarrow \frac{0-1}{1-0} = \frac{y-1}{x-0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{0-1}{1-0} = \frac{y-0}{x-1} \Rightarrow y = -x + 1 \therefore x + y = 1$

Alternativa *d*

2 Para que os pontos A(k, 2k); B(5, 8) e C(−3, −4) sejam colineares, é necessário que *k* assuma o valor:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{8-2k}{5-k} = \frac{-4-8}{-3-5} \Rightarrow \frac{8-2k}{5-k} = \frac{-12}{-8} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{8-2k}{5-k} = \frac{3}{2} \Rightarrow 16 - 4k = 15 - 3k \Rightarrow k = 1$

Alternativa *a*

3 (FEI-SP) Uma reta r_1 tem inclinação de 135° e passa pelo ponto P(3, 5). Determine a equação da reta r_2 que é perpendicular à reta r_1 e passa pelo ponto Q(5, 3).

$m_{r_1} = \text{tg } 135° \Rightarrow m_{r_1} = -1$

Se a reta r_2 é perpendicular à reta r_1, então $m_{r_2} = -\frac{1}{m_{r_1}}$, ou seja,

$m_{r_2} = 1$.

$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \Rightarrow y - 3 = 1 \cdot (x - 5) \therefore (r_2): y = x - 2$

4 Determine α e β para que as retas (r) $\alpha x - 2y + 6 = 0$ e (s) $x + 4y - \beta = 0$ sejam:

a) concorrentes;

r: coeficiente angular $(m_r) = \frac{\alpha}{2}$

coeficiente linear $(t_r) = 3$

s: coeficiente angular $(m_s) = -\frac{1}{4}$

coeficiente linear $(t_s) = \frac{\beta}{4}$

$m_r \neq m_s \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \neq -\frac{1}{4} \Rightarrow \alpha \neq -\frac{1}{2}$

e $\forall \beta$

b) perpendiculares;

$m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -1 \Rightarrow \frac{\alpha}{8} = 1 \Rightarrow \alpha = 8$

e $\forall \beta$

c) paralelas distintas;

$m_r = m_s$ e $t_r \neq t_s \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$ e $3 \neq \frac{\beta}{4} \Rightarrow \beta \neq 12$

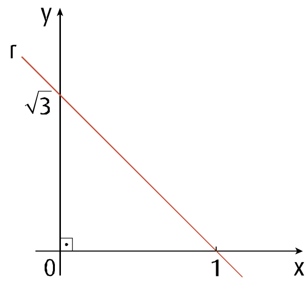
ou seja: $\alpha = -\frac{1}{2}$ e $\beta \neq 12$

d) paralelas coincidentes.

$m_r = m_s$ e $t_r = t_s \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$ e $\beta = 12$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (UF-RS) Considere a figura a seguir.



Uma equação cartesiana da reta *r* é:

a) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3 - x}$

b) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3 \cdot (1 - x)}$

c) $y = 1 - \sqrt{3}x$

d) $y = \sqrt{3} \cdot (1 - x)$

e) $y = \sqrt{3} \cdot (x - 1)$

2 (U. F. Alfenas-MG) Para que a reta que passa por $A(m - 1, 2)$ e $B(3, 2m)$ forme com o eixo das abscissas, no sentido anti-horário, um ângulo de 45°, *m* deve ser igual a:

a) -2

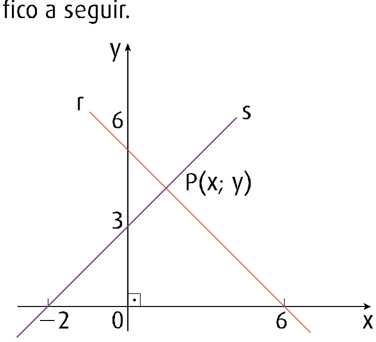
b) $-\dfrac{1}{2}$

c) 1

d) $\dfrac{1}{2}$

e) 2

3 (UF-PB) Determine as coordenadas do ponto *P* representado no gráfico a seguir.



4 (Fuvest-SP) As retas *r* e *s* são perpendiculares e interceptam-se no ponto (2, 4). A reta *s* passa pelo ponto (0, 5). Uma equação da reta *r* é:

a) $2y + x = 10$

b) $y = x + 2$

c) $2y - x = 6$

d) $2y + x = 8$

e) $y = 2x$

5 A equação reduzida da reta que passa pelo ponto $P(-1, -3)$ e é perpendicular à reta (s) $2x - 3y + 4 = 0$ é:

a) $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{3}$

b) $y = -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{9}{2}$

c) $y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{7}{3}$

d) $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{3}$

e) $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{2}$

6 (Cefet-PR) As coordenadas do ponto do eixo das ordenadas que pertencem à mediatriz de $\overline{AB}$, em que $A(2, 2)$ e $B(0, 6)$, são:

a) $\left(-2; \dfrac{7}{2}\right)$

b) $\left(\dfrac{1}{2}; 0\right)$

c) $\left(0; \dfrac{7}{2}\right)$

d) $(0; -2)$

e) $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$

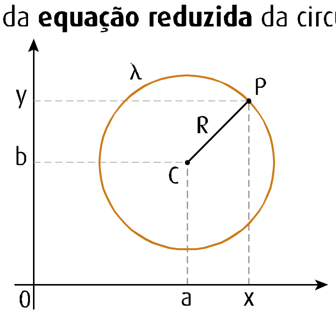
Circunferência

1. Equação reduzida da circunferência

Uma circunferência λ de centro $C(a, b)$ e medida do raio igual a R pode ser representada por meio da expressão:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

que é chamada **equação reduzida** da circunferência.



O ponto P representa um ponto qualquer, de coordenadas (x, y), pertencente à circunferência λ.

Exemplos

a) A equação $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 9$ representa a circunferência de centro $C(3, -5)$ e raio $R = 3$.

b) A equação $x^2 + y^2 = 5$ representa a circunferência de centro $C(0, 0)$ e raio $R = \sqrt{5}$.

2. Equação normal da circunferência

Dada a equação reduzida de uma circunferência, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, desenvolvendo os seus produtos notáveis, temos:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

A sentença dada é chamada **equação normal** da circunferência.

1. Dividindo-se os coeficientes de x e y por -2, obtêm-se a abscissa (a) e a ordenada (b) do centro, respectivamente.
2. Conhecendo-se a e b, e sendo $a^2 + b^2 - R^2 = c$, o raio R é dado por: $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$
3. Dada a equação da circunferência: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ temos:

- Centro: $C\left(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}\right)$
- Raio: $R = \sqrt{\left(\frac{-A}{2}\right)^2 + \left(\frac{-B}{2}\right)^2 - C}$ e $R > 0$

Atividades

1 (Unifor-CE) A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0$ tem:

a) centro no ponto $(-3, 4)$.
b) raio 1.
c) centro no ponto $(4, 3)$.
d) raio 2.
e) centro no ponto $(3, 0)$.

$a = \frac{6}{2} = 3$ e $b = \frac{8}{2} = 4$

$R = \sqrt{3^2 + 4^2 - 24} = 1$

$\lambda: (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 1^2$

Centro $(3, 4)$ e raio 1.

Alternativa *b*

2 (UF-CE) O segmento que une os pontos de intersecção da reta $2x + y - 4 = 0$ com os eixos coordenados determina um diâmetro de uma circunferência. A equação dessa circunferência é:

a) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$

b) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$

c) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$

d) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$

e) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 20$

Sejam os pontos A e B as intersecções com os eixos das abscissas e das ordenadas, respectivamente.

Ponto A: $x = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 + y - 4 = 0 \Rightarrow y = 4 \therefore A(0; 4)$

Ponto B: $y = 0 \Rightarrow 2x + 0 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \therefore B(2; 0)$

Seja R o raio da circunferência. Assim:

$$R = \frac{d_{AB}}{2} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{(4-0)^2 + (0-2)^2}}{2} \therefore R^2 = 5$$

Seja C o centro da circunferência. Assim:

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_C = \dfrac{0+2}{2} \therefore x_C = 1 \\ y_C = \dfrac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_c = \dfrac{4+0}{2} \therefore y_C = 2 \end{cases}$$

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$

Alternativa *a*

3 (Mackenzie-SP) Determine o comprimento da corda determinada pela reta $x - y = 0$ sobre a circunferência de equação dada por $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

Sejam A e B os pontos que representam as extremidades da corda definida pelos pontos de intersecção da reta com a circunferência.

$$\begin{cases} x - y = 0 \Rightarrow x = y \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + (x-1)^2 = 9 \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{14}}{2} \text{ ou } x = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

Assim, temos: $A\left(\frac{\sqrt{14}}{2}, \frac{\sqrt{14}}{2}\right)$ e $B\left(-\frac{\sqrt{14}}{2}, -\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$

$$d_{AB} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{14}}{2} + \frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{14}}{2} - \frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{AB} = \sqrt{\left(\sqrt{14}\right)^2 + \left(-\sqrt{14}\right)^2} \Rightarrow d_{AB} = \sqrt{28} \therefore d_{AB} = 2\sqrt{7}$$

O comprimento da corda é igual a $2\sqrt{7}$.

4 (PUC-MG) Uma circunferência de raio $\sqrt{5}$ passa pelo ponto $P(2, 3)$ e tem o centro de coordenadas (x, x). Os possíveis centros dessa circunferência são os pontos:

a) $(1, 1)$ e $(4, 4)$

b) $(1, 4)$ e $(4, 1)$

c) $(-1, 4)$ e $(4, -1)$

d) $(-1, -1)$ e $(4, 4)$

$C(x_0, x_0)$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$

Como passa pelo ponto $P(2, 3)$, temos:

$(2 - x_0)^2 + (3 - x_0)^2 = 5 \Rightarrow 4 - 4x_0 + x_0^2 + 9 - 6x_0 + x_0^2 = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x_0^2 - 10x_0 + 8 = 0 \Rightarrow x_0^2 - 5x_0 + 4 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9$

$$x_0 = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$x_0 = 1$ ou $x_0 = 4$

$C(1, 1)$ ou $C(4, 4)$

Alternativa *a*

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1 (Unifor-CE) Os pontos $(x, -2)$ e $(1, y)$ são as extremidades de um diâmetro de uma circunferência λ de centro no ponto $(1, 0)$. A equação de λ é:

a) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2x + 3 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

2 (Fuvest-SP) A reta $x = m$ intercepta a circunferência $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$, então:

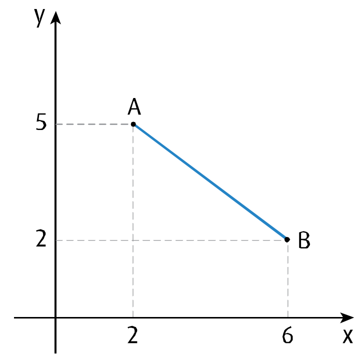
a) $m = 3$ ou $m = -1$
b) $-1 \leqslant m \leqslant 1$
c) $m \leqslant -1$ ou $m \geqslant 3$
d) $-1 \leqslant m \leqslant 3$
e) $1 \leqslant m \leqslant 3$

3 (Fuvest-SP) Uma circunferência passa pelos pontos $(2, 0)$, $(2, 4)$ e $(0, 4)$. Logo, a distância do centro dessa circunferência à origem é:

a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt{3}$
c) $\sqrt{4}$
d) $\sqrt{5}$
e) $\sqrt{6}$

4 (UF-GO) Escreva a equação de uma circunferência de centro $(4, 4)$ e tangente externa à circunferência dada pela equação $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$.

5 (U. F. Santa Maria-RS)



O segmento $\overline{AB}$ da figura representa um diâmetro de uma circunferência. A equação dessa circunferência é dada por:

a) $x^2 + y^2 - 8x - 7y + 20 = 0$
b) $x^2 - y^2 + 8x - 7y + 20 = 0$
c) $x^2 + y^2 = 25$
d) $x^2 + y^2 - 8x - 7y + 22 = 0$
e) $-x^2 + y^2 + 8x + 7y - 22 = 0$

6 (FGV-SP) O ponto da circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0$ que possui abscissa mínima é:

a) $(2, 4)$
b) $\left(\frac{5}{2}, 4\right)$
c) $(2, 3)$
d) $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$
e) $(3, 2)$

Respostas dos exercícios complementares

Página 5

1. $E = \dfrac{a}{a - 1}$

2. $\lambda^2 - 2$

3. $m = 7$ e $n = 6$

4. Demonstração.

5. e **6.** b

Página 7

1. b **2.** d

3. 20% **4.** d

5. a **6.** R$ 81,00

Página 10

1. e

2. Valéria pensou no número 9.

3. b **4.** a

5. a **6.** $S = \{-1; 1\}$

Página 15

1. e **2.** e

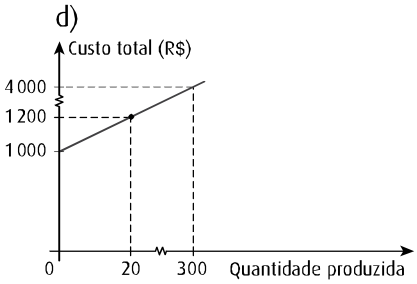
3. b **4.** c

5. a) $f(x) = 1\,000 + 10 \cdot x$

b) R$ 1 200,00

c) 300 unidades

d)



6. a) R$ 40,00

b) Após 68 minutos.

Página 18

1. d **2.** d

3. c **4.** c

5. 2 **6.** 5 cm

Página 21

1. e **2.** d

3. c **4.** c

5. e **6.** a

Página 23

1. b **2.** c

3. $b = \dfrac{2}{3}$ **4.** d

5. d **6.** d

Páginas 25 e 26

1. b **2.** c

3. d **4.** a

5. a **6.** b

Página 29

1. d **2.** d

3. b **4.** 180°

5. d **6.** 14

Página 32

1. 55° **2.** d

3. b **4.** c

5. c **6.** d

Página 35

1. e **2.** b

3. d **4.** c

5. e **6.** a

Páginas 37 e 38

1. c **2.** a

3. b **4.** $\dfrac{120}{13}$ cm

5. A distância AP é $\dfrac{3}{4}$.

6. a

Página 40

1. c

2. b

3. O comprimento de AR vale 8.

4. d

5. O raio do círculo é $2\sqrt{5}$.

6. c

Página 44

1. $S_{ABC} = 2$ **2.** d

3. c **4.** e

5. $x = 2$ m **6.** c

Página 49

1. $V = 6\ m^3$ **2.** d

3. a **4.** d

5. $\dfrac{\ell^3}{6}$

6. a) $\dfrac{4}{3}\ cm^3$

b) $\dfrac{104}{3}\ cm^3$

Página 54

1. b **2.** d

3. d **4.** c

5. a **6.** a

Página 57

1. e **2.** a

3. d **4.** b

5. b

6. a) BD = 4 km e EF = 1,7 km

b) R$ 13,60

Páginas 59 e 60

1. a **2.** a

3. b **4.** d

5. e **6.** c

Página 64

1. a) 112,5°

b) $\dfrac{43\pi}{36}$ rad

2. a **3.** c

4. $-\dfrac{4}{3}$

5. c

6. c

Página 67

1. d **2.** c

3. d **4.** d

5. d

6. V – V – F – F

Página 69

1. d

2. $S = \left\{\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right\}$

3. c

4. c

5. $\dfrac{\pi}{6} < x \leq \dfrac{\pi}{3}$

6. d

Página 71

1. e **2.** $E = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3. d **4.** d

5. d **6.** d

Página 74

1. e

2. a) $n = 8$

b) $b_{137} = 135$

3. 252 **4.** a

5. a **6.** a

Página 76

1. a **2.** b

3. d **4.** b

5. e **6.** d

Página 78

1. a
2. d
3. a
4. 18
5. e
6. Soma = 14 (02 + 04 + 08)

Página 82

1. c
2. a) -2 b) 900
3. c
4. c
5. d
6. e

Página 85

1. b
2. 107 358
3. d
4. c
5. c
6. a

Página 88

1. -5
2. e
3. b
4. a
5. a
6. a) 0,11111 b) $\frac{1}{9}$

Página 94

1. c
2. b
3. a) $\begin{bmatrix} -2 & 7 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 14 & 8 & -2 \\ 8 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & -5 \end{bmatrix}$
4. c
5. d
6. d

Página 99

1. d
2. c
3. -3
4. c
5. a) $m \neq -8, \forall n \in \mathbb{R}$ (SPD)

   b) $m = -8$ e $n = \frac{3}{2}$ (SPI)

   c) $m = -8$ e $n \neq \frac{3}{2}$ (SI)
6. b

Página 102

1. $\frac{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot R^3}{2}$
2. b
3. $128\pi\ cm^3$
4. $\frac{8\,788\pi}{3}\ cm^3$ e $676\pi\ cm^2$
5. a
6. V – V – V – V – F

Página 106

1. a) $m = 9$ b) $m = -1$
2. e
3. $a = 4$ e $b \neq -32$
4. d
5. a
6. $\frac{\sqrt{2}}{27}$

Página 110

1. a) -2 b) Demonstração.
2. 4
3. d
4. b
5. b
6. e

Página 113

1. d
2. e
3. a
4. b
5. c
6. b

Página 116

1. a
2. $k = -3$ e $S = \{1; 1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}$
3. c
4. c
5. b
6. c

Página 119

1. a) -6 c) 16

   b) 1 d) -2
2. e
3. $\sqrt{13}$
4. d
5. a
6. b

Página 123

1. 198
2. e
3. a) 120 anagramas

   b) 72 anagramas

   c) 36 anagramas

   d) 12 anagramas
4. b
5. c
6. d

Páginas 125 e 126

1. d
2. c
3. c
4. a
5. e
6. 20

Página 131

1. $\frac{3}{5}$ ou 60%
2. b
3. e
4. a) 16 b) 1 ou 9
5. c
6. c

Página 134

1. c
2. Triângulo retângulo com área igual a 15 u.a.
3. a
4. b
5. a
6. d

Página 140

1. d
2. e
3. $\left(\frac{6}{5}, \frac{24}{5}\right)$
4. e
5. b
6. c

Página 143

1. e
2. d
3. d
4. $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$
5. d
6. a

Resolução dos exercícios complementares

Página 5

1. $E = \dfrac{a-1}{a+1} + \dfrac{a+1}{a-1} - \dfrac{a^2-a+2}{a^2-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow E = \dfrac{(a-1)^2 + (a+1)^2 - (a^2-a+2)}{(a+1)\cdot(a-1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow E = \dfrac{a^2 - 2a + 1 + a^2 + 2a + 1 - a^2 + a - 2}{(a+1)\cdot(a-1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow E = \dfrac{a^2+a}{(a+1)\cdot(a-1)} \Rightarrow E = \dfrac{a\cdot(a+1)}{(a+1)\cdot(a-1)}$

$\therefore E = \dfrac{a}{a-1}$

2. $x + \dfrac{1}{x} = \lambda \Rightarrow \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = \lambda^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \lambda^2 \Rightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2 = \lambda^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \lambda^2 - 2$

3. $m^2 - n^2 = 13 \Rightarrow (m+n)\cdot(m-n) = 13\cdot 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} m+n=13 \\ m-n=1 \end{matrix}\right\} \therefore m = 7 \text{ e } n = 6$

4. Sejam *a* e *b* esses números naturais:

$D = (a+b)^3 - (a^3+b^3) =$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - a^3 - b^3 =$

$= 3a^2b + 3ab^2 = 3ab(a+b)$

Se *a* ou *b* forem pares, teremos $a\cdot b$ par.

Como 3 vezes um número par é múltiplo de 6, D é múltiplo de 6.

Se *a* e *b* forem ímpares, teremos $(a+b)$ par.

Como 3 vezes um número par é múltiplo de 6, D é múltiplo de 6.

5. e

$\dfrac{\cancel{(x-y)}\cancel{(x+y)}}{\cancel{(x+y)}} \cdot \dfrac{(x+y)^2}{\cancel{(x-y)}} = (x+y)^2 =$

$= [1{,}25 + (-0{,}75)]^2 = (0{,}5)^2 = 0{,}25$

6. b

$\left(\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2} - 2\right) : \left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} - 2\right) =$

$= \left(\dfrac{a^4 + b^4 - 2a^2b^2}{a^2b^2}\right) : \left(\dfrac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab}\right) =$

$= \left(\dfrac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{a^2b^2}\right) : \left(\dfrac{a^2 - 2ab + b^2}{ab}\right) =$

$= \dfrac{(a^2-b^2)^2}{a^2b^2} : \dfrac{(a-b)^2}{ab} = \dfrac{[(a-b)(a+b)]^2}{a^2b^2} \cdot \dfrac{ab}{(a-b)^2} =$

$= \dfrac{(a-b)^2(a+b)^2}{(ab)^2} \cdot \dfrac{ab}{(a-b)^2} = \dfrac{(a+b)^2}{ab}$

Página 7

1. b

Sendo *x* o preço inicial do objeto, temos:

$1{,}2 \cdot 0{,}8x = 0{,}96x$

Portanto, está 4% mais barato.

2. d

Seja *n* o número de questões.

Acertos:

20 + 36% de $(n - 30)$ = 47,5% de $n \Rightarrow$

$\Rightarrow 20 + 0{,}36\cdot(n-30) = 0{,}475\cdot n \Rightarrow$

$\Rightarrow 20 + 0{,}36\cdot n - 10{,}8 = 0{,}475\cdot n \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}115\cdot n = 9{,}2 \therefore n = 80$

3. Seja f_D o fator de desconto que fará o preço retornar ao valor inicial.

Assim:

$V\cdot 1{,}25\cdot f_D = V \Rightarrow 1{,}25\cdot f_D = 1 \Rightarrow f_D = \dfrac{1}{1{,}25}$

$\therefore f_D = 0{,}80$

Se o fator de desconto é 0,80, isso significa que se deve calcular 80% do valor final para que se tenha o valor inicial. Logo, o desconto que fará o preço da mercadoria voltar ao valor inicial é de 20%.

4. d

I. $0{,}7\cdot 3\,000 = 2\,100$

Perdeu R$ 900,00 no primeiro mês.

II. $\dfrac{40}{100}\cdot 900 = 360$

Recuperou R$ 360,00, ficando, então, com $2\,100 + 360 =$ R$ 2 460,00.

Assim:

$2\,460 = \frac{x}{100} \cdot 3\,000 \Rightarrow x = 82$

Ou seja: $2\,460 = 82\%$ de $3\,000$

Logo, houve um prejuízo de 18%.

5. a

Seja V_i o valor inicial e V_f o valor final.

Assim:

$V_f = V_i \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow V_f = V_i \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}06 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_f = V_i \cdot 1{,}15752 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_f = V_i \cdot \left(1 + \frac{15{,}752}{100}\right)$

Portanto, a inflação acumulada é de 15,752%.

6. Seja R\$ 10 000,00 o total do empréstimo; ao final de 4 meses, a pessoa estará devendo:

a) na condição 1:

$4 \cdot 11{,}4\% \cdot 10\,000 = \frac{45{,}6}{100} \cdot 10\,000 =$

$=$ R\$ 4 560,00 de juros

R\$ 14 560,00.

b) na condição 2:

$C = 10\,000(1{,}1)^4 = 10\,000 \cdot 1{,}4641 =$

$=$ R\$ 14 641,00

Portanto, os juros cobrados na primeira condição farão com que a dívida seja menor em R\$ 81,00.

Página 10

1. e

Sejam *x* o número de filhos do casal e *y* o número de filhas. Portanto, cada filho tem $(x - 1)$ irmãos e *y* irmãs; cada filha tem $(y - 1)$ irmãs e *x* irmãos.

$\begin{cases} x - 1 = y \\ x = 2(y - 1) \end{cases}$

$x = 2(x - 1 - 1)$

$x = 2(x - 2)$

$x = 2x - 4$

$x = 4$

$y = 4 - 1 \Rightarrow y = 3$

O total de filhos e filhas é 7.

2. Seja *x* o número pensado por Valéria.

Assim:

$\frac{2x + 12}{2} = 15 \Rightarrow 2x + 12 = 30 \Rightarrow 2x = 18$

$\therefore x = 9$

Valéria pensou no número 9.

3. b

Seja *x* o número de amigos.

$2x + 25 = 3x - 15 \Rightarrow x = 40$

Logo, o número de amigos é 40 e o número de convites é:

$2x + 25 = 2 \cdot 40 + 25 = 105$

Temos:

$4x = 4 \cdot 40 = 160$

Portanto, precisará de mais $(160 - 105) \Rightarrow$

$\Rightarrow 55$ convites.

4. a

$x^2 + y^2 + 2xy + x + y - 6 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 + x + y - 6 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + y)^2 + (x + y) - 6 = 0$

Fazendo $x + y = m$, temos:

$m^2 + m - 6 = 0 \Rightarrow m = \frac{-1 \pm 5}{2} \therefore \begin{cases} m = -3 \\ \text{ou} \\ m = 2 \end{cases}$

Logo:

$\begin{cases} x + y = -3 \\ \text{ou} \\ x + y = 2 \end{cases}$ (Não convém, pois *x* e *y* são números positivos.)

5. a

Na equação dada, temos:

$a + b = -\frac{(-3)}{2} = \frac{3}{2}$ e $a \cdot b = \frac{(-2)}{2} = -1$

Na equação procurada, temos:

$(a + 1) + (b + 1) = a + b + 2 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$ e

$(a + 1) \cdot (b + 1) = ab + a + b + 1 =$

$= -1 + \frac{3}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

Assim:

$(a + 1) + (b + 1) = \frac{7}{2}$ e $(a + 1) \cdot (b + 1) = \frac{3}{2}$, cuja equação pode ser:

$2x^2 - 7x + 3 = 0$

6. Fazendo $x^2 = m$, temos: $4m^2 - 3m - 1 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1) = 25$

$x = \frac{3 \pm 5}{8}$

$\begin{cases} m_1 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1 \\ m_2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{4} \text{ (Não convém.)} \end{cases}$

$\therefore S = \{-1, 1\}$

Página 15

1. e

$$\frac{3x-1}{2} = 7 \Rightarrow 3x - 1 = 14 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$$

2. e

A função *f* é representada por um segmento de reta decrescente, pois o coeficiente angular é negativo. Logo, o maior valor de *x* determinará a menor imagem e vice-versa.

$$\left.\begin{aligned} f(1) &= 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2} \\ f(-3) &= 1 - \frac{(-3)}{2} \Rightarrow f(-3) = \frac{5}{2} \end{aligned}\right\} \therefore \text{Im} = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$$

3. b

Seja *f* a função dada por $f(x) = ax + b$.

$$\left.\begin{aligned} &f(0) = 1 + f(1) \Rightarrow b = 1 + a + b \Rightarrow a = -1 \\ &f(-1) = 2 - f(0) \Rightarrow -a + b = 2 - b \Rightarrow b = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$\therefore f(x) = -x + \frac{1}{2}$$

$$f(3) = -3 + \frac{1}{2} \therefore f(3) = -\frac{5}{2}$$

4. c

Seja a função que representa o dinheiro gasto (y) em função da quantidade de perfume produzida (x) dada pela sentença $y = ax + b$.

Observando o gráfico, temos:

$$\left.\begin{aligned} a \cdot 0 + b = 20 \Rightarrow b = 20 \\ a \cdot 10 + b = 190 \Rightarrow a = 17 \end{aligned}\right\} \therefore y = 17x + 20$$

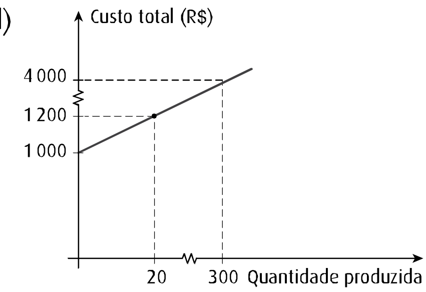
A alternativa *a* é falsa, pois, quando a empresa não produz, existe uma despesa fixa de R$ 20,00.
A alternativa *b* é falsa, pois, para produzir três litros, a empresa gasta R$ 71,00 ($x = 3 \Rightarrow y = 17 \cdot 3 + 20 = 71$).
A alternativa *d* é falsa, de acordo com o gráfico.
A alternativa *e* é falsa, pois o custo adicional de um litro é sempre igual, já que o crescimento é linear.
A alternativa *c* é verdadeira, pois para produzir dois litros a empresa gasta R$ 54,00 ($x = 2 \Rightarrow y = 17 \cdot 2 + 20 = 54$).

5. a) $f(x) = 1000 + 10x$

b) $x = 20$
$f(20) = 1000 + 10 \cdot 20$
$f(20) = 1000 + 200 = 1200$
O custo na produção de 20 unidades é de R$ 1 200,00.

c) $y = 1000 + 10x$
$4000 = 1000 + 10x$
$10x = 3000$
$x = 300$ unidades

d)



6. Sejam *x* o tempo da ligação em minutos e *y* o valor a ser pago em reais.

Plano A:
$y = 50 + 0,25x$

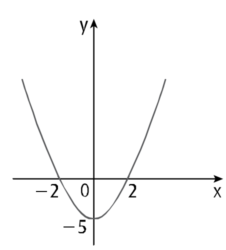
Plano B:
$y = 40$, se $0 \leqslant x \leqslant 50$
$y = 40 + 1,5\,(x - 50)$, se $x > 50$

a) Plano A:
$y = 50 + 0,25 \cdot 30 =$ R$ 57,50
Plano B:
$y =$ R$ 40,00

b) $y_b > y_a$
$40 + 1,5\,(x - 50) > 50 + 0,25x \Rightarrow$
$\Rightarrow 40 + 1,5x - 75 > 50 + 0,25x \Rightarrow$
$\Rightarrow 1,25x > 85 \Rightarrow x > 68$

Página 18

1. d



A melhor maneira de se resolver esse exercício é trabalhar com o trinômio do 2º grau na sua forma fatorada, ou seja:

$f(x) = ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Assim, teremos:

$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \Rightarrow f(x) =$
$= a \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) \Rightarrow f(x) = a \cdot (x^2 - 4)$

$$f(0) = -5 \Rightarrow -4 \cdot a = -5 \Rightarrow a = \frac{5}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{5}{4} \cdot (x^2 - 4) \therefore f(x) = \frac{5}{4} \cdot x^2 - 5$$

2. d

$N(t) = 0{,}1t^2 - 4t + 90$

Coordenadas do vértice:

abscissa (temperatura)

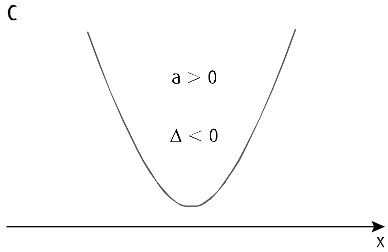
$t_v = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{0{,}2} = 20$ batimentos

$y_v = 0{,}1 \cdot 20^2 - 4 \cdot 20 + 90$

$y_v = 40 - 80 + 90 = 50$

Temperatura de 20 °C e número mínimo de batimentos igual a 50.

3. c



$a > 0 \Rightarrow m - 1 > 0 \therefore m > 1$

$\Delta < 0 \Rightarrow (2m)^2 - 4 \cdot (m - 1) \cdot (3m) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2m^2 + 3m < 0$

$\therefore m < 0$ ou $m > \frac{3}{2}$

Pela intersecção, temos: $m > \frac{3}{2}$.

4. c

$A(x) = 4 \cdot 8 - \left(\frac{x \cdot 8}{2}\right) - \frac{(8 - 2x) \cdot (4 - x)}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A(x) = -x^2 + 4x + 16$

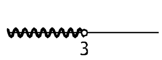
$A_{máx.} = y_v = \frac{-[4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 16]}{4 \cdot (-1)} \therefore A_{máx.} = 20$

5. $\begin{cases} 2x + 1 > 3x - 2 \\ x^2 - 6x + 8 \leqslant 0 \end{cases}$

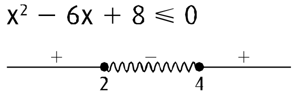
I. $2x + 1 > 3x - 2 \Rightarrow 2x - 3x > -2 - 1$

$-x > -3 \quad (-1)$

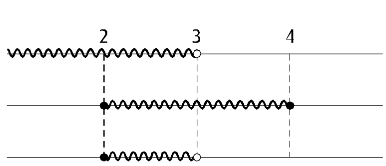
$x < 3$



II. $x^2 - 6x + 8 \leqslant 0$

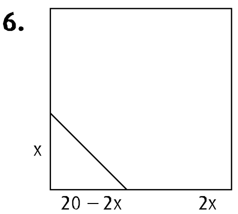


Fazendo a intersecção:



Logo, temos apenas um número inteiro, que é o 2.

6.



$y = \frac{(20 - 2x) \cdot x}{2}$

$y = 10x - x^2$

$y = -x^2 + 10x$

$x_v = \frac{-10}{-2}$

$x_v = 5 \therefore AM = 5$ cm

Página 21

1. e

$4^x - 4^{x-1} = 24 \Rightarrow 4^x - \frac{4^x}{4} = 24 \xrightarrow{(\times 4)} 4 \cdot 4^x - 4^x =$

$= 96 \Rightarrow 3 \cdot 4^x = 96 \Rightarrow 4^x = 32 \Rightarrow 2^{2x} = 2^5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = 5 \therefore x = \frac{5}{2}$

$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

2. d

$3^x \cdot 3 + 2^y = 2^y \cdot 2^2 - 3^x \Rightarrow 4 \cdot 3^x = 3 \cdot 2^y \Rightarrow \frac{3^x}{2^y} = \frac{3^1}{2^2}$

Como *x* e *y* são inteiros, temos:

$x = 1$ e $y = 2$

$\therefore 3^x = 3^1 = 3$

3. c

$\begin{cases} x^y = y^x \\ \frac{x}{y} = 2 \Rightarrow x = 2y \end{cases} \Rightarrow (2y)^y = y^{2y} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^y \cdot y^y = y^y \cdot y^y \Rightarrow 2^y = y^y \therefore y = 2$ e $x = 4$

Logo: $5x - y = 5 \cdot 4 - 2 \therefore 5x - y = 18$

4. c

$\begin{cases} 4^x + 3^y = 43 \\ 4^x - 3^y = -11 \end{cases} +$

$2 \cdot 4^x = 32 \Rightarrow 4^x = 16 \Rightarrow 4^x = 4^2 \Rightarrow x = 2$

De $4^x + 3^y = 43$, temos:

$4^2 + 3^y = 43 \Rightarrow 3^y = 43 - 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^y = 27 \Rightarrow 3^y = 3^3 \Rightarrow y = 3$

$x + y = 2 + 3 = 5$

5. e

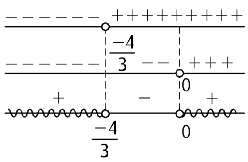
$5^{3y} = 64 \Rightarrow (5^y)^3 = 4^3 \Rightarrow 5^y = 4 \Rightarrow \frac{1}{5^y} = \frac{1}{4}$

$\therefore 5^{-y} = \frac{1}{4}$

6. a

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{x}} < 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{x}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{2}{x} > -\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x} + \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow \frac{3x+4}{2x} > 0$$



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{-4}{3} \text{ ou } x > 0\right\}$$

O menor número inteiro positivo que é solução da inequação é o 1.

Página 23

1. b

$$\left(\sqrt[8]{2}\right)^x = \sqrt{2} \Rightarrow 2^{\frac{x}{8}} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{1}{2} \therefore x = 4$$

$$\log_4\left(4\sqrt{2}\right) = y \Rightarrow 4^y = \left(4\sqrt{2}\right) \Rightarrow 2^{2y} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{2y} = 2^{\frac{5}{2}} \Rightarrow 2y = \frac{5}{2} \therefore y = \frac{5}{4}$$

2. c

I. $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

II. $x - 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2$

III. $x^2 - 2x - 3 > 0 \Rightarrow x < -1$ ou $x > 3$

C.E.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

3. Seja *b* a base do logaritmo.

Assim:

$$\log_b \frac{27}{8} = -3 \Rightarrow b^{-3} = \frac{27}{8} \Rightarrow b^{-3} = \frac{3^3}{2^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \Rightarrow b^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

4. d

I. $\log_3 \sqrt{27} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

II. $\log_\pi \pi = 1$

III. $\log 1 = 0$

IV. $2^{3 + \log_2 5} = 2^3 \cdot 2^{\log_2 5} = 8 \cdot 5 = 40$

Então:

$$\frac{3}{2} + 1 - 0 + 40 - 25 = \frac{35}{2}$$

5. d

I. $x^{-3} = 125 \Rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^3 = 125 \Rightarrow \frac{1}{x} = 5 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

II. $32^x = y \Rightarrow (32)^{\frac{1}{5}} = y \Rightarrow (2^5)^{\frac{1}{5}} = y \Rightarrow y = 2$

6. d

$\log_3(9^x - 2) = x \Rightarrow 9^x - 2 = 3^x \Rightarrow 9^x - 3^x - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (3^x)^2 - 3^x - 2 = 0$

Fazendo $3^x = m$, vem:

$m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = -1$ ou $m = 2$

$$\begin{cases} m = -1 \Rightarrow 3^x = -1 \text{ (Não convém.)} \\ m = 2 \Rightarrow 3^x = 2 \therefore x = \log_3 2 \end{cases}$$

Páginas 25 e 26

1. b

$f(b) = f[g(a)] = 2 \cdot g(a) - 2 = 2 \cdot (-a + 3) - 2$

$\therefore f(b) = -2a + 4$

2. c

$f(f(f(2))) = f(f(5)) = f(5 - 4) = f(1) = 3^1 = 3$

3. d

$f(x) = ax + b$

Em $(0, -2)$, temos: $b = -2$

Em $(2, 0)$, temos: $2a + b = 0 \Rightarrow 2a - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 1$

Portanto: $f(x) = x - 2$

$g(x) = cx + d$

Em $(0, 4)$, temos: $d = 4$

Em $(2, 0)$, temos: $2c + d = 0 \Rightarrow 2c + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c = -2$

Portanto: $g(x) = -2x + 4$

$f(g(x)) = f(-2x + 4) = -2x + 4 - 2 = -2x + 2$

O gráfico de $f(g(x))$ é o da alternativa *d*.

4. a

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow y = \frac{1}{x+1} \Rightarrow y \cdot (x + 1) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \cdot x + y = 1 \Rightarrow y \cdot x = 1 - y \Rightarrow x = \frac{1 - y}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^{-1} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x} \therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 1$$

5. a

$$f(x) = \frac{2x - 4}{x - 3} \Rightarrow y = \frac{2x - 4}{x - 3} \Rightarrow y \cdot (x - 3) = 2x - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \cdot x - 3y = 2x - 4 \Rightarrow y \cdot x - 2x = 3y - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y - 2) \cdot x = 3y - 4 \Rightarrow x = \frac{3y - 4}{y - 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^{-1} = \frac{3x - 4}{x - 2} \therefore f^{-1}(x) = \frac{3x - 4}{x - 2}$$

$B = CD_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{2\} \therefore a = 2$

6. b

$$2x - 9 = c \Rightarrow x = \frac{c + 9}{2}$$

Então:

$$f(c) = \frac{c + 9}{2}$$

$y = \dfrac{c + 9}{2}$

Trocando *c* por *y* e *y* por *c*, vem:

$c = \dfrac{y + 9}{2} \Rightarrow y = 2c - 9$

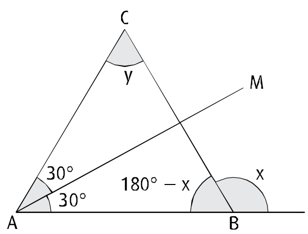
$\therefore f^{-1}(c) = 2c - 9$

$f(c) = f^{-1}(c) \Rightarrow \dfrac{c + 9}{2} = 2c - 9 \Rightarrow c + 9 = 4c - 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3c = 27 \Rightarrow c = 9$

Página 29

1. d

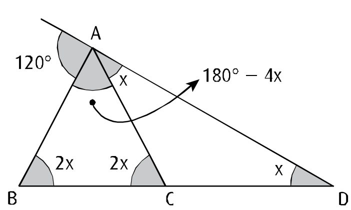


$x = y + 60° \Rightarrow x - y = 60°$

2. d

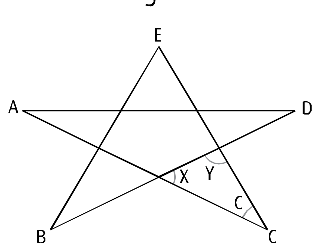
$$\left.\begin{array}{l} x - 1 < 2x + 1 + 10 \Rightarrow x > -12 \\ 2x + 1 < x - 1 + 10 \Rightarrow x < 8 \\ 10 < 2x + 1 + x - 1 \Rightarrow x > \dfrac{10}{3} \end{array}\right\} \therefore x \in \{4, 5, 6, 7\}$$

3. b



No $\triangle ABD$, temos: $120° = 2x + x \therefore x = 40°$

4. Observe a figura:



$\hat{X}$ é externo ao $\triangle ADX \Rightarrow med(\hat{X}) = med(\hat{A}) + med(\hat{D})$

$\hat{Y}$ é externo ao $\triangle BEY \Rightarrow med(\hat{Y}) = med(\hat{B}) + med(\hat{E})$

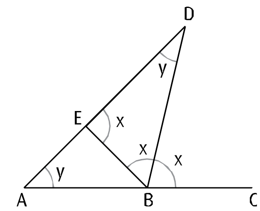
No $\triangle XYC$, temos:

$med(\hat{X}) + med(\hat{Y}) + med(\hat{C}) = 180°$

$\therefore med(\hat{A}) + med(\hat{B}) + med(\hat{C}) + med(\hat{D}) + med(\hat{E}) =$
$= 180°$

5. d

Chamemos de *x* cada ângulo assinalado e de *y* o ângulo $B\hat{D}E$.



O triângulo BDE é isósceles de base $\overline{BE}$.

$\therefore med(B\hat{E}D) = x$

Como o triângulo ABD é isósceles de base $\overline{AD}$, temos: $med(B\hat{A}D) = y$

No triângulo ABD, *x* é um ângulo externo.

Assim: $x = 2y$ (I)

No triângulo BDE, temos: $2x + y = 180°$ (II)

Substituindo (I) em (II), temos:

$2x + y = 180° \Rightarrow 2 \cdot 2y + y = 180° \Rightarrow 5y = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 36°$ e $x = 72°$

O ângulo $A\hat{E}B$ mede $180° - x = 180° - 72° = 108°$

6. Seja *x* o ângulo interno desse polígono que não foi incluído na soma.

I. $0° < x < 180°$

II. $2\,004° + x = (n - 2) \cdot 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\,004° + x = 180n - 360° \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\,364° + x = 180n \Rightarrow x = 180n - 2\,364°$

De I, temos:

$0° < 180n - 2\,364 < 180°$

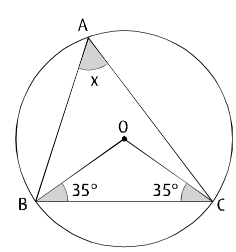
$2\,364° < 180n < 2\,544° \Rightarrow 13{,}13 < n < 14{,}13$

Como $n \in \mathbb{N}$ e $n > 2$, temos $n = 14$.

Portanto, o polígono possui 14 lados.

Página 32

1.



$OB = OC =$ raio $\Rightarrow$ O triângulo OBC é isósceles:

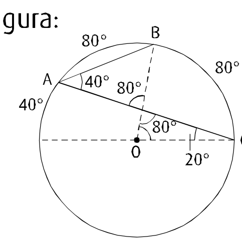
$med(O\hat{C}B) = med(O\hat{B}C) = 35°$

$med(B\hat{O}C) + 35° + 35° = 180° \Rightarrow med(B\hat{O}C) = 110°$

$med(B\hat{A}C) = \dfrac{med(B\hat{O}C)}{2} = \dfrac{110°}{2} \therefore x = 55°$

2. d

Observe a figura:



$med(A\hat{B}O) = 180° - 80° - 40° = 60°$

3. b

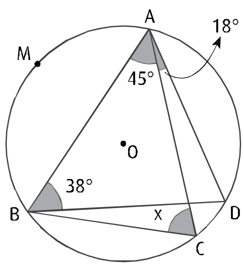
Se $A\hat{C}B$ mede 62°, então o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede: $2 \cdot 62° =$
$= 124°$

$\text{med}(\overset{\frown}{AC}) + \text{med}(\overset{\frown}{BC}) + \text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 360° \Rightarrow$

$\Rightarrow 130° + \text{med}(\overset{\frown}{BC}) + 124° = 360° \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{med}(\overset{\frown}{BC}) = 106°$ e $x = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{BC})}{2} = 53°$

4. c



$38° + 45° + 18° + \text{med}(\hat{D}) = 180°$
$\text{med}(\hat{D}) = 79°$
$\text{med}(\hat{D}) = \text{med}(\hat{C}) = 79°$ ("Enxergam" o mesmo arco.)

5. c

$\gamma = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{AC})}{2} \Rightarrow \text{med}(\overset{\frown}{AC}) = 100°$

$\beta = \text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 150°$

$\text{med}(\overset{\frown}{BC}) = 360° - \text{med}(\overset{\frown}{AB}) - \text{med}(\overset{\frown}{AC})$

$\text{med}(\overset{\frown}{BC}) = 360° - 150° - 100°$

$\text{med}(\overset{\frown}{BC}) = 110°$

$2\alpha + \text{med}(\overset{\frown}{BC}) = 180° \Rightarrow 2\alpha + 110° = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\alpha = 70° \Rightarrow \alpha = 35°$

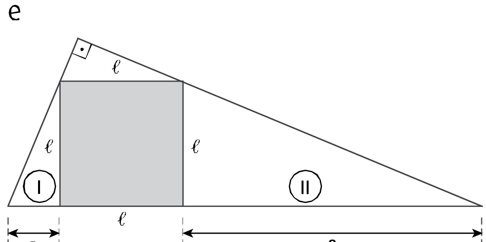
6. d

$x = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{ADC})}{2}$ e $y = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{ACD})}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y = \dfrac{360° + 60°}{2} \therefore x + y = 210°$

Página 35

1. e



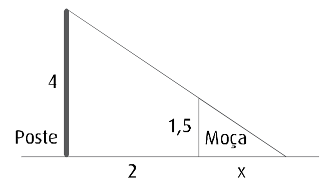
Os triângulos I e II são semelhantes.

Assim:

$\dfrac{2}{\ell} = \dfrac{\ell}{8} \Rightarrow \ell^2 = 16$

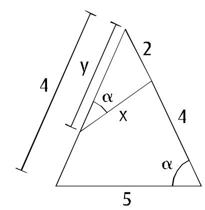
$A = \ell^2 \therefore A = 16$

2. b



$\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{x}{1{,}5} \Rightarrow 4x = 1{,}5x + 3 \Rightarrow 2{,}5x = 3 \therefore x = 1{,}20\text{ m}$

3. d



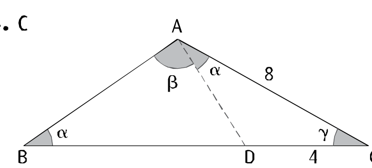
$\dfrac{4}{2} = \dfrac{5}{x} = \dfrac{6}{y}$

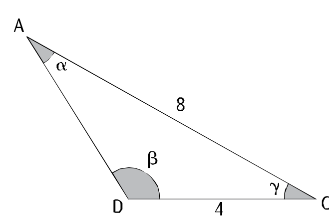
$x = \dfrac{5}{2}$

$y = 3$

Perímetro: $2 + \dfrac{5}{2} + 3 = 5 + \dfrac{5}{2} = \dfrac{15}{2}$

4. c





$\dfrac{BD + 4}{8} = \dfrac{8}{4} \Rightarrow BD + 4 = \dfrac{8 \cdot 8}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow BD + 4 = 16 \therefore BD = 12$

5. e

Chamemos *x* o lado $\overline{BC}$.

$\dfrac{6}{11 - x} = \dfrac{x}{3} \Rightarrow 11x - x^2 = 18 \Rightarrow x^2 - 11x + 18 = 0$

$\Delta = 121 - 72 = 49$

$x = \dfrac{11 \pm 7}{2}$

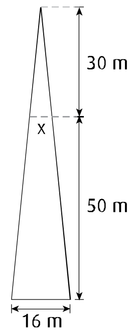
$x_1 = 2$

$x_2 = 9$

As medidas possíveis são 2 dm e 9 dm.

6. a

Observe a figura a seguir:



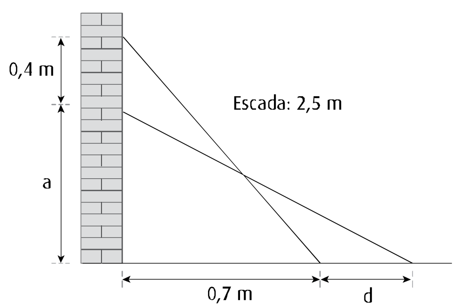
$$\frac{16}{x} = \frac{80}{30} \Rightarrow x = \frac{16 \cdot 30}{80} \Rightarrow x = 6 \text{ m}$$

Portanto, sendo *x* o diâmetro do disco voador, o raio é de 3 m.

Páginas 37 e 38

1. c

Seja *d* o deslocamento do pé da escada.



$(a + 0{,}4)^2 + (0{,}7)^2 = (2{,}5)^2 \Rightarrow (a + 0{,}4)^2 = 5{,}76 \Rightarrow$

$\Rightarrow a + 0{,}4 = 2{,}4 \therefore a = 2{,}0$

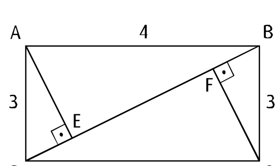
$(d + 0{,}7)^2 + a^2 = (2{,}5)^2 \Rightarrow (d + 0{,}7)^2 + (2{,}0)^2 = (2{,}5)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (d + 0{,}7)^2 = 2{,}25 \Rightarrow d + 0{,}7 = 1{,}5 \therefore d = 0{,}8 \text{ m}$

2. a

Sejam *a*, *b* e *c* os lados dos triângulos com $a > b > c$.
Sendo assim, o maior quadrado tem lado *a*.
Sabemos, pelo teorema de Pitágoras, que $a^2 = b^2 + c^2$.
Temos, pelo enunciado do exercício, que: $a^2 + b^2 + c^2 = 18$. Isso implica: $b^2 + c^2 = 18 - a^2$.
Substituindo na equação anterior, temos:
$a^2 = 18 - a^2 \Rightarrow 2a^2 = 18 \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2 = 9$ (área do maior quadrado)

3. b



Por Pitágoras, temos: $BD = 5$

Das relações métricas no triângulo retângulo, vem:

$3^2 = 5 \cdot DE \Rightarrow DE = \frac{9}{5}$

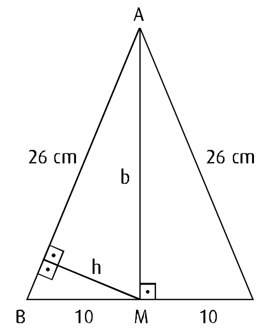
Da mesma forma: $BF = \frac{9}{5}$

$BD = DE + EF + FB$

$5 = \frac{9}{5} + EF + \frac{9}{5} \Rightarrow EF = 5 - \frac{18}{5} \Rightarrow EF = \frac{7}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow EF = 1{,}4$

4. Observe a figura:

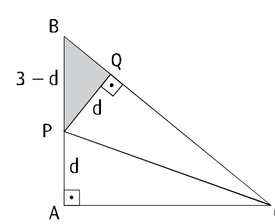


Aplicando Pitágoras no triângulo AMC, temos:
$26^2 = b^2 + 10^2$
$b^2 = 576$
$b = 24$

Da relação $bc = ah$, temos no triângulo ABM que:
$10 \cdot b = 26 \cdot h$
$10 \cdot 24 = 26 \cdot h$

$h = \frac{240}{26} = \frac{120}{13}$ cm

5.



Os triângulos ACP e QCP são congruentes (dois triângulos retângulos com a mesma hipotenusa e dois catetos de mesma medida).
Assim:

- $AC = QC = 4 \Rightarrow BQ = 1$
- $PA = PQ = d \Rightarrow BP = 3 - d$

No triângulo retângulo PBQ, temos:

$(PQ)^2 + (BQ)^2 = (PB)^2 \Rightarrow d^2 + 1^2 = (3 - d)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow d^2 + 1 = 9 - 6d + d^2 \Rightarrow 6d = 8 \therefore d = \frac{3}{4}$

A distância de AP é $\frac{3}{4}$.

6. a

$(BG)^2 = (AG)^2 + (AB)^2 \Rightarrow (BG)^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow BG = a\sqrt{2}$

$(CG)^2 = (BG)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (CG)^2 = 2a^2 + a^2 \Rightarrow CG = a\sqrt{3}$

$(DG)^2 = (CG)^2 + (CD)^2 \Rightarrow (DG)^2 = 3a^2 + a^2 \Rightarrow DG = 2a$

$(EG)^2 = (DG)^2 + (DE)^2 \Rightarrow (EG)^2 = 4a^2 + a^2 \Rightarrow EG = a\sqrt{5}$

$(EG) \cdot (DF) = (DG) \cdot (DE) \Rightarrow a\sqrt{5} \cdot x = 2a \cdot a \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow x = \dfrac{2a}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow x = \dfrac{2\sqrt{5} \cdot a}{5}$

Página 40

1. c

Seja $AE = x$ e, assim, $AC = 4x$.

$CE = AC - AE \Rightarrow CE = 3x$

Tem-se:

$(AE) \cdot (CE) = (BE) \cdot (DE) \Rightarrow$

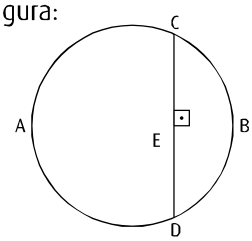
$\Rightarrow x \cdot 3x = 8 \cdot 6 \Rightarrow 3x^2 = 48 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$ cm

Sendo $AC = 4x$, conclui-se que AC é igual a 16 cm.

2. b

Observe a figura:



Temos: $CE = ED$ e

$AE \cdot EB = CE \cdot ED$

$3 = CE^2 \Rightarrow CE = \sqrt{3}$

$CD = 2 \cdot CE = 2\sqrt{3}$

3. O comprimento de $AR = 8$

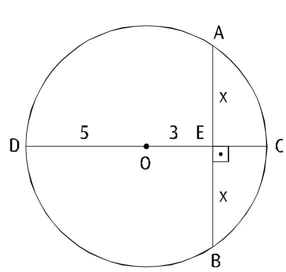
Seja $AR = x$

$(AR) \cdot (AP) = (AT)^2 \Rightarrow x \cdot (x + 10) = 12^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 + 10x - 144 = 0 \begin{cases} x = -18 \text{ (Não convém.)} \\ \text{ou} \\ x = 8 \therefore AR = 8 \end{cases}$$

4. d

Sejam $\overline{CD}$ o diâmetro e $\overline{AB}$ a corda cujo comprimento deverá ser determinado.



$(AE) \cdot (BE) = (CE) \cdot (DE) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot x = 8 \cdot 2 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

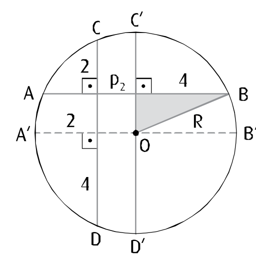
Sendo $AB = 2x$, conclui-se que a corda AB tem comprimento igual a 8 cm.

5. Sejam os segmentos $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ perpendiculares às cordas $\overline{CD}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, interceptando-as perpendicularmente e passando pelo ponto médio de cada uma delas e também pelo centro do círculo. Temos:

$(PA) \cdot (PB) = (PC) \cdot (PD) \Rightarrow 2 \cdot 6 = 2 \cdot (PD) \therefore PD = 6$

Portanto, as cordas AB e CD têm medida igual a 8 e seus respectivos pontos médios dividem-nas em dois segmentos com medida 4 cada um deles.

Pela figura a seguir, temos um triângulo retângulo de catetos 2 e 4 e hipotenusa igual ao raio R do círculo.

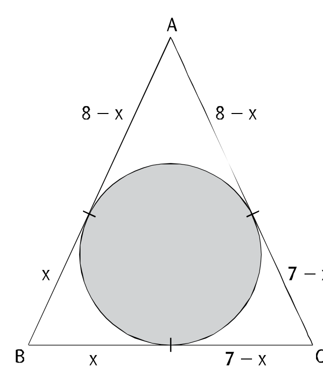


Assim:

$R^2 = 2^2 + 4^2 \Rightarrow R^2 = 20 \therefore R = 2\sqrt{5}$

6. c

Observe a figura:



$8 - x + 7 - x = 9$

$2x = 6$

$x = 3$

Página 44

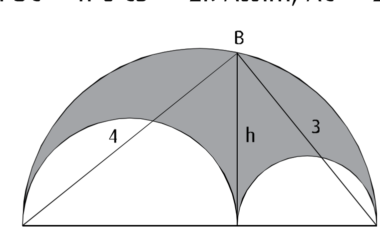
1. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot (AB) \cdot (BC) \cdot \text{sen } 45° \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \therefore S_{ABC} = 2$

2. d

$(AD)^2 = (AB)^2 + (BD)^2 \Rightarrow (AD)^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow AD = 5$

Sejam $BC = h$ e $CD = 2r$. Assim, $AC = 2R = 5 - 2r$.



$$\begin{cases} h^2 + (5 - 2r)^2 = 4 \\ h^2 + (2r)^2 = 3^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h^2 + 25 - 20r + 4r^2 = 16 & \text{(I)} \\ h^2 + 4r^2 = 9 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (II) e (I): $9 + 25 - 20r = 16 \Rightarrow 20r = 18 \Rightarrow$

$$\Rightarrow r = \frac{9}{10}$$

$$2R = 5 - 2r \Rightarrow 2R = 5 - 2 \cdot \frac{9}{10} \Rightarrow R = \frac{16}{10}$$

$$S_{\text{sombreada}} = \left[\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2\right] - \left[\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2\right] -$$

$$- \left[\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{16}{10}\right)^2\right]$$

$$S_{\text{sombreada}} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left[\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 - \left(\frac{16}{10}\right)^2\right]$$

$$S_{\text{sombreada}} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{625}{100} - \frac{81}{100} - \frac{256}{100}\right)$$

$$S_{\text{sombreada}} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{288}{100} \therefore S_{\text{sombreada}} = 1{,}44 \cdot \pi$$

3. c

Figura 1

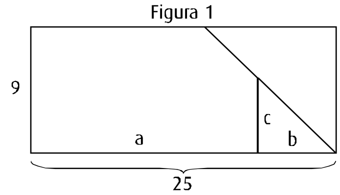
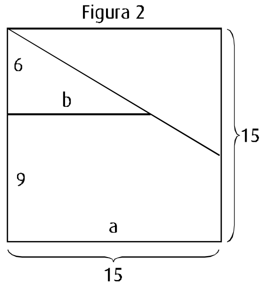


Figura 2



$S_2 = S_1 \Rightarrow \ell^2 = 25 \cdot 9$

$\therefore \ell = 5 \cdot 3 = 15$ cm

I. $a + b = 25$

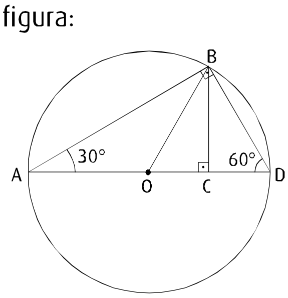
Da figura II, temos: $a = 15$

Logo, $b = 10$; e, ainda pela figura II, temos: $c = 6$

$$\text{Área} = \frac{10 \cdot 6}{2} = 30 \text{ cm}^2$$

4. e

Observe a figura:



O triângulo OBD é equilátero:

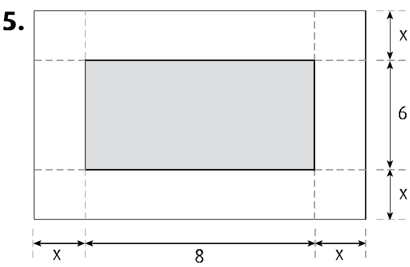
$$BC = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$OC = \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}$$

$$AC = \frac{3}{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

5.



$(2x + 8) \cdot (2x + 6) = 120 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 + 2x \cdot 6 + 2x \cdot 8 + 6 \cdot 8 = 120 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 + 28x - 72 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 + 7x - 18 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -9 \text{ (Não convém.)} \\ \text{ou} \\ x = 2 \text{ (m)} \end{cases}$$

6. c

Sejam *a* a medida do lado do quadrado maior e *b* a medida do lado do quadrado menor.

Sabemos que $BE = 4$, ou seja, $(a - b) = 4$. Temos, também, $a^2 - b^2 = 56$ (diferença entre as áreas).

Assim:

$(a - b) \cdot (a + b) = 56 \Rightarrow 4 \cdot (a + b) = 56 \Rightarrow$

$\Rightarrow a + b = 14$

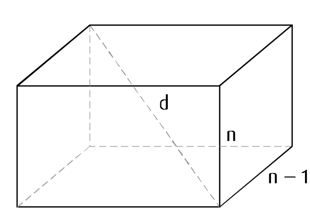
$$\left.\begin{array}{l} a - b = 4 \\ a + b = 14 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 9 \text{ e } b = 5$$

Seja S a área do triângulo.

$$S = \frac{(CD) \cdot (CE)}{2} \Rightarrow S = \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow S = \frac{9 \cdot 5}{2} \therefore S = 22{,}5$$

Página 49

1.



$$d = \sqrt{(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2} \Rightarrow \sqrt{14} =$$

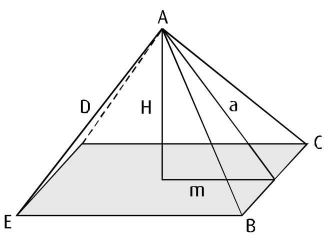
$$= \sqrt{n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sqrt{14} = \sqrt{3n^2 + 2} \Rightarrow 3n^2 + 2 = 14 \Rightarrow 3n^2 = 12 \Rightarrow$
$\Rightarrow n^2 = 4 \therefore n = 2$

As dimensões desse paralelepípedo reto-retângulo são 1 m, 2 m e 3 m. Assim:
$V = 1 \cdot 2 \cdot 3 \therefore V = 6\ m^3$

2. d
$3x^3 - x = 22 \Rightarrow 3x^3 - x - 22 = 0$
2 é raiz da equação, pois $3 \cdot 2^3 - 2 - 22 = 0 \therefore x = 2$

3. a

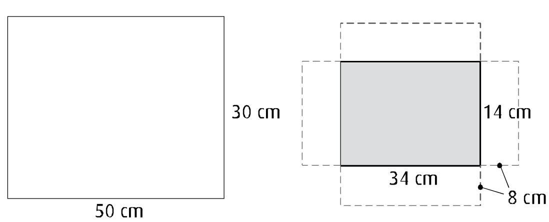


$m = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $a = \dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$H^2 + m^2 = a^2 \Rightarrow H^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow H^2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow H^2 = 1 \therefore H = \sqrt{1}$

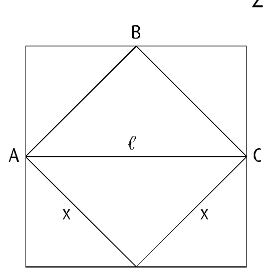
4. d



$V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = (14 \cdot 34) \cdot 8 \therefore V = 3\,808\ cm^3$

5. ABCD é um quadrado de diagonal ℓ.
Sendo AD = CD = BC = AB e aplicando Pitágoras no triângulo retângulo ADC, temos:

$\ell^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow 2x^2 = \ell^2 \Rightarrow x^2 = \dfrac{\ell^2}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$



O volume do octaedro é igual ao volume de duas pirâmides quadrangulares de base quadrada de aresta $x = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$ e altura $\dfrac{\ell}{2}$.

Assim: $V = 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\ell^2}{2} \cdot \dfrac{\ell}{2} = \dfrac{\ell^3}{6}$

6. Seja V_I o volume da pirâmide EABCD e V_{II} o volume da pirâmide EA'B'C'D'.
Temos:

I. $V_I = \dfrac{1}{3} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 = 36\ cm^3$

a) Os triângulos EAB e EA'B' são semelhantes.
Daí, temos:

$\dfrac{h - H}{h} = \dfrac{6 - 4}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

II. $\dfrac{V_{II}}{V_I} = \left(\dfrac{h - H}{h}\right)^3 \Rightarrow \dfrac{V_{II}}{V_I} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow \dfrac{V_{II}}{V_I} = \dfrac{1}{27}$

Substituindo (I) em (II), temos:

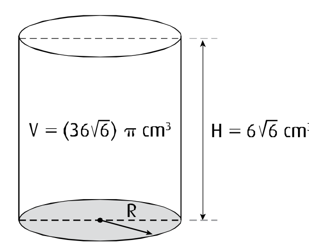
$\dfrac{V_{II}}{36} = \dfrac{1}{27} \Rightarrow V_{II} = \dfrac{36}{27} = \dfrac{4}{3}\ cm^3$

b) O volume V_T do tronco é dado por:

$V_T = V_I - V_{II} = 36 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{108 - 4}{3} = \dfrac{104}{3}\ cm^3$

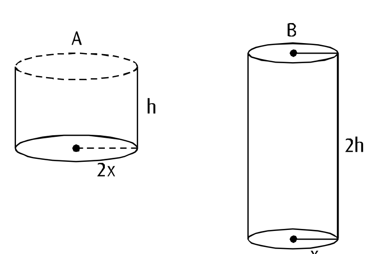
Página 54

1. b



$V_{cilindro} = Ab \cdot h \Rightarrow 36 \cdot \sqrt{6} \cdot \pi = \pi \cdot R^2 \cdot 6\sqrt{6} \Rightarrow$
$\Rightarrow R^2 = 6 \therefore R = \sqrt{6}$
$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} \Rightarrow$
$\Rightarrow A_{total} = 2\pi \cdot R \cdot H + 2\pi \cdot R^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow A_{total} = 2\pi \cdot R \cdot (H + R) \Rightarrow$
$\Rightarrow A_{total} = 2\pi \cdot \sqrt{6} \cdot (6\sqrt{6} + \sqrt{6}) \Rightarrow$
$\Rightarrow A_{Total} = 84\pi\ cm^2$

2. d



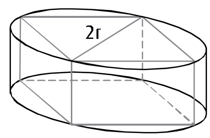
$V_A = \pi \cdot 4x^2h$ $\qquad V_B = \pi x^2 \cdot 2h$
$V_A = 2 \cdot 2\pi x^2h$ $\qquad V_B = 2\pi x^2h$

A tem o dobro de volume de B, logo A deveria custar o dobro de B.

I. (V)
II. (V)
III. (V) $V_B = \pi x^2 \cdot 4h = 4\pi x^2 h = V_A$
IV. (F)

3. d

Observe a figura:



I. $2r$ = diagonal do quadrado de lado 2

$2r = 2\sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$

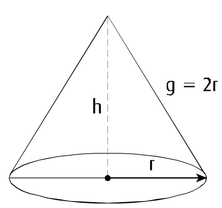
II. $h = 2$

III. A_L = área lateral $= 2\pi rh$

$A_L = 2\pi \cdot \sqrt{2} \cdot 2$

$A_L = 4\pi\sqrt{2}$

4. c



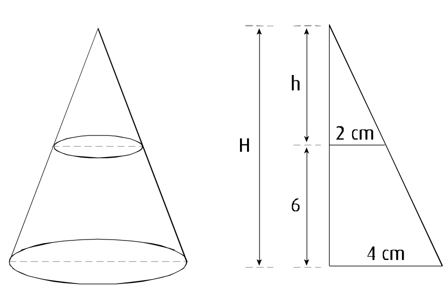
No cone equilátero, a geratriz é igual ao diâmetro da base, ou seja, $g = 2r$.

$A_{lateral} = \pi \cdot r \cdot g \Rightarrow A_{lateral} = \pi \cdot r \cdot 2r \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{lateral} = \pi \cdot r^2 \Rightarrow 2\pi \cdot r^2 = 128 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = 64 \therefore r = 8$ cm

5. a



O volume máximo de líquido que pode conter a xícara é a diferença de volumes de dois cones — o maior, que tem raio da base igual a $R = 4$ cm e altura $H = 12$, e o menor, que tem raio da base $r = 2$ cm e altura $h = 2$ cm —, valores obtidos usando-se semelhança de triângulos, como vemos nas figuras acima.

$$\frac{h+6}{h} = \frac{4}{2}$$

$2(h + 6) = 4h \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 6$ cm e $H = 12$ cm

$$V = V_{\text{cone maior}} - V_{\text{cone menor}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (R^2 \cdot H - r^2 \cdot h) \Rightarrow$$

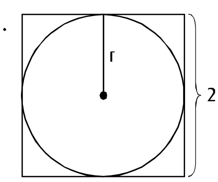
$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (4^2 \cdot 12 - 2^2 \cdot 6)$$

$\therefore V = 168$ cm^3

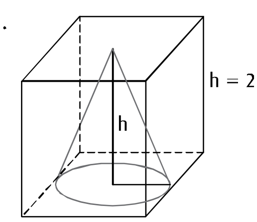
6. a

Observe as figuras:

I.



II.



$V = 18\pi \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 2r = 18\pi \Rightarrow$$

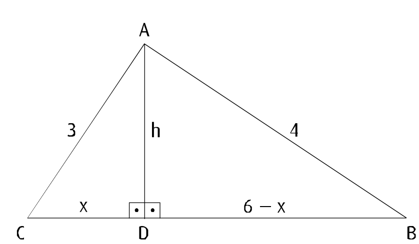
$\Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 3$ cm

S_c = área do cubo $= 6(2r)^2 = 6 \cdot 4r^2 = 24 \cdot 9 = 216$ cm^2

Página 57

1. e



No triângulo ACD, temos:

$3^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = 9 - x^2$

No triângulo ABD, temos:

$4^2 = h^2 + (6 - x)^2 \Rightarrow h^2 = 16 - (6 - x)^2 \therefore 9 - x^2 =$
$= 16 - (6 - x)^2$

$9 - \cancel{x^2} = 16 - 36 + 12x - \cancel{x^2}$

$9 = -20 + 12x$

$12x = 29$

$$x = \frac{29}{12}$$

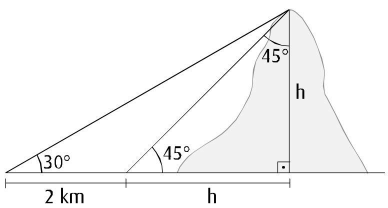
2. a

$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2 \Rightarrow (AB)^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (AB)^2 = 144 \therefore AB = 12$

$\cos(B\hat{A}C) = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \cos(B\hat{A}C) = \dfrac{12}{13}$

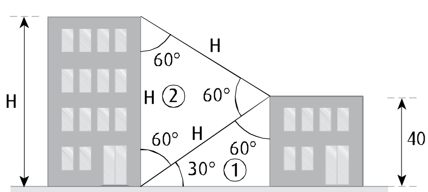
3. d



$\text{tg } 30° = \dfrac{h}{2+h} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{h}{2+h} \Rightarrow \dfrac{1{,}73}{3} = \dfrac{h}{2+h} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3{,}46 + 1{,}73h = 3h \Rightarrow 1{,}27h = 3{,}46 \Rightarrow h \simeq 2{,}7 \text{ km}$

4. b

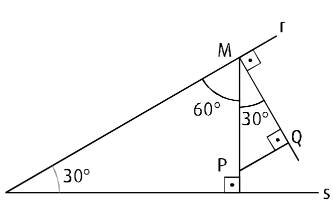


No triângulo 1, o ângulo formado entre a horizontal e a linha de visão do observador mede 30° e, assim, o ângulo consecutivo dele, no triângulo 2, mede 60°. Observa-se, então, que o triângulo 2 é equilátero e, por isso, a altura H, do prédio, é a hipotenusa do triângulo 1.

Assim:

$\text{sen } 30° = \dfrac{40}{H} \Rightarrow \dfrac{40}{H} = \dfrac{1}{2} \therefore H = 80 \text{ m}$

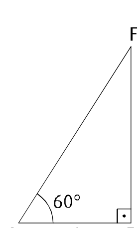
5. b



$\text{sen}(P\hat{M}Q) = \dfrac{PQ}{MP} \Rightarrow \text{sen } 30° = \dfrac{PQ}{6} \Rightarrow$

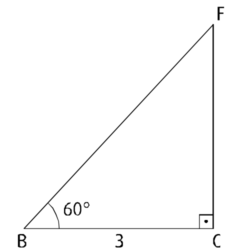
$\Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{PQ}{6} \therefore PQ = 3$

6. a)



$\text{tg } 60° = \dfrac{EF}{DE} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{EF}{1} \Rightarrow EF = 1{,}7 \text{ km}$

$\cos 60° = \dfrac{DE}{DF} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{DF} \Rightarrow DF = 2 \text{ km}$



$\cos 60° = \dfrac{3}{BF} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{BF} \Rightarrow BF = 6 \text{ km}$

$BD = BF - DF = 6 - 2 = 4 \text{ km}$

$\therefore BD = 4 \text{ km e } EF = 1{,}7 \text{ km}$

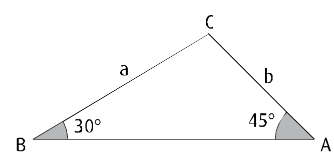
b) A pessoa percorreu:

$(2 + 4 + 1 + 1{,}7 + 3{,}3) \text{ km} = 12 \text{ km}$

$y = 4 + 0{,}8 \cdot 12 = \text{R\$ } 13{,}60$

Páginas 59 e 60

1. a



$\dfrac{BC}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{AC}{\text{sen } \hat{B}} \Rightarrow \dfrac{a}{\text{sen } 45°} = \dfrac{b}{\text{sen } 30°} \Rightarrow$

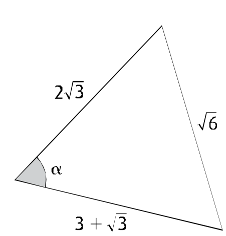
$\Rightarrow a \cdot \text{sen } 30° = b \cdot \text{sen } 45° \Rightarrow$

$\Rightarrow a \cdot \dfrac{1}{2} = b \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = b\sqrt{2}$

$a + b = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow b\sqrt{2} + b = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow b \cdot (\sqrt{2} + 1) = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow b = 1 \therefore a = \sqrt{2}$

2. a



$(\sqrt{6})^2 = (2\sqrt{3})^2 + (3+\sqrt{3})^2 - 2 \cdot (2\sqrt{3}) \cdot (3+\sqrt{3}) \cdot \cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 = 12 + 9 + 6\sqrt{3} + 3 - (12\sqrt{3} + 12) \cdot \cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow (12\sqrt{3} + 12) \cdot \cos\alpha = 18 + 6\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 12 \cdot (\sqrt{3} + 1) \cdot \cos\alpha = 6 \cdot (3 + \sqrt{3}) \Rightarrow$

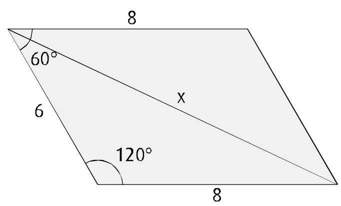
$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{6 \cdot (3+\sqrt{3})}{12 \cdot (\sqrt{3}+1)} \cdot \dfrac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{6 \cdot (3\sqrt{3} - 3 + 3 - \sqrt{3})}{12 \cdot [(\sqrt{3})^2 - 1^2]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{12\sqrt{3}}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore \alpha = 30°$$

3. b



Pela lei dos cossenos, temos:

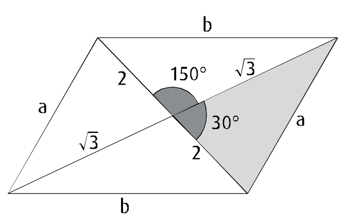
$x^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 120°$

$x^2 = 36 + 64 - 96 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$x^2 = 100 + 48 = 148 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2\sqrt{37}$

4. d



$a^2 = (\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = 3 + 4 - 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

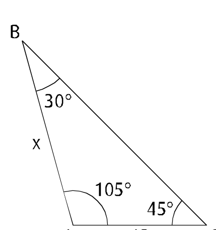
$\Rightarrow a^2 = 1 \therefore a = 1$

$b^2 = (\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 150° \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 = 3 + 4 - 4\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow b^2 = 13 \therefore b = \sqrt{13}$

Perímetro: $2p = 2a + 2b \therefore 2p = 2 + 2\sqrt{13}$

5. e



Pela lei dos senos, temos:

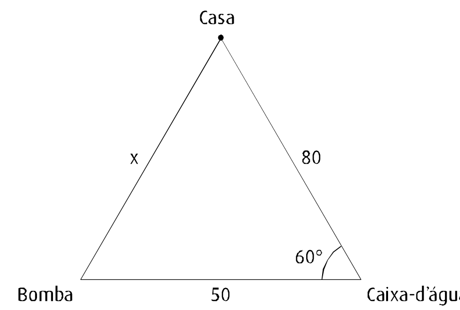
$$\frac{x}{\text{sen } 45°} = \frac{12}{\text{sen } 30°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 12\sqrt{2} \Rightarrow x \simeq 17$ cm

Como a escala está na proporção 1 : 10 000, temos:
$17 \cdot 10\,000 = 170\,000$ cm ou 1,7 km

6. c



Pela lei dos cossenos, temos:

$x^2 = 50^2 + 80^2 - 2 \cdot 50 \cdot 80 \cdot \cos 60°$

$x^2 = 2\,500 + 6\,400 - 8\,000 \cdot \frac{1}{2}$

$x^2 = 8\,900 - 4\,000 = 4\,900 \Rightarrow x = 70$ km

Página 64

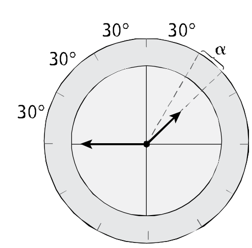
1. a) $\frac{5\pi}{8} = \frac{5 \cdot 180°}{8} = 112{,}5°$

b) $180°$ ——— π
$215°$ ——— x
$\Rightarrow 180° \cdot x = 215° \cdot \pi \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{215° \cdot \pi}{180°}$

$\therefore x = \frac{43\pi}{36}$ rad

2. a



O ângulo formado pelos ponteiros será de $120° + \alpha$, em que α é o deslocamento do ponteiro das horas em 45 minutos. Fazendo uma regra de três para o ponteiro menor, temos:

Minuto	Ângulo
60	30°
45	α

$\alpha = 22{,}5°$

$120° + 22{,}5° = 142{,}5° = 142°\ 30'$

3. c

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

Lembrando que $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ e $\cos\pi = -1$:

$-1 < \cos\theta < 0 \Rightarrow -1 < \frac{3m-1}{4} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4 < 3m - 1 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3 < 3m < 1 \Rightarrow -1 < m < \frac{1}{3}$

4. $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos x = \frac{3}{5}$ (1º quadrante) ou

$\cos x = \frac{-3}{5}$ (2º quadrante)

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

5. c

$$\frac{\text{sen } x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\text{sen } x} = \frac{\text{sen}^2 x + (1 + \cos x)^2}{(1 + \cos x) \cdot \text{sen } x} =$$

$$= \frac{\text{sen}^2 x + 1 + 2 \cdot \cos x + \cos^2 x}{(1 + \cos x) \cdot \text{sen } x} =$$

$$= \frac{2 + 2 \cdot \cos x}{(1 + \cos x) \cdot \text{sen } x} = \frac{2 \cdot (1 + \cos x)}{(1 + \cos x) \cdot \text{sen } x} = \frac{2}{\text{sen } x}$$

6. c

$$\text{sen } x - \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\text{sen } x - \cos x)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2 x - 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = -\frac{3}{4} \therefore \text{sen } x \cdot \cos x = \frac{3}{8}$$

Página 67

1. d

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x + \frac{2}{25} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2 x = 1 - \frac{2}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{23}{25} \Rightarrow \text{sen } x = -\frac{\sqrt{23}}{5}$$

$$\therefore \text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{46}}{2}$$

2. c

$$1 + \frac{1}{\cos^2 x \cdot \text{cossec}^2 x} - \sec^2 x =$$

$$= 1 + \frac{1}{\cos^2 x \cdot \frac{1}{\text{sen}^2 x}} - \frac{1}{\cos^2 x} =$$

$$= 1 + \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x - 1}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1 - 1}{\cos^2 x} = 0$$

3. d

$$\frac{1 - \text{tg}^4 x}{\cos^4 x - \text{sen}^4 x} =$$

$$= \frac{(1 + \text{tg}^2 x) \cdot (1 - \text{tg}^2 x)}{(\cos^2 x + \text{sen}^2 x) \cdot (\cos^2 x - \text{sen}^2 x)} =$$

$$= \frac{(\sec^2 x) \cdot \left(1 - \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right)}{(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)} = \frac{(\sec^2 x) \cdot \left(\frac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right)}{(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)} =$$

$$= (\sec^2 x) \cdot \frac{(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)}{(\cos^2 x)} \cdot \frac{1}{(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)} =$$

$$= (\sec^2 x) \cdot \frac{1}{(\cos^2 x)} = (\sec^2 x) \cdot (\sec^2 x) = \sec^4 x$$

4. d

$$y = \frac{\cos x}{\text{tg } x + \sec x} = \frac{\cos x}{\frac{\text{sen } x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x}} =$$

$$= \frac{\cos x}{\frac{1 + \text{sen } x}{\cos x}} = \frac{\cos^2 x}{1 + \text{sen } x} =$$

$$= \frac{1 - \text{sen}^2 x}{1 + \text{sen } x} = \frac{(1 - \text{sen } x) \cdot \cancel{(1 + \text{sen } x)}}{\cancel{(1 + \text{sen } x)}} =$$

$$= 1 - \text{sen } x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

5. d

$$\frac{1 - \text{tg}^2 x}{1 - \sec^2 x} = \frac{1 - \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{1 - \frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}} =$$

$$= \frac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\cos^2 x - 1} = \frac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\cos^2 x - (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)} =$$

$$= \frac{-\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{-\text{sen}^2 x} = \frac{-\text{sen}^2 x}{-\text{sen}^2 x} + \frac{\cos^2 x}{-\text{sen}^2 x} =$$

$$= 1 - \text{cotg}^2 x$$

6. V – V – F – F

I. (V) $\sec^2 x \cdot \cos x - \text{cotg } x \cdot \text{sen } x =$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos x - \frac{\cos x}{\text{sen } x} \cdot \text{sen } x =$$

$$= \frac{1}{\cos x} - \cos x = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} =$$

$$= \frac{\text{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{\text{sen } x \cdot \text{sen } x}{\cos x} = \text{sen } x \cdot \text{tg } x$$

II. (V) $\text{cossec}^2 x \cdot \text{sen } x - \sec x \cdot \text{cotg } x + \text{cotg } x \cdot \cos x =$

$$= \frac{1}{\text{sen}^2 x} \cdot \text{sen } x - \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\text{sen } x} + \frac{\cos x}{\text{sen } x} \cdot \cos x =$$

$$= \frac{1}{\text{sen } x} - \frac{1}{\text{sen } x} + \frac{\cos^2 x}{\text{sen } x} = \frac{\cos x \cdot \cos x}{\text{sen } x} =$$

$$= \cos x \cdot \text{cotg } x$$

III. (F) De I e II, temos:

$$\frac{\text{sen } x \cdot \text{tg } x}{\cos x \cdot \text{cotg } x} = \frac{\text{tg}^2 x}{\frac{1}{\text{tg } x}} = \text{tg}^3 x$$

IV. (F) $\sec x \cdot \text{cotg } x + \text{cotg } x \cdot \cos x =$

$$= \text{cotg } x \cdot (\sec x + \cos x) =$$

$$= \frac{\cos x}{\text{sen } x} \cdot \left(\frac{1}{\cos x} + \cos x\right) =$$

$$= \frac{\cos x}{\text{sen } x} \cdot \frac{(1 + \cos^2 x)}{\cos x} = \frac{1 + \cos^2 x}{\text{sen } x} \neq \text{sen } x$$

Página 69

1. d

$\text{sen}^2 x - \cos^2 x = 0$

$\text{sen}^2 x = \cos^2 x$

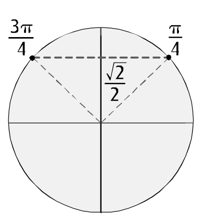
$\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1$ ($\cos x \neq 0$, pois $\text{sen } 0° \neq \cos 0°$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \text{tg}^2 x = 1 \Rightarrow \text{tg } x = \pm 1$

$$S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$

Portanto, 4 soluções.

2. Temos: $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.



$$S = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$$

3. c

$2 \cdot \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi \\ \text{ou} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

Assim, temos a soma: $\frac{\pi}{3} + \pi + \frac{5\pi}{3} = 3\pi$

4. c

$\text{sen}^2 x - 2\cos^4 x = 0 \Rightarrow (1 - \cos^2 x) - 2\cos^4 x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2\cos^4 x - \cos^2 x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cos^4 x + \cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = m \Rightarrow 2m^2 + m - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow m = -1$ ou $m = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = -1 \Rightarrow \cos^2 x = -1 \text{ (Não convém.)} \\ m = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

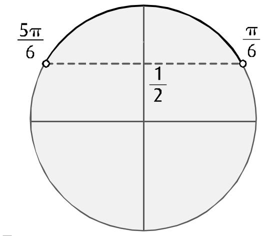
No intervalo $[0; 2\pi]$, tem-se:

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

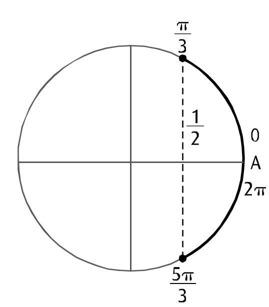
As raízes são $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$, sendo a soma delas igual a 4π.

5. I. $\text{sen } x > \frac{1}{2}$



$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$$

II. $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$



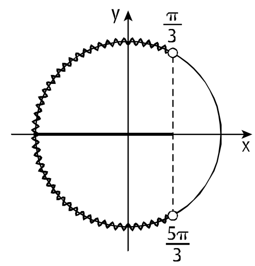
$$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leqslant x \leqslant 2\pi$$

De (I) e (II), verificamos que as duas desigualdades são satisfeitas no intervalo $[0; 2\pi]$, $\frac{\pi}{6} < x \leqslant \frac{\pi}{3}$.

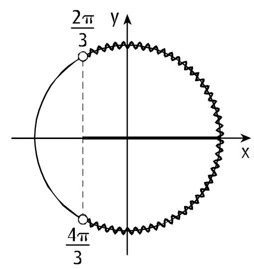
6. d

$|\cos x| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \cos x < \left(\frac{1}{2}\right)$

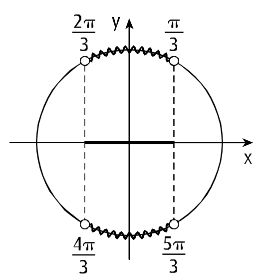
I. $\cos x < \frac{1}{2}$



II. $\cos x > -\frac{1}{2}$



De I ∩ II, temos:



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$

No intervalo $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, temos:

$S = \left]\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$

Página 71

1. e

$\cos \alpha = 0{,}8$ e $\operatorname{sen} \beta = 0{,}6$

Aplicando a relação fundamental, encontramos:

$\operatorname{sen} \alpha = 0{,}6$ e $\cos \beta = -0{,}8$ ($\alpha \in 1^{\circ}$ Q e $\beta \in 2^{\circ}$ Q)

$\operatorname{sen} (\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha =$

$= 0{,}6 \cdot (-0{,}8) + 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0$

2. $E = \operatorname{sen} 75^{\circ} + \cos 105^{\circ} \Rightarrow$

$\Rightarrow E = \operatorname{sen} (45^{\circ} + 30^{\circ}) + \cos (45^{\circ} + 60^{\circ}) \Rightarrow$

$\Rightarrow E = (\operatorname{sen} 45^{\circ} \cdot \cos 30^{\circ} + \operatorname{sen} 30^{\circ} \cdot \cos 45^{\circ}) +$

$+ (\cos 45^{\circ} \cdot \cos 60^{\circ} - \operatorname{sen} 45^{\circ} \cdot \operatorname{sen} 60^{\circ}) \Rightarrow$

$\Rightarrow E = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow E = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow E = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \Rightarrow E = \frac{2\sqrt{2}}{4} \therefore E = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. d

$\operatorname{sen} x + \cos x = m \Rightarrow (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = m^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \cos^2 x = m^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = m^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen} (2x) + 1 = m^2 \therefore \operatorname{sen} (2x) = m^2 - 1$

4. d

$\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x \cdot (2 \cos x + 1) = 0$

I. $\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$

II. $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$

As soluções no intervalo $[0; \pi]$ são $\left[0; \frac{2\pi}{3}; \pi\right]$, um total de 3.

5. d

$\sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} x + \cos x = k - 3 \qquad \times\left(\frac{1}{2}\right)$

$\operatorname{sen} x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos x = \frac{k - 3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x \cdot \cos 30^{\circ} + \operatorname{sen} 30^{\circ} \cdot \cos x = \frac{k - 3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen} (x + 30^{\circ}) = \frac{k - 3}{2}$

Assim:

$-1 \leqslant \frac{k - 3}{2} \leqslant 1 \Rightarrow -2 \leqslant k - 3 \leqslant 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \leqslant k \leqslant 5$

Os possíveis valores inteiros de *k* são 1, 2, 3, 4 e 5, cuja soma é 15.

6. d

$(\cos x + \cos y)^2 + (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)^2 =$

$= \cos^2 x + 2 \cos x \cdot \cos y + \cos^2 y + \operatorname{sen}^2 x +$

$+ 2 \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}^2 y =$

$= 2 + 2 \cos x \cdot \cos y + 2 \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y =$

$= 2(1 + \cos x \cdot \cos y + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y) =$

$= 2[1 + \cos (x - y)] = 2(1 + \cos 60^{\circ}) =$

$= 2\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$

Página 74

1. e

$(x!)^2 = 36$

$x! = 6 \Rightarrow x = 3$

2. a) $\frac{(n + 1)!}{n!} = 9 \Rightarrow \frac{(n + 1) \cdot n!}{n!} = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow n + 1 = 9 \therefore n = 8$

b) $b_{137} = \frac{138!}{139!} \cdot (137^2 - 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow b_{137} = \frac{138!}{139 \cdot 138!} \cdot (137 - 2) \cdot (137 + 2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow b_{137} = \frac{1}{139} \cdot 135 \cdot 139 \therefore b_{137} = 135$$

3. $\binom{7}{2} + \binom{7}{3} = \binom{8}{3}$

Então:

$$\binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{9}{5} = \binom{9}{4} + \binom{9}{5} = \binom{10}{5} = 252$$

4. a

$$\binom{2n}{n} = x \cdot \binom{2n}{n-1} \Rightarrow x = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n-1}} \Rightarrow x = \frac{\frac{(2n)!}{n! \cdot n!}}{\frac{(2n)!}{(n-1)! \cdot (n+1)!}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} \cdot \frac{(n-1)! \cdot (n+1)!}{(2n)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{(n-1)! \cdot n! \cdot (n+1)}{n \cdot (n-1)! \cdot n!} \therefore x = \frac{n+1}{n}$$

5. a

I. $5x = x + 8 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$

II. $5x + x + 8 = 26 \Rightarrow 6x = 18 \Rightarrow x = 3$

$\therefore x = 2$ ou $x = 3$

6. a

$3 + 5 = k + 2 \Rightarrow k = 6$

Página 76

1. a

$$T_8 = \binom{10}{7} \cdot x^3 \cdot (-1)^7 = -\frac{10!}{7! \cdot 3!}x^3 = \frac{-10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2}x^3 =$$

$$= -120x^3$$

2. b

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^5 \Rightarrow T_{K+1} = \binom{5}{k} \cdot (x^2)^{5-k} \cdot \left(\frac{1}{x^3}\right)^k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{K+1} = \binom{5}{k} \cdot x^{2(5-k)} \cdot (x^{-3})^k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{K+1} = \binom{5}{k} \cdot x^{10-2k} \cdot x^{-3k} \therefore T_{K+1} = \binom{5}{k} \cdot x^{10-5k}$$

Devemos ter: $10 - 5k = 0 \Rightarrow k = 2$

Logo, o termo independente de *x* é o 3º termo desse desenvolvimento.

3. d

Para determinação da soma dos coeficientes numéricos, devemos fazer a variável *x* igual a 1. Assim:

Soma dos coeficientes $= \left[3 \cdot (1)^2 - \frac{2}{(1)}\right]^8 =$

$= (3 - 2)^8 = 1^8 = 1$

4. b

$$(1 + x)^{26} \Rightarrow T_{k+1} = \binom{26}{k} \cdot 1^{26-k} \cdot x^k$$

Ainda:

- $k + 1 = 2r + 1 \Rightarrow k = 2r \Rightarrow T_{2r+1} = \binom{26}{2r} \cdot 1^{26-2r} \cdot x^{2r}$
- $k + 1 = r + 3 \Rightarrow k = r + 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow T_{r+3} = \binom{26}{r+2} \cdot 1^{26-r-2} \cdot x^{r+2}$$

Devemos ter $T_{2r+1} = T_{r+3}$, então:

$$\binom{26}{2r} = \binom{26}{r+2}$$

Assim:

$2r = r + 2 \Rightarrow r = 2$

ou

$2r + r + 2 = 26 \Rightarrow 3r = 24 \Rightarrow r = 8$

5. e

$$T_{p+1} = \binom{10}{p} \cdot (x^{-1})^{10-p} \cdot (-3)^p \cdot (x^4)^p$$

$$T_{p+1} = \binom{10}{p} \cdot x^{-10+p+4p} \cdot (-3)^p$$

$$T_{p+1} = \binom{10}{p} \cdot x^{5p-10} \cdot (-3)^p$$

$5p - 10 = 0 \Rightarrow 5p = 10 \Rightarrow p = 2$

$$T_3 = \binom{10}{2} \cdot (-3)^2 = 45 \cdot 9 = 405$$

6. d

O binômio possui $5 + 1 = 6$ termos, e a soma de seus coeficientes é dada por: $(1^2 - 3 \cdot 1)^5 =$ $= (-2)^5 = -32$

Página 78

1. a

$$\log_a N = k \cdot \log_b N \Rightarrow \frac{1}{\log_N a} = k \cdot \frac{1}{\log_N b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log_N b}{\log_N a} = k \Rightarrow \log_a b = k \therefore b = a^k$$

2. d

De $\log_2 A + \log_2 B = 2$, vem:

$\log_2 (A \cdot B) = 2 \Rightarrow A \cdot B = 4$ (I)

Do enunciado, temos:

$\frac{A}{B} = 256 \Rightarrow A = 256 \cdot B$ (II)

Substituindo (II) em (I), temos:

$$A \cdot B = 4 \Rightarrow 256 \cdot B \cdot B = 4 \Rightarrow B^2 = \frac{1}{64} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B > 0 \Rightarrow B = \frac{1}{8} \text{ e } A = 256 \cdot \frac{1}{8} \Rightarrow A = 32$$

Temos, também:

$$A + B = \frac{N}{8} \Rightarrow 32 + \frac{1}{8} = \frac{N}{8} \Rightarrow 256 + 1 = N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = 257$$

3. a

$\log_3 x + \log_3 y = 1 \Rightarrow \log_3 (x \cdot y) = 1 \therefore x \cdot y = 3$

$y = \dfrac{3x - 12}{5} \Rightarrow x \cdot \left(\dfrac{3x - 12}{5}\right) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x^2 - 12x - 15 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{12 \pm 18}{6}$

$$\begin{cases} x = -1 \text{ (Não convém.)} \\ \quad \text{ou} \\ x = 5 \Rightarrow y = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

4. $\log_3 8 \cdot \log_7 9 \cdot \log_2 343 = \dfrac{\log 8}{\log 3} \cdot \dfrac{\log 9}{\log 7} \cdot \dfrac{\log 343}{\log 2} =$

$= \dfrac{\log 2^3}{\log 3} \cdot \dfrac{\log 3^2}{\log 7} \cdot \dfrac{\log 7^3}{\log 2} =$

$= \dfrac{3\log 2 \cdot 2\log 3 \cdot 3\log 7}{\log 3 \cdot \log 7 \cdot \log 2} = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$

5. e

$\log_4 x = \log_2 3 \Rightarrow \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} = \log_2 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 x = 2 \cdot \log_2 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 x = \log_2 3^2 \Rightarrow x = 9$

Observação: Em uma hora, temos 120 intervalos de 30 segundos.

(9 gotas) $\times$ (0,3 mL) $\times$ 120 = 324 mL de soro por hora

6. Soma = 14 (02 + 04 + 08)

(01) (F) $\log \sqrt[5]{a} = \log a^{\frac{1}{5}} = \dfrac{1}{5} \log a$

(02) (V) $\log_a 3 \cdot \log_3 a = \dfrac{\log 3}{\log a} \cdot \dfrac{\log a}{\log 3} = 1$

(04) (V) $\log_a 4 + \log_a 9 = \log_a (4 \cdot 9) =$
$= \log_a (36) = 2\log_a 6$

(08) (V) $10^{\log 3} = 3$ (Consequência da definição)

(16) (F) $\log_{a^2} 5 = B \Rightarrow \dfrac{1}{2} \cdot \log_a 5 = B \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} \cdot A = B \Rightarrow A = 2B$

Página 82

1. c

As soluções da equação $x^2 - 2x = \log_{10} x$ são as interseções dos gráficos de f(x) e g(x).

Assim, observamos que existem duas soluções positivas.

2. $L(x) = \log_{10} (100 + x) + k$

a) $L(x) = 0$ e $x = 0$

$\log_{10} (100) + k = 0 \Rightarrow \log_{10} 100 = -k \Rightarrow$
$\Rightarrow -k = 2 \Rightarrow k = -2$

b) $L(x) = 1$ (mil reais)

$1 = \log (100 + x) + k \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 = \log (100 + x) - 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log (100 + x) = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 100 + x = 1\,000 \Rightarrow x = 900$

3. c

$\log_3 x + \log_3 x^2 + ... + \log_3 x^{49} + \log_3 x^{50} + 2\,550 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_3 x + 2 \cdot \log_3 x + ... + 49 \cdot \log_3 x +$
$+ 50 \cdot \log_3 x = 2\,550 \Rightarrow$
$\Rightarrow (1 + 2 + ... + 49 + 50) \cdot \log_3 x = 2\,550 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\dfrac{(1 + 50) \cdot 50}{2}\right] \cdot \log_3 x = 2\,550 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1\,275 \cdot \log_3 x = 2\,550 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 x = 2 \Rightarrow x = 3^2$

$\therefore x = 9$

4. c

Condição de existência:

$x > 0$ e $x + 3 > 0 \Rightarrow x > 0$

$\log x + \log (x + 3) < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log [x \cdot (x + 3)] < \log 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \cdot (x + 3) < 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 3x - 10 < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -5 < x < 2 \therefore 0 < x < 2$

5. d

C.E.

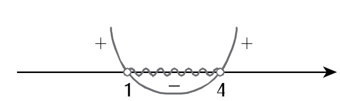
$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$

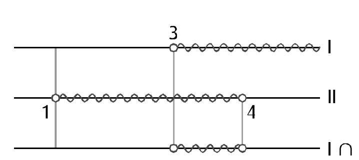
$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

$\therefore$ C.E.: $x > 3$ (I)

Temos:

$\log_2 (x - 3) + \log_2 (x - 2) < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_2 [(x - 3)(x - 2)] < 1$
$x^2 - 5x + 6 < 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 < 0$ (II)





$S = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 3 < x < 4\}$

6. e

Condição de existência:

$\Delta > 0$ e $m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1$ (I)

$(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \log_2 (m - 1) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 - 4 \cdot \log_2 (m - 1) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 \cdot \log_2 (m - 1) < 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 (m - 1) < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 (m - 1) < \log_2 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow m - 1 < 2 \Rightarrow m < 3$ (II)

De I e II, temos:

$1 < m < 3$

Página 85

1. b

$-5n = \dfrac{2 + 3n + 1 - 4n}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -10n = -n + 3 \Rightarrow -9n = 3 \Rightarrow n = -\dfrac{1}{3}$

$\therefore$ *n* pertence ao intervalo $[-1; 0]$.

2. Os números inteiros positivos inferiores a 501 formam uma PA com $a_1 = 1$, $a_n = 500$ e $n = 500$. Se *S* representar a soma desses números, teremos:

$S = \dfrac{(1 + 500) \cdot 500}{2} \therefore S = 125\,250$

Os números inteiros positivos inferiores a 501 divisíveis por 7 formam uma PA com $a_1 = 7$, $a_n = 497$. Nessa PA, pode-se calcular o número de termos da seguinte maneira:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 497 = 7 + (n - 1) \cdot 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 71$

Se S' representa a soma dos números positivos divisíveis por 7 e menores que 501, temos:

$S' = \dfrac{(7 + 497) \cdot 71}{2} \therefore S' = 17\,892$

A soma dos números inteiros positivos inferiores a 501 não divisíveis por 7 é dada por $S - S'$, ou seja, igual a 107 358.

3. d

Do enunciado, obtemos a sequência (3; 7; 11; ...), que é uma PA de razão 4.

Queremos obter S_{15}:

$S_{15} = \dfrac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2}$

Primeiramente, vamos encontrar a_{15}:

$a_{15} = a_1 + 14r \Rightarrow a_{15} = 3 + 14 \cdot 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{15} = 3 + 56 \Rightarrow a_{15} = 59$

$S_{15} = \dfrac{(3 + 59) \cdot 15}{2} = 465$

Serão plantadas 465 mudas.

4. c

Seja *x* o número de metros percorridos no primeiro dia. Assim, nessa PA de razão 500, temos $a_1 = x$.

- $a_{15} = a_1 + 14 \cdot r \Rightarrow a_{15} = x + 14 \cdot 500 \Rightarrow$
  $\Rightarrow a_{15} = x + 7000$
- $S_{15} = \dfrac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} \Rightarrow$

  $\Rightarrow S_{15} = \dfrac{(x + x + 7000) \cdot 15}{2} = 67\,500 \Rightarrow$

  $\Rightarrow 2x + 7000 = \dfrac{2 \cdot 67\,500}{15} \Rightarrow 2x = 2\,000$

  $\therefore x = 1\,000$
- $a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow a_3 = 1\,000 + 2 \cdot 500 \Rightarrow$
  $\Rightarrow a_3 = 2\,000$

5. c

Representamos essa PA por: $(x - r; x; x + r)$

Temos:

$x - r + x + x + r = 21 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow x = 7$

Portanto, o termo do meio é igual a 7.

6. a

- $S_n = 2n^2 - 8n$
- $S_1 = a_1 = 2 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 \Rightarrow a_1 = -6$
- $S_2 = a_1 + a_2 = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 \Rightarrow a_1 + a_2 = -8$
- $a_1 + a_2 = -8$ e $a_1 = -6 \Rightarrow a_2 = -2$
- $r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = -2 - (-6) \therefore r = 4$

Página 88

1. Seja *x* o número procurado.

Assim, $(1 + x)$, $(3 + x)$ e $(4 + x)$ formam, nessa ordem, uma progressão geométrica.

$(3 + x)^2 = (4 + x) \cdot (1 + x) \Rightarrow$

$\Rightarrow 9 + 6x + x^2 = 4 + 5x + x^2$

$\therefore x = -5$

2. e

Sendo *x*, *y* e *z* os termos de uma PA, temos:

$y = \dfrac{x + z}{2}$ (I)

e

$x + y + z = 15 \Rightarrow x + z = 15 - y$ (II)

De (I) e (II), vem:

$y = \dfrac{x + z}{2} \Rightarrow 2y = x + z \Rightarrow 2y = 15 - y \Rightarrow$

$\Rightarrow 3y = 15 \Rightarrow y = 5$ (III)

$x + z = 10 \Rightarrow z = 10 - x$ (IV)

Sendo a sequência $(x; y + 1; z + 5)$ uma PG, temos:

$(y + 1)^2 = x \cdot (z + 5)$ (V)

Substituindo (III) e (IV) em (V), temos:

$(5 + 1)^2 = x \cdot (10 - x + 5) \Rightarrow$

$\Rightarrow 6^2 = x \cdot (15 - x) \Rightarrow$
$\Rightarrow 36 = -x^2 + 15x \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 15x + 36 = 0$
$\Delta = 225 - 144 = 81$
$x = \dfrac{15 \pm 9}{2}$
$x_1 = 12$ (Não convém, pois $0 \leqslant x \leqslant 10$.)
ou $x_2 = 3$
Logo: $x = 3$; $y = 5$ e $z = 7$
Portanto, $3z = 3 \cdot 7 = 21$.

3. b
$S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3\,280 = \dfrac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^n - 1 = 6\,560 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^n = 6\,561 \Rightarrow 3^n = 3^8 \Rightarrow n = 8$
Portanto, possui 8 termos.

4. a
O primeiro membro da equação é a soma de uma PG infinita, com $a_1 = x$ e razão $q = \dfrac{1}{2}$.
Assim, temos:
$S = \dfrac{a_1}{1 - q} \Rightarrow 10 = \dfrac{x}{1 - \dfrac{1}{2}} \Rightarrow 10 = \dfrac{x}{\dfrac{1}{2}} \Rightarrow x = 5$

5. a
- $a_1 = q$
- $a_2 = a_1 \cdot q \Rightarrow 3 = q \cdot q \Rightarrow q^2 = 3$
  $\therefore q = \sqrt{3}$ ou $q = -\sqrt{3}$ (Não convém.)
- $a_8 = a_1 \cdot q^7 \Rightarrow a_8 = q \cdot q^7 \Rightarrow$
  $\Rightarrow a_8 = q^8 \Rightarrow a_8 = (\sqrt{3})^8$
  $\therefore a_8 = 81$

6. a) $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \ldots, 10^{-n}, \ldots$ é uma PG com $a_1 = q = \dfrac{1}{10}$.

$S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_5 = \dfrac{\dfrac{1}{10} \cdot \left[\left(\dfrac{1}{10}\right)^5 - 1\right]}{\dfrac{1}{10} - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_5 = \dfrac{1}{10} \cdot \left(-\dfrac{99\,999}{100\,000}\right) \cdot \left(-\dfrac{10}{9}\right)$

$\therefore S_5 = \dfrac{11\,111}{100\,000} = 0{,}11111$

b) $S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - q} \Rightarrow S_\infty = \dfrac{\dfrac{1}{10}}{1 - \dfrac{1}{10}} \Rightarrow S_\infty = \dfrac{\dfrac{1}{10}}{\dfrac{9}{10}}$

$\therefore S_\infty = \dfrac{1}{9}$

Página 94

1. c

$$A = \begin{pmatrix} \underbrace{\cos(1 \cdot \pi)}_{a_{11}} & \underbrace{\text{sen}\left(\dfrac{1 \cdot \pi}{2}\right)}_{a_{12}} \\ \underbrace{\text{sen}\left(\dfrac{2 \cdot \pi}{2}\right)}_{a_{21}} & \underbrace{\cos(2 \cdot \pi)}_{a_{22}} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. b
$A_{3 \times 4} \cdot B_{p \times q} = C_{3 \times 5} \Rightarrow$
$\Rightarrow A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 5} = C_{3 \times 5}$
$\therefore p = 4$ e $q = 5$

3. a) $A^2 = A \cdot A =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + 0 - 3 & 2 + 2 + 3 & 3 + 4 - 3 \\ 0 + 0 - 2 & 0 + 1 + 2 & 0 + 2 - 2 \\ -1 + 0 + 1 & -2 + 1 - 1 & -3 + 2 + 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 7 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $A \cdot A^t =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + 4 + 9 & 0 + 2 + 6 & -1 + 2 - 3 \\ 0 + 2 + 6 & 0 + 1 + 4 & 0 + 1 - 2 \\ -1 + 2 - 3 & 0 + 1 - 2 & 1 + 1 + 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 8 & -2 \\ 8 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

c) $2A + 3A^t =$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 3 \\ 9 & 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & -5 \end{bmatrix}$$

4. c
$x^2 + 20x + 96 = 0 \Rightarrow x = -12$ ou $x = -8$

$$\begin{vmatrix} y & 2 & 1 \\ 0 & 2y & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -8 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4y^2 - 8 - 8y + 3y = -8 \Rightarrow 4y^2 - 5y = 0$
$\therefore y = 0$ ou $y = \dfrac{5}{4}$

5. d

$x(x + 1) - 3mx = 0 \Rightarrow x(x + 1 - 3m) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 0$ ou $x = 3m - 1$

Portanto possui duas soluções reais para valor de $m \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

6. d

$$\det A = \begin{vmatrix} x & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 3^x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k & x \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} x & 3^x & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 2 \\ 0 & 0 & k & x \end{vmatrix} =$$

$$= x \cdot x \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 2 \\ 0 & k & x \end{vmatrix} =$$

$$= x \cdot x \cdot x \cdot \begin{vmatrix} x & 2 \\ k & x \end{vmatrix} = x^3 \cdot (x^2 - kx)$$

$\therefore f(x) = x^5 - kx^4$

$f(2) = 0 \Rightarrow 2^5 - k \cdot 2^4 = 0$

$\therefore k = 2$

Página 99

1. d

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \quad \times(-2) \quad \times(-3) \\ 2x - 3y + z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -7y + 3z = -5 \quad \times(-1) \\ -7y + 5z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 2 \Rightarrow x = 1 \\ -7y + 3z = -5 \Rightarrow y = 2 \\ 2z = 6 \Rightarrow z = 3 \end{cases}$$

2. c

G = garfo; C = colher; F = faca

$$\begin{cases} 2G + 5C + 8F = 991 \\ 1G + 2C + 3F = 391 \\ 1G + 1C + 1F = x \end{cases} \sim \begin{cases} G + 2C + 3F = 391 \\ 2G + 5C + 8F = 991 \\ G + C + F = x \end{cases} \sim$$

$$\sim (-2) \cdot L_1 + L_2 - L_1 + L_3 \begin{cases} G + 2C + 3F = 391 \\ C + 2F = 209 \quad (I) \\ -C - 2F = x - 391 \quad (II) \end{cases}$$

Adicionando (I) e (II), temos:

$209 + x - 391 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 391 - 209 = 182$

3. Condição: D = 0, pois o sistema é homogêneo e nunca será SI.

$$D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & k & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow -k - 3 + 2k + 6 = 0 \therefore k = -3$

4. c

$$D \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & m \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow m + 4 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow m \neq -4$

5. $D = \begin{vmatrix} m & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D = m + 8$

a) $D \neq 0 \Rightarrow m \neq -8, \forall n \in \mathbb{R}$ (SPD)

b) $D = 0 \Rightarrow m = -8$

$$m = -8 \Rightarrow \begin{cases} -8x - 2y = 3 \quad : (-2) \\ 4x + y = n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + y = \frac{3}{2} \\ 4x + y = n \end{cases}$$

$m = -8$ e $n = \frac{3}{2}$ (SPI)

c) $m = -8$ e $n \neq \frac{3}{2}$ (SI)

6. b

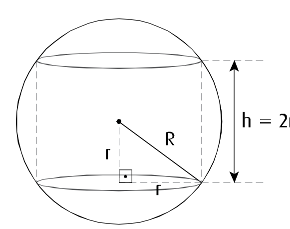
$$D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & m \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4 - 2m = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow m = 2$

$$\therefore \frac{m^2}{2 + m} = \frac{(2)^2}{2 + 2} = \frac{4}{4} = 1$$

Página 102

1.



$R^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow 2r^2 = R^2 \Rightarrow r^2 = \frac{R^2}{2} \therefore r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

$V_{cilindro} = A_{base} \cdot h \Rightarrow$

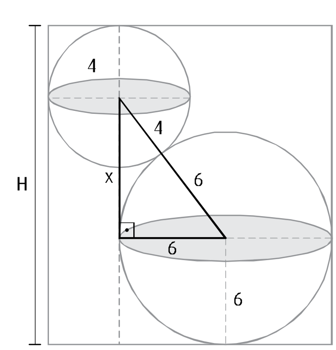
$\Rightarrow V_{cilindro} = (\pi \cdot r^2) \cdot 2 \cdot r \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{cilindro} = 2 \cdot \pi \cdot r^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{cilindro} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot R^3}{8}$

$\therefore V_{cilindro} = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot R^3}{2}$

2. b



$10^2 = 6^2 + x^2 \Rightarrow x = 8$ cm

Portanto, a altura necessária é:
$H = 6 + 4 + x = 10 + 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow H = 18$ cm

3. $A_{cunha} = \dfrac{\alpha}{360°} \cdot (4 \cdot \pi \cdot R^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{cunha} = \dfrac{20°}{360°} \cdot (4 \cdot \pi \cdot 12^2)$

$\therefore A_{cunha} = 32\pi \text{ cm}^2$

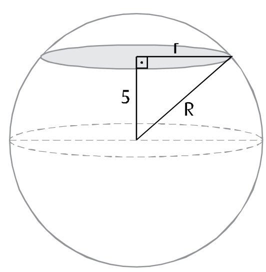
$V_{cunha} = \dfrac{\alpha}{360°} \cdot \left(\dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{cunha} = \dfrac{20°}{360°} \cdot \left(\dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 12^3\right)$

$\therefore V_{cunha} = 128\pi \text{ cm}^3$

4. Sendo *r* o raio da seção, temos:

$A_{seção} = \pi \cdot r^2 \Rightarrow 144 \cdot \pi = \pi \cdot r^2 \;\; \therefore r = 12$ cm



Sendo R o raio da esfera, temos:
$R^2 = r^2 + 5^2 \Rightarrow R^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow R^2 = 169$
$\therefore R = 13$ cm

Área da esfera: $A = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \Rightarrow A = 4 \cdot \pi \cdot 13^2$
$\therefore A = 676\pi \text{ cm}^2$

Volume da esfera: $V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot (13)^3$

$\therefore V = \dfrac{8788\pi}{3} \text{ cm}^3$

5. a
Sejam R e *r* os raios das bolas maior e menor, respectivamente.
Temos:

$\dfrac{4}{3}\pi R^3 = A \cdot 12$

$\dfrac{4}{3}\pi r^3 = A \cdot 1,5$

em que A é a área da base do cilindro.

$\therefore \dfrac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \dfrac{A \cdot 12}{A \cdot 1,5}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{R}{r}\right)^3 = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{R}{r} = 2$

6. V — V — V — V — F

$h = 2R \Rightarrow h = 8$ e $R = 4$

I. (V) $S_E = 4\pi R^2 = 64\pi \text{ cm}^2$

II. (V) $V_C = \pi R^2 h = 128\pi \text{ cm}^3$

III. (V) $S_L = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 4 \cdot 8 = 64\pi \text{ cm}^2$

IV. (V) $4^2 = 2^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 12 \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$ cm

V. (F) O volume derramado corresponde ao volume da esfera:

$V_E = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 = \dfrac{256\pi}{3} \text{ cm}^3$

Página 106

1. $z = \dfrac{1 + 3i}{3 + mi}$

Vamos racionalizar o denominador:

$\dfrac{1 + 3i}{3 + mi} = \dfrac{3 - mi}{3 - mi} = \dfrac{3 - mi + 9i + 3m}{9 + m^2} =$

$= \dfrac{(3 + 3m) + (9 - m)i}{9 + m^2}$

a) Para ser real:
$9 - m = 0 \Rightarrow m = 9$

b) Para ser imaginário puro:
$9 - m \neq 0 \Rightarrow m \neq 9$
$3 + 3m = 0 \Rightarrow m = -1$

2. e

Sejam: $z = a + b \cdot i$ e $\bar{z} = a - b \cdot i$
Assim:

$\bar{z} = z^2 \Rightarrow a - b \cdot i = (a + b \cdot i)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a - b \cdot i = a^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot i + (b \cdot i)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a - b \cdot i = a^2 - b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot i \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot a \cdot b = -b \\ a = a^2 - b^2 \end{cases}$

$b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $a = 1$ (duas soluções)

$b \neq 0 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{2}$ e $b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $b = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(duas soluções)
Serão, no total, quatro soluções.

3. $z_1 + z_2 = (a - 4) + (8a + b) \cdot i$
O número complexo $z_1 + z_2$ será imaginário puro se, e somente se, $a - 4 = 0$ e $8a + b \neq 0$.
Logo, devemos ter $a = 4$ e $b \neq -32$.

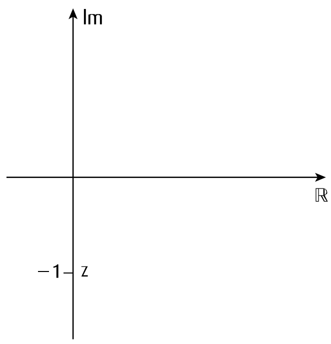
4. d

$$\left(\frac{i^{246}+i^{121}}{i^{34}}\right)^2=\left(\frac{i^{4\cdot 61+2}+i^{4\cdot 30+1}}{i^{4\cdot 8+2}}\right)^2=$$

$$=\left[\frac{(i^4)^{61}\cdot i^2+(i^4)^{30}\cdot i}{(i^4)^8\cdot i^2}\right]^2=\left(\frac{i^2+i}{i^2}\right)^2=\left(\frac{-1+i}{-1}\right)^2=$$

$$=(1-i)^2=\cancel{1^2}-2\cdot 1\cdot i+\cancel{i^2}=-2i$$

5. a



$$z=\frac{2i^{342}}{(1-i)^2}=\frac{2i^2}{-2i}=\frac{-2}{-2i}=\frac{1}{i}=-i$$

6. $\left|\frac{(1+i)^4}{(3-3i)^3}\right|=\left|\frac{[(1+i)^2]^2}{3^3\cdot(1-i)^3}\right|=$

$$=\left|\frac{(2i)^2}{27(1-i)\cdot(1-i)^2}\right|=\left|\frac{2i\cdot\cancel{2i}}{27\cdot(1-i)(\cancel{-2i})}\right|=$$

$$=\left|\frac{-2i(1+i)}{27(1-i)\cdot(1+i)}\right|=\left|\frac{-2i-2i^2}{27(1+1)}\right|=$$

$$=\left|\frac{2-2i}{2\cdot 27}\right|=\left|\frac{1}{27}-\frac{i}{27}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{27}\right)^2+\left(-\frac{1}{27}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{729}}=\frac{\sqrt{2}}{27}$$

Página 110

1. a) $P(0)=0^4+m\cdot 0^3-m\cdot 0^2+0-2=-2$

b) Devemos ter $P(1)=0$:

$P(1)=1^4+m\cdot 1^3-m\cdot 1^2+1-2=$

$=1+m-m+1-2=0$

(c.q.d.)

2.

$$\begin{array}{l|l}
2x^3-ax^2+bx+2 & 2x^2+5x-2 \\ \cline{2-2}
-2x^3-5x^2+2x & x+\dfrac{(-a-5)}{2} \\ \hline
(-a-5)\cdot x^2+(b+2)\cdot x+2 & \\
-(-a-5)\cdot x^2-\dfrac{5(-a-5)}{2}\cdot x+(-a-5) & \\ \hline
(b+2)\cdot x+\dfrac{(5a+25)}{2}\cdot x-a-5+2 &
\end{array}$$

$$R=\left(b+\frac{29}{2}+\frac{5a}{2}\right)x-a-3$$

Como $2x^3-ax^2+bx+2$ é divisível por $2x^2+5x-$ -2, temos:

$R=0\ \therefore -a-3=0\Rightarrow a=-3$

e

$b+\frac{29}{2}+\frac{5a}{2}=0\Rightarrow b=-7$

Logo: $a-b=-3-(-7)=4$

3. d

$Q(x)\cdot S(x)+R(x)=P(x)$

$Q(x)=\dfrac{P(x)-R(x)}{S(x)}\Rightarrow$

$\Rightarrow Q(x)=\dfrac{x^3+x^2+x+1-x-1}{1+x}\Rightarrow$

$\Rightarrow Q(x)=\dfrac{x^3+x^2}{x+1}\Rightarrow$

$\Rightarrow Q(x)=\dfrac{x^2(x+1)}{(x+1)}\Rightarrow$

$\Rightarrow Q(x)=x^2\Rightarrow$

$\Rightarrow Q(1)=1\neq 0$

4. b

$P(x):(x-1)\Rightarrow R=P(1)$

Se $P(x)$ é divisível por $(x-1)$, então: $P(1)=0$

$P(1)=1^5-4\cdot 1^2+m\cdot 1+1=0\ \therefore m=2$

5. b

$P(x)=(2x^2-3x+1)\cdot(3x^2+1)+(-x+2)$

Queremos encontrar $P(1)$.

$P(1)=(2-3+1)\cdot(3+1)+1=1$

6. e

$$\begin{array}{l|l}
2x^4-3x^3+ax^2+bx+c & x^3-7x+6 \\ \cline{2-2}
\qquad\qquad 0 & mx+n
\end{array}$$

$2x^4-3x^3+ax^2+bx+c\equiv$

$\equiv(x^3-7x+6)\cdot(mx+n)\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^4-3x^3+ax^2+bx+c\equiv$

$\equiv mx^4+nx^3-7mx^2-7nx+6mx+6n\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^4-3x^3+ax^2+bx+c\equiv$

$\equiv mx^4+nx^3-7mx^2-(7n-6m)\cdot x+6n$

$$\begin{cases} m=2 \\ n=-3 \\ a=-7m\Rightarrow a=-14 \\ b=-7n+6m\Rightarrow b=33 \\ c=6n\Rightarrow c=-18 \end{cases}$$

Página 113

1. d

$A(x)=B(x)\cdot C(x)\Rightarrow$

$\Rightarrow x^3-ax^2+bx+c=(x^2-2)\cdot(x-1)\Rightarrow$

$\Rightarrow x^3-ax^2+bx+c=x^3-x^2-2x+2$

$\therefore a=1;\ b=-2$ e $c=2$

2. e

$P(x) = (2x - 1) \cdot (x^2 - x) + m \Rightarrow$

$\Rightarrow P(-1) = [2 \cdot (-1) - 1] \cdot [(-1)^2 - (-1)] + m = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-3) \cdot 2 + m = 0 \therefore m = 6$

3. a

$$\begin{array}{l|l}
x^4 + 0x^3 + px^2 + 0x + q & x^2 - 6x + 5 \\ \cline{2-2}
-x^4 + 6x^3 - 5x^2 & x^2 + 6x + (p + 31) \\ \cline{1-1}
6x^3 + (p - 5)x^2 + 0x + q & \\
-6x^3 + 36x^2 - 30x & \\ \cline{1-1}
(p + 31)x^2 - 30x + q & \\
-(p + 31)x^2 + 6(p + 31)x - 5(p + 31) & \\ \cline{1-1}
[6(p + 31) - 30]x + [q - 5(p + 31)] &
\end{array}$$

Então: $6(p + 31) - 30 = 0$ e $q - 5(p + 31) = 0$

Assim: $6(p + 31) = 30 \Rightarrow p + 31 = 5$

$\therefore p = -26$

$q - 5(-26 + 31) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow q - 5(5) = 0 \Rightarrow q - 25 = 0 \Rightarrow q = 25$

Logo: $p + q = -1$

4. b

- $P(x) : (x - 2) \Rightarrow R = P(2) \therefore P(2) = 6$
- $P(x) : (x + 2) \Rightarrow R = P(-2) \therefore P(-2) = 10$

Assim:

$P(x) : [(x + 2) \cdot (x - 2)] \Rightarrow R(x) = ax + b$

$P(x) = [(x + 2) \cdot (x - 2)] \cdot Q(x) + ax + b$

$P(2) = [(2 + 2) \cdot (2 - 2)] \cdot Q(2) + a \cdot 2 + b = 6$

$P(-2) = [(-2 + 2) \cdot (-2 - 2)] \cdot Q(-2) + a \cdot$
$\cdot (-2) + b = 10$

$\begin{cases} 2a + b = 6 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = -1$ e $b = 8$

$\therefore R(x) = -x + 8$

5. c

Devemos ter:

$P(-1) = 0 \Rightarrow 2 - 3 + p - q - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p - q = 4 \quad (I)$

$P(3) = 0 \Rightarrow 162 + 81 + 9p + 3q - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9p + 3q = -240$

$3p + q = -80 \; (II)$

Fazendo (I) + (II), temos:

$4p = -76 \Rightarrow p = -19$ e $q = -23$

$\therefore p + q = -42$

6. b

$$\begin{array}{l|l}
f(x) & x^2 - 3x + 1 \\ \cline{2-2}
2x + 1 & x + 1
\end{array}$$

$f(x) = (x^2 - 3x + 1) \cdot (x + 1) + 2x + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$

$f(x) : (x + 1) \Rightarrow R = f(-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow R = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 2$

$\therefore R = -1$

Página 116

1. a

Aplicando Briöt-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ \hline
-1 & 1 & 0 & -2 & 0
\end{array} \leftarrow \text{Resto}$$

Devemos encontrar as raízes de $x^2 - 2 = 0$.

$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$

$S = \{-1; -\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

2. $P(1) = 0 \Rightarrow 1 + k + 1 + 1 = 0 \Rightarrow k = -3$

Então:

$x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$

1 é raiz, pois a soma dos coeficientes é zero.

Aplicando Briöt-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ \hline
1 & 1 & -2 & -1 & 0
\end{array} \leftarrow \text{Resto}$$

Devemos encontrar as raízes de $x^2 - 2x - 1 = 0$.

$\Delta = 4 + 4 = 8$

$x = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

$S = \{1; 1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}$

3. c

Seja α a terceira raiz, além das raízes 1 e 3. Assim, temos:

$P(x) = a \cdot (x - 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - \alpha)$

$P(0) = -12 \Rightarrow a \cdot (0 - 1) \cdot (0 + 3) \cdot (0 - \alpha) = -12 \Rightarrow$

$\Rightarrow a \cdot \alpha = -4 \qquad (I)$

$P(2) = a \cdot (2 - 1) \cdot (2 + 3) \cdot (2 - \alpha) = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot a - a \cdot \alpha = 6 \; (II)$

De (II) e (I), vem:

$2a - (-4) = 6 \Rightarrow 2a = 2 \therefore a = 1$

Substituindo em (I), temos:

$1 \cdot \alpha = -4 \therefore \alpha = -4$

Assim: $P(x) = (x - 1) \cdot (x + 3) \cdot (x + 4)$

4. c

$(2x - 1) \cdot (ax^2 + bx + c) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx - ax^2 - bx - c =$

$= 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2ax^3 + (2b - a) \cdot x^2 + (2c - b) \cdot x - c =$

$= 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$

I. $2a = 2 \Rightarrow a = 1$

II. $2b - a = -11 \Rightarrow 2b - 1 = -11 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2b = -10 \Rightarrow b = -5$

III. $2c - b = 17 \Rightarrow 2c + 5 = 17 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2c = 12 \Rightarrow c = 6$

Assim:

$2x^3 - 11x^2 + 17x - 6 =$

$= (2x - 1) \cdot (x^2 - 5x + 6) = 0$

As raízes são $\frac{1}{2}$; 2 e 3, e a maior raiz é 3.

5. b

$P(x) = a \cdot (x - 0) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$

$P\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 2\right) =$

$= -\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3a}{8} = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = -4 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(x) = -4 \cdot x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$

$\therefore P(x) = -4x^3 + 12x^2 - 8x$

6. c

	1	−1	−3	5	−2
1	1	0	−3	2	0
1	1	1	−2	0	
1	1	2	0		
1	1	3			

Temos $x = 1$ como raiz de multiplicidade três do polinômio apresentado.

Página 119

1. a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} = \frac{\frac{-12}{2}}{\frac{2}{2}} = -6$

b) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\left(\frac{-2}{2}\right) = 1$

c) $(x_1 + x_2 + x_3)^2 =$

$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 =$

$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{12}{2}\right) =$

$= 4 + 12 = 16$

d) $x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3^2 =$

$= x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) = 1 \cdot \left(\frac{-4}{2}\right) = -2$

2. e

Sejam *a*, *b* e *c* as raízes da equação. Se elas estão em PA, temos:

$b = \frac{a + c}{2} \Rightarrow a + c = 2b$

Temos:

$a + b + c = 9 \Rightarrow b + a + c = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow b + 2b = 9 \Rightarrow 3b = 9 \Rightarrow b = 3$

$\therefore P(3) = 0 \Rightarrow 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 3k - 24 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 27 - 81 + 3k - 24 = 0 \Rightarrow 3k = 78 \Rightarrow k = 26$

3. $a \cdot b \cdot 5 = \frac{-(-65)}{1} \Rightarrow ab = 13$

$\therefore \sqrt{ab} = \sqrt{13}$

4. d

Sejam α, $-\alpha$ e β as três raízes da equação, sendo, evidentemente, α e $-\alpha$ as raízes simétricas. Assim, temos:

$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-a_1}{a_0} \Rightarrow -\alpha + \alpha + \beta = \frac{-(-3)}{1}$

$\therefore \beta = 3$

5. a

Se $2 + i$ é uma raiz da equação, o número complexo $2 - i$ (conjugado de $2 + i$) é outra raiz.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{-a_1}{a_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow (2 + i) + (2 - 1) + x_3 + x_4 = \frac{-(-3)}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 + x_3 + x_4 = \frac{3}{2} \Rightarrow x_3 + x_4 = -\frac{5}{2}$ (I)

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{a_4}{a_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow (2 + i) \cdot (2 - 1) \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{-15}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{-15}{2} \Rightarrow x_3 \cdot x_4 = -\frac{3}{2}$ (II)

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = -\frac{5}{2} \\ x_3 \cdot x_4 = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 + x_4 = -3 + \frac{1}{2} \\ x_3 \cdot x_4 = -3 \cdot \frac{1}{2} \end{cases}$$

$x_3 = -3$ e $x_4 = \frac{1}{2}$

As outras raízes são: $2 - i$; -3 e $\frac{1}{2}$

6. b

As raízes do polinômio são:

$2 - i$; $2 + i$; $3 + 2i$; $3 - 2i$

Das relações de Girard, temos:

$(2 - i) \cdot (2 + i) \cdot (3 + 2i) \cdot (3 - 2i) = d \Rightarrow$

$\Rightarrow (4 + 1) \cdot (9 + 4) = d \Rightarrow$

$\Rightarrow d = 5 \cdot 13 \Rightarrow d = 65$

Página 123

1.

$\underset{9}{\square} + \underset{9}{\square}\ \underset{1}{\square} + \underset{9}{\square}\ \underset{10}{\square}\ \underset{1}{\square} + \underset{9}{\square}\ \underset{10}{\square}\ \underset{1}{\square}\ \underset{1}{\square} =$

9 · 1 ; 9 · 10 · 1 ; 9 · 10 · 1 · 1

$= 9 + 9 + 90 + 90 = 198$

2. e

Atenção! Os algarismos não precisam ser distintos.

Começando pelo algarismo 3:

3		
	3	3

$3 \cdot 3 = 9$

Começando pelo algarismo 4:

4		
	3	3

$3 \cdot 3 = 9$

São, no total, 18 números.

3. a) $P_5 = 5! = 120$ anagramas

b)

consoante				
3	4	3	2	1

$3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 72$ anagramas

c)

consoante				vogal
3	3	2	1	2

$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 36$ anagramas

d)

consoante	vogal	consoante	vogal	consoante
3	2	2	1	1

$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 12$ anagramas

4. b

$(2) + (2 \cdot 2) + (2 \cdot 2 \cdot 2) + (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) + (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 62$ códigos

5. c

P, L, J, R

PL	JR

$= P_2$

Pedro e Luísa podem trocar de posição entre si (P_2).
João e Rita podem trocar de posição entre si (P_2).

Temos, então:

$P_2 \cdot P_2 \cdot P_2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

6. d

Primeiro degrau: $A_{3,1} \cdot A_{3,1} \cdot 2$ (arranjo de três homens um a um vezes arranjo de três mulheres tomadas uma a uma vezes permutação entre eles).

Segundo degrau: $A_{2,1} \cdot A_{2,1} \cdot 2$ (arranjo de dois homens restantes um a um vezes arranjo entre as duas mulheres restantes uma a uma vezes permutação entre eles).

Terceiro degrau: $A_{1,1} \cdot A_{1,1} \cdot 2$ (o homem que sobrou vezes a mulher que sobrou vezes permutação entre eles).

Assim, temos:

$18 \cdot 8 \cdot 2 = 288$

Páginas 125 e 126

1. d

$$C_{n,2} = 78 \Rightarrow \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 78 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n \cdot (n-1)}{2 \cdot 1} = 14 \Rightarrow n^2 - n = 156 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 156 = 0 \Rightarrow n = \frac{1 \pm 25}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = -12 \text{ (Não convém.)} \\ \text{ou} \\ n = 13 \end{cases}$$

São 13 jogadores.

2. c

$$P_7^5 = \frac{7!}{5!} = 7 \cdot 6 = 42$$

3. c

Seja *n* o número de cordas.

$$n = C_{6,2} \Rightarrow n = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \therefore n = 15 \text{ cordas}$$

4. a

$$\begin{cases} C_{n,2} = k \\ A_{n,2} = k + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = k \\ \dfrac{n!}{(n-2)!} = k + 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{k}{k+3} \Rightarrow 2k = k + 3 \Rightarrow k = 3$$

De $C_{n,2} = k$, temos:

$$C_{n,2} = 3 \Rightarrow \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \cdot (n-1) = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 6 = 0$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25$$

$$n = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$n_1 = -2$ (Não convém.) ou $n_2 = 3$

$\therefore n = 3$

5. e

Basta determinar o número de formas para se ocupar um dos elevadores, pois, quando isso ocorre, as demais pessoas irão usar o segundo elevador, ou seja, elas já foram "selecionadas".

Seja *n* o número de formas.

$$n = C_{9,4} \Rightarrow n = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \therefore n = 126 \text{ formas}$$

6. A = acima
D = direita
De (1; 1) até (4; 4) deveremos mover 3 casas acima e 3 casas à direita.
Uma dessas possibilidades será:
AAADDD
$P_6^{3,\,3} = \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$

Página 131

1. A: par
B: múltiplo de 5
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A) = \dfrac{50}{100} = \dfrac{1}{2}$
$P(B) = \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$
$A \cap B = \{10; 20; ...; 100\}$
$P(A \cap B) = \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10}$
$\therefore P(A \cap B) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{5 + 2 - 1}{10} = \dfrac{3}{5}$ ou 60%

2. b
$P(E) = P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cup B) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{5}{8} + \dfrac{1}{2} - P(A \cap B) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow -P(A \cap B) = 1 - \dfrac{5}{8} + \dfrac{1}{2} \Rightarrow$
$-P(A \cap B) = 1 - \dfrac{5}{8} + \dfrac{1}{2} \Rightarrow -P(A \cap B) = -\dfrac{1}{8}$
$\therefore P(A \cap B) = \dfrac{1}{8}$

3. e
$n(E) = A_{10,\,2} = \dfrac{10!}{8!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} \Rightarrow n(E) = 90$
$A = \{(1; 9); (2; 8); (3; 7); (4; 6); (6; 4); (7; 3); (8; 2); (9; 1)\} \Rightarrow$
$\Rightarrow n(A) = 8$
$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} \Rightarrow P(A)\,\dfrac{8}{90} \therefore P(A) = \dfrac{4}{45}$

4. a) Temos três bolas pretas (P), cinco bolas brancas (B) e *x* bolas azuis (A).
$P(A) = \dfrac{x}{3 + 5 + x} \Rightarrow \dfrac{2}{3} = \dfrac{x}{8 + x} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x = 16 + 2x \Rightarrow x = 16$
Devem-se acrescentar 16 bolas azuis.

b) $P(B) \cdot P(B) + P(P) \cdot P(P) + P(A) \cdot P(A) = \dfrac{1}{2}$
$\dfrac{4}{5+x} \cdot \dfrac{4}{5+x} + \dfrac{1}{5+x} \cdot \dfrac{1}{5+x} + \dfrac{x}{5+x} \cdot \dfrac{x}{5+x} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{16 + 1 + x^2}{(5 + x)^2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2 + 34 = 25 + 10x + x^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$
$\Delta = 100 - 36 = 64$
$x = \dfrac{10 \pm 8}{2} \Rightarrow x_1 = 1$ ou $x_2 = 9$

5. c
Se a primeira bola foi azul, restaram quatro bolas vermelhas e seis azuis. Assim, a probabilidade de ocorrer uma bola vermelha será de $\dfrac{4}{10} = 40\%$.

6. c
P(D) = probabilidade de ter tirado nota 10
P(N) = probabilidade de ser do curso noturno
Queremos:
$P(D \cap N) = \dfrac{8}{26} = \dfrac{4}{13}$

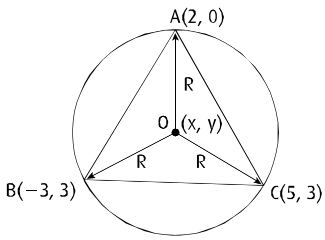
Página 134

1. c
P(0, k)
$d_{PQ} = d_{PR} \Rightarrow$
$\Rightarrow (0 - 2)^2 + (k - 0)^2 = (0 - 4)^2 + (k - 2)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow k = 4$
P(0; 4)

2. $d_{AB} = \sqrt{(11 - 5)^2 + (2 - 10)^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow d_{AB} = \sqrt{36 + 64} \therefore d_{AB} = 10$
$d_{AC} = \sqrt{(8 - 5)^2 + (11 - 10)^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow d_{AC} = \sqrt{9 + 1} \therefore d_{AC} = \sqrt{10}$
$d_{BC} = \sqrt{(11 - 8)^2 + (2 - 11)^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow d_{BC} = \sqrt{9 + 81} \therefore d_{BC} = 3\sqrt{10}$
Assim: $(d_{AB})^2 = 100$, $(d_{AC})^2 = 10$, $(d_{BC})^2 = 90$
$(d_{AB})^2 = (d_{AC})^2 + (d_{BC})^2$, logo ABC é um triângulo retângulo, com hipotenusa $\overline{AB}$ e catetos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.
$S_{ABC} = \dfrac{(AC) \cdot (BC)}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10}}{2}$
$\therefore S_{ABC} = 15$ u.a.

3. a
$d_{AC} = d_{BC} \Rightarrow (x + 1)^2 + (2 + 1)^2 = (x - 5)^2 + (2 + 7)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + 9 = x^2 - 10x + 25 + 81 \Rightarrow$
$\Rightarrow 12x = 96$
$x = 8$

4. b



$$\begin{cases} d_{OA} = d_{OB} = R \\ d_{OA} = d_{OC} = R \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-3)^2} \\ \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2} \end{cases} \Rightarrow$$

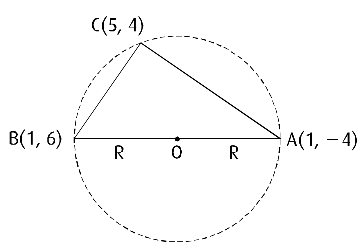
$$\Rightarrow \begin{cases} 5x - 3y = -7 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 3y = -7 \\ 3x + 3y = 15 \end{cases}$$

$\therefore x = 1$ e $y = 4$

O circuncentro desse triângulo é o ponto de coordenadas (1; 4).

5. a

ABC é um triângulo retângulo e, portanto, inscritível em um semicírculo. O diâmetro coincide com a hipotenusa AB, e o centro da circunferência é o ponto médio desse diâmetro.



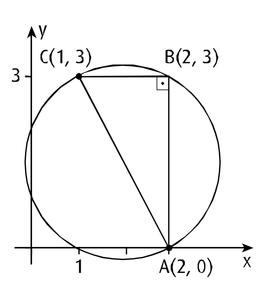
$$x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_0 = \frac{1+1}{2} \therefore x_0 = 1$$

$$y_0 = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{-4+6}{2} \therefore y_0 = 1$$

Assim: $x_0 + y_0 = 1 + 1$

$\therefore x_0 + y_0 = 2$

6. d



Como $\triangle$ABC é retângulo, o raio da circunferência é metade da medida da hipotenusa.

$$d_{AC} = \sqrt{(1-2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{10}$$

$$R = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Página 140

1. d

Equação segmentária:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{x}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{3} \cdot (1 - x)$$

2. e

$$m_{AB} = \text{tg } 45° = 1$$

$$\frac{2m - 2}{3 - m + 1} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2m - 2 = 4 - m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3m = 6 \Rightarrow m = 2$$

3. (r): $\frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1 \Rightarrow x + y = 6$

(s): $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow 3x - 2y = -6$

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x - 2y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 12 \\ 3x - 2y = -6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{6}{5} \text{ e } y = \frac{24}{5}$$

O ponto P tem coordenadas $\left(\frac{6}{5}; \frac{24}{5}\right)$.

4. e

$$m_s = \frac{5-4}{0-2} \Rightarrow m_s = -\frac{1}{2}$$

Se a reta *r* é perpendicular à reta *s*, então:

$$m_r = -\frac{1}{m_s} \Rightarrow m_r = 2$$

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

Assim: (r): $y - 4 = 2 \cdot (x - 2)$

$\therefore$ (r): $y = 2x$

5. b

$$m_s = \frac{2}{3}$$

$$m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_r = -\frac{3}{2}$$

$$\text{(r) } y + 3 = -\frac{3}{2} \cdot (x + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y + 6 = -3x - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y = -3x - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$$

6. c

$$x_M = \frac{2+0}{2} = 1$$

$$y_M = \frac{2+6}{2} = 4$$

Logo: M(1; 4)

$$m_{AB} = \frac{6-2}{0-2} = -2$$

$$m_t \cdot m_{AB} = -1 \Rightarrow m_t = \frac{1}{2}$$

Como m ∈ r, temos:

$$(r)\ y - 4 = \frac{1}{2} \cdot (x - 1)$$

O ponto será do eixo das ordenadas quando x = 0.

Então:

$$y - 4 = \frac{1}{2} \cdot (0 - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 4 = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

As coordenadas do ponto são: $\left(0; \frac{7}{2}\right)$.

Página 143

1. e

$C(x_0, y_0)$ é o centro da circunferência λ.

$$x_0 = \frac{x+1}{2} \Rightarrow 1 = \frac{x+1}{2} \Rightarrow x = 1$$

$$y_0 = \frac{-2+y}{2} \Rightarrow 0 = \frac{-2+y}{2} \Rightarrow y = 2$$

r = raio da circunferência

$$r = \frac{\sqrt{(1-x)^2 + (y+2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + 4^2}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\lambda: (x-1)^2 + (y-0)^2 = 2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda: x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda: x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$$

2. d

A circunferência tem centro de coordenadas (1, −3) e raio igual a 2. O ponto da circunferência de abscissa mínima tem coordenadas (−1, −3) e o de abscissa máxima (3, −3).

A reta x = m é vertical e interceptará a circunferência se, e somente se, $-1 \leqslant m \leqslant 3$.

3. d

Sejam os pontos A(2, 0), B(2, 4), C(0, 4) e $P(x_0, y_0)$, sendo *P* o centro da circunferência.

I. $d_{AP} = d_{CP}$

$$(x_0 - 2)^2 + (y_0 - 0)^2 = (x_0 - 0)^2 + (y_0 - 4)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_0^2 - 4x_0 + 4 + y_0^2 = x_0^2 + y_0^2 - 8y_0 + 16 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x_0 - 8y_0 + 12 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_0 - 2y_0 + 3 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_0 = 2y_0 - 3$$

II. $d_{A,P} = d_{B,P}$

$$\cancel{(x_0 - 2)^2} + y_0^2 = \cancel{(x_0 - 2)^2} + (y_0 - 4)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_0^2 = y_0^2 - 8y_0 + 16 \Rightarrow 8y_0 = 16 \Rightarrow y_0 = 2$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$x_0 = 2 \cdot 2 - 3$

$x_0 = 1$

$\therefore P = (1, 2)$

$$d_{PO} = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

4. $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 3 = 0 + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2^2$$

A circunferência dada tem centro de coordenadas (1, 0) e raio r = 1. A circunferência procurada tem centro (4, 4) e raio R.

Do enunciado, R + r é igual à distância entre os centros das circunferências, que são os pontos de coordenadas (1, 0) e (4, 4).

$$R + r = \sqrt{(1-4)^2 + (0-4)^2} \Rightarrow R + 1 = 5 \Rightarrow R = 4$$

A equação procurada tem equação:

$$(x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$$

5. d

$$d_{AB} = \sqrt{(6-2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

O centro da circunferência é o ponto médio M de AB, e o raio *r* é $\frac{5}{2}$.

$$M = \left(\frac{2+6}{2}; \frac{5+2}{2}\right) = \left(4; \frac{7}{2}\right)$$

$$\lambda: (x-4)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

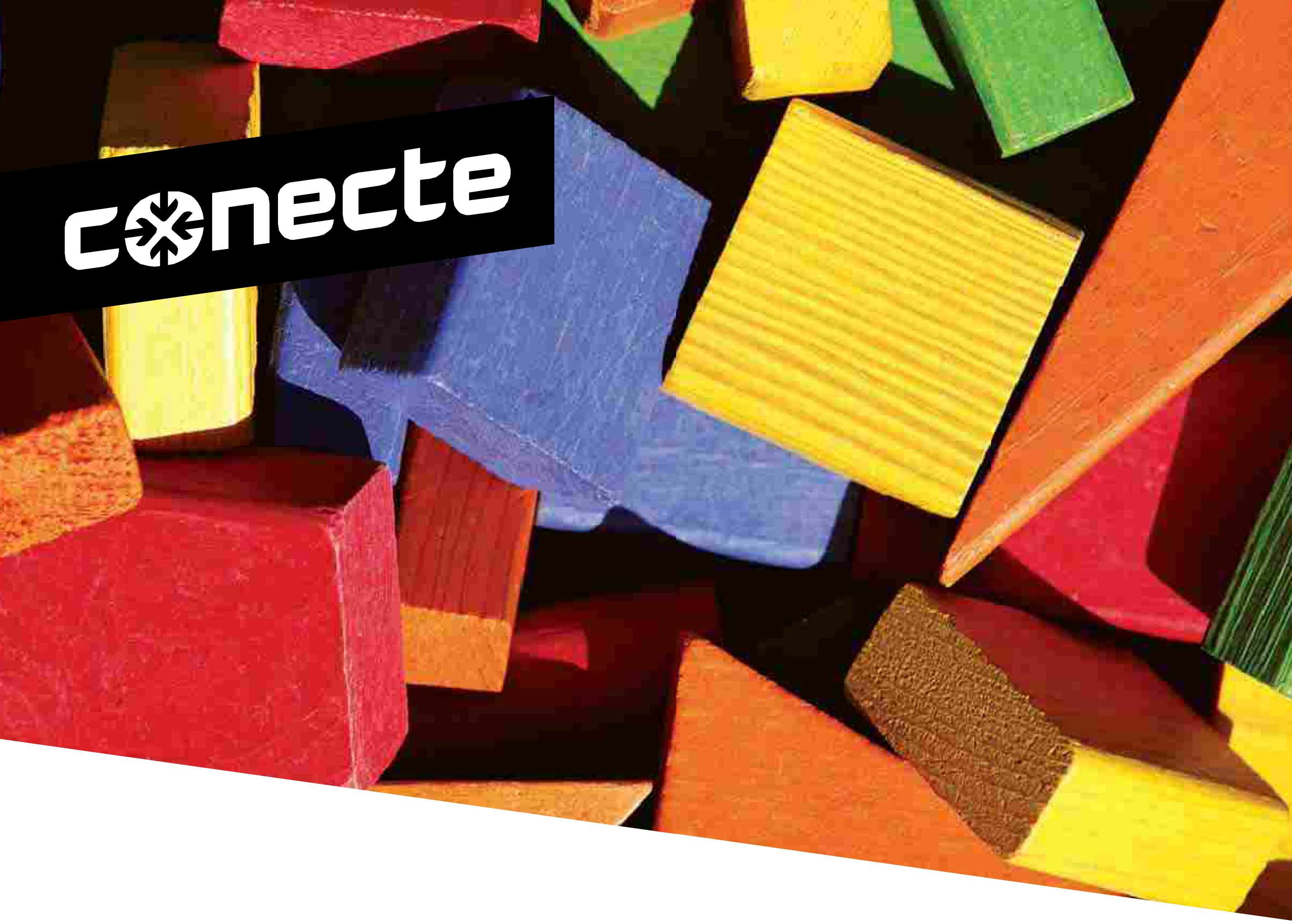
$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 7y + \frac{49}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 7y + 22 = 0$$

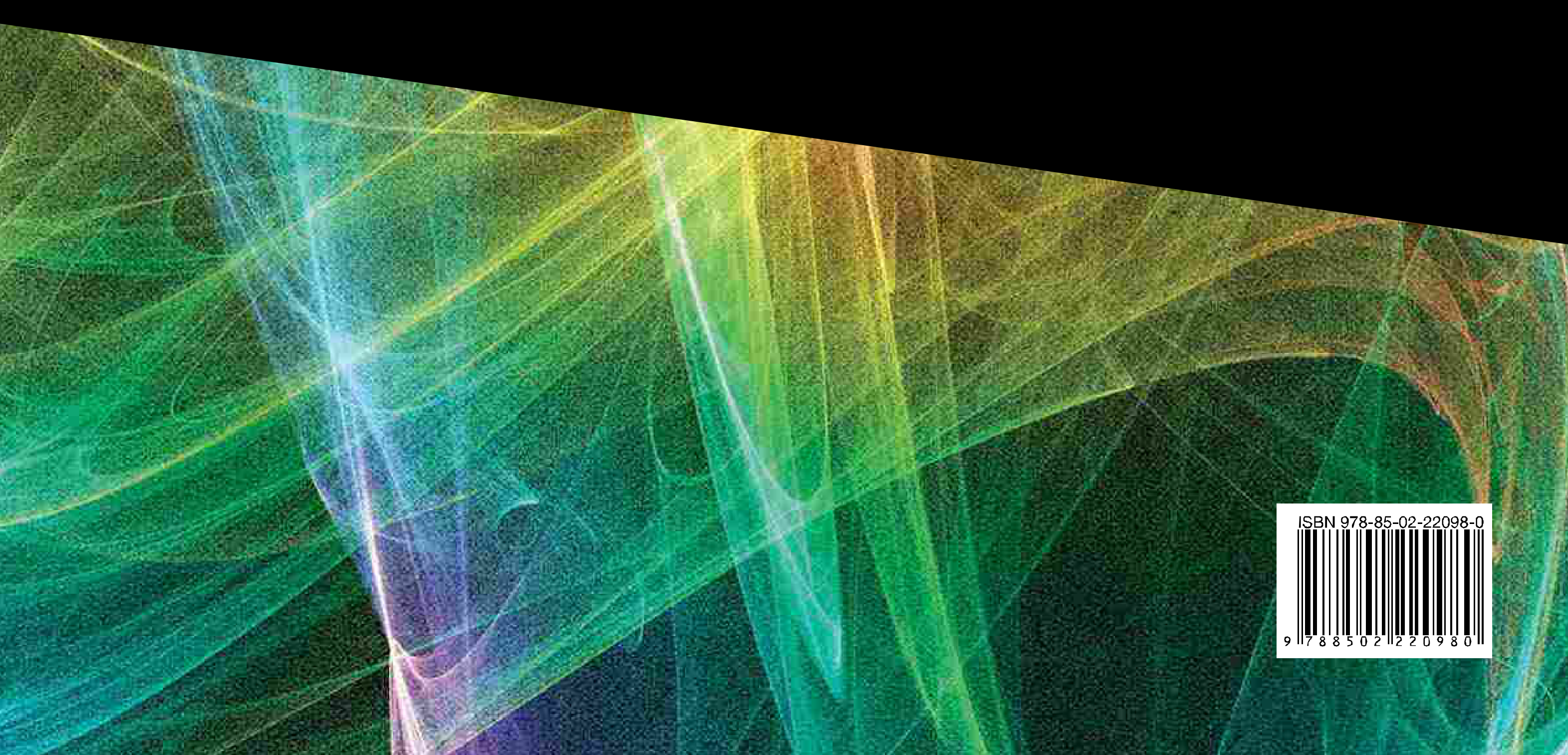
6. a

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 + 24 = 0 + 9 + 16 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 8y + 16) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$$

O ponto de abscissa mínima tem a mesma ordenada do centro da circunferência e abscissa igual à abscissa do centro, diminuída em uma unidade, ou seja, o valor do raio. Assim, o ponto da circunferência que possui a abscissa mínima é o ponto de coordenadas (2, 4).



conecte



ISBN 978-85-02-22098-0