

Exercícios de Matemática Retas e Planos

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO

(Ufpe) Na(s) questão(ões) a seguir escreva nos parênteses (V) se for verdadeiro ou (F) se for falso.

1. Analise as seguintes afirmações:

- () Existem dois planos distintos, passando ambos por um mesmo ponto e perpendiculares a uma reta.
 () Se dois planos forem perpendiculares, todo plano perpendicular a um deles será paralelo ao outro.
 () Duas retas paralelas a um plano são paralelas.
 () Se dois planos forem perpendiculares, toda reta paralela a um deles será perpendicular ao outro.
 () Uma reta perpendicular a duas retas concorrentes de um plano é perpendicular a esse plano.

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO

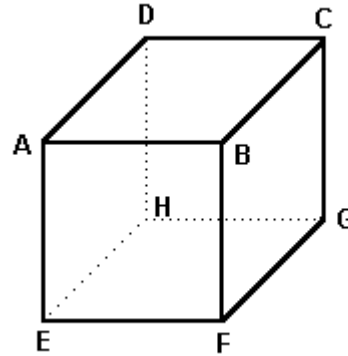
(Ufba) Na(s) questão(ões) a seguir escreva nos parênteses a soma dos itens corretos.

2. Sobre pontos, retas e planos, pode-se afirmar:

- (01) Por três pontos, passa uma única reta.
 (02) Por três pontos, passa um único plano.
 (04) Por um ponto fora de um plano, passa uma única reta perpendicular a esse plano.
 (08) Planos paralelos interceptam duas retas distintas quaisquer, determinando sobre elas segmentos proporcionais.
 (16) O plano que contém uma perpendicular a outro plano é perpendicular a esse segundo plano.
 (32) Toda reta paralela a um plano é paralela a qualquer reta desse plano.

Soma ()

3. (Unesp) Considere o cubo da figura adiante. Das alternativas a seguir, aquela correspondente a pares de vértices que determinam três retas, duas a duas reversas, é:



- a) (A,D); (C,G); (E,H).
 b) (A,E); (H,G); (B,F).
 c) (A,H); (C,F); (F,H).
 d) (A,E); (B,C); (D,H).
 e) (A,D); (C,G); (E,F).

4. (Unesp) Entre todas as retas suportes das arestas de um certo cubo, considere duas, r e s , reversas.

Seja t a perpendicular comum a r e a s . Então:

- a) t é a reta suporte de uma das diagonais de uma das faces do cubo.
 b) t é a reta suporte de uma das diagonais do cubo.
 c) t é a reta suporte de uma das arestas do cubo.
 d) t é a reta que passa pelos pontos médios das arestas contidas em r e s .
 e) t é a reta perpendicular a duas faces do cubo, por seus pontos médios.

5. (Fuvest) Os segmentos VA , VB e VC são arestas de um cubo. Um plano α , paralelo ao plano ABC , divide esse cubo em duas partes iguais. A intersecção do plano α com o cubo é um:

- a) triângulo.
 b) quadrado.
 c) retângulo.
 d) pentágono.
 e) hexágono.

6. (Fuvest) Dada uma circunferência de diâmetro \overline{AB} , levanta-se por A um segmento \overline{AD} perpendicular ao plano da circunferência e une-se D a um ponto C qualquer da circunferência, C distinto de B.

- Prove que as retas BC e DC são perpendiculares.
- Sabendo que $AB=AD=8$ e que C é o ponto médio do arco AB, determine a medida do ângulo CDB.

7. (Unicamp) É comum encontrarmos mesas com 4 pernas que, mesmo apoiadas em um piso plano, balançam e nos obrigam a colocar um calço em uma das pernas se a quisermos firme. Explique usando argumentos de geometria, por que isso não acontece com uma mesa de 3 pernas.

8. (Unicamp) Uma esfera de raio 1 é apoiada no plano xy de modo que seu pólo sul toque a origem desse plano. Tomando a reta que liga o pólo norte dessa esfera a qualquer outro ponto da esfera, chamamos de "projeção estereográfica" desse outro ponto ao ponto em que a reta toca o plano xy. Identifique a projeção estereográfica dos pontos que formam o hemisfério sul da esfera.

9. (Unesp) Sejam α e β planos perpendiculares, $\alpha \cap \beta = r$.

Em α considera-se uma reta s perpendicular a r, $s \cap r = \{A\}$, e em β considera-se t oblíqua a r, $t \cap r = \{A\}$. Dentre as afirmações:

- s é perpendicular a β .
- t é perpendicular a s.
- O plano determinado por s e t é perpendicular a β .
- Todo plano perpendicular a s e que não contém A é paralelo a β .

pode-se garantir que:

- somente I é falsa.
- somente II é falsa.
- somente III é falsa.
- somente IV é falsa.
- nenhuma é falsa.

10. (Unesp) No espaço tridimensional consideram-se duas retas r e s e os conjuntos: A, de todos os planos por r, B, de todos os planos por s. Descrever o conjunto $A \cap B$, nos seguintes casos:

- r e s são paralelas;
- r e s são reversas.

11. (Unesp) Sejam α e β dois planos não paralelos distintos. Prove que por todo ponto $P \in \alpha$, $P \notin \alpha \cap \beta$, existe em α uma única reta paralela a β .

12. (Cesgranrio) A é um ponto não-pertencente a um plano P. O número de retas que contêm A e fazem um ângulo de 45° com P é igual a:

- 0.
- 1.
- 2.
- 4.
- infinito.

13. (Ufpe) Em quantas regiões quatro retas distintas dividem o plano, sabendo-se que não há duas retas paralelas nem três concorrentes no mesmo ponto?

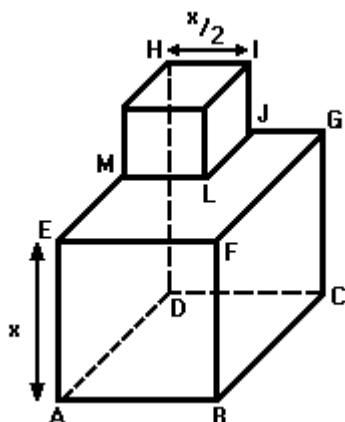
14. (Puccamp) Considere as afirmações a seguir.

- Duas retas distintas determinam um plano.
- Se duas retas distintas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si.
- Se dois planos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela a alguma reta do outro.

É correto afirmar que

- apenas II é verdadeira.
- apenas III é verdadeira.
- apenas I e II são verdadeiras.
- apenas I e III são verdadeiras.
- I, II e III são verdadeiras.

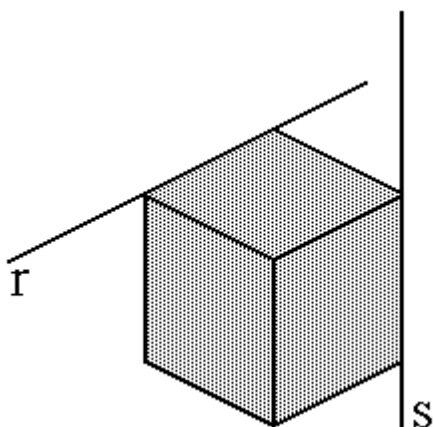
15. (Uel) O sólido representado na figura a seguir é formado por um cubo de aresta de medida $x/2$ que se apóia sobre um cubo de aresta de medida x .



A intersecção do plano EGC com o plano ABC é

- vazia.
- a reta \overline{AC} .
- o segmento de reta \overline{AC} .
- o ponto C.
- o triângulo AGC.

16. (Uel) As retas r e s foram obtidas prolongando-se duas arestas de um cubo, como está representado na figura a seguir.



Sobre a situação dada, assinale a afirmação INCORRETA.

- r e s são retas paralelas.
- r e s são retas reversas.
- r e s são retas ortogonais.
- não existe plano contendo r e s .
- $r \cap s = \emptyset$

17. (Unesp) Dados um paralelepípedo retângulo, indiquemos por A o conjunto das retas que contêm as arestas desses paralelepípedos e por B o conjunto dos planos que contêm suas faces. Isso posto, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- Quaisquer que sejam os planos α e β de B, a distância de α a β é maior que zero.
- Se r e s pertencem a A e são reversas, a distância de r a s é maior que a medida da maior das arestas do paralelepípedo.
- Todo plano perpendicular a um plano de B é perpendicular a exatamente dois planos de B.
- Toda reta perpendicular a um plano de B é perpendicular a exatamente dois planos de B.
- A intersecção de três planos quaisquer de B é sempre um conjunto vazio.

18. (Ufsc) A ÚNICA proposição CORRETA, é:

- Dois planos que possuem 3 pontos em comum são coincidentes.
- Se duas retas r e s , no espaço, são ambas perpendiculares a uma reta t , então r e s são paralelas.
- Dois planos concorrentes determinam um único plano.
- Se dois planos A e B são ambos perpendiculares a um outro plano C, então A e B são planos paralelos.
- Se duas retas r e s são a um plano A, então r e s são paralelas.

19. (Faap) Duas retas são reversas quando:

- não existe plano que contém ambas
- existe um único plano que as contém
- não se interceptam
- não são paralelas
- são paralelas, mas pertencem a planos distintos

20. (Faap) Considere as proposições:

- I. Dois planos paralelos a uma mesma reta são paralelos
- II. Um plano paralelo a duas retas pertencentes a outro plano é paralelo a este
- III. Um plano perpendicular a uma reta de outro plano é perpendicular a este
- IV. Um plano paralelo a uma reta de outro plano é paralelo a este

Nestas condições:

- a) nenhuma das proposições é verdadeira
- b) somente as proposições I e III são verdadeiras
- c) uma única proposição é verdadeira
- d) todas as proposições são verdadeiras
- e) uma única proposição é falsa

21. (Faap) A única proposição FALSA é:

- a) no espaço, duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si
- b) uma reta ortogonal a duas retas de um plano é ortogonal ao plano
- c) dois planos perpendiculares à mesma reta são paralelos entre si
- d) um plano perpendicular a uma reta de outro plano é perpendicular a este plano
- e) um plano perpendicular a dois planos que se interceptam é perpendicular à reta de intersecção destes

22. (Faap) A única proposição FALSA é:

- a) no espaço, duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si
- b) uma reta ortogonal a duas retas de um plano é ortogonal ao plano
- c) dois planos perpendiculares à mesma reta são paralelos entre si
- d) um plano perpendicular a uma reta de outro plano é perpendicular a este plano
- e) um plano perpendicular a dois planos que se interceptam é perpendicular à reta de intersecção destes

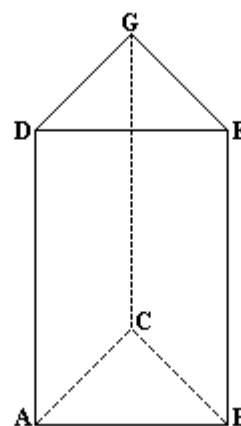
23. (Ufpe) Analise as seguintes afirmações:

- Existem dois planos distintos, passando ambos por um mesmo ponto e perpendiculares a uma mesma reta.
- Se dois planos forem perpendiculares, todo plano perpendicular a um deles será paralelo ao outro.
- Duas retas paralelas a um plano são paralelas.
- Se dois planos forem perpendiculares, toda reta paralela a um deles será perpendicular ao outro.
- Uma reta paralela a duas retas concorrentes de um plano é perpendicular a esse plano.

24. (Uel) A reta r é a intersecção dos planos perpendiculares α e β . Os pontos A e B são tais que $A \in \alpha$, $A \notin \beta$, $B \in \beta$, $B \notin \alpha$. As retas AB e r

- a) são reversas.
- b) são coincidentes.
- c) podem ser concorrentes.
- d) podem ser paralelas entre si.
- e) podem ser perpendiculares entre si.

25. (Fuvest) Uma formiga resolveu andar de um vértice a outro do prisma reto de bases triangulares ABC e DEG , seguindo um trajeto especial. Ela partiu do vértice G , percorreu toda a aresta perpendicular à base ABC , para em seguida caminhar toda a diagonal da face $ADGC$ e, finalmente, completou seu passeio percorrendo a aresta reversa a CG . A formiga chegou ao vértice



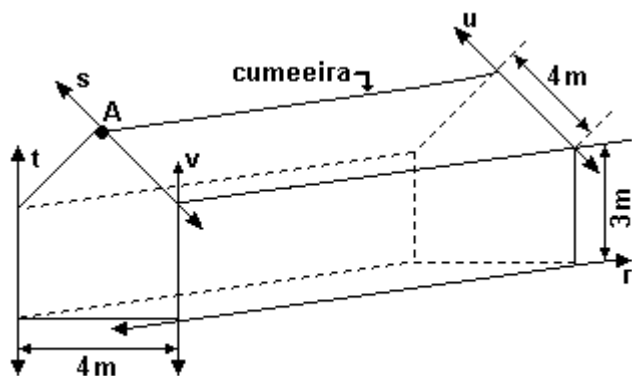
- a) A
- b) B
- c) C
- d) D
- e) E

26. (Mackenzie) r , s e t são retas distintas tais que s é perpendicular a r e t é perpendicular a r .

Relativamente às retas s e t , podemos afirmar que:

- elas podem ser unicamente paralelas ou concorrentes.
- elas podem ser unicamente paralelas ou reversas.
- elas podem ser unicamente concorrentes ou reversas.
- elas podem ser paralelas, concorrentes ou reversas.
- elas podem ser unicamente reversas.

27. (Faap) O galpão da figura a seguir está no prumo e a cumeeira está "bem no meio" da parede.



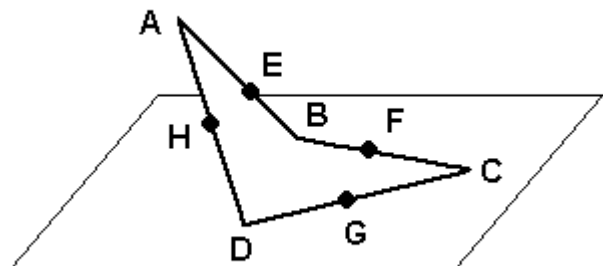
Das retas assinaladas podemos afirmar que:

- t e u são reversas
- s e u são reversas
- t e u são concorrentes
- s e r são concorrentes
- t e u são perpendiculares

28. (Uff) Marque a opção que indica quantos pares de retas reversas são formados pelas retas suportes das arestas de um tetraedro.

- Um par.
- Dois pares.
- Três pares.
- Quatro pares.
- Cinco pares.

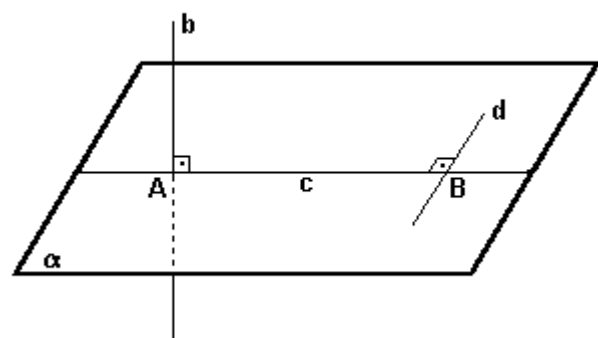
29. (Ufrj) Na figura a seguir, A não pertence ao plano determinado pelos pontos B , C e D . Os pontos E , F , G e H são os pontos médios dos segmentos AB , BC , CD e DA , respectivamente.



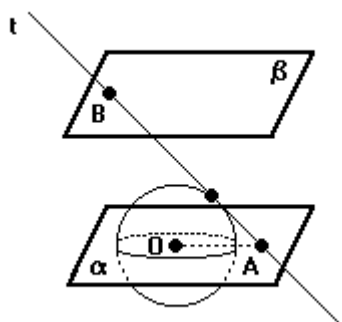
Prove que $EFGH$ é um paralelogramo.

30. (Fatec) Na figura a seguir tem-se: o plano α definido pelas retas c e d , perpendiculares entre si; a reta b , perpendicular a α em A , com $A \in c$; o ponto B , intersecção de c e d . Se X é um ponto de b , $X \notin \alpha$, então a reta s , definida por X e B ,

- é paralela à reta c .
- é paralela à reta b .
- está contida no plano α .
- é perpendicular à reta d .
- é perpendicular à reta b .



31. (Uel) Na figura a seguir têm-se uma esfera de raio 5cm e os planos paralelos α e β . O plano α contém o centro O da esfera e dista 10cm de β . Uma reta t , tangente à esfera, intercepta α em A e β em B . Se o segmento \overline{AB} mede 18cm e o plano determinado pelos pontos A , B e O é perpendicular a α e a β , então a medida do segmento OA , em centímetros, é
- 9
 - 8,5
 - 8
 - 7,5
 - 7



32. (Unb) Uma das maneiras de se representar a Terra em uma região plana para o traçado de mapas geográficos é a "projeção estereográfica", que consiste em projetar os pontos de uma esfera sobre um plano α perpendicular ao eixo norte-sul da esfera e que passa por seu pólo Sul. Mais precisamente, a projeção de um ponto P da esfera é um ponto P' de α , obtido pela interseção com o plano α da reta determinada por P e pelo pólo Norte. Essa construção está representada na figura a seguir, em que O é o centro da esfera, M e Q são pontos sobre um mesmo paralelo, A é o ponto médio do segmento $M'Q'$, sendo M' e Q' as projeções dos pontos M e Q , respectivamente.



Com base nas informações acima, julgue os itens seguintes.

- (1) A imagem de um meridiano da esfera pela projeção estereográfica está contida em uma reta que passa pelo ponto S .
- (2) A imagem do equador pela projeção estereográfica é um círculo de centro S e de raio igual ao quádruplo do raio do equador.
- (3) O plano NAS é perpendicular aos planos $NM'Q'$ e α .
- (4) Os ângulos $M'NQ'$ e $M'SQ'$ são iguais.

33. (Fatec) Seja A um ponto pertencente à reta r , contida no plano α . É verdade que
- a) existe uma única reta que é perpendicular à reta r no ponto A .
 - b) existe uma única reta, não contida no plano α , que é paralela à reta r .
 - c) existem infinitos planos distintos entre si, paralelos ao plano α , que contêm a reta r .
 - d) existem infinitos planos distintos entre si, perpendiculares ao plano α e que contêm a reta r .
 - e) existem infinitas retas distintas entre si, contidas no plano α e que são paralelas à reta r .

34. (Ufv) Considere as afirmações a seguir:

I - Se dois ângulos \hat{A} e \hat{B} de um triângulo são congruentes aos ângulos \hat{C} e \hat{E} , respectivamente, de outro triângulo, então esses triângulos são congruentes.

II - Se uma reta é paralela a um plano, então ela é paralela a toda reta desse plano.

III - Se duas retas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si.

IV - As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

Assinalando V para as afirmações verdadeiras e F para as falsas, a alternativa que apresenta a seqüência CORRETA é:

- a) V F F V
- b) V V F F
- c) F F F V
- d) F F V V
- e) V V V F

35. (Uel) As afirmações seguintes podem ser verdadeiras ou falsas.

I. A projeção ortogonal de uma reta num plano é uma reta.

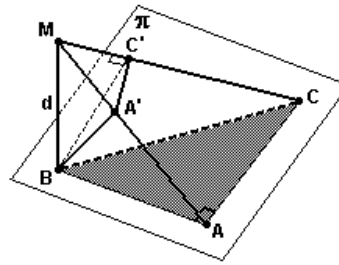
II. Distância entre duas retas reversas é a perpendicular comum a essas retas.

III. A distância entre dois planos só é definida se esses planos são paralelos.

É correto afirmar que SOMENTE

- a) II é verdadeira.
- b) III é verdadeira.
- c) I e II são verdadeiras.
- d) I e III são verdadeiras.
- e) II e III são verdadeiras.

36. (Unb) Considere um triângulo ABC, retângulo em A, contido em um plano π e a reta d perpendicular a π , passando por B. Denomine M um ponto de d que não pertence ao plano π . O plano que é perpendicular a MC e contém B intercepta MC em C' e MA em A', conforme ilustra a figura a seguir.



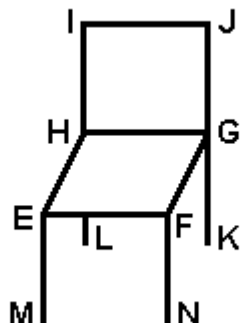
Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.

- (1) O segmento AC é perpendicular ao plano definido pelo triângulo MBA.
- (2) O ângulo AMC é igual ao ângulo ABC.
- (3) Os pontos A, B, C e C' estão sobre uma esfera que tem seu centro no ponto médio do segmento BC.
- (4) Uma vez que BA' é ortogonal a AC e a MC, conclui-se que BA' é perpendicular a CA'.

37. (Ufscar) Considere um plano α e um ponto P qualquer do espaço. Se por P traçarmos a reta perpendicular a α , a intersecção dessa reta com α é um ponto chamado projeção ortogonal do ponto P sobre α . No caso de uma figura F do espaço, a projeção ortogonal de F sobre α é definida pelo conjunto das projeções ortogonais de seus pontos. Com relação a um plano α qualquer fixado, pode-se dizer que:

- a) a projeção ortogonal de um segmento de reta pode resultar numa semi-reta.
- b) a projeção ortogonal de uma reta sempre resulta numa reta.
- c) a projeção ortogonal de uma parábola pode resultar num segmento de reta.
- d) a projeção ortogonal de um triângulo pode resultar num quadrilátero.
- e) a projeção ortogonal de uma circunferência pode resultar num segmento de reta.

38. (Ufrn) Na cadeira representada na figura a seguir, o encosto é perpendicular ao assento e este é paralelo ao chão.



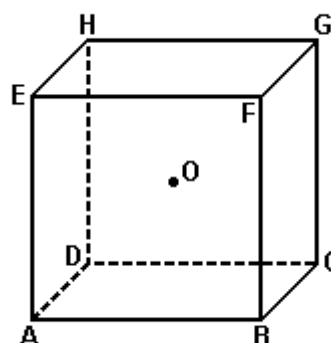
Sendo assim,

- Os planos EFN e FGJ são paralelos.
- HG é um segmento de reta comum aos planos EFN e EFH.
- Os planos HIJ e EGN são paralelos.
- EF é um segmento de reta comum aos planos EFN e EHG.

39. (Uel) Considere uma reta s , contida em um plano α , e uma reta r perpendicular a s . Então, necessariamente:

- r é perpendicular a α .
- r e s são coplanares.
- r é paralela a α .
- r está contida em α .
- Todas as retas paralelas a r interceptam s .

40. (Ufrs) A figura abaixo representa um cubo de centro O .



Considere as afirmações abaixo.

- O ponto O pertence ao plano BDE.
- O ponto O pertence ao plano ACG.
- Qualquer plano contendo os pontos O e E também contém C .

Quais estão corretas?

- Apenas I.
- Apenas II.
- Apenas I e II.
- Apenas I e III.
- Apenas II e III.

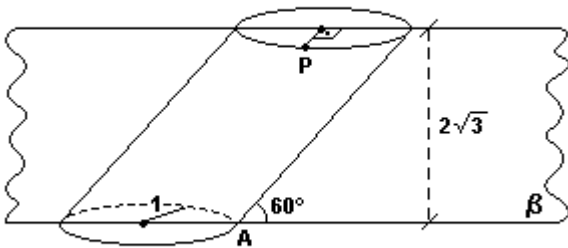
41. (Ufal) Analise as afirmativas abaixo.

- () Duas retas que não têm pontos comuns sempre são paralelas.
- () Duas retas distintas sempre determinam um plano.
- () Uma reta pertence a infinitos planos distintos.
- () Três pontos distintos sempre determinam um plano.
- () Duas retas coplanares distintas são paralelas ou concorrentes.

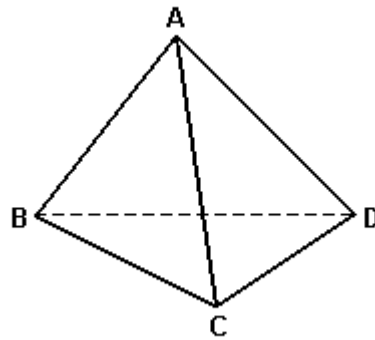
42. (Uel) Considere três planos que sejam dois a dois perpendiculares entre si e esferas com 10cm de raio. Quantas dessas esferas poderão tangenciar simultaneamente os três planos?

- a) Uma.
- b) Duas.
- c) Quatro.
- d) Oito.
- e) Infinitas.

43. (Fuvest) Um cilindro oblíquo tem raio das bases igual a 1, altura $2\sqrt{3}$ e está inclinado de um ângulo de 60° (ver figura). O plano β é perpendicular às bases do cilindro, passando por seus centros. Se P e A são os pontos representados na figura, calcule PA.



44. (Unifesp) Dois segmentos dizem-se reversos quando não são coplanares. Neste caso, o número de pares de arestas reversas num tetraedro, como o da figura, é



- a) 6.
- b) 3.
- c) 2.
- d) 1.
- e) 0.

45. (Ufpe) Sejam π_1 e π_2 planos que se interceptam em uma reta l e formam um ângulo de 45° . Em π_1 escolha pontos P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 distando respectivamente 3cm, 7cm, 8cm, 15cm e 21cm de l . A reta perpendicular a π_1 passando por P_i intercepta π_2 em um ponto Q_i . Qual o valor, em cm, de $P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3 + P_4Q_4 + P_5Q_5$?

GABARITO

1. F F F F V
2. $04 + 08 + 16 = 28$
3. [E]
4. [C]
5. [E]
6. a) Hip:
 $\overline{AD} \perp \overline{AB}$
- $C \neq B$
- Tese:
 $\overline{BC} \perp \overline{DC}$
- Demonstração:
- Seja α o plano determinado por \overline{AB} e pelo ponto C.
- Seja β o plano determinado por \overline{AD} e pelo ponto C.
- ΔABC é retângulo, com ângulo reto no ponto C
- $\overline{AC} \perp \overline{BC} \rightarrow \overline{BC} \perp \beta \rightarrow \overline{BC} \perp \overline{DC} \overline{AC} \in \beta$
- Caso $C = A$, então $\overline{BC} = \overline{AB}$ e $\overline{DC} = \overline{DA}$, como $\overline{AD} \perp \overline{AB}$ então $\overline{BC} \perp \overline{DC}$
- b) $\theta = 30^\circ$
7. Mesas com três pernas não balançam pois três pontos não colineares determinam um único plano (Postulado da Determinação de Plano).
8. Círculo de Raio = 2, com centro na origem do plano.
9. [E]
10. a) Se as retas r e s são paralelas distintas existe um único plano passando por r e s; portanto $A \cap B$ é um conjunto unitário. Se as retas são paralelas coincidentes, então $A \cap B = A = B$.
- b) Se r e s são retas reversas não existe um plano passando por r e s. Logo $A \cap B = \{ \}$
11. Consideremos z a reta que é a intersecção dos planos alfa e beta. Seja $P \in \alpha$, $P \notin z$. Então α é o plano determinado por P e z. Por P é possível traçar, no plano α , uma reta r paralela à reta z. Já que $z \subset \beta$, temos que r é paralela ao plano β . Suponha que, por absurdo, exista $r' \neq r$, passando por P, r' paralela a β . Como r e r' são concorrentes e estão contidas em α , então o plano α é determinado por elas. Como a reta r é paralela a β e r' é paralela a β , temos α paralelo a β , o que contraria a hipótese. Está provado que r é única.
12. [E]
13. 11
14. [B]
15. [B]
16. [A]
17. [D]
18. 04
19. [A]
20. [C]
21. [B]
22. [B]
23. F F F F F
24. [A]
25. [E]
26. [D]
27. [A]
28. [C]

29. Notemos que:

no triângulo ABD, HE é paralelo a BD e $HE = BD/2$;

no triângulo CBD, GF é paralelo a BD e $GF = BD/2$.

Portanto os segmentos HE e GF são paralelos e iguais, logo o quadrilátero EFGH é um paralelogramo.

30. [D]

31. [A]

32. V F V F

33. [E]

34. [C]

35. [B]

36. V F V V

37. [E]

38. [D]

39. [B]

40. [E]

41. F F V F V

42. [D]

43. $PA = \sqrt{14}$

44. [B]

45. 54 cm