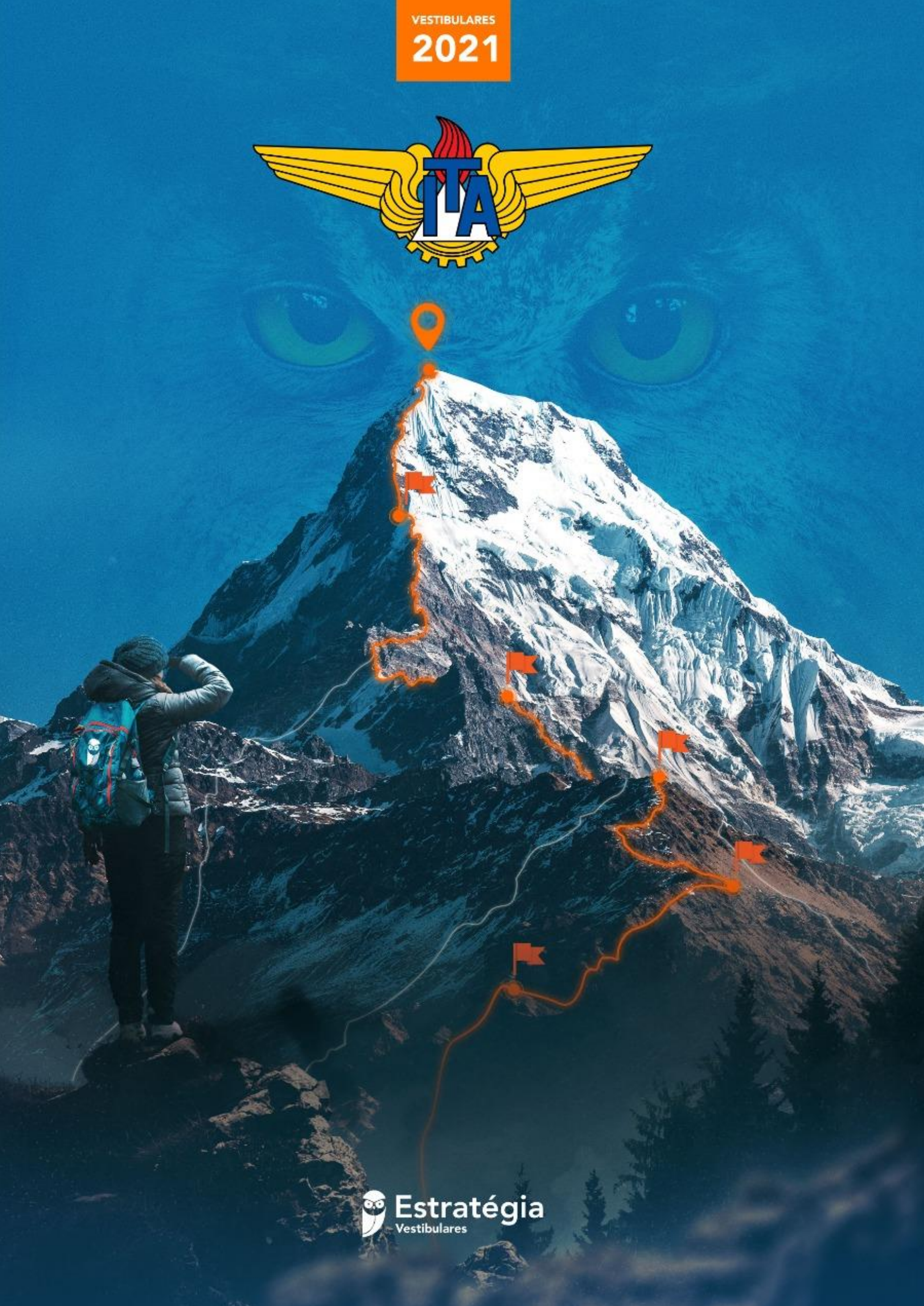
VESTIBULARES
2021
ITA
Estratégia
Vestibulares

# Sumário

# Apresentação

Olá, caros alunos!

Sejam bem-vindos à Trilha Estratégica, nosso Bizuário, para as provas do ITA!

Antes de darmos início, vou me apresentar:

Meu nome é Bruno Henrique Almeida da Cunha, sou aluno do ITA, aprovado na AFA, no IME e no ITA por dois anos consecutivos (2018 e 2019).

**SOBRE O BIZUÁRIO:** Trata-se de uma instrução sobre como otimizar o seu estudo nas disciplinas. Sabemos que, durante a preparação para o ITA, é comum o aluno se deparar com inúmeras listas com muitos exercícios e materiais enormes também. Nesse sentido, esse material foi feito no intuito de instruir o aluno a seguir um caminho mais otimizado para conseguir o conhecimento que ele precisa e acertar as questões da prova. Aqui usarei da minha experiência nos vestibulares ITA/IME, obtida com mais de 4 anos de preparação, para fazer um roteiro de aula em que você poderá acessar as suas dificuldades na matéria de forma rápida e objetiva.

# Instruções Gerais

Agora vamos entrar no mundo da trigonometria. Com certeza a trigonometria é um dos assuntos mais cobrados no vestibular, com 11% de incidência. O estudo de trigonometria foi separado em duas aulas. Nessa primeira aula vamos estudar desde a relação fundamental até a parte de transformações trigonométricas. A próxima aula trata de equações e inequações trigonométricas, além de leis trigonométricas. Pode-se dizer que, no vestibular, tanto a primeira quanto a segunda aula de trigonometria são importantes, praticamente ambas as aulas caem igualmente na prova.

Dessa forma, é muito importante que você estude tudo detalhadamente, e fazer resumos de toda a teoria pode ajudar a fixar.

Quanto à questão de como estudar o Bizuário e as aulas, lembre-se:

- para passar no ITA é preciso bastante disciplina, foco e paciência. O esperado é que o aluno estude entre 10 e 12 horas por dia, em média, principalmente no começo. Pode parecer muita coisa, até fora da realidade. Porém, considerando que o aluno tem afinidade pelas disciplinas de exatas e que ele encontre um ambiente propício para o estudo, é natural que, com o tempo, ele atinja níveis de estudo muito altos sem demandar grandes esforços para isso.

- "Sangue no olho" e "faca nos dentes" são expressões que indicam muito bem o comportamento de um vestibulando de ITA. Sabendo disso, vamos nessa!

**Observação**: Quando você for indicado a fazer uma questão e encontrar dificuldades, pule-a e continue a resolver outras questões. É interessante que você não olhe a resolução desse exercício logo de primeira, use as outras questões mais fáceis como subsídio para resolver as questões mais complexas. Se mesmo assim você continuar com esse problema, verifique a resolução. Seguir dessa forma irá ajudá-lo a absorver a matéria.

# Análise da aula

## Essa Disciplina no Vestibular

Essa disciplina no vestibular é muito importante devido ao seu alto grau de frequência. Porém, esse não é o único fator decisivo que vai fazer você estudar essa aula de forma intensa e repetida. Trigonometria é uma das matérias mais interdisciplinares que tem no edital. Ela aparece muito em números complexos, nas geometrias e em outras. É uma matéria de conta e atenção. As questões de trigonometria não costumam dar muita dor de cabeça na prova do ITA, pois são questões que ligam um conjunto de fórmulas e fatos que você já sabe previamente, o resto é conta. Em se tratando das questões dessa matéria especificamente, tenha em mente que são muitas fórmulas e você vai ter que decorar várias. Mas não se preocupe, conforme você for fazendo as questões, essas fórmulas vão se tornando naturais e intuitivas. Também é importante você anotar tudo sobre a parte de funções, porque no vestibular é relativamente fácil errar coisas como o período de uma função trigonométrica ou mesmo esquecer de expressar o domínio de uma função e acabar encontrando mais soluções do que realmente a equação tem. Tendo em vista esses fatos, vamos para o roteiro!

## Roteiro da Aula

- Nessa aula, do tópico **1.1.1** até o tópico **1.1.12** temos a apresentação de conceitos básicos sobre a matéria de trigonometria. Caso você já tenha intimidade com o assunto, pode pular essa parte e o exercício 1 também. Para quem tem certa dificuldade ou nunca estudou esse assunto, sugiro que estude todos os tópicos.
- Em **1.1.8** temos a definição de ângulos replementares. Esse conceito não costuma cair no vestibular do ITA, mas é interessante conhecer.
- Em **1.1.9** temos algumas unidades de medida para o ângulo. Não é comum aparecer a unidade de grado. Para a prova do ITA é importante saber grau e radiano.
- **1.1.11** e **1.1.12** serão retomados nas aulas de geometria plana. Caso você não tenha entendido alguma parte ou queira ver a demonstração de **1.1.12,** não se preocupe, pois esse assunto será abordado de novo.
- Na parte inicial do capítulo **2**, temos a apresentação das funções trigonométricas básicas e as relações métricas no triângulo retângulo. Caso você não tenha estudado essa matéria antes, é muito importante estudar esse capítulo **2** com muita atenção, pois ele é a introdução de toda a matéria de trigonometria.
- Em **2.1** temos relações muito importante, que são: $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, $tg^2\alpha + 1 = sec^2\alpha$ e $cotg^2\alpha + 1 = cossec^2\alpha$. Com essas relações você deduz muitas outras dentro da trigonometria. Então fique ligado!
- Em **2.2** temos algumas igualdades entre funções trigonométricas para quando dois ângulos somam 90°. É importante saber também as mesmas relações para quando os ângulos somam 180°.
- Os ângulos notáveis ilustrados no tópico **2.3** foram 30°, 45° e 60°. Também é muito importante saber os ângulos 18°, 36°, 75° e 15°. Temos que $cos36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ e $tg15° = 2 - \sqrt{3}$. A partir desses resultados você pode encontrar todos os valores de $cos$, $sen$ e $tg$ desses ângulos. Fica como exercício ao leitor! O valor $cos36°$ cai bastante, é bom ter decorado esse resultado.
- Se já estudou essa matéria antes e teve facilidade até aqui, pode pular o exercício 2.
- Esse capítulo **3** é introdutório à parte de ciclo trigonométrico. Se você já o conhece e domina o assunto, pode pular para o capítulo 4. Caso não seja essa a situação, continue normalmente a aula.
- Chegamos no capítulo **3**. A maior dificuldade desse capítulo, para muitos alunos, é lembrar os gráficos de $tg$, $sec$ e $cossec$ e suas condições de existência. Também muitos alunos temem o momento de expressar as soluções de equações trigonométricas devido às variadas formas de fazê-lo. Estudar esse capítulo **3** é muito importante para que não haja dúvidas desse tipo.

- Em **3.1** é definido o ciclo trigonométrico. O mais importante aqui, além de saber o que é um ciclo trigonométrico, é aprender o sentido positivo e negativo quando você "anda" pelo ciclo trigonométrico. Isso será importante lá na frente.
- Em **3.2** não se atente a decorar esses ângulos agora. Não se preocupe, pois, com certo tempo de estudos, você terá cada um desses ângulos na ponta da caneta.
- **3.3** e **3.4** se comunicam no sentido de que, se você entender muito bem o funcionamento dos quadrantes, vai perceber que, independentemente do número de voltas que você dá no ciclo, o mesmo ponto entregará os mesmos valores das funções trigonométricas associados a ele.
- Em **3.5** temos a redução ao primeiro quadrante. Uma vez que você sabe um determinado ponto no primeiro quadrante, você pode determinar outros pontos apenas traçando retas paralelas! Isso é muito bom e será bastante usado nos problemas de trigonometria e em números complexos.
- Nesse capítulo **04**, para cada função, o mais importante é saber o estudo do sinal, a paridade, saber montar o gráfico e o intervalo de valores. Ângulos notáveis é bom dar uma olhada mas não espere decorar todos esses valores agora, isso será feito naturalmente com a resolução dos exercícios. Faça resumos desse capítulo em algum caderno, vai ajudar a fixar a matéria.
- Não se esqueça de certificar que conhece as condições de existência da $sec$ e $cossec$.
- Chegamos no capítulo de funções inversas. Mesmo aqueles que já viram esse assunto antes é bom estudar essa parte. Um dos grandes problemas de funções inversas na hora da prova é lembrar o domínio de cada uma e fazer a operações sempre lembrando desse fato, então preste bastante atenção nisso. O gráfico dessas funções não são comuns no vestibular. A título de curiosidade, também é possível escrever os gráficos de $arcsec$ e $arccossec$.
- Chegamos no capítulo **6**. Aqui temos o clímax da aula. Essas fórmulas são a base da trigonometria no vestibular, é como você vai atacar 90% das questões que caem lá. Todas as fórmulas da aula são importantes e serão usadas em peso. Meu conselho é decorar as fórmulas de 6.1 e tentar demonstrar as outras a partir delas, assim você não vai passar aperto na hora de resolver alguma questão caso esquecer uma relação, pois saberá provar cada uma delas.
- Use o resumo como consulta caso você esqueça alguma fórmula ou relação fundamental.
- Chegamos ao fim da aula, está na hora de praticar com exercícios. Caso essa seja sua primeira vez estudando essa matéria, siga as questões na ordem de dificuldade. Caso não seja essa a situação, faça as questões, inclusive as fáceis, porém numa velocidade maior que a usual. Tnte fazê-las de forma ligeira, sem pensar muito. Vá fazendo dessa forma aos poucos e veja sua margem de erro. Assim você simula mais ou menos a correria do vestibular. Lembre-se de fazer tudo o mais organizado possível. Você que já é mais experiente pode seguir as questões na ordem que aparecerem.

## Questões da Aula Separadas por Nível

Aqui separei as questões da aula por nível de dificuldade. Não se preocupe se você não conseguiu ou não entendeu uma questão difícil logo de primeira, a maior parte das questões de Trigonometria que caem no ITA são fáceis e médias. Porém, no longo prazo, é importante que você domine todas as questões da aula e as ideias que foram descritas ali, para que aprofunde seus conhecimentos na matéria e minimize, assim, as chances de cair alguma questão desse assunto que você não saiba resolver na hora da prova.

Não se preocupe caso você tenha encontrado dificuldade em alguma questão considerada fácil, pois você pode estar destreinado na matéria. Verá que, com um pouco mais de prática, você, provavelmente, vai concordar comigo!

| Fáceis | Médias | Difíceis |
|---|---|---|
| 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 a 73, 77, 80, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 94, 95, 96, 99, 100, 101, 102, 105, 106, 107, 110, 113, 116, 157 | 3, 74, 75, 76, 78, 79, 81, 85, 93, 97, 98, 103, 104, 108, 109, 111, 112, 114, 115, 117, 118, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 136, 138, 139, 140, 141, 143, 144, 145, 146, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 159, 160, 164, 165, 166, 167, 168, 170, 171, 172 | 119, 120, 121, 122, 135, 137, 142, 147, 158, 161, 162, 163, 169, 173, 174 |

# Bizus

❖ Na trigonometria é muito comum a prova de determinadas identidades. Muitas delas são muito mais fáceis de fazer quando você tem em mãos outros artifícios, como os números complexos. Porém, as soluções por trigonometria também são válidas e vamos abordar um tipo aqui. Seja a seguinte soma:

$$S = sen(\theta_0) + sen(\theta_0 + r) + sen(\theta_0 + 2r) + \cdots + sen(\theta_0 + nr)$$

Para achar o valor da soma, vamos multiplicar ambos os lados da equação por $sen\left(\frac{r}{2}\right)$.

Dessa forma, temos:

$$S\,sen\left(\frac{r}{2}\right) = sen\left(\frac{r}{2}\right)sen(\theta_0) + sen\left(\frac{r}{2}\right)sen(\theta_0 + r) + \cdots + sen\left(\frac{r}{2}\right)sen(\theta_0 + nr)$$

A partir daqui, e usando as fórmulas de Werner, podemos escrever:

$$S\,sen\left(\frac{r}{2}\right) = \frac{\cos\left(\theta_0 - \frac{r}{2}\right) - \cos\left(\theta_0 + \frac{r}{2}\right)}{2} + \frac{\cos\left(\theta_0 + \frac{r}{2}\right) - \cos\left(\theta_0 + \frac{3r}{2}\right)}{2} + \cdots$$

$$+ \frac{\cos\left(\theta_0 + \frac{(2n-1)r}{2}\right) - \cos\left(\theta_0 + \frac{(2n+1)r}{2}\right)}{2} =$$

Isso é uma soma telescópica! Cortando os termos opostos, temos:

$$S\,sen\left(\frac{r}{2}\right) = \frac{\cos\left(\theta_0 - \frac{r}{2}\right) - \cos\left(\theta_0 + \frac{(2n+1)r}{2}\right)}{2} =$$

$$S\,sen\left(\frac{r}{2}\right) = sen(2\theta_0 + nr)sen((n+1)r) =$$

$$S = \frac{sen(2\theta_0 + nr)sen((n+1)r)}{sen\left(\frac{r}{2}\right)}$$

Essa técnica é muito útil. Não decore o resultado, aprenda a técnica.

❖ Aqui vai mais uma técnica.

Como você resolveria:

$$P = \cos(\theta_0)\cos(2\theta_0)\cos(2^2\theta_0)\cos(2^3\theta_0)\ldots\cos(2^n\theta_0)\ \ ?$$

Vamos multiplicar por $2sen\theta_0$ dos dois lados da equação:

$$2sen\theta_0 P = 2sen\theta_0\cos(\theta_0)\cos(2\theta_0)\cos(2^2\theta_0)\cos(2^3\theta_0)\ldots\cos(2^n\theta_0)$$

Usando a fórmula $sen2\theta = 2sen\theta cos\theta$, temos:

$$2sen\theta_0 P = sen(2\theta_0)\cos(2\theta_0)\cos(2^2\theta_0)\cos(2^3\theta_0)\ldots\cos(2^n\theta_0)$$

Multiplicando por 2 dos dois lados, temos:

$$2^2sen\theta_0 P = 2sen(2\theta_0)\cos(2\theta_0)\cos(2^2\theta_0)\cos(2^3\theta_0)\ldots\cos(2^n\theta_0) =$$

$$2^2sen\theta_0 P = sen(2^2\theta_0)\cos(2^2\theta_0)\cos(2^3\theta_0)\ldots\cos(2^n\theta_0) =$$

Seguindo esse raciocínio, temos que:

$$2^{n+1}sen\theta_0 P = sen(2^{n+1}\theta_0)$$

$$P = \frac{sen(2^{n+1}\theta_0)}{2^{n+1}sen\theta_0}$$

❖ É possível escrever $tg(n\theta)$ como uma fórmula única usando números binomiais. Veremos isso na aula de combinatória.

❖ Vamos supor a questão:

$$sec\theta + tg\theta = 4$$

$$cos\theta?$$

Uma solução seria resolver a equação $1 + sen\theta = 4cos\theta$, que poderia ser feito elevando essa equação ao quadrado. Para economizar tempo, pode-se partir do fato de que

$$1 + tg^2\theta = sec^2$$

$$1 = sec^2 - tg^2\theta$$

$$(sec\theta - tg\theta)(sec\theta + tg\theta) = 1$$

$$sec\theta + tg\theta = 4 \quad (I)$$

$$sec\theta - tg\theta = \frac{1}{4} \quad (II)$$

Somando as equações, $(I)$ e $(II)$, temos que $sec\theta = \frac{17}{8} \Rightarrow cos\theta = \frac{8}{17}$.

Bem melhor, não?

❖ Na questão 162, podemos marcar o gabarito facilmente se analisarmos o fato de um triângulo equilátero. A questão fala de um triângulo com os lados em PA. Ora, os lados do triângulo equilátero estão em PA, só que de razão zero! Assim, $\hat{A} = 60°$ e $\hat{C} = 60°$ e marcamos facilmente a letra B. Sempre que você puder fazer isso em questões objetivas nos vestibulares ITA/IME, faça. Lembre-se que isso serve apenas para questões objetivas.



9