UNICAMP vestibular 2017

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

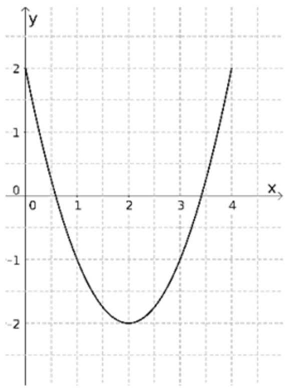
QUESTÃO 13

a)
Para o cafezinho, o aumento percentual é de $\frac{R\$ 3{,}00 - R\$ 2{,}00}{R\$ 2{,}00} \times 100\% = 0{,}5 \times 100\% = 50\%$ e, para o cafezinho com leite, o aumento percentual é de $\frac{R\$ 4{,}00 - R\$ 2{,}50}{R\$ 2{,}50} \times 100\% = 0{,}6 \times 100\% = 60\%$.

b)
No cafezinho com leite são servidos $1/3 \times 60ml = 20\ ml$ de leite e $2/3 \times 60ml = 40\ ml$ de café. Como no estabelecimento **B** um cafezinho de $60\ ml$ custa $R\$ 3{,}00$, os $40\ ml$ de café servidos no cafezinho com leite custam $R\$ 3{,}00 \times 40\ ml/60\ ml = R\$ 2{,}00$. Portanto, os $20\ ml$ de leite servidos custam $R\$ 4{,}00 - R\$ 2{,}00 = R\$ 2{,}00$. Logo, o preço que está sendo cobrado por um litro de leite ($1\ l = 1000\ ml = 50 \times 20\ ml$) é $50 \times R\$ 2{,}00 = R\$ 100{,}00$.

QUESTÃO 14

a)
Podemos escrever $f(x) = x^2 - 4x + c = (x-2)^2 + c - 4$. Logo, a parábola dada pelo gráfico de $y = f(x)$ tem vértice no ponto $V = (2, c-4)$. Do enunciado temos que $2 + c - 4 = 0$, ou seja, $c = 2$. Assim, a equação da parábola é $y = f(x) = x^2 - 4x + 2$, o vértice é $V = (2, -2)$, para $x = 0$ temos $y = f(0) = 2$ e para $x = 4$ temos $y = f(4) = 2$. Abaixo temos um esboço da parábola para $0 \leq x \leq 4$.

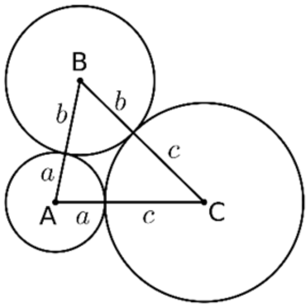


b)
Temos que $A = \big(a, f(a)\big) = (a, a^2 - 4a + c)$ e $B = (b, b^2 - 4b + c)$. O ponto médio é então $M = (1, c) = \big((a+b)/2, (a^2 - 4a + c + b^2 - 4b + c)/2\big)$. Logo, $a + b = 2$ e $a^2 + b^2 = 4a + 4b$. Tomando $b = 2 - a$ e substituindo na segunda equação, chegamos a $a^2 - 2a - 2 = 0$. Resolvendo essa equação quadrática, obtemos $a = 1 \pm \sqrt{3}$ e, portanto, $b = 2 - \big(1 \pm \sqrt{3}\big) = 1 \mp \sqrt{3}$. Como $a < b$, temos que $a = 1 - \sqrt{3}$ e $b = 1 + \sqrt{3}$.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

QUESTÃO 15

a)
Colocando os raios nos círculos, como exibe a figura abaixo, temos as relações: $a + b = AB = 5\ cm$, $a + c = AC = 6\ cm$ e $b + c = BC = 9\ cm$. Resolvendo esse sistema de equações lineares, obtemos $a = 1\ cm$, $b = 4\ cm$ e $c = 5\ cm$.



b)
Uma vez que $c > b$ e $b > a$, o comprimento do maior lado do triângulo é $b + c$. Assim, como o triângulo deve ser retângulo, o comprimento da hipotenusa é $b + c$ e o comprimento dos catetos, $a + b$ e $a + c$. Pelo Teorema de Pitágoras, $(b + c)^2 = (a + b)^2 + (a + c)^2$, ou seja, $(3 + c)^2 = (2 + 3)^2 + (2 + c)^2$. Logo, $9 + 6c + c^2 = 25 + 4 + 4c + c^2$ e, portanto, $2c = 20$, o que implica que $c = 10\ cm$.

QUESTÃO 16

a)
Observe que $r \neq 0$, pois $p(0) = 1 \neq 0$. Assim, temos que $q\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{1}{r}\right)^3 + b\left(\frac{1}{r}\right)^2 + a\left(\frac{1}{r}\right) + 1 = \frac{1}{r^3} + \frac{b}{r^2} + \frac{a}{r} + 1 = \frac{1+br+ar^2+r^3}{r^3} = \frac{p(r)}{r}$. Como r é uma raiz de $p(x)$, temos que $p(r) = 0$ e, portanto, $q\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{0}{r^3} = 0$.

b)
Temos que $p(-1) = -1 + a - b + 1 = a - b$, $p(0) = 0 + 0 + 0 + 1 = 1$, $p(1) = 1 + a + b + 1 = a + b + 2$ e $p(2) = 8 + 4a + 2b + 1 = 9 + 4a + 2b$. Como $(p(-1), p(0), p(1))$ é uma PA com razão $p(2)$, temos que $p(0) - p(-1) = p(1) - p(0) = p(2)$, ou seja, $1 - (a - b) = a + b + 2 - 1 = 9 + 4a + 2b$. Resolvendo essas equações, encontramos $a = 0$ e $b = -8$.

UNICAMP vestibular 2017

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

QUESTÃO 17

a)

A matriz dos coeficientes do sistema linear é dada por $A=\begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{pmatrix}$. A soma dos quadrados dos elementos da matriz A é igual a $S_1 = m^2 + 0^2 + 2^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2 + m^2 = 2m^2 + 11$. Então,

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2+4 & 0 & 4m \\ m+1 & 1 & m+1 \\ 4m & 0 & m^2+4 \end{pmatrix}.$$

A soma dos elementos de A^2 é, então, $S_2 = m^2 + 4 + 0 + 4m + m + 1 + 1 + m + 1 + 4m + 0 + m^2 + 4 = 2m^2 + 10m + 11$. Para que $S_1 = S_2$, devemos ter $2m^2 + 11 = 2m^2 + 10m + 11$, ou seja, $m = 0$.

b)

Para $m = 2$, temos o sistema linear

$$\begin{cases} 2x + 2z = 4, \\ x - y + z = 3, \\ 2x + 2z = 4. \end{cases}$$

Note que a primeira e a terceira equações são iguais. Da primeira equação, podemos escrever $z = 2 - x$. Substituindo na segunda equação, concluímos que $y = -1$. Assim, esse sistema tem infinitas soluções: para qualquer número real a, $x = a$, $y = -1$ e $z = 2 - a$ é uma solução. Temos então que o produto das variáveis em qualquer solução é dado por $xyz = a.(-1).(2 - a) = a^2 - 2a = (a - 1)^2 - 1$. Esse produto é uma função quadrática na variável a, cujo coeficiente quadrático é positivo. O gráfico dessa função é uma parábola com a concavidade voltada para cima, cujo vértice fornece o valor mínimo do produto. O vértice dessa parábola tem abscissa em $a = 1$. Portanto, a solução procurada é $x = a = 1$, $y = -1$ e $z = 2 - a = 1$.

QUESTÃO 18

a) Temos que $f(2t) = k\,\mathrm{sen}(2t) + \cos(2t) = k(2\,\mathrm{sen}\,t\cos t) + (\cos t)^2 - (\mathrm{sen}\,t)^2$. Substituindo $(\mathrm{sen}\,t)^2$ por $1 - (\cos t)^2$, obtemos $f(2t) = 2k\,\mathrm{sen}\,t\cos t + 2(\cos t)^2 - 1$. Colocando $2\cos t$ em evidência, chegamos a $f(2t) = 2\cos t(k\,\mathrm{sen}\,t + \cos t) - 1 = 2\,(\cos t)\,f(t) - 1$. Como $f(t) = 0$, obtemos $f(2t) = 0 - 1 = -1$.

b) Para $k = 3$, temos que $f(x)^2 = (3\,\mathrm{sen}\,x + \cos x)^2 = 9\,(\mathrm{sen}\,x)^2 + 6\,\mathrm{sen}\,x\cos x + (\cos x)^2$ e $f(-x)^2 = (3\,\mathrm{sen}(-x) + \cos(-x))^2 = (-3\,\mathrm{sen}\,x + \cos x)^2 = 9\,(\mathrm{sen}\,x)^2 - 6\,\mathrm{sen}\,x\cos x + (\cos x)^2$. Logo, $f(x)^2 + f(-x)^2 = 18\,(\mathrm{sen}\,x)^2 + 2(\cos x)^2 = 16\,(\mathrm{sen}\,x)^2 + 2 = 10$, ou seja, $(\mathrm{sen}\,x)^2 = \frac{1}{2}$. Temos então que $\mathrm{sen}\,x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ e, como $0 \le x \le 2\pi$, temos as soluções $x = \pi/4$ ou $x = 3\pi/4$ ou $x = 5\pi/4$ ou $x = 7\pi/4$.