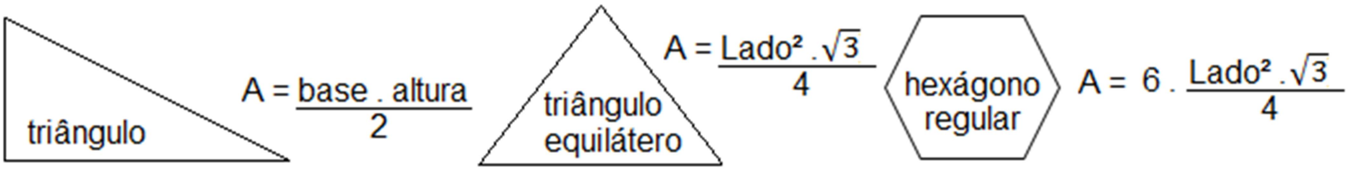
<u>Áreas de figuras planas (triângulos e hexágonos)</u>

A área de uma superfície é um número ou uma relação que expressa o tamanho daquela superfície, ou seja, o seu preenchimento. É importante não confundir o conceito de área com o conceito de perímetro. Perímetro é a soma do contorno dos lados. Vejamos um exemplo onde seja possível notar com clareza essa diferença.

"O prefeito de uma cidade quer colocar arame farpado e grama sintética num terreno baldio." A quantidade de arame farpado ao redor do terreno está associada ao perímetro e a quantidade de grama sintética na superfície do terreno está associada à área.



* Fórmula de Heron

É possível calcular a área de um triângulo também, utilizando a fórmula de Heron. Sendo p o semiperímetro do triângulo: A = $\sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$

Exercícios:

1. As medidas de bandeiras no Brasil foram normatizadas por um tamanho padrão chamado "pano" que é igual a 0,64 m de largura por 0,45 m de altura. Os demais tamanhos são múltiplos ou submúltiplos deste padrão. Assim uma bandeira de 1,5 panos tem largura de 1,00 m de largura por 0,70 m de altura.

Considere a bandeira do Estado do Paraná de 1,5 panos, figura abaixo.

A soma das áreas em formato triangular, em m², é igual a:

a) 0,1137.
b) 0,2275.
c) 0,3343.
d) 0,6331.
e) 0,7371.

Resolução:

A área desejada pela questão é formada por dois triângulos iguais. Então devemos primeiro calcular quanto mede cada um de seus lados

Base = 1 – 0,35 = 0,65 m
Altura = 0,70 – 0,35 = 0,35 m

Por serem dois triângulos, devemos multiplicar a área por 2
A = 2 $\left(\frac{Base \times Altura}{2}\right)$

A = 2 . $\frac{0,35.0,65}{2}$ = 0,2275 m²

(Alternativa B)

2. A base de um triângulo mede x + 3 e a altura mede x – 2. Se a área desse triângulo vale 7, o valor de x é:

a) 2.
b) 3.
c) 4.
d) 5.
e) 6.

Resolução:

Sabendo que a área do triângulo é $At = \frac{Basa \times Altura}{2}$, teremos:

$\frac{(x+3)\times(x-2)}{2} = 7$

$14 = x^2 - 2x + 3x - 6$

$x^2 + x - 20 = 0$

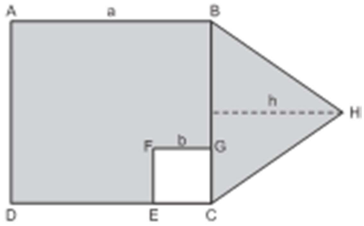
Agora faremos uso da propriedade de soma e produto, onde a soma das raízes = $-\frac{b}{a}$ e o seu produto = $\frac{c}{a}$, sendo (a=1 /b=1 /c=-20), assim sua soma deve ser - 1 e o produto -20. Os dois valores que atendem a essas condições são:

X_1= - 5 e X_2= 4

Como não podemos usar a medida negativa para os lados do triângulo, X = 4.

(Alternativa C)

3. Na figura a seguir, o lado do quadrado ABCD mede a = 6 cm; o lado do quadrado CEFG mede b = 2cm e a altura do triângulo BCD mede h = 4 cm.



Assinale a alternativa CORRETA.

Com base nesses dados, calcule a área da parte acinzentada da figura.

a) 52 cm²
b) 40 cm²
c) 44 cm²
d) 48 cm²
e) 50 cm²

Resolução:

Primeiro calcularemos a área do quadrado (Aq) ABCD:
$Aq = L^2$
$Aq = 6^2 = 36\ cm^2$

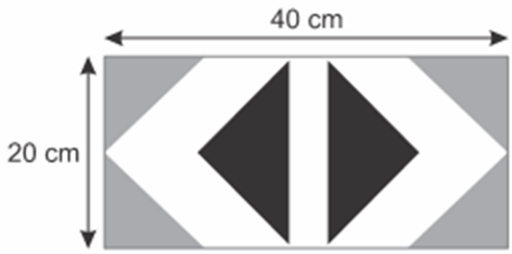
Como a questão nos pede toda a área cinza, devemos agora calcular a área do triângulo (At):
$At = \frac{B \times h}{2}$
$At = \frac{6x4}{2} = 12\ cm^2$

Agora é só calcular a área do quadrado EFGC para subtrairmos da área total
$Aq = L^2$
$Aq = 2^2 = 4\ cm^2$

Agora pegamos a área branca e subtraímos da área cinza

$36 + 12 - 4 = 44\ cm^2$
(Alternativa C)

4. Uma artesã borda, com lã, tapetes com desenhos baseados em figuras geométricas. Ela desenvolve um padrão retangular de 20 cm por 40 cm. No padrão, serão bordados dois triângulos pretos e quatro triângulos na cor cinza e o restante será bordado com lã branca, conforme a figura.



Cada triângulo preto é retângulo e isósceles com hipotenusa $12\sqrt{2}$ cm. Cada triângulo cinza é semelhante a um triângulo preto e possui dois lados de medida 10 cm.
Assim posto, a área no padrão bordada em branco é, em cm²

a) 344
b) 456
c) 582
d) 628
e) 780

Resolução:
Cada triângulo preto é retângulo e isósceles com hipotenusa $12\sqrt{2}$ cm. Logo, os catetos são iguais e podemos aplicar o teorema de Pitágoras.

$(12\sqrt{2})^2 = x^2 + x^2$
$288 = 2x^2$
$144 = x^2$
$x = \sqrt{144}$
$x = 12$

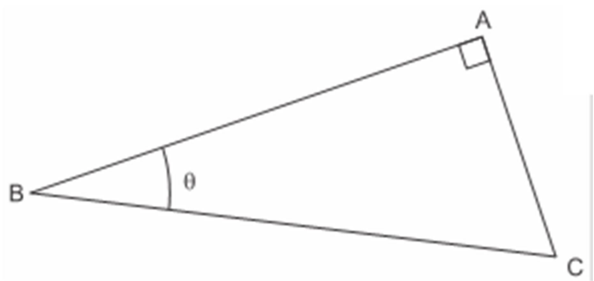
Área de um triângulo preto = $\frac{b.h}{2} = \frac{12.12}{2}$ = 72 cm²
Como são dois triângulos pretos = 2 . 72 = 144 cm²

Cada triângulo cinza é retângulo e isósceles com seus catetos medindo 10 cm.
Área de um triângulo cinza = $\frac{b.h}{2} = \frac{10.10}{2}$ = 50 cm²
Como são quatro triângulos cinzas = 4 . 50 = 200 cm²

Área do retângulo = base . altura = 40 . 20 = 800 cm²

Área branca = área do retângulo – área dos triângulos pretos – área dos triângulos cinzas
Área branca = 800 – 144 – 200 = 456 cm²
(alternativa B)

5. No triângulo retângulo ABC representado a seguir, o lado AB mede 5 cm a mais que o lado AC. Sendo tg θ = 0,75, quais são as medidas do perímetro e da área desse triângulo, respectivamente?



a) 65 cm e 155 cm²
b) 60 cm e 150 cm²
c) 55 cm e 145 cm²
d) 60 cm e 140 cm²
e) 65 cm e 145 cm²

Resolução:

AB = AC + 5

tg θ = $\frac{cat.op.}{cat.adj}$

0,75 = $\frac{AC}{AB}$

0,75 = $\frac{AC}{AC+5}$

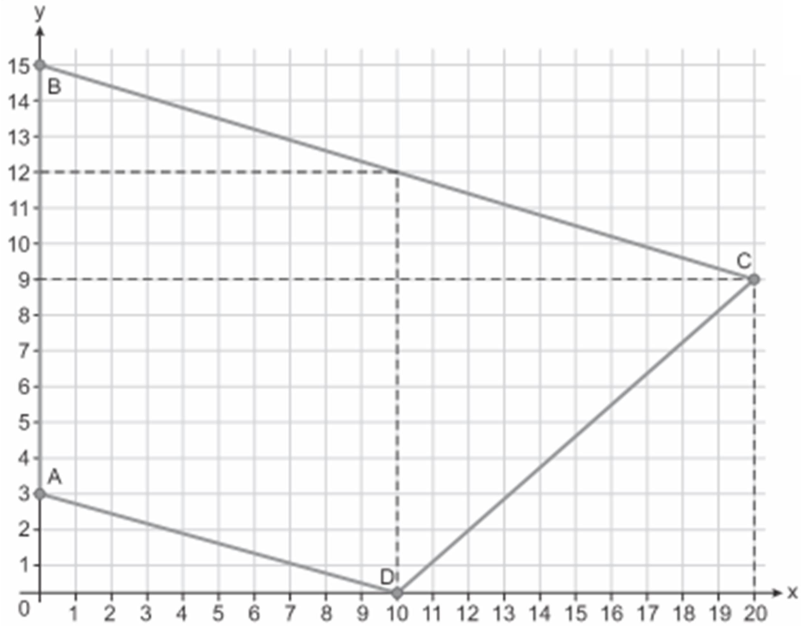
AC = 0,75 . (AC + 5)
AC = 0,75AC + 3,75
AC – 0,75AC = 3,75
0,25AC = 3,75
AC = $\frac{3,75}{0,25}$
AC = 15

AB = 15 + 5
AB = 20

Aplicando o teorema de Pitágoras:
BC² = 15² + 20²
BC² = 225 + 400
BC² = 625
BC = $\sqrt{625}$
BC = 25

Perímetro: BC + AC + AB = 25 + 15 + 20 = 60 cm
Área = $\frac{b.h}{2}$ = $\frac{AC.AB}{2}$ = $\frac{15.20}{2}$ = 15 . 10 = 150 cm²
(alternativa B)

6. A figura indica um trapézio ABCD no plano cartesiano.



A área desse trapézio, na unidade quadrada definida pelos eixos coordenados, é igual a

a) 160
b) 175

c) 180
d) 170
e) 155

Resolução:

Chamemos a origem (0,0) de ponto O e o ponto de coordenadas (20,0) como ponto V.
A área do quadrilátero ABCD será dada por:
$Área_{ABCD} = Área_{BCVO} – Área_{ADO} – Área_{CDV}$

Área do trapézio BCVO = $\frac{(B+b).h}{2}$ = $\frac{(15+9).20}{2}$ = 24 . 10 = 240
Área do triângulo ADO = $\frac{b.h}{2}$ = $\frac{3.10}{2}$ = $\frac{30}{2}$ = 15
Área do triângulo CDV = $\frac{10.9}{2}$ = $\frac{90}{2}$ = 45

Área do trapézio ABCD = 240 – 15 – 45 = 180
(Alternativa C)

7. A área de um triângulo equilátero de lado 6 m, é equivalente à área de um quadrado de lado x. O perímetro deste quadrado é igual a:

a) $16\sqrt{3}$
b) $12\sqrt[4]{3}$
c) $10\sqrt[3]{3}$
d) $14\sqrt[5]{3}$

Resolução:

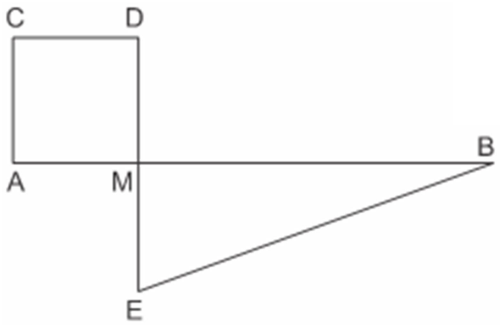
Área do triângulo equilátero = $\frac{L^2.\sqrt{3}}{4}$
Área do triângulo equilátero = $\frac{6^2.\sqrt{3}}{4}$ = $9\sqrt{3}$

Área do quadrado = x^2

Área do quadrado = área do triângulo equilátero
$x^2 = 9\sqrt{3}$
$x = \sqrt{9\sqrt{3}}$
$x = 3.\sqrt[4]{3}$

Perímetro do quadrado = 4 . lado
Perímetro = $4 . 3\sqrt[4]{3}$
Perímetro = $12\sqrt[4]{3}$
(alternativa B)

8. Considere AB um segmento de comprimento 10 e M um ponto desse segmento, distinto de A e de B como na figura abaixo. Em qualquer posição do ponto M, AMDC é quadrado e BME é triângulo retângulo em M.



Tomando x como a medida dos segmentos AM e EM, para que valor(es) de x as áreas do quadrado AMDC e do triângulo BME são iguais?

a) 0 e $\frac{10}{3}$
b) 0, 2 e 3
c) $\frac{10}{3}$
d) 0, $\frac{10}{3}$ e 10
e) 5

Resolução:

Como AM mede x é um dos lados do quadrado, cada lado do quadrado medirá x.
Área do quadrado = x^2

Se AB = 10, e AB = AM + MB, logo, MB = 10 – x

Área do triângulo = $\frac{b.h}{2}$
Área do triângulo = $\frac{x\,.(10-x)}{2}$
Área do triângulo = $\frac{10x-x^2}{2}$

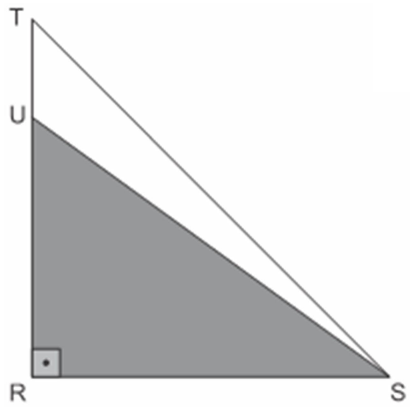
Área do quadrado = Área do triângulo
$x^2 = \frac{10x-x^2}{2}$

$2x^2 = 10x - x^2$
$2x^2 + x^2 - 10x = 0$
$3x^2 - 10x = 0$

Colocando x em evidência:
$x\,(3x - 10) = 0$
$x_1 = 0$ (não convém, pois o lado de uma figura plana deve ser um número positivo)

$3x - 10 = 0$
$3x = 10$
$x = \frac{10}{3}$
(alternativa C)

9. No triângulo SRT, representado a seguir, os lados RT e RS têm medidas iguais. Sabendo que o segmento RU mede 6 cm e o segmento ST mede $8\sqrt{2}$, a área do triângulo SRU é quantos por cento da área do triângulo SRT?



a) 60%
b) 70%
c) 75%
d) 80%
e) 85%

Resolução:

"No triângulo SRT, representado a seguir, os lados RT e RS têm medidas iguais."
Chamemos de x a medida tanto do lado RT, quanto do lado RS. Sabe-se que ST = $8\sqrt{2}$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo RST, tem-se:
$x^2 + x^2 = (8\sqrt{2})^2$
$2x^2 = 128$
$x^2 = 64$
$x = \sqrt{64}$
$x = 8$

Logo, RS = 8 cm e RT = 8 cm. De acordo com o enunciado, RU = 6 cm.

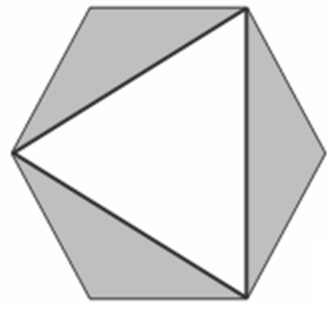
Área do triângulo RSU = $\frac{b.h}{2} = \frac{8.6}{2}$ = 24 cm²
Área do triângulo RST = $\frac{8.8}{2}$ = 32 cm²

$\frac{24}{32}$ = 0,75 = 75%

(alternativa C)

10. Um heliponto é um local destinado exclusivamente às operações de aterragem e decolagem de helicópteros. Diferentemente dos heliportos, os helipontos não dispõe de instalações e facilidades complementares, tais como área de taxiamento, reabastecimento, pátios e hangares para estacionamento e manutenção dos helicópteros.

Oscar, arquiteto, foi incumbido de fazer o projeto de um heliponto para a cobertura de um edifício comercial no centro da cidade. Decidiu fazer a pista de pouco no formato de hexágono regular com 12 metros de lado, sendo a chamada “área de toque” um triângulo equilátero inscrito no mesmo.



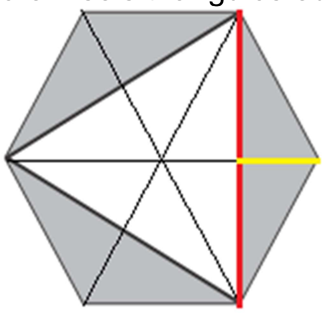
Dessa forma, por segurança, o helicóptero deveria pousar, sempre, na parte interna do triângulo equilátero. E, para facilitar a visualização da “área de toque”, a região interna ao hexágono e externa ao triângulo equilátero seria pintada com tinta amarela fluorescente.

Sendo assim, a área a ser pintada com essa tinta amarela teria medida igual a:

a) $216\sqrt{3}$ m²
b) 216 m²
c) $108\sqrt{3}$ m²
d) 108 m²

Resolução:

A área de toque é a região interna ao hexágono e externa ao triângulo equilátero. Na figura, corresponde aos três triângulos cinzas.
Os triângulos em cinza são iguais. Consideremos o triângulo do lado direito. Lembrando que um hexágono pode ser dividido em seis triângulos equiláteros.



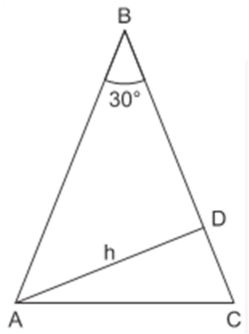
O lado de cada triângulo equilátero corresponde ao lado do hexágono. A altura do triângulo do lado direito vale metade do lado do triângulo equilátero, isto é, 6 cm.
A base do triângulo cinza do lado direito corresponde ao dobro da altura do triângulo equilátero.
h = $\frac{L.\sqrt{3}}{2}$
h = $\frac{12.\sqrt{3}}{2}$
h = $6\sqrt{3}$

Como a base mede o dobro: 2 . $6\sqrt{3}$ = $12\sqrt{3}$

Área do triângulo cinza: $\frac{b.h}{2}$
Área do triângulo cinza = $\frac{6.12\sqrt{3}}{2}$

Área do triângulo cinza = $36\sqrt{3}$
Como são três triângulos cinzas: 3 . $36\sqrt{3}$ = $108\sqrt{3}$ cm²

11. A figura abaixo exibe o triângulo ABC, em que AB = BC e $\overline{AD}$ é uma altura de comprimento h. A área do triângulo ABC é igual a



a) h²
b) $\sqrt{2}$ h²
c) $\sqrt{3}$ h²
d) 2h²

Resolução:

Se AD é altura, então o ângulo ADB é reto.
Tomando o triângulo retângulo ABD, tem-se que:

sen30° = $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$

$\frac{1}{2} = \frac{h}{AB}$
$\overline{AB}$ = 2h

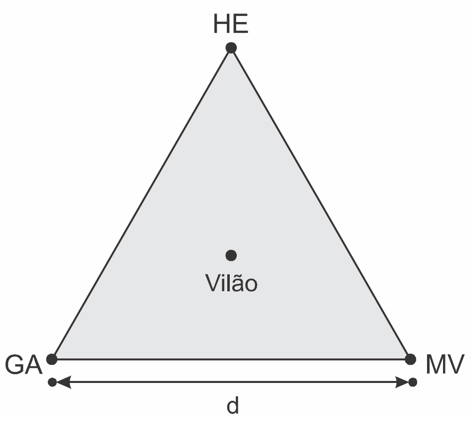
Portanto, sendo $\overline{AB}$ = $\overline{BC}$, podemos concluir que a resposta é

Área do triângulo ABC = $\frac{1}{2}.\overline{BC}.\overline{AD}$
Área do triângulo ABC = $\frac{1}{2}$.2h .h
Área do triângulo ABC = h²

(alternativa A)

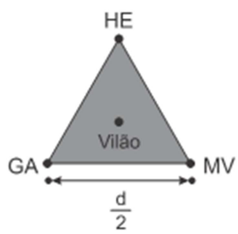
12. Ao triangularem um ataque, os três heróis Homem-Escorpião (HE), Menino-Vespa (MV) e Garota-Abelha (GA) criam um triângulo equilátero de energia conforme demonstrado a seguir (FIGURA 1).

FIGURA 1



A energia gerada é inversamente proporcional à área do triângulo formado, assim, ao diminuir pela metade a distância entre os heróis, conforme demonstrado na FIGURA 2, a energia do ataque

FIGURA 2



a) fica um quarto menor.
b) dobra.
c) quadruplica.
d) cai pela metade.
e) fica oito vezes maior.

Resolução:

Consideremos inicialmente que A_1 seja a área e E_1 a energia de ataque no primeiro triângulo e que A_2 seja a área e E_2 a energia de ataque no primeiro triângulo. Calculando os valores das áreas temos:

$$A_1 = \frac{d^2 . \sqrt{3}}{4}$$

$$A_2 = \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2 . \sqrt{3}}{4} = \frac{d^2 . \sqrt{3}}{16}$$

Como as energias de ataque são inversamente proporcionais às áreas, temos:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{E_2}{E_1} \Rightarrow \frac{\frac{d^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{d^2\sqrt{3}}{16}} = \frac{E_2}{E_1} \Rightarrow 4 = \frac{E_2}{E_1} \Rightarrow E_2 = 4 . E_1$$

Logo, a energia do ataque quadruplica.

(alternativa C)

13. Se as medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo são respectivamente 4 m, 6 m e 8 m, então, a medida da área desse triângulo, em m², é

a) $5\sqrt{6}$
b) $3\sqrt{15}$
c) $6\sqrt{5}$
d) $4\sqrt{15}$

Resolução:

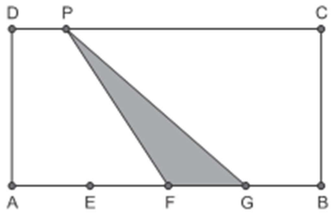
Sendo p = $\frac{4+6+8}{2}$ = 9 m o semiperímetro do triângulo, pela fórmula de Heron, temos

Área do triângulo = $\sqrt{9.(9-4).(9-6).(9-8)} = \sqrt{9.5.3.1}$

Área do triângulo = $3\sqrt{15}$ m²

(alternativa B)

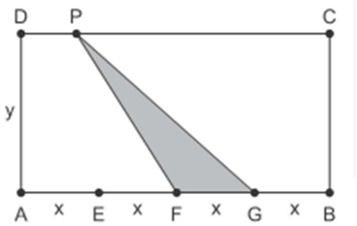
14. No retângulo ABCD a seguir, estão marcados os pontos E, F e G de forma que o lado AB está dividido em 4 partes iguais e P é um ponto qualquer sobre o lado DC



A razão entre a área do triângulo PFG e a área do retângulo ABCD é

a) $\frac{1}{8}$
b) $\frac{1}{6}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{2}$
e) 1

Resolução:



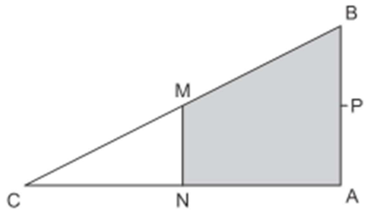
S_{PFG} : área do triângulo PFG
S_{ABCD} : área do retângulo ABCD

$$\frac{S_{PFG}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}xy}{4xy}$$

$$\frac{S_{PFG}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{8}$$

(alternativa A)

15.



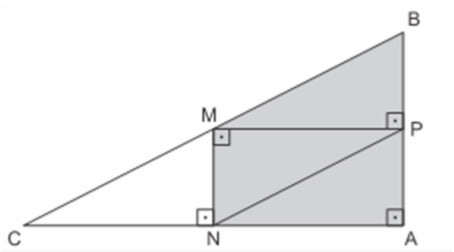
Na figura, temos que:

- O triângulo ABC, é retângulo em A.
- M é o ponto médio do lado BC.
- N é o ponto médio do lado AC.
- P é o ponto médio do lado AB.

Nessas condições, a área do quadrilátero MBAN é:

a) a mesma área do triângulo AMC.
b) a metade da área do triângulo ABC.
c) a quinta parte da área do triângulo MNC.
d) o dobro da área do triângulo AMC.
e) o triplo da área do triângulo MNC.

Resolução:



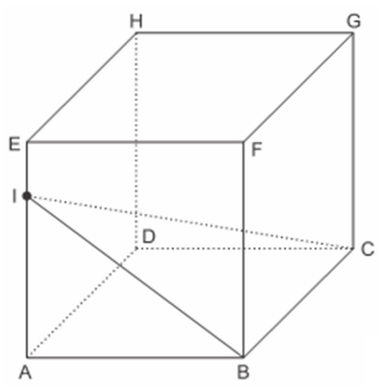
MN = BP = PA
MN = CN = NA
Os ângulos BPC, CNM, NAP e NMP são retos.

Portanto, os triângulos CNM, NAP, PMN e MPB são congruentes pelo caso L.A.L.

Logo, a área do quadrilátero MBAN é o triplo do triângulo MNC.

(alternativa E)

16. No cubo abaixo, de aresta igual a 8, o segmento $\overline{EI}$ mede a quarta parte do segmento $\overline{AE}$.



A área do triângulo BCI é igual a

a) 24
b) 36
c) 40
d) 48
e) 80

Resolução:

No triângulo BCI, a sua base corresponde ao segmento BC que, por ser uma aresta do cubo, mede 8. A altura do triângulo BCI é um segmento de reta congruente ao segmento BI.

Como EI mede a quarta parte de AE, EI = 2. Logo, AI = 8 – 2 = 6.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABI, temos:

$BI^2 = AB^2 + AI^2$
$BI^2 = 8^2 + 6^2$
$BI^2 = 100$
$BI = 10$

Área do triângulo BCI = $\frac{8.10}{2}$ = 40

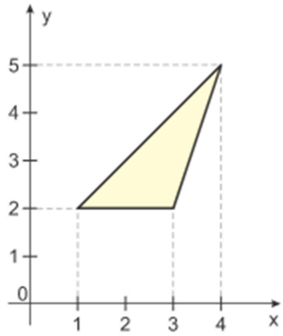
(alternativa C)

17. A área do triângulo de vértices A(4,5), B(1,2) e C(3,2) é:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

Resolução:

Desenhando o triângulo no plano cartesiano:

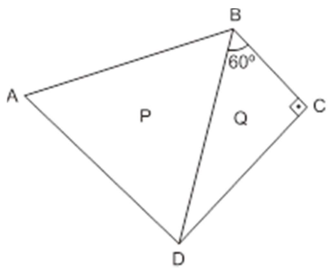


Assim, percebe-se que o mesmo tem altura 3 e base 2. Assim, pode-se escrever:

S = $\frac{3.2}{2}$ = 3

(alternativa B)

18. O quadrilátero ABCD foi dividido em duas regiões, P e Q, conforme mostra a figura, sendo que a região P, com a forma de um triângulo equilátero, ficou com área igual a $9\sqrt{3}$ km².



A razão entre as áreas das regiões Q e P, nessa ordem é

a) $\frac{1}{9}$.
b) $\frac{1}{6}$.
c) $\frac{1}{4}$.
d) $\frac{1}{3}$.
e) $\frac{1}{2}$.

Resolução:

Chamando o lado do triângulo equilátero de a, temos:

No triângulo BCD,

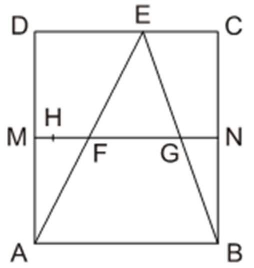
$\frac{BC}{a}$ = cos60° ⇔ = $\frac{BC}{a}$ = $\frac{1}{2}$ ⇔ BC = $\frac{a}{2}$
$\frac{DC}{a}$ = sen60° ⇔ $\frac{DC}{a}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⇔ BC = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Determinado a razão entre as áreas de Q e P temos:

$$\frac{\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}$$

(alternativa E)

19. No retângulo ABCD mostrado na figura abaixo, E pertence ao segmento $\overline{DC}$, M e N são os pontos médios dos segmentos AD e BC, respectivamente, F e G são os pontos de interseção do segmento $\overline{MN}$ com os segmentos $\overline{EA}$ e $\overline{EB}$, respectivamente.



Sabendo que a área do triângulo EFG mede 5 cm² e que H é um ponto do segmento $\overline{MN}$, qual é a medida da área do triângulo ABH?

a) 5 cm²
b) $\frac{15}{2}$ cm²
c) 10 cm²
d) $5\sqrt{5}$ cm²
e) 15 cm²

Resolução:

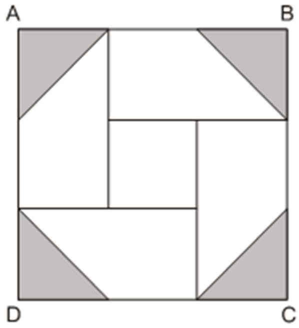
Sabe-se que área do triângulo EFG mede 5 cm². Logo: $\frac{FG.DM}{2}$ = 5 cm²

Como AD //BC e M e N são os pontos médios dos segmentos AD e BC segue que FG é base média do triângulo AEB. Logo, $\overline{AB}$ = 2.$\overline{FG}$ e $\overline{AM}$ = $\overline{DM}$. Portanto, a área do triângulo AHB é dada por:

Área = $\frac{\overline{AB}\ .\ \overline{AM}}{2}$ = $\frac{2.\overline{FG}\ .\overline{DM}}{2}$ = 2. Área do triângulo EFG = 2 . 5 = 10 cm² .

(alternativa C)

20. A figura abaixo representa o vitral de uma janela quadrada ABCD de área S, em que cada lado esta dividido em três segmentos congruentes. Retirando-se os quatro triângulos sombreados, obtém-se um octógono, cuja área é



a) $\frac{7}{9}$s
b) $\frac{5}{8}$s
c) $\frac{3}{4}$s
d) $\frac{2}{3}$s

Resolução:

Imaginemos o quadrado ABCD dividindo em 9 quadrados menores e iguais. Podemos juntar dois triângulos para formar um desses quadrados menores. Como há 4 triângulos, a área hachurada corresponde a 2/9 da área do quadrado ABCD.

S - $\frac{2S}{9}$ = $\frac{9S-2S}{9}$ = $\frac{7S}{9}$

(alternativa A)