OBJETIVO

ITA

Matemática

Livro do Professor

6

MÓDULO 21

Equações

1. **(ITA)** – Suponhamos que "p" e "q" são catetos de um triângulo retângulo e "h", a altura relativa à hipotenusa dele. Nestas condições, podemos afirmar que a equação:

$$\frac{2}{p}x^2 - \frac{2}{h}x + \frac{1}{q} = 0$$

($\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais)

a) não admite raízes reais.

b) admite uma raiz da forma $m\sqrt{-1}$, em que $m \in \mathbb{R}$ e $m > 0$.

c) admite sempre raízes reais.

d) admite uma raiz da forma $-m\sqrt{-1}$, $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

e) nada se pode afirmar.

RESOLUÇÃO:

$$\Delta = \left(-\frac{2}{h}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{p} \cdot \frac{1}{q} = \frac{4}{h^2} - \frac{8}{pq} =$$

$$= \frac{4}{h^2} - \frac{8}{ah} = \frac{4a - 8h}{ah^2} = \frac{4(a - 2h)}{ah^2}$$

Como $\frac{a}{2} \geq h \Leftrightarrow a - 2h \geq 0$, tem-se $\Delta \geq 0$, pois $a, h \in \mathbb{R}_+^*$, logo a equação admite sempre raízes reais.

Resposta: C

2. **(ITA)** – O conjunto de todos os valores de α, $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, tais que as soluções da equação (em x) $x^4 - \sqrt[4]{48}\,x^2 + \text{tg}\,\alpha = 0$ são todas reais, é

a) $\left[-\frac{\pi}{3}; 0\right]$ b) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ c) $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$

d) $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ e) $\left[\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{3}\right]$

RESOLUÇÃO:

A equação $x^4 - \sqrt[4]{48}\,x^2 + \text{tg}\,\alpha = 0$ só admite raízes reais se a equação $y^2 - \sqrt[4]{48}\,y + \text{tg}\,\alpha = 0$, na qual $y = x^2$, só admitir raízes reais e positivas. Assim sendo,

$$\Delta = \left(-\sqrt[4]{48}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \text{tg}\,\alpha \geq 0 \text{ e } \text{tg}\,\alpha \geq 0 \Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha \leq \sqrt{3} \text{ e } \text{tg}\,\alpha \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \text{tg}\,\alpha \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}, \text{ pois } \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

Resposta: D

2. Determine a soma e o produto das raízes inteiras da equação $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 6) = 210x^2$

RESOLUÇÃO:

Observe que 2 . 6 = 3 . 4 e que *zero* não é raiz da equação.

$(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 6) = 210x^2 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 + 8x + 12)(x^2 + 7x + 12) = 210x^2$

$\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{12}{x} + 8\right)\left(x + \dfrac{12}{x} + 7\right) = 210$

Fazendo-se $x + \dfrac{12}{x} = y$, **tem-se**

$(y + 8)(y + 7) = 210 \Leftrightarrow y^2 + 15y - 154 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 7$ **ou** $y = -22 \Leftrightarrow x + \dfrac{12}{x} = 7$ **ou** $x + \dfrac{12}{x} = -22 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$ **ou** $x^2 + 22x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3, x = 4, x = -11 + \sqrt{109}$ **ou** $x = -11 - \sqrt{109}$

A soma das raízes inteiras é 7 e o produto é 12.

4. Dois operários, A e B, trabalham um mesmo número de dias. Se A trabalhasse dois dias a mais e B trabalhasse três dias a menos, A teria ganho R$ 108,00 e B teria ganho R$ 72,00. Por outro lado, se A trabalhasse três dias a menos e B dois dias a mais, juntos teriam ganho R$ 210,00. Quanto ganhou cada um e quantos dias trabalharam?

RESOLUÇÃO:

Sendo a e b o ganho de cada um e d o número de dias trabalhados, tem-se: $\dfrac{a}{d}$ **e** $\dfrac{b}{d}$ **os ganhos diários de A e B, respectivamente.**

Assim sendo,

$$\left\{\begin{array}{l} (d+2)\dfrac{a}{d} = 108 \Leftrightarrow \dfrac{(d+2)}{d} = \dfrac{108}{a} \\ (d-3)\dfrac{b}{d} = 72 \Leftrightarrow \dfrac{(d-3)}{d} = \dfrac{72}{b} \\ (d-3)\dfrac{a}{d} + (d+2)\dfrac{b}{d} = 210 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{72}{b} . a + \dfrac{108}{a} . b = 210 \Leftrightarrow \dfrac{12a}{b} + \dfrac{18b}{a} = 35$

Fazendo $\dfrac{a}{b} = x$, **tem-se** $12x + \dfrac{18}{x} = 35 \Rightarrow$

$\Rightarrow 12x^2 - 35x + 18 = 0$, **pois** $x \neq 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$ **ou** $x = \dfrac{9}{4}$

Desta forma, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{3}$ **ou** $\dfrac{a}{b} = \dfrac{9}{4}$.

Dividindo-se a primeira pela segunda equação, temos:

$$\frac{(d+2)\dfrac{a}{d}}{(d-3)\dfrac{b}{d}} = \frac{108}{72} \Leftrightarrow \frac{(d+2)}{(d-3)} . \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$$

Portanto

$$\frac{(d+2)}{(d-3)} . \frac{2}{3} = \frac{3}{2} \text{ ou } \frac{(d+2)}{(d-3)} . \frac{9}{4} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(d+2)}{(d-3)} = \frac{9}{4} \text{ ou } \frac{(d+2)}{(d-3)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow d = 7$ **ou** $d = -12$ **(impossível)**

Para d = 7, tem-se $\dfrac{7+2}{7} = \dfrac{108}{a} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 84$ **e** $\dfrac{7-3}{7} = \dfrac{72}{b} \Rightarrow b = 126$

Resposta: A ganhou R$ 84,00, B ganhou R$ 126,00 e trabalharam 7 dias.

MÓDULO 22

Equações

1. A soma e o produto das raízes reais da equação

$$\sqrt{x^2 - 3} + \frac{6}{x^2 - 10} = 0$$ são, respectivamente:

a) 2 e 10 b) 1 e 14 c) 0 e 28
d) – 3 e 30 e) – 4 e 36

RESOLUÇÃO:

Fazendo $\sqrt{x^2 - 3} = y$, tem-se $y \geq 0$ e $x^2 - 3 = y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 10 = y^2 - 7$. Substituindo na equação, tem-se

$y + \dfrac{6}{y^2 - 7} = 0 \Rightarrow y^3 - 7y + 6 = 0$, para $y \neq \pm\sqrt{7}$

Observando que y = 1 é solução, tem-se, por fatoração:

$y^3 - y^2 + y^2 - y - 6y + 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2(y - 1) + y(y - 1) - 6(y - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y - 1)(y^2 + y - 6) = 0 \Leftrightarrow y = 1, y = 2$ ou $y = -3$ (não serve)

Assim sendo

$\sqrt{x^2 - 3} = 1$ ou $\sqrt{x^2 - 3} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 4$ ou $x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \pm 2$ ou $x = \pm\sqrt{7}$

A soma das raízes é $2 + (-2) + \sqrt{7} + (-\sqrt{7}) = 0$ e o produto é $2 \,.\, (-2) \,.\, \sqrt{7} \,.\, (-\sqrt{7}) = 28$

Resposta: C

2. **(ITA)**

a) Mostre que o número real

$\alpha = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ é raiz da equação

$x^3 + 3x - 4 = 0$

b) Conclua de (a) que α é um número racional.

RESOLUÇÃO:

a) $\begin{cases} P(x) = x^3 + 3x - 4 \\ \alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(\alpha) = \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^3 +$$

$$+ 3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(\alpha) = 2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} +$$

$$+ 3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \,.\, \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)(\alpha) + 3 \,.\, \alpha - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(\alpha) = 4 + 3\sqrt[3]{4-5} \,.\, \alpha + 3\alpha - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(\alpha) = 4 - 3\alpha + 3\alpha - 4 \Leftrightarrow P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha \text{ é raiz de P} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha \text{ é raiz da equação } x^3 + 3x - 4 = 0$$

b) 1)

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x - 4 & x - 1 \\ \hline 0 & x^2 + x + 4 \end{array} \Leftrightarrow x^3 + 3x - 4 =$$

$$= (x - 1) \,.\, (x^2 + x + 4)$$

2) $x^3 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \,.\, (x^2 + x + 4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $x^2 + x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{15}\, i}{2}$

3) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \in \mathbb{R}, \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$

4) A única raiz real da equação $x^3 + 3x - 4 = 0$ é 1.

5) Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e α é raiz de $x^3 + 3x - 4 = 0$, então $\alpha = 1$ e, portanto, α é racional.

3. Dois recipientes iguais de 30 litros de capacidade cada um contêm um total de 30 litros de álcool. O primeiro recipiente é completado até a borda com água e com a mistura obtida se completa o segundo recipiente. 12 litros desta mistura são então devolvidos ao primeiro recipiente. O segundo recipiente fica com 2 litros de álcool a menos que o primeiro. Quantos litros de álcool tinha inicialmente cada recipiente?

RESOLUÇÃO:
A tabela mostra o que está ocorrendo com a quantidade de álcool:

	Inicialmente	passou x ℓ de mistura	ficou	passou 12 ℓ para o primeiro	ficou
recipiente I	x	$\frac{x}{30} \cdot x$	$x - \frac{x^2}{30}$		$\left(x - \frac{x^2}{30}\right) + \frac{(30-x) + \frac{x^2}{30}}{30} \cdot 12$
recipiente II	$30 - x$		$(30-x) + \frac{x^2}{30}$	$\frac{(30-x) + \frac{x^2}{30}}{30} \cdot 12$	$(30-x) + \frac{x^2}{30} - \frac{(30-x) + \frac{x^2}{30}}{30} \cdot 12$

Assim:

$$\left(x - \frac{x^2}{30}\right) + \left(\frac{(30-x) + \frac{x^2}{30}}{30} \cdot 12\right) = (30-x) + \frac{x^2}{30} - \frac{(30-x) + \frac{x^2}{30}}{30} \cdot 12 + 2$$

, pois o primeiro tem 2 litros de álcool a mais que o segundo.

$$x - \frac{x^2}{30} + \frac{60}{5} - \frac{2x}{5} + \frac{x^2}{75} = 30 - x + \frac{x^2}{30} - \frac{60}{5} + \frac{2x}{5} - \frac{x^2}{75} + 2 \Rightarrow 6x^2 - 180x + 1200 = 0 \Rightarrow x = 10 \text{ ou } x = 20$$

Resposta: Os recipientes tinham 10 ℓ e 20 ℓ de álcool.

4. Em certo instante um relógio marca 2 minutos a menos do que deveria marcar, no entanto anda adiantado. Se adiantasse meio minuto a mais por dia do que adianta, e estivesse marcando 3 minutos a menos do que seria correto, marcaria a hora certa um dia antes do que marca. Quantos minutos por dia adianta esse relógio?

RESOLUÇÃO:

Se o relógio adianta x minutos por dia, marcaria a hora certa em $\frac{2}{x}$ dias.

Se o relógio adianta $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ minutos por dia, marcaria a hora certa em $\dfrac{3}{x + \frac{1}{2}}$ dias.

Como neste caso marcaria a hora certa um dia antes, temos:

$$\frac{3}{x + \frac{1}{2}} = \frac{2}{x} - 1 \Leftrightarrow \frac{6}{2x + 1} = \frac{2 - x}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x + 1).(2 - x) = 6x \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -2$$

O valor negativo não faz sentido, pois o enunciado diz que o relógio adianta.
Respostas: O relógio adianta 0,5 minuto por dia.

MÓDULO 23

Equações

1. Resolver, em R, a equação
$(x - 1)^3 + (x + 3)^3 = 42\ (x + 1)$.

RESOLUÇÃO:

Fazendo-se $y = \dfrac{(x - 1) + (x + 3)}{2} = x + 1$,

tem-se:
$(y - 2)^3 + (y + 2)^3 = 42\,y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y^3 - 6y^2 + 12y - 8 + y^3 + 6y^2 + 12\,y + 8 = 42\,y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2y^3 - 18y = 0 \Leftrightarrow y = 0, y = 3$ ou $y = -3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x + 1 = 0, x + 1 = 3$ ou $x + 1 = -3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = -1, x = 2$ ou $x = -4$
Respostas $V = \{-4, -1, 2\}$

2. Determine o conjunto solução, em $\mathbb{R}$, da equação $(x + 2).(x + 3).(x + 8).(x + 12) = 4x^2$.

RESOLUÇÃO:

Multiplicando os fatores centrais e os fatores do extremo e observando que zero não é raiz da equação, temos:
$(x + 2).(x + 3).(x + 8).(x + 12) = 4x^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x^2 + 14x + 24).(x^2 + 11x + 24) = 4x^2$
Dividindo cada fator por x e fazendo $x = \frac{24}{x} = y$ temos:

$$\left(x + 14 + \frac{24}{x}\right) . \left(x + 11 + \frac{24}{x}\right) = 4 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (y + 14).(y + 11) = 4 \Leftrightarrow y = -15$ ou $y = -10$.

Assim, $x + \frac{24}{x} = -15$ ou $x + \frac{24}{x} = -10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 15x + 24 = 0$ ou $x^2 + 10x + 24 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-15 - \sqrt{129}}{2} \text{ ou } x = \frac{-15 + \sqrt{129}}{2} \text{ ou } x = -4 \text{ ou } x = -6$$

Respostas: $\left\{\dfrac{-15 - \sqrt{129}}{2}, \dfrac{-15 + \sqrt{129}}{2}, -4, -6\right\}$

3. Encontre uma equação do segundo grau com coeficientes racionais que possui uma raiz igual a $\sqrt{15} - 7$.

RESOLUÇÃO:
Seja $x^2 + px + q = 0$ a equação procurada. Se $\sqrt{15} - 7$ é raiz dessa equação, então $(\sqrt{15} - 7)^2 + p(\sqrt{15} - 7) + q = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (64 - 7p + q) + (p - 14) \,.\, \sqrt{15} = 0$. Como *p* e *q* são racionais, $(64 - 7p + q)$ e $(p - 14)$ também são racionais e, portanto, iguais a zero.

$$\begin{cases} 64 - 7p + q = 0 \\ p - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow p = 14 \text{ e } q = 34$$

e a equação procurada é $x^2 + 14x + 34 = 0$
Respostas: $x^2 + 14x + 34 = 0$.

MÓDULO 24

Equações

1. Um trem parte da estação **A** em direção a estação **B** às 13h, com velocidade constante. As 19h chegou a um ponto da estrada onde havia caído uma barreira e foi obrigado a ficar parado por **duas** horas. Para recuperar o tempo perdido, o maquinista percorre o trecho restante a uma velocidade 20% maior, mas, apesar disso, chegou **uma hora** atrasado. No dia seguinte outro trem que se dirigia de **A** para **B**, com a mesma velocidade inicial do primeiro, teve que parar 150 km além do que o ponto onde o primeiro parou. Também ficou parado por duas horas e também aumentou a velocidade em 20%, mas mesmo assim chegou **uma hora e meia** atrasado. Determine a distância entre **A** e **B**.

RESOLUÇÃO:
Sendo *d* a distância, em quilômetros, entre as duas estações e *v*, em quilômetros por hora, a velocidade inicial do trem e lembrando que $v + 20\%.v = v \,.\, \frac{20}{100} v = \frac{6v}{5}$ temos:

a) o trem levaria $\frac{d}{v}$ horas para ir de A até B.

b) à distância percorrida antes do primeiro trem parar foi 6v km, pois o trem circulou por 6 horas. O trecho final mede (d-6v) km e para percorre o trem levou $\dfrac{d - 6v}{\frac{6v}{5}} = \dfrac{5d - 30v}{6v}$ horas.

c) o primeiro trem levou, portanto,
$$6 + 2 + \frac{5d - 30v}{6v} = \frac{d}{v} + 1 \text{ horas para ir de A a B.}$$

d) o segundo trem percorreu (6v + 150) km antes de parar e levou $\frac{6v + 150}{v}$ horas para percorrer esta distância. O trecho restante, de (d-6v-150) km, foi percorrido em
$$\frac{d - 6v - 150}{\frac{6v}{5}} = \frac{5d - 30v - 750}{6v}$$

e) o segundo trem levou, portanto,
$$\frac{6v + 150}{v} + 2 + \frac{5d - 30v - 750}{6v} = \frac{d}{v} + \frac{3}{2} \text{ horas para ir}$$
de A a B. Assim, temos:

$$\begin{cases} 6 + 2 + \dfrac{5d - 30v}{6v} = \dfrac{d}{v} + 1 \\ \dfrac{6v + 150}{v} + 2 + \dfrac{5d - 30v - 750}{6v} = \dfrac{d}{v} + \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 48v + 5d - 30v = 6d + 6v \\ 36v + 900 + 12v + 5d - 30v - 750 = 6d + 9v \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 12v \\ d = 9v + 150 \end{cases} \Leftrightarrow v = 50 \text{ e } d = 600$$

Respostas: A distância entre A e B é 600 km.

2. De um porto fluvial partem ao mesmo tempo e rio abaixo uma balsa e um bote. O bote navega com auxílio de remadores e com velocidade constante em relação às águas do rio. A balsa esta a deriva e segue na velocidade da correnteza, que também é constante. O bote, depois de percorrer 96 km rio abaixo, volta e chega no porto 14 horas depois da partida. Em seu caminho de volta o bote encontra a balsa a 24 km do porto. Qual a velocidade do bote e da correnteza?

RESOLUÇÃO:
Sejam v_b e v_r as velocidades do bote em relação da água e da correnteza do rio.

O bote navegou durante $\dfrac{96}{v_b + v_r} + \dfrac{96}{v_b - v_r} = 14$ horas até retornar ao porto. Até o encontro com a balsa, o bote havia navegado durante $\dfrac{96}{v_b + v_r} + \dfrac{72}{v_b - v_r} = \dfrac{24}{v_r}$

Dessa última equação, fazendo $\dfrac{v_b}{v_r} = x$ temos:

$$\frac{96}{v_b + v_r} + \frac{72}{v_b - v_r} = \frac{24}{v_r} \Leftrightarrow \frac{96}{\dfrac{v_b}{v_r} + 1} + \frac{72}{\dfrac{v_b}{v_r} - 1} = 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{96}{x+1} + \frac{72}{x-1} = 24 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 4 \,.\, (x-1) + 3 \,.\, (x+1) = (x+1) \,.\, (x-1) \Leftrightarrow x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x = 7$, pois $x \neq 0$.
Assim, $v_b = 7.v_r$ e, da equação

$\dfrac{96}{v_b + v_r} + \dfrac{96}{v_b - v_r} = 14$ temos:

$$\frac{96}{8v_r} + \frac{96}{6v_r} = 14 \Leftrightarrow \frac{12}{v_r} + \frac{16}{v_r} = 14 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow v_r = 2$, portanto, $v_b = 14$.

Respostas: 14 km/h e 2 km/h.

3. Dois ciclistas pedalam em uma mesma direção por uma pista circular de 280 m de raio. Um deles faz uma volta completa 8s mais rápido que o segundo. Qual a velocidade, em metros por segundo, de cada um, se o tempo entre dois encontros consecutivos deles é de 70 segundos?

RESOLUÇÃO:
Em metros, o comprimento da pista é de $2.\pi.280 = 560\pi$. Se as velocidades de cada ciclista, em metros por segundo, for respectivamente, v_1 e v_2, com $v_1 > v_2$, então os tempos, em segundos, para cada um dar uma volta completa na pista são $\dfrac{560\pi}{v_1}$ e $\dfrac{560\pi}{v_2}$

e, portanto $\dfrac{560\pi}{v_2} - \dfrac{560\pi}{v_1} = 8$.

Entre um encontro e o encontro seguinte o ciclista mais rápido dá uma volta a mais na pista. Como um se distancia do outro a uma velocidade $(v_1 - v_2)$, então $(v_1 - v_2) \,.\, 70 = 560\pi \Leftrightarrow v_1 - v_2 = 8\pi$
Desta forma

$$\begin{cases} \dfrac{560\pi}{v_2} - \dfrac{560\pi}{v_1} = 8 \\ v_1 - v_2 = 8\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 560\pi(v_1 - v_2) = 8 \,.\, v_1 \,.\, v_2 \\ v_1 - v_2 = 8\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 560\pi\,(8\pi + v_2 - v_2) = 8 \,.\, (8\pi + v_2) \,.\, v_2 \\ v_1 = 8\pi + v_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1^2 + 8\pi\, v_2 - 560\pi^2 = 0 \\ v_1 = 8\pi + v_2 \end{cases}$$

Assim, $v_2^2 + 8\pi v^2 - 560\pi^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow v_2 = \frac{-8\pi \pm \sqrt{(8\pi)^2 - 4 \,.\, 1\,(-560\pi^2)}}{2} = \frac{-8\pi \pm 48\pi}{2} \Leftrightarrow v_2 = 20\pi,$$

pois $v_2 > 0$. Desta forma $v_1 = 28\pi$.
Respostas: As velocidades dos ciclistas são 28π e 20π, metros por segundo.

exercícios-tarefa

■ MÓDULO 21

1. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação
$(2x^2 - 3x + 1).(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$.

2. Um carteiro que se dirige sem parar do ponto **A** ao ponto **C** passando pelo ponto **B**, caminha de **A** à **B** com velocidade de 3,5 km/h e de **B** para **C** com velocidade de 4 km/h. Para conseguir retornar de **C** para **A** no mesmo tempo, pelo mesmo caminho, deve desenvolver 3,75 km/h em todo o trajeto. Se, no entanto, ao retornar com a velocidade indicada ao ponto **B**, se detêm nesse ponto por 14 minutos, para regressar ao ponto **A** no tempo previsto deverá percorrer o trecho de **B** à **A** com velocidade de 4 km/h. Calcule as distâncias entre os pontos **A**, **B** e **C**.

■ MÓDULO 22

1. **(ITA-adaptado)** – A respeito da equação
$3x^2 - 4x + \sqrt{3x^2 - 4x - 6} = 18$, podemos dizer que

a) $\dfrac{2 \pm \sqrt{70}}{3}$ são raízes.

b) a única raiz é x = 3.

c) a única raiz é $x = 2 + \sqrt{10}$.

d) tem duas raízes reais distintas.

e) tem raízes reais iguais.

2. Duas torneiras são utilizadas para encher uma piscina. Estando totalmente vazia, abre-se a primeira torneira por um terço do tempo que a segunda torneira seria capaz de encher a piscina sozinha. Fecha-se a primeira torneira e abre-se a segunda torneira por um terço do tempo necessário para a primeira torneira encher a piscina sozinha. Dessa forma, foram preenchidos $\dfrac{13}{18}$ da piscina. Calcular o tempo necessário para cada torneira encher a piscina sozinha, sabendo-se que, juntas, enchem-na em 3 horas e 36 minutos.

■ MÓDULO 23

1. **(ITA)** – Uma empresa possui 1000 carros, sendo uma parte com motor a gasolina e o restante com motor "flex" (que funciona com álcool e com gasolina). Numa determinada época, neste conjunto de 1000 carros, 36% dos carros com motor a gasolina e 36% dos carros com motor "flex" sofrem conversão para também funcionar com gás GNV. Sabendo-se que, após esta conversão, 556 dos 1000 carros desta empresa são bicombustíveis, pode-se afirmar que o número de carros tricombustíveis é igual a

a) 246. b) 252. c) 260. d) 268. e) 284.

2. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação
$(x + 1)^3 + (x - 3)^3 = 32(x - 1)$

3. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $(6 - x)^4 + (8 - x)^4 = 16$.

■ MÓDULO 24

1. Segundo o previsto um trem deve passar o trecho AB de 20 km a uma velocidade constante. A primeira vez que faz este trajeto, o trem percorre a metade do trecho nessa velocidade, para por 3 minutos e, para chegar no horário previsto, percorre a outra metade a uma velocidade 10 km/h superior. Na segunda vez, o trem para na metade do caminho por 5 minutos. A que velocidade deve percorrer a segunda metade para chegar no horário previsto?

2. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $x.(x + 1).(x - 1).(x + 2) = 24$.

resolução dos exercícios-tarefa

■ MÓDULO 21

1) Dividindo cada fator por x e fazendo $2x + \dfrac{1}{x} = y$ temos:

$$(2x^2 - 3x + 1).(2x^2 + 5x - 1) = 9x^2$$

$$\left(2x + 3 + \frac{1}{x}\right).\left(2x + 5 + \frac{1}{x}\right) = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y - 3).(y + 5) = 9 \Leftrightarrow y = -6 \text{ ou } y = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{1}{x} = -6 \text{ ou } 2x + \frac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 6x + 1 = 0 \text{ ou } 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 - \sqrt{7}}{2}, x = \frac{-3 + \sqrt{7}}{2},$$

$$x = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

Resposta:

$$\left\{ \frac{-3 - \sqrt{7}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{7}}{2}, \frac{2 - \sqrt{2}}{2}, \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right\}$$

2) Se x e y são as distâncias entre A e B e entre B e C, respectivamente. Os tempos gastos de ida, em horas, foram $\dfrac{x}{3,5}$ e $\dfrac{y}{4}$, respectivamente e o tempo previsto de retorno, também em horas, é de $\dfrac{x+y}{3,75}$. Desta forma, como os tempos são iguais, $\dfrac{x+y}{3,75} = \dfrac{x}{3,5} + \dfrac{y}{4}$

O tempo real gasto na volta, também em horas foi

$\dfrac{x+y}{3,75} = \dfrac{y}{3,75} + \dfrac{14}{60} + \dfrac{x}{4}$.

Assim,

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{3,75} = \dfrac{x}{3,5} + \dfrac{y}{4} \\ \dfrac{x+y}{3,75} = \dfrac{y}{3,75} + \dfrac{14}{60} + \dfrac{x}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4x+4y}{15} = \dfrac{2x}{7} + \dfrac{y}{4} \\ \dfrac{4x+4y}{15} = \dfrac{4y}{15} + \dfrac{14}{60} + \dfrac{x}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 112x + 112y = 120x + 105y \\ 16x + 16y = 16y + 14 + 15x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 7y \\ x = 14 \end{cases} \Leftrightarrow x = 14 \text{ e } y = 16$$

Resposta: De A para B temos 14 km e de B para C temos 16 km.

■ MÓDULO 22

1) Fazendo $3x^2 - 4x = y$, tem-se

(I) $y + \sqrt{y-6} = 18 \Leftrightarrow \sqrt{y-6} = 18 - y \Rightarrow$

$\Rightarrow y - 6 = 324 - 36y + y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 - 37y + 330 = 0 \Leftrightarrow y = 15$ ou $y = 22$

Somente y = 15 satisfaz a equação (I).

Assim, $3x^2 - 4x = 15 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 15 = 0$, cujas raízes são reais distintas, pois

$\Delta = (-4)^2 - 4 \,.\, 3 \,.\, (-15) = 196 > 0$ e

$x = \dfrac{4 \pm 14}{6} \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -\dfrac{5}{3}$

Resposta: D

2) Seja v o volume da piscina, p o tempo necessário para a 1ª encher sozinha a piscina e s o tempo necessário para a 2ª encher sozinha a piscina.

1) A primeira enche $\dfrac{v}{p}$ por hora, a segunda enche $\dfrac{v}{s}$ por hora e lembrando que

3h e 36 min = $\left(3 + \dfrac{3}{5}\right)$ hora = $\dfrac{18}{5}$ hora, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{s}{3} \,.\, \dfrac{v}{p} + \dfrac{p}{3} \,.\, \dfrac{v}{s} = \dfrac{13}{18} \,.\, v \\ \dfrac{v}{p} + \dfrac{v}{s} = \dfrac{v}{\dfrac{18}{5}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{s}{p} + \dfrac{p}{s} = \dfrac{13}{6} \\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{s} = \dfrac{5}{18} \end{cases}$$

2) Fazendo $\dfrac{s}{p} = x$, temos

$x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{13}{6} \Leftrightarrow 6x^2 - 13x + 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$ ou $x = \dfrac{3}{2}$

3) Para $x = \dfrac{2}{3}$, tem-se $\dfrac{s}{p} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow s = \dfrac{2p}{3}$

$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{\dfrac{2p}{3}} = \dfrac{5}{18} \Leftrightarrow \dfrac{5}{2p} = \dfrac{5}{18} \Leftrightarrow p = 9$ e $s = 6$

4) Para $x = \dfrac{3}{2}$, tem-se $\dfrac{s}{p} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow s = \dfrac{3p}{2}$

$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{\dfrac{3p}{2}} = \dfrac{5}{18} \Leftrightarrow \dfrac{5}{3p} = \dfrac{5}{18} \Leftrightarrow p = 6$ e $s = 9$

Resposta: Sozinhas, as torneiras levam 6 horas e 9 horas para encher a piscina.

■ MÓDULO 23

1) Se, entre os 1000 carros da empresa, x têm motor a gasolina e 1000 – x possuem motor "flex", temos:

$(100 - 36)\% \,.\, (1000 - x) + 36\%\, x = 556 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 640 - 0,64x + 0,36x = 556 \Leftrightarrow 0,28x = 84 \Leftrightarrow x = 300$

Portanto, o número de carros tricombustíveis é

$36\% \,.\, (1000 - 300) = \dfrac{36}{100} \,.\, 700 = 252$

Resposta: B

2) Como $(x+1)^3 + (x-3)^3 =$

$= [(x+1) + (x-3)].[(x+1)^2 - (x+1)(x-3) + (x-3)^2] =$

$= (2x-2)(x^2 + 2x + 1 - x^2 + 3x - x + 3 + x^2 - 6x + 9) =$

$= 2(x - 1)(x^2 - 2x + 13)$, temos que:

$(x + 1)^3 + (x - 3)^3 = 32(x - 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x - 1)(x^2 - 2x + 13) = 32(x - 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $x^2 - 2x + 13 = 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1, x = -1$ ou $x = 3$

Outra solução

Fazendo $x - 1 = y \Leftrightarrow x = y + 1$

da equação, resulta $(y + 2)^3 + (y - 2)^3 = 32y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^3 + 6y^2 + 12y + 8 + y^3 - 6y^2 + 12y - 8 - 32y = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2y^3 - 8y = 0 \Leftrightarrow 2y(y + 2)(y - 2) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 1 \\ y = 2 \Rightarrow x = 3 \\ y = -2 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

Resposta: $V = \{-1; 1; 3\}$

3) Fazendo $y = \dfrac{(6 - x) + (8 - x)}{2} = 7 - x$ temos:

$(6 - x)^4 + (8 - x)^4 = 16 \Leftrightarrow (y - 1)^4 + (y + 1)^4 = 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y^2 - 2y + 1)^2 + (y^2 + 2y + 1)^2 = 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^4 + 4y^2 + 1 - 4y^3 + 2y^2 - 4y + y^4 + 4y^2 +$

$+ 1 - 4y^3 + 2y^2 - 4y = 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^4 + 6y^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow y^2 = -7$ ou $y^2 = 1$

Como $x \in \mathbb{R}$, temos $(7 - x)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 14x + 48 = 0 \Leftrightarrow x = 6$ ou $x = 8$.

Respostas: $\{6; 8\}$

■ MÓDULO 24

1) Seja v_1 a velocidade que o trem deveria desenvolver em todo o percurso e v a velocidade desenvolvida na segunda metade do percurso, na segunda passagem. O tempo previsto para essa segunda metade, em horas, é $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{20}{v_1} = \dfrac{10}{v_1}$.

Desta forma,

$$\begin{cases} \left(\dfrac{10}{v_1} - \dfrac{3}{60}\right).(v_1 + 10) = 10 \\ \left(\dfrac{10}{v_1} - \dfrac{5}{60}\right).v = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (600 - 3v_1).(v_1 + 10) = 600v_1 \\ (600 - 5v_1).v = 600v_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1^2 + 10v_1 - 2000 = 0 \\ (120 - v_1).v = 120.v_1 \end{cases} \Leftrightarrow v_1 = 40 \text{ e } v = 60$$

Resposta: 60 km/h

2) $x . (x + 1) . (x - 1) . (x + 2) = 24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 + x) . (x^2 + x + 2) = 24$

Fazendo $y = x^2 + x$ temos:

$(x^2 + x) . (x^2 + x - 2) = 24 \Leftrightarrow y . (y - 2) = 24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 - 2y - 24 = 0 \Leftrightarrow y = -4$ ou $y = 6$.

Assim, $x^2 + x = -4$ ou $x^2 + x = 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + x + 4$ ou $x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 2$, pois x é real.

Respostas: $\{-3; 2\}$