Equação do Segundo Grau

1. Equação do Segundo Grau

Uma equação do segundo grau é toda equação que pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que $a \neq 0$ e a, b e c são coeficientes reais.

Toda equação desse tipo pode apresentar até duas soluções distintas, ou seja, pode haver dois valores reais de x que satisfaçam a igualdade. As soluções podem ser encontradas pela fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

O termo $b^2 - 4ac$, denominado discriminante, é representado pela letra grega delta maiúscula (Δ). O valor numérico do discriminante indica a quantidade de raízes reais distintas da equação:

- Se $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais distintas.
- Se $\Delta = 0$, a equação possui apenas uma raiz real distinta (raiz dupla ou duas raízes reais iguais).
- Se $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais.

1.1. Equações do segundo grau incompletas

Quando uma equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ apresenta $b = 0$ ou $c = 0$, apesar de podermos utilizar a fórmula de Bhaskara, há modos mais eficientes de encontrar as raízes.

1º caso: $b = 0$

a) Resolver a equação $x^2 - 16 = 0$.

$x^2 - 16 = 0 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} = 0$.

Assim, o conjunto solução é $S = \{-4;4\}$.

2º caso: $c = 0$

a) Resolver a equação $2x^2 - 8 = 0$.

$2x^2 - 8x = 0 \rightarrow 2x(x - 4) = 0 \rightarrow 2x = 0$ ou $x - 4 = 0 \rightarrow x = 0$ ou $x = 4$.

Assim, o conjunto solução é $S = \{0;4\}$.

1.2. Soma e produto das raízes de uma equação do segundo grau

Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Temos que:

Soma (S)	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
Produto (P)	$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{d}$

Observação: Quando o coeficiente a for igual a 1, temos que: $x^2 - Sx + P = 0$.

1.3. Equação do segundo grau fatorada

A forma fatorada da equação $ax^2 + bx + c = 0$, de raízes reais x_1 e x_2, é:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Exemplo:

a) Fatorar a equação $x^2 - 7x + 10 = 0$.

Pela relação de soma (S) e produto (P), temos:

$$x_1 + x_2 = 7 \text{ e } x_1 \cdot x_2 = 10$$

Assim, $x_1 = 2$ e $x_2 = 5$. Como $a = 1$, temos a seguinte fatoração:

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \rightarrow (x - 2)(x - 5) = 0$$

1.4. Equações biquadradas

Quando uma equação possui a forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (sendo $a \neq 0$), damos a ela o nome de equação biquadrada. Para resolver uma equação desse tipo, devemos utilizar de uma técnica de substituição, assumindo $x^2 = t$.

Veja, no exemplo, como resolver:

a) Resolver a equação $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Substituindo x^2 por t, temos $t^2 - 13t + 36 = 0$.

Resolvendo essa equação por meio da fórmula de Bhaskara, teremos $t_1 = 4$ e $t_2 = 9$.

Porém, como $x^2 = t$, temos:

$x^2 = 4 \rightarrow x_1 = 2$ e $x_2 = -2$

$x^2 = 9 \rightarrow x_3 = 3$ e $x_4 = -3$

Assim, o conjunto solução é $S = \{-3, -2, 2, 3\}$.

EXERCÍCIOS DE SALA

1. **(INTEGRADO - MEDICINA 2021)** Um médico apaixonado pela matemática receitou dois remédios para seu paciente e na receita escreveu: "O remédio A tome de 6 em 6 horas durante x_1 dias e o remédio B tome de 12 em 12 horas durante x_2 dias, sendo x_1 e x_2, respectivamente, a maior e a menor das raízes da equação $x_2 - 12x + 35 = 0$". Sabendo que a pessoa resolveu a equação e tomou os remédios corretamente, pode-se afirmar que o paciente tomou os remédios A e B, respectivamente, durante:
a) 5 dias e 7 dias.
b) 7 dias e 5 dias.
c) 12 dias e 35 dias.
d) 35 dias e 12 dias.
e) 10 dias e 14 dias.

2. **(G1 - IFSC 2019)** A soma das raízes da equação $\dfrac{(x-15)\cdot(x+7)}{x-3}$ é:

Assinale a alternativa **CORRETA**.
a) 9
b) 11
c) 10
d) 8
e) 12

3. **(G1 - COTUCA 2020)** Calcule a soma das raízes reais da equação $-\dfrac{-x-3}{4} - \dfrac{-x+1}{3} = \dfrac{1}{x}$

a) $\dfrac{-1}{7}$
b) $\dfrac{-2}{7}$
c) $\dfrac{-3}{7}$
d) $\dfrac{-4}{7}$
e) $\dfrac{-5}{7}$

4. **(UFRGS 2020)** Se a equação $x^2 + 2x - 8 = 0$ tem as raízes a e b, então o valor de $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^2$ é

a) $-\dfrac{1}{16}$.
b) $-\dfrac{1}{4}$.
c) $\dfrac{1}{16}$.
d) $\dfrac{1}{4}$.
e) 1

5. **(G1 - IFAL)** Qual o valor de c na equação $x^2 + 2x + c = 0$ para que a equação tenha uma única solução real?
a) -2.
b) -1.
c) 0.
d) 1.
e) 2.

ESTUDO INDIVIDUALIZADO (E.I.)

1. Resolva as equações do segundo grau incompletas.
a) $x^2 - 16 = 0$
b) $4x^2 - 256 = 0$
c) $2x^2 - 32 = 0$
d) $x^2 - 4x = 0$
e) $4x^2 - 12x = 0$
f) $3x^2 - 10x = 0$
g) $x^2 - 5x = 0$
h) $\dfrac{x^2}{2} - 2 = 0$

2. Resolva as equações do segundo grau a seguir por fatoração.
a) $x^2 - 14x + 49 = 0$
b) $4x^2 + 12x + 9 = 0$
c) $x^2 - 16x + 48 = 0$
d) $9x^2 + 30x + 21 = 0$

3. Resolva as equações do segundo grau a seguir pela fórmula resolutiva (fórmula de Bhaskara).
a) $x^2 - 8x + 12 = 0$
b) $-x^2 + 6x - 5 = 0$
c) $x^2 - 4x + 5 = 0$
d) $4x^2 - x + 1 = x + 3x^2$
e) $3x^2 - 7x + 2 = 0$
f) $4 + x(x - 4) = x$

4. Resolva as equações do segundo grau a seguir usando as fórmulas de soma e produto de raízes.
a) $x^2 - 9x + 20 = 0$
b) $x^2 + 5x + 6 = 0$
c) $-x^2 + x + 12 = 0$
d) $x^2 - 6x - 27 = 0$

5. Calcule o valor de m da equação $mx^2 - 7x + 2 = 0$, de modo que uma das raízes da equação seja 2.

6. O produto de dois números consecutivos positivos é 156. Quais são esses números?

7. Calcule o valor de k na equação $x^2 - 6x + k = 0$, de modo que:
a) as raízes sejam reais e diferentes;
b) as raízes sejam reais e iguais;
c) as raízes não sejam reais.

8. Fernando deseja construir uma piscina em sua casa. O espaço disponível para construir a piscina é uma região retangular de área 1350 m². Sabendo que o comprimento do terreno corresponde a $\frac{3}{2}$ de sua largura, determine quais serão as dimensões dessa piscina.

9. O triplo do quadrado de um número inteiro menos o dobro desse número é igual a 40. Encontre esse número.

10. Quanto à equação $x^2 - 4x + 3 = 0$, é correto afirmar que:
a) a soma de suas raízes é igual a –4.
b) tem duas raízes reais e iguais.
c) tem duas raízes reais e distintas.
d) não tem raízes reais.
e) o produto de suas raízes é nulo.

Gabarito (E.I.)

1.

a) $x^2 - 16 = 0$
$x^2 = 16$
$x = \pm\sqrt{16} \rightarrow x = \pm 4$
$S = \{-4; 4\}$

b) $4x^2 - 256 = 0$
$4x^2 = 256$
$x^2 = 64$
$X = \pm\sqrt{64} \rightarrow \ = \pm 18$
$S = \{-8; 8\}$

c) $2x^2 - 32 = 0$
$2x^2 = 32$
$x^2 = 16$
$x = \pm\sqrt{16} \rightarrow x = \pm 4$
$S = \{-4; 4\}$

d) $x^2 - 4x = 0$
$x(x - 4) = 0$
$x = 0$ ou
$x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$
$S = \{0; 4\}$

e) $4x^2 - 12x = 0$
$4x(x - 3) = 0$
$x = 0$ ou
$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$
$S = \{0; 3\}$

f) $3x^2 - 10x = 0$
$x(3x - 10) = 0$
$x = 0$ ou
$3x - 10 = 0 \rightarrow x = \frac{10}{3}$
$S = \{0; \frac{10}{3}\}$

g) $x^2 - 5x = 0$
$x(x - 5) = 0$
$x = 0$ ou
$x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$
$S = \{0;5\}$

h) $\frac{x^2}{2} - 2 = 0$
$\frac{x^2}{2} = 2$
$x^2 = 4$
$x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2.$
$S=\{-2;2\}$

2.

a) $x^2 - 14x + 49 = 0$
$(x - 7)^2 = 0$
$x - 7 = 0$
$x = 7$
$S = \{7\}$

b) $4x^2 + 12x + 9 = 0$
$(2x + 3)^2 = 0$
$2x + 3 = 0$
$2x = -3 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$
$S = \{-\frac{3}{2}\}$

c) $x^2 - 16x + 48 = 0$
$x^2 - 4x - 12x + 48 = 0$
$x(x - 4) - 12(x - 4) = 0$
$(x - 12)(x - 4) = 0$
$x - 12 = 0 \rightarrow x = 12$ ou
$x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$
$S = \{4;12\}$

d) $9x^2 + 30x + 21 = 0$
$3(3x^2 + 10x + 7) = 0$
$3(3x^2 + 7x + 3x + 7) = 0$
$3(x(3x + 7) + (3x + 7)) = 0$
$3(x + 1)(3x + 7) = 0$
$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$ ou
$3x + 7 = 0 \rightarrow 3x = -7 \rightarrow x = -\frac{7}{3}$
$S = \{-1; -\frac{7}{3}\}$

3.

a) $x^2 - 8x + 12 = 0$

$a = 1, b = -8, c = 12$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (12)}}{2 \cdot (1)} = \frac{8 \pm 4}{2}$$

$x_1 = 2$ e $x_2 = 6$

$S = \{2;6\}$

b) $-x^2 + 6x - 5 = 0$

$a = -1, b = 6, c = -5$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6 \pm 4}{-2}$$

$x_1 = 1$ e $x_2 = 5$

$S = \{1;5\}$

c) $x^2 - 4x + 5 = 0$

$a = 1, b = -4, c = 5$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (5) < 0$

Assim, no conjunto dos números reais, $S=\{\ \}$.

d) $4x^2 - x + 1 = x + 3x^2$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$a = 1, b = -2, c = 1$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (1)}}{2 \cdot (1)} = \frac{2 \pm 0}{2}$$

$x_1 = x_2 = 1$

$S = \{1\}$

e) $3x^2 - 7x + 2 = 0$

$a = 3, b = -7, c = 2$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot (3) \cdot (2)}}{2 \cdot (3)} = \frac{7 \pm 5}{6}$$

$x_1 = 2$ e $x_2 = \frac{1}{3}$

$S = \{\frac{1}{3}; 2\}$

f) $4 + x(x - 4) = x$

$4 + x^2 - 4x - x = 0$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$a = 1, b = -5, c = 4$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (4)}}{2 \cdot (1)} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$x_1 = 4$ ou $x_2 = 1$

$S = \{1;4\}$

4.

a) $x^2 - 9x + 20 = 0$

$a = 1, b = -9, c = 20$

$x_1 + x_2 = -\frac{-9}{1} = 9$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{20}{1} = 20$

$x_1 = 4$ e $x_2 = 5$

$S=\{4;5\}$

b) $x^2 + 5x + 6 = 0$

$a = 1, b = 5, c = 6$

$x_1 + x_2 = -\frac{5}{1} = -5$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{6}{1} = 6$

$x_1 = -2$ e $x_2 = -3$

$S=\{-2;-3\}$

c) $-x^2 + x + 12 = 0$

$a = -1, b = 1, c = 12$

$x_1 + x_2 = -\frac{1}{-1} = 1$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{12}{-1} = -12$

$x_1 = 4$ e $x_2 = -3$

$S=\{-3;4\}$

d) $x^2 - 6x - 27 = 0$

$a = 1, b = -6, c = -27$

$x_1 + x_2 = -\frac{-6}{1} = 6$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{-27}{1} = -27$

$x_1 = 9$ e $x_2 = -3$

$S=\{-3;9\}$

5.

Se 2 é uma das raízes, então:

$m \cdot (2)^2 - 7 \cdot (2) + 2 = 0$

$4m - 14 + 2 = 0$

$4m = 12$

$m = 3$

6.

Sejam esses números dados por x e x + 1. Assim, temos que:

$x \cdot (x + 1) = 156$

$x^2 + x - 156 = 0$

$a = 1, b = 1, c = -156$

$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-156)}}{2 \cdot (1)} = \frac{-1 \pm 25}{2}$$

$x_1 = 12$ ou $x_2 = -13$

Portanto, esses números podem ser 12 e 13 ou −13 e −12.

7.

a) $a = 1, b = -6, c = k$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (k) = 36 - 4k$

Para que as raízes sejam reais e diferentes, é preciso que $\Delta > 0$, ou seja:

$36 - 4k > 0 \rightarrow 36 > 4k \rightarrow k < 9$

b) $a = 1, b = -6, c = k$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (k) = 36 - 4k$

Para que as raízes sejam reais e iguais, é preciso que $\Delta = 0$, ou seja:

$36 - 4k = 0 \rightarrow k = 9$

c) $a = 1, b = -6, c = k$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (k) = 36 - 4k$

Para que as raízes não sejam reais, é preciso que $\Delta < 0$, ou seja:

$36 - 4k < 0 \rightarrow 36 < 4k \rightarrow k > 9$

8.

Seja c o comprimento e l a largura do terreno, de modo que $c = \frac{3l}{2}$.

A área do terreno é dada por:

$$l \cdot \left(\frac{3l}{2}\right) = 1350$$

$$\frac{3l^2}{2} = 1350$$

$3l^2 = 2700$

$l^2 = 900$

$l = 30$ (uma vez que a largura do terreno é, necessariamente, uma medida positiva)

Logo, $c = \frac{3 \cdot 30}{2} = 45$.

Portanto, a piscina tem dimensões 45 m x 30 m.

9.

Seja esse número x . Temos que:

$3x^2 - 2x = 40$

$3x^2 - 2x - 40 = 0$

$a = 3, b = -2, c = -40$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (3) \cdot (-40)}}{2 \cdot (3)} = \frac{2 \pm 22}{6}$$

$x_1 = 4$ ou $x_2 = -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3}$

Esse número pode ser 4 ou $-\frac{10}{3}$.

10.

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$a=1, b = -4, c = 3$

a) Falsa, pois $x_1 + x_2 = -\frac{-4}{1} = 4$.

b) Falsa, pois $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (3) = 16 - 12 = 4 > 0$.

c) Verdadeira, pois $\Delta > 0$.

d) Falsa, pois $\Delta > 0$.

e) Falsa, pois $x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{1} = 3 > 0$.