Canguru Brasil 2013 – Nível J - Soluções

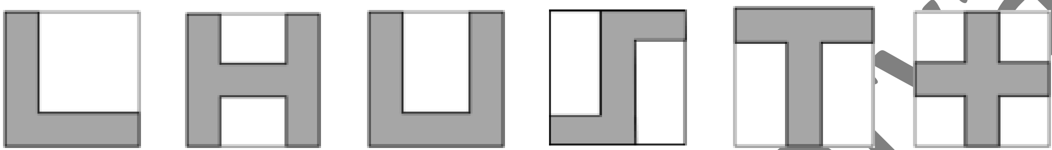
Problemas de 3 pontos

01. O número 200 013 – 2 013 não é divisível por qual dos números a seguir?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 5 **(D)** 7 **(E)** 11

01. Resposta: alternativa D
Tanto 200 013 como 2 013 são divisíveis por 3 e por 11, logo sua diferença também será divisível por esses dois números. A diferença entre esses dois números termina em 0, logo será divisível por 2 e por 5. Portanto, o número não é divisível por 7.

02. Maria desenhou várias figuras cinzentas em folhas quadradas iguais. Essas figuras são formadas por linhas paralelas aos lados dos quadrados, conforme observamos abaixo:



Quantas dessas figuras têm o mesmo perímetro que a folha em que foram desenhadas?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

02. Resposta: alternativa C
Se as linhas que compõem a figura estiverem sobre os lados do quadrado ou puderem ser transladadas até esses lados, completando o quadrado sem sobreposições, então a figura tem o mesmo perímetro da folha. Isto não ocorre com a segunda e a terceira figuras da esquerda para a direita. Logo, com o mesmo perímetro da folha, há 4 figuras.

03. Dona Margarete comprou quatro espigas de milho verde para cada um dos quatro membros de sua família. Ela aproveitou o desconto oferecido pela lanchonete, de acordo com o aviso ao lado. Quanto ela pagou?

(A) R$0,80 **(B)** R$1,20 **(C)** R$2,80 **(D)** R$3,00 **(E)** R$3,20

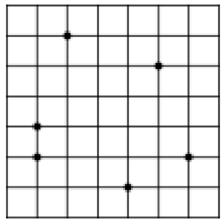
03. Resposta: alternativa C
Ela comprou 16 espigas, mas deixou de pagar duas. Portanto, ela pagou $14 \times 0{,}20 = 2{,}80$ reais.

04. Três dos números 2, 4, 16, 25, 50, 125 têm produto igual a 1000. Qual é a soma desses três números?

(A) 45 **(B)** 70 **(C)** 77 **(D)** 131 **(E)** 143

04. Resposta: alternativa D
Como $1000 = 2^3 \times 5^3$, temos $2 \times 4 \times 125 = 1000$. A soma desses três números é $2 + 4 + 125 = 131$

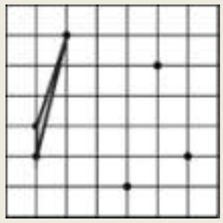
05. Na figura ao lado, temos seis pontos sobre as intersecções das linhas de um quadriculado, cujos quadradinhos têm lado 1. Calculando as áreas de todos os triângulos com vértices nestes pontos, qual a menor área encontrada?



(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 10 **(E)** 11

05. Resposta: alternativa A

Independentemente de como os pontos estão distribuídos, a menor área que um triângulo pode ter neste quadriculado é $\frac{1}{2}$ (caso em que os três pontos são vértices de um quadradinho). Há um triângulo com essa área, destacado na figura ao lado (a base é o segmento vertical de comprimento 1 e a altura é a distância do terceiro vértice à reta que contém essa base, igual a 1).



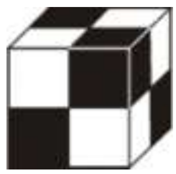
06. Somando o número 4^{15} ao número 8^{10}, Miguel obteve um número que é uma potência de 2. Qual é esse número?

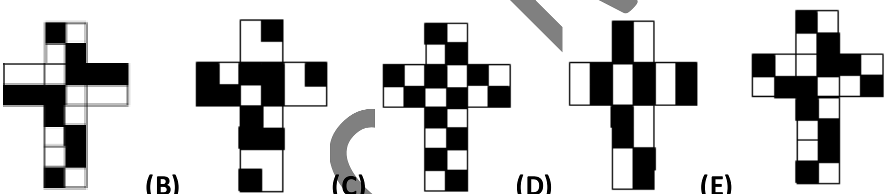
(A) 2^{10} **(B)** 2^{15} **(C)** 2^{27} **(D)** 2^{30} **(E)** 2^{31}

06. Resposta: alternativa E

$4^{15}+8^{10}=\left(2^2\right)^{15}+\left(2^3\right)^{10}=2^{30}+2^{30}=2\cdot 2^{30}=2^{31}$

07. Em cada face de um cubo foram pintados dois quadrados brancos e dois quadrados pretos, parecendo que o cubo é feito de quatro cubos brancos e quatro cubos pretos, conforme indicado na figura. Qual é a planificação desse cubo, pintado dessa maneira?

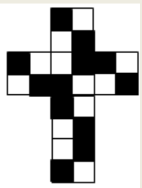




(A) **(B)** **(C)** **(D)** **(E)**

07. Resposta: alternativa E

Cada face tem dois quadradinhos brancos e dois pretos, sendo que dois de mesma cor não são vizinhos. Por outro lado, os três quadradinhos que partilham o mesmo vértice do cubo são da mesma cor. A planificação do cubo é a figura (E).

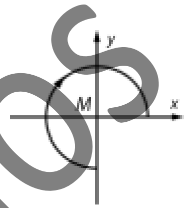


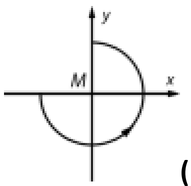
08. O número n é o maior inteiro positivo tal que $4n$ é um número de três algarismos e m é o menor inteiro positivo tal que $4m$ é também um número de três algarismos. Qual é o valor de $4n-4m$?

(A) 224 **(B)** 225 **(C)** 896 **(D)** 899 **(E)** 900

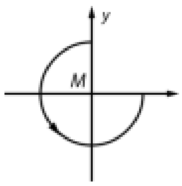
08. Resposta: alternativa C
$4n=1000-4=996$ e $4m=100$. Logo, $4n-4m=996-100=896$.

09. Um arco orientado de 270° e centro na origem M do sistema cartesiano encontra-se inicialmente na posição indicada na figura ao lado. Qual será a posição deste arco, após uma rotação de 90° ao redor de M no sentido anti-horário e uma reflexão em torno do eixo dos x?

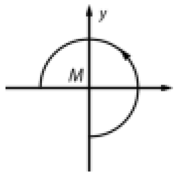




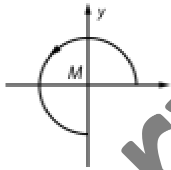
(A)



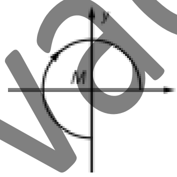
(B)



(C)

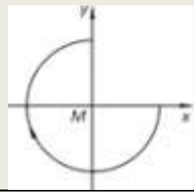


(D)



(E)

09. Resposta: alternativa D
Após a rotação de 90° ao redor de M no sentido anti-horário, o arco irá apresentar-se como na figura ao lado. Com a reflexão deste arco ao redor do eixo Ox, irá aparecer como na figura (D)



10. Qual dos números a seguir é o maior?

(A) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{13}$ **(B)** $\sqrt{20}\cdot 13$ **(C)** $20\cdot\sqrt{13}$ **(D)** $\sqrt{201}\cdot 3$ **(E)** $\sqrt{2013}$

10. Resposta: alternativa C
Temos

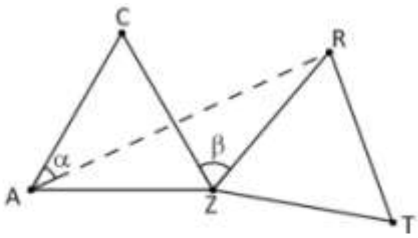
$\sqrt{20}\cdot\sqrt{13}=\sqrt{20\cdot 13}=\sqrt{260}$

$\sqrt{20}\cdot 13=\sqrt{20\cdot 13^2}=\sqrt{3380}$

$20\sqrt{13}=\sqrt{20^2\cdot 13}=\sqrt{5200}$

$\sqrt{201}\cdot 3=\sqrt{201\cdot 3^2}=\sqrt{1809}$

Problemas de 4 pontos



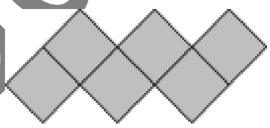
11. O triângulo *RZT* é a imagem do triângulo equilátero *AZC*, após uma rotação ao redor de *Z*, conforme ilustrado na figura, onde $\beta = 70^{o} = m\left(C\hat{Z}R\right)$. Qual é, nessa figura, o valor de $\alpha = m\left(C\hat{A}R\right)$?

(A) 20^{o} **(B)** 25^{o} **(C)** 30^{o} **(D)** 35^{o} **(E)** 40^{o}

11. Resposta: alternativa D
No triângulo equilátero *ACZ*, temos $m\left(A\hat{Z}C\right) = 60^{o}$. Portanto, no triângulo isósceles *AZR*, temos

$m\left(A\hat{Z}R\right) = 60^{o} + 70^{o} = 130^{o}$ e, por consequência, $m\left(R\hat{A}Z\right) = \dfrac{180^{o} - 130^{o}}{2} = 25^{o}$. Assim,

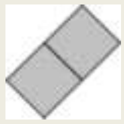
$m\left(C\hat{A}R\right) = 60^{o} - 25^{o} = 35^{o}$.



12. A figura ao lado apresenta um zigue-zague de seis quadrados de lado 1 cm. O perímetro do zigue-zague é 14 cm. Qual é o perímetro, em centímetros, de um zigue-zague do mesmo tipo feito com 2013 quadrados?

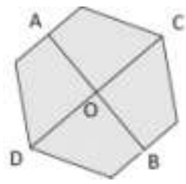
(A) 2022 **(B)** 4028 **(C)** 4032 **(D)** 6038 **(E)** 8050

12. Resposta: alternativa B



Juntando a um quadrado de 4 cm de perímetro outro quadrado igual, obtemos uma figura de

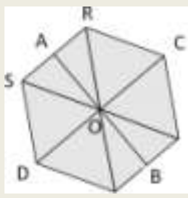
perímetro 4 + 2 = 6 cm, pois desapareceram dois lados de 1 cm com a junção. Logo, a cada quadrado que anexamos para formar o zigue-zague, aumentamos o perímetro em 2 cm. Assim, um zigue-zague de 2013 quadrados tem como perímetro $4 + 2012 \cdot 2 = 4028$ cm.



13. O segmento $\overline{CD}$ liga dois vértices diametralmente opostos de um hexágono. O segmento $\overline{AB}$ liga os pontos médios de dois lados opostos do mesmo. Se a área do hexágono é 60 cm², qual é o produto de *AB* por *CD*?

(A) 40 cm² **(B)** 50 cm² **(C)** 60 cm² **(D)** 80 cm² **(E)** 100 cm²

13. Resposta: alternativa D



O hexágono é composto de 6 triângulos equiláteros congruentes. A área do hexágono é 60cm^2, logo a área de cada triângulo é 10cm^2. A área do triângulo *SRO* é igual a $\dfrac{SR \cdot AO}{2}$, pois *SR* é medida da base e *AO* é a altura. Assim, $SR \cdot AO = 20\text{cm}^2$. Como $AB = 2 \cdot AO$ e $CD = 2 \cdot SR$, concluímos que $AB \cdot CD = 2 \cdot 2 \cdot SR \cdot AO = 4 \cdot 20 = 80$ cm².

14. Numa classe do colégio, na prova de Matemática, se cada um dos meninos tivesse tirado 3 pontos a mais, então a média de toda a classe teria sido 1,2 pontos maior. Qual é a porcentagem de meninas nesta classe?

(A) 20% **(B)** 30% **(C)** 40% **(D)** 50% **(E)** 60%

14. Resposta: alternativa E

Se a classe tem n alunos, então a média da classe na prova foi $\frac{S}{n}$, sendo S a soma das notas de todos os alunos. Se x é o número de meninos então $\frac{S+3x}{n}=\frac{S}{n}+1,2 \Leftrightarrow \frac{S}{n}+\frac{3x}{n}=\frac{S}{n}+1,2 \Leftrightarrow \frac{3x}{n}=1,2 \Leftrightarrow x=0,4n$. Logo, o número de meninas é 0,6n, ou seja, 60% dos alunos da classe.

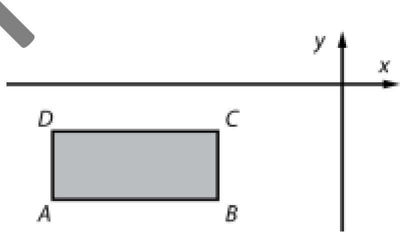
15. Hoje Pedro e seu filho estão celebrando seus aniversários. Pedro resolveu multiplicar sua idade pela idade de seu filho e obteve como resultado o número 2013. Em que ano nasceu Pedro?

(A) 1952 **(B)** 1953 **(C)** 1980 **(D)** 1981 **(E)** 1992

15. Resposta: alternativa A

Temos $2013=3\times11\times61$. A única opção sensata para 2013 ser igual ao produto de dois números é 33×61. Logo, como é o pai, Pedro tem 61 anos em 2013. Portanto, Pedro nasceu em 2013 – 61 = 1952.

16. Os lados de um retângulo *ABCD* são paralelos aos eixos coordenados. O retângulo está no terceiro quadrante. Para cada um desses pontos calculamos o quociente entre o valor da ordenada y e o valor da abscissa x. Para qual dos pontos encontraremos o menor valor?

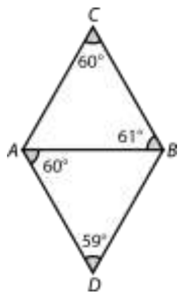


(A) *A* **(B)** *B* **(C)** *C* **(D)** *D* **(E)** depende das dimensões e posição do retângulo

16. Resposta: alternativa D

Todas as coordenadas dos quatro pontos são números negativos. Logo, o quociente $\frac{y}{x}$ é um número positivo e o menor valor será aquele em que $|y|$ é o menor e $|x|$ é o maior. Isto acontece para o ponto D.

17. A figura ao lado contém cinco segmentos e dois triângulos. No triângulo *ABC*, temos $m(A\hat{B}C)=61^\circ$ e $m(A\hat{C}B)=60^\circ$, e no triângulo *ABD*, temos $m(B\hat{A}D)=60^\circ$ e $m(A\hat{D}B)=59^\circ$. Qual dos cinco segmentos é o mais comprido?



(A) AD **(B)** AC **(C)** AB **(D)** BC **(E)** BD

17. Resposta: alternativa A

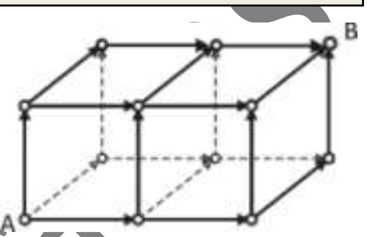
No triângulo *ABC*, $m(C\hat{A}B)=59^\circ$ e no triângulo *ABD*, $m(A\hat{B}D)=61^\circ$. Logo, os dois triângulos são semelhantes e como no triângulo *ABD* o lado *AB* é o menor (pois se opõe ao menor ângulo), mas no triângulo *ABC* não é o menor, concluímos que o triângulo *ABD* é maior que o triângulo *ABC*. O maior lado do triângulo *ABD* é então o maior segmento, oposto ao maior ângulo, ou seja, o segmento *AD*.

18. Cinco inteiros positivos e consecutivos têm a seguinte propriedade: três deles têm a mesma soma que os outros dois. Quantos conjuntos de números com essa propriedade existem?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** mais de 3

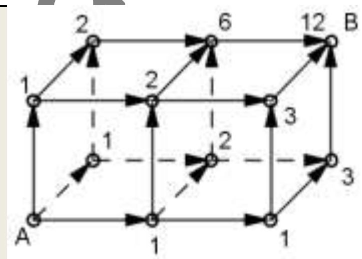
18. Resposta: alternativa C
Os números são $x+0, x+1, x+2, x+3$ e $x+4$, para x inteiro positivo. Se a soma de três desses números é igual à soma dos outros dois, isto é, se $3x+a=2x+b$, então $x=b-a$, sendo $a+b=1+2+3+4=10 \Leftrightarrow b=10-a$. Logo, $x=10-2a$, com $a \geq 3$ (já que a é a soma de três números). Logo, a = 3 ou a = 4. Há somente dois conjuntos com essa propriedade: {4, 5, 6, 7, 8} e {2, 3, 4, 5, 6}.

19. Quantos caminhos diferentes existem para ir do ponto A ao ponto B, seguindo a direção das flechas, no diagrama ao lado?



(A) 6 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 12 **(E)** 15

19. Resposta: alternativa D
Marquemos em cada vértice a quantidade de caminhos que chegam neste vértice a partir de A. Começando pelos vizinhos de A, que tem um caminho cada, observe que a quantidade de caminhos para chegar num vértice X é igual ao total de caminhos para chegar nos vértices que chegam em X (vértices que possuem uma flecha apontada para X). Deste modo, conseguimos calcular quantos caminhos chegam a cada vértice da figura e concluímos que há 12 caminhos que chegam em B.



Solução Alternativa: Um caminho de A a B consiste de andar duas unidades na direção O*x*, uma unidade na direção O*y* e uma unidade na direção O*z*, em alguma ordem. Assim, o total de caminhos de A a B é igual à quantidade de anagramas da palavra *xxyz*, onde cada letra representa uma direção que precisamos caminhar para chegar a B. Portanto o total de caminhos é igual a $\dfrac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!}=12$.

20. Um número de seis algarismos tem as seguintes propriedades: a soma dos algarismos é par e o produto desses algarismos é ímpar. Qual das seguintes afirmações sobre esse número é verdadeira?

(A) Dois ou quatro algarismos do número são pares.
(B) Não existe tal número.
(C) A quantidade de algarismos ímpares do número é ímpar.
(D) O número pode ter seis algarismos distintos.
(E) Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

20. Resposta: alternativa E
Se o produto dos seis algarismos é ímpar, então todos eles são ímpares. Logo, as afirmações (A), (B), (C) e (D) são falsas, que é o que diz a alternativa (E).

Problemas de 5 pontos

21. Transformando a fração $\dfrac{1}{1024000}$ num numeral decimal, quantas casas decimais deverão ser escritas?

(A) 10 **(B)** 12 **(C)** 13 **(D)** 14 **(E)** 102400

21. Resposta: alternativa C

$\dfrac{1}{1024\,000}=\dfrac{1}{2^{10}\cdot 10^{3}}=\dfrac{1}{2^{10}\cdot 2^{3}\cdot 5^{3}}=\dfrac{1}{2^{13}\cdot 5^{3}}=\dfrac{5^{10}}{2^{13}\cdot 5^{13}}=\dfrac{5^{10}}{10^{13}}$. Como o numerador não contém o fator 10, concluímos que o número de casas decimais é igual ao expoente da potência de 10 do denominador, ou seja, igual a 13.

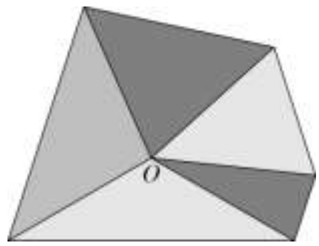
22. Quantos números inteiros positivos são múltiplos de 2013 e têm exatamente 2013 divisores positivos, incluindo 1 e o próprio número?

(A) 0 **(B)** 2 **(C)**4 **(D)** 6 **(E)** mais de 6

22. Resposta: alternativa D

Temos $2013=3\times 11\times 61$. Logo, os múltiplos de 2013 são números da forma $3^{x}\cdot 11^{y}\cdot 61^{z}$, sendo *x*, *y* e *z* números naturais tais que $(x+1)\cdot(y+1)\cdot(z+1)=2013$ (número de divisores positivos dos múltiplos). O produto de três números é 2013 se esses números forem 3, 11 e 61, em qualquer ordem. Portanto, o número de divisores é 3! = 6.

23. Vários triângulos isósceles não sobrepostos têm o vértice O em comum. Cada triângulo tem um lado comum com seu vizinho. O menor ângulo em O mede m° e os demais medem $2m^{\circ}$, $3m^{\circ}$, $4m^{\circ}$, etc. , um para cada triângulo, sendo *m* um inteiro positivo. O desenho ao lado mostra um conjunto de cinco triângulos. Qual é o menor valor de *m* para o qual este conjunto existe?



(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 6 **(E)** 8

23. Resposta: alternativa C

A soma de todos os ângulos ao redor de O é igual a 360°, logo $m+2m+\ldots+km=360 \Leftrightarrow (1+2+\ldots k)m=360$ $\Leftrightarrow k(k+1)m=720$. Como *m* é inteiro positivo, o número $k(k+1)$ é um divisor de 720 e para que *m* seja o menor possível, esse divisor deve ser o maior possível. Verificamos que $k(k+1)$ não pode ser 720, nem 360, mas $15\times 16=240$. Logo, o menor valor de *m* é $\dfrac{720}{240}=3$.

24. Começando com um conjunto de três números, a operação *muda-soma* cria um novo conjunto de três números iguais a todas as somas de dois números do conjunto anterior. Por exemplo, aplicando a operação ao conjunto $\{3,4,6\}$ obtemos o conjunto $\{7,9,10\}$. Se começarmos com o conjunto $\{1,2,3\}$, quantas operações serão necessárias para fazer aparecer o número 2 013 em algum conjunto?

(A) 8 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** mais do que 10 **(E)** nunca irá aparecer o 2 013

24. Resposta: alternativa E
Verificamos que cada um dos conjuntos obtidos pela operação é formado por três números consecutivos, dos quais um é uma potência de 2:

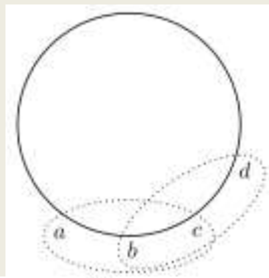
$$\{1,2,3\} \xrightarrow{1^a} \{3,4,5\} \xrightarrow{2^a} \{7,8,9\} \xrightarrow{3^a} \{15,16,17\} \ldots \xrightarrow{n^a} \{2^{n-1}-1, 2^{n-1}, 2^{n-1}+1\}$$

O número 2013 teria que aparecer em algum dos três conjuntos {2013, 2014, 2015}, {2012, 2013, 2014} ou {2011, 2012, 2013}, mas nenhum deles contém uma potência de 2. Logo, o número 2013 nunca irá aparecer.

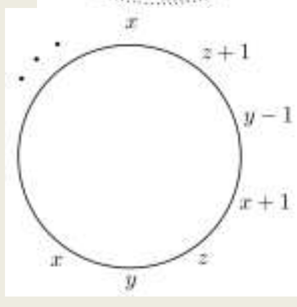
25. Os números inteiros de 1 a 10 são escritos ao redor de um círculo, em uma ordem qualquer. Ao somar cada um dos números aos seus dois vizinhos, obtemos 10 somas. Qual é o maior valor possível da menor dessas 10 somas?

(A) 14 **(B)** 15 **(C)** 16 **(D)** 17 **(E)** 18

25. Resposta: alternativa B
Cada número sobre o círculo participa de três somas (duas delas como vizinho de um número e uma somando com os seus vizinhos), assim, a média das 10 somas é igual a $\frac{3(1+2+\ldots+10)}{10}=16{,}5$ e a menor das 10 somas é menor que a média das somas, ou seja, é no máximo 16.

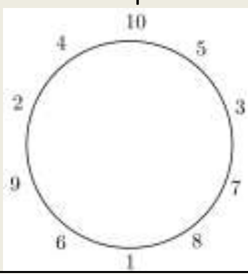


Se a menor das somas for 16, temos que pelo menos metade das 10 somas será 16, caso contrário haverá pelo menos 6 somas maiores que 16 e a média das somas será $\geq \frac{4\cdot 16+6\cdot 17}{10}=16{,}6$. Por outro lado, se no círculo há duas somas consecutivas $a+b+c$ e $b+c+d$ iguais, teremos $a=d$, ou seja, dois elementos repetidos no círculo, um absurdo. Concluímos que há exatamente 5 somas 16 e 5 somas 17 intercaladas no círculo.



Seja então x,y,z três elementos consecutivos no círculo com soma 16. Podemos completar o círculo baseado nestes 3 elementos, já que sabemos todas as somas. Porém ao fazer isto, percebemos que vários elementos vão se repetir, logo a menor soma não pode ser 16.

É possível que a menor soma seja 15, conforme o exemplo abaixo:



26. Numeramos 22 cartões com os números de 1 a 22. Escolhendo duplas de cartões, formamos 11 frações. Qual é o maior número de valores inteiros que essas frações podem ter, em cada uma dessas formações?

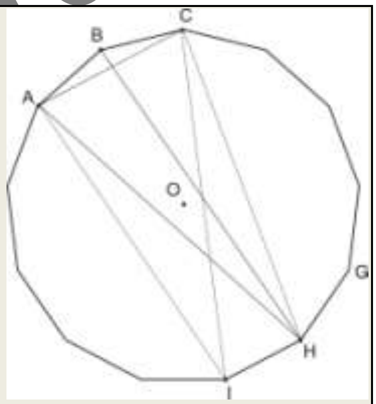
(A) 7 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 10 **(E)** 11

26. Resposta: alternativa D
Observe que os números primos em geral só podem ser numeradores de frações inteiras com denominador 1 e os números 13, 17 e 19 não podem ser denominadores das frações inteiras. Assim, pelo menos uma das frações não será inteira e os números 1, 2, 3, 5, 7 e 11 devem ser denominadores se quisermos que formem frações inteiras. Removendo os números 17 e 19, é possível formar 10 frações inteiras com os números restantes, como no exemplo a seguir: $\frac{22}{11}, \frac{21}{7}, \frac{20}{10}, \frac{19}{1}, \frac{18}{9}, \frac{16}{8}, \frac{15}{5}, \frac{14}{2}, \frac{12}{4}, \frac{6}{3}$.

27. Três vértices distintos de um polígono regular de 13 lados determinam um triângulo. Quantos desses triângulos contêm em seu interior o centro do círculo circunscrito ao polígono?

(A) 72 **(B)** 85 **(C)** 91 **(D)** 100 **(E)** 143

27. Resposta: alternativa C



Sejam A,B,C, ..., M os vértices do tridecágono. Vamos fixar o vértice A e contar quantos triângulos com vértice A contêm o centro O do polígono. O triângulo ABH é o único com vértices A e B. Com vértices A e C temos os triângulos ACH e ACI, com vértices A e D temos os triângulos ADH, ADI e ADJ e assim por diante. Com vértices A e G, temos os seis triângulos AGH, AGI,..., AGM. Quando considerarmos A e H, iremos repetir os triângulos já contados. Portanto, o número de triângulos contendo o centro e o vértice A é $1+2+\ldots+6=\frac{6\times 7}{2}=21$. Como há 13 vértices teremos 13×21 triângulos, contados 3 vezes cada um (ABH, BHA, HAB). Portanto, o número de triângulos distintos contendo o centro O é $\frac{21\times 13}{3}=91$.

Solução alternativa: Todos os triângulos que se formam de um lado da diagonal AH não contêm o centro. O número desses triângulos com vértice H é $\binom{6}{2}=\frac{6\times 5}{2}=15$ (pois dado H, devemos escolher mais dois vértices entre os seis restantes). O mesmo ocorre com o lado da diagonal BH. Assim, para o vértice H, há 30 triângulos que não contêm o centro O. Fazendo o mesmo com os demais vértices, obtemos 13×30. Mas cada um desses triângulos é contado duas vezes (quando consideramos H e depois A, por exemplo). Assim, no número total de triângulos que não contêm O é $\frac{13\times 30}{2}=15\times 13$. O número total de triângulos com vértices nos vértices do polígono é $\binom{13}{3}=\frac{13\times 12\times 11}{2}=22\times 13$. Consequentemente, o número de triângulos que contêm o centro O é $22\times 13-15\times 13=7\times 13=91$.

28. Um carro parte de um ponto e caminha por uma estrada com velocidade constante de 50 km/h. A cada hora posterior, parte do mesmo ponto e pela mesma estrada um carro com velocidade constante mas com 1 km/h a mais que o carro anterior. O último carro partiu 50 horas depois do primeiro (portanto, a 100 km/h). Qual será a velocidade do carro que estará à frente da caravana de carros, quando fizer 100 horas que o primeiro carro saiu?

(A) 50 km/h **(B)** 66 km/h **(C)** 75 km/h **(D)** 84 km/h **(E)** 100 km/h

28. Resposta: alternativa C
No momento em que o primeiro carro completa 100 horas de viagem, a distância percorrida pelo carro número $t + 1$ é igual a $d(t) = (50+t)(100-t)$ para $0 \le t \le 99$ (por exemplo, para o primeiro carro temos $t = 0$ e sua distância é $d(0) = (50+0)(100-0) = 5000$ km; note que o primeiro fator é a velocidade e o segundo é o tempo de viagem do carro). Como $d(t) = 5000 + 50t - t^2$ é uma função quadrática com ponto de máximo, dado por $t = \frac{-50}{2(-1)} = 25$, concluímos que a distância máxima é atingida pelo 26º carro, cuja velocidade é 50 + 25 = 75 km/h.

29. 100 árvores, entre jacarandás e aroeiras, deverão ser plantadas ao longo de uma rodovia. O número de árvores entre duas aroeiras quaisquer não poderá ser igual a cinco. Qual é o maior número possível de aroeiras que podem ser plantadas?

(A) 48 **(B)** 50 **(C)** 52 **(D)** 60 **(E)** 64

29. Resposta: alternativa C
Numeremos as árvores de 1 a 100. Observe que se a árvore *i* é uma aroeira, as árvores $i - 6$ e $i + 6$ devem ser jacarandás, para que não ocorra de haver 5 árvores entre duas aroeiras. Mas um jacarandá na posição $i + 6$ pode ser compartilhado tanto pela aroeira *i* como pela aroeira $i + 12$, assim se quisermos minimizar a quantidade de jacarandás plantados, devemos plantar aroeiras de 12 em 12, pois assim cada aroeira é responsável apenas pelo jacarandá 6 posições à frente.
Se dividirmos as árvores nos seguintes conjuntos: {1, 7, 13,..., 97}, {2, 8, 14,..., 98}, {3, 9, 15,..., 99}, {4, 10, 16,..., 100}, {5, 11, 17,..., 95} e {6, 12, 18,..., 96}; em cada grupo as aroeiras e os jacarandás estão intercalados, logo temos que nos 4 primeiros grupos há no máximo 9 aroeiras (e 8 jacarandás) enquanto nos dois últimos há no máximo 8 aroeiras (e 8 jacarandás), portanto o número máximo de aroeiras é $4 \times 9 + 2 \times 8 = 52$.

30. Iara estava descendo a rua quando viu um trator puxando um longo tubo. Decidida a medir o tubo, Iara caminhou ao longo do tubo em sentido contrário ao do movimento do trator e contou 20 passos. Então ela voltou e caminhou ao longo do tubo no mesmo sentido do movimento do trator e contou 140 passos. Sabendo que o comprimento de seu passo é de um metro, Iara calculou o comprimento do tubo. Quanto ela obteve?

(A) 30 m **(B)** 35 m **(C)** 40 m **(D)** 48 m **(E)** 80 m

30. Resposta: alternativa B
Iara encontrou o tubo de comprimento *L* e andou 20 passos até chegar ao fim do tubo, levando um tempo *t* para isto. Se *v* é a velocidade do tubo (puxado pelo trator), então $L - 20 = vt$. Depois Iara voltou, alcançou o tubo e, caminhando com a velocidade dos seus passos, chegou ao início do tubo, após 140 passos. Isto ocorreu durante o tempo $7t$, pois o tempo que Iara leva para andar 140 passos é igual a 7 vezes o tempo que leva para dar 20 passos. Temos, então, $140 - L = v \cdot 7t \Leftrightarrow 140 - L = 7vt \Leftrightarrow 140 - L = 7(L-20) \Leftrightarrow 8L = 280 \Leftrightarrow L = 35\text{m}$.