Moderna PLUS

MATEMÁTICA 3

PAIVA

CADERNO DO ESTUDANTE

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida
e produzida pela Editora Moderna.

Editora Executiva:
Juliane Matsubara Barroso

Exemplar do professor

Moderna PLUS

Coordenação editorial: Juliane Matsubara Barroso
Elaboração de originais: Daniel Teodoro
Edição de texto: Débora Regina Yogui, Fabio Martins de Leonardo, Juliane Matsubara Barroso, Marilu Maranho Tassetto
Assistência editorial: Enrico Briese Casentini, Thais Toldo Antonagi
Preparação de texto: Solange Gonçalves Guerra Martins
Coordenação de *design* e projetos visuais: Sandra Homma
Projeto gráfico e capa: Everson de Paula, Marta Cerqueira Leite
Fotos: Carlos Luvizari/CID
Coordenação de produção gráfica: André Monteiro, Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho
Edição de arte: Elaine Cristina da Silva
Ilustrações: Faustino, Paulo Manzi
Editoração eletrônica: Grapho Editoração
Coordenação de revisão: Elaine Cristina del Nero
Revisão: Carlos Eduardo Sigrist, José Alessandre da Silva Neto, Luís Boa Nova
Coordenação de pesquisa iconográfica: Ana Lucia Soares
Pesquisa iconográfica: Camila D'Angelo, Marcia Sato
As imagens identificadas com a sigla CID foram fornecidas pelo Centro de Informação e Documentação da Editora Moderna.
Coordenação de *bureau*: Américo Jesus
Tratamento de imagens: Arleth Rodrigues, Fabio N. Precendo, Rodrigo Fragoso, Rubens M. Rodrigues
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira Silva, Helio P. de Souza Filho, Marcio H. Kamoto
Coordenação de produção industrial: Wilson Aparecido Troque
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Paiva, Manoel Rodrigues
Matemática : Paiva / Manoel Rodrigues Paiva. — 2. ed. — São Paulo : Moderna, 2010 .

Obra em 3v. para alunos do 1º ao 3º ano.
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Título

10-07085 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino médio 510.7

ISBN 978-85-16-06834-9 (LA)
ISBN 978-85-16-06835-6 (LP)

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2010
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Apresentação

Caro estudante

Este material foi produzido para auxiliá-lo em seus estudos. O objetivo do *Caderno do estudante* é dinamizar o estudo dos principais conceitos do livro-texto com base em resumos, no destaque, na organização desses conceitos e na conexão entre eles, tornando-se, assim, um guia de estudo. Para isso, este caderno está organizado em capítulos correspondentes aos do livro-texto.

No início de cada capítulo deste caderno, há atividades contextualizadas que exploram os conteúdos dos capítulos, a interpretação de situações e a leitura de imagens.

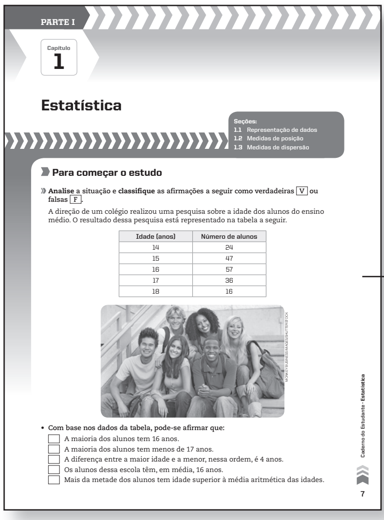
A seguir, propõem-se atividades correspondentes às seções do livro-texto. Nessas atividades, os termos e conceitos específicos da disciplina são destacados e trabalhados. Há também ferramentas diferenciadas, os organizadores gráficos, que facilitam a retomada dos assuntos estudados por meio de recursos visuais, favorecendo a compreensão e a fixação dos conceitos. Assim, você organiza as ideias e faz associações entre elas.

No final de cada capítulo, você elabora uma síntese e avalia o que aprendeu no livro-texto.

O *Caderno do estudante* pode ser usado para retomar os conteúdos abordados nas aulas, como um dos instrumentos de estudo e de revisão para as avaliações.

Bons estudos!

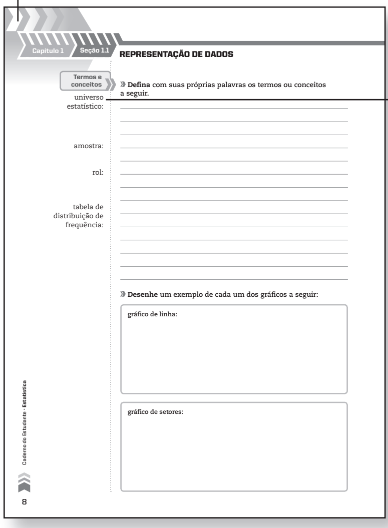
Organização do *Caderno*



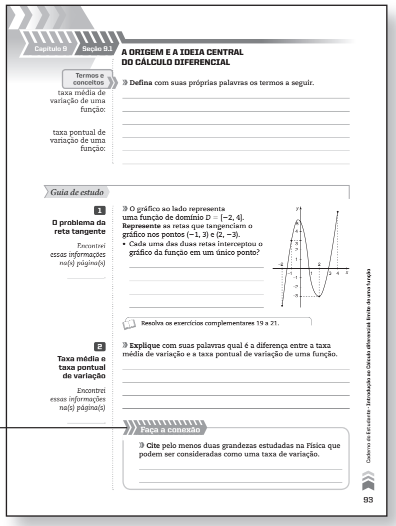
Para começar o estudo

No início de cada capítulo, você vai encontrar uma atividade contextualizada que aborda os conteúdos do capítulo e explora a interpretação de situações e a leitura de imagens.

Com a ajuda do *Caderno do estudante*, você pode estudar os principais conceitos do seu livro-texto, após a leitura de cada seção.



Você vai identificar ou definir os termos e conceitos mais importantes de cada seção.

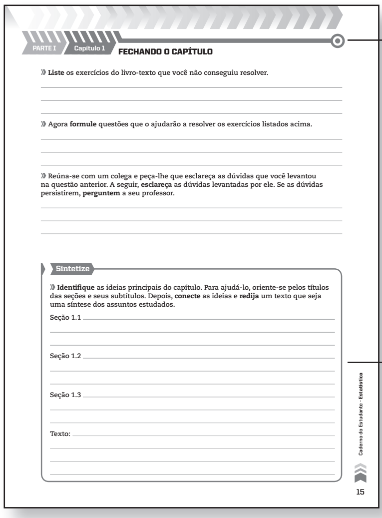


Faça a conexão

Algumas atividades favorecem as conexões entre o conteúdo da seção e outros conhecimentos.

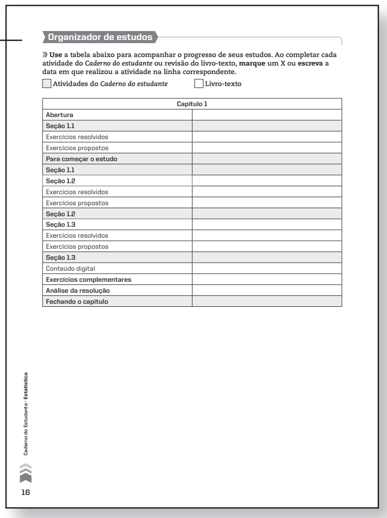
Fechando o capítulo

No final de cada capítulo, você avalia o que aprendeu e retoma os temas em que ainda tenha dúvidas, além de esclarecê-las com colegas e professor.



Organizador de estudos

O quadro, na última página de cada capítulo, possibilita o monitoramento do seu avanço nos diferentes assuntos e recursos que compõem o *Moderna Plus Matemática*.



Sintetize

Para terminar, você escreve uma síntese das principais ideias estudadas no capítulo.

Sumário

Capítulo 1

Estatística

Seções:
1.1 Representação de dados
1.2 Medidas de posição
1.3 Medidas de dispersão

Para começar o estudo

Analise a situação e **classifique** as afirmações a seguir como verdadeiras **V** ou falsas **F**.

A direção de um colégio realizou uma pesquisa sobre a idade dos alunos do ensino médio. O resultado dessa pesquisa está representado na tabela a seguir.

Idade (anos)	Número de alunos
14	24
15	47
16	57
17	36
18	16


MONKEY BUSINESS IMAGES/SHUTTERSTOCK

- **Com base nos dados da tabela, pode-se afirmar que:**
  - F A maioria dos alunos tem 16 anos.
  - V A maioria dos alunos tem menos de 17 anos.
  - V A diferença entre a maior idade e a menor, nessa ordem, é 4 anos.
  - F Os alunos dessa escola têm, em média, 16 anos.
  - V Mais da metade dos alunos tem idade superior à média aritmética das idades.

REPRESENTAÇÃO DE DADOS

Termos e conceitos

Defina com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

universo estatístico: É o conjunto de todos os elementos que podem oferecer informações a respeito de determinado assunto sobre o qual se realiza uma coleta de dados.

amostra: É um subconjunto de um universo estatístico.

rol: É uma sequência na qual dados numéricos são organizados de tal forma que, a partir do segundo, cada elemento é maior ou igual ao antecessor ou é menor ou igual ao antecessor.

tabela de distribuição de frequência: É uma tabela organizada segundo estes critérios: a amostra é separada em classes; a quantidade de elementos de uma mesma classe é chamada de frequência dessa classe; a soma das frequências de todas as classes é chamada de frequência total da amostra; dividindo-se a frequência *F* de uma classe pela frequência total obtém-se um número chamado de frequência relativa da classe.

Desenhe um exemplo de cada um dos gráficos a seguir:
resposta pessoal

gráfico de linha:

gráfico de setores:

gráfico de barras:

histograma:

Guia de estudo

1

Distribuição de frequências em classes unitárias

Encontrei essas informações na(s) página(s) 17.

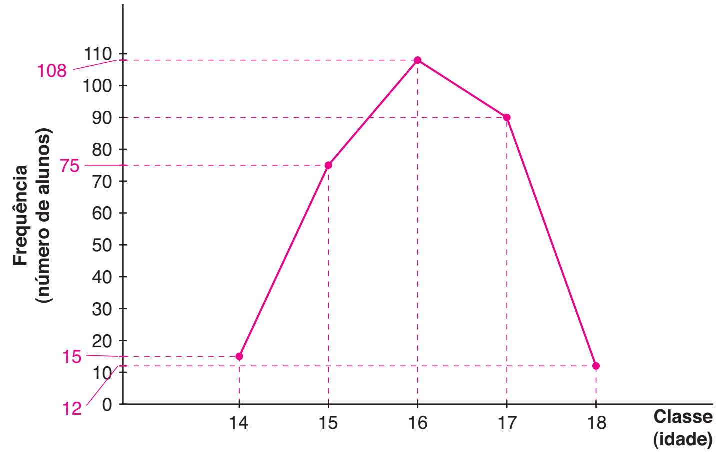
» Considere a seguinte situação: uma escola de ensino médio tem alunos de 14 a 18 anos de idade. A frequência das idades dos alunos é dada pela tabela abaixo.
Complete os valores que faltam.

Classe (idade)	Frequência (número de alunos)	Frequência relativa
14	15	5%
15	75	25%
16	108	36%
17	90	30%
18	12	4%
	Frequência total: $F_t =$ 300	

2 Gráfico de linha

Encontrei essas informações na(s) página(s) 18.

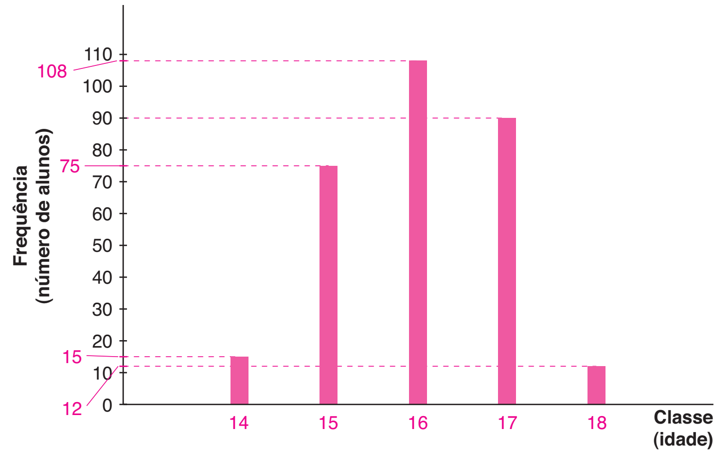
» No plano cartesiano abaixo, **represente** o gráfico de linha com as frequências apresentadas na tabela anterior.



3 Gráfico de barras verticais

Encontrei essas informações na(s) página(s) 18.

» No plano cartesiano abaixo, **represente** o gráfico de barras verticais com as frequências apresentadas na tabela do item **1**.



4 Gráfico de barras horizontais

Encontrei essas informações na(s) página(s) 19.

» **Explique** com suas próprias palavras qual é a principal diferença entre um gráfico de barras verticais e um gráfico de barras horizontais.

No gráfico de barras verticais, as classes são indicadas num eixo horizontal e as frequências, num eixo vertical. Já no gráfico de barras horizontais, as classes são indicadas no eixo vertical, enquanto as frequências são indicadas no eixo horizontal.

CAD_EST_MAT_CAP 01.indd 10 13.10.10 19:23:40

5

Gráfico de setores

Encontrei essas informações na(s) página(s) 19.

» Considere a tabela do item **1** e **responda**: Qual é a medida do ângulo central do setor que representa a classe dos alunos com 17 anos de idade num gráfico de setores? Justifique sua resposta.

Esse ângulo deve ser de 108°, pois o ângulo central α é dado por $\alpha = \frac{360°}{F_t} \cdot F$, ou seja, $\alpha = \frac{360°}{300} \cdot 90 = 108°$.

Resolva os exercícios complementares 5 a 14.

6

Distribuição de frequências em classes representadas por intervalos reais

Encontrei essas informações na(s) página(s) 23.

» Numere de 1 a 4 os quadrinhos abaixo, **ordenando** os procedimentos para obter a tabela de distribuição de frequências com classes representadas por intervalos reais para um certo conjunto de dados.

[2] Escolher um intervalo fechado que contenha toda a amostra.

[4] Agrupar os elementos de acordo com as classes a que pertencem.

[1] Calcular a amplitude da amostra.

[3] Dividir o intervalo escolhido em subintervalos de mesmo comprimento.

7

Histograma

Encontrei essas informações na(s) página(s) 24.

» **Explique** com suas próprias palavras qual é a principal diferença entre um gráfico de barras verticais e um histograma.

O gráfico de barras, horizontais ou verticais, representa a distribuição de frequência de classes unitárias, enquanto o histograma representa a distribuição de frequência de dados agrupados em intervalos reais.

Resolva os exercícios complementares 15 a 19.

MEDIDAS DE POSIÇÃO

Termos e conceitos

Defina com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

média aritmética: A media aritmética de dois ou mais números é a razão entre a soma dos números pela quantidade deles, nessa ordem.

média aritmética ponderada: A média aritmética ponderada de dois ou mais números, aos quais são atribuídos pesos, é o valor obtido adicionando-se os produtos dos números pelos respectivos pesos e dividindo-se o resultado pela soma dos pesos.

moda: Em uma amostra em que os elementos não têm a mesma frequência, moda é todo elemento de maior frequência.

mediana: É o valor central de um rol de elementos, quando o número de elementos é ímpar, ou a média aritmética entre os dois elementos centrais do rol, quando o número de elementos é par.

Guia de estudo

1

Média aritmética

Encontrei essas informações na(s) página(s) 29.

Escreva a fórmula da média aritmética $\bar{x}$ de um conjunto de n números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$$

2

Média aritmética ponderada

Encontrei essas informações na(s) página(s) 29 e 30.

Escreva a fórmula da média aritmética ponderada $\bar{x}$ de um conjunto de n números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ com pesos $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$, respectivamente.

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + ... + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n}$$

3

Moda

Encontrei essas informações na(s) página(s) 31.

» **Dê um exemplo** de uma amostra em que a média aritmética coincide com a moda.

resposta possível:

amostra: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5

média aritmética: 3

moda: 3

4

Mediana

Encontrei essas informações na(s) página(s) 29 a 32.

» Abaixo, há um exercício e parte de sua resolução. À esquerda, comentários explicam as etapas da resolução. **Complete-as** e finalize o exercício.

Exercício

Determine a média aritmética, a moda e a mediana da amostra a seguir:

3, 8, 5, 1, 3, 2, 6, 5, 4, 7, 9, 1, 8, 1

Resolução

1. Calculamos a média aritmética, dividindo a soma dos elementos do conjunto pelo número de elementos desse conjunto.

A média dessa amostra é:

$$\bar{x} = \frac{63}{14} = 4{,}5$$

2. Para determinar a moda e a mediana, ordenamos os elementos da amostra em um rol.

rol: 1, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 9

3. O valor que possui maior frequência é moda da amostra. E como a amostra tem 14 elementos, a mediana é a média aritmética entre os elementos centrais.

A moda dessa amostra é:

$$Mo = 1$$

A mediana dessa amostra é:

$$Md = \frac{4 + 5}{2} = 4{,}5$$

Resolva os exercícios complementares 1 a 3 e 20 a 45.

MEDIDAS DE DISPERSÃO

Termos e conceitos

Identifique o termo ou o conceito que pode ser associado à definição:

1. É a média aritmética entre os desvios absolutos dos elementos da amostra.
2. É a média aritmética entre os quadrados dos desvios dos elementos da amostra.
3. É a raiz quadrada da variância.

1. desvio absoluto médio
2. variância
3. desvio padrão

Guia de estudo

1 Desvio absoluto médio

Encontrei essas informações na(s) página(s) 37.

Numere de 1 a 4 os quadrinhos abaixo **ordenando** os procedimentos para obter o desvio absoluto médio de determinada amostra de números.

- [2] Calcular o desvio absoluto de cada elemento da amostra.
- [1] Calcular a média aritmética dos elementos da amostra.
- [4] Dividir a soma dos desvios absolutos pelo número de elementos da amostra.
- [3] Calcular a soma dos desvios absolutos.

2 Variância

Encontrei essas informações na(s) página(s) 38.

Escreva a fórmula da variância σ^2 de um conjunto de n números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ de média aritmética $\bar{x}$.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + ... + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

3 Desvio padrão

Encontrei essas informações na(s) página(s) 38.

Explique com suas palavras qual é a relação entre desvio padrão e variância.

O desvio padrão é igual à raiz quadrada da variância.

Resolva os exercícios complementares 4 e 46 a 52.

FECHANDO O CAPÍTULO

» **Liste** os exercícios do livro-texto que você não conseguiu resolver.

resposta pessoal

» Agora **formule** questões que o ajudarão a resolver os exercícios listados acima.

resposta pessoal

» Reúna-se com um colega e peça-lhe que esclareça as dúvidas que você levantou na questão anterior. A seguir, **esclareça** as dúvidas levantadas por ele. Se as dúvidas persistirem, **perguntem** a seu professor.

resposta pessoal

Sintetize

» **Identifique** as ideias principais do capítulo. Para ajudá-lo, oriente-se pelos títulos das seções e seus subtítulos. Depois, **conecte** as ideias e **redija** um texto que seja uma síntese dos assuntos estudados.

Seção 1.1

Seção 1.2

Seção 1.3

Texto:

Organizador de estudos

» **Use** a tabela abaixo para acompanhar o progresso de seus estudos. Ao completar cada atividade do *Caderno do estudante* ou revisão do livro-texto, **marque** um X ou **escreva** a data em que realizou a atividade na linha correspondente.

☐ Atividades do *Caderno do estudante* ☐ Livro-texto

Capítulo 1	
Abertura	
Seção 1.1	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Para começar o estudo	
Seção 1.1	
Seção 1.2	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 1.2	
Seção 1.3	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 1.3	
Conteúdo digital	
Exercícios complementares	
Análise da resolução	
Fechando o capítulo	

PARTE I

Capítulo 2

Geometria analítica: ponto e reta

Seções:

2.1 Ponto

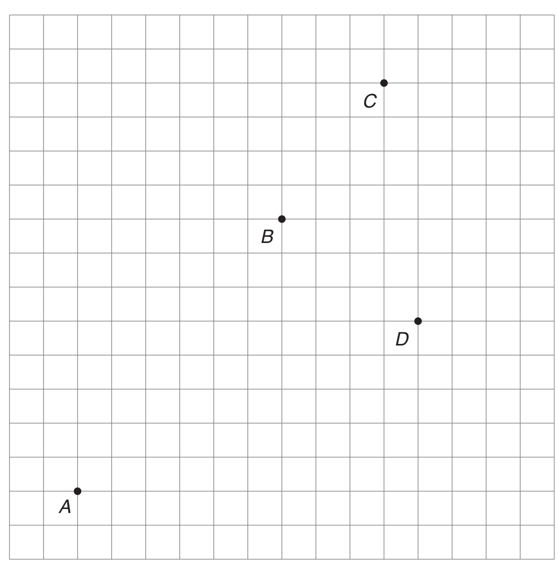
2.2 Reta

2.3 Formas da equação da reta

Para começar o estudo

Analise a situação.

No quadriculado abaixo, os pontos assinalados indicam quatro cidades, *A*, *B*, *C* e *D*, e cada quadrícula tem a forma de um quadrado cujo lado representa uma distância de 1.000 km. Serão construídas duas estradas retilíneas: uma que liga a cidade *A* à cidade *C* e outra que liga a cidade *B* à cidade *D*.



- **Classifique as afirmações como verdadeiras** [V] **ou falsas** [F].

[V] A estrada que ligará a cidade *A* à cidade *C* passará pela cidade *B*.

[V] A distância entre as cidades *B* e *C* é de 5.000 km.

[F] A distância entre as cidades *A* e *D* é de 15.000 km.

[V] A estrada que ligará a cidade *A* à cidade *C* será perpendicular à estrada que ligará *B* a *D*.

[F] A distância de *B* a *C* é maior que a distância de *B* a *D*.

PONTO

Termos e conceitos

» **Defina** com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

sistema cartesiano ortogonal de coordenadas: É o conjunto formado por dois eixos reais, *Ox* e *Oy*, perpendiculares entre si na origem *O*.

plano cartesiano: É um plano ao qual se associa um sistema cartesiano ortogonal de eixos coordenados, de modo que cada ponto seja determinado por um par ordenado (x, y) de números reais.

bissetriz dos quadrantes ímpares: É a reta que contém as bissetrizes dos quadrantes I e III no plano cartesiano.

bissetriz dos quadrantes pares: É a reta que contém as bissetrizes dos quadrantes II e IV no plano cartesiano.

distância entre dois pontos: A distância entre dois pontos é o comprimento do segmento de reta que tem como extremos esses dois pontos.

ponto médio de um segmento de reta: O ponto médio entre dois pontos, A e B, é um ponto do segmento $\overline{AB}$ equidistante a A e a B.

baricentro de um triângulo: É o ponto de intersecção entre as medianas de um triângulo.

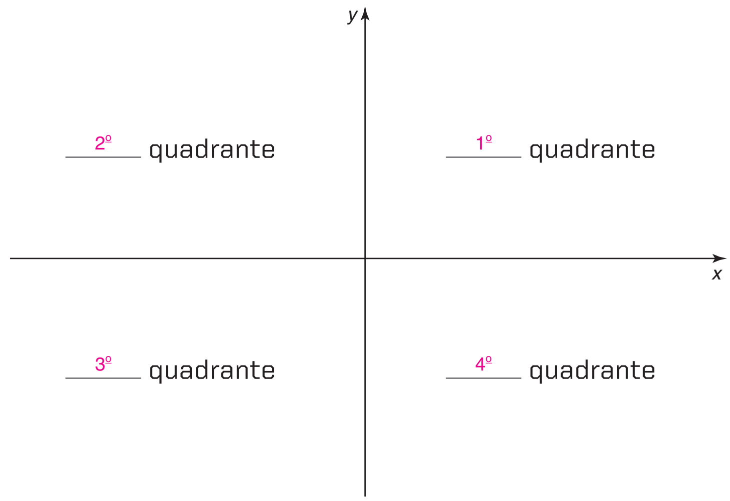
Guia de estudo

1

Sistema cartesiano ortogonal de coordenadas

Encontrei essas informações na(s) página(s) 53.

» No plano cartesiano abaixo, **numere** os quadrantes.



2

Coordenadas de um ponto

Encontrei essas informações na(s) página(s) 54.

Considere o ponto $P(x, y)$ no sistema de coordenadas. **Identifique** a abscissa e a ordenada de P.

$P(x, y)$

x: abscissa

y: ordenada

3

Pontos notáveis do plano cartesiano

Encontrei essas informações na(s) página(s) 54 e 55.

O esquema abaixo destaca as coordenadas de alguns pontos notáveis que pertencem à bissetriz de um dos quadrantes ou a um dos eixos coordenados do plano cartesiano. **Descreva** as posições desses pontos notáveis **completando** os quadros.

Coordenadas de pontos notáveis

$P(0, a)$	$P(a, 0)$	$P(a, a)$	$P(a, -a)$
O ponto pertence ao eixo Oy.	O ponto pertence ao eixo Ox.	O ponto pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.	O ponto pertence à bissetriz dos quadrantes pares.

4

Distância entre dois pontos no plano cartesiano

Encontrei essas informações na(s) página(s) 55 a 57.

Escreva a fórmula da distância entre dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ no plano cartesiano.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Resolva os exercícios complementares 1 a 8 e 70 a 72.

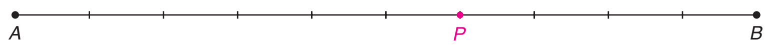
CAD_EST_MAT_CAP 02.indd 19 13.10.10 19:27:00

5

Divisão de um segmento por um ponto interno ao segmento

Encontrei essas informações na(s) página(s) 58.

» **Localize** o ponto P no segmento $\overline{AB}$, de forma que o segmento seja dividido na razão $\frac{3}{2}$ de A para B.



» **Complete** a afirmação a seguir.

Se o ponto $P(x_P, y_P)$ divide o segmento de extremos $A(3, 2)$ e $B(5, 6)$ na razão $\frac{AP}{PB} = k$, então:

$k = \frac{x_P - 3}{5 - x_P}$ e $k = \frac{y_P - 2}{6 - y_P}$

Resolva os exercícios complementares 9 a 12 e 73 a 76.

6

Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

Encontrei essas informações na(s) página(s) 60 e 61.

» **Escreva as fórmulas** das coordenadas do ponto médio $M(x_M, y_M)$ do segmento cujos extremos são $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$

$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

7

Baricentro de um triângulo

Encontrei essas informações na(s) página(s) 62 e 63.

» **Escreva as fórmulas** das coordenadas do baricentro $G(x_G, y_G)$ do triângulo cujos vértices são $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$.

$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$

$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$

Resolva os exercícios complementares 13 a 19.

RETA

Termos e conceitos

Defina com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

inclinação de uma reta:

Seja P o ponto intersecção da reta com o eixo Ox. A reta forma com esse eixo um ângulo de medida α, com $0° \leq \alpha < 180°$, medido no sentido anti-horário a partir de um ponto do eixo Ox à direita de P. A medida α é a inclinação da reta. Se a reta é paralela ao eixo das abscissas, sua inclinação é 0°.

coeficiente angular de uma reta:

É a tangente do ângulo de inclinação da reta, quando existe.

equação fundamental da reta:

É a equação $y - y_0 = m(x - x_0)$ em que (x_0, y_0) é um ponto pertencente à reta e m é o coeficiente angular da reta.

Guia de estudo

1 Determinação de uma reta

Encontrei essas informações na(s) página(s) 65.

Descreva duas maneiras diferentes para determinar uma reta no plano cartesiano.

- por dois pontos.
- por um ponto e um ângulo.

2 Inclinação e coeficiente angular de uma reta

Encontrei essas informações na(s) página(s) 66 e 67.

Considere uma reta de inclinação α, com $\alpha \neq 90°$. **Escreva a fórmula** do coeficiente angular m da reta.

$$m = \text{tg}\ \alpha$$

Analise a inclinação de cada grupo de retas e **escreva** como elas são chamadas.

- Retas com 90° de inclinação: retas verticais.
- Retas com 0° de inclinação: retas horizontais.
- Retas não verticais e não horizontais: retas oblíquas.

3 Cálculo do coeficiente angular de uma reta não vertical por dois de seus pontos

Encontrei essas informações na(s) página(s) 67 e 68.

» **Escreva a fórmula** que determina o coeficiente angular de uma reta não vertical que passa pelos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

4 Interpretação do coeficiente angular como taxa de variação

Encontrei essas informações na(s) página(s) 69.

» Considerando a função $y = f(x)$ cujo gráfico é uma reta de coeficiente angular m, **complete** o esquema a seguir **classificando** a função como crescente, decrescente ou constante.

Função $y = f(x)$

- $m > 0$: A função é crescente.
- $m = 0$: A função é constante.
- $m < 0$: A função é decrescente.

Resolva os exercícios complementares 20 a 26.

5 Condição de alinhamento de três pontos

Encontrei essas informações na(s) página(s) 71 e 72.

» A afirmação a seguir descreve a condição de alinhamento de três pontos. **Leia-a** e **complete** as lacunas.

Três pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ são colineares se, e somente se, $m_{AB} = m_{BC}$ ou não existem m_{AB} e m_{BC}.

Resolva os exercícios complementares 27 a 29 e 77 a 80.

6

Equação fundamental da reta

Encontrei essas informações na(s) página(s) 73.

» **Escreva a equação** fundamental da reta de coeficiente angular m que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

7

Equação das bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares

Encontrei essas informações na(s) página(s) 75.

» **Complete** as afirmações a seguir:

A inclinação da bissetriz dos quadrantes ímpares é igual a 45°, seu coeficiente angular é $m =$ 1 e sua equação é $y = x$.

A inclinação da bissetriz dos quadrantes pares é igual a 135°, seu coeficiente angular é $m =$ -1 e sua equação é $y = -x$.

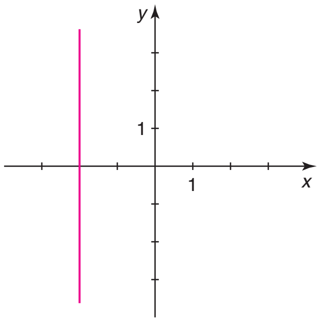
8

Equação das retas horizontais e verticais

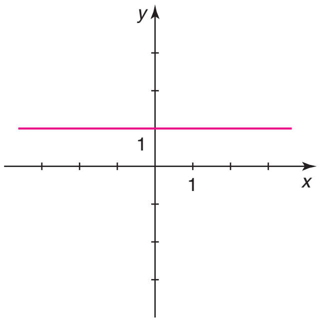
Encontrei essas informações na(s) página(s) 75 e 76.

» **Represente** nos planos cartesianos abaixo cada uma das retas de equações dadas a seguir.

- Reta de equação: $x = -2$



- Reta de equação: $y = 1$



Resolva os exercícios complementares 30 a 38 e 81 a 87.

FORMAS DA EQUAÇÃO DA RETA

Termos e conceitos

» **Defina** com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

equação geral da reta:

É toda equação escrita na forma $ax + by + c = 0$, onde x e y são variáveis e a, b e c constantes reais, com a e b não simultaneamente nulos.

equação reduzida da reta:

É toda equação escrita na forma $y = mx + q$, onde x e y são variáveis e m e q constantes reais.

equação paramétrica da reta:

É toda equação de reta em que x e y são dados em função de um parâmetro t.

Guia de estudo

1 Equação geral da reta

Encontrei essas informações na(s) página(s) 79.

» **Explique** com suas palavras qual deve ser o procedimento para encontrar a equação geral da reta representada pela equação $y = -2x + 3$ e **determine** essa equação.

Para obter a equação geral a partir da equação dada, basta isolar todos os termos em um mesmo membro da equação. O resultado obtido será $2x + y - 3 = 0$.

2 Intersecção de retas concorrentes

Encontrei essas informações na(s) página(s) 80.

» **Explique** com suas palavras como é possível obter as coordenadas do ponto de intersecção de duas retas concorrentes considerando suas equações. Justifique sua resposta.

Para obter as coordenadas do ponto de intersecção, basta resolver o sistema formado pelas equações das duas retas, pois o par (x, y) obtido é solução de ambas as equações e, portanto, representa um ponto que pertence simultaneamente às duas retas.

3

Uma condição de concorrência de duas retas

Encontrei essas informações na(s) página(s) 81.

» **Complete** o esquema a seguir que descreve a condição para que as retas sejam concorrentes ou paralelas.

Retas
$a_1x + b_1y + c_1 = 0$
e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ → As retas são paralelas.

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ → As retas são concorrentes.

Resolva os exercícios complementares 39 a 49 e 88 a 90.

4

Equação reduzida da reta

Encontrei essas informações na(s) página(s) 83.

» **Escreva** o nome dos termos da equação reduzida de uma reta *r*, que estão destacados a seguir.

$$y = mx + q$$

m: coeficiente angular da reta

q: coeficiente linear da reta

» **Explique** com suas palavras qual é a relação entre o coeficiente linear da equação reduzida da reta e seu gráfico. Justifique sua resposta.

O coeficiente linear representa a ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo Oy. Isso se dá porque a abscissa desse ponto é igual a zero; assim, substituindo x por zero na equação reduzida $y = mx + q$, obtemos $y = q$.

» Considere uma reta (não vertical) no plano cartesiano. Ela pode ser representada pelas equações $ax + by + c = 0$ (na forma geral) e $y = mx + q$ (na forma reduzida). **Escreva** os termos m e q em função dos coeficientes a, b e c.

$m =$ $-\frac{a}{b}$

$q =$ $-\frac{c}{b}$

Resolva os exercícios complementares 50, 51 e 91.

5

Estudo das posições relativas de duas retas no plano cartesiano

Encontrei essas informações na(s) página(s) 86.

» Considere duas retas, r e s, de equações $y = m_r x + q_r$ e $y = m_s x + q_s$, respectivamente. **Complete** os quadros do esquema abaixo com as possíveis posições das retas r e s.

Posições relativas entre r e s

$m_r = m_s$ e $q_r = q_s$	$m_r = m_s$ e $q_r \neq q_s$	$m_r \neq m_s$
As retas r e s são paralelas coincidentes.	As retas r e s são paralelas distintas.	As retas r e s são concorrentes.

» As retas t e u do plano cartesiano passam, respectivamente, pelos pontos P e Q. Sabendo que não existe o coeficiente angular de nenhuma dessas retas, **complete** as lacunas das frases abaixo, **descrevendo** a posição relativa entre t e u.

Se os pontos P e Q têm abscissas diferentes, então t e u são paralelas distintas.

Se os pontos P e Q têm abscissas iguais, então t e u são paralelas coincidentes.

Resolva os exercícios complementares 52 a 56 e 92.

6

Retas perpendiculares

Encontrei essas informações na(s) página(s)

89.

» **Leia** a frase a seguir e **complete** as lacunas.

Duas retas oblíquas, r e s, são perpendiculares se o coeficiente angular de uma for o oposto do inverso do coeficiente angular da outra.

Ou seja, se duas retas oblíquas, r e s, de equações $y = m_r x + q_r$ e $y = m_s x + q_s$ são perpendiculares, podemos afirmar que $m_r = -\frac{1}{m_s}$.

Resolva os exercícios complementares 57 a 66.

7

Equações paramétricas da reta

Encontrei essas informações na(s) página(s)

93.

» **Abaixo há um exercício e parte de sua resolução. Complete-a com base nos comentários à esquerda.**

Exercício

Escreva na forma reduzida e na forma geral a equação da reta que está na forma paramétrica a seguir:

$$\begin{cases} x = t - 3 \\ y = 3t + 4 \end{cases}$$

Resolução

1. Primeiro isolamos t na equação: $x = t - 3$.

$x = t - 3$

$x + 3 = t$

2. Na equação $y = 3t + 4$, substituímos t pelo resultado obtido em (1).

$y = 3t + 4$

$y = 3(x + 3) + 4$

$y = 3x + 13$

A equação reduzida é, portanto, $y = 3x + 13$.

3. A partir da equação reduzida, isolamos todos os seus termos em um mesmo membro, obtendo a equação geral.

$y = 3x + 13$

$-3x + y - 13 = 0$

$3x - y + 13 = 0$

A equação geral é, portanto, $3x - y + 13 = 0$.

Resolva os exercícios complementares 67 a 69 e 93 a 96.

CAD_EST_MAT_CAP 02.indd 27 13.10.10 19:27:02

FECHANDO O CAPÍTULO

» **Liste** os exercícios do livro-texto que você não conseguiu resolver.

resposta pessoal

» Agora **formule** questões que o ajudarão a resolver os exercícios listados acima.

resposta pessoal

» Reúna-se com um colega e peça-lhe que esclareça as dúvidas que você levantou na questão anterior. A seguir, **esclareça** as dúvidas levantadas por ele. Se as dúvidas persistirem, **perguntem** a seu professor.

resposta pessoal

Sintetize

» **Faça uma relação das fórmulas** com os principais conceitos do capítulo.

Distância entre dois pontos A e B: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Ponto médio entre A e B: $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

Coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

Equação fundamental da reta: $y - y_0 = m(x - x_0)$

Equação geral da reta: $ax + by + c = 0$

Equação reduzida da reta: $y = mx + q$

Organizador de estudos

» **Use** a tabela abaixo para acompanhar o progresso de seus estudos. Ao completar cada atividade do *Caderno do estudante* ou revisão do livro-texto, **marque** um X ou **escreva** a data em que realizou a atividade na linha correspondente.

☐ Atividades do *Caderno do estudante* ☐ Livro-texto

Capítulo 2	
Abertura	
Seção 2.1	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Para começar o estudo	
Seção 2.1	
Seção 2.2	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 2.2	
Seção 2.3	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 2.3	
Conteúdo digital	
Exercícios complementares	
Exercícios de revisão cumulativa	
Análise da resolução	
Fechando o capítulo	

PARTE I

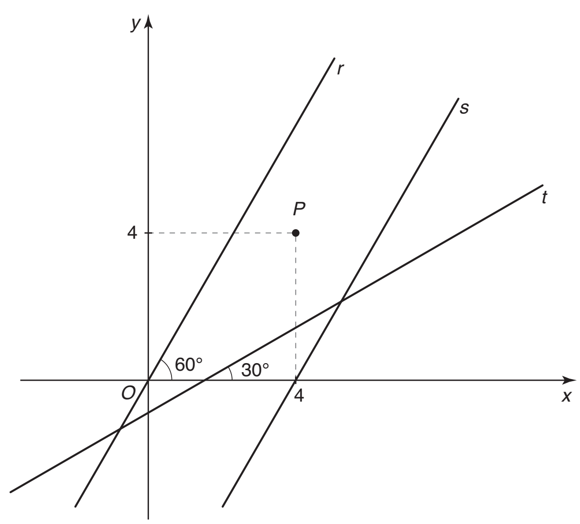
Capítulo
3

Geometria analítica: ângulos, distâncias, áreas e inequações

Para começar o estudo

Analise a figura a seguir.

A figura abaixo mostra as retas *r*, *s* e *t* e o ponto *P* representados num plano cartesiano. Sabe-se que a reta *r* passa pela origem e tem inclinação de 60°, a reta *s* tem equação $y = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}$ e a reta *t* tem inclinação de 30°. Sabe-se, ainda, que o ponto *P* é representado pelo par ordenado (4, 4).



- Com base nas informações acima, **classifique** as sentenças como verdadeiras [V] ou falsas [F].

[V] As retas *r* e *s* são paralelas.

[V] A medida de um ângulo agudo formado entre as retas *s* e *t* é 30°.

[F] A distância entre as retas *r* e *s* é 4.

[F] A medida de um ângulo obtuso formado entre as retas *r* e *t* é 120°.

[F] As retas *r* e *t* são perpendiculares.

ÂNGULOS ENTRE DUAS RETAS

Termos e conceitos

» **Desenhe** um exemplo de cada um dos conceitos a seguir.

retas concorrentes:	ângulos opostos pelo vértice:	retas paralelas:

Guia de estudo

1

Ângulos entre duas retas

Encontrei essas informações na(s) página(s) 109.

» **Escreva a fórmula** que determina a tangente de um ângulo agudo θ, formado entre duas retas, r e s, de coeficientes angulares m_r e m_s.

$$\text{tg } \theta = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}\right|$$

2

Ângulo entre uma reta oblíqua e uma reta vertical

Encontrei essas informações na(s) página(s) 113.

» **Escreva a fórmula** que determina a tangente de um ângulo agudo θ, formado entre uma reta oblíqua s e uma reta vertical r.

$$\text{tg } \theta = \frac{1}{|m_s|}$$

3

Casos particulares

Encontrei essas informações na(s) página(s) 115.

» Além dos casos apresentados em (1) e (2), há dois casos particulares sobre o cálculo de um ângulo formado por duas retas. **Complete** o esquema abaixo com a medida do ângulo formado pelas retas.

Ângulo entre duas retas (casos particulares)

- As duas retas são paralelas.
  - A medida do ângulo entre elas é 0°.
- Uma reta é horizontal e outra é vertical.
  - A medida do ângulo entre elas é 90°.

Resolva os exercícios complementares 1 a 18.

Capítulo 3 Seção 3.2

DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA

Termo e conceito

distância entre ponto e reta:

Defina o termo a seguir.

É a medida do segmento $\overline{PP'}$, em que P' é a projeção ortogonal do ponto P sobre a reta r.

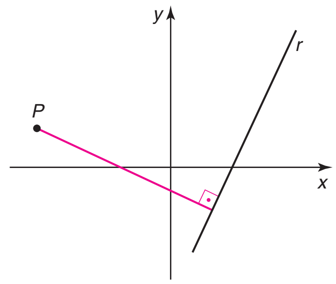
Guia de estudo

1

Distância entre ponto e reta

Encontrei essas informações na(s) página(s) 117.

Indique, na figura abaixo, a distância do ponto P à reta r.



Escreva a fórmula que determina a distância d entre uma reta de equação $ax + by + c = 0$ e um ponto $P(x_o, y_o)$.

$$d = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Abaixo há um exercício e parte de sua resolução. **Complete-a** com base nos comentários à esquerda.

Exercício

O ponto $P(2, k)$, pertencente ao primeiro quadrante, dista 3 unidades da reta de equação $3x + 4y + 1 = 0$. Determine k.

Resolução

1. Aplicamos a fórmula $d = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ e resolvemos a equação obtida.

Sendo $d = 3$, temos:

$$3 = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot k + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Rightarrow 3 = \frac{|4k + 7|}{5}$$

$\therefore |4k + 7| = 15 \Rightarrow 4k + 7 = 15$ ou $4k + 7 = -15$

$\therefore k = 2$ ou $k = -\frac{11}{2}$

2. Como P pertence ao primeiro quadrante, $k > 0$.

Dessa forma, podemos afirmar que $k =$ 2.

Resolva os exercícios complementares 19 a 28 e 59.

APLICAÇÃO DE DETERMINANTES NA GEOMETRIA ANALÍTICA

Guia de estudo

1

Aplicação de determinantes na Geometria analítica

Encontrei essas informações na(s) página(s) 121 a 127.

» **Complete** o esquema abaixo que destaca o uso dos determinantes na Geometria analítica.

Nesta seção usamos determinantes para:

- Calcular a área de polígonos.
- Verificar se três pontos estão alinhados.
- Determinar a equação de uma reta.

2

Área de um triângulo

Encontrei essas informações na(s) página(s) 121, 122 e 123.

» Abaixo há um exercício e sua resolução. **Escreva** comentários à esquerda explicando as etapas da resolução.

Exercício

Um triângulo tem como vértices, no plano cartesiano, os pontos $A(1, 2)$, $B(3, 5)$ e $C(5, k)$. Determine k sabendo que a área desse triângulo é igual a 10 unidades de área.

Resolução

1. A área é igual à metade do módulo do determinante *D*.

$$A = \frac{|D|}{2} \Rightarrow |D| = 2A \Rightarrow |D| = 20$$

2. Calculamos *D* e igualamos seu módulo a 20.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & k & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D = 5 + 10 + 3k - 25 - k - 6$$

$$\therefore D = 2k - 16$$

$$|2k - 16| = 20 \Rightarrow 2k - 16 = 20 \text{ ou } 2k - 16 = -20$$

$$\therefore k = 18 \text{ ou } k = -2$$

Dessa forma, $k = 18$ ou $k = -2$.

Resolva os exercícios complementares 29 a 42 e 60 a 62.

3 Condição de alinhamento de três pontos

Encontrei essas informações na(s) página(s) 126.

» **Escreva** a condição de alinhamento dos pontos $E(x_E, y_E)$, $F(x_F, y_F)$ e $G(x_G, y_G)$.

Três pontos $E(x_E, y_E)$, $F(x_F, y_F)$ e $G(x_G, y_G)$ são colineares, isto é, estão alinhados se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} x_E & y_E & 1 \\ x_F & y_F & 1 \\ x_G & y_G & 1 \end{vmatrix} = 0$$

4 Obtenção da equação de uma reta através de um determinante

Encontrei essas informações na(s) página(s) 127.

» Numere de 1 a 4 os quadrinhos abaixo **ordenando** os procedimentos para obter a equação reduzida da reta que passa pelos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ usando um determinante.

1 Tomamos um ponto genérico $C(x, y)$.

4 Isolamos y na expressão obtida desenvolvendo o determinante.

2 Impomos a condição de alinhamento entre A, B e C.

3 Desenvolvemos a expressão:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Resolva os exercícios complementares 43 a 47.

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UMA INEQUAÇÃO DO 1º GRAU

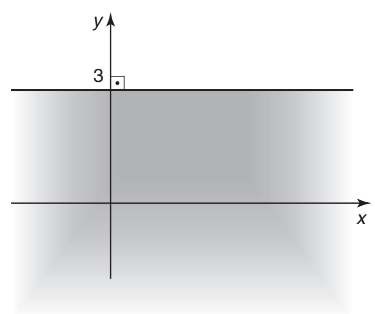
Guia de estudo

1

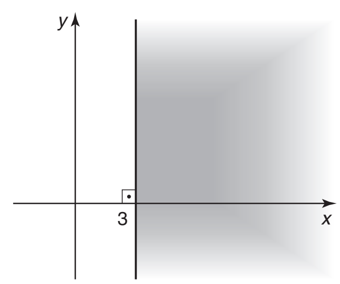
Semiplano de origem paralela a um dos eixos coordenados

Encontrei essas informações na(s) página(s) 128.

» **Escreva** as inequações que representam os semiplanos a seguir.



Inequação: $y \leqslant 3$



Inequação: $x \geqslant 3$

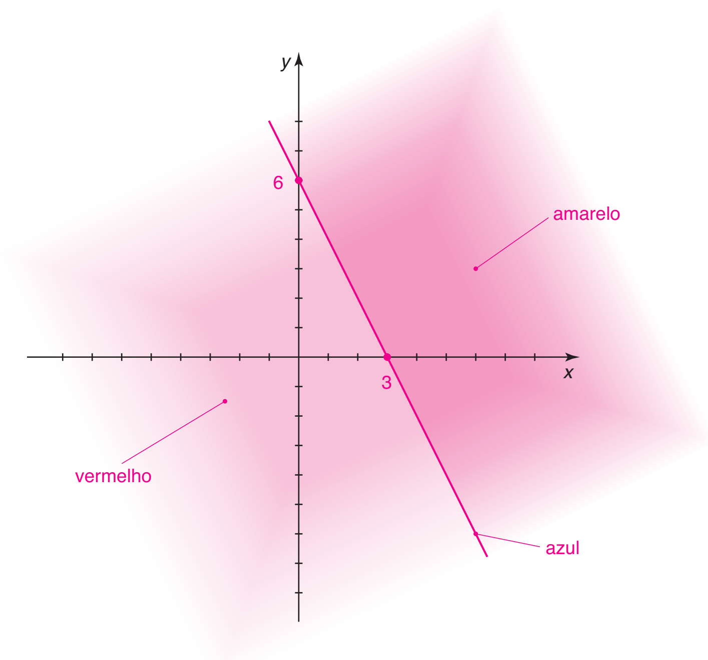
2

Semiplano de origem oblíqua

Encontrei essas informações na(s) página(s) 130.

» **Desenhe** a reta de equação $y = 6 - 2x$ e **pinte** a região do plano conforme a legenda:

- Amarelo – região determinada por: $y > 6 - 2x$
- Azul – região determinada por: $y = 6 - 2x$
- Vermelho – região determinada por: $y < 6 - 2x$



Resolva os exercícios complementares 48 a 58.

FECHANDO O CAPÍTULO

» **Liste** os exercícios do livro-texto que você não conseguiu resolver.

resposta pessoal

» Agora **formule** questões que o ajudarão a resolver os exercícios listados acima.

resposta pessoal

» Reúna-se com um colega e peça-lhe que esclareça as dúvidas que você levantou na questão anterior. A seguir, **esclareça** as dúvidas levantadas por ele. Se as dúvidas persistirem, **perguntem** a seu professor.

resposta pessoal

Sintetize

» **Identifique** as ideias principais do capítulo. Para ajudá-lo, oriente-se pelos títulos das seções e seus subtítulos. Depois, **conecte** as ideias e **redija** um texto que seja uma síntese dos assuntos estudados.

Seção 3.1

Seção 3.2

Seção 3.3

Seção 3.4

Texto:

Organizador de estudos

» **Use** a tabela abaixo para acompanhar o progresso de seus estudos. Ao completar cada atividade do *Caderno do estudante* ou revisão do livro-texto, **marque** um X ou **escreva** a data em que realizou a atividade na linha correspondente.

☐ Atividades do *Caderno do estudante* ☐ Livro-texto

Capítulo 3	
Abertura	
Seção 3.1	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Para começar o estudo	
Seção 3.1	
Seção 3.2	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 3.2	
Seção 3.3	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 3.3	
Seção 3.4	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 3.4	
Conteúdo digital	
Exercícios complementares	
Exercícios de revisão cumulativa	
Análise da resolução	
Fechando o capítulo	

PARTE II

Capítulo 4

Geometria analítica: circunferência

Seções:

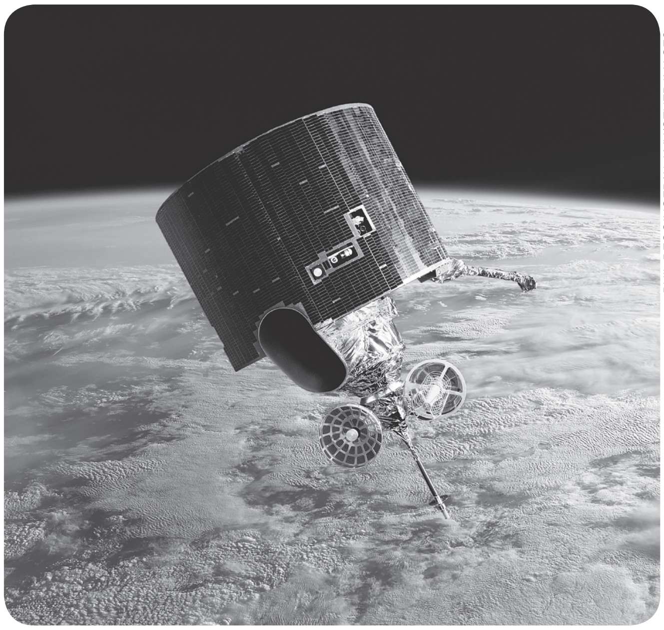
4.1 Equações da circunferência

4.2 Posições relativas

Para começar o estudo

Analise a situação a seguir e **classifique** as afirmações como verdadeiras $\boxed{V}$ ou falsas $\boxed{F}$.

Um satélite artificial tem órbita circular de raio 20.000 km concêntrica com a Terra.



PHIL DEGGINGER/ALAMY/OTHER IMAGES

- $\boxed{F}$ Se um ponto *A* do espaço está a 20.000 km de distância do centro da Terra, então *A* pertence à órbita do satélite.
- $\boxed{V}$ Se um ponto *B* pertence ao plano da órbita do satélite e está a 20.000 km de distância do centro da Terra, então *B* pertence a essa órbita.
- $\boxed{V}$ Se um ponto *C* pertence ao plano da órbita do satélite e está a 17.000 km de distância do centro da Terra, então *C* é interior a essa órbita.
- $\boxed{V}$ Se um ponto *D* pertence ao plano da órbita do satélite e está a 21.000 km de distância do centro da Terra, então *D* é exterior à órbita do satélite.
- $\boxed{F}$ Se um asteroide com trajetória retilínea passa a uma distância mínima de 20.000 km do centro da Terra, então essa trajetória é tangente à órbita do satélite.

EQUAÇÕES DA CIRCUNFERÊNCIA

Termos e conceitos

Defina com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

equação reduzida da circunferência:

É a equação na forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ que representa, no plano cartesiano, uma circunferência de centro $C(a, b)$ e raio R.

equação geral da circunferência:

É a equação na forma $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$ que representa, no plano cartesiano, uma circunferência de centro $C(a, b)$ e raio R.

Guia de estudo

1 Reconhecimento de uma circunferência

Encontrei essas informações na(s) página(s) 159.

Dada a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$, em que a, b e k são números reais, **discuta** o que a equação representa em um plano cartesiano, de acordo com o parâmetro k. **Complete** o esquema com as possibilidades.

Equação do tipo $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$

- Se $k > 0$, a equação representa uma circunferência.
- Se $k = 0$, a equação representa um ponto.
- Se $k < 0$, a equação representa o conjunto vazio.

Resolva os exercícios complementares 1 a 14 e 70 a 72.

2 Equação geral

Encontrei essas informações na(s) página(s) 160.

A seguir há um exercício e parte de sua resolução. **Complete-a** com base nos comentários à esquerda.

Exercício

Escreva na forma reduzida e na forma geral a equação de uma circunferência de centro no ponto (3, −2) e raio igual a 5.

Resolução

Temos: $C(a, b) = C(3, -2)$ e $R = 5$

Portanto, a equação reduzida é:

$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$

1. A equação reduzida tem a forma: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

Assim, a equação geral é:

$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 - 25 = 0$

$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$

2. Obtemos a equação geral eliminando os parênteses da equação reduzida e isolando seus termos em um mesmo membro da igualdade.

3

Determinação do centro e do raio de uma circunferência a partir de sua equação geral

Encontrei essas informações na(s) página(s) 160 e 161.

» A partir da equação reduzida da circunferência de centro $C(a, b)$ e raio R, obtém-se a equação geral $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$. **Determine** os coeficientes D, E e F em função das coordenadas a e b e do raio R.

$D =$ $-2a$

$E =$ $-2b$

$F =$ $a^2 + b^2 - R^2$

Dica: Lembre-se de que a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ equivale a $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$.

Resolva os exercícios complementares 15 a 23 e 73 a 75.

4

Reconhecimento de uma circunferência

Encontrei essas informações na(s) página(s) 163.

» **Descreva** as condições para que uma equação na forma $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ seja uma equação de circunferência se, e somente se:

- $A = B \neq 0$
- $C = 0$
- Pode ser escrita na forma $(x - p)^2 + (y - q)^2 = k$, com k positivo.

Resolva os exercícios complementares 24 a 27.

POSIÇÕES RELATIVAS

Guia de estudo

1

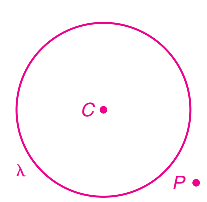
Posições relativas entre um ponto e uma circunferência

Encontrei essas informações na(s) página(s) 164 e 165.

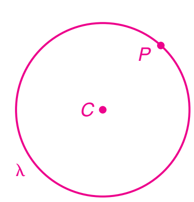
» No esquema a seguir, serão descritas as posições relativas entre um ponto P e uma circunferência λ de um mesmo plano, sendo C e R o centro e o raio da circunferência, respectivamente.
Complete o esquema, **classificando** o ponto P como interior, exterior ou pertencente à circunferência λ, de acordo com a distância entre P e C. Em seguida, **exemplifique**, desenhando a circunferência λ e o ponto P na posição descrita em cada caso.

Posições relativas entre P e λ

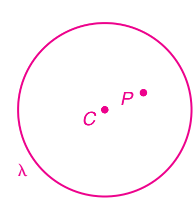
- Se $PC > R$
  - O ponto P é exterior a λ.
  - *Exemplo*



- Se $PC = R$
  - O ponto P pertence a λ.
  - *Exemplo*



- Se $PC < R$
  - O ponto P é interior a λ.
  - *Exemplo*



Resolva os exercícios complementares 28 a 32 e 76 a 78.

2

Posições relativas entre uma reta e uma circunferência

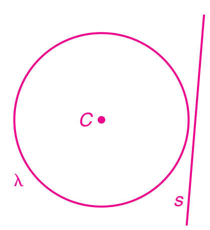
Encontrei essas informações na(s) página(s) 167.

» No esquema a seguir, serão descritas as posições relativas entre uma reta s e uma circunferência λ de um mesmo plano, sendo C e R o centro e o raio da circunferência, respectivamente. **Complete** o esquema, **classificando** a reta s como secante, tangente ou exterior à circunferência λ, de acordo com a distância entre s e C. Em seguida, **exemplifique**, desenhando a circunferência λ e a reta s na posição descrita em cada caso.

Posições relativas entre *s* e λ

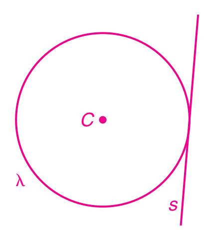
- Se $d_{s,\,C} > R$ → A reta *s* é exterior a λ.

Exemplo



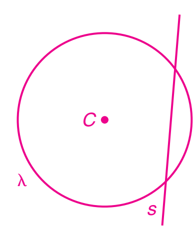
- Se $d_{s,\,C} = R$ → A reta *s* é tangente a λ.

Exemplo



- Se $d_{s,\,C} < R$ → A reta *s* é secante a λ.

Exemplo



Resolva os exercícios complementares 33 a 47.

3

Intersecção entre uma reta e uma circunferência

Encontrei essas informações na(s) página(s) 170.

» **Escreva** os termos que completam corretamente as afirmações a seguir referentes ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \end{cases}$$

onde $ax + by + c = 0$ é equação de uma reta s e $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ é equação de uma circunferência λ.

- Se s é secante a λ, o sistema é possível e possui duas soluções.

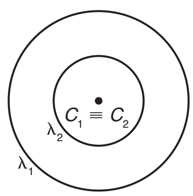
- Se s é exterior a λ, o sistema é impossível, isto é, não tem soluções.
- Se s é tangente a λ, o sistema é possível e possui apenas uma solução.

Resolva os exercícios complementares 48 a 63.

4 Posições relativas entre duas circunferências

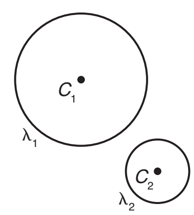
Encontrei essas informações na(s) página(s) 173 e 174.

» No esquema a seguir, serão descritas as posições relativas entre duas circunferências coplanares λ_1 e λ_2 de centros C_1 e C_2 e raios R_1 e R_2, respectivamente. Observando a relação da distância entre os centros com a soma ou o módulo da diferença dos raios, **complete** o esquema, **classificando** C_2 como tangente internamente, tangente externamente, secante, interior, interior e concêntrica ou exterior a C_1.



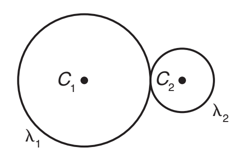
$R_2 < R_1$ e $d_{C_1C_2} = 0$

C_2 é interior e concêntrica a C_1.



$d_{C_1C_2} > R_1 + R_2$

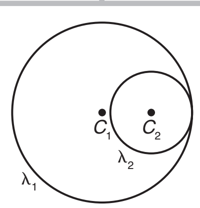
C_2 é exterior a C_1.



$d_{C_1C_2} = R_1 + R_2$

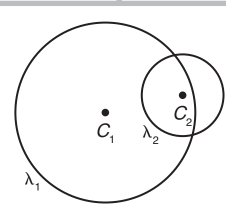
C_2 é tangente exteriormente a C_1.

Posições relativas entre λ_1 e λ_2



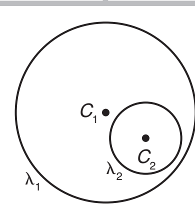
$d_{C_1C_2} = |R_1 - R_2|$

C_2 é tangente internamente a C_1



$|R_1 - R_2| < d_{C_1C_2} < R_1 + R_2$

C_2 é secante a C_1



$d_{C_1C_2} < |R_1 - R_2|$ e $R_2 < R_1$

C_2 é interior a C_1

Resolva os exercícios complementares 64 a 66.

FECHANDO O CAPÍTULO

» **Liste** os exercícios do livro-texto que você não conseguiu resolver.

resposta pessoal

» Agora **formule** questões que o ajudarão a resolver os exercícios listados acima.

resposta pessoal

» Reúna-se com um colega e peça-lhe que esclareça as dúvidas que você levantou na questão anterior. A seguir, **esclareça** as dúvidas levantadas por ele. Se as dúvidas persistirem, **perguntem** a seu professor.

resposta pessoal

Sintetize

» **Elabore** um esquema relacionando os conceitos principais aprendidos no capítulo.

resposta pessoal:

Circunferência

Equação reduzida da circunferência:
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

Equação geral da circunferência:
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2$

Posições relativas

Entre ponto e circunferência:
- interno;
- pertencente;
- exterior.

Entre reta e circunferência:
- secante;
- tangente;
- exterior.

Entre duas circunferências:
- interna;
- secante;
- tangente (interna ou externa);
- exterior.

Organizador de estudos

» **Use** a tabela abaixo para acompanhar o progresso de seus estudos. Ao completar cada atividade do *Caderno do estudante* ou revisão do livro-texto, **marque** um X ou **escreva** a data em que realizou a atividade na linha correspondente.

☐ Atividades do *Caderno do estudante* ☐ Livro-texto

Capítulo 4	
Abertura	
Seção 4.1	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Para começar o estudo	
Seção 4.1	
Seção 4.2	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 4.2	
Exercícios complementares	
Exercícios de revisão cumulativa	
Análise da resolução	
Fechando o capítulo	

PARTE II

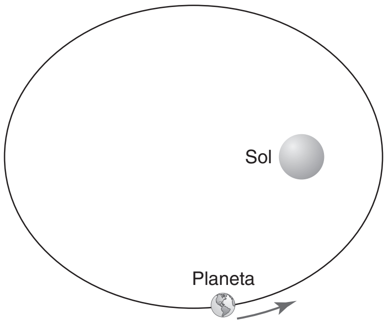
Capítulo 5

Geometria analítica: cônicas

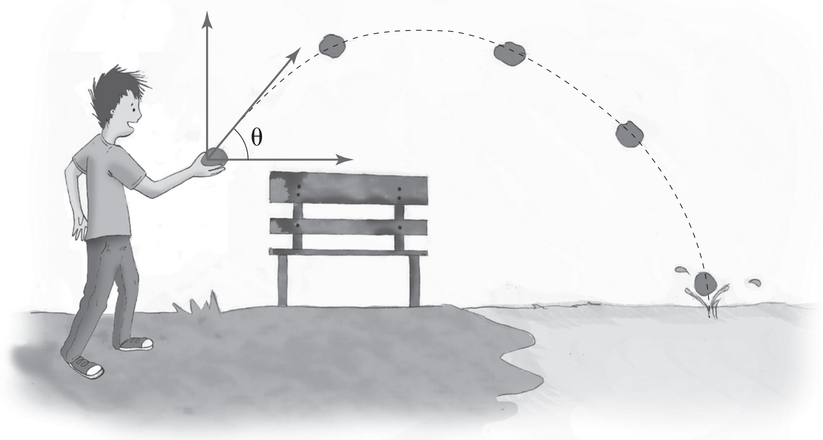
Para começar o estudo

Analise as situações a seguir e **classifique** as afirmações em verdadeiras V ou falsas F.

Situação I: Apesar de muitos acreditarem que a órbita da Terra em torno do Sol é circular, na verdade, esse movimento é elíptico. Isso foi provado pelo matemático e astrônomo Johannes Kepler em seu estudo sobre as órbitas dos planetas. Kepler descobriu que a órbita da Terra (e dos outros planetas) em torno do Sol tem o formato de uma elipse, com o Sol em um de seus focos. Essa elipse, porém, se assemelha bastante a uma circunferência.



Situação II: Quando lançamos uma pedra para o alto de forma oblíqua ao plano do solo, essa pedra descreve uma trajetória parabólica. Essa trajetória é determinada pela combinação das ações de duas forças: uma no sentido horizontal, gerada no momento do lançamento, e outra no sentido vertical, que é a força peso causada pela ação da gravidade.



F A distância da Terra ao Sol é sempre a mesma.

F Uma pedra é lançada para cima, obliquamente ao solo. Quando ela atingir a altura máxima, seu deslocamento horizontal terá a mesma medida dessa altura.

F A altura da pedra no lançamento oblíquo é diretamente proporcional à sua distância horizontal em relação ao ponto de lançamento.

Capítulo 5 Seção 5.1

FIGURAS CÔNICAS

Termos e conceitos

» **Defina** com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

Os conceitos a seguir podem ser definidos de duas formas:

elipse: I) Elipse é a figura obtida pela intersecção da superfície de um cone circular reto de vértice *V* com um plano que não passa por *V* e intercepta todas as geratrizes do cone, obliquamente ao eixo de rotação.

II) Fixados dois pontos distintos F_1 e F_2 de um plano, chama-se elipse o conjunto dos pontos *P* desse plano, cuja soma das distâncias PF_1 e PF_2 é uma constante maior que a distância F_1F_2.

parábola: I) Parábola é a figura obtida pela intersecção da superfície de um cone circular reto de geratrizes ilimitadas com um plano paralelo a uma dessas geratrizes.

II) Fixados um ponto *F* e uma reta *r* de um plano, com $F \notin r$, chama-se parábola o conjunto dos pontos desse plano equidistantes de *F* e *r*.

hipérbole: I) Considerando uma superfície cônica circular reta de duas folhas com geratrizes ilimitadas e vértice *V*, chama-se hipérbole a figura obtida pela intersecção dessa superfície com um plano que não passa por *V* e intercepta as duas folhas dessa superfície.

II) Fixados dois pontos distintos F_1 e F_2 de um plano, chama-se hipérbole o conjunto dos pontos *P* desse plano, cujo módulo da diferença entre as distâncias PF_1 e PF_2 é uma constante não nula e menor que a distância F_1F_2.

Guia de estudo

1

Figuras cônicas

Encontrei essas informações na(s) página(s) 188.

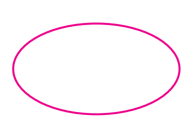
» **Responda:** Como as figuras cônicas podem ser obtidas?

Pela intersecção de um plano com uma superfície cônica circular reta de duas folhas.

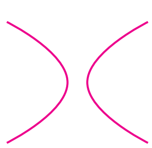
» A intersecção de um plano com uma superfície cônica circular reta de duas folhas e geratrizes ilimitadas pode ser um ponto, uma reta, um par de retas, uma circunferência, além de outras três figuras que são objeto de estudo deste capítulo. Em cada um dos quadros abaixo, **escreva** o nome de uma das figuras estudadas neste capítulo e **represente-a** por um desenho.

Figuras cônicas

elipse



hipérbole



parábola

ELIPSE

Termos e conceitos

» **Defina** com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

focos da elipse: São dois pontos distintos F_1 e F_2 do eixo maior da elipse tal que a soma das distâncias de qualquer ponto P da elipse a F_1 e F_2 é igual à medida do eixo maior.

distância focal: É a distância entre os focos de uma elipse.

eixo maior da elipse: É a corda que passa pelos focos da elipse.

eixo menor da elipse: É a corda perpendicular ao eixo maior da elipse que passa pelo seu ponto médio.

centro da elipse: É o ponto médio do eixo maior da elipse.

excentricidade da elipse: É a razão entre a semidistância focal (c) e a medida do semieixo maior (a), isto é, $\frac{c}{a}$. Essa constante indica o quanto a elipse está próxima de uma circunferência ou de um segmento de reta.

Guia de estudo

1

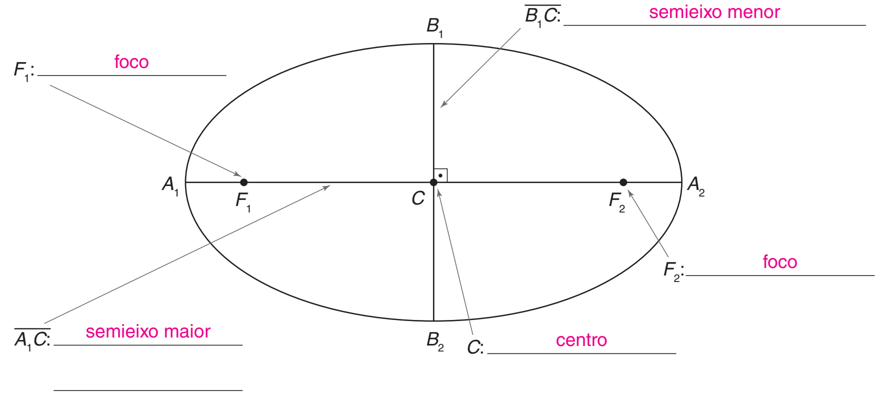
Definição de elipse

Encontrei essas informações na(s) página(s) 192.

» **Complete** a definição de elipse.

Fixados dois pontos, F_1 e F_2, de um plano α tal que $F_1F_2 = 2c$, com $c > 0$, chama-se elipse o conjunto dos pontos P do plano α cuja soma das distâncias PF_1 e PF_2 é uma constante $2a$, com $2a$ > $2c$.

» **Escreva** o nome de cada elemento destacado na elipse de eixos $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$, com $CF_1 = CF_2$ e $B_1F_1 + B_1F_2 = A_1A_2$.



Resolva os exercícios complementares 51 a 53.

2

Equação da elipse

Encontrei essas informações na(s) página(s) 194.

» Se um ponto $P(x, y)$ pertence a uma elipse de focos $F_1(x_1, y_1)$ e $F_2(x_2, y_2)$ cujo eixo maior mede $2a$, **escreva** uma equação que relacione as distâncias PF_1 e PF_2 com a medida $2a$.

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = 2a$$

Resolva os exercícios complementares 1 e 2.

3

Equação reduzida da elipse

Encontrei essas informações na(s) página(s) 195 e 196.

» **Escreva** a equação reduzida de uma elipse cujo centro é a origem $O(0, 0)$, o eixo maior mede $2a$ e está contido no eixo Ox, e o eixo menor mede $2b$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

4

Equação reduzida da elipse com eixo maior paralelo a um dos eixos

Encontrei essas informações na(s) página(s) 196.

» **Complete** os quadros a seguir com as equações reduzidas das elipses cujo centro é $C(x_0, y_0)$, o eixo maior mede $2a$ e o eixo menor mede $2b$.

Eixo maior paralelo ao eixo Ox

Equação $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

Eixo maior paralelo ao eixo Oy

Equação $\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$

Resolva os exercícios complementares 3 a 17 e 54.

Faça a conexão

» **Folheie** a seção 5.2 do livro-texto. Observe a parte teórica, as seções de exercícios resolvidos e de exercícios propostos, e **identifique** situações do dia a dia que envolvem conhecimentos sobre elipses.

a órbita dos planetas do sistema solar, a órbita de satélites

HIPÉRBOLE

Termos e conceitos

Defina com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

focos da hipérbole:

São dois pontos distintos F_1 e F_2 da reta que contém o eixo real da hipérbole tal que o módulo da diferença das distâncias de qualquer ponto *P* da hipérbole a F_1 e F_2 é igual à medida do eixo real.

centro da hipérbole:

É o ponto médio do segmento que tem como extremos os focos da hipérbole.

eixo real da hipérbole:

É o segmento cujos extremos são os pontos de intersecção da hipérbole com a reta que contém os focos.

eixo imaginário da hipérbole:

É o segmento perpendicular ao eixo real da hipérbole que tem como extremos dois pontos equidistantes aos extremos do eixo real, sendo essa distância constante e igual à distância do foco ao centro da hipérbole.

assíntotas da hipérbole:

São as retas que contêm as diagonais do retângulo de referência da hipérbole, que é o retângulo cujos pontos médios de seus lados são os extremos dos eixos real e imaginário da hipérbole.

excentricidade da hipérbole:

É a razão entre a semidistância focal (c) e a medida do semieixo real (a), isto é, $\frac{c}{a}$. Essa constante indica o quanto a hipérbole está próxima de duas semirretas ou de duas retas paralelas.

Guia de estudo

1

Definição de hipérbole

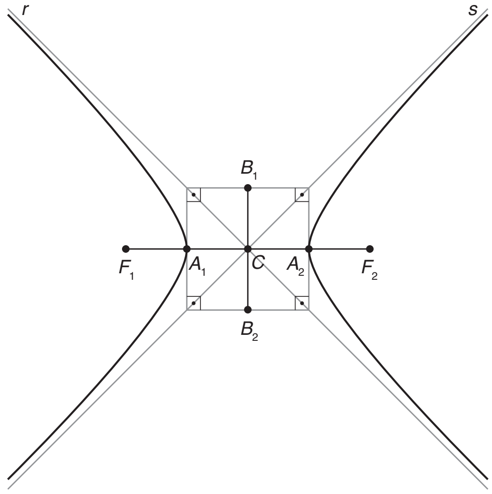
Encontrei essas informações na(s) página(s) 199 e 200.

Complete a definição de hipérbole.

Dados dois pontos fixos, F_1 e F_2, de um plano α, com $F_1F_2 = 2c$ e $c > 0$, chama-se hipérbole o conjunto de pontos P do plano α cujo módulo da diferença entre as distâncias PF_1 e PF_2 é igual a uma constante $2a$, com $2a$ $<$ $2c$. Ou seja, sob as condições enunciadas, a hipérbole $\mathcal{H}$ é o conjunto:

$$\mathcal{H} = \{P \in \alpha \mid |PF_1 - PF_2| = 2a\}$$

Escreva o nome de cada elemento destacado na hipérbole de focos F_1 e F_2 e eixo imaginário $\overline{B_1B_2}$.



r e s: assíntotas

$\overline{A_1A_2}$: eixo real

C: centro

2 Equação da hipérbole

Encontrei essas informações na(s) página(s) 203.

Se um ponto $P(x, y)$ pertence a uma hipérbole de focos $F_1(x_1, y_1)$ e $F_2(x_2, y_2)$ cujo eixo real mede $2a$, **escreva** uma equação que relacione as distâncias PF_1 e PF_2 com a medida $2a$.

$$\left|\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} - \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}\right| = 2a$$

Resolva os exercícios complementares 18 a 20, 55 e 56.

3 Equação reduzida da hipérbole

Encontrei essas informações na(s) página(s) 204 e 205.

Complete as lacunas de modo a tornar verdadeira a afirmação a seguir sobre uma hipérbole cujos eixos real e imaginário medem $2a$ e $2b$, respectivamente.

Uma hipérbole com centro C (0 , 0) e com eixo real contido no eixo Ox tem como equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4 Equação reduzida da hipérbole com eixo real paralelo a um dos eixos

Encontrei essas informações na(s) página(s) 205.

Complete os quadros a seguir com as equações reduzidas das hipérboles que têm centro $C(x_0, y_0)$, eixo real de medida $2a$ e eixo imaginário de medida $2b$.

Eixo real paralelo ao eixo Ox	Eixo real paralelo ao eixo Oy
Equação $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$	Equação $\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$

Resolva os exercícios complementares 21 a 30.

Capítulo 5 Seção 5.4

PARÁBOLA

Termos e conceitos

Defina com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

foco e diretriz da parábola:

No plano da parábola, o foco e a diretriz são, respectivamente, o ponto e a reta que equidistam de qualquer ponto da parábola.

eixo de simetria da parábola:

É a reta perpendicular à diretriz que passa pelo foco da parábola.

vértice da parábola:

É o ponto de intersecção da parábola com o eixo de simetria.

excentricidade da parábola:

É a razão entre as distâncias de um ponto *P* da parábola ao foco e à diretriz, que é constante igual a 1.

Guia de estudo

1

Definição de parábola

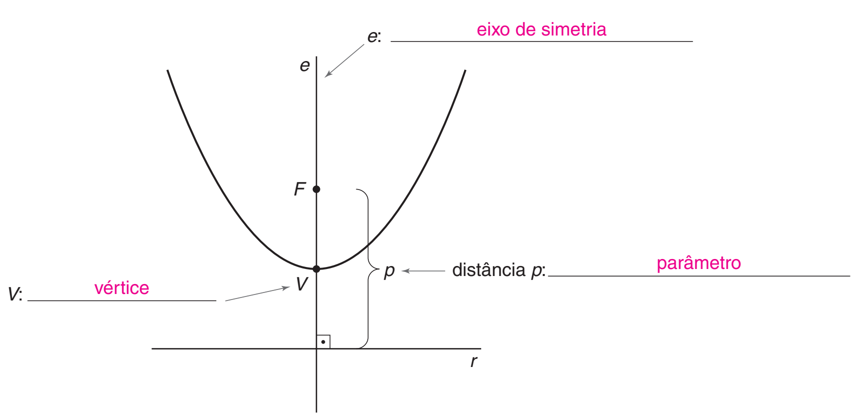
Encontrei essas informações na(s) página(s) 209 e 210.

Complete a definição de parábola.

Dados um ponto F e uma reta r de um plano α, com $F \notin r$, chama-se parábola o conjunto dos pontos desse plano equidistantes de F e r. Ou seja, sob as condições enunciadas, a parábola $\mathcal{P}$ é o conjunto:

$$\mathcal{P} = \{P \in \alpha \mid d_{Pr} = d_{PF}\}$$

Escreva o nome de cada elemento destacado na parábola de foco F e diretriz r:



2

Equação da parábola

Encontrei essas informações na(s) página(s) 211.

» Se um ponto $P(x, y)$ pertence a uma parábola de foco $F(x_0, y_0)$ e diretriz r de equação $ax + by + c = 0$, **escreva** uma equação que relacione as distâncias entre P e F e entre P e r.

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Resolva os exercícios complementares 31 e 32.

3

Equação reduzida da parábola

Encontrei essas informações na(s) página(s) 212.

» Considere uma parábola com foco e vértice $V(x_0, y_0)$ pertencentes ao eixo Oy, concavidade voltada para cima e parâmetro p. **Escreva** a equação reduzida dessa parábola.

$$x^2 = 2p(y - y_0)$$

4

Equação reduzida da parábola com diretriz paralela a um dos eixos

Encontrei essas informações na(s) página(s) 212 e 213.

» **Complete** o esquema a seguir com as equações reduzidas das parábolas de vértice $V(x_0, y_0)$ e parâmetro p.

Diretriz paralela ao eixo *Ox* e concavidade para cima	Diretriz paralela ao eixo *Ox* e concavidade para baixo
Equação $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$	Equação $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$
Diretriz paralela ao eixo *Oy* e concavidade para a direita	**Diretriz paralela ao eixo *Oy* e concavidade para a esquerda**
Equação $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$	Equação $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$

Resolva os exercícios complementares 33 a 42 e 57 a 60.

LUGAR GEOMÉTRICO

Termo e conceito

Defina com suas próprias palavras o termo ou conceito a seguir.

lugar geométrico: É todo conjunto de pontos, podendo inclusive ser o conjunto vazio.

Guia de estudo

1

Determinação de lugar geométrico

Encontrei essas informações na(s) página(s) 217.

Explique com suas palavras como determinar um lugar geométrico.

Para determinar um lugar geométrico, devemos utilizar alguma propriedade que seja satisfeita por todos os pontos desse lugar geométrico e satisfeita somente por esses pontos.

2

Equação de um lugar geométrico do plano cartesiano

Encontrei essas informações na(s) página(s) 217 e 218.

Relacione as equações a seguir com o respectivo nome do lugar geométrico.

$2x + 3y - 5 = 0$

Lugar geométrico: reta

$x^2 - y + 1 = 0$

Lugar geométrico: parábola

$x^2 + y^2 + 1 = 0$

Lugar geométrico: vazio

$x^2 - 3 = 1 - y^2$

Lugar geométrico: circunferência

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

Lugar geométrico: elipse

Resolva os exercícios complementares 43 a 50 e 61 a 65.

FECHANDO O CAPÍTULO

» **Liste** os exercícios do livro-texto que você não conseguiu resolver.

resposta pessoal

» Agora **formule** questões que o ajudarão a resolver os exercícios listados acima.

resposta pessoal

» Reúna-se com um colega e peça-lhe que esclareça as dúvidas que você levantou na questão anterior. A seguir, **esclareça** as dúvidas levantadas por ele. Se as dúvidas persistirem, **perguntem** a seu professor.

resposta pessoal

Sintetize

» **Faça uma relação das fórmulas** com os principais conceitos do capítulo.

respostas possíveis:

Equação da elipse

$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = 2a$

Equação da hipérbole

$\left|\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} - \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}\right| = 2a$

Equação da parábola

$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Organizador de estudos

» **Use** a tabela abaixo para acompanhar o progresso de seus estudos. Ao completar cada atividade do *Caderno do estudante* ou revisão do livro-texto, **marque** um X ou **escreva** a data em que realizou a atividade na linha correspondente.

☐ Atividades do *Caderno do estudante* ☐ Livro-texto

Capítulo 5		
Abertura		
Seção 5.1		
Exercícios resolvidos		
Exercícios propostos		
Para começar o estudo		
Seção 5.1		
Conteúdo digital		
Seção 5.2		
Exercícios resolvidos		
Exercícios propostos		
Seção 5.2		
Conteúdo digital		
Seção 5.3		
Exercícios resolvidos		
Exercícios propostos		
Seção 5.3		
Conteúdo digital		
Seção 5.4		
Exercícios resolvidos		
Exercícios propostos		
Seção 5.4		
Conteúdo digital		
Seção 5.5		
Exercícios resolvidos		
Exercícios propostos		
Seção 5.5		
Exercícios complementares		
Exercícios de revisão cumulativa		
Análise da resolução		
Fechando o capítulo		

PARTE III

Capítulo 6

Conjunto dos números complexos

Para começar o estudo

» **Analise** a situação a seguir e **classifique** as afirmações como verdadeiras [V] ou falsas [F].

Quando calculamos a raiz quadrada de um número, pensamos na operação inversa da radiciação: a potenciação. Dessa forma, calcular a raiz quadrada de 4 equivale a descobrir um número não negativo cujo quadrado é 4. Mas, quando queremos calcular a raiz quadrada de −4, chegamos a um impasse: nenhum número real elevado ao quadrado resulta em −4!


INGRAM PUBLISHING/DIOMEDIA

[V] Não existe a raiz quadrada de um número negativo no conjunto dos números reais.

[F] A raiz cúbica de −8 não é um número real.

[V] O gráfico da função $f(x) = x^4 + 1$ não tem ponto comum com o eixo das abscissas.

[V] A equação $x^2 + 2 = 0$ não tem soluções reais.

Capítulo 6 Seção 6.1

OS NÚMEROS COMPLEXOS

Termos e conceitos

Defina com suas próprias palavras os termos a seguir.

unidade imaginária: É o número i, não real, que satisfaz a seguinte condição: $i^2 = i \cdot i = -1$

número complexo: É todo número da forma $a + bi$, em que a e b são números reais e i é a unidade imaginária.

parte real de um número complexo: É o termo real a de um número complexo escrito na forma $a + bi$, com $b \in \mathbb{R}$.

parte imaginária de um número complexo: É o termo real b, de um número complexo escrito na forma $a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$.

conjugado de um número complexo: O conjugado de um número complexo escrito na forma $a + bi$ é o número $a - bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$.

Guia de estudo

1

Forma algébrica de um número complexo

Encontrei essas informações na(s) página(s) 238.

Escreva o nome dos termos destacados no número complexo z a seguir, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$.

$$z = a + bi$$

a: parte real de z

i: unidade imaginária

b: parte imaginária de z

De acordo com os valores reais atribuídos aos termos *a* e *b*, **classifique** o número complexo $z = a + bi$ como *número imaginário*, *número real* ou *número imaginário puro*.

- Se *b* é diferente de zero: *z* é número imaginário.
- Se *a* é igual a zero e *b* é diferente de zero: *z* é número imaginário puro.
- Se *b* é igual a zero: *z* é número real.

Responda: um número real é um número complexo? **Justifique.**

Todo número real *a* pode ser escrito como $a + 0i$, onde a parte real é *a* e a parte imaginária é 0. Então, temos: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Ou em diagrama:

2 Igualdade entre números complexos

Encontrei essas informações na(s) página(s) 238.

Escreva a condição para que os números complexos sejam iguais, com $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$.

Se os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ são iguais, então $a = c$ e $b = d$.

Resolva os exercícios complementares 1 a 6.

OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS

Guia de estudo

1

Operações elementares

Encontrei essas informações na(s) página(s) 240.

» Abaixo há um exercício e parte de sua resolução. **Complete** a resolução com base nos comentários à esquerda.

Exercício

Considere os números complexos $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 1 - 2i$ e efetue $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ e $z_1 \cdot z_2$.

Resolução

A soma $z_1 + z_2$ será:

1. Se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, então $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$.

$z_1 + z_2 = 3 + 4i + 1 - 2i$
$z_1 + z_2 = (3 + 1) + (4 - 2)i$
$z_1 + z_2 = 4 + 2i$

A diferença $z_1 - z_2$ será:

2. Se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, então $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$.

$z_1 - z_2 = 3 + 4i - (1 - 2i)$
$z_1 - z_2 = (3 - 1) + (4 + 2)i$
$z_1 - z_2 = 2 + 6i$

O produto $z_1 \cdot z_2$ será:

3. Se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, então $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

$z_1 \cdot z_2 = (3 + 4i) \cdot (1 - 2i) = 3 - 6i + 4i - 8i^2$
$z_1 \cdot z_2 = (3 + 8) + (-6 + 4)i$
$z_1 \cdot z_2 = 11 - 2i$

2

Forma algébrica de números complexos inversos

Encontrei essas informações na(s) página(s) 240 e 241.

» **Escreva** a forma algébrica do inverso do número não nulo $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$.

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

» Abaixo há um exercício e parte de sua resolução. **Complete** a resolução com base nos comentários à esquerda.

Exercício

Considere os números complexos $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 1 - 2i$ e efetue $z_1 : z_2$.

Resolução

A divisão $z_1 : z_2$ será:

Aplicamos a igualdade $z_1 : z_2 = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$ e escrevemos o resultado na forma algébrica.

$z_1 : z_2 = (3 + 4i) \cdot \frac{1}{1 - 2i} = (3 + 4i) \cdot \left(\frac{1 + 2i}{1 + 4}\right)$

$z_1 : z_2 = \frac{-5 + 10i}{5}$

$z_1 : z_2 = -1 + 2i$

Resolva os exercícios complementares 7 a 14.

3

Potências de números complexos com expoentes inteiros

Encontrei essas informações na(s) página(s) 242.

» **Complete** as igualdades a seguir.

$(2 + 3i)^0 =$ 1

$(2 + 3i)^1 =$ $2 + 3i$

$(2 + 3i)^2 =$ $(2 + 3i)(2 + 3i) = 4 + 12i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$

$(2 + 3i)^3 =$ $(2 + 3i)(2 + 3i)^2 = (2 + 3i)(-5 + 12i) = -10 + 24i - 15i + 36i^2 = -46 + 9i$

4

Propriedades das potências

Encontrei essas informações na(s) página(s) 242.

» **Complete o esquema** com as propriedades das potências para números complexos e **dê exemplos** de aplicações dessas propriedades.

Propriedades das potências

P1. $w^n \cdot w^m =$ w^{n+m}

Exemplo

$(1 + i)^2 \cdot (1 + i)^3 = (1 + i)^5$

P2. $w^n : w^m =$ w^{n-m}

Exemplo

$(1 + i)^4 : (1 + i)^2 = (1 + i)^2$

P3. $(w^n)^m =$ $w^{n \cdot m}$

Exemplo

$[(1 + i)^2]^3 = (1 + i)^6$

P4. $(wv)^n =$ $w^n v^n$

Exemplo

$[(1 + i)(2 + i)]^2 = (1 + i)^2 (2 + i)^2$

P5. $\left(\frac{w}{v}\right)^n =$ $\frac{w^n}{v^n}$

Exemplo

$\left(\frac{1 + i}{2 + i}\right)^3 = \frac{(1 + i)^3}{(2 + i)^3}$

CAD_EST_MAT_CAP 06.indd 61 13.10.10 19:47:23

5 Potências de i

Encontrei essas informações na(s) página(s) 243.

» **Calcule** as potências a seguir.

$i^0 =$ 1 $i^1 =$ i $i^2 =$ −1 $i^3 =$ −i

$i^4 =$ 1 $i^5 =$ i $i^6 =$ −1 $i^7 =$ −i

» **Explique** com suas palavras quais são os procedimentos para calcular a potência $i^{2.030}$ e **determine** o valor dessa potência.

Devemos dividir 2.030 por 4 e tomar o resto como novo expoente de i. Como 2.030 dividido por 4 deixa resto 2, temos: $i^{2.030} = i^2 = -1$

Resolva os exercícios complementares 15 a 22.

6 Radiciação em $\mathbb{C}$

Encontrei essas informações na(s) página(s) 245.

» Abaixo há um exercício e parte de sua resolução. **Complete** a resolução com base nos dados à esquerda.

Exercício

Calcule as raízes quadradas de 5 + 12i.

Resolução

Sendo $w = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, uma raiz quadrada de 5 + 12i, temos:

Se w é uma raiz quadrada de 5 + 12i, então $w^2 = 5 + 12i$.

$(a + bi)^2 = 5 + 12i$

Desenvolvendo a potência, obtemos:

$a^2 + 2abi + b^2i^2 = 5 + 12i$
$a^2 - b^2 + 2abi = 5 + 12i$

Da igualdade de números complexos, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab = 12 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos $a =$ 3 e $b =$ 2 ou $a =$ −3 e $b =$ −2. Dessa forma, $w =$ 3 + 2i ou $w =$ −3 − 2i.

Resolva os exercícios complementares 23 a 25.

7

Resolução de uma equação de 2º grau em ℂ

Encontrei essas informações na(s) página(s) 246.

» **Explique** com suas palavras por que é possível resolver qualquer equação polinomial do 2º grau no conjunto dos números complexos.

No conjunto dos números complexos, é possível calcular a raiz quadrada de qualquer número negativo.

Por isso, podem-se resolver equações polinomiais do 2º grau que têm discriminante menor que zero, que não podem ser resolvidas no conjunto real.

Resolva os exercícios complementares 26 a 28.

8

Propriedades dos números complexos conjugados

Encontrei essas informações na(s) página(s) 247.

» **Escreva** nos quadros as propriedades dos números complexos conjugados.

Propriedades dos conjugados

G1. $\overline{\overline{z}} = z$

G2. $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

G3. $z + \overline{z} = 2 \cdot \mathrm{Re}(z)$

G4. $z - \overline{z} = 2 \cdot \mathrm{Im}(z) \cdot i$

G5. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

G6. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

G7. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

G8. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

G9. $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

Resolva o exercício complementar 29.

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Termos e conceitos

» **Defina** com suas próprias palavras os termos a seguir.

plano complexo ou plano de Argand-Gauss:

É um plano cartesiano usado para representar números complexos, em que o eixo das abscissas é indicado por Re e é chamado de eixo real e o eixo das ordenadas é indicado por Im e é chamado de eixo imaginário. Cada número complexo $a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ é representado pelo ponto (a, b).

imagem ou afixo de um número complexo:

É o nome dado ao ponto que representa esse número no plano complexo.

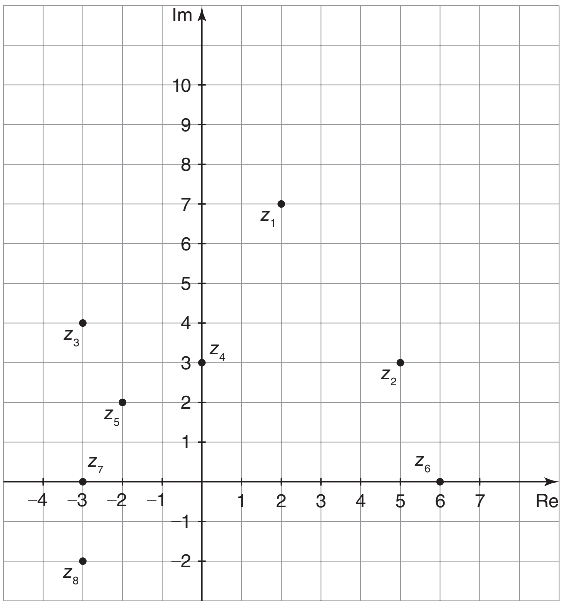
Guia de estudo

1

Plano complexo ou plano de Argand-Gauss

Encontrei essas informações na(s) página(s) 249.

» **Escreva** na forma algébrica os números representados no plano complexo a seguir.



z_1 = $2 + 7i$

z_2 = $5 + 3i$

z_3 = $-3 + 4i$

z_4 = $3i$

z_5 = $-2 + 2i$

z_6 = 6

z_7 = -3

z_8 = $-3 - 2i$

Resolva os exercícios complementares 30 a 35 e 80 a 83.

2 Módulo de um número complexo

Encontrei essas informações na(s) página(s) 252.

Explique qual é a relação entre o módulo de um número complexo e seu afixo.

O módulo de um número complexo é igual à distância de seu afixo à origem do sistema de eixos no plano complexo.

Escreva a fórmula do módulo ρ de um número complexo $z = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$.

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

3 Propriedades do módulo de um número complexo

Encontrei essas informações na(s) página(s) 253.

Escreva nos quadros as propriedades do módulo de um número complexo.

Propriedades do módulo

M1. $|z| \geq 0$

M2. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

M3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

M4. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

M5. $|z^n| = |z|^n$

Resolva os exercícios complementares 36 a 48.

FORMA TRIGONOMÉTRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO

Termos e conceitos

Defina com suas próprias palavras os termos a seguir.

coordenadas polares:

São o módulo ρ e o argumento φ do número complexo z.

argumento de um número complexo:

É o ângulo cujos lados são o semieixo positivo Ox e a semirreta de origem O que passa pelo afixo do número complexo; esse ângulo é medido no sentido anti-horário a partir do semieixo positivo Ox e sua medida φ satisfaz a condição $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ ou $0° \leqslant \varphi \leqslant 360°$.

forma trigonométrica ou forma polar:

É a representação de um número complexo na forma $z = \rho(\cos \varphi + i\operatorname{sen} \varphi)$, em que ρ e φ são, respectivamente, o módulo e o argumento de z.

Guia de estudo

1

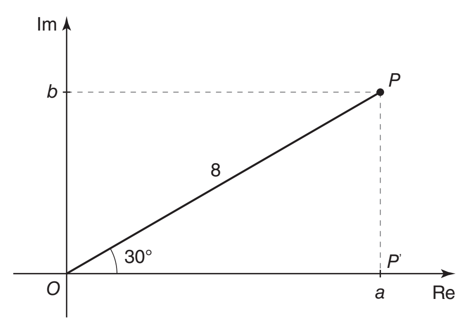
Coordenadas polares no plano complexo

Encontrei essas informações na(s) página(s) 255.

Abaixo há um exercício e parte de sua resolução. À esquerda, um comentário explica etapas da resolução. Com base nos dados, complete o exercício.

Exercício

Escreva na forma algébrica o número complexo que tem como afixo o ponto P indicado abaixo.



Resolução

Sendo $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, o número cujo afixo é o ponto P, temos:

$$\cos 30° = \frac{a}{8} \Rightarrow a = \frac{8\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 4\sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{b}{8} \Rightarrow b = \frac{8}{2} \Rightarrow b = 4$$

Assim, o número é $z = 4\sqrt{3} + 4i$.

Observando que a e b são as medidas dos catetos do triângulo retângulo OPP', aplicamos a definição de seno e de cosseno.

2 Argumento de um número complexo

Encontrei essas informações na(s) página(s) 255.

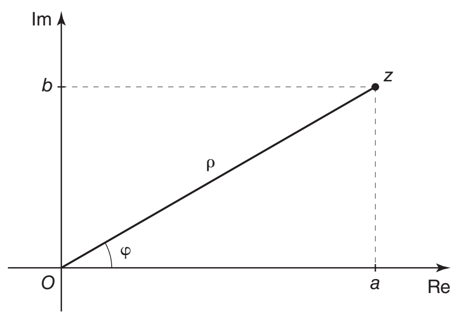
» **Explique** com suas palavras o que é o argumento de um número complexo não nulo $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$.

O argumento é um ângulo φ tal que $0° \leq \varphi < 360°$, cujos lados são o semieixo positivo Ox e a semirreta $\overrightarrow{OP}$, onde O é a origem e P é o ponto de coordenadas (a, b).

3 Cálculo do argumento de um número complexo

Encontrei essas informações na(s) página(s) 256.

» **Escreva** as expressões que completam as igualdades a seguir referentes ao módulo ρ e ao argumento φ do número complexo não nulo $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$.



$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\cos \varphi = \dfrac{a}{\rho}$

$\text{sen } \varphi = \dfrac{b}{\rho}$

4 Forma trigonométrica de um número complexo

Encontrei essas informações na(s) página(s) 258.

» **Escreva** a forma trigonométrica do número complexo $z = a + bi$ de módulo ρ e argumento φ.

$z = \rho(\cos \varphi + i \text{ sen } \varphi)$

Resolva os exercícios complementares 49 a 57 e 84.

5 Multiplicação de números complexos na forma trigonométrica

Encontrei essas informações na(s) página(s) 261.

» Considere os números complexos na forma trigonométrica $z = \rho(\cos \alpha + i \text{ sen } \alpha)$ e $w = \lambda(\cos \beta + i \text{ sen } \beta)$. **Escreva** o produto $z \cdot w$.

$z \cdot w = \rho\lambda[\cos(\alpha + \beta) + i \text{ sen}(\alpha + \beta)]$

6 Divisão de números complexos na forma trigonométrica

Encontrei essas informações na(s) página(s) 262.

Considere os números complexos na forma trigonométrica $z = \rho(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$ e $w = \lambda(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta)$, com $w \neq 0$. **Escreva** o quociente $\frac{z}{w}$.

$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{\lambda} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + i\operatorname{sen}(\alpha - \beta)]$

Resolva os exercícios complementares 58 a 66.

7 Potências de números complexos na forma trigonométrica

Encontrei essas informações na(s) página(s) 263.

Enuncie o teorema de De Moivre.

Se $z = \rho(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$ é a forma trigonométrica do número complexo z não nulo e n é um número inteiro qualquer, então $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\operatorname{sen} n\varphi)$.

Resolva os exercícios complementares 67 a 71.

8 Raízes de números complexos na forma trigonométrica

Encontrei essas informações na(s) página(s) 265.

1. Consideramos $w = \rho(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$ e aplicamos o teorema de De Moivre.

Abaixo há um exercício e parte de sua resolução. **Complete-a** com base nos dados à esquerda.

Exercício

Determine as raízes cúbicas de z, sendo

$z = 8\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$.

Resolução

Se w é uma raiz cúbica de z, então $z = w^3$. Assim:

$w^3 = z \Rightarrow \rho^3(\cos 3\varphi + i\operatorname{sen} 3\varphi) = 8\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$

Dessa forma, temos:

$\rho^3 = 8 \Rightarrow \rho = 2$

$3\varphi = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k \cdot 2\pi}{3}$

CAD_EST_MAT_CAP 06.indd 68 13.10.10 19:47:25

2. Atribuímos valores a k para determinar os argumentos.

Atribuindo a k os valores 0, 1 e 2, obtemos:

$k = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

$k = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$

$k = 2 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} = \frac{19\pi}{12}$

As raízes cúbicas de z são, portanto:

3. Escrevemos as raízes cúbicas na forma trigonométrica.

- $w_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$
- $w_2 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{12}\right)$
- $w_3 = 2\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{19\pi}{12}\right)$

9

Representação geométrica das raízes de um número complexo

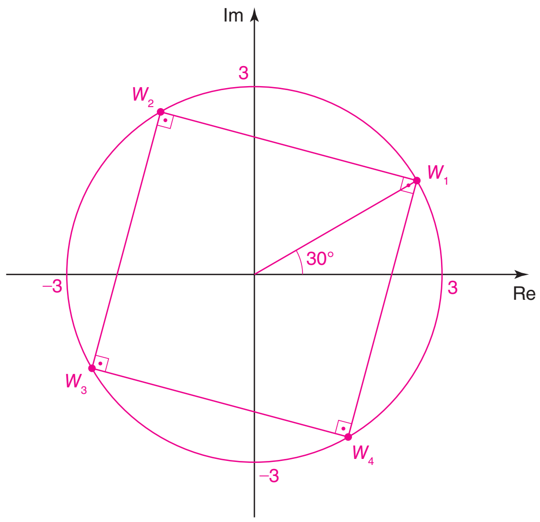
Encontrei essas informações na(s) página(s) 267.

Considere o número $z = 81(\cos 120° + i\,\text{sen}\, 120°)$. Determine as raízes quartas de z, completando as lacunas abaixo. Depois, represente essas raízes no plano complexo.

Todas as raízes quartas procuradas de z têm o mesmo módulo:

$\rho = \sqrt[4]{81} = 3$. Seus argumentos formam uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{120°}{4} = 30°$ e razão $\frac{360°}{4} = 90°$.

Assim, as imagens dessas raízes são vértices de um polígono regular de 4 lados inscrito em uma circunferência de raio 3 e centro na origem.



Resolva os exercícios complementares 72 a 79 e 85.

FECHANDO O CAPÍTULO

» **Liste** os exercícios do livro-texto que você não conseguiu resolver.

resposta pessoal

» Agora **formule** questões que o ajudarão a resolver os exercícios listados acima.

resposta pessoal

» Reúna-se com um colega e peça-lhe que esclareça as dúvidas que você levantou na questão anterior. A seguir, **esclareça** as dúvidas levantadas por ele. Se as dúvidas persistirem, **perguntem** a seu professor.

resposta pessoal

Sintetize

» **Identifique** as ideias principais do capítulo. Para ajudá-lo, oriente-se pelos títulos das seções e seus subtítulos. Depois, **conecte** as ideias e **redija** um texto que seja uma síntese dos assuntos estudados.

Seção 6.1

Seção 6.2

Seção 6.3

Seção 6.4

Síntese

Organizador de estudos

» **Use** a tabela abaixo para acompanhar o progresso de seus estudos. Ao completar cada atividade do *Caderno do estudante* ou revisão do livro-texto, **marque** um X ou **escreva** a data em que realizou a atividade na linha correspondente.

☐ Atividades do *Caderno do estudante* ☐ Livro-texto

Capítulo 6	
Abertura	
Seção 6.1	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Para começar o estudo	
Seção 6.1	
Seção 6.2	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 6.2	
Seção 6.3	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 6.3	
Seção 6.4	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 6.4	
Conteúdo digital	
Exercícios complementares	
Exercícios de revisão cumulativa	
Análise da resolução	
Fechando o capítulo	

Capítulo
7

Polinômios

Seções:
7.1 Polinômios
7.2 Operações com polinômios

Para começar o estudo

Analise a situação a seguir.

O faturamento mensal F e o custo de produção C de uma empresa podem ser descritos, respectivamente, pelas funções $F(x) = x^3 - 7x^2 + 13x + 1$ e $C(x) = -x^2 + 6x + 2$, em que $F(x)$ e $C(x)$ são dados em dezenas de milhares de reais e x é dado em milhares de peças produzidas em cada mês, sob a condição $x \leqslant 6$.

ERNESTO REGHRAN/PULSAR IMAGENS

- **Classifique** as afirmações como verdadeiras $\boxed{\text{V}}$ ou falsas $\boxed{\text{F}}$.

$\boxed{\text{V}}$ O lucro da empresa é dado por $x^3 - 6x^2 + 7x - 1$.

$\boxed{\text{F}}$ Se forem produzidas num certo mês 2.000 peças, o faturamento da empresa será de exatamente R$ 30.000,00.

$\boxed{\text{V}}$ O custo de produção é máximo quando são produzidas 3.000 peças.

$\boxed{\text{V}}$ A empresa vai faturar R$ 8.000,00 se produzir apenas 1.000 peças.

POLINÔMIOS

Termos e conceitos

Defina com suas próprias palavras os termos a seguir.

polinômio: É toda expressão que, na variável x, pode ser apresentada na forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_0$, em que $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... a_0$ são constantes complexas.

monômio: É o nome dado a cada uma das parcelas de um polinômio.

coeficiente dominante: É o coeficiente não nulo da variável de maior expoente no polinômio.

polinômios idênticos: São dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ tais que $P(\alpha) = Q(\alpha)$, para todo α, com $\alpha \in \mathbb{C}$.

Guia de estudo

1

Polinômio com uma variável

Encontrei essas informações na(s) página(s) 279 e 280.

Nomeie os elementos destacados no polinômio $P(x)$ de grau n a seguir.

$$P(x) \equiv a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_0$$

a_n: coeficiente dominante

a_0: termo independente

Identifique o grau, os coeficientes, o termo independente e o valor numérico para $x = 2$ de cada polinômio da tabela a seguir.

Polinômio	Grau	Coeficientes (segundo a ordem decrescente dos expoentes de x)	Termo independente	Valor numérico para $x = 2$
$3x^4 - 2x^3 + 2x - 3$	4	$3, -2, 0, 2$ e -3	-3	33
$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$	3	$2, -7, 7$ e -2	-2	0
$5x^2 - 3x^3$	3	$-3, 5, 0$ e 0	0	-4
$(x^2 + 1)(x^3 - 3)$	5	$1, 0, 1, -3, 0$ e -3	-3	25

Resolva os exercícios complementares 1 a 10 e 76 a 80.

2

Identidade de polinômios

Encontrei essas informações na(s) página(s) 282.

» **Responda** às perguntas a seguir.

- Se $P(x) \equiv 2x^3 + kx^2 + 3$ é idêntico ao polinômio $Q(x) \equiv kx^4 + 2x^3 + 3$, qual é o grau de $Q(x)$? **Justifique** sua resposta.

O grau de $Q(x)$ é 3, pois, se $Q(x)$ é idêntico a $P(x)$, os dois têm o mesmo grau e seus coeficientes de termos correspondentes são iguais. (Termos correspondentes são termos cuja variável tem o mesmo expoente.)

- Qual é o valor de k?

$k = 0$

Resolva os exercícios complementares 11 e 12.

Faça a conexão

» **Folheie** o capítulo 7 do livro-texto. Observe a parte teórica, as seções de exercícios resolvidos e de exercícios propostos e **identifique** situações que envolvem ideias relacionadas a polinômios.

cálculo de áreas e de volumes com medidas variáveis, modelagem de trânsito e aplicações financeiras

OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

Guia de estudo

1

Adição de polinômios

Encontrei essas informações na(s) página(s) 283 e 284.

» O esquema a seguir destaca as propriedades da adição de polinômios. **Dê um exemplo** para cada propriedade.

Propriedades da adição de polinômios

A1. Associativa

Exemplo

$[P(x) + Q(x)] + T(x) =$

$= P(x) + [Q(x) + T(x)]$

A2. Comutativa

Exemplo

$P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$

A3. Elemento neutro

Exemplo

$P(x) + 0(x) = 0(x) + P(x) = P(x)$

A4. Elemento oposto

Exemplo

$P(x) + [-P(x)] = [-P(x)] + P(x) = 0(x)$

» Os polinômios P e Q têm graus m e n, respectivamente, com $m \geq n$. **Escreva** uma das relações: $=$, $>$, $\geq$, $<$ ou $\leq$, que completa corretamente a frase a seguir.

O grau de $P + Q$, quando $P + Q$ não é nulo, é:

$\text{gr}(P + Q) \leq m$

2

Subtração de polinômios

Encontrei essas informações na(s) página(s) 285.

» **Defina** a subtração de polinômios.

A subtração $P(x) - Q(x)$ é definida como a soma de $P(x)$ com o oposto de $Q(x)$, isto é:

$P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)]$

3
Multiplicação de polinômios

Encontrei essas informações na(s) página(s) 286.

» O esquema a seguir destaca as propriedades da multiplicação de polinômios. **Dê um exemplo** para cada propriedade.

Propriedades da multiplicação de polinômios

M1. Associativa

Exemplo

$[P(x) \cdot Q(x)] \cdot T(x) = P(x) \cdot [Q(x) \cdot T(x)]$

M2. Comutativa

Exemplo

$P(x) \cdot Q(x) = Q(x) \cdot P(x)$

M3. Elemento neutro

Exemplo

$P(x) \cdot I(x) = I(x) \cdot P(x) = P(x)$

M4. Distributivas

Exemplo

$P(x) \cdot [Q(x) + T(x)] =$

$= P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot T(x)$

$[Q(x) + T(x)] \cdot P(x) =$

$= Q(x) \cdot P(x) + T(x) \cdot P(x)$

4
Grau do polinômio produto

Encontrei essas informações na(s) página(s) 288.

» Os polinômios P e Q têm graus *m* e *n*, respectivamente. **Escreva** a expressão que completa corretamente a frase a seguir.

O grau do produto $P \cdot Q$ é:

$m + n$

Resolva os exercícios complementares 13 a 24 e 81.

5
Divisão de polinômios

Encontrei essas informações na(s) página(s) 290.

» A frase a seguir explica o significado da divisão de um polinômio $E(x)$ pelo polinômio não nulo $D(x)$. **Complete** a frase corretamente.

Dividir o polinômio $E(x)$ pelo polinômio não nulo $D(x)$ significa obter os polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ tais que:

$Q(x) \cdot D(x) + R(x) = E(x)$ e $gr(R) < gr(D)$ ou $R(x) = 0$.

CAD_EST_MAT_CAP 07.indd 76 15.10.10 10:37:43

6

Grau do polinômio quociente

Encontrei essas informações na(s) página(s) 290.

» Os polinômios E e D têm graus m e n, respectivamente, tais que $m \geq n$. **Escreva** a expressão que completa corretamente a frase a seguir.

O grau do quociente $E : D$ é: $m - n$

7

Método de Descartes

Encontrei essas informações na(s) página(s) 291 e 292.

» Numere de 1 a 5 os quadrinhos abaixo, **ordenando** os procedimentos para a divisão do polinômio $E(x) \equiv x^3 + 2x^2 + 1$ por $D(x) \equiv x - 2$ pelo método de Descartes. **Escreva** as etapas que estão faltando na resolução.

$\boxed{2}$ Escrevemos $Q(x)$ e $R(x)$ com coeficientes genéricos:

$Q(x) = ax^2 + bx + c$ e $R(x) = d$

$\boxed{1}$ Calculamos o grau do quociente $Q(x)$ e o maior grau possível do resto $R(x)$:

$gr(Q) = gr(E) - gr(D) \Rightarrow gr(Q) = 3 - 1 = 2$

$gr(R) < gr(D) \Rightarrow gr(R) = 0$

$\boxed{4}$ Igualamos os coeficientes correspondentes dos dois membros da igualdade e resolvemos o sistema obtido:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 2 \\ c - 2b = 0 \\ d - 2c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 8 \\ d = 17 \end{cases}$$

$\boxed{3}$ Efetuamos as operações indicadas na igualdade $Q(x) \cdot D(x) + R(x) \equiv E(x)$:

$(ax^2 + bx + c)(x - 2) + d \equiv x^3 + 2x^2 + 1$

$ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x + d - 2c \equiv x^3 + 2x^2 + 1$

$\boxed{5}$ Concluímos que a divisão de $E(x)$ por $D(x)$ tem quociente $x^2 + 4x + 8$ e resto 17.

8

Método da chave

Encontrei essas informações na(s) página(s) 292.

» Abaixo há um exercício e sua resolução. **Escreva** comentários à esquerda explicando a resolução.

Exercício

Efetue a divisão do polinômio
$E(x) \equiv x^4 + 4x^3 - 2x + 1$ por $D(x) \equiv x^2 - 2x$
utilizando o método da chave.

Resolução

1. Dividimos o monômio de maior grau de *E* pelo termo de maior grau de *D* e registramos o resultado no quociente.

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 4x^3 + 0x^2 - 2x + 1 & x^2 - 2x \\ \cline{2-2} & x^2 \end{array}$$

2. Subtraímos do dividendo o produto entre o divisor e o quociente encontrado na etapa anterior.

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 4x^3 + 0x^2 - 2x + 1 & x^2 - 2x \\ \cline{2-2} \ominus\ x^4 - 2x^3 & x^2 \\ \hline \quad 6x^3 + 0x^2 - 2x + 1 & \end{array}$$

3. Repetimos os passos já realizados, tomando como dividendo o resultado da subtração feita acima.

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 4x^3 + 0x^2 - 2x + 1 & x^2 - 2x \\ \cline{2-2} \ominus\ x^4 - 2x^3 & x^2 + 6x \\ \hline \quad 6x^3 + 0x^2 - 2x + 1 & \\ \ominus\ 6x^3 - 12x^2 & \\ \hline \quad\quad 12x^2 - 2x + 1 & \end{array}$$

4. Repetimos novamente os passos realizados, tomando como dividendo o resultado da nova subtração feita acima.

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 4x^3 + 0x^2 - 2x + 1 & x^2 - 2x \\ \cline{2-2} \ominus\ x^4 - 2x^3 & x^2 + 6x + 12 \\ \hline \quad 6x^3 + 0x^2 - 2x + 1 & \\ \ominus\ 6x^3 - 12x^2 & \\ \hline \quad\quad 12x^2 - 2x + 1 & \\ \ominus\ 12x^2 - 24x & \\ \hline \quad\quad\quad 22x + 1 & \end{array}$$

Dessa forma, o quociente da divisão de
$E(x) \equiv x^4 + 4x^3 - 2x + 1$ por $D(x) \equiv x^2 - 2x$ é
$x^2 + 6x + 12$ e o resto é $22x + 1$.

Resolva os exercícios complementares 25 a 34, 82 e 83.

9

Fração polinomial

Encontrei essas informações na(s) página(s) 293.

» **Explique** com suas palavras o que é uma fração polinomial e cite um exemplo.

Fração polinomial é uma expressão na forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, em que $Q(x)$ é um polinômio não nulo. Um exemplo é a expressão $\frac{x^3 - 2x}{x^2 + 4}$.

10

Frações polinomiais idênticas

Encontrei essas informações na(s) página(s) 293 e 294.

» **Responda**: Se $\frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1} \equiv \frac{7x + 3}{x^2 - 1}$, com $x \neq 1$ e $x \neq -1$, quanto vale $a + b$, sendo a e b constantes?

Justifique sua resposta.

O denominador comum às frações pode ser $x^2 - 1$. Assim, temos:

$\frac{a(x + 1) + b(x - 1)}{x^2 - 1} \equiv \frac{7x + 3}{x^2 - 1} \Rightarrow (a + b)x + a - b \equiv 7x + 3$

$\therefore \begin{cases} a + b = 7 \\ a - b = 3 \end{cases}$

Logo, a soma pedida é 7.

Resolva os exercícios complementares 35 a 38.

11

Divisão de polinômios por binômios de 1º grau

Encontrei essas informações na(s) página(s) 295 e 296.

» **Explique** com suas palavras de que forma é possível efetuar a divisão de um polinômio $P(x)$ de grau maior ou igual a 2 pelo polinômio $x^2 - a^2$, com a complexo, efetuando apenas divisões por binômios de 1º grau.

Como $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$, podemos efetuar a divisão de $P(x)$ por $x^2 - a^2$ dividindo $P(x)$ sucessivamente por $x - a$ e $x + a$.

12

Teorema do resto

Encontrei essas informações na(s) página(s) 296.

» **Enuncie** o teorema do resto.

Sendo a uma constante complexa qualquer, o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $x - a$ é igual a $P(a)$.

Resolva os exercícios complementares 39 a 45.

13

Teorema de D'Alembert

Encontrei essas informações na(s) página(s) 298.

Complete o enunciado do teorema de D'Alembert.

Sendo a uma constante complexa qualquer, um polinômio $P(x)$ é divisível por $x - a$ se, e somente se, $P(a) = 0$.

Resolva os exercícios complementares 46 a 51.

14

Dispositivo prático de Briot-Ruffini

Encontrei essas informações na(s) página(s) 299 e 300.

Numere de 1 a 4 os quadrinhos abaixo e **ordene** os procedimentos para a divisão do polinômio $E(x) \equiv 2x^3 - 3x^2 + 5$ por $D(x) \equiv x - 2$. Utilize o dispositivo prático de Briot-Ruffini e **complete** a resolução.

[2] Repetimos o coeficiente do termo de maior grau abaixo da barra horizontal, e multiplicamos pela raiz de $x - 2$ e, a seguir, somamos com o coeficiente seguinte. Registramos esse resultado abaixo do segundo coeficiente e abaixo da barra horizontal.

2	2	−3	0	5
	2	1		

[3] Repetimos o procedimento de multiplicar o resultado abaixo da barra pela raiz de $x - 2$ e somar ao próximo coeficiente, registrando o resultado abaixo da barra horizontal.

2	2	−3	0	5
	2	1	2	9

[1] Dispomos a raiz do polinômio $x - 2$ e os coeficientes de $E(x)$ na forma:

2	2	−3	0	5

[4] O último número obtido abaixo da barra horizontal é o resto da divisão, e os demais, da esquerda para a direita, são os coeficientes do quociente, do maior para o menor grau. Assim, o quociente é $2x^2 + x + 2$ e o resto é 9.

15 Divisão de um polinômio $P(x)$ por $kx - a$

Encontrei essas informações na(s) página(s) 301.

Responda: De que forma podemos efetuar a divisão de $P(x)$ por $kx - a$, com $k \neq 0$ e $k \neq 1$, utilizando o método prático de Briot-Ruffini?

Para efetuar a divisão de $P(x)$ por $kx - a$, basta dividir $P(x)$ por $x - \frac{a}{k}$ e, a seguir, dividir o quociente obtido por k.

Resolva os exercícios complementares 52 a 56.

16 Extensão do teorema do resto

Encontrei essas informações na(s) página(s) 302.

Complete a afirmação a seguir.

Sendo k e a constantes complexas quaisquer, com $k \neq 0$, o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $kx - a$ é igual a $P\left(\frac{a}{k}\right)$.

17 Extensão do teorema de D'Alembert

Encontrei essas informações na(s) página(s) 303.

Complete a afirmação a seguir.

Sendo k e a constantes complexas quaisquer, com $k \neq 0$, um polinômio $P(x)$ é divisível por $kx - a$ se, e somente se, $P\left(\frac{a}{k}\right) = 0$.

Resolva os exercícios complementares 57 a 66.

18 Divisão de um polinômio pelo produto $(kx - a)(mx - b)$

Encontrei essas informações na(s) página(s) 304 e 305.

Responda: Se um polinômio é divisível por $3x - 5$ e por $6x + 2$, podemos afirmar que ele é divisível por $(3x - 5)(6x + 2)$? Justifique.

Sim, pois, se $P(x)$ é divisível por $3x - 5$ e por $6x + 2$, então podemos afirmar que $P(x)$ é divisível por $(3x - 5)(6x + 2)$, pois $\frac{5}{3} \neq -\frac{2}{6}$.

Resolva os exercícios complementares 67 a 75.

CAD_EST_MAT_CAP 07.indd 81 15.10.10 10:37:44

FECHANDO O CAPÍTULO

» **Liste** os exercícios do livro-texto que você não conseguiu resolver.

resposta pessoal

» Agora **formule** questões que o ajudarão a resolver os exercícios listados acima.

resposta pessoal

» Reúna-se com um colega e peça-lhe que esclareça as dúvidas que você levantou na questão anterior. A seguir, **esclareça** as dúvidas levantadas por ele. Se as dúvidas persistirem, **perguntem** a seu professor.

resposta pessoal

Sintetize

» **Faça uma síntese** explicando: o que é polinômio; quais são e como fazer as operações com polinômios; os principais teoremas que ajudam a operar com polinômios.

resposta pessoal

Organizador de estudos

» **Use** a tabela abaixo para acompanhar o progresso de seus estudos. Ao completar cada atividade do *Caderno do estudante* ou revisão do livro-texto, **marque** um X ou **escreva** a data em que realizou a atividade na linha correspondente.

☐ Atividades do *Caderno do estudante* ☐ Livro-texto

Capítulo 7	
Abertura	
Seção 7.1	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Para começar o estudo	
Seção 7.1	
Seção 7.2	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 7.2	
Conteúdo digital	
Exercícios complementares	
Exercícios de revisão cumulativa	
Análise da resolução	
Fechando o capítulo	

PARTE III

Capítulo 8

Equações polinomiais

Seções:
8.1 Equações polinomiais
8.2 Pesquisa de raízes em uma equação polinomial
8.3 Relações de Girard

Para começar o estudo

Analise a situação a seguir e **classifique** as afirmações como verdadeiras $\boxed{\text{V}}$ ou falsas $\boxed{\text{F}}$.

Com o crescente uso de senhas no nosso dia a dia, cada vez mais se faz necessário o uso de técnicas de criptografia para evitar que essas senhas sejam descobertas indevidamente. A criptografia é um conjunto de técnicas utilizadas para modificar uma informação a fim de dificultar sua interpretação por quem não conhece a "fórmula" para a leitura. Durante a Segunda Guerra Mundial, criou-se uma máquina que utilizava uma fórmula para criptografar e descriptografar mensagens secretas. Atualmente, existem formas mais eficientes e funcionais de criptografar informações, e muitas delas fazem uso de fórmulas matemáticas. Imagine que uma senha de três dígitos distintos e em ordem crescente foi criptografada com a criação de uma equação cujas raízes não negativas são esses três dígitos. A equação obtida é $x^4 - 6x^3 - x^2 + 6x = 0$.

HULTON ARCHIVE/GETTY IMAGES

Máquina Enigma, usada para criptografar e descriptografar mensagens.

$\boxed{\text{V}}$ O primeiro algarismo dessa senha é o número 0.

$\boxed{\text{F}}$ Um dos algarismos dessa senha é o número 2.

$\boxed{\text{V}}$ A soma dos algarismos dessa senha é 7.

$\boxed{\text{F}}$ O produto dos algarismos dessa senha é 6.

$\boxed{\text{F}}$ A equação dada possui mais do que três raízes não negativas.

$x^4 - 6x^3 - x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 6x^2 - x + 6) = 0$
$\therefore x\,[x^2(x - 6) - (x - 6)] = 0 \Rightarrow x(x - 6)(x^2 - 1) = 0$
$\therefore x = 0$ ou $x = 6$ ou $x = 1$ ou $x = -1$
Assim, concluímos que a senha é 016.

Capítulo 8 | Seção 8.1

EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Termo e conceito

» **Defina** com suas próprias palavras o termo a seguir.

equação polinomial:

É toda equação que pode ser representada na forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 = 0$, onde $P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$ é um polinômio de grau n, com $n \geq 1$.

Guia de estudo

1 Equações polinomiais ou equações algébricas

Encontrei essas informações na(s) página(s) 312 a 314.

» **Classifique** as equações a seguir como polinomiais $\boxed{\text{P}}$ ou não polinomiais $\boxed{\text{NP}}$.

$\boxed{\text{P}}$ $2x^4 - 3x^3 + 2x - 1 = 0$

$\boxed{\text{NP}}$ $x^2 - x^{\frac{1}{2}} + 5 = 0$

$\boxed{\text{P}}$ $x^3 + 3x = 5 - x^2$

$\boxed{\text{P}}$ $(x + 1)(x^2 - 3) = 2$

$\boxed{\text{NP}}$ $\frac{1}{x^2} - \sqrt{3x} + i = 0$

Resolva os exercícios complementares 1 a 8 e 70 a 72.

2 Teorema fundamental da Álgebra

Encontrei essas informações na(s) página(s) 315.

» **Explique** com suas palavras o teorema fundamental da Álgebra.

O teorema fundamental da Álgebra afirma que toda equação polinomial possui ao menos uma raiz complexa.

3 Teorema da decomposição

Encontrei essas informações na(s) página(s) 315.

» **Complete** o enunciado a seguir.

Todo polinômio de grau n, com $n \geq 1$, $P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$, pode ser fatorado na forma $P(x) \equiv a_n (x - r_1)(x - r_2) \cdot ... \cdot (x - r_n)$, em que $r_1, r_2, ..., r_n$ são todas as raízes de $P(x)$.

4

Número de raízes de uma equação polinomial

Encontrei essas informações na(s) página(s)

317.

» **Responda:** Se uma equação polinomial é de quinto grau, quantas raízes ela tem? Podemos afirmar que elas são todas reais?

Se a equação polinomial é de quinto grau, ela tem 5 raízes. Não é possível afirmar se todas são reais, pois as raízes são complexas.

5

Multiplicidade de uma raiz

Encontrei essas informações na(s) página(s)

317.

» **Explique** com suas palavras o que é a multiplicidade de uma raiz de uma equação polinomial.

A multiplicidade é um número que indica quantas vezes uma mesma raiz aparece na fatoração de uma equação polinomial na forma $a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdot ... \cdot (x - r_n) = 0$, onde $r_1, r_2, ..., r_n$ são todas as raízes dessa equação.

- **Dê um exemplo** de equação com uma raiz de multiplicidade maior que 1.

Um exemplo de equação com multiplicidade maior que 1 é a equação de 2º grau $x^2 - 6x + 9 = 0$, pois, na forma fatorada, essa equação equivale a $(x - 3)(x - 3) = 0$. A raiz 3 tem multiplicidade 2.

Resolva os exercícios complementares 9 a 21.

PESQUISA DE RAÍZES EM UMA EQUAÇÃO POLINOMIAL

Guia de estudo

1

Teorema das raízes imaginárias de uma equação polinomial

Encontrei essas informações na(s) página(s) 320 e 321.

» **Identifique** os termos e as expressões que completam corretamente a afirmação a seguir.

Se o número imaginário $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, é raiz de uma equação polinomial $P(x) = 0$ com coeficientes reais, então o conjugado de z, ou seja, $\bar{z} = a - bi$, também é raiz dessa equação.

» **Abaixo há um exercício e parte de sua resolução. Complete a resolução com base no comentário à esquerda.**

Exercício

Uma equação polinomial de 3º grau de coeficientes reais tem como raízes os números 1 e 2i e seu coeficiente dominante é 2. Determine essa equação.

Resolução

A equação na forma fatorada pode ser escrita como:

Se z = 2i é raiz da equação, então seu conjugado $\bar{z} = -2i$ também é.

$2(x - 1)(x - 2i)(x + 2i) = 0$
$2(x - 1)(x^2 + 4) = 0$
$2x^3 - 2x^2 + 8x - 8 = 0$

A equação é, portanto, $2x^3 - 2x^2 + 8x - 8 = 0$.

Resolva os exercícios complementares 22 a 34.

2 Teorema das raízes racionais de uma equação polinomial

Encontrei essas informações na(s) página(s) 322 e 323.

» **Responda:** Se $\frac{2}{3}$ é raiz da equação polinomial do 3º grau $mx^3 + 4x^2 - 13x + n = 0$, com m e n inteiros, o que podemos afirmar sobre m e n?

Pelo teorema das raízes racionais, podemos afirmar que m é múltiplo de 3 e que n é múltiplo de 2.

» **Abaixo há um exercício e parte da sua resolução. Nos quadros à esquerda, comentários explicam as etapas da resolução. Com base nesses dados, complete o exercício.**

Exercício

Se a equação polinomial $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ possui como raízes três números naturais ímpares distintos menores que 10, quais são essas raízes?

Resolução

Temos: $a_3 = 1$ e $a_0 = -15$. As possíveis raízes racionais são da forma $\frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, sendo p divisor de -15 e q divisor de 1.

1. Como as raízes devem ser naturais, o numerador p é divisor positivo de -15.

Os divisores positivos de -15 são:

1, 3, 5 e 15

2. O denominador q é divisor de 1.

Como q é divisor positivo de 1, temos:

$q = 1$

Como as raízes são menores que 10, concluímos que elas são:

1, 3 e 5

Resolva os exercícios complementares 35 a 41 e 73 a 79.

Capítulo 8 Seção 8.3

RELAÇÕES DE GIRARD

Guia de estudo

1

As relações de Girard em uma equação polinomial do 2º grau

Encontrei essas informações na(s) página(s) 324.

» **Escreva** as condições para que a equação polinomial do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{C}$, tenha como raízes r_1 e r_2.

- $r_1 + r_2 =$ $-\frac{b}{a}$
- $r_1 r_2 =$ $\frac{c}{a}$

2

As relações de Girard em uma equação polinomial do 3º grau

Encontrei essas informações na(s) página(s) 325.

» **Escreva** as condições para que a equação polinomial do 3º grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{C}$, tenha como raízes r_1, r_2 e r_3.

- $r_1 + r_2 + r_3 =$ $-\frac{b}{a}$
- $r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 =$ $\frac{c}{a}$
- $r_1 r_2 r_3 =$ $-\frac{d}{a}$

Resolva os exercícios complementares 42 a 62.

3

As relações de Girard em uma equação polinomial de grau *n*

Encontrei essas informações na(s) página(s) 327.

» **Complete** as igualdades a seguir, sobre as raízes $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$ de uma equação de grau n na forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 = 0$, com $\{a_0, a_1, a_2, ..., a_n\} \subset \mathbb{C}$.

- $-\frac{a_{n-1}}{a_n} =$ $r_1 + r_2 + ... + r_n$
- $\frac{a_{n-2}}{a_n} =$ $r_1 r_2 + r_1 r_3 + ... + r_{n-1} r_n$
- $-\frac{a_{n-3}}{a_n} =$ $r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + ... + r_{n-2} r_{n-1} r_n$
- $\frac{(-1)^n a_0}{a_n} =$ $r_1 r_2 r_3 r_4 \cdot ... \cdot r_n$

Resolva os exercícios complementares 63 a 69.

FECHANDO O CAPÍTULO

» **Liste** os exercícios do livro-texto que você não conseguiu resolver.

resposta pessoal

» Agora **formule** questões que o ajudarão a resolver os exercícios listados acima.

resposta pessoal

» Reúna-se com um colega e peça-lhe que esclareça as dúvidas que você levantou na questão anterior. A seguir, **esclareça** as dúvidas levantadas por ele. Se as dúvidas persistirem, **perguntem** a seu professor.

resposta pessoal

Sintetize

» **Liste** os nomes dos teoremas e das relações desse capítulo e dê um exemplo de um exercício em que o teorema seja aplicado em sua resolução.

resposta possível:

Teorema fundamental da Álgebra. Exemplo: A equação $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ admite raízes complexas?

Teorema da decomposição. Exemplo: Determine o número de raízes complexas da equação $x^5 - 1 = 0$.

Teorema das raízes imaginárias de uma equação polinomial. Exemplo: O número 3 + 2i é raiz de uma equação polinomial do 3º grau, com coeficientes reais, cuja soma das raízes é 10. Determine as soluções dessa equação.

Teorema das raízes racionais de uma equação polinomial. Exemplo: Determine, se existirem, as raízes racionais da equação $2x^3 - x^2 - 6x + 3 = 0$.

Relações de Girard em uma equação polinomial do 2º grau. Exemplo: Determine os valores dos coeficientes b e c, dadas as raízes r_1 e r_2 da equação polinomial do 2º grau: $4x^2 + bx + c = 0$, com $r_1 = 3$ e $r_2 = 4$

Relações de Girard em uma equação polinomial do 3º grau. Exemplo: Determine os números reais b e c de modo que uma das raízes da equação $2x^3 + bx^2 + x + c = 0$ seja 1 – 2i.

Relações de Girard em uma equação polinomial de grau *n*. Exemplo: Resolver em $\mathbb{C}$ a equação $x^4 - 6ix^3 - 13x^2 + 12ix + 4 = 0$, sabendo que ela tem duas raízes duplas.

Organizador de estudos

» **Use** a tabela abaixo para acompanhar o progresso de seus estudos. Ao completar cada atividade do *Caderno do estudante* ou revisão do livro-texto, **marque** um X ou **escreva** a data em que realizou a atividade na linha correspondente.

☐ Atividades do *Caderno do estudante* ☐ Livro-texto

Capítulo 8	
Abertura	
Seção 8.1	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Para começar o estudo	
Seção 8.1	
Seção 8.2	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 8.2	
Conteúdo digital	
Seção 8.3	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 8.3	
Conteúdo digital	
Exercícios complementares	
Exercícios de revisão cumulativa	
Análise da resolução	
Fechando o capítulo	

PARTE III

Capítulo 9

Introdução ao Cálculo diferencial: limite de uma função

Para começar o estudo

Analise as situações a seguir e **classifique** as afirmações como verdadeiras V ou falsas F.

Situação I
Um objeto é solto do topo de um prédio e cai livremente em direção ao solo. A resistência do ar é considerada nula e a velocidade do objeto aumenta 10 m/s a cada segundo.

ERICH SCHREMPP/PHOTO RESEARCHER/LATINSTOCK

Situação II
Uma pessoa divide uma barra de chocolate retangular ao meio e come uma metade da barra. Depois, divide o restante ao meio e come uma metade. A seguir, repete esse processo com o pedaço que sobrou. Imagine que esse processo possa ser repetido infinitas vezes.

STUDIOMODE/ALAMY/OTHER IMAGES

- V Na situação I, a variação da velocidade é sempre a mesma para qualquer intervalo de tempo de mesma duração.
- F Supondo que o tempo de queda tenha sido superior a 4 segundos e que nos dois primeiros segundos o objeto caiu 5 metros, podemos afirmar que nos dois segundos seguintes ele caiu mais 5 metros.
- V Se o processo da situação II puder continuar infinitamente, a pessoa comerá infinitos pedaços cada vez menores de chocolate.
- V A soma dos infinitos pedaços de chocolate da situação II vai ser igual ao chocolate inteiro.

CAD_EST_MAT_CAP 09.indd 92 15.10.10 10:40:24

A ORIGEM E A IDEIA CENTRAL DO CÁLCULO DIFERENCIAL

Termos e conceitos

» **Defina** com suas próprias palavras os termos a seguir.

taxa média de variação de uma função:

A taxa média de variação para uma função f no intervalo $[x_1, x_2]$, com $\{x_1, x_2\} \subset D(f)$, é dada por $m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

taxa pontual de variação de uma função:

É o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função f no ponto em questão, desde que essa reta exista e não seja vertical.

Guia de estudo

1

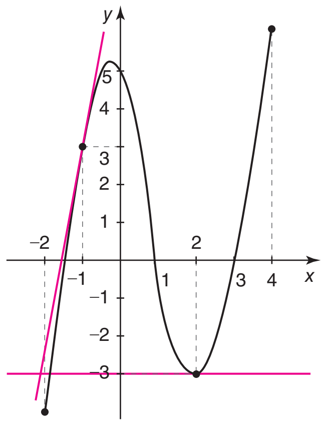
O problema da reta tangente

Encontrei essas informações na(s) página(s) 336.

» O gráfico ao lado representa uma função de domínio $D = [-2, 4]$. **Represente** as retas que tangenciam o gráfico nos pontos $(-1, 3)$ e $(2, -3)$.

- Cada uma das duas retas interceptou o gráfico da função em um único ponto?

A reta tangente ao gráfico da função no ponto $(-1, 3)$ intercepta o gráfico num único ponto (o ponto de tangência). A reta tangente no ponto $(2, -3)$, porém, intercepta o gráfico da função em mais de um ponto.



Resolva os exercícios complementares 19 a 21.

2

Taxa média e taxa pontual de variação

Encontrei essas informações na(s) página(s) 337 a 339.

» **Explique** com suas palavras qual é a diferença entre a taxa média de variação e a taxa pontual de variação de uma função.

A taxa média de variação de uma função é calculada para um intervalo de valores da variável x, e é dada pelo quociente entre a variação da função e a variação de x. Já a taxa pontual de variação é calculada para cada valor único de x e é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto $(x, f(x))$.

Faça a conexão

» **Cite** pelo menos duas grandezas estudadas na Física que podem ser consideradas como uma taxa de variação.

A velocidade média de um corpo é a taxa de variação de sua posição em relação ao tempo.

A aceleração média escalar é a taxa de variação da velocidade de um corpo em relação ao tempo.

O CONCEITO DE LIMITE

Termos e conceitos

Defina com suas próprias palavras os termos a seguir.

vizinhança completa de um número real:

Uma vizinhança completa de um número real a, indicada por $V(a)$, é qualquer intervalo real $]p, q[$ tal que $a \in\ ]p, q[$.

vizinhança reduzida de um número real:

Uma vizinhança reduzida de um número real a, indicada por $\overline{V}(a)$, é o conjunto de números pertencentes a uma vizinhança completa de a excluindo-se o número a, ou seja, $\overline{V}(a) = V(a) - \{a\}$.

limite de uma função:

O limite de uma função $f(x)$ quando x tende a a é o número L, se, e somente se, para qualquer vizinhança de L, $V(L)$, existe alguma vizinhança reduzida de a, $\overline{V}(a)$, de modo que todo elemento x de $\overline{V}(a)$ possui imagem $f(x)$ em $V(L)$.

limite lateral de uma função:

É o limite ao qual tendem os valores de uma função quando x tende a a apenas por valores maiores que a ou por valores menores que a.

Guia de estudo

1 O conceito de limite

Encontrei essas informações na(s) página(s) 340 e 341.

Explique com suas palavras qual é o conceito intuitivo de limite. Cite exemplos diferentes dos encontrados no livro-texto.

Intuitivamente, o limite é um ponto que não pode ser ultrapassado, mas do qual é possível se aproximar a qualquer distância não nula. O limite pode ser alcançado ou não. Dentre os vários exemplos possíveis de limite, pode-se citar a temperatura máxima a que a água pode ser aquecida antes que comece a evaporar; o máximo que é possível esticar uma corda de um instrumento antes que ela se rompa ou o volume máximo de água que se pode pôr em um recipiente.

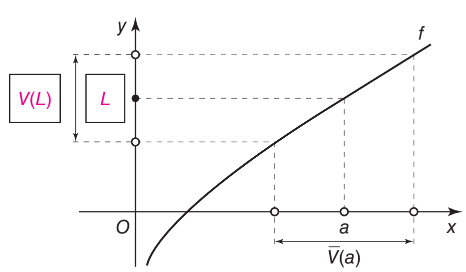
Resolva os exercícios complementares 1 a 5.

2 Definição de limite

Encontrei essas informações na(s) página(s) 342.

Leia, abaixo, a definição de limite de uma função f de variável real, em que $\overline{V}(a)$ está contida no domínio de f. A seguir, **preencha** os quadrinhos.

O número L é o limite dos valores de $f(x)$ com x tendendo a a se, e somente se, para qualquer vizinhança completa de L, $V(L)$, existe uma vizinhança reduzida de a, $\overline{V}(a)$, tal que todo elemento de $\overline{V}(a)$ possui imagem $f(x)$ em $V(L)$.

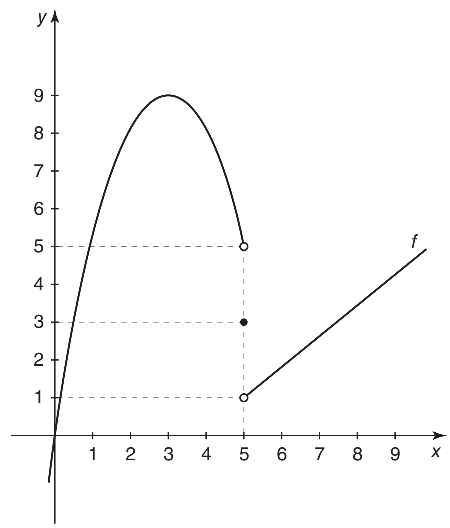


$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \boxed{L}$

3 Limites laterais

Encontrei essas informações na(s) página(s) 347 a 350.

» **Observe** o gráfico da função f a seguir e **complete** as igualdades abaixo.



- $f(5) =$ 3
- $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) =$ 1
- $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) =$ 5

4 Propriedades das operações elementares com limites

Encontrei essas informações na(s) página(s) 351.

» **Complete** o quadro a seguir enunciando cada uma das propriedades das operações elementares com limites para duas funções f e g tais que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$.

Propriedades das operações elementares com limites

- **P1.** Para qualquer constante real k, tem-se: $\lim\limits_{x \to a} k =$ k
- **P2.** $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] =$ $L_1 + L_2$
- **P3.** $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] =$ $L_1 - L_2$
- **P4.** $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] =$ $L_1 \cdot L_2$
- **P5.** $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$ $\dfrac{L_1}{L_2}$, com $L_2 \neq 0$

» **Complete** o quadro a seguir enunciando as propriedades P6 a P8 para as funções $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$ tais que $\lim\limits_{x \to a} f_j(x) = L_j$.

P6. $\lim\limits_{x \to a} [f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)] =$ $L_1 + L_2 + ... + L_n$

P7. $\lim\limits_{x \to a} [f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot ... \cdot f_n(x)] =$ $L_1 \cdot L_2 \cdot ... \cdot L_n$

P8. $\lim\limits_{x \to a} [f_1(x)]^n =$ $(L_1)^n$

5

Propriedades dos limites de funções compostas

Encontrei essas informações na(s) página(s) 351.

» **Complete** o quadro a seguir enunciando as propriedades P9 e P10.

Propriedades dos limites de funções compostas

P9. Se $a \in \mathbb{R}$ e f e g são funções reais de variável real tais que existem $f \circ g$, $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} f(g(x))$, então:

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left[\lim_{x \to a} g(x)\right]$$

P10. Seja $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. Se $n \in \mathbb{N}^*$ e $L \geqslant 0$ ou se $n \in \mathbb{N}$, n é ímpar e $L < 0$, temos:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

Resolva os exercícios complementares 6 a 9.

CAD_EST_MAT_CAP 09.indd 96 15.10.10 10:40:25

FUNÇÃO CONTÍNUA

Termos e conceitos

Defina com suas próprias palavras os termos a seguir.

função contínua:

Uma função é contínua em um ponto de abscissa a de seu domínio se, e somente se, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

limite trigonométrico fundamental:

É o nome dado a: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$.

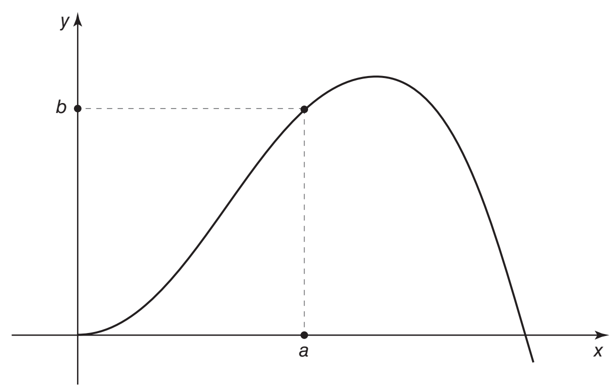
Guia de estudo

1

Outra forma de definição de função contínua em um ponto

Encontrei essas informações na(s) página(s) 355.

Explique com suas palavras, usando o conceito de vizinhança, por que podemos afirmar que a função f, representada no gráfico a seguir, é contínua em a.



Observando o gráfico, pode-se notar que, para qualquer vizinhança completa de $b = f(a)$, $V(f(a))$, existe uma vizinhança reduzida de a, $\overline{V}(a)$, tal que todo elemento x de $\overline{V}(a)$ possui imagem $f(x)$ em $V(f(a))$.

2

Uma sutileza da definição de função contínua

Encontrei essas informações na(s) página(s) 356 e 357.

Responda: Existe função contínua cujo domínio não é um intervalo real? **Justifique** sua resposta com um exemplo.

Uma função cujo domínio D é a reunião de intervalos reais abertos é contínua em D. Por exemplo, a função $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em seu domínio D, pois D é uma reunião de intervalos abertos: $D(f) =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

3 Propriedades das funções contínuas

Encontrei essas informações na(s) página(s) 357.

Complete as propriedades das funções contínuas:

P1. Se f e g são funções contínuas em a, então também são contínuas em a as funções $f - g$, $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$, sendo que em $\frac{f}{g}$ exige-se que $g(a) \neq 0$.

P2. Se as funções f e g são tais que existe $f \circ g$, g é contínua em a e f é contínua em $g(a)$, então $f \circ g$ é contínua em a.

4 Algumas funções contínuas

Encontrei essas informações na(s) página(s) 358.

Com base na lista de funções contínuas encontrada no livro-texto e nas propriedades das funções contínuas, **classifique** as funções a seguir como contínuas (C) ou não contínuas (NC) em seus respectivos domínios.

(c) $f(x) = x^2 + 3x + 2$

(c) $f(x) = 2^x$

(c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

(c) $f(x) = 2\cos x$

(c) $f(x) = \log_2 (x^2 + 1)$

(c) $f(x) = \frac{x}{x - 2}$

Resolva os exercícios complementares 10 e 11.

5 Cálculo do limite de uma função descontínua ou não definida no ponto

Encontrei essas informações na(s) página(s) 360 e 361.

Numere de 1 a 4 os quadrinhos a seguir **ordenando** os procedimentos para calcular o limite abaixo e **complete** as etapas da resolução.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$$

[3] Calcula-se o limite da expressão fatorada.

$\lim_{x \to 3} \frac{(x - 2)}{(x + 3)} = \frac{3 - 2}{3 + 3} = \frac{1}{6}$

[1] Fatora-se o numerador e o denominador da fração algébrica.

$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x + 3)(x - 3)}$

2 Simplifica-se a expressão fatorada.

$\lim\limits_{x \to 3} \frac{(x-2)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{(x-2)}{(x+3)}$

4 Iguala-se o limite da expressão fatorada ao da expressão original.

$\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{(x-2)}{(x+3)} = \frac{1}{6}$

Resolva os exercícios complementares 12 e 13.

6 O limite trigonométrico fundamental

Encontrei essas informações na(s) página(s) 363.

Escreva o valor que completa a igualdade a seguir.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

7 Teorema do confronto

Encontrei essas informações na(s) página(s) 363 e 364.

Explique com suas palavras o que afirma o teorema do confronto.

O teorema do confronto afirma que, dada uma vizinhança reduzida de a, $\overline{V}(a)$, contida nos domínios de três funções f, g e h, se $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x, com $x \in \overline{V}(a)$, e existem os limites de f, g e h para x tendendo a a, com $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

8 Consequência do limite trigonométrico fundamental

Encontrei essas informações na(s) página(s) 365.

Complete as consequências do limite trigonométrico fundamental.

$$\lim_{x \to -\frac{m}{k}} \frac{\text{sen }(kx-m)}{kx-m} = 1, \text{ com } \{k, m\} \subset \mathbb{R} \text{ e } k \neq 0.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } kx}{kx} = 1, \text{ com } k \neq 0.$$

Resolva os exercícios complementares 14 a 18.

FECHANDO O CAPÍTULO

» **Liste** os exercícios do livro-texto que você não conseguiu resolver.

resposta pessoal

» Agora **formule** questões que o ajudarão a resolver os exercícios listados acima.

resposta pessoal

» Reúna-se com um colega e peça-lhe que esclareça as dúvidas que você levantou na questão anterior. A seguir, **esclareça** as dúvidas levantadas por ele. Se as dúvidas persistirem, **perguntem** a seu professor.

resposta pessoal

Sintetize

» **Analise** a sequência de exercícios finais do capítulo. **Escreva** em que situações o conceito de limite foi utilizado.

Organizador de estudos

» **Use** a tabela abaixo para acompanhar o progresso de seus estudos. Ao completar cada atividade do *Caderno do estudante* ou revisão do livro-texto, **marque** um X ou **escreva** a data em que realizou a atividade na linha correspondente.

☐ Atividades do *Caderno do estudante* ☐ Livro-texto

Capítulo 9	
Abertura	
Seção 9.1	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Para começar o estudo	
Seção 9.1	
Seção 9.2	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 9.2	
Seção 9.3	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 9.3	
Exercícios complementares	
Exercícios de revisão cumulativa	
Análise da resolução	
Fechando o capítulo	

CAD_EST_MAT_CAP 09.indd 101 15.10.10 10:40:26

PARTE III

Capítulo 10

Introdução ao Cálculo diferencial: derivada de uma função

Para começar o estudo

» **Analise** as situações a seguir e **classifique** as afirmações como verdadeiras [V] ou falsas [F].

Situação I

Todos os dias, uma motorista vai de sua casa ao trabalho com seu carro. Num certo dia, ela demorou 45 minutos para percorrer esse trajeto, que tem 30 km.

ROBERT STEINBARTH/ALAMY/OTHER IMAGES

Situação II

Os carros de Fórmula 1 são preparados para atingir grandes velocidades em um intervalo de tempo muito pequeno. Alguns desses veículos partem de 0 km/h e atingem 320 km/h em apenas 16 segundos.

MURAT BESLER/SHUTTERSTOCK

[V] Na situação I, a velocidade média do automóvel foi de 40 km/h.

[F] Na situação I, pode-se afirmar que a velocidade do automóvel foi a mesma em todo o percurso.

[F] Pode-se afirmar que a velocidade do veículo da situação II aumenta sempre 20 km/h a cada segundo.

[F] Sob uma aceleração constante, o tempo necessário para o veículo da situação II ir de 0 a 160 km/h é diferente do tempo necessário para ir de 160 a 320 km/h.

DERIVADA DE UMA FUNÇÃO EM UM PONTO (TAXA PONTUAL DE VARIAÇÃO)

Termos e conceitos

» **Defina** com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

derivada de uma função em um ponto:

A derivada de uma função *f* em um ponto de abscissa *a* do domínio de *f*, quando existe, é dada por $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

derivadas laterais de uma função em um ponto:

As derivadas laterais de uma função *f* em um ponto de abscissa *a* do domínio de *f*, quando existem, são dadas pelos limites laterais: $f'_+(a) = \lim_{h \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ e $f'_-(a) = \lim_{h \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Guia de estudo

1

Derivada

Encontrei essas informações na(s) página(s) 374.

» **Explique** com suas palavras a relação entre a derivada de uma função num certo ponto e a reta tangente ao gráfico dessa função nesse ponto.

A derivada de uma função num certo ponto de abscissa *a* do domínio de *f*, quando existe, é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico dessa função no ponto de coordenadas $(a, f(a))$.

2

Derivadas laterais

Encontrei essas informações na(s) página(s) 375 e 376.

» **Complete** com termos e expressões matemáticas as afirmações a seguir.

- Uma função *f* é derivável em um intervalo fechado $[a, b]$ do seu domínio se *f* é derivável no intervalo aberto $]a, b[$ e existem $f'_+(a)$ e $f'_-(b)$.

- Existe a derivada de uma função *f* em um ponto de abscissa *k* do domínio de *f* se, e somente se, existem e são iguais as derivadas laterais $f'_+(k)$ e $f'_-(k)$.

Resolva os exercícios complementares 1 a 9.

A FUNÇÃO DERIVADA

Termo e conceito

» **Defina** com suas próprias palavras o termo a seguir.

função derivada de uma função:

A função derivada de uma função f é a função $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, onde $f: A \to \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}$, e $f': E \to \mathbb{R}$, sendo E um subconjunto de A tal que existe $f'(x)$ para todo elemento x de E.

Guia de estudo

1 A função derivada

Encontrei essas informações na(s) página(s) 379.

» **Explique** com as suas palavras o que é a função derivada de uma função f.

Sendo f uma função derivável em um subconjunto E de seu domínio, chama-se função derivada de f aquela que associa cada x de E à derivada $f'(x)$.

2 Derivadas fundamentais

Encontrei essas informações na(s) página(s) 380 a 382.

» **Complete** os quadros com as derivadas de algumas funções.

Derivadas fundamentais

- Derivada da função constante
  $f(x) = k \Rightarrow f'(x) =$ 0
- Derivada da função potência
  $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) =$ nx^{n-1}
- Derivada da função seno
  $f(x) = \text{sen } x \Rightarrow f'(x) =$ $\cos x$
- Derivada da função cosseno
  $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) =$ $-\text{sen } x$

3 Regras de derivação

Encontrei essas informações na(s) página(s) 382 a 384.

» **Complete** os quadros das regras de derivação.

Derivada da soma

$f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Derivada da diferença

$f(x) = u(x) - v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) - v'(x)$

Derivada do produto

$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Derivada do quociente

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

4 Consequências da derivada do quociente

Encontrei essas informações na(s) página(s) 386.

» Aplique, se necessário, a derivada do quociente e **escreva as expressões** que completam as igualdades a seguir.

- $f(x) = x^k \Rightarrow f'(x) = kx^{k-1}$
- $f(x) = \text{tg } x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$
- $f(x) = \text{cotg } x \Rightarrow f'(x) = -\text{cossec}^2 x$
- $f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x \cdot \text{tg } x$
- $f(x) = \text{cossec } x \Rightarrow f'(x) = -\text{cossec } x \cdot \text{cotg } x$

Resolva os exercícios complementares 10, 11 e 29.

5 Derivada da função composta (Regra da cadeia)

Encontrei essas informações na(s) página(s) 387.

» Sejam f e g funções reais de variável real tais que $g(x) = u$. **Escreva** a derivada da função composta $f(g(x))$.

$(f \circ g)'(x) = f'(u) \cdot g'(x)$

Resolva os exercícios complementares 12 e 13.

6 Derivada da função inversa

Encontrei essas informações na(s) página(s) 391.

» **Complete** a definição referente a duas funções f e g, inversas entre si, de variável real.

Se f é contínua em um intervalo aberto I, com $y = f(x)$, para $x \in I$, $g(y)$ $\neq 0$ e g derivável em y, então:

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

7 Derivada da função potência

Encontrei essas informações na(s) página(s) 393.

» **Complete** a igualdade a seguir.

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}} \Rightarrow f'(x) = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q} - 1}$$

8 Derivada da função arco-seno

Encontrei essas informações na(s) página(s) 394.

» **Complete** a igualdade a seguir.

$$f(x) = \text{arcsen } x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

9 Derivada da função arco-cosseno

Encontrei essas informações na(s) página(s) 394 e 395.

» **Complete** a igualdade a seguir.

$$f(x) = \arccos x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

10 Derivada da função arco-tangente

Encontrei essas informações na(s) página(s) 395.

» **Complete** a igualdade a seguir.

$$f(x) = \text{arctg } x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Resolva os exercícios complementares 14 a 16.

CAD_EST_MAT_CAP 10.indd 106 15.10.10 10:41:22

ESTUDO DA VARIAÇÃO DE UMA FUNÇÃO ATRAVÉS DE SUA DERIVADA

Termos e conceitos

Defina com suas próprias palavras os termos a seguir.

valor máximo absoluto de uma função:

É o maior valor que uma função f assume, ou seja, $f(x_M)$ é máximo absoluto se $f(x_M) \geqslant f(x)$, $\forall x \in D(f)$.

valor mínimo absoluto de uma função:

É o menor valor que uma função assume, ou seja, $f(x_m)$ é mínimo absoluto se $f(x_m) \leqslant f(x)$, $\forall x \in D(f)$.

valor máximo relativo de uma função:

É o maior valor que uma função assume em uma vizinhança completa de um número do domínio.

valor mínimo relativo de uma função:

É o menor valor que uma função assume em uma vizinhança completa de um número do domínio.

ponto de inflexão horizontal de uma função:

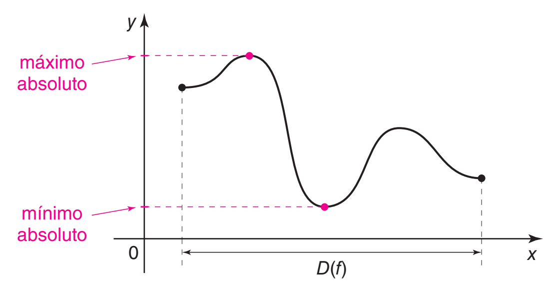
É um ponto de coordenadas $(a, f(a))$ tal que $f'(a) = 0$ e f' não muda de sinal para alguma vizinhança reduzida do número a.

Guia de estudo

1 Máximo e mínimo absoluto

Encontrei essas informações na(s) página(s) 397 e 398.

Analise o gráfico abaixo e **identifique** no eixo Oy o valor máximo absoluto da função f e o valor mínimo absoluto da função f.



2 Máximo relativo e mínimo relativo

Encontrei essas informações na(s) página(s) 398 a 400.

Responda: Qual é a diferença entre máximo relativo e máximo absoluto e entre mínimo relativo e mínimo absoluto de uma função?

Em uma função $y = f(x)$ de domínio D:

- $f(a)$ é um valor máximo relativo de f se $f(a) \geqslant f(x)$, $\forall x \in V(a)$, com $V(a) \subset D(f)$.
- o valor máximo absoluto de f é o maior valor assumido por f quando x assume valores em todo o domínio D.
- $f(b)$ é um valor mínimo relativo de f se $f(b) \leqslant f(x)$, $\forall x \in V(b)$, com $V(b) \subset D(f)$.
- o valor mínimo absoluto de f é o menor valor assumido por f quando x assume valores em todo o domínio D.

3

Extremantes e extremos de uma função

Encontrei essas informações na(s) página(s) 400.

» **Explique** com suas palavras o que é um extremante e o que é um extremo de uma função.

Extremante é o valor da abscissa de um ponto máximo ou mínimo (local ou absoluto) de uma função, enquanto um extremo é a ordenada de um ponto máximo ou mínimo (local ou absoluto).

Resolva o exercício complementar 17.

4

Relação entre o sinal da derivada e a variação de uma função

Encontrei essas informações na(s) página(s) 402 e 403.

» **Complete** o esquema a seguir referente a uma função f derivável em $]a, b[$ e à relação entre o sinal da sua derivada e a variação de f nesse intervalo $]a, b[$.

Sinal da derivada

- $f' > 0$: função crescente
- $f' < 0$: função decrescente

» **Explique** com suas palavras o que é um ponto de inflexão horizontal e explique como ele pode ser identificado no gráfico de uma função.

Um ponto de coordenadas $(a, f(a))$ é chamado de ponto de inflexão horizontal se $f'(a) = 0$, mas o sinal de $f'(x)$ não muda para qualquer x pertencente a uma vizinhança reduzida de a. No gráfico, o ponto de inflexão horizontal pode ser identificado por uma mudança na concavidade do gráfico da função.

Resolva os exercícios complementares 18 a 23.

5

Um teorema auxiliar para a determinação de extremos e de pontos de inflexão

Encontrei essas informações na(s) página(s) 410.

» **Complete** o quadro a seguir referente às derivadas de ordem n de uma função f, derivável até a ordem n, em que a é a raiz de todas as derivadas de f até a ordem $n - 1$ e $f^{(n)}(a) \neq 0$.

Derivada de ordem n

n par e $f^{(n)}(a) < 0$	n par e $f^{(n)}(a) > 0$	n ímpar
a é abscissa de um ponto máximo local de f.	a é abscissa de um ponto mínimo local de f.	a é abscissa de um ponto de inflexão horizontal do gráfico de f.

Resolva os exercícios complementares 24 a 27 e 30.

CAD_EST_MAT_CAP 10.indd 108 15.10.10 10:41:23

APLICAÇÃO DAS DERIVADAS AO ESTUDO DO MOVIMENTO

Termos e conceitos

Defina com suas próprias palavras os termos a seguir.

velocidade escalar média: É a razão entre a distância percorrida por um móvel e o tempo despendido para percorrer essa distância.

velocidade escalar instantânea: É a derivada da função que expressa o espaço de um móvel em função do tempo.

aceleração escalar média: É a razão entre a variação da velocidade escalar de um móvel e o tempo necessário para essa variação.

aceleração escalar instantânea: É a derivada da função que expressa a velocidade de um móvel em função do tempo.

Guia de estudo

1

Velocidade escalar média e velocidade escalar instantânea

Encontrei essas informações na(s) página(s) 412 e 413.

Explique com as suas palavras qual é a diferença entre velocidade escalar média e velocidade escalar instantânea.

A velocidade escalar média é a razão entre a variação do espaço de um móvel e o intervalo de tempo necessário para que ocorra essa variação. Já a velocidade escalar instantânea é o limite da velocidade escalar média quando a medida do tempo tende a zero.

Responda: Se a posição de um móvel, em metro, em função do tempo, em segundo, é dada pela expressão $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$, qual é a velocidade escalar instantânea desse móvel no instante $t = 10$? **Justifique** sua resposta.

A velocidade escalar instantânea no instante pedido é igual a 55 m/s, pois a velocidade desse móvel é dada por $s'(t) = 6t - 5$ e $s'(10) = 55$.

2

Aceleração escalar média e aceleração escalar instantânea

Encontrei essas informações na(s) página(s) 414.

Complete a afirmação a seguir.

Se $v(t)$ é a equação que expressa a velocidade escalar instantânea de um ponto material em função do tempo t, sendo v derivável em t_0, então a aceleração escalar instantânea desse ponto em t_0 é:

$$a(t_0) = v'(t_0)$$

Resolva o exercício complementar 31.

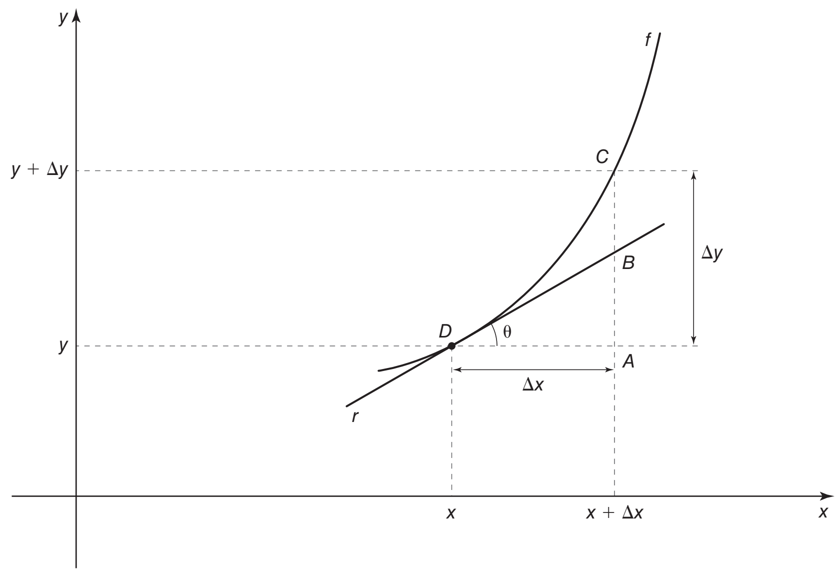
DIFERENCIAL

Guia de estudo

1 Diferencial

Encontrei essas informações na(s) página(s) 416 e 417.

A figura abaixo mostra o gráfico de uma função *f* derivável e a reta *r* tangente ao gráfico no ponto de abscissa *x*.



Complete as lacunas:

- A medida DA é chamada de diferencial da variável x.

  Indicamos esse diferencial por dx, isto é, Δx = dx.

- A medida AB é chamada de diferencial da função f no ponto de abscissa x. Indicamos esse diferencial por dy.

- O diferencial dy pode ser expresso em função de $f'(x)$ e dx por:

  dy = $f'(x) \cdot dx$.

- Para um valor fixo de Δx, se adotamos a aproximação $\Delta y \approx dy$, temos $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$ e, portanto:

  $f(x + \Delta x) \approx f(x) +$ $f'(x)\Delta x$

Resolva o exercício complementar 28.

FECHANDO O CAPÍTULO

» **Liste** os exercícios do livro-texto que você não conseguiu resolver.

resposta pessoal

» Agora **formule** questões que o ajudarão a resolver os exercícios listados acima.

resposta pessoal

» Reúna-se com um colega e peça-lhe que esclareça as dúvidas que você levantou na questão anterior. A seguir, **esclareça** as dúvidas levantadas por ele. Se as dúvidas persistirem, **perguntem** a seu professor.

resposta pessoal

Sintetize

» **Escreva** uma síntese relacionando os conceitos principais aprendidos no capítulo. Você pode optar por fazer um texto que apresenta as ideias principais do capítulo, um esquema que relaciona os conceitos principais, ou uma lista de fórmulas.

Organizador de estudos

» **Use** a tabela abaixo para acompanhar o progresso de seus estudos. Ao completar cada atividade do *Caderno do estudante* ou revisão do livro-texto, **marque** um X ou **escreva** a data em que realizou a atividade na linha correspondente.

☐ Atividades do *Caderno do estudante* ☐ Livro-texto

Capítulo 10	
Abertura	
Seção 10.1	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Para começar o estudo	
Seção 10.1	
Seção 10.2	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 10.2	
Conteúdo digital	
Seção 10.3	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 10.3	
Seção 10.4	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 10.4	
Exercícios complementares	
Exercícios de revisão cumulativa	
Análise da resolução	
Fechando o capítulo	