RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 1

a)

Para produzir 7 kg de bolo do tipo A é preciso ter 7x0,4 = 2,8 kg de açúcar e 7x0,2 = 1,4 kg de farinha. Já os 18 kg de bolo do tipo B exigem 18x0,2 = 3,6 kg de açúcar e 18x0,3 = 5,4 kg de farinha. Assim, são consumidos 2,8 + 3,6 = 6,4 kg de açúcar e 1,4 + 5,4 = 6,8 kg de farinha. Como a confeitaria só dispõe de 6 kg de farinha e precisaria de 6,8 kg, não é possível produzir a quantidade desejada dos bolos.

Resposta: A confeitaria não é capaz de produzir 7 kg de bolo do tipo A e 18 kg de bolo do tipo B.

b)

Digamos que a variável x represente a quantidade (em kg) produzida do bolo A e y represente a quantidade (também em kg) produzida do bolo B. Supondo que a confeitaria gastará todo o açúcar e toda a farinha disponíveis, o consumo de açúcar com a produção dos dois tipos de bolo é dado pela equação 0,4x + 0,2y = 10, e o consumo de farinha é dado por 0,2x + 0,3y = 6.

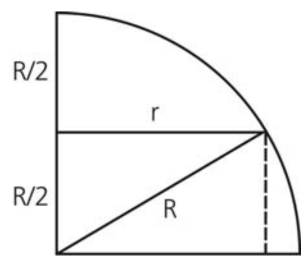
Resolvendo o sistema linear formado por essas duas equações, obtemos x = 22,5 kg e y = 5 kg.

Resposta: Devem ser produzidos 22,5 kg de bolo do tipo A e 5 kg de bolo do tipo B.

Questão 2

a)

O volume do anel é dado por $V_a = V_e - 2V_{cal} - V_{cil}$, em que o volume da esfera é $V_e = 4\pi R^3/3$, o volume do cilindro é $V_{cil} = \pi r^2(2R - 2h)$ e o volume da calota, V_{cal}, é dado no enunciado da questão.



Da figura ao lado, concluímos que $r^2 = R^2 - (R/2)^2 = 3R^2/4$. Assim, $V_{cil} = \pi \cdot (3R^2/4) \cdot (2R - 2R/2) = 3\pi R^3/4$.

Já a calota tem volume $V_{cal} = \dfrac{\pi(R/2)^2}{3}\left(3R - \dfrac{R}{2}\right) = \dfrac{5\pi R^3}{24}$.

Logo, $V_a = \dfrac{4\pi R^3}{3} - \dfrac{5\pi R^3}{12} - \dfrac{3\pi R^3}{4} = \dfrac{2\pi R^3}{12} = \dfrac{\pi R^3}{6}$.

Resposta: O anel tem volume igual a $\pi R^3/6$.

b)

A área da superfície do anel é dada por $A_a = A_e - 2A_{cal} + A_{cil}$, em que $A_e = 4\pi R^2$, $A_{cil} = 2\pi r(2R - 2h)$ e A_{cal} é dada no enunciado da questão. Como $r = R\sqrt{3}/2$ e h = R/2, temos $A_{cil} = \pi R^2\sqrt{3}$.

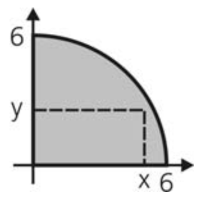
Além disso, $A_{cal} = \pi R^2$. Logo, $A_a = 4\pi R^2 - 2\pi R^2 + \pi R^2\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})\pi R^2$.

Resposta: A área da superfície do anel é igual a $(2+\sqrt{3})\pi R^2$.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 3

a)

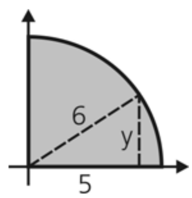


Suponhamos que o centro da base do retalho semicircular esteja sobre a origem dos eixos coordenados, como mostra a figura ao lado. Nesse caso, o retalho conterá a tira de couro se as coordenadas do ponto extremo superior direito do retângulo satisfizerem a desigualdade $x^2 + y^2 \le 6^2$.

Fazendo o centro da base do retângulo também coincidir com a origem, obtemos x = 10/2 = 5 e y = 2,5. Logo, $x^2 + y^2 = 25 + 6{,}25 = 31{,}25 \le 36$. Deste modo, a tira cabe no retalho.

Resposta: O retalho semicircular pode ser usado para a obtenção da tira.

a')

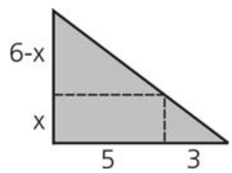


Suponhamos que o centro da base do retalho semicircular esteja sobre a origem dos eixos coordenados, como mostra a figura ao lado. Como a metade da base do retalho mede 5 cm, a altura máxima do retalho, que denominamos y, é dada pela equação $5^2 + y^2 = 6^2$.

Assim, $y = \sqrt{36-25} = \sqrt{11}$. Como $\sqrt{11} > \sqrt{9} = 3 > 2{,}5$, a tira cabe no retalho.

Resposta: O retalho semicircular pode ser usado para a obtenção da tira.

b)

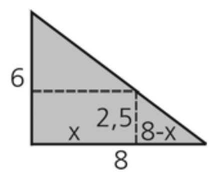


Dada a simetria do triângulo isósceles e do retângulo, trabalharemos apenas com a metade direita do retalho e da tira de couro, como mostra a figura ao lado. Vejamos, então, qual é a altura do maior retângulo de base 10/2 = 5 que pode ser inscrito no triângulo retângulo de catetos 8 e 6.

Usando a regra de três $\frac{6-x}{5} = \frac{x}{3}$, obtemos 5x = 3(6 − x), ou 8x = 18, ou ainda x = 18/8 = 2,25 cm. Como esse valor é menor que 2,5 cm, a tira de couro não cabe no retalho triangular.

Resposta: O retalho triangular não pode ser usado para a obtenção da tira.

b')



Dada a simetria do triângulo isósceles e do retângulo, trabalharemos apenas com a metade direita do retalho e da tira de couro, como mostra a figura ao lado. Vejamos, então, qual é a largura do maior retângulo de altura 2,5 que pode ser inscrito no triângulo retângulo de catetos 8 e 6.

Usando a regra de três $\frac{6}{8} = \frac{2{,}5}{8-x}$, obtemos 6.8 − 6x = 2,5.8, ou 6x = 28, donde x = 28/6 = 14/3 cm. Como esse valor é menor que 5 cm, a tira de couro não cabe no retalho triangular.

Resposta: O retalho triangular não pode ser usado para a obtenção da tira.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 4

a)

Se cada pedalada desloca a bicicleta em 3,15 m, as 100 pedaladas fazem-na percorrer 315 m. Essa distância corresponde ao comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo que representa a rampa. A altura h desse triângulo é dada por 315sen(α). Como $\cos(\alpha) = \sqrt{0{,}99}$ e $\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, temos $\text{sen}^2(\alpha) + 0{,}99 = 1$, ou $\text{sen}(\alpha) = \sqrt{1 - 0{,}99} = \sqrt{0{,}01} = 0{,}1$. Logo, h = 315x0,1 = 31,5 m.

Resposta: As 100 pedaladas farão Laura subir 31,5 m.

a')

Se cada pedalada desloca a bicicleta em 3,15 m, as 100 pedaladas fazem-na percorrer 315 m. Essa distância corresponde ao comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo que representa a rampa. A base desse triângulo é dada por $315\cos(\alpha) = 315\sqrt{0{,}99}$. Usando, então, o teorema de Pitágoras, obtemos $(315\sqrt{0{,}99})^2 + h^2 = 315^2$. Logo, $h^2 = 315^2(1 - 0{,}99) = 315^2 \times 0{,}01$, de modo que $h = 315 \times 0{,}1 = 31{,}5$ m.

Resposta: As 100 pedaladas farão Laura subir 31,5 m.

b)

A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Assim, o terceiro ângulo do triângulo direito do quadro da bicicleta mede 180 – 24 – 77 = 79º. Somando esse valor ao ângulo de 26º, concluímos que o ângulo superior do triângulo esquerdo do quadro da bicicleta é igual a 180 – 26 – 79 = 75º. Assim, o outro ângulo desse triângulo mede 180 – 75 – 30 = 75º, de modo que o triângulo é isósceles. Nesse caso, o comprimento b é dado por a/[2.sen(15º)].

Como $\text{sen}(15°) = \text{sen}(45° - 30°) = \text{sen}(45°)\cos(30°) - \text{sen}(30°)\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, temos

$$b = \frac{22}{2\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)/4} = \frac{44}{\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)}\text{cm.}$$

Resposta: A barra que liga o eixo da roda ao eixo dos pedais mede $44/\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$cm.

b')

A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Assim, o terceiro ângulo do triângulo direito do quadro da bicicleta mede 180 – 24 – 77 = 79º. Somando esse valor ao ângulo de 26º, concluímos que o ângulo superior do triângulo esquerdo do quadro da bicicleta é igual a 180 – 26 – 79 = 75º. Assim, o outro ângulo desse triângulo mede 180 – 75 – 30 = 75º, de modo que o triângulo é isósceles. Aplicando a lei dos senos a esse triângulo, obtemos $\frac{\text{sen}(30°)}{a} = \frac{\text{sen}(75°)}{b}$. Assim, o comprimento b é dado por a.sen(75º)/sen(30º). Como $\text{sen}(75°) = \text{sen}(45° + 30°) = \text{sen}(45°)\cos(30°) + \text{sen}(30°)\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, chegamos a

$$b = \frac{22\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)/4}{(1/2)} = 11\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\text{cm.}$$

Resposta: A barra que liga o eixo da roda ao eixo dos pedais mede $11\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$cm.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

b’’) A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Assim, o terceiro ângulo do triângulo direito do quadro da bicicleta mede 180 – 24 – 77 = 79º. Somando esse valor ao ângulo de 26º, concluímos que o ângulo superior do triângulo esquerdo do quadro da bicicleta é igual a 180 – 26 – 79 = 75º. Assim, o outro ângulo desse triângulo mede 180 – 75 – 30 = 75º, de modo que o triângulo é isósceles.
Usando a lei dos cossenos, escrevemos $a^2 = b^2 + b^2 - 2.b.b.\cos(30°) = 2b^2 - 2b^2\sqrt{3}/2 = (2-\sqrt{3})b^2$. Assim, $b = a\Big/\sqrt{2-\sqrt{3}} = 22\Big/\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm.

Resposta: A barra que liga o eixo da roda ao eixo dos pedais mede $22\Big/\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm.

Questão 5

a)

O valor presente da segunda parcela é dado por $V_p = 200\Big/\left[1+\frac{1}{100}\right]^1 = 200/1{,}01$, que corresponde, aproximadamente, a R$ 198,02. Somando esse valor à primeira parcela, obtemos 200,00 + 198,02 = R$398,02, que é o valor presente da mercadoria.

Resposta: O valor presente da mercadoria é R$ 398,02.

b)

Se não há entrada, o valor presente da primeira mercadoria é $V_p^1 = p\Big/\left[1+\frac{1}{100}\right]^1 = p/1{,}01$. Já o valor presente da segunda mercadoria é $V_p^2 = p\Big/\left[1+\frac{1}{100}\right]^2 = p/1{,}01^2$. Somando esses dois termos, obtemos $V_p = V_p^1 + V_p^2 = p/1{,}01 + p/1{,}01^2 = (2{,}01/1{,}01^2)p$, que equivale a, aproximadamente, 1,97p. Considerando que a mercadoria custa 2p, deve-se dar um desconto de, ao menos, (2 – 1,97)/2 = 0,015, ou 1,5%.

Resposta: O desconto não deve ser inferior a 1,5%.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 6

a)

O número total de cupons é igual a 78000 + 70000 + 2x52000 + 3x36000 = 360000. Desses, 3x36000 = 108000 foram dados a proprietários de aparelhos com preço maior que R$ 300,00. Logo, a probabilidade pedida é igual a 3x36/360 = 0,3.

Resposta: Foram distribuídos 360000 cupons. A probabilidade de que o prêmio seja entregue a uma pessoa que comprou um aparelho com custo superior a R$ 300,00 é igual a 0.3, ou 30%.

b)

A receita bruta da empresa é dada por r(p) = p x n(p) = p(115 – 0,25p). Essa função tem como raízes p = 0 e p = 115/0,25 = 460. Como o coeficiente que multiplica o termo quadrático de r(p) é negativo, essa função assume seu valor máximo em p = (0 + 460)/2 = 230.

Resposta: O valor de p que maximiza a receita bruta é R$ 230,00.

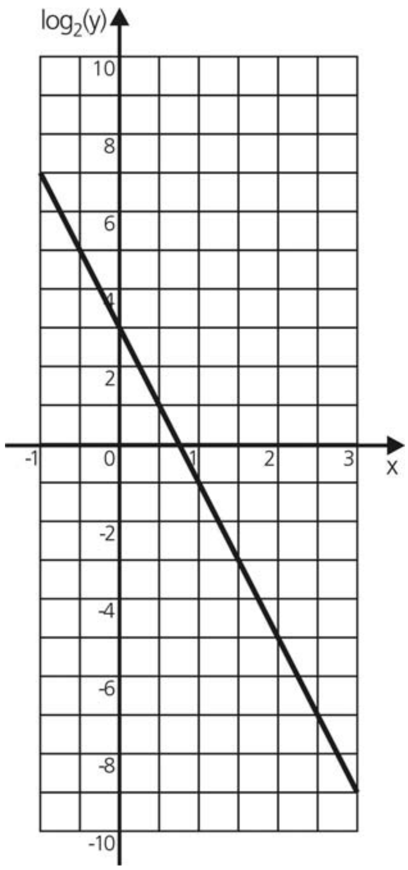
b')

A receita bruta da empresa é dada por r(p) = p x n(p) = 115p – $0,25p^2$. Como o coeficiente que multiplica o termo quadrático dessa função é negativo, o valor máximo ocorre em p = –b/2a = –115/[2 × (–0,25)] = 230.

Resposta: O valor de p que maximiza a receita bruta é R$ 230,00.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 7



a)
Aplicando o logaritmo na base 2 aos dois lados da equação y = f(x), obtemos $\log_2(y) = \log_2(8) - \log_2(4^{2x})$, ou simplesmente $\log_2(y) = 3 - 4x$. O gráfico desejado é mostrado ao lado.

Resposta: A curva desejada é representada no gráfico ao lado.

b)
O sistema fornecido é equivalente a

$$\begin{cases} 8/4^{2z} & = & 4^{y} \\ 8/(4^{2y}4^{z}) & = & 1. \end{cases}$$

Aplicando o logaritmo na base 2 aos dois lados das duas equações acima, obtemos

$$\begin{cases} \log_2(8) - \log_2(4^{2z}) & = & \log_2(4^{y}) \\ \log_2(8) - \log_2(4^{2y}) - \log_2(4^{z}) & = & \log_2(1), \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} 3 - 4z & = & 2y \\ 3 - 4y - 2z & = & 0. \end{cases}$$

Esse sistema equivale a

$$\begin{cases} 2y + 4z & = & 3 \\ 4y + 2z & = & 3, \end{cases}$$

cuja solução é dada por y = 1/2 e z = 1/2.

Resposta: y = 1/2 e z = 1/2.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 8

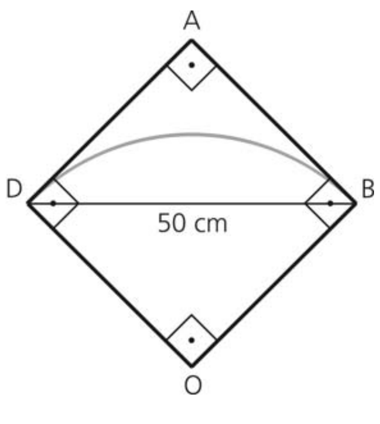
a)
A área do quadrilátero é a soma das áreas do triângulo equilátero BCD e do triângulo retângulo ABD. O triângulo BCD tem base igual a 50 cm e altura $h = \sqrt{50^2 - 25^2} = 25\sqrt{3}$ cm, de modo que sua área é $A_{BCD} = 50 \times 25\sqrt{3} / 2 = 625\sqrt{3}$ cm^2. Já o triângulo ABD tem 50 cm de base e 25 cm de altura, de modo que sua área é $A_{ABD} = 50 \times 25 / 2 = 625$ cm^2. Logo, $A_{ABCD} = 625\sqrt{3} + 625 = 625(1+\sqrt{3})$ cm^2.

Resposta: O quadrilátero de papel tem área igual a $625(1+\sqrt{3})$ cm^2.

a')
Opcionalmente, podemos definir $h_{BCD} = 50\cos(30°) = 50 \cdot \sqrt{3}/2 = 25\sqrt{3}$ cm, o que nos leva ao mesmo resultado apresentado acima.

Resposta: O quadrilátero de papel tem área igual a $625(1+\sqrt{3})$ cm^2.

b)
Como o arco de circunferência que define a vareta curva de bambu tangencia as arestas AB e AD, o segmento OD que liga o centro da circunferência ao ponto D faz um ângulo de 90° com a aresta AD. Da mesma forma, os segmentos OB e AB são perpendiculares. Assim, como o ângulo DÂB é reto, o arco corresponde a 1/4 da circunferência.
Uma vez que o segmento BD tem 50 cm, o comprimento do raio da circunferência é $r = \sqrt{25^2 + 25^2} = 25\sqrt{2}$ cm. Assim, a vareta mede $2\pi r / 4 = 25\pi\sqrt{2} / 2$ cm.



Resposta: A vareta de bambu que liga os pontos B e D mede $25\pi\sqrt{2} / 2$ cm.

b')
Opcionalmente, podemos definir $r = (50/2)/\text{sen}(45°) = 25/(\sqrt{2}/2) = 25\sqrt{2}$ cm, obtendo o mesmo resultado apresentado acima.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 9

a)

O determinante de A é $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$. Como A tem apenas três elementos diferentes de zero, para que det(A) $\neq$ 0, é preciso que um desses produtos seja não nulo. Temos, portanto, 6 possibilidades de obter uma matriz como a desejada.

Por outro lado, o número total de matrizes com seis elementos nulos e três diferentes de zero é dado por $C_{9,3} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9.8.7}{3.2.1} = 84$. Logo, a probabilidade de que det(A) $\neq$ 0 é igual a 6/84 = 1/14.

Resposta: A probabilidade de que o determinante não seja nulo é igual a 1/14.

b)

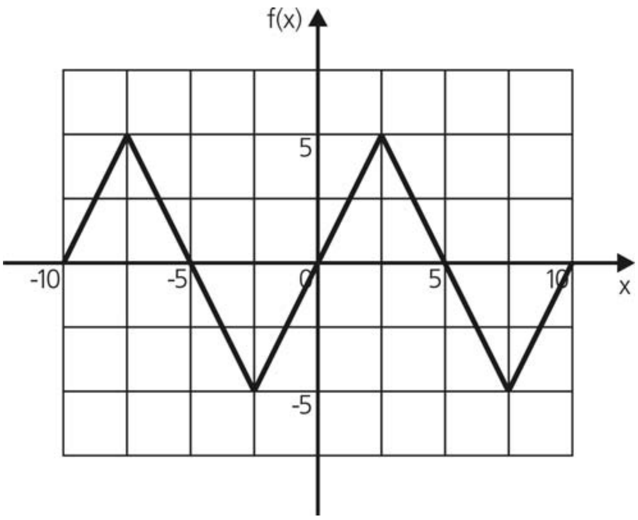
Nesse caso, a matriz A é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. A inversa dessa matriz pode ser obtida aplicando-se operações elementares sobre suas linhas, como se mostra abaixo.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_3=\ell_3-3\ell_1]{\ell_2=\ell_2-2\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_3=\ell_3-2\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Resposta: $\mathbf{A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}}$**.**

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 10



a)
O gráfico ao lado mostra a função no intervalo [–10, 10].
Como a função tem período 10, temos f(99) = f(9). Além disso, como f(7,5) = -5 e f(10) = 0, e a função é linear no intervalo [7,5; 10], temos também $\frac{f(9)-f(7,5)}{9-7,5} = \frac{f(10)-f(7,5)}{10-7,5}$.

Logo, $f(9) = -5 + \frac{[0-(-5)]x1,5}{2,5} = -5+3 = -2$.

Resposta: O gráfico da função é mostrado ao lado. Além disso, f(99) = –2.

b)
Como f(2,5) = 5 e f(5) = 0, temos f(x) = 10 – 2x no intervalo [2,5; 5]. Assim, f(3) = 4 e g(f(3)) = g(4) = 4^2 – 4.4 = 0.
Nesse mesmo intervalo, a composição das funções fornece h(x) = $(10 – 2x)^2$ – 4(10 – 2x) = $4x^2$ – 32x + 60.

Resposta: Como f(3) = 4, temos h(3) = 0. De forma geral, h(x) = $4x^2$ – 32x + 60 no intervalo [2,5; 5].

Questão 11

a)
Uma vez que as retas são perpendiculares, o coeficiente angular da reta que passa por B e C é –1/a. Como essa reta passa pelo ponto (2, 0), temos 0 = (–1/a).2 + b, de modo que b = 2/a, e a reta é y = –x/a + 2/a. Logo, C = (0, 2/a).

Resposta: O ponto C tem coordenadas (0, 2/a).

b)
Se a = 3, o ponto A é a interseção das retas y = 3x e y = –x/3 + 2/3. Logo, 3x = –x/3 + 2/3, ou seja, x = 1/5. Assim, y = 3/5.
A circunferência de centro em A e tangente ao eixo x é dada por $(x – 1/5)^2 + (y – 3/5)^2 = 9/25$.

Resposta: O ponto A tem coordenadas (1/5, 3/5). Logo, a circunferência de centro em A e tangente ao eixo x é dada por $(x – 1/5)^2 + (y – 3/5)^2 = 9/25$.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 12

a)

O número de membros novos, a_n, que o *site* A admitirá na semana n é o n-ésimo termo de uma progressão geométrica com razão r = 2 e primeiro termo $a_1 = 100$. Assim, $a_n = 100.2^{n-1}$. Como n = 6, temos $a_6 = 100.2^5 = 3200$. Já o número de membros que o *site* A terá em seis semanas é igual à soma do número atual de associados com o somatório dos seis primeiros termos da progressão geométrica, S_6. Como $S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$, temos $S_6 = 100\frac{1-2^6}{1-2} = 100 \times 63 = 6300$. Logo, o *site* terá $T_A = 6300 + 150 = 6450$ membros.

Resposta: Daqui a seis semanas, o *site* A admitirá 3200 novos membros, atingindo a marca de 6450 participantes.

b)

O número de membros que serão admitidos no *site* B daqui a n semanas é dado pela progressão aritmética com termo geral $a_n = a_1 + (n - 1).r$, em que r = 100 e $a_1 = 100$. Logo, $a_n = 100n$. O número total de associados desse *site* após n semanas é dado por $T_B = 2200 + S_n$, em que $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ é a soma dos termos da progressão aritmética. Assim, $T_B = 2200 + n(100 +100n)/2 = 2200 + 50n + 50n^2$. O *site* terá 10000 membros quando $T_B = 2200 + 50n + 50n^2 = 10000$, ou $50n^2 + 50n - 7800 = 0$, ou ainda, $n^2 + n - 156 = 0$. Usando a fórmula de Bháskara, obtemos $n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 156}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{625}}{2} = \frac{-1 \pm 25}{2}$. Logo, n = 12 ou n = –13. Desprezando a raiz negativa, concluímos que n = 12.

Resposta: O *site* B terá 10000 membros em 12 semanas.