FUNÇÕES VII

Vértice da parábola:

Nos gráficos ilustrados acima se vê que a parábola tem um ponto cujo valor de Y é mínimo, pois a é positivo, ao qual chamamos de ponto de mínimo. Caso "a" fosse positivo chamaríamos de ponto de máximo. Esse ponto também é chamado de vértice da parábola! E é muito importante conhecermos esse ponto, visto que pode ser importante saber o valor de mínimo e o valor de máximo de uma função.

Esse ponto possui a coordenada X e a coordenada Y. E ela pode ser calculada pelas fórmulas abaixo:

$$Xv = -\frac{b}{2.a}$$

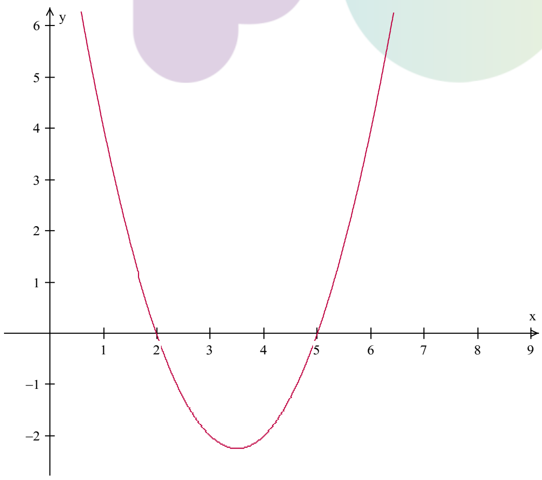
$$Yv = -\frac{\Delta}{4.a}$$

Sendo a e b os coeficientes da equação e $\Delta = b^2 - 4.a.c$, que é o mesmo valor que fica dentro da raiz na fórmula de Bháskara.

Um exemplo a seguir mostrará melhor como calcular.

Exemplo:

Ache o vértice da parábola de equação $y = x^2 - 7x + 10$:



Já desenhamos o gráfico dessa equação. Agora iremos calcular as coordenadas do vértice.

Os coeficientes são: $a = 1, b = -7\ e\ c = 10$

Calculando Δ:

$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-7)^2 - 4.1.10 = 9$

Então:

$$Xv = -\frac{b}{2.a} = -\frac{-7}{2.1} = \frac{7}{2}$$

$$Yv = -\frac{\Delta}{4.a} = -\frac{b^2-4.a.c}{4.a} = -\frac{9}{4}$$

Portanto temos o ponto que representa o vértice da parábola:

$$V(Xv, Yv) = \left(\frac{7}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$

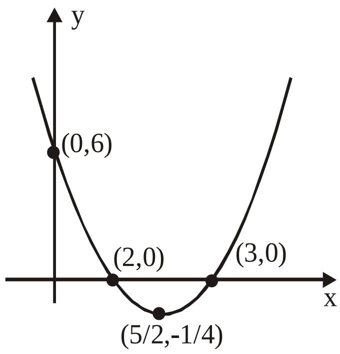
Cálculo da função de segundo grau dado o gráfico:

Nessa segunda parte iremos construir a equação da função dado o gráfico. Precisamos então gravar o seguinte conceito. Toda função $y = a.x^2 + b.x + c$ pode também ser escrita de outra forma:

$$y = a.x^2 + b.x + c = a.(x - x1).(x - x2)$$

Em que x1 e x2 são os zeros da função, ou as raízes a equação e o termo "a" é o termo que multiplica o x².

Vejamos um exemplo:



Pelo gráfico vemos que no ponto x=2 e no ponto x=3 a função vale 0, portanto são zeros da função:

$$y = a.(x - x1).(x - x2) = a.(x - 2).(x - 3) = a.(x^2 - 6.x + 6) = ax^2 - 5.a.x + 6.a$$

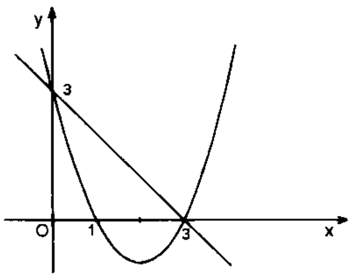
Para que nossa equação fique completa, precisamos achar o termo "a".

O gráfico intercepta o eixo Y no ponto y=6 e sempre será igual ao termo "c".

Então $6.a = 6$

Portanto a=1 e a equação fica: $y = 1(x - 3)(x - 2) = x^2 - 5x + 6$

Exemplo 2:



Nesse caso podemos escrever a equação da seguinte forma:

$y = ax^2 + b.x + c = a.(x - x1).(x - x2)$

As raízes da equação são x = 1 e x = 3.

Portanto:

$y = a.(x - 1).(x - 3)$

Precisamos encontrar o valor de "a". Para isso, sabemos que o gráfico intercepta o eixo Y no ponto y = 3. Isso é, o termo c da equação vale 3.

$y = a.(x^2 - 4x + 4) = a.x^2 - 4.a.x + 3.a$

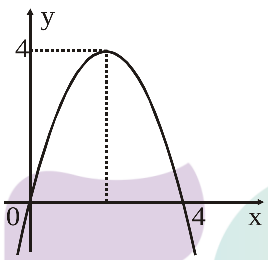
O termo c nesse caso é 4.a:

3 = 3.a

$a = 1$ E a equação fica:

$y = x^2 - 4x + 3$

Exemplo 3:



Pelo gráfico os zeros da função são x = 0 e x = 4. A equação fica da forma:

$y = -a.x^2 + b.x + c = a.(x - 0).(x - 4)$ (Não esquecer de colocar o "a" negativo pois a concavidade é para baixo!

Então:

$y = a.(x^2 - 4x) = a.x^2 - 4.a.x$

Então o termo a = a e o termo b = -4.a

O termo c nesse caso não podemos utilizar pois é 0. Então vamos utilizar a coordenada do Y vértice que foi dada no gráfico quando Y=4.

Calculando o Δ:

$\Delta = b^2 - 4.a.c = b^2 - 4.a.0 = b^2$

$Yv = -\frac{\Delta}{4.a} = -\frac{b^2}{4.a} = -\frac{(-4a)^2}{4.a} = -\frac{16a^2}{4a} = -4a$

Sabendo-se que o Yv = 4:

$4 = -4.a$

Portanto a =- 1

A equação é escrita:

$y = -x^2 + 4x$

Valor máximo e Valor mínimo:

O valor máximo e o valor mínimo de uma função do segundo grau estão ligados com o vértice da parábola.

Se o coeficiente a>0, a parábola terá concavidade para cima e assim terá um ponto de mínimo, ou seja, terá um valor mínimo (Yv) e um valor que proporciona o ponto de mínimo (Xv).

Já se a parábola tiver o coeficiente a <0, a parábola terá concavidade para baixo e terá um ponto de máximo, ou seja, terá um valor máximo (Yv) e um valor que proporciona um valor máximo (Xv).

Exemplo:

Calcule o valor mínimo da função $y = x^2 - 6x + 8$.

Nesse exemplo, como o coeficiente "a" da função é positivo, portanto tem um ponto de mínimo. O valor mínimo que a função assume é o valor do Yv.

Sendo os coeficientes $a = 1, b = -6 \ e \ c = 8$

Primeiro calculemos o Δ:

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = (-6)^2 - 4.1.8 = 36 - 32 = 4$

Agora precisamos lembrar a fórmula do Yv:

$Yv = -\frac{\Delta}{4.a}$

$Yv = -\frac{4}{4.1} = -1$

Portanto, o valor mínimo que a função assume é y=1.

Exercício:

Para a função $y = -3x^2 + 2x + 1$, assinale a alternativa CORRETA.

a) (0, 1) são as coordenadas do ponto de mínimo.

b) A função assume o seu valor máximo para $x = -\frac{1}{3}$.

c) $\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$ são as coordenadas do ponto de máximo.

d) $\left(-\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$ são as coordenadas do ponto de mínimo.

e) A função não tem máximo e nem mínimo.

Vamos analisar os itens:

F a) Como o coeficiente "a" é negativo, a função possui somente ponto de máximo. O ponto de máximo é dado pelas coordenadas do vértice da parábola.

Os coeficientes da equação são:

$a = -3, b = 2, c = 1$

Cálculo do Δ:

$\Delta = b^2 - 4.a.c = 2^2 - 4.-3.1 = 16$

$Xv = -\frac{b}{2.a} = -\frac{2}{2.(-3)} = \frac{1}{3}$

$Yv = -\frac{\Delta}{4.a} = -\frac{16}{4.(-3)} = \frac{4}{3}$

Portanto o ponto de máximo é $V = \left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$

F b) A função assume seu valor máximo quando $x = \frac{1}{3}$ como calculado no item a.

V c) Como calculamos no item a) o ponto de máximo é $V = \left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$

F d)A função não possui ponto de mínimo.

F e) A função possui apenas ponto de máximo.

Exercício:

O lucro de uma microempresa, em função do número de funcionários que nela trabalham, é dado, em milhares de reais, pela fórmula $L(n) = 36n - 3n^2$. Com base nessas informações, pode-se afirmar que o lucro dessa microempresa é máximo quando nela trabalham:

Essa questão relaciona uma equação do segundo grau do lucro em função dos funcionários que trabalham. A equação apresentada tem o coeficiente "a" negativo que acompanha o x², portanto, tem um ponto de máximo. O número de funcionários é representado pela letra X, então o número de funcionários para que o lucro seja máximo é representado pelo valor do Xv.

Os coeficientes são:

$a = -3, b = 36, c = 0$

E o X vértice é calculado pela expressão:

$$Xv = -\frac{b}{2.a} = -\frac{36}{2.(-3)} = 6$$

Então podemos concluir que o lucro máximo da empresa se dá quando o número de funcionários é igual a 6.