OBJETIVO

ITA

Matemática

Livro do Professor

3

MÓDULO 9

Conjuntos

1. **(ITA)** – Considere as seguintes afirmações sobre o conjunto U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}:

I. $\emptyset \in U$ e n(U) = 10. II. $\emptyset \subset U$ e n(U) = 10.
III. $5 \in U$ e $\{5\} \subset U$. IV. $\{0,1,2,5\} \cap \{5\} = 5$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s)

a) apenas I e III. b) apenas II e IV.
c) apenas II e III. d) apenas IV.
e) todas as afirmações.

RESOLUÇÃO:
Observe que:
1) $\emptyset \subset U$, mas $\emptyset \notin U$
2) n (U) = 10
3) $5 \in U \Rightarrow \{5\} \subset U$
4) $\{0; 1; 2; 5\} \cap \{5\} = \{5\}$
Assim sendo, I e IV são falsas e II e III são verdadeiras.
Resposta: C

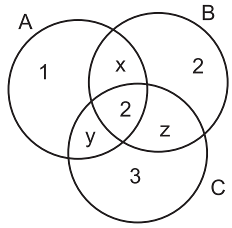
2. **(ITA-adaptado)** – Considere os conjuntos
S = {0, 2, 4, 6}, T = {1, 3, 5} e U = {0,1} e as afirmações:
I. $\{0\} \in S$ e $S \cap U \neq \emptyset$.
II. $\{2\} \subset S \backslash U$ e $S \cap T \cap U = \{0,1\}$.
Julgue-as se são verdadeiras ou falsas.

RESOLUÇÃO:
Se S = {0; 2; 4; 6}, T = {1; 3; 5} e U = {0; 1}, então
I) é falsa, pois $0 \in S$, mas $\{0\} \notin S$ e $S \cap U = \{0\} \neq \emptyset$
II) é falsa, pois $S \backslash U = S - U = \{2; 4; 6\}$ e $\{2\} \subset S\backslash U$, mas $S \cap T \cap U = \emptyset$

3. **(ITA)** – Denotemos por n(X) o número de elementos de um conjunto finito X. Sejam A, B e C conjuntos tais que $n(A \cup B) = 8$, $n(A \cup C) = 9$, $n(B \cup C) = 10$, $n(A \cup B \cup C) = 11$ e $n(A \cap B \cap C) = 2$.
Então, n (A) + n (B) + n (C) é igual a

a) 11 b) 14 c) 15 d) 18 e) 25

RESOLUÇÃO:



$1 + x + 2 + y + 2 + z + 3 = 11 \Rightarrow x + y + z = 3$
$n(A) + n(B) + n(C) = 1 + x + 2 + y + 2 + x + 2 + z + 3 + y + 2 + z = 12 + 2(x + y + z) = 12 + 2 . 3 = 18$
Resposta: D

4. **(ITA)** – Sejam **A** um conjunto com 8 elementos e B um conjunto tal que $\mathbf{A \cup B}$ contenha 12 elementos.
Então, o número de elementos de $\mathbf{P(B \setminus A) \cup P(\emptyset)}$ é igual a

a) 8 b) 16 c) 20 d) 17 e) 9

Obs.: **Na notação usada pelo exame do Ita tem-se $B \setminus A = B - A$**

RESOLUÇÃO:

1) Para quaisquer conjuntos A e B tem-se $\emptyset \in P(B \setminus A) \Rightarrow$
$\Rightarrow \{\emptyset\} \subset P(B \setminus A) \Rightarrow P(\emptyset) \subset P(B \setminus A) \Rightarrow$
$\Rightarrow P(B \setminus A) \cup P(\emptyset) = P(B \setminus A) \Rightarrow$
$\Rightarrow n[P(B \setminus A) \cup P(\emptyset)] = n[P(B \setminus A)]$

2) $n(B \setminus A) = n(B - A) = n[(A \cup B)] - n[A] = 12 - 8 = 4$
e portanto $n[P(B \setminus A)] = 2^4 = 16$

3) Dos itens (1) e (2) conclui-se que $n[P(B \setminus A) \cup P(\emptyset)] = 16$

Resposta: B

5. Conforme pesquisa realizada com 18.000 pessoas de uma comunidade, sabe-se que:

a) 8.000 são homens;
b) 9.000 são gordos;
c) 13.000 são estudantes;
d) 1.500 são magros e não estudam;
e) 4.000 são homens magros;
f) 2.000 são homens e não estudam;
g) 500 homens magros não estudam.

Quantas mulheres gordas estudam?

RESOLUÇÃO:

Conforme os dados do exercício, tem-se

	GORDOS		MAGROS	
HOMENS	**1500**	**2500**	**3500**	**500**
MULHERES	**2000**	**3000**	**4000**	**1000**

conjunto dos estudantes

portanto 3000 são mulheres gordas estudantes.
Resposta: 3000 mulheres

MÓDULO 10

Conjuntos

1. **(ITA)** – Sejam A, B e C subconjuntos do conjunto dos números reais. Então, podemos afirmar que:

a) $(A \cap B)^C = A^C \cap B^C$
b) $(A \cup B)^C = A^C \cup B^C$
c) Se $A \subset B$, então $A^C \subset B^C$
d) $(A \cap B) \cup C^C = (A^C \cup C)^C \cap (B^C \cup C)^C$
e) $A \cup (B \cup C)^C = (A \cup B^C) \cap (A \cup C^C)$

Nota: A^C significa o complementar de A no conjunto dos reais.

RESOLUÇÃO:

a) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
b) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
c) $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \notin B \Rightarrow x \notin A) \Leftrightarrow (x \in B^C \Rightarrow x \in A^C) \Leftrightarrow B^C \subset A^C$
d) $(A \cap B) \cup C^C = (A \cup C^C) \cap (B \cup C^C) =$
$= ((A^C)^C \cup C^C) \cap ((B^C)^C \cup C^C) = (A^C \cap C)^C \cap (B^C \cap C)^C$
e) $A \cup (B \cup C)^C = A \cup (B^C \cap C^C) = (A \cup B^C) \cap (A \cup C^C)$

Resposta: E

2. Assinale a alternativa falsa, quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C.

a) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

b) $A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)$, onde $X \,\Delta\, Y$, chamado "diferença simétrica entre os conjuntos X e Y", significa $(X - Y) \cup (Y - X)$.

c) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap B \cap C)$

d) $\complement^{C}_{A \cup B} = \left(\complement^{C}_{A}\right) \cup \left(\complement^{C}_{B}\right)$

e) uma das anteriores é falsa.

RESOLUÇÃO:

a) Verdadeiro, pois para $\forall x$, $x \in A \cap (B - C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in A$ e $x \in (B - C) \Leftrightarrow x \in A, x \in B$ e $x \notin C \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in (A \cap B)$ e $x \notin (A \cap C) \Leftrightarrow x \in [(A \cap B) - (A \cap C)]$.

b) Verdadeiro, pois $A \cap (B \,\Delta\, C) = A \cap [(B - C) \cup (C - B)] =$
$= [A \cap (B - C)] \cup [A \cap (C - B)] =$
$= [(A \cap B) - (A \cap C)] \cup [(A \cap C) - (A \cap B)] =$
$= (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)$

c) Verdadeiro, pois para $\forall x$
$x \in [A - (B - C)] \Leftrightarrow x \in A$ e $x \notin (B - C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in A$ e $x \notin B)$ ou $(x \in A, x \in B$ e $x \in C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in (A - B)$ ou $x \in (A \cap B \cap C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in [(A - B) \cup (A \cap B \cap C)]$

d) Verdadeiro, pois para $\forall x$
$x \in \complement^{C}_{(A \cup B)} \Leftrightarrow x \in (A \cup B)$ e $x \notin C \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in A$ ou $x \in B)$ e $x \notin C \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in A$ e $x \notin C)$ ou $(x \in B$ e $x \notin C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in \complement^{C}_{A}$ ou $x \in \complement^{C}_{B} \Leftrightarrow x \in \left[\left(\complement^{C}_{A}\right) \cup \left(\complement^{C}_{B}\right)\right]$

e) Falsa, pois todas as anteriores são verdadeiras.

Resposta: E

3. Considerando A, B e X subconjunto de S tais que $\complement_S ((A - B) \cup (B - A)) = \complement_S (A \cup B) \cup X$, pode-se afirmar que:

a) $X = A - B$ b) $X = A \cap B$ c) $X = A \cup B$
d) $X \subset (A \cup B)$ e) $(A \cap B) \subset X$

RESOLUÇÃO:

$$\left.\begin{array}{l} \complement_S ((A - B) \cup (B - A)) = \complement_S (A \cup B) \cup (A \cap B) \\ \complement_S ((A - B) \cup (B - A)) = \complement_S (A \cup B) \cup X \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (A \cap B) \subset X$, pois X pode conter elementos de $\complement_S(A \cup B)$
Resposta: E

4. Sejam A e B subconjuntos do conjunto universo U = {a, b, c, d, e, f, g, h}. Sabendo que $(B^C \cup A)^C = \{f, g, h\}$, $B^C \cap A = \{a, b\}$ e $A^C \backslash B = \{d, e\}$, então, $n(P(A \cap B))$ é igual a

a) 0. b) 1. c) 2. d) 4. e) 8.

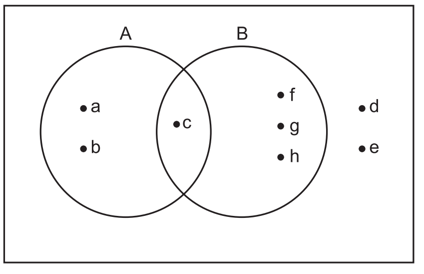
RESOLUÇÃO:

1) $(B^C \cup A)^C = \{f; g; h\} \Leftrightarrow (B^C)^C \cap A^C = \{f; g; h\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow B \cap A^C = \{f; g; h\} \Leftrightarrow B \backslash A = \{f; g; h\}$

2) $B^C \cap A = \{a; b\} \Leftrightarrow A \backslash B = \{a; b\}$

3) $A^C \backslash B = \{d; e\} \Leftrightarrow U \backslash (A \cup B) = \{d; e\}$

De (1), (2) e (3), temos o diagrama



Logo, $A \cap B = \{c\}$ e $P(A \cap B) = \{\emptyset, \{c\}\}$
Resposta: C

MÓDULO 11

Conjuntos

1. **(ITA)** – Seja U um conjunto não-vazio com n elementos, $n \geq 1$. Seja S um subconjunto de P(U) com a seguinte propriedade:

Se A, B $\in$ S, então $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Então, o número máximo de elementos que S pode ter é

a) 2^{n-1}

b) n/2, se n for par, e (n + 1)/2, se n for ímpar

c) n + 1 d) $2^n - 1$ e) $2^{n-1} + 1$

RESOLUÇÃO:

1) Se $S \subset P(U)$, qualquer elemento $X_i \in S$ é subconjunto de U.

2) Se $X_i \neq \emptyset$ for o elemento de S com menor número de elementos, qualquer outro elemento de S deverá conter X_i.

3) Assim, o conjunto S terá o maior número de elementos quando for do tipo $S = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_1; a_2\}, \{a_1; a_2; a_3\}, \ldots, \{a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n\}\}$, em que $\{a_1; a_2; \ldots; a_n\} = U$

Desta forma, S possui um máximo de n + 1 elementos.

Resposta: C

2. **(ITA)** – Se A, B, C forem conjuntos tais que

$n(A \cup B) = 23$, $n(B - A) = 12$, $n(C - A) = 10$,

$n(B \cap C) = 6$ e $n(A \cap B \cap C) = 4$, então $n(A)$, $n(A \cup C)$, $n(A \cup B \cup C)$, nesta ordem,

a) formam uma progressão aritmética de razão 6.

b) formam uma progressão aritmética de razão 2.

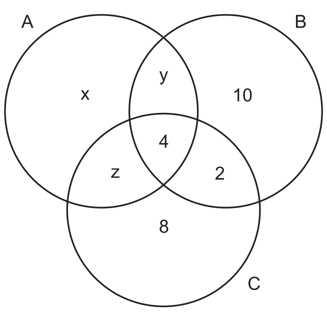
c) formam uma progressão aritmética de razão 8, cujo primeiro termo é 11.

d) formam uma progressão aritmética de razão 10, cujo último termo é 31.

e) não formam uma progressão aritmética.

RESOLUÇÃO:

As informações apresentadas permitem construir o diagrama de Venn-Euler seguinte:



1) $n(A \cup B) = x + y + z + 4 + 10 + 2 = 23 \Leftrightarrow x + y + z = 7$

2) $n(A) = x + y + z + 4 = 7 + 4 = 11$

3) $n(A \cup C) = x + y + z + 4 + 2 + 8 = 7 + 14 = 21$

4) $n(A \cup B \cup C) = x + y + z + 4 + 10 + 2 + 8 = 7 + 24 = 31$

Assim: (11; 21; 31) é uma P.A. de razão 10, cujo último termo é 31.

Resposta: D

3. **(ITA)** – Considere as afirmações abaixo relativas a conjuntos A, B e C quaisquer:

I. A negação de $x \in A \cap B$ é: $x \notin A$ ou $x \notin B$.

II. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

III. $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

Destas, é (são) falsa(s)

a) apenas I. b) apenas II. c) apenas III.

d) apenas I e III. e) nenhuma.

RESOLUÇÃO:

As demonstrações são imediatas para os casos em que um dos conjuntos, A, B ou C, for vazio. As demonstrações seguintes são para os casos em que nenhum deles é vazio.

I. *Verdadeira*, pois $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ e $x \in B$

A negação de ($x \in A$ e $x \in B$) é ($x \notin A$ ou $x \notin B$).

II. *Verdadeira*, pois para qualquer elemento x:

$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ e $x \in (B \cup C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ ($x \in A$ e $x \in B$) ou ($x \in A$ e $x \in C$) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B)$ ou $x \in (A \cap C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

III. *Verdadeira*, pois

$x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \Leftrightarrow x \in (A \backslash B)$ ou $x \in (B \backslash A) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \text{ e } x \notin B \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \text{ e } x \notin (A \cap B) \\ \text{ou} \\ x \in B \text{ e } x \notin A \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \text{ e } x \notin (A \cap B) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

Resposta: E

4. **(ITA)** – Sejam A, B e C conjuntos tais que $C \subset B$, $n(B\backslash C) = 3n(B \cap C) = 6n(A \cap B)$, $n(A \cup B) = 22$ e $(n(C), n(A), n(B))$ é uma progressão geométrica de razão $r > 0$.
a) Determine n(C).
b) Determine $n(P(B\backslash C))$.

RESOLUÇÃO:
Seja n(C) = x

1) $C \subset B \Leftrightarrow B \cap C = C \Rightarrow \boxed{n(B \cap C) = n(C) = x}$

2) $n(B \backslash C) = 3n(B \cap C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n[B - (B \cap C)] = 3n(B \cap C) \Leftrightarrow n[B - C] =$
$= 3n(C) \Leftrightarrow n(B) - n(C) = 3n(C) \Leftrightarrow$

$\boxed{n(B) = 4n(C) = 4x}$ **, pois** $C \subset B$

3) **Se (n(C), n(A), n(B)) é uma progressão geométrica, então** $[n(A)]^2 = n(C) \,.\, n(B) = x \,.\, 4x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{n(A) = 2x}$ **, pois** $n(A) \geq 0$.

4) $3n(B \cap C) = 6n(A \cap B) \Leftrightarrow 3x = 6n(A \cap B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n(A \cap B) = \dfrac{x}{2}$

5) **Desta forma,**
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) =$

$= 2x + 4x - \dfrac{x}{2} = \dfrac{11x}{2} = 22 \Rightarrow x = 4$

Assim, $n(C) = x = 4$

e $n(P(B \backslash C)) = 2^{n(B \backslash C)} = 2^{3n(B \cap C)} = 2^{3 \,.\, x} = 2^{3 \,.\, 4} = 2^{12} = 4096$

Respostas: a) 4 b) 4096

5. **(ITA)** – Seja A um conjunto não-vazio.
a) Se $n(A) = m$, calcule $n(P(A))$ em termos de m.
b) Denotando $P^1(A) = P(A)$ e $P^{k+1}(A) = P(P^k(A))$, para todo número natural $k \geq 1$, determine o menor k, tal que $n(P^k(A)) \geq 65000$, sabendo que $n(A) = 2$.

RESOLUÇÃO:
a) Se n(A) = m, então:

$$n(P(A)) = \sum_{p=0}^{m} C_{m;\,p} = \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} =$$

$$= \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \ldots + \binom{m}{m} = 2^m$$

Atenção professor: **No início do curso apenas comente esta demonstração. Não se deve fazê-la pois admite-se que o aluno ainda não conheça combinação simples.**

b) Se $P^{k+1}(A) = P(P^k(A))$ **e** $P^1(A) = P(A)$**, então:**
$n(P^{k+1}(A)) = n[P(P^k(A))] = 2^{n(P^k(A))}$.
Desta forma, tem-se:
$n(P^1(A)) = n(P(A)) = 2^2 = 4$, **pois** $n(A) = 2$.
$n(P^2(A)) = 2^{n(P^1(A))} = 2^4 = 16$
$n(P^3(A)) = 2^{n(P^2(A))} = 2^{16} = 65536 > 65000$

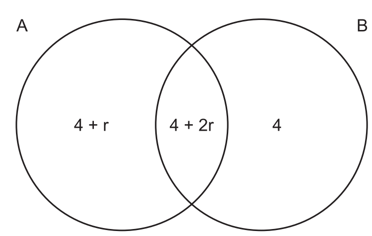
Portanto, o menor valor de k, natural, tal que $n(P^k(A)) \geq 65000$**, é 3.**
Respostas: a) 2^m **b) 3**

MÓDULO 12

Conjuntos

1. **(ITA)** – Sejam A e B subconjuntos finitos de um mesmo conjunto X, tais que $n(B\backslash A)$, $n(A\backslash B)$ e $n(A \cap B)$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão $r > 0$. Sabendo que $n(B\backslash A) = 4$ e $n(A \cup B) + r = 64$, então, $n(A\backslash B)$ é igual a
a) 12 b) 17 c) 20 d) 22 e) 24

RESOLUÇÃO:
De acordo com os dados, tem-se o seguinte diagrama de Venn-Euler:



pois n(B\A), n(A\B) e n(A ∩ B) formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de primeiro termo 4 e razão r > 0.
Assim, tem-se que:
$n(A \cup B) + r = 64 \Leftrightarrow [(4 + r) + (4 + 2r) + 4] + r = 64 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 12 + 4r = 64 \Leftrightarrow r = 13$ e $n(A\backslash B) = n(A - B) = 4 + r = 4 + 13 = 17$
Resposta: B

2. **(ITA)** – Seja A um conjunto com 14 elementos e B um subconjunto de A com 6 elementos. O número de subconjuntos de A com um número de elementos menor ou igual a 6 e disjuntos de B é
a) $2^8 - 9$ b) $2^8 - 1$ c) $2^8 - 2^6$
d) $2^{14} - 2^8$ e) 2^8

RESOLUÇÃO:
Os subconjuntos de A que são disjuntos de B são subconjuntos de (A – B). Como B ⊂ A,
$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = n(A) - n(B) = 14 - 6 = 8$.
O conjunto A – B possui $2^8 - 9$ subconjuntos, pois

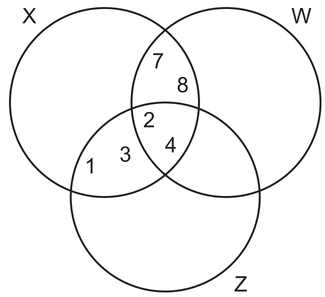
$$C_{8;0} + C_{8;1} + \dots + C_{8;6} = \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \dots + \binom{8}{6} =$$

$$= 2^8 - \binom{8}{8} - \binom{8}{7} = 2^8 - 1 - 8 = 2^8 - 9$$

Resposta: A

3. **(ITA)** – Sejam X, Y, Z, W subconjuntos de $\mathbb{N}$ tais que $(X - Y) \cap Z = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{5, 6\}$, $Z \cap Y = \emptyset$, $W \cap (X - Z) = \{7, 8\}$, $X \cap W \cap Z = \{2, 4\}$. Então, o conjunto $[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)]$ é igual a
a) {1, 2, 3, 4, 5} b) {1, 2, 3, 4, 7} c) {1, 3, 7, 8}
d) {1, 3} e) {7, 8}

RESOLUÇÃO:
Os conjuntos X, Y, Z e W não estão bem definidos pelas condições dadas. O que se pode afirmar é o que se segue:
a) De $(X - Y) \cap Z = \{1; 2; 3; 4\}$ e
$X \cap W \cap Z = \{2; 4\}$, temos: $\{1; 3\} \subset X$,
$\{1; 3\} \subset Z$, $1 \notin W$ e $3 \notin W$
b) De $W \cap (X - Z) = \{7; 8\}$ e $X \cap W \cap Z = \{2; 4\}$, temos:
$\{7; 8\} \subset W$, $\{7; 8\} \subset X$, $7 \notin Z$ e $8 \notin Z$
c) De $Y = \{5; 6\}$ e $Z \cap Y = \emptyset$, temos: $5 \notin Z$ e $6 \notin Z$
d) As informações dos itens a, b e c permitem colocar os números 1, 2, 3, 4, 7 e 8 conforme o diagrama



Do diagrama, pode-se determinar que
$X \cap (Z \cup W) = \{1; 2; 3; 4; 7; 8\}$
e) Como $\{2; 4\} \subset Z$ e $\{2; 4\} \subset W$, temos que
$\{2; 4\} \subset [W \cap (Y \cup Z)]$
Como $1 \notin W$ e $3 \notin W$, temos que
$1 \notin [W \cap (Y \cup Z)]$ e $3 \notin [W \cap (Y \cup Z)]$
Como $7 \notin Z$ e $8 \notin Z$, temos que
$7 \notin [W \cap (Y \cup Z)]$ e $8 \notin [W \cap (Y \cup Z)]$
f) $[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)] =$
$= \{1; 2; 3; 4; 7; 8\} - [W \cap (Y \cup Z)] = \{1; 3; 7; 8\}$
Resposta: C

4. Mostre que quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C, tem-se $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

RESOLUÇÃO:
Seja $(x; y) \in [(A - B) \times C]$
$(x;y) \in [(A - B) \times C] \Leftrightarrow x \in (A - B)$ e $y \in C \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in A$, $x \notin B$ e $y \in C \Leftrightarrow (x \in A$ e $y \in C)$ e
$(x \notin B$ e $y \in C) \Leftrightarrow (x; y) \in (A \times C)$ e $(x;y) \notin (B \times C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x;y) \in [(A \times C) - (B \times C)]$
o que demonstra a igualdade.

■ Módulo 9

1. Seja A o conjunto de todos os conjuntos X tais que $\{1; 3\} \subset X \subset \{1; 2; 3; 4\}$, e B o conjunto dos divisores naturais de 6. Determine o número de subconjuntos de A X B.

2. **(ITA)** – Sejam F e G dois subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta.

a) Se $F \subset G$ e $G \neq F$, então necessariamente $F = F \cup G$.
b) Se $F \cap G$ é o conjunto vazio, então necessariamente $F \cup G = \mathbb{R}$.
c) Se $F \subset G$ e $G \subset F$, então $F \cap G = F \cup G$.
d) Se $F \cap G = F$, então necessariamente $G \subset F$.
e) Se $F \subset G$ e $G \neq \mathbb{R}$, então $\{F \cap G) \cup G = \mathbb{R}$.

3. **(ITA)** – Sejam U um conjunto não-vazio e $A \subset U$; $B \subset U$. Usando apenas as definições de igualdade, reunião, intersecção e complementar, prove que:

I. Se $A \cap B = \varnothing$, então $B \subset A^C$.
II. $B \setminus A^C = B \cap A$.

■ Módulo 10

1. **(ITA)** – Sejam A, B e C subconjuntos de $\mathbb{R}$, não-vazios, e $A - B = \{p \in \mathbb{R};\ p \in A \text{ e } p \notin B\}$. Dadas as igualdades:

1. $(A - B) X C = (A X C) - (B X C)$
2. $(A - B) X C = (A X B) - (B X C)$
3. $(A \cap B) - A \neq (B \cap A) - B$
4. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
5. $(A - B) \cap (B - C) = (A - C) \cap (A - B)$

podemos garantir que:

a) 2 e 4 são verdadeiras b) 1 e 5 são verdadeiras
c) 3 e 4 são verdadeiras d) 1 e 4 são verdadeiras
e) 1 e 3 são verdadeiras

2. **(ITA)** – Sejam A e B subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$, e considere as seguintes afirmações:

I. $(A - B)^C \cap (B \cup A^C)^C = \varnothing$
II. $(A - B^C)^C = B - A^C$
III. $[(A^C - B) \cap (B - A)]^C = A$

Sobre essas afirmações, podemos garantir que:

a) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
b) apenas a afirmação (II) é verdadeira.
c) apenas a afirmação (III) é verdadeira.
d) todas as afirmações são verdadeiras.
e) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

3. Sendo A, B e C subconjuntos de um conjunto S, a afirmação nem sempre verdadeira é:

a) $\complement_S A \cap B \cap C = (B \cap C) - A$
b) $A \cap \complement_S B \cap \complement_S C = A - (B \cap C)$
c) $\complement_S (A \cup B) = \complement_S A \cap \complement_S B$
d) $(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) = \varnothing$
e) $\exists$ A, B e C tais que $A \cap B \cap C = \varnothing$ e $A \cap (B \cup C) \neq \varnothing$

■ Módulo 11

1. Um determinado produto vende-se líquido ou em pó. Uma sondagem mostrou os seguintes resultados:

– Um terço das pessoas interrogadas não utilizam o pó;
– Dois sétimos das pessoas interrogadas não utilizam o líquido;
– 427 pessoas utilizam o líquido e o pó;
– Um quinto das pessoas interrogadas não utilizam o produto.

Quantas pessoas foram interrogadas nesta sondagem?
(100 jogos numéricos – Pierre Berloquin)

2. **(ITA)** – Seja X um conjunto não-vazio e sejam A e B dois subconjuntos de X. Definimos $A^C = \{x \in X \text{ tal que } x \notin A\}$ e $A - B = \{x \in A \text{ tal que } x \notin B\}$. Dadas as sentenças

1. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^C \Leftrightarrow B \subset A^C$, onde “ $\Leftrightarrow$ ” significa “equivalente” e $\emptyset$ representa o conjunto vazio;
2. Se $X = \mathbb{R}$; $A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x^3 - 1 = 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x^2 - 1 = 0\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x - 1 = 0\}$, então $A = C = B$
3. $A - \varnothing = A$ e $A - B = A - (A \cap B)$
4. $A - B \neq A \cap B^C$

podemos afirmar que está(estão) correta(s):

a) as sentenças 1 e 3
b) as sentenças 1, 2 e 4
c) as sentenças 3 e 4
d) as sentenças 2, 3 e 4
e) apenas a sentença 2.

■ Módulo 12

1. Sejam X, Y e Z subconjuntos próprios de $\mathbb{R}$, não-vazios. Com respeito às afirmações:

(I) $X \cap \{[Y \cap (X \cup Y)^c] \cup [X \cup (X^c \cap Y^c)^c]\} = X$.
(II) Se $Z \subset X$, então $(Z \cup Y) \cup [X \cup (Z^c \cap Y)] = X \cup Y$.
(III) Se $(X \cup Y)^c \subset Z$, então $Z^c \subset X$.

temos que:

a) apenas (I) é verdadeira.
b) apenas (I) e (II) são verdadeiras.
c) apenas (I) e (III) são verdadeiras.

d) apenas (II) e (III) são verdadeiras.

e) todas são verdadeiras.

2. **(ITA)** – Sejam E, F, G e H subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$. Considere as afirmações:

I. Se $(E \times G) \subset (F \times H)$, então $E \subset F$ e $G \subset H$.

II. Se $(E \times G) \subset (F \times H)$, então $(E \times G) \cup (F \times H) = F \times H$.

III. Se $(E \times G) \cup (F \times H) = (F \times H)$, então $(E \times G) \subset (F \times H)$

Então:

a) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

b) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

e) todas as afirmações são verdadeiras.

resolução dos exercícios-tarefa

■ MÓDULO 9

1) $\{1; 3\} \subset X \subset \{1; 2; 3; 4\} \Rightarrow \begin{cases} X = \{1; 3\} \\ X = \{1; 3; 2\} \\ X = \{1; 3; 4\} \\ X = \{1; 2; 3; 4\} \end{cases}$

Assim:

$A = \{\{1; 3\}, \{1; 2; 3\}, \{1; 3; 4\}, \{1; 2; 3; 4\}\}$ e $n(A) = 4$

$B = \{1; 2; 3; 6\}$ e $n(B) = 4$

$n(A \times B) = n(A) \,.\, n(B) = 16$ e $n[P(A \times B)] = 2^{16}$

Resposta: 2^{16} subconjuntos

2) $F \subset G$ e $G \subset F \Rightarrow F = G \Rightarrow F \cap G = F \cup G$

Resposta: C

3) **1) Para $A \cap B = \varnothing$:** $(x \in B \Rightarrow x \notin A, \forall x) \Rightarrow (x \in B \Rightarrow x \in A^C, \forall x) \Rightarrow B \subset A^C$

2) $x \in B \setminus A^C, \forall x \Leftrightarrow (x \in B \text{ e } x \notin A^C), \forall x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in B \text{ e } x \in A), \forall x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in A \cap B), \forall x \Leftrightarrow B \setminus A^C = A \cap B$

Resposta: Demonstrações

■ MÓDULO 10

1) **1) Verdadeira, pois**

$$\forall(x; y) \in (A - B) \times C \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (A - B) \\ \text{e} \\ y \in C \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \text{ e } x \notin B \\ \text{e} \\ y \in C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \text{ e } y \in C \\ \text{e} \\ y \notin B \text{ e } y \in C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) \in (A \times C) \\ \text{e} \\ (x; y) \notin (B \times C) \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) \in (A \times C) - (B \times C)$$

logo $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

2) Falsa, conforme caso anterior

3) Falsa, pois

$$\left.\begin{matrix} (A \cap B) - A = \varnothing \\ (B \cap A) - B = \varnothing \end{matrix}\right\} \Rightarrow (A \cap B) - A = (B \cap A) - B$$

4) Verdadeira, pois

$$\forall x \in A - (B \cap C) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{e} \\ x \notin (B \cap C) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{e} \\ x \notin B \text{ ou } x \notin C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \text{ e } x \notin B \\ \text{ou} \\ x \in A \text{ e } x \notin C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (A - B) \\ \text{ou} \\ x \in (A - C) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A - C)$$

5) Falsa, pois

I) $(A - B) \cap (B - C) = \varnothing$, **visto que** $\forall x \in (A - B) \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin (B - C)$

II) $(A - C) \cap (A - B)$ **não é necessariamente vazio, como no caso** $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{3, 4\}$; $C = \{2, 5\}$ **e** $(A - C) \cap (A - B) = \{1\} \neq \varnothing$

Resposta: D

2) **I) Verdadeira, pois** $(A - B)^C \cap (B \cup A^C)^C =$
$= [(A - B) \cup (B \cup A^C)]^C =$
$= [(A \cup B) \cup A^C] = [IR]^C = \varnothing$

II) Falsa, pois

$$\left.\begin{matrix} A - B^C = A \cap B \\ B - A^C = A \cap B \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A - B^C)^C = (A \cap B)^C \neq (A \cap B) = B - A^C$$

III) Falsa, pois

$[(A^C - B) \cap (B - A)]^C = [\emptyset]^C = IR$ e pode-se ter $A \neq \mathbb{R}$

Resposta: A

3) a) **Verdadeira**

$\complement_s A \cap B \cap C = (B \cap C) \cap \complement_s A = (B \cap C) - A$

b) **Verdadeira**

$A \cap \complement_s B \cap \complement_s C = A \cap (B \cup C)^C = A - (B \cup C)$

c) **Verdadeira**

$\complement_s (A \cup B) = \complement_s A \cap \complement_s B$

d) **Falsa, pois se**

$A = \{1; 2\}, B = \{2; 3\}$ e $C = \{1; 3\}$

tem-se $(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) =$

$= \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} = \{1; 2; 3\} \neq \emptyset$

e) **Verdadeira, pois se**

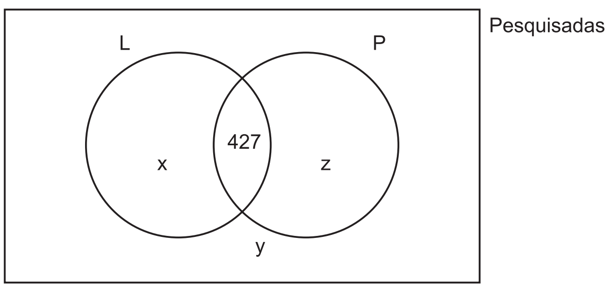
$A = \{1; 2\}, B = \{2; 3\}$ e $C = \{1; 3\}$

tem-se $A \cap B \cap C = \emptyset$ e

$A \cap (B \cup C) = \{1; 2\} \neq \emptyset$

■ MÓDULO 11

1) **Conforme o enunciado, temos o seguinte diagrama:**



$$\begin{cases} x + y = \dfrac{1}{3}(x + y + z + 427) \\ y + z = \dfrac{2}{7}(x + y + z + 427) \\ y = \dfrac{1}{5}(x + y + z + 427) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y + z = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{5}\right)(x + y + z + 427) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z) = \frac{44}{105}(x + y + z + 427) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 105(x + y + z) = 44(x + y + z + 427) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 61(x + y + z) = 44 \,.\, 427 \Rightarrow x + y + z = 44 \,.\, 7 = 308$$

Assim, o total de pessoas pesquisadas é

$427 + 308 = 735$

2) 1) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} (x \in A \Rightarrow x \notin B) \Leftrightarrow A \subset B^C \\ \text{e} \\ (x \in B \Rightarrow x \notin A) \Leftrightarrow B \subset A^C \end{cases}$

2) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 1 = 0\} = \{1\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\} = \{-1; +1\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 = 0\} = \{1\}$

$A = C \subset B$

3) $A - \emptyset = A$

$\forall x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A$ e $x \notin B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in A$ e $x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow \Leftrightarrow x \in (A - (A \cap B))$

e, portanto, $A - B = A - (A \cap B)$

4) $\forall x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A$ e $x \notin B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in A$ e $x \in B^C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B^C)$ e portanto $A - B = A \cap B^C$

Resposta: A

■ MÓDULO 12

1) I) **Verdadeira, pois**

$X \cap \{ [Y \cap (X \cup Y)^c] \cup [X \cup (X^c \cap Y^c)^c]\} =$

$= X \cap \{[\emptyset] \cup [X \cup ((X \cup Y)^c)^c]\} =$

$= X \cap \{ [\emptyset] \cup [X \cup (X \cup Y)]\} = X \cap (X \cup Y) = X$

II) **Verdadeira, pois** $(Z \cup Y) \cup [X \cup (Z^c \cap Y)] =$

$= (Z \cup Y) \cup [(X \cup Z^c) \cap (X \cup Y)]$

Se $Z \subset X$, então $(Z \cup Y) \cup [(X \cup Z^c) \cap (X \cup Y)] =$

$= (Z \cup Y) \cup (\mathbb{R} \cap (X \cup Y)] =$

$= (Z \cup Y) \cup (X \cup Y) = X \cup Y$

III) **Falsa, pois se** $X = \{1\}, Y = \{2\}$ e $Z = \mathbb{R} - \{1; 2\}$ por exemplo, temos

$(X \cup Y)^c = \{1; 2\}^c = \mathbb{R} - \{1; 2\} = Z \subset Z$ e

$Z^c = \{1; 2\} \not\subset \{1\} = X$

Resposta: B

2) I) **Verdadeira, pois**

$(E \times G) \subset (F \times H) \Rightarrow ((x, y) \in (E \times G) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x, y) \in (F \times H), \forall (x, y)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\begin{cases} x \in E \\ y \in G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in F \\ y \in H \end{cases}, \forall x, \forall y\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow (E \subset F$ e $G \subset H)$

II) **Verdadeira, pois se** $A \subset B$, **então** $A \cup B = B$, $\forall A,B$

III) **Verdadeira, pois se** $A \cup B = B$, **então** $A \subset B, \forall A,B$

Resposta: E