SUMÁRIO

1 AS LEIS DE NEWTON

2 ALGUMAS APLICAÇÕES DAS LEIS DE NEWTON

3 FORÇAS DE ATRITO

4 FORÇA ELÁSTICA

5 MOVIMENTO PLANO COM TRAJETÓRIAS CURVAS

6 TRABALHO E POTÊNCIA

ENERGIA 7

QUANTIDADE DE MOVIMENTO E IMPULSO 8

COLISÕES 9

CENTRO DE MASSA 10

CAPÍTULO 1

AS LEIS DE NEWTON

1. INTRODUÇÃO

A *Mecânica* é a parte da Física que estuda o *movimento*. Pelo que sabemos, há pelo menos cerca de 2 000 anos o homem já se preocupava em explicar os movimentos, tanto dos corpos terrestres como dos corpos celestes. No entanto, foi Isaac Newton (físico e matemático inglês, 1642-1727) o primeiro a apresentar uma teoria que explicava satisfatoriamente os movimentos, em um trabalho intitulado *Princípios matemáticos da filosofia natural*, publicado em 1686.

O sucesso da *Mecânica Newtoniana* foi imediato e duradouro; ela reinou por mais de 200 anos. Houve, é verdade, necessidade de alguns aperfeiçoamentos, feitos mais tarde por outros físicos. No entanto, a base da Mecânica de Newton permaneceu inalterada até o começo do século XX, quando surgiram duas outras Mecânicas, a *Mecânica Relativística* e a *Mecânica Quântica*, para explicar certos fatos que a Mecânica Newtoniana não conseguia. A partir do surgimento dessas duas novas mecânicas, a Mecânica Newtoniana passou a ser chamada de *Mecânica Clássica*, e é esta a mecânica que estudaremos neste livro, pois ela continua válida para a análise da maioria dos movimentos com que lidamos. A Mecânica Relativística só é realmente necessária quando os corpos se movem com velocidades muito altas ($v > 3\,000$ km/s), enquanto a Mecânica Quântica só é realmente necessária para o estudo dos fenômenos atômicos e nucleares.

É costume dividir a Mecânica Clássica em duas partes: *Cinemática* e *Dinâmica*. A Cinemática faz o estudo geométrico do movimento; ela define o que é movimento e o que é trajetória a partir das noções de referencial, posição e tempo; e descreve o movimento usando basicamente as grandezas *velocidade* e *aceleração*. A Dinâmica relaciona essas grandezas com outras, como, por exemplo, *massa*, *força*, *energia* e *quantidade de movimento*. No volume 1 desta coleção fizemos o estudo da Cinemática e neste volume estudaremos a Dinâmica e a Estática. No entanto, na maior parte do livro, estudaremos a Dinâmica do *ponto* *material*. Um ponto material é um corpo cujo movimento pode ser estudado sem considerar suas dimensões e eventuais vibrações, rotações ou deformações. Assim, para um ponto material consideramos apenas o movimento de translação. No capítulo 12 dedicaremos um item para o caso particular do ponto material em repouso. Ainda no capítulo 12, faremos um breve estudo do corpo *extenso*, isto é, do corpo que não pode ser considerado como ponto material, mas apenas no caso do corpo extenso em repouso, pois o estudo das rotações exige uma matemática mais avançada e só é feito em cursos de nível universitário.

2. MASSA E FORÇA

Newton construiu sua Mecânica a partir de três leis que serão vistas mais adiante. Antes disso, porém, precisamos considerar dois conceitos básicos na Dinâmica: *massa* e *força*.

Massa de um corpo

Inicialmente, Newton definiu a *massa de um corpo* como a medida da "quantidade de matéria" contida no corpo. Assim, se a massa de um tijolo é 1 unidade, dois tijolos idênticos a ele terão massa igual a 2 unidades; três tijolos idênticos ao primeiro terão massa igual a 3 unidades; e assim por diante. No entanto, logo foi constatado (tanto por Newton como por outros cientistas) que essa definição não era adequada; o conceito de massa era mais complexo do que parecia à primeira vista. Na leitura que está no final deste capítulo analisamos mais detalhadamente o conceito de massa; porém, por razões didáticas, por enquanto definiremos a massa de um corpo como o valor obtido através da comparação desse corpo com *corpos padrão*, utilizando uma balança de braços iguais.

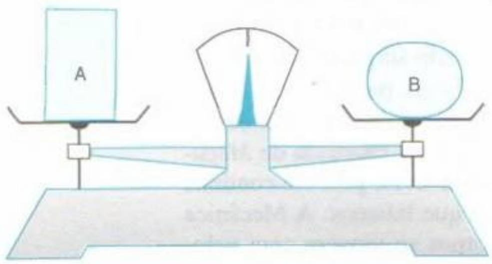


Fig. 1 A balança estando em equilíbrio, as massas de A e B são iguais.

No caso da Fig. 1, por exemplo, diremos que os corpos A e B têm a *mesma massa* se a balança ficar em equilíbrio ao se colocar o corpo A em um dos pratos da balança e o corpo B no outro prato.

Obviamente esse processo de medir massa não é adequado para medir as massas de corpos "muito grandes" (como, por exemplo, a Lua ou um navio) nem "muito pequenos" (como, por exemplo, um átomo ou um elétron); nesses casos são necessários métodos indiretos que serão vistos mais tarde.

No Sistema Internacional de Unidades (SI), a unidade de massa é o quilograma (kg), o qual é definido como a massa de determinado corpo cilíndrico, feito de uma liga de platina e irídio (platina iridiada), que está guardado no Bureau Internacional de Pesos e Medidas, situado em Sèvres, nos arredores de Paris.

Na Fig. 2, o corpo C está sendo equilibrado em uma balança de braços iguais, pelos corpos padrão A e B, cujas massas são 1,0 kg e 0,5 kg, respectivamente. Portanto, a massa do corpo C é 1,5 kg.

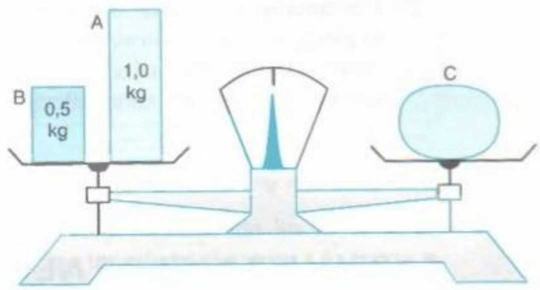


Fig. 2

Outras unidades de massa usadas com freqüência são o grama (g) e a tonelada (t), valendo as relações:

$$1\,\text{kg} = 10^3\,\text{g} \qquad\qquad 1\,\text{t} = 10^3\,\text{kg}$$

Força

Força, para Newton, é a ação que produz *aceleração*, isto é, *variação de velocidade*. Convém lembrar que a velocidade e a aceleração são grandezas vetoriais. Assim, quando se fala em variação de velocidade, essa variação pode ser do módulo, da direção ou do sentido da velocidade. As forças podem ser de *contato*, como, por exemplo, quando puxamos ou empurramos um objeto, ou de *ação a distância*, como, por exemplo, a força com que a Terra atrai um objeto largado de certa altura. As forças de ação a distância são também chamadas de *forças de campo*.

Uma característica importante da força é que ela é uma grandeza vetorial, obedecendo então a todas as propriedades dos vetores que vimos no volume 1.

Exemplo 1:

Consideremos o ponto material A da Fig. 3 submetido à ação das forças $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$.

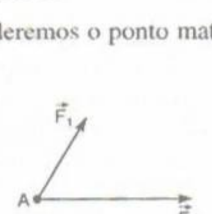


Fig. 3

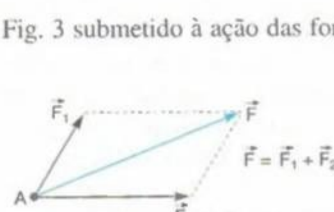


Fig. 4

Seja $\vec{F}$ a resultante de $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ (Fig. 4). O efeito produzido pelas forças $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, atuando juntas, é o mesmo efeito que seria produzido por $\vec{F}$ atuando sozinha.

No Sistema Internacional de Unidades, a unidade de força é o *newton*, cujo símbolo é N e cuja definição daremos mais adiante.

Observações

1ª) Note que escrevemos *newton* usando letras minúsculas, apesar de o nome dessa unidade provir de um nome próprio, enquanto o símbolo (N) é escrito com letra maiúscula.

2ª) Costuma-se dizer que o efeito de uma força pode ser a produção de *aceleração* ou a *deformação de um corpo*. Porém, ao deformarmos um corpo, estamos produzindo a aceleração de seus átomos, que estavam em repouso e ganharam certa velocidade.

3. PRIMEIRA LEI DE NEWTON

A primeira lei apresentada por Newton tem o seguinte enunciado:

Todo corpo em repouso ou em movimento retilíneo uniforme continua nesses estados, a menos que seja obrigado a alterá-los por forças aplicadas sobre ele.

Assim, desde que nenhuma força atue sobre um corpo, estando ele em repouso, deverá ficar *eternamente* em repouso. Para tirarmos o corpo do repouso devemos aplicar sobre ele uma força; mas se, após iniciado o movimento, retirarmos a força, o corpo deverá prosseguir *eternamente* em linha reta e com velocidade constante, isto é, em movimento retilíneo uniforme (MRU). Consideremos agora um corpo livre da ação de forças que já esteja em movimento retilíneo uniforme: se aplicarmos uma força a esse corpo, provocaremos uma alteração em sua velocidade, isto é, uma aceleração.

Segundo Newton, a matéria possui *inércia*. A inércia de um corpo é a propriedade que esse corpo tem de resistir à mudança de sua velocidade. Somente conseguimos alterar a velocidade do corpo aplicando sobre ele uma força. Dado um corpo livre da ação de forças, é costume dizer que:

1º) se o corpo estiver em repouso deverá, *por inércia*, permanecer em repouso;
2º) se o corpo estiver em MRU deverá, *por inércia*, manter esse movimento.

A Primeira Lei de Newton nos informa, então, qual é o comportamento de um corpo na ausência de forças. Mas essa é obviamente uma situação ideal. Na prática, nunca encontramos um corpo livre da ação de forças. No entanto, é possível encontrar situações em que, apesar de haver forças atuando no corpo, a resultante dessas forças é nula e, assim, é como se não houvesse nenhuma força atuando.

Ainda segundo Newton, a inércia de um corpo é proporcional à massa do corpo. Assim, podemos considerar a massa como uma medida da inércia.

A Primeira Lei de Newton é também chamada de *Lei da Inércia* ou *Princípio da Inércia*.

Exemplo 2:

Consideremos um bloco *A*, lançado com velocidade inicial $\vec{v_0}$ sobre uma superfície plana horizontal (Fig. 5). De acordo com a Lei da Inércia, desde que nenhuma força se oponha ao movimento, o bloco deverá prosseguir eternamente em linha reta com velocidade constante $\vec{v_0}$. No entanto, em geral o que observamos é que o bloco vai diminuindo sua velocidade até parar (Fig. 6), percorrendo determinada distância *d*.

Fig. 5

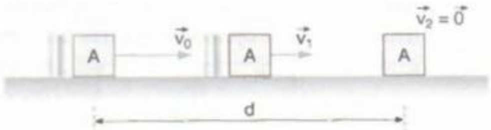


Fig. 6

Isso ocorre porque, em geral, há duas forças se opondo ao movimento (Fig. 7): uma força de resistência do ar ($\vec{F}_{ar}$) e uma força de atrito ($\vec{F}_{at}$), que a superfície horizontal exerce no bloco. A força de atrito é causada principalmente pelo fato de tanto o bloco como a superfície horizontal serem *ásperos* (no capítulo 3 faremos um estudo das forças de atrito e de resistência do ar). No entanto, se conseguirmos diminuir o atrito, através do polimento ou lubrificação do bloco e da superfície horizontal, observaremos que, lançando-se novamente o bloco A com a mesma velocidade inicial $\vec{v}_0$, ele percorrerá uma distância d', maior do que d (Fig. 8), antes de parar.

Fig. 7

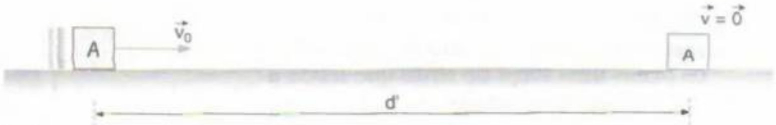


Fig. 8

Se conseguíssemos eliminar completamente o atrito e também a resistência do ar (fazendo a experiência no vácuo), o bloco deveria prosseguir com velocidade constante $\vec{v}_0$.

Exemplo 3:

Consideremos um indivíduo dentro de um trem que se move em linha reta com velocidade constante $\vec{v}$ em relação ao solo (Fig. 9). Se o trem brecar, o indivíduo tenderá, por inércia, a manter a velocidade $\vec{v}$ em relação ao solo, e, assim, ele se sentirá projetado para a frente em relação ao trem (Fig. 10).

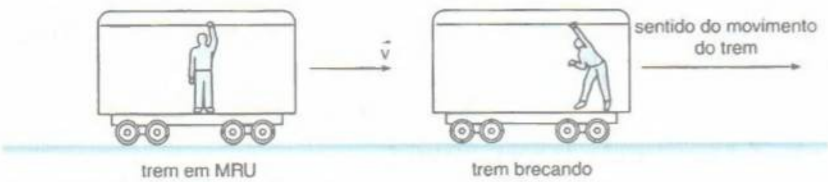
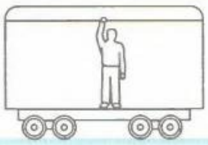


Fig. 9

Fig. 10

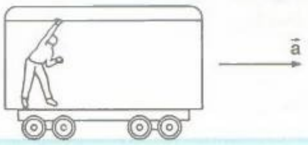
Exemplo 4:

Consideremos agora um indivíduo dentro de um trem inicialmente em repouso em relação ao solo (Fig. 11). Se, de repente, o trem "arranca", por inércia o indivíduo tenderá a permanecer em repouso em relação ao solo e, assim, irá sentir-se projetado para trás em relação ao trem (Fig. 12)



trem em repouso

Fig. 11



trem acelerando para a direita

Fig. 12

Exemplo 5:

Consideremos um indivíduo dentro de um automóvel do qual se tiraram as portas e que se move inicialmente em linha reta com velocidade constante $\vec{v}$ em relação ao solo (Fig. 13). Se, de repente, o automóvel entra numa curva e o indivíduo não está se segurando em nada, ele será projetado para fora do automóvel, pois, por inércia, sua tendência é prosseguir em linha reta com a mesma velocidade $\vec{v}$ que ele tinha dentro do automóvel. O automóvel só consegue fazer a curva porque a estrada aplica sobre os pneus uma força de atrito que muda a direção da velocidade do automóvel. Caso não houvesse atrito, o automóvel não conseguiria fazer a curva e prosseguiria em linha reta, saindo da estrada.

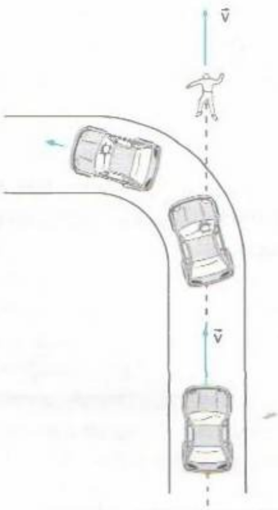


Fig. 13

4. SEGUNDA LEI DE NEWTON

Newton enunciou sua segunda lei de maneira muito complexa para quem está se iniciando no estudo da Dinâmica. Assim, é costume, por razões didáticas, apresentar um enunciado simplificado dessa lei, e é o que faremos(*).

Um modo simplificado de apresentar a Segunda Lei de Newton é o seguinte:

> Sendo $\vec{F}$ a resultante de todas as forças que atuam sobre um ponto material de massa *m*, temos:
>
> $$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$
>
> onde $\vec{a}$ é a aceleração do ponto material.

Essa lei costuma ser chamada também de Lei Fundamental da Dinâmica ou Princípio Fundamental da Dinâmica.

(*) No capítulo 8 apresentaremos o enunciado realmente dado por Newton.

Observando a equação $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ e lembrando que a massa *m* é uma grandeza escalar positiva, concluímos que $\vec{F}$ e $\vec{a}$ devem ter sempre a *mesma direção* e o *mesmo sentido* (quando não nulas). Se $\vec{F}$ for nula, $\vec{a}$ também será nula e caímos no caso da Lei da Inércia: o ponto material permanecerá em repouso ou em MRU. Vamos então concentrar nossa atenção nos casos em que $\vec{F} \neq \vec{0}$. No entanto, por enquanto, aplicaremos a Segunda Lei de Newton apenas para os movimentos *retilíneos*. Os casos de movimentos curvos serão analisados no capítulo 5.

Suponhamos, então, que o ponto material esteja em movimento retilíneo e que a força resultante $\vec{F}$ que atua sobre ele não seja nula. Podemos destacar dois casos.

1º caso	$\vec{F}$ *tem o mesmo sentido da velocidade* $\vec{v}$.

Nesse caso, a aceleração $\vec{a}$ também tem o mesmo sentido de $\vec{v}$ (Fig. 14) e o movimento é *acelerado*, isto é, o módulo de $\vec{v}$ aumenta com o tempo.

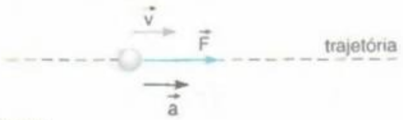


Fig. 14

2º caso	$\vec{F}$ *tem sentido oposto ao da velocidade* $\vec{v}$.

Como a aceleração $\vec{a}$ deve ter o mesmo sentido de $\vec{F}$, o sentido de $\vec{a}$ é oposto ao sentido de $\vec{v}$ (Fig. 15) e o movimento é retardado, isto é, o módulo de $\vec{v}$ diminui com o tempo.

Fig. 15

Exemplo 6:

Consideremos um ponto material de massa m = 4,0 kg, em movimento *retilíneo* e *acelerado*, cuja aceleração tem módulo a = 3,0 m/s². Como o movimento é acelerado, a resultante $\vec{F}$ das forças que atuam no ponto material tem o mesmo sentido do movimento (isto é, o mesmo sentido da velocidade). A Segunda Lei de Newton nos diz que:

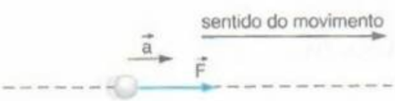


Fig. 16

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Considerando apenas os módulos de $\vec{F}$ e $\vec{a}$ podemos escrever:

$$F = m \cdot a$$

Substituindo os valores de *m* e *a* e lembrando que a unidade de força do SI é o *newton* (*N*), temos:

$$F = (4,0\,\text{kg}) \cdot (3,0\,\text{m/s}^2) = 12 \text{ newtons} = 12\,\text{N}$$

Portanto, a resultante $\vec{F}$ das forças que atuam nesse ponto material tem módulo (ou intensidade) igual a 12 newtons.

Exemplo 7:

Seja $\vec{F}$ a resultante das forças que atuam sobre um ponto material de massa $m = 2{,}0\,kg$ em movimento retilíneo retardado e suponhamos que o módulo de $\vec{F}$ seja 14 newtons, isto é, $F = 14\,N$. Como o movimento é retardado, $\vec{F}$ tem sentido oposto ao do movimento, isto é, sentido oposto ao da velocidade. Aplicando a Segunda Lei de Newton, temos:

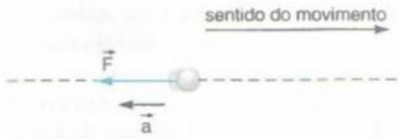


Fig. 17

$F = m \cdot a$

$14 = 2{,}0 \cdot a$ ou $a = 7{,}0\,m/s^2$

Portanto, a aceleração do movimento tem *módulo* igual a $7{,}0\,m/s^2$.

A unidade de força newton

Afirmamos, anteriormente, que a unidade de força no SI é o *newton*, mas não demos ainda sua definição. Podemos agora fazê-lo, a partir da Segunda Lei de Newton:

> Um newton é a intensidade de uma força que, aplicada a um ponto material de massa 1 kg, produz uma aceleração cujo módulo é $1\,m/s^2$.

De fato, consideremos a equação $F = m \cdot a$ e façamos $m = 1\,kg$ e $a = 1\,m/s^2$:

$F = (1\,kg) \cdot (1\,m/s^2) = 1\,N$

Assim, $1\,N = 1\,kg \cdot m/s^2$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Um ponto material de massa $m = 400\,g$ está em movimento retilíneo acelerado, cuja aceleração tem módulo $a = 6{,}0\,m/s^2$. Calcule o módulo da resultante das forças que atuam no ponto material.

Resolução:

No SI, a unidade de massa é o quilograma (kg). Assim:

$m = 400\,g = 0{,}400\,kg$

Sendo $\vec{F}$ a resultante das forças que atuam no ponto material, temos, pela Segunda Lei de Newton: $F = m \cdot a$. Portanto:

$F = (0{,}400) \cdot (6{,}0)$ $F = 2{,}4\,N$

2. Consideremos um ponto material de massa $m = 2\,000\,g$, em movimento retilíneo acelerado, cuja aceleração tem módulo $a = 7{,}0\,m/s^2$. Calcule o módulo da resultante das forças que atuam no ponto material.

3. A resultante das forças que atuam num ponto material de massa $m = 5{,}0\,kg$ tem intensidade $F = 60\,N$. Calcule o módulo da aceleração do ponto material.

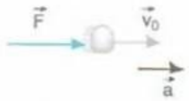
4 Uma partícula de massa $m = 4{,}0\,kg$ tem movimento retilíneo e acelerado, sob a ação de uma única força $\vec{F}$ cujo módulo é $F = 24\,N$. No instante $t = 0$ a partícula tem espaço $s_0 = 15\,m$ e velocidade $\vec{v}_0$, cujo módulo é $v_0 = 20\,m/s$, como mostra a figura.

a) Calcule o módulo da aceleração da partícula.
b) Calcule a velocidade escalar da partícula no instante $t = 2{,}0\,s$.
c) Determine o espaço da partícula no instante $t = 2{,}0\,s$.

Resolução:

a) Pela Segunda Lei de Newton, temos: $F = m \cdot a$. Assim,

$24 = 4{,}0 \cdot a$



ou $\boxed{a = 6{,}0\,m/s^2}$

b) $\vec{v}_0$ e $\vec{a}$ têm o mesmo sentido do eixo dos espaços. Assim, a velocidade escalar inicial (v_0) e a aceleração escalar (α) são ambas positivas:

$v_0 = 20\,m/s$ e $\alpha = 6{,}0\,m/s^2$

O movimento é uniformemente variado e, como sabemos, a equação horária da velocidade desse movimento é do tipo:

$$v = v_0 + \alpha t$$

Assim, $v = 20 + 6{,}0 \cdot t$

No instante $t = 2{,}0\,s$ teremos: $v = 20 + 6{,}0(2{,}0) = 32$

$\boxed{v = 32\,m/s}$

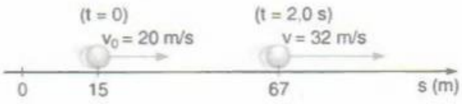
c) A equação horária do espaço do movimento uniformemente variado é do tipo:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2$$

Assim, $s = 15 + 20t + 3{,}0t^2$

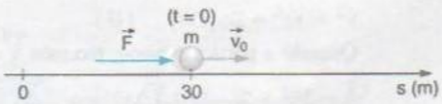
No instante $t = 2{,}0\,s$ teremos:

$s = 15 + 20 \cdot 2{,}0 + 3{,}0 \cdot (2{,}0)^2$



ou $\boxed{s = 67\,m}$

5. Consideremos uma partícula de massa $m = 5{,}0\,kg$, em movimento retilíneo e acelerado, sob a ação de uma única força $\vec{F}$ de intensidade $F = 20\,N$. No instante $t = 0$, a partícula tem espaço $s_0 = 30\,m$ e velocidade $\vec{v}_0$, cujo módulo é $7{,}0\,m/s$, como mostra a figura.



a) Calcule o módulo da aceleração da partícula.
b) Calcule a velocidade escalar da partícula no instante $t = 3{,}0\,s$.
c) Determine o espaço da partícula no instante $t = 3{,}0\,s$.

6 Uma partícula de massa $m = 5{,}0\,kg$ move-se inicialmente em linha reta, livre da ação de forças, com velocidade constante $\vec{v_0}$, cujo módulo é $v_0 = 24\,m/s$. A partir do instante $t = 0$ aplica-se à partícula uma força constante $\vec{F}$, de sentido oposto ao de $\vec{v_0}$ e de intensidade $F = 20\,N$.

a) Calcule o módulo da aceleração da partícula a partir do instante em que foi aplicada $\vec{F}$.
b) Em que instante a partícula pára?
c) Calcule a distância percorrida pela partícula desde o instante $t = 0$ até o instante em que pára.

Resolução:

a) De início a partícula move-se por inércia. A partir do instante $t = 0$, quando é aplicada a força $\vec{F}$ de sentido oposto ao de $\vec{v_0}$, o movimento será retardado, isto é, o módulo da velocidade irá diminuindo. De acordo com a Segunda Lei de Newton, temos:

$F = m \cdot a$

$20 = 5{,}0 \cdot a$ ou $a = 4{,}0\,m/s^2$

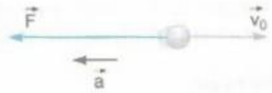


Fig. a

b) Adotemos um eixo tal que no instante $t = 0$ o espaço da partícula seja nulo (Fig. b), isto é, $s_0 = 0$, e a velocidade escalar seja positiva. Com $v_0 > 0$ e o movimento sendo retardado, a aceleração escalar α será negativa:

$\alpha = -4{,}0\,m/s^2$

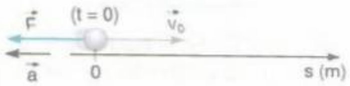


Fig. b

A equação horária da velocidade é:

$v = v_0 + \alpha t$

ou $v = 24 - 4{,}0 \cdot t$ (I)

Quando a partícula parar, teremos $v = 0$. Substituindo em (I): $0 = 24 - 4{,}0 \cdot t$

ou $t = 6{,}0\,s$

c) 1º modo

A equação horária do espaço é:

$s = s_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2$

ou $s = 0 + 24t - 2{,}0t^2$

Fazendo $t = 6{,}0\,s$, obtemos:

$s = 24 \cdot 6{,}0 - 2{,}0 \cdot (6{,}0)^2$

ou $s = 72\,m$

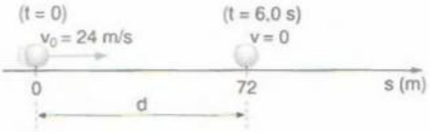


Fig. c

Assim, a distância percorrida pela partícula até parar é:

$d = 72\,m$

2º modo

Podemos usar a equação de Torricelli:

$v^2 = v_0^2 + 2\alpha(\Delta s)$ (II)

Quando a partícula parar, teremos $v = 0$. Substituindo em (II):

$0 = 24^2 + 2(-4{,}0)\,(\Delta s) \Longrightarrow \Delta s = 72\,m$

7. Consideremos uma partícula de massa $m = 8{,}0\,kg$ movendo-se inicialmente em linha reta, livre da ação de forças, com velocidade constante $\vec{v}_0$, cujo módulo é $v_0 = 30\,m/s$. A partir do instante $t = 0$ aplica-se à partícula uma força constante $\vec{F}$, de sentido oposto ao de $\vec{v}_0$, cujo módulo é $F = 48\,N$.

a) Em que instante a partícula pára?

b) Calcule a distância percorrida pela partícula desde o instante $t = 0$ até o instante em que pára.

8. Uma partícula de massa $m = 4{,}0\,kg$ está submetida à ação de apenas duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, de mesmo sentido, como mostra a figura. Calcule o módulo da aceleração da partícula, sabendo que os módulos de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ são $F_1 = 13\,N$ e $F_2 = 17\,N$.

Resolução:

Seja $\vec{F}$ a resultante de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, isto é, $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Como $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ têm o mesmo sentido, $\vec{F}$ tem o mesmo sentido de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ (Fig. b) e tem módulo F dado por $F = F_1 + F_2$.

$F = F_1 + F_2 = 13 + 17 \qquad F = 30\,N$

Pela Segunda Lei de Newton, temos:

$F = m \cdot a$

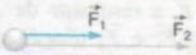
ou $30 = 4{,}0 \cdot a$

isto é, $\boxed{a = 7{,}5\,m/s^2}$

Fig. a

Fig. b

9. Um ponto material de massa $m = 3{,}0\,kg$ está submetido à ação de apenas duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, de sentidos iguais, como mostra a figura. Calcule o módulo da aceleração do ponto material, sabendo que os módulos de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ são $F_1 = 5{,}0\,N$ e $F_2 = 7{,}0\,N$.



10. Uma partícula de massa $m = 5{,}0\,kg$ está submetida à ação de apenas duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, de mesma direção e sentidos opostos, como mostra a figura. Calcule o módulo da aceleração da partícula, sabendo que $F_1 = 50\,N$ e $F_2 = 30\,N$.

Resolução:

Seja $\vec{F}$ a resultante de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, isto é, $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Como $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ têm sentidos opostos e $F_1 > F_2$, concluímos que $\vec{F}$ tem o mesmo sentido de $\vec{F}_1$ (Fig. b) e tem módulo dado por $F = F_1 - F_2$.

$F = F_1 - F_2 = 50 - 30 \qquad F = 20\,N$

Pela Segunda Lei de Newton, temos:

$F = m \cdot a$

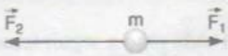
$20 = 5{,}0 \cdot a$

$\boxed{a = 4{,}0\,m/s^2}$

Fig. a

Fig. b

11. Consideremos uma partícula de massa $m = 2{,}0\,kg$ submetida à ação de apenas duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, de mesma direção e sentidos opostos, como mostra a figura. Calcule o módulo da aceleração da partícula, sabendo que $F_1 = 24\,N$ e $F_2 = 30\,N$.



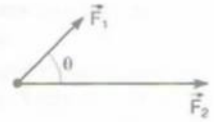
12. Uma partícula de massa m = 4,0 kg está submetida à ação de apenas três forças, como mostra a figura. Calcule o módulo da aceleração da partícula sabendo que $F_1 = 30\,N$, $F_2 = 40\,N$ e $F_3 = 60\,N$.

13 Uma partícula de massa 3,0 kg está sob a ação de apenas duas forças, como mostra a figura, sendo $|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}| = 80\,N$. Calcule o módulo da aceleração da partícula e determine o tipo de movimento que ela tem.

Resolução:

As forças $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ têm o mesmo módulo e sentidos opostos. Portanto, sua resultante é nula. Assim, de acordo com a Segunda Lei de Newton, a aceleração vetorial da partícula também é nula, donde concluímos que a velocidade vetorial é constante. Isso significa que *só há dois casos possíveis*: ou a partícula está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Sem mais informações não podemos decidir qual dos dois casos está ocorrendo.

14 Um ponto material de massa m = 2,0 kg está submetido à ação de apenas duas forças, $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, como mostra a figura. Calcule o módulo da aceleração do ponto material, sabendo que $F_1 = 20\,N$, $F_2 = 30\,N$ e $\theta = 53°$.



Resolução:

Seja $\vec{F}$ a resultante de $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$. Como $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ têm direções diferentes, a resultante $\vec{F}$ deve ser determinada pela regra do paralelogramo (Fig. a). Como vimos no estudo dos vetores (volume 1), temos, pela lei dos cossenos:

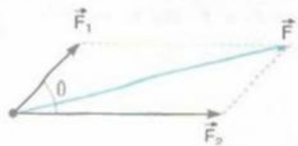


Fig. a

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cdot \cos\theta$$

Consultando a tabela do final do livro, obtemos cos 53° ≅ 0,60. Assim:

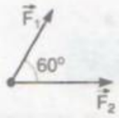
$$F^2 = (20)^2 + (30)^2 + 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 0{,}60 = 2\,020$$

$$F = \sqrt{2\,020} \cong 45 \qquad F \cong 45\,N$$

Pela Segunda Lei de Newton, temos:

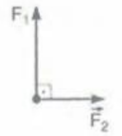
$$F = m \cdot a \implies 45 \cong 2{,}0 \cdot a \implies \boxed{a \cong 22\,m/s^2}$$

15. Consideremos uma partícula de massa m = 4,0 kg submetida à ação de apenas duas forças, $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, como mostra a figura. Calcule o módulo da aceleração da partícula, sabendo que $F_1 = 10\,N$ e $F_2 = 6{,}0\,N$.



16 Em cada caso a seguir temos uma partícula de massa m = 10 kg sob a ação de apenas duas forças, $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$. Determine o módulo da aceleração da partícula em cada caso.

a)



$$\begin{cases} F_1 = 12\,N \\ F_2 = 5{,}0\,N \end{cases}$$

b)

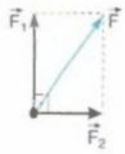
$$\begin{cases} F_1 = 8{,}0\,N \\ F_2 = 10\,N \end{cases}$$

c)

$F_1 = F_2 = 30\,N$

Resolução:

a) Nesse caso, como as forças têm direções perpendiculares, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras para obter o módulo da resultante $\vec{F}$.



$F^2 = F_1^2 + F_2^2$

$F^2 = 12^2 + (5{,}0)^2 = 169$

$F = \sqrt{169} = 13$; $F = 13\,N$

Aplicando a Segunda Lei de Newton:

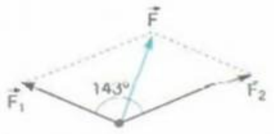
$F = m \cdot a \implies 13 = 10 \cdot a \implies \boxed{a = 1{,}3\,m/s^2}$

b) Aqui, para aplicarmos a lei dos cossenos precisamos do cos 143°, mas a tabela do final do livro nos dá os valores apenas até 90°. Assim, precisamos nos lembrar da propriedade que diz que se

$\alpha + \beta = 180°$

isto é, se α e β são suplementares, temos:

$\cos\alpha = -\cos\beta$



O suplemento de 143° é 37°, isto é,

$143° + 37° = 180°$

Portanto: $\cos 143° = -\cos 37°$

Consultando a tabela no final do livro, obtemos $\cos 37° \cong 0{,}80$. Assim, $\cos 143° \cong -0{,}80$. Consideremos agora a lei dos cossenos:

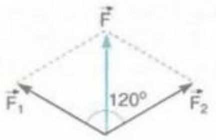
$F^2 = F_1{}^2 + F_2{}^2 + 2F_1F_2 \cos 143°$

$F^2 \cong (8{,}0)^2 + 10^2 + 2 \cdot 8{,}0 \cdot 10\,(-0{,}80) = 36 \implies F \cong 6{,}0\,N$

Aplicando a Segunda Lei de Newton:

$F = m \cdot a \implies 6{,}0 \cong 10 \cdot a \implies \boxed{a \cong 0{,}60\,m/s^2}$

c) O suplemento de 120° é 60°. Assim,



$\cos 120° = -\cos 60° = -0{,}50$

$F^2 = F_1{}^2 + F_2{}^2 + 2F_1F_2 \cdot \cos 120°$

Como $F_1 = F_2$, temos:

$F^2 = F_1{}^2 + F_1{}^2 + 2F_1F_1(-0{,}50) = F_1{}^2 + F_1{}^2 - F_1{}^2 = F_1{}^2$

Portanto: $F = F_1 = F_2 = 30\,N$

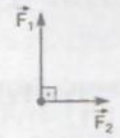
Este é um caso particular importante: "Duas forças de mesmo módulo *F*, formando ângulo de 120°, têm resultante que também tem módulo *F*".

Aplicando a Segunda Lei de Newton:

$F = m \cdot a \implies 30 = 10 \cdot a \implies \boxed{a = 3{,}0\,m/s^2}$

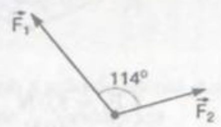
17. Em cada caso a seguir temos uma partícula de massa m = 2,0 kg sob a ação de apenas duas forças, $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$. Calcule, em cada caso, o módulo da aceleração da partícula.

a)



$\begin{cases} F_1 = 16\,N \\ F_2 = 12\,N \end{cases}$

b)

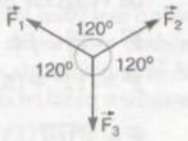


$\begin{cases} F_1 = 10\,N \\ F_2 = 8{,}0\,N \end{cases}$

c)

$F_1 = F_2 = 50\,N$

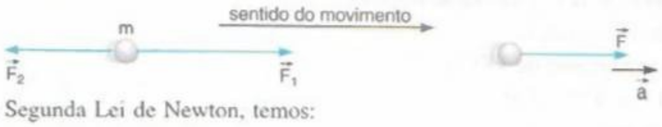
18. Determine o módulo da resultante das forças assinaladas na figura, sabendo que $F_1 = F_2 = F_3 = 50\,N$.



19 Uma partícula de massa m = 2,0 kg tem movimento retilíneo e acelerado, sob a ação de apenas duas forças, $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, como mostra a figura. O módulo da aceleração da partícula é $a = 3{,}0\,m/s^2$ e $F_1 = 40\,N$. Calcule o módulo de $\vec{F_2}$.

Resolução:

Como o movimento é retilíneo e acelerado, a força resultante $\vec{F}$ deve ter o mesmo sentido do movimento e, portanto, devemos ter $F_1 > F_2$.



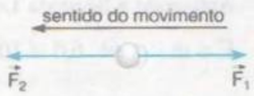
Aplicando a Segunda Lei de Newton, temos:

$$F = m \cdot a$$

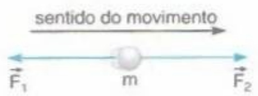
$F_1 - F_2 = m \cdot a$

$40 - F_2 = 2{,}0 \cdot 3{,}0$ $\quad \boxed{F_2 = 34\,N}$

20. Consideremos um ponto material de massa m = 4,0 kg, em movimento retilíneo acelerado, sob a ação de apenas duas forças, $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, como indica a figura. Calcule o módulo de $\vec{F_2}$, sabendo que $F_1 = 70\,N$ e que a aceleração do ponto material tem módulo $a = 5{,}0\,m/s^2$.



21 Uma partícula de massa m = 6,0 kg tem movimento retilíneo e retardado, sob a ação de apenas duas forças, $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, como representa a figura. A aceleração da partícula tem módulo $a = 3{,}0\,m/s^2$ e $F_2 = 50\,N$. Calcule o módulo de $\vec{F_1}$.



Resolução:

Como o movimento é retilíneo e retardado, a força resultante $\vec{F}$ tem sentido oposto ao do movimento e, portanto, devemos ter $F_1 > F_2$.

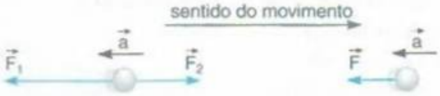
Aplicando a Segunda Lei de Newton:

$F = m \cdot a$

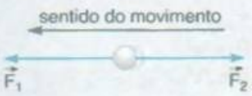
$F_1 - F_2 = m \cdot a$

$F_1 - 50 = 6{,}0 \cdot 3{,}0$

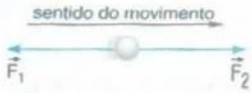
$\boxed{F_1 = 68\,N}$



22. Consideremos uma partícula de massa $m = 7{,}0\,kg$ em movimento retilíneo e retardado, sob a ação de apenas duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, como mostra a figura. Determine o módulo de $\vec{F}_1$, sabendo que $F_2 = 60\,N$ e que o módulo da aceleração da partícula é $a = 4{,}0\,m/s^2$.



23. Um ponto material de massa $m = 8{,}0\,kg$ tem movimento retilíneo e uniforme, sob a ação de apenas duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, como mostra a figura. Determine o módulo de $\vec{F}_2$, sabendo que $F_1 = 17\,N$.

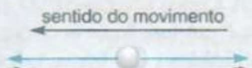


Resolução:

Como o movimento é retilíneo e uniforme, a velocidade é constante e a aceleração é nula. Portanto, de acordo com a Segunda Lei de Newton, a força resultante também é nula. Assim devemos ter $F_1 = F_2$.

$\boxed{F_1 = 17\,N}$

24. Consideremos um ponto material de massa $m = 5{,}0\,kg$ em movimento retilíneo e uniforme, sob a ação de apenas duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, como mostra a figura. Determine o módulo de $\vec{F}_1$, sabendo que $F_2 = 24\,N$.



EXERCÍCIOS DE REFORÇO

25. Uma partícula está sob a ação de várias forças cuja resultante é zero. Podemos afirmar que a partícula:

a) está em repouso.
b) está em movimento retilíneo uniforme.
c) está em movimento acelerado.
d) está em movimento circular.
e) pode estar em repouso ou em movimento retilíneo uniforme.

26. (PUC-SP) No arremesso de peso, um atleta gira um corpo rapidamente e depois o abandona. Se não houvesse a influência da Terra, a trajetória do corpo após ser abandonado pelo atleta seria:

a) circular.
b) parabólica.
c) curva qualquer.
d) retilínea.
e) espiral.

27. (VUNESP-SP) As estatísticas indicam que o uso do cinto de segurança deve ser obrigatório para prevenir lesões mais graves em motoristas e passageiros no caso de acidentes. Fisicamente, a função do cinto está relacionada com a:

a) Primeira Lei de Newton.
b) Lei de Snell.
c) Lei de Ampère.
d) Lei de Ohm.
e) Primeira Lei de Kepler.

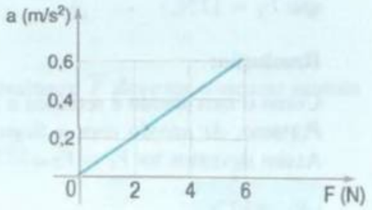
28. (Mackenzie-SP) Um automóvel de massa 1 600 kg desloca-se a partir do repouso e atinge certa velocidade devido à ação de uma força resultante, constante, paralela à trajetória, de intensidade de 800 N. A aceleração sofrida pelo carro nesse intervalo foi:

a) $0{,}5\,m/s^2$
b) $1{,}0\,m/s^2$
c) $2{,}0\,m/s^2$
d) $40\,m/s^2$
e) $20\sqrt{2}\,m/s^2$

29. (Fund. Carlos Chagas-SP) Para que um carrinho de massa m adquira uma certa aceleração de módulo a, é necessário que a força resultante tenha módulo F. Qual é o módulo da força resultante para que um carrinho de massa 2m adquira uma aceleração de módulo 3a?

a) 1,5 F b) 2 F c) 3 F d) 5 F e) 6 F

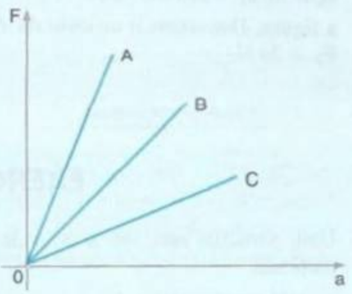
30. (VUNESP-SP) Um corpo de massa m pode se deslocar ao longo de uma reta horizontal sem encontrar qualquer resistência. O gráfico representa a aceleração, a, desse corpo, em função do módulo (intensidade), F, da força aplicada, que atua sempre na direção da reta horizontal.



A partir do gráfico, é possível concluir que a massa do corpo, em kg, é igual a:

a) 10 b) 6,0 c) 2,0 d) 0,4 e) 0,1

31. (Fund. Carlos Chagas-SP) O gráfico a seguir é o da força F em função da aceleração a para três corpos identificados pelas letras A, B e C. A respeito dessa situação, fazem-se três afirmações:



I. Os três corpos têm a mesma massa.
II. Se uma mesma força é aplicada, sucessivamente, a cada corpo, C adquire maior aceleração.
III. Os três corpos adquirirão a mesma velocidade final se, a partir do repouso e durante o mesmo intervalo de tempo, cada um deles for submetido à ação da mesma força.

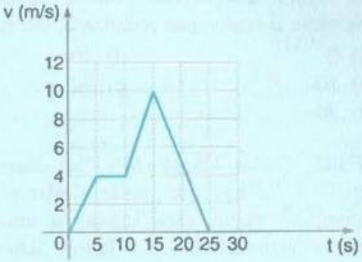
Analisando o gráfico, conclui-se que está (estão) correta(s):

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas I e III.
d) apenas II e III.
e) I, II e III.

32. (UNICAMP-SP) Dois objetos, A e B, equilibram-se, quando colocados em pratos opostos de uma balança de braços iguais. Quando colocados num mesmo prato da balança, eles equilibram um terceiro objeto C, colocado no outro prato. Suponha então que sobre uma mesa horizontal sem atrito uma certa força imprima ao objeto A uma aceleração de $10\,m/s^2$. Qual será a aceleração adquirida pelo objeto C, quando submetido a essa mesma força?

33. (PUCC-SP) Uma força de intensidade 12 N é aplicada separadamente a dois corpos cujas massas são m_1 e m_2, produzindo neles aceleração de $4{,}8\,m/s^2$ e $8{,}0\,m/s^2$, respectivamente. Se os corpos em questão fossem unidos, determine o valor da aceleração do sistema formado por eles sob a ação da mesma força.

34. (FUVEST-SP) O gráfico ao lado nos dá a velocidade escalar em função do tempo, para uma partícula de massa 2,0 kg que se move sobre uma reta. Esboce o gráfico do módulo da força resultante que atua na partícula, em função do tempo, para o intervalo de tempo que vai de t = 0 a t = 25 s.



35. (UF-RS) Um corpo de massa igual a 5 kg, inicialmente em repouso, sofre a ação de uma força resultante constante de 30 N. Qual a velocidade do corpo depois de 5 s?

a) 5 m/s
b) 6 m/s
c) 25 m/s
d) 30 m/s
e) 150 m/s

36. (FUVEST-SP) Um corpo de massa 3 kg move-se sem atrito num plano horizontal, sob a ação de uma força horizontal de intensidade 7 N. No instante t_0 sua velocidade é nula e no instante t_1 (com $t_1 > t_0$) a velocidade é 21 m/s. O valor de $t_1 - t_0$ é:

a) 3 s b) 9 s c) 12 s d) 16 s e) 21 s

37. (FEI-SP) Um corpo de massa de 2 kg movimenta-se num plano horizontal em trajetória retilínea. No instante t = 0 sua velocidade é $v_0 = 10\,m/s$, e no instante t = 10 s ela é $v_t = 1{,}0\,m/s$. Calcule a intensidade da força resultante que atua no corpo durante o intervalo de tempo considerado, supondo que essa força tenha sido constante.

38. (UEL-PR) Sobre um corpo de 6,0 kg de massa, inicialmente em repouso sobre uma mesa horizontal perfeitamente lisa, aplica-se uma força $\vec{F}$ constante, também horizontal. Após um deslocamento de 25 m, o corpo apresenta uma velocidade de 5,0 m/s. A intensidade da força $\vec{F}$ aplicada ao corpo, em newtons, foi de:

a) 3,0 b) 5,0 c) 6,0 d) 10 e) 30

39. (VUNESP-SP) Dois corpos equilibram-se quando colocados cada um num dos pratos de uma balança de braços iguais. Em seguida, um dos corpos é acelerado por uma única força constante cuja intensidade é 2 N. Verifica-se então que sua velocidade varia de 8 m/s a cada 2 segundos. A massa do corpo que ficou na balança é:

a) $\frac{1}{4}$ kg b) $\frac{1}{2}$ kg c) 1 kg d) 2 kg e) 4 kg

40. (CEFET-PR) Um automóvel de massa $1{,}0 \cdot 10^3$ kg movendo-se inicialmente com velocidade escalar de 72 km/h é freado uniformemente e pára após percorrer 50 m. O intervalo de tempo de frenagem e o módulo da força resultante sobre o automóvel durante a frenagem valem, respectivamente:

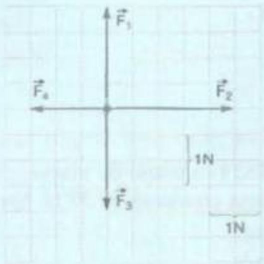
a) 5,0 s e $4{,}0 \cdot 10^3$ N
b) 2,5 s e $8{,}0 \cdot 10^3$ N
c) 2,5 s e $4{,}0 \cdot 10^3$ N
d) 5,0 s e $8{,}0 \cdot 10^3$ N
e) 2,5 s e $6{,}0 \cdot 10^3$ N

41. (FUVEST-SP) Um veículo de massa 5,0 kg descreve uma trajetória retilínea e abedece à seguinte equação horária: $s = 3t^2 + 2t + 1$, onde *s* é medido em metros e *t* em segundos. Qual o módulo da força resultante sobre o veículo?

42. (UNIFOR-CE) Um corpo de massa $m = 0,5\,kg$ está sob a ação das duas forças colineares indicadas na figura. De acordo com a Segunda Lei de Newton, e aceleração resultante, em m/s^2, é de:

a) 0
b) 10
c) 30
d) 40
e) 70

43. (Fund. Carlos Chagas-SP) Um corpo de massa igual a 2,0 kg, que pode deslizar sobre uma superfície plana, está sujeito a um sistema de forças representado ao lado. Sabendo-se que nenhuma outra força atua sobre o corpo, qual é sua aceleração escalar?



a) $2,5\,m/s^2$
b) $2,0\,m/s^2$
c) $1,5\,m/s^2$
d) $1,0\,m/s^2$
e) $0,50\,m/s^2$

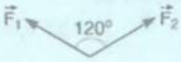
44. (Mackenzie-SP) A resultante de duas forças perpendiculares entre si e aplicadas sobre um mesmo corpo tem intensidade igual a $\sqrt{20}$ N. Se a intensidade de uma das forças é o dobro da intensidade da outra, a intensidade da maior é:

a) 0,5 N
b) 1,0 N
c) 2,0 N
d) 4,0 N
e) 8,0 N

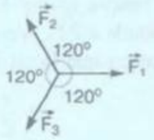
45. (PUCC-SP) Três forças estão aplicadas a uma partícula de modo que a resultante é nula. Duas delas são perpendiculares entre si e suas intensidades são 90 N e 120 N, respectivamente. Calcule a intensidade da terceira força.

46. Uma partícula de massa $m = 10\,kg$ está submetida à ação de apenas duas forças, $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, como mostra a figura. Calcule o módulo da aceleração da partícula, sabendo que $F_1 = 40\,N$ e $F_2 = 20\,N$.

47. Determine o módulo da resultante das forças $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ assinaladas na figura, sabendo que $F_1 = F_2 = 20\,N$.

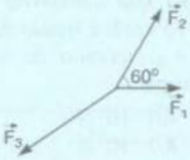


48. (UF-PI) Três forças de mesma intensidade, *F*, estão aplicadas numa partícula, como na figura. O módulo da força resultante sobre a partícula é:



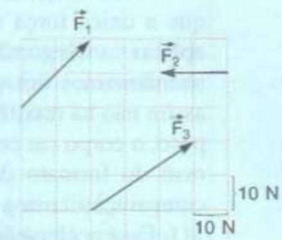
a) 3 F
b) 2 F
c) 1,5 F
d) F
e) 0

49. (Mackenzie-SP) O sistema de forças ao lado tem resultante nula. Sabe-se que os módulos das forças $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ valem, respectivamente, 3 N e 5 N. O módulo da força $\vec{F_3}$ vale:



a) 10 N
b) 8 N
c) 7 N
d) 6 N
e) 2 N

50. (UEL-PR) O diagrama ao lado representa três forças, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$. O módulo da resultante dessas forças é:
a) 30 N
b) 40 N
c) 50 N
d) 70 N
e) 80 N



51. Consideremos uma partícula em movimento retilíneo sob a ação de apenas duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, como mostra a figura. Sabendo que $F_1 = 50\,N$ e $F_2 = 30\,N$, diga se cada uma das sentenças a seguir é verdadeira ou falsa.

a) A partícula pode estar em movimento acelerado para a direita.
b) A partícula pode estar em movimento retardado para a esquerda.
c) A partícula pode estar em movimento uniforme.
d) A partícula certamente está em movimento acelerado para a direita.

5. PESO

A experiência mostra que a Terra exerce uma força de atração sobre qualquer corpo situado em suas proximidades. No capítulo 11 faremos um estudo mais detalhado dessa força. Por enquanto, nos limitaremos a constatar que ela existe e a chamaremos de *peso do corpo*. Representaremos o peso de um corpo por $\vec{P}$. O peso tem a direção de uma reta que passa aproximadamente pelo centro da Terra e sentido para o centro dela (Fig. 18).

Fig. 18

Fig. 19

Na Fig. 19, $\vec{P}_A$ é o peso do corpo *A* e $\vec{P}_B$ é o peso do corpo *B*. No caso dessa figura, vemos que $\vec{P}_A$ e $\vec{P}_B$ têm direções diferentes. No entanto, com exceção dos casos que vão aparecer no capítulo 11, todos os movimentos que analisaremos vão ocorrer bem perto da superfície da Terra e numa região pequena em comparação com o tamanho dela (Fig. 20a). Nessa "pequena" região (ampliada na Fig. 20b), podemos considerar que os pesos dos vários corpos nela situados terão aproximadamente a mesma direção (que é a da vertical do lugar) e o mesmo sentido (para baixo)

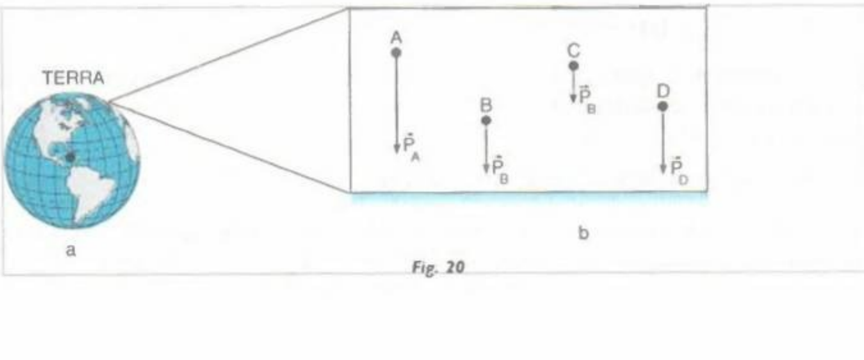


Fig. 20

Para determinarmos o peso de um corpo, basta fazer uma experiência em que a única força atuante no corpo seja o *peso*, medir a aceleração do corpo e aplicar a Segunda Lei de Newton. A experiência mostra que, quando abandonamos um corpo de certa altura, numa região em que foi feito vácuo (e assim não há resistência do ar) e de modo que a única força atuante no corpo seja o peso, o corpo cai com uma aceleração que *não* depende da massa nem do tamanho nem do formato do corpo (desde que o corpo tenha tamanho desprezível em comparação com a Terra; analisaremos esse fato com mais detalhes no capítulo 11). Essa aceleração é chamada *aceleração da gravidade* e é representada por $\vec{g}$. Sendo m a massa do corpo, temos, pela Segunda Lei de Newton:

$$\vec{F}_{resultante} = m \cdot \vec{a}$$

Mas, nesse caso, a força resultante é o peso e a aceleração é a da gravidade. Assim:

$$\boxed{\vec{P} = m \cdot \vec{g}}$$

tendo $\vec{P}$ e $\vec{g}$ a mesma direção e o mesmo sentido.

O módulo de $\vec{g}$ depende do local em que é feita a experiência, variando também com a altura. No entanto, se nos limitarmos a uma pequena região em comparação com o tamanho da Terra e situada próximo de sua superfície, podemos admitir que o módulo de $\vec{g}$ é aproximadamente o mesmo em todos os pontos da região. Suponhamos que a região da Fig. 21 seja desse tipo. Sendo $\vec{g}_A$, $\vec{g}_B$ e $\vec{g}_C$ as acelerações da gravidade nos pontos A, B e C, devemos ter:

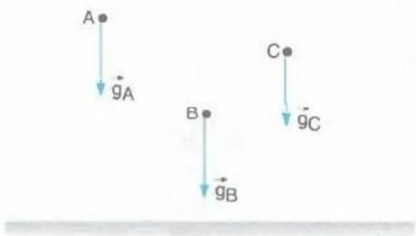


Fig. 21

$$g_A = g_B = g_C$$

Para pontos próximos da superfície da Terra obtemos $g \cong 9{,}8\,m/s^2$. No pólo Norte, por exemplo, temos $g \cong 9{,}83\,m/s^2$, enquanto no equador temos $g \cong 9{,}78\,m/s^2$. No entanto, nos exercícios é comum que se adote $g = 10\,m/s^2$, apenas para facilitar os cálculos.

Exemplo 8:

Consideremos um corpo de massa $m = 100\,kg$. Supondo que no pólo Norte a aceleração da gravidade tenha módulo $g = 9{,}83\,m/s^2$, o peso desse corpo no pólo Norte terá módulo P dado por:

$$P = m \cdot g = 100 \cdot 9{,}83 \qquad P = 983\,N$$

Suponhamos agora que esse corpo seja levado para o equador, onde a aceleração da gravidade tem módulo $g' = 9{,}78\,m/s^2$. O peso desse corpo no equador terá módulo P', dado por:

$$P' = m \cdot g' = 100 \cdot 9{,}78 \qquad P' = 978\,N$$

Observemos que, ao levar o corpo do pólo Norte para o equador, sua massa *não variou*; o que variou foi o seu peso, isto é, a força de atração da Terra.

Observações

1ª) No capítulo 11, o conceito de peso será reformulado.

2ª) Por convenção, o módulo de $\vec{g}$ num determinado ponto situado ao nível do mar e na latitude de 45° é denominado *aceleração normal da gravidade*, sendo representado por g_n. Seu valor é dado por:

$$g_n = 9{,}80665\ m/s^2$$

3ª) Definimos o peso de um corpo como a força de atração que a Terra exerce sobre esse corpo. No entanto, conforme veremos no capítulo 11, não é só a Terra que tem essa capacidade de atrair os objetos. Os outros planetas e também a Lua atraem os corpos situados em suas proximidades. Assim, podemos ampliar o conceito de peso e definir o *peso de um corpo em relação a um planeta* (ou satélite) como *a força de atração exercida pelo planeta sobre o corpo*.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

52. Consideremos um corpo de massa $m = 10\,kg$.

a) Calcule o peso desse corpo na Terra, onde a aceleração da gravidade tem módulo $g = 9{,}8\,m/s^2$.

b) Calcule o peso desse corpo na Lua, onde a aceleração da gravidade tem módulo $g' = 1{,}6\,m/s^2$.

Resolução:

a) $P = m \cdot g = 10 \cdot 9{,}8$ $\boxed{P = 98\,N}$

b) $P' = m \cdot g' = 10 \cdot 1{,}6$ $\boxed{P' = 16\,N}$

53. Um corpo tem peso de intensidade $P = 300\,N$, num local da Terra em que a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10\,m/s^2$. Calcule a intensidade do peso desse corpo quando levado para a Lua, num local em que a aceleração da gravidade tem módulo $g' = 1{,}6\,m/s^2$.

54. Uma partícula de massa $m = 4{,}0\,kg$ sobe verticalmente, em movimento acelerado, sob a ação de apenas duas forças: o seu peso $\vec{P}$ e uma força vertical $\vec{F}$, como mostra a figura. Calcule o módulo da aceleração da partícula, sabendo que $F = 70\,N$ e que a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10\,m/s^2$.

Resolução:

Ao considerarmos que a partícula está sob a ação apenas do peso e da força $\vec{F}$, estamos desprezando a resistência do ar. Na realidade, desprezaremos a resistência do ar em praticamente todos os problemas que analisaremos, pois, quando ela é levada em conta, quase sempre necessitamos recorrer ao Cálculo Diferencial e Integral, que só é estudado em cursos de nível universitário. Apenas no capítulo 3 estudaremos alguns casos simples envolvendo a resistência do ar. Temos, então:

$P = m \cdot g = (4{,}0)(10) \Longrightarrow P = 40\,N$

Pela Segunda Lei de Newton, temos:

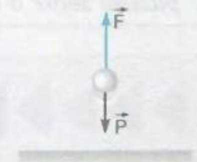
$F_{resultante} = m \cdot a$

isto é, $F - P = m \cdot a$

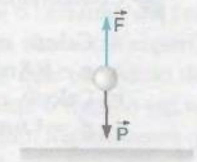
ou $70 - 40 = 4{,}0 \cdot a$

donde $a = 7{,}5\,m/s^2$

55. Consideremos uma partícula de massa $m = 2{,}0\,kg$ em movimento vertical acelerado sob a ação de apenas duas forças: o seu peso $\vec{P}$ e uma força vertical $\vec{F}$, como mostra a figura. Calcule o módulo da aceleração da partícula, sabendo que $F = 26\,N$ e que o módulo da aceleração da gravidade é $g = 10\,m/s^2$.



56. Uma partícula de massa $m = 5{,}0\,kg$ está em movimento vertical, numa região em que a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10\,m/s^2$, sob a ação de apenas duas forças: o seu peso $\vec{P}$ e uma força vertical $\vec{F}$, como mostra a figura.



a) Calcule o módulo de $\vec{F}$, supondo que a partícula esteja subindo em movimento acelerado cuja aceleração tem módulo $a = 2{,}0\,m/s^2$.
b) Calcule o módulo de $\vec{F}$, supondo que a partícula esteja subindo em movimento retardado cuja aceleração tem módulo $a = 2{,}0\,m/s^2$.
c) Calcule o módulo de $\vec{F}$, supondo que a partícula esteja descendo em movimento acelerado cuja aceleração tem módulo $a = 3{,}0\,m/s^2$.
d) Calcule o módulo de $\vec{F}$, supondo que a partícula esteja subindo em movimento uniforme.

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

57. (Fund. Carlos Chagas-SP) Qual é, em newtons, a intensidade da força de atração gravitacional entre um corpo de massa igual a 5,0 kg e a Terra, em um local onde o módulo da aceleração gravitacional é $9{,}8\,m/s^2$?

a) 5,0
b) 9,8
c) 49
d) 50
e) 98

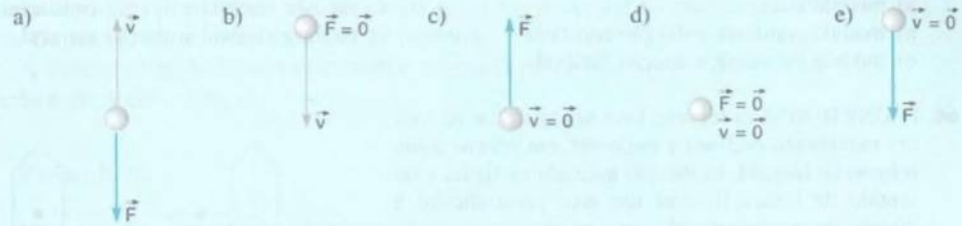
58. (FATEC-SP) Um corpo de massa $m = 1{,}00\,kg$ tem peso $P_1 = 9{,}78\,N$ no equador e peso $P_2 = 9{,}81\,N$ no Pólo Norte. Podemos, então, afirmar que:

a) a aceleração da gravidade é maior no Pólo do que no equador.
b) a aceleração da gravidade é maior no equador do que no Pólo.
c) os dados estão incorretos, pois o peso não depende do local.
d) a massa varia de um local para outro.

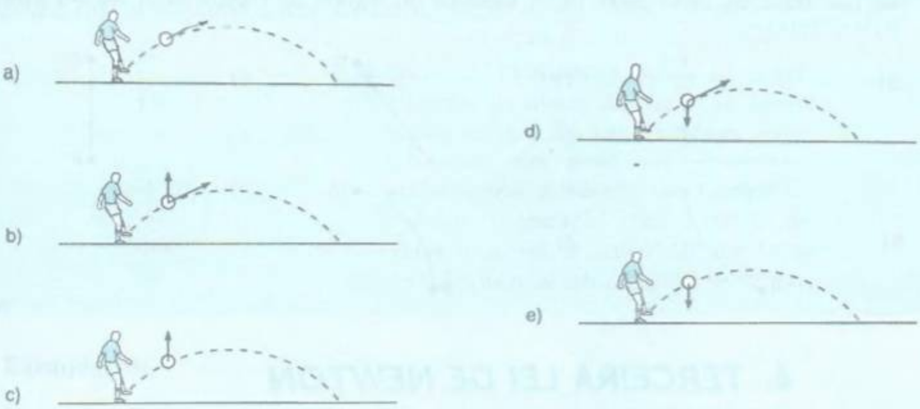
59. (FUVEST-SP) Uma força de 1 newton (1 N) tem a ordem de grandeza do peso de:

a) um homem adulto.
b) uma criança recém-nascida.
c) um litro de leite.
d) uma xicrinha cheia de café.
e) uma moeda de um centavo.

60. (CESGRANRIO-RJ) Atira-se uma pedra verticalmente para cima. Assinale a opção que representa corretamente a velocidade $\vec{v}$ da pedra e a força resultante $\vec{F}$ que atua sobre ela no ponto mais alto da trajetória.



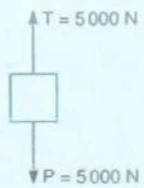
61. (U. F. Viçosa-MG) Desprezada a resistência do ar, a opção que representa corretamente a(s) força(s) que atua(m) sobre uma bola de futebol após ter sido chutada é:



62. (FCMSC-SP) Qual a intensidade da força que devemos aplicar a um corpo de massa 1,0 kg de modo que o corpo suba verticalmente, com aceleração $1{,}0\ m/s^2$?
(Despreze a resistência do ar e adote $g = 10\ m/s^2$.)

a) 1,0 N b) 2,0 N c) 10 N d) 11 N e) 15 N

63. (VUNESP-SP) Um elevador que pode mover-se verticalmente tem peso $P = 5\,000\ N$. Desprezar atritos nas guias. A força de tração exercida pelo cabo é $T = 5\,000\ N$. O elevador:



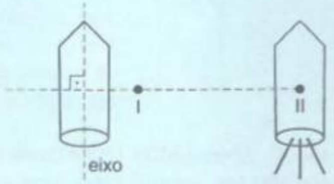
a) só pode estar em repouso.
b) não pode subir em movimento uniforme.
c) não pode descer em movimento uniforme.
d) pode descer acelerado.
e) está parado ou em MRU.

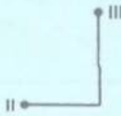
64. (E. E. Mauá-SP) Um ponto material de massa $m = 0{,}500\,kg$ está sujeito à ação da gravidade e de uma força horizontal de intensidade $F = 6{,}40\,N$, num local onde $g = 9{,}60\,m/s^2$. Determine o módulo da aceleração resultante da partícula.

65. (FUVEST-SP) O motor de um foguete de massa m é acionado em um instante em que ele se encontra em repouso sob a ação da gravidade ($\vec{g}$ constante). O motor exerce uma força constante perpendicular à força exercida pela gravidade. Desprezando-se a resistência do ar e a variação da massa do foguete, podemos afirmar que, no movimento subseqüente, a velocidade do foguete mantém:

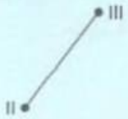
a) módulo nulo.
b) módulo constante e direção constante.
c) módulo constante e direção variável.
d) módulo variável e direção constante.
e) módulo variável e direção variável.

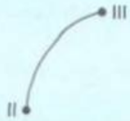
66. (VUNESP-SP) Um foguete, livre no espaço, se desloca em movimento retilíneo e uniforme, em relação a um referencial inercial, na direção indicada na figura e no sentido de I para II, com seu eixo perpendicular à direção do movimento.
Quando atinge II, os motores são ligados e o foguete fica sujeito à ação de uma força constante, que atua perpendicularmente à direção do deslocamento inicial, até que atinja um certo ponto III. A trajetória do foguete no espaço, de II até III, pode ser representada por:



a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

6. TERCEIRA LEI DE NEWTON

Se um corpo A exerce uma força $\vec{F_1}$ em um corpo B, então o corpo B exerce uma força $\vec{F_2}$ em A, tal que:

$$\vec{F_2} = -\vec{F_1}$$

isto é, as duas forças têm a mesma direção, o mesmo módulo e sentidos opostos.

$$\vec{F_2} = -\vec{F_1}$$

$$F_2 = F_1$$

Fig. 22

$$\vec{F_2} = -\vec{F_1}$$

$$F_2 = F_1$$

Fig. 23

Assim, para Newton, as forças sempre aparecem aos pares. As duas forças que compõem o par recebem o nome de *ação* e *reação*, porém cada uma das duas forças pode ser chamada de ação ou reação, pois elas aparecem *simultaneamente*. Essas forças podem ser de atração ou repulsão; no caso da Fig. 22 elas são de atração, e no caso da Fig. 23 elas são de repulsão.

É importante observar que as forças de ação e reação agem sobre corpos diferentes.

Convém também destacar que, embora as forças de ação e reação tenham o mesmo módulo, isso não significa que vão produzir acelerações de módulos iguais; a aceleração produzida por cada uma delas vai depender da massa de cada corpo, de acordo com a Segunda Lei de Newton.

A Terceira Lei de Newton também é chamada de *Lei da Ação e Reação* ou *Princípio da Ação e Reação*.

Exemplo 9:

Um corpo A, nas proximidades da Terra, sofre desta uma atração que é o peso $\vec{P}$ do corpo (Fig. 24). Portanto, pelo Princípio da Ação e Reação, a Terra também é atraída pelo corpo A, com uma força de mesmo módulo, mesma direção e sentido oposto ao de $\vec{P}$. Essa força está representada por $-\vec{P}$ e, supondo a Terra homogênea, está aplicada no centro da Terra.

Fig. 24

As forças $\vec{P}$ e $-\vec{P}$ têm o mesmo módulo. Porém, se a massa de A for diferente da massa da Terra, as acelerações de A e da Terra também serão diferentes. Em geral, nos casos que analisaremos, a massa de A é desprezível em comparação com a massa da Terra e, assim, a aceleração da Terra será desprezível em relação à do corpo.

Exemplo 10:

Consideremos um indivíduo de patins (a utilidade dos patins é apenas para diminuir o atrito dos pés do indivíduo com o solo) sobre uma superfície plana horizontal. Suponhamos que, de início, o indivíduo esteja em repouso segurando um objeto A (Fig. 25). Imaginemos então que o indivíduo jogue o objeto A para a frente. Para fazê-lo, o indivíduo aplicou sobre A uma força $\vec{F}$ (Fig. 26). Pelo Princípio da Ação e Reação, o objeto A aplica sobre o indivíduo uma força de mesmo módulo, mesma direção e sentido oposto ao de $\vec{F}$, que é a força $-\vec{F}$.

A força $-\vec{F}$ fará com que o indivíduo se movimente para trás, desde que o atrito não o impeça.

Fig. 25

Fig. 26

Exemplo 11:

Consideremos agora um indivíduo andando. O pé do indivíduo empurra o chão para trás, exercendo uma força $\vec{F}$ (Fig. 27). Pelo Princípio da Ação e Reação, o chão exerce no pé do indivíduo uma força de mesmo módulo, mesma direção e sentido oposto ao de $\vec{F}$; é a força $-\vec{F}$. Neste caso, é essencial que haja atrito entre o pé do indivíduo e o chão. Se não houvesse atrito, ele não conseguiria mover-se desse modo.

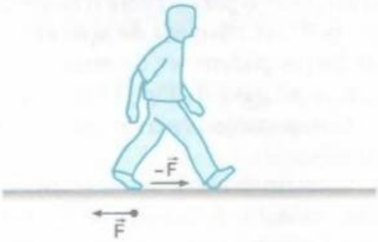


Fig. 27

Exemplo 12:

Um caso semelhante ao do exemplo anterior é o de um automóvel em movimento acelerado. As rodas que estão ligadas ao motor (em alguns casos, são as rodas de trás, em outros, as rodas da frente, e, em outros, as quatro rodas) ao girarem empurram o chão para trás, exercendo uma força $\vec{F}$ (Fig. 28). O chão exerce então sobre a roda uma força $-\vec{F}$ para a frente.

Fig. 28

Exemplo 13:

Consideremos um bloco A apoiado numa mesa M, a qual está apoiada na Terra (Fig. 29).

Uma das forças que atuam sobre o bloco é o seu peso $\vec{P}$ (Fig. 30); a reação do peso é a força $-\vec{P}$ que é aplicada à Terra.

O bloco *comprime* a mesa exercendo sobre ela a força $-\vec{N}$ (Fig. 31); a reação de $-\vec{N}$ é a força $\vec{N}$ que está aplicada *ao bloco*.

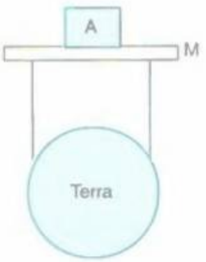


Fig. 29

Fig. 30

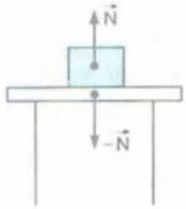


Fig. 31

As forças $\vec{N}$ e $-\vec{N}$ formam um par de ação e reação; as forças $\vec{P}$ e $-\vec{P}$ formam *outro* par de ação e reação. Assim, a força $\vec{N}$ *não é reação de* $\vec{P}$.

Isolando o bloco (Fig. 32), as forças que atuam sobre ele são $\vec{P}$ e $\vec{N}$. A força $\vec{N}$, pelo fato de ser uma força de compressão, é *sempre perpendicular* à superfície de contato. Por isso é chamada de *força normal* (às vezes é também chamada de *reação normal do apoio*).

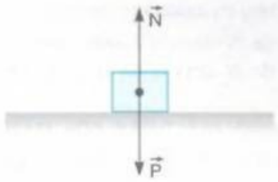


Fig. 32

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

67. Um bloco de massa m = 8,0 kg está inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal sob a ação de apenas duas forças: o seu peso $\vec{P}$ e a força normal $\vec{N}$ exercida pela superfície (Fig. a). A partir de determinado instante aplicamos ao bloco uma força vertical $\vec{F}$ de intensidade F = 30 N, como mostra a Fig. b. Adote $g = 10\,m/s^2$.

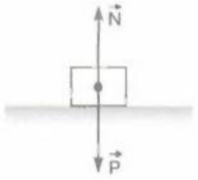


Fig. a

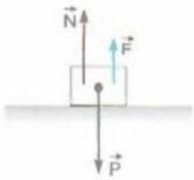


Fig. b

a) Calcule a intensidade de $\vec{N}$ antes da aplicação de $\vec{F}$.
b) Calcule a intensidade de $\vec{N}$ depois da aplicação de $\vec{F}$.

Resolução:

a) Temos:

$P = m \cdot g = 8{,}0 \cdot 10 \qquad P = 80\,N$

Antes da aplicação de $\vec{F}$, o bloco está em repouso sob a ação de apenas duas forças ($\vec{P}$ e $\vec{N}$) de sentidos opostos (Fig. a). Portanto, essas forças devem ter o mesmo módulo:

$N = P \qquad \boxed{N = 80 \text{ newtons}}$

b) Temos P = 80 N e F = 30 N. Portanto, como F < P, ao aplicarmos a força $\vec{F}$ o bloco permanecerá em repouso e, por isso, a resultante das forças deve ser nula. Para que isso ocorra devemos ter:

$N + F = P$

$N + 30 = 80 \qquad \boxed{N = 50 \text{ newtons}}$

68. Consideremos um bloco de massa m = 7,0 kg, inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal, sob a ação de apenas duas forças: o seu peso $\vec{P}$ e a força normal $\vec{N}$ exercida pela superfície (Fig. a). A partir de determinado instante aplicamos ao bloco uma força vertical $\vec{F}$ de intensidade F = 25 N, como mostra a Fig. b.

Fig. a

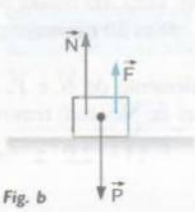


Fig. b

Adotando $g = 10\,m/s^2$, calcule:

a) a intensidade de $\vec{N}$ antes da aplicação de $\vec{F}$;

b) a intensidade de $\vec{N}$ depois da aplicação de $\vec{F}$.

69. Um corpo de massa $m = 6{,}0\,kg$ está inicialmente em repouso sobre uma superfície plana e horizontal, sob a ação de apenas duas forças: o seu peso $\vec{P}$ e a força normal $\vec{N}$ exercida pela superfície (Fig. a). A partir de determinado instante, aplicamos ao corpo uma força vertical $\vec{F}$, de intensidade $F = 20\,N$, como mostra a Fig. b.

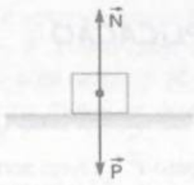


Fig. a

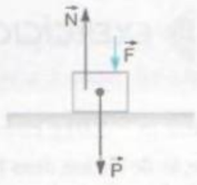


Fig. b

Adotando $g = 10\,m/s^2$, calcule:

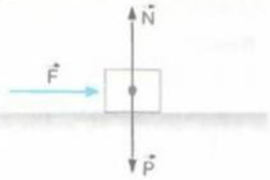
a) a intensidade de $\vec{N}$ antes da aplicação de $\vec{F}$;

b) a intensidade de $\vec{N}$ depois da aplicação de $\vec{F}$.

70. Um bloco de massa $m = 2{,}0\,kg$ está inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal sob a ação de apenas duas forças: o seu peso $\vec{P}$ e a força normal $\vec{N}$ exercida pela superfície horizontal. A partir de determinado instante aplicamos ao bloco uma força horizontal $\vec{F}$, de intensidade $F = 14\,N$, como mostra a figura. Despreze o atrito e a resistência do ar. Admitindo $g = 10\,m/s^2$, calcule:

a) a intensidade de $\vec{N}$ após a aplicação de $\vec{F}$;

b) o módulo da aceleração adquirida pelo bloco após a aplicação de $\vec{F}$.

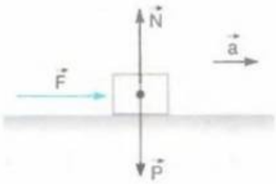


Resolução:

a) Temos:

$P = m \cdot g = 2{,}0 \cdot 10 \qquad P = 20\,N$

O bloco estava em repouso sobre a superfície horizontal e recebeu a aplicação de uma força $\vec{F}$ horizontal. Portanto, na direção vertical não haverá movimento, o que significa que as forças $\vec{N}$ e $\vec{P}$ devem se anular. Portanto:

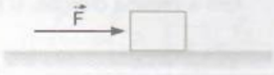


$N = P \qquad \boxed{N = 20 \text{ newtons}}$

b) Com o anulamento de $\vec{N}$ e $\vec{P}$, a força $\vec{F}$ é a força resultante. Assim, de acordo com a Segunda Lei de Newton, temos:

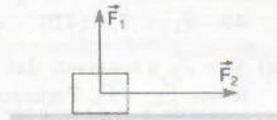
$F = m \cdot a \implies 14 = 2{,}0 \cdot a \implies \boxed{a = 7{,}0\,m/s^2}$

71. Consideremos um bloco de massa m = 4,0 kg inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal, sob a ação de apenas duas forças: o seu peso $\vec{P}$ e a força normal $\vec{N}$ exercida pela superfície horizontal. A partir de determinado instante, aplicamos ao bloco uma força horizontal $\vec{F}$, de intensidade F = 24 N, como mostra a figura. Despreze o atrito e a resistência do ar. Adotando $g = 10\,m/s^2$, calcule:



a) a intensidade de $\vec{N}$ após a aplicação de $\vec{F}$;
b) o módulo da aceleração do bloco após a aplicação de $\vec{F}$.

72. Consideremos um bloco de massa m = 2,0 kg inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal sem atrito, sob a ação de apenas duas forças: o seu peso $\vec{P}$ e a normal $\vec{N}$. A partir de determinado instante, aplicamos ao bloco as forças $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, de intensidades $F_1 = 7,0\,N$ e $F_2 = 16\,N$, como mostra a figura. Adotando $g = 10\,m/s^2$, calcule:



a) o módulo de $\vec{N}$ após a aplicação de $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$;
b) o módulo da aceleração adquirida pelo bloco após a aplicação de $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$.

73. Dois blocos, *A* e *B*, de massas respectivamente iguais a 7,0 kg e 3,0 kg, estão inicialmente em repouso sobre um plano horizontal sem atrito, encostados um no outro. A partir de determinado instante, aplicamos ao conjunto uma força horizontal $\vec{F}$, de intensidade F = 40 N, como mostra a figura. Calcule:

a) o módulo da aceleração adquirida pelo conjunto;
b) o módulo da força que um bloco exerce sobre o outro;
c) o módulo da resultante das forças que atuam sobre o bloco *B*;
d) o módulo da resultante das forças que atuam sobre o bloco *A*.

Resolução:

a) As forças que atuam sobre o conjunto estão indicadas na Fig. a. No entanto, nesse caso, o peso de cada bloco anula-se com a correspondente normal e, assim, a resultante das forças que atuam sobre o conjunto é a força $\vec{F}$. Aplicando a Segunda Lei de Newton ao conjunto, temos:

$F = (m_A + m_B) \cdot a \qquad (I)$

$40 = (7,0 + 3,0) \cdot a$

$\boxed{a = 4,0\,m/s^2}$

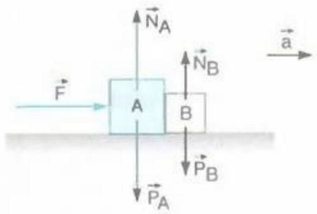


Fig. a

b) Vamos agora fazer um diagrama das forças que atuam em cada bloco separadamente (Fig. b), sem considerar o peso e a normal, já que estas se anulam.

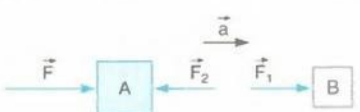


Fig. b

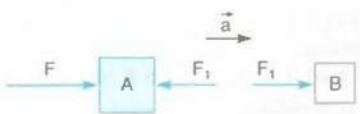


Fig. c

O bloco *A*, ao ser "empurrado" por $\vec{F}$, exerce sobre o bloco *B* a força $\vec{F_1}$. Pelo Princípio da Ação e Reação, o bloco *B* exerce sobre *A* uma força $\vec{F_2}$, tal que $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ têm a mesma direção, o mesmo módulo e sentidos opostos:

$$\vec{F_2} = -\vec{F_1}$$

Assim, podemos adotar o esquema simplificado da Fig. c. Escolhamos agora um dos dois blocos e apliquemos a ele a Segunda Lei de Newton. Se escolhermos o bloco *B*, teremos:

$F_1 = m_B \cdot a \quad (II)$

$F_1 = (3,0)(4,0) \qquad \boxed{F_1 = 12\,N}$

Se escolhermos o bloco *A*, teremos:

$F - F_1 = m_A \cdot a \quad (III)$

$40 - F_1 = (7,0)(4,0) \quad$ ou $\quad \boxed{F_1 = 12\,N}$

c) Seja $\vec{F_B}$ a resultante das forças que atuam sobre o bloco *B*. De acordo com a Fig. b, temos $\vec{F_B} = \vec{F_1}$. Portanto:

$\boxed{\vec{F_B} = 12\,N}$

d) Seja $\vec{F_A}$ a resultante das forças que atuam sobre o bloco *A*. De acordo com a Fig. c, temos:

$F_A = F - F_1 \quad$ ou $\quad F_A = 40 - 12 \qquad \boxed{F_A = 28\,N}$

Poderíamos também escrever, pela Segunda Lei de Newton:

$F_A = m_A \cdot a = (7,0)(4,0) \qquad \boxed{F_A = 28\,N}$

É interessante observar o sistema formado pelas equações II e III:

$$\begin{cases} F_1 = m_B \cdot a & (II) \\ F - F_1 = m_A \cdot a & (III) \end{cases}$$

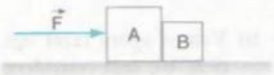
Somando membro a membro, obtemos a equação (I):

$F = (m_A + m_B) \cdot a$

74. Dois blocos, *A* e *B*, de massas respectivamente iguais a 12 kg e 8,0 kg, estão inicialmente em repouso sobre um plano horizontal sem atrito, encostados um no outro. A partir de determinado instante, aplicamos ao conjunto uma força horizontal $\vec{F}$, de intensidade F = 60 N, como ilustra a figura. Calcule:

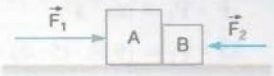
a) o módulo da aceleração adquirida pelo conjunto;
b) o módulo da força que um bloco exerce sobre o outro;
c) o módulo da resultante das forças que atuam sobre o bloco *B*;
d) o módulo da resultante das forças que atuam sobre o bloco *A*.

75. Consideremos dois blocos, *A* e *B*, inicialmente em repouso sobre uma superfície plana e horizontal sem atrito, encostados um no outro. A partir de determinado instante, aplica-se ao conjunto uma força horizontal $\vec{F}$, como ilustra a figura. As massas de *A* e *B* são respectivamente iguais a 7,0 kg e 5,0 kg. Sabendo que a força exercida pelo bloco *A* sobre o bloco *B* tem intensidade 30 N, calcule:



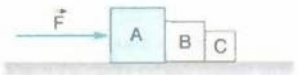
a) o módulo da aceleração do conjunto;
b) o módulo de $\vec{F}$.

76. A figura representa dois blocos, *A* e *B*, de massas respectivamente iguais a 8,0 kg e 6,0 kg, inicialmente em repouso sobre um plano horizontal sem atrito.
A partir de determinado instante, aplicamos ao conjunto as forças horizontais $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, de intensidades $F_1 = 41\,N$ e $F_2 = 13\,N$, como ilustra a figura. Calcule:



a) o módulo da aceleração adquirida pelo conjunto;
b) o módulo da força que um bloco exerce sobre o outro.

77. Três blocos, *A*, *B* e *C*, de massas respectivamente iguais a 9,0 kg, 6,0 kg e 2,0 kg, estão inicialmente em repouso sobre um plano horizontal sem atrito, como ilustra a figura. A partir de determinado instante, aplicamos ao conjunto a força horizontal $\vec{F}$ de intensidade $F = 85\,N$. Calcule:



a) o módulo da aceleração adquirida pelo conjunto;
b) os módulos das forças de interação entre os blocos *B* e *C*;
c) os módulos das forças de interação entre os blocos *A* e *B*.

Resolução:

a) Considerando os blocos *A*, *B* e *C* formando um único corpo, a resultante das forças que atuam nesse corpo é a força $\vec{F}$. Assim, de acordo com a Segunda Lei de Newton, temos:

$F = (m_A + m_B + m_C) \cdot a$

$85 = (9{,}0 + 6{,}0 + 2{,}0) \cdot a \qquad a = 5{,}0\,m/s^2$

b) Façamos a análise das forças que atuam sobre cada bloco separadamente (sem considerar os pesos e as normais, pois estas se anulam nesse caso). Ao ser "empurrado" por $\vec{F}$, o bloco *A* exerce sobre *B* a força $\vec{F}_1$ (Fig. a); mas, pelo Princípio da Ação e Reação, o bloco *B* exerce sobre *A* a força $\vec{F}_2$ tal que $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ e, assim, $F_2 = F_1$. O bloco *B* exerce sobre *C* a força $\vec{F}_3$; mas, pelo Princípio da Ação e Reação, o bloco *C* exerce sobre *B* a força $\vec{F}_4$, tal que $\vec{F}_4 = -\vec{F}_3$ e, portanto, $F_4 = F_3$.

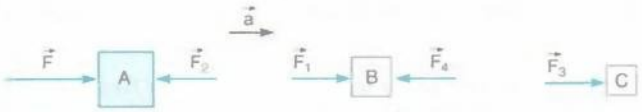


Fig. a

Como $F_2 = F_1$ e $F_4 = F_3$, podemos considerar o esquema simplificado da Fig. b.

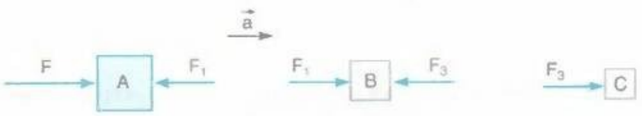


Fig. b

As forças de interação entre os blocos *B* e *C* são as forças $\vec{F}_3$ e $\vec{F}_4$, com $F_3 = F_4$. Aplicando a Segunda Lei de Newton ao bloco *C*, temos:

$F_3 = m_C \cdot a$

$F_3 = (2{,}0) \cdot (5{,}0) \qquad F_3 = 10\,N$

Assim, $F_3 = F_4 = 10\,N$

c) As forças de interação entre os blocos A e B são as forças $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, com $F_1 = F_2$. Observando a Fig. b, apliquemos a Segunda Lei de Newton ao bloco A:

$F - F_1 = m_A \cdot a$

$85 - F_1 = (9{,}0) \cdot (5 \cdot 0) \implies \boxed{F_1 = 40\,N}$

Como já havíamos calculado o valor de F_3 no item anterior, poderíamos ter aplicado a Segunda Lei de Newton ao bloco B:

$F_1 - F_3 = m_B \cdot a$

$F_1 - 10 = (6{,}0) \cdot (5{,}0) \implies F_1 = 40\,N$

Outro modo de calcularmos F_1, é considerar os blocos B e C formando um único corpo (Fig. c) e aplicar a esse corpo a Segunda Lei de Newton:

$F_1 = (m_B + m_C) \cdot a$

$F_1 = (6{,}0 + 2{,}0) \cdot (5{,}0) \implies F_1 = 40\,N$

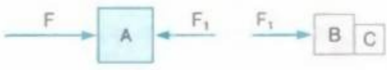
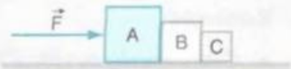


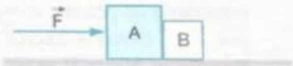
Fig. c

78. Os blocos A, B e C representados na figura têm massas respectivamente iguais a 5,0 kg, 4,0 kg e 3,0 kg. A força $\vec{F}$ tem intensidade $F = 84\,N$ e não há atrito. Calcule:



a) o módulo da aceleração do conjunto;
b) os módulos das forças de interação entre os blocos B e C;
c) os módulos das forças de interação entre os blocos A e B.

79. Os blocos A e B representados na figura, de massas $m_A = 2\,m$ e $m_B = 3\,m$, recebendo a ação da força horizontal $\vec{F}$, adquirem aceleração $\vec{a}$. Desprezando o atrito, calcule:



a) o módulo de $\vec{a}$ em função de F e m;
b) o módulo da força que o bloco A exerce sobre o bloco B, em função de m e a;
c) o módulo da força que o bloco A exerce sobre o bloco B, em função de F.

80 Dois blocos, A e B, de massas $m_A = 4{,}0\,kg$ e $m_B = 8{,}0\,kg$, sobem em movimento acelerado, empurrados por uma força $\vec{F}$ de intensidade $F = 180\,N$, como mostra a figura. Sendo $g = 10\,m/s^2$, calcule:

a) o módulo da aceleração do conjunto;
b) o módulo da força que o bloco B exerce sobre o bloco A.

Resolução:

a) Consideremos os dois blocos formando um único corpo de massa $m = m_A + m_B$, isto é, $m = 12\,kg$. Sendo $\vec{P}$ o peso desse corpo, temos:

$P = m \cdot g = 12 \cdot 10 \quad P = 120\,N$

Como o corpo sobe em movimento acelerado, devemos ter $F > P$. Aplicando ao corpo a Segunda Lei de Newton, temos:

$F - P = m \cdot a$

$180 - 120 = 12 \cdot a$

$\boxed{a = 5{,}0\,m/s^2}$

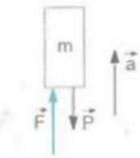


Fig. a

b) Analisemos agora as forças que atuam em cada bloco. Sejam $\vec{P}_A$ e $\vec{P}_B$ os pesos de *A* e *B*. O bloco *B* aplica ao bloco *A* a força $\vec{F}_1$ (Fig. b). Pelo Princípio da Ação e Reação, o bloco *A* aplica ao bloco *B* a força $\vec{F}_2$ tal que $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ e, assim, $F_2 = F_1$. Podemos, então, considerar o esquema simplificado da Fig. c.

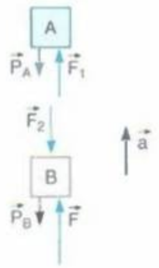


Fig. b

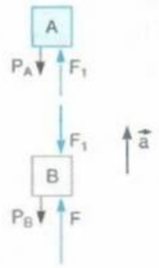


Fig. c

$$\begin{cases} P_A = m_A \cdot g = 4{,}0 \cdot 10 & P_A = 40\,N \\ P_B = m_B \cdot g = 8{,}0 \cdot 10 & P_B = 80\,N \end{cases}$$

Apliquemos a Segunda Lei de Newton ao bloco *A*, observando que ele sobe em movimento acelerado (e, portanto, $F_1 > P_A$):

$F_1 - P_A = m_A \cdot a$

$F_1 - 40 = (4{,}0) \cdot (5{,}0) \implies \boxed{F_1 = 60\,N}$

Poderíamos também ter aplicado a Segunda Lei de Newton ao bloco *B*:

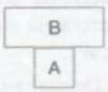
$F - F_1 - P_B = m_B \cdot a$

$180 - F_1 - 80 = (8{,}0) \cdot (5{,}0) \implies \boxed{F_1 = 60\,N}$

81. Dois blocos, *A* e *B*, de massas respectivamente iguais a 3,0 kg e 4,0 kg, descem em movimento acelerado, empurrados por uma força $\vec{F}$, de intensidade F = 14 N, como mostra a figura. Sendo $g = 10\,m/s^2$, calcule:

a) o módulo da aceleração do sistema;
b) o módulo da força que o bloco *A* exerce sobre o bloco *B*.

82. Dois blocos, *A* e *B*, de massas $m_A = 6{,}0\,kg$ e $m_B = 8{,}0\,kg$, são abandonados de certa altura, encostados um no outro, como mostra a figura. Despreze a resistência do ar e adote $g = 10\,m/s^2$.



a) Calcule o módulo da aceleração do conjunto.
b) Calcule o módulo da força que o bloco *B* exerce sobre o bloco *A*.

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

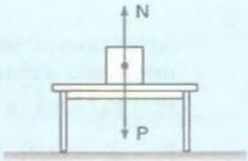
83. A Terceira Lei de Newton diz que: "A uma ação corresponde uma reação de módulo igual à ação, porém de sentido contrário". No caso de um corpo em queda livre, dizemos que ele está sujeito apenas:

a) à força de atração da Terra.
b) à força de atração da Terra e à força de reação, de modo que a resultante fornece aceleração *g*.
c) à força de atração da Terra, porque é desprezível a força de reação.
d) à força de reação proveniente da ação da força da Terra.
e) às forças de ação e reação, que, agindo sobre o corpo, se anulam.

84. (FEI-SP) Um aluno que tinha tido sua primeira aula sobre o Princípio da Ação e Reação ficou sem gasolina no carro. Raciocinou: "Se eu descer do carro e tentar empurrá-lo com uma força $\vec{F}$, ele vai reagir com uma força $-\vec{F}$; ambas vão se anular e eu não conseguirei mover o carro". Mas seu colega desceu do carro e o empurrou, conseguindo movê-lo. Qual o erro cometido pelo aluno em seu raciocínio?

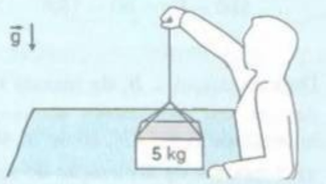
85. (UNICAMP-SP) Um pescador estaciona seu barco leve à margem de uma lagoa calma, em frente a uma árvore carregada de deliciosos frutos. Esse barco pode mover-se livremente sobre a água, uma vez que o atrito entre ambos pode ser considerado muito pequeno. Após algum tempo de inútil pescaria, o pescador sente vontade de comer alguns frutos. Coloca cuidadosamente sua vara de pescar no chão do barco e dirige-se, andando sobre ele, em direção à árvore. Conseguirá o pescador alcançar a árvore? Por quê?

86. (UC-MG) Um corpo de peso $P = 25\,N$ está apoiado sobre uma superfície horizontal, conforme a figura. Lembrando a Terceira Lei de Newton, podemos afirmar que:



a) a força de ação do corpo é anulada pela reação da superfície.
b) a força de reação da superfície é maior que 25 N.
c) a força de reação da superfície é menor que 25 N.
d) a força de reação da superfície depende da resistência da mesa.
e) a reação da superfície sobre o corpo é igual a 25 N.

87. (FUVEST-SP) Um homem tenta levantar uma caixa de 5 kg, que está sobre uma mesa, aplicando uma força vertical de 10 N. Nesta situação, o valor da força que a mesa aplica na caixa é: (adote $g = 10\,m/s^2$)

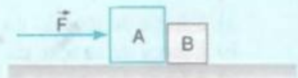


a) 0 N
b) 5 N
c) 10 N
d) 40 N
e) 50 N

88. (ITA-SP) Em seu livro *Viagem ao céu*, Monteiro Lobato, pela boca de um personagem, faz a seguinte afirmação: "Quando jogamos uma laranja para cima, ela sobe enquanto a força que produziu o movimento é maior do que a força da gravidade. Quando esta se torna maior, a laranja cai".
(Despreza-se a resistência do ar.)

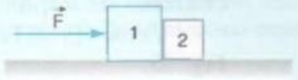
a) A afirmação é correta pois, de $F = m \cdot a$, temos que $a = 0$ quando $F = 0$, indicando que as duas forças se equilibraram no ponto mais alto da trajetória.
b) A afirmação está errada porque a força exercida para elevar a laranja, sendo constante, nunca será menor que a da gravidade.
c) A afirmação está errada porque, após ser abandonada no espaço, a única força que age sobre a laranja é a da gravidade.
d) A afirmação está correta porque está de acordo com o Princípio da Ação e Reação.

89. (UEL-PR) Na figura ao lado, os blocos *A* e *B* estão sobre um plano horizontal sem atrito. Sendo *F* igual a 45 N, M_A igual a 8 kg e M_B igual a 7 kg, a força que *A* exerce sobre *B*, em newtons, vale:



a) 15
b) 21
c) 24
d) 45
e) zero

90. (UF-ES) Dois corpos de massas m_1 e m_2 estão sobre um plano horizontal sem atrito, e a força $\vec{F}$ atua diretamente sobre m_1, conforme a figura. A intensidade da força que o corpo 1 exerce sobre o corpo 2 vale:



a) F

b) $\frac{m_2}{m_1} \cdot F$

c) $\frac{m_1}{m_2} \cdot F$

d) $\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot F$

e) $\frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot F$

91. (UF-RN) Quatro blocos idênticos, de massa m cada um, são empurrados sobre uma mesa sem atrito por uma força F, conforme mostra a figura ao lado. A aceleração do bloco 4 tem módulo igual a:

a) $0{,}25 \frac{F}{m}$
b) $0{,}75 \frac{F}{m}$
c) $\frac{F}{m}$
d) $3 \frac{F}{m}$
e) $4 \frac{F}{m}$

92. (UF-RN) Para a situação do teste anterior, a força que o bloco 1 exerce no bloco 2 tem módulo:

a) 4 F
b) 3 F
c) F
d) 0,75 F
e) 0,25 F

7. FORÇAS EXERCIDAS POR FIOS

Há muitas situações em que as forças são exercidas nos corpos através de fios (ou cordas). Para analisar a ação dos fios, vamos considerar um caso concreto para facilitar o entendimento. Na Fig. 33 temos dois blocos A e B, de massas conhecidas m_A e m_B, ligados por uma corda C de massa conhecida m_C. O conjunto todo está apoiado em um plano horizontal sem atrito e está sendo puxado por uma força horizontal $\vec{F}$ de intensidade conhecida. Considerando o conjunto todo como um único objeto e aplicando a Segunda Lei de Newton, temos:

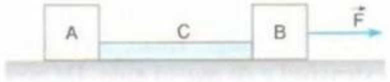


Fig. 33

$$F = (m_A + m_B + m_C) \cdot a \qquad (I)$$

Como os valores de F, m_A, m_B e m_C são conhecidos, da equação I tiramos o valor da aceleração a.

Consideremos agora separadamente as forças que agem sobre cada bloco e sobre a corda (sem considerar os pesos e as normais, que se anulam), como ilustra a Fig. 34.

Fig. 34

O bloco B, ao ser "puxado" por $\vec{F}$, aplica à corda a força $\vec{T}_1$; mas, pelo princípio da Ação e Reação, a corda exerce em B uma força $\vec{T}_2$ tal que $\vec{T}_2 = -\vec{T}_1$. A corda exerce no bloco A uma força $\vec{T}_3$ e A exerce na corda a força $\vec{T}_4$ tal que $\vec{T}_4 = -\vec{T}_3$. As forças que atuam nos extremos da corda ($\vec{T}_1$ e $\vec{T}_4$) são chamadas de *trações*.

Como $T_3 = T_4$ e $T_1 = T_2$, podemos adotar o esquema simplificado da Fig. 35.

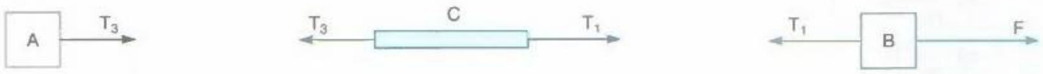


Fig. 35

Para obtermos o valor de T_3 podemos aplicar a Segunda Lei de Newton ao bloco A:

$$T_3 = m_A \cdot a \qquad \text{(II)}$$

Como os valores de m_A e a são conhecidos, essa equação nos dá o valor de T_3. Para obtermos o valor de T_1 podemos aplicar a Segunda Lei de Newton ao bloco B ou à corda:

$$\begin{cases} \text{Bloco B:} & F - T_1 = m_B \cdot a \quad \text{(III)} \\ \text{Corda:} & T_1 - T_3 = m_C \cdot a \quad \text{(IV)} \end{cases}$$

Suponhamos agora que a massa da corda seja desprezível, isto é, $m_C \cong 0$. Da equação IV, temos:

$$T_1 - T_3 = m_C \cdot a \cong 0 \cdot a \cong 0$$

ou

$$T_1 \cong T_3$$

isto é, as trações nos dois extremos da corda têm praticamente a *mesma intensidade*.

A análise do caso apresentado neste item foi relativamente simples. No entanto, como veremos nos exercícios, na maioria dos casos os cálculos ficam bem complicados quando a massa da corda não é desprezível. Para evitar tais complicações, usamos em geral cordas (ou fios) cujas massas possam ser desprezadas. Surge, então, a noção de *fio ideal*: é um fio perfeitamente flexível, inextensível e de *massa nula*. De acordo com o que comentamos acima, nas duas extremidades de um fio ideal a tração tem a *mesma intensidade*.

No exemplo analisado neste item, se a corda fosse ideal, o esquema simplificado das forças ficaria como na Fig. 36.

Fig. 36

Observação

Alguns autores usam a palavra *tensão* como sinônimo de *tração*. Preferimos não fazê-lo, pois a palavra "tensão" tem outro significado no estudo das deformações.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

93 Dois blocos, *A* e *B*, de massas $m_A = 5{,}0\,kg$ e $m_B = 7{,}0\,kg$, estão inicialmente em repouso sobre uma superfície plana e horizontal sem atrito, ligados por um fio ideal, como mostra a figura. A partir de determinado instante, aplica-se ao bloco *B* a força horizontal $\vec{F}$ de intensidade $F = 36\,N$. Calcule:

a) o módulo da aceleração do sistema;
b) o módulo da tração no fio.

Resolução:

a) O fio, sendo ideal, tem massa nula. Considerando o conjunto todo como um único corpo e aplicando a Segunda Lei de Newton, temos:

$F = (m_A + m_B) \cdot a$

$36 = (5{,}0 + 7{,}0) \cdot a$

$a = 3{,}0\,m/s^2$

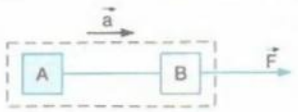


Fig. a

b) Vamos agora considerar, separadamente, as forças que atuam em cada bloco e no fio (sem considerar os pesos e as normais, pois elas se anulam). Como o fio é ideal, a tração tem a mesma intensidade *T* nas duas extremidades (Fig. b). Por isso, em geral, usaremos um esquema simplificado, onde aparecem apenas as forças que atuam nos blocos (Fig. c).

Fig. b

Fig. c

Aplicando a Segunda Lei de Newton para o bloco *A*, temos:

$T = m_A \cdot a$

$T = (5{,}0) \cdot (3{,}0)$ $\quad T = 15\,N$

Poderíamos também ter aplicado a Segunda Lei de Newton para o bloco *B*:

$F - T = m_B \cdot a$

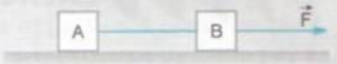
$36 - T = (7{,}0) \cdot (3{,}0)$

$T = 15\,N$

Observação: Se a massa do fio não fosse desprezível, o seu peso também não seria. Nesse caso, o fio não poderia manter-se esticado horizontalmente; ele apresentaria uma curvatura, como na Fig. d, o que complicaria bastante a resolução do exercício.

Fig. d

94. A figura representa dois blocos, *A* e *B*, de massas respectivamente iguais a 6,0 kg e 10 kg, apoiados num plano horizontal sem atrito e ligados por um fio ideal. No bloco *B* foi aplicada uma força horizontal $\vec{F}$ de intensidade F = 32 N. Calcule:



a) o módulo da aceleração do sistema;
b) o módulo da tração no fio.

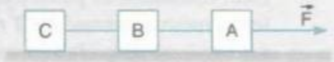
95. Os blocos *A* e *B*, representados na figura, têm massas de 8,0 kg e 5,0 kg, respectivamente. O fio é ideal e não há atritos. Sabendo que a tração no fio tem intensidade T = 32 N, calcule:

a) o módulo da aceleração do sistema;
b) o módulo da força horizontal $\vec{F}$.

96. Dois blocos, *A* e *B*, de massas respectivamente iguais a 4,0 kg e 6,0 kg, estão inicialmente em repouso sobre um plano horizontal sem atrito, ligados por um fio ideal. A partir de determinado instante, aplicam-se aos blocos as forças horizontais $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, de intensidades $F_1 = 75$ N e $F_2 = 50$ N, como mostra a figura. Calcule:

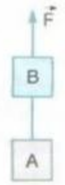
a) o módulo da aceleração do conjunto;
b) o módulo da tração no fio.

97. Consideremos três blocos, *A*, *B* e *C*, de massas respectivamente iguais a 4,0 kg, 5,0 kg e 6,0 kg, inicialmente em repouso sobre um plano horizontal sem atrito e ligados por fios ideais, como mostra a figura. Aplica-se ao bloco *A* a força horizontal $\vec{F}$ de intensidade F = 120 N. Calcule:



a) o módulo da aceleração do sistema;
b) o módulo da tração no fio que liga os blocos *C* e *B*;
c) o módulo da tração no fio que liga os blocos *B* e *A*.

98. Dois blocos, *A* e *B*, de massas $m_A = 5{,}0$ kg e $m_B = 3{,}0$ kg, estão ligados por um fio ideal. Aplica-se ao bloco *B* uma força vertical $\vec{F}$, como mostra a figura, de modo que o conjunto sobe verticalmente, em movimento acelerado. A intensidade de $\vec{F}$ é 112 N e a aceleração da gravidade tem módulo g = 10 m/s². Calcule:



a) o módulo da aceleração do sistema;
b) o módulo da tração no fio.

Resolução:

a) Podemos considerar todo o conjunto formando um único corpo de massa $m = m_A + m_B$, isto é m = 8,0 kg (Fig. a). Esse corpo tem peso $\vec{P}$:

$P = m \cdot g = (8{,}0) \cdot (10) \qquad P = 80\,N$

Aplicando a Segunda Lei de Newton, temos:

$F - P = m \cdot a$

$112 - 80 = 8{,}0 \cdot a$

$\boxed{a = 4{,}0\,m/s^2}$

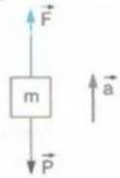


Fig. a

b) Consideremos agora as forças que atuam em cada bloco (Fig. b). Sejam $\vec{P_A}$ e $\vec{P_B}$ os pesos de *A* e *B*; a tração no fio tem intensidade *T*.

$$\begin{cases} P_A = m_A \cdot g = 5{,}0 \cdot 10 & P_A = 50\,N \\ P_B = m_B \cdot g = 3{,}0 \cdot 10 & P_B = 30\,N \end{cases}$$

Aplicando a Segunda Lei de Newton ao bloco *A* (e observando que o movimento é acelerado para cima), temos:

$T - P_A = m_A \cdot a$

$T - 50 = (5{,}0) \cdot (4{,}0)$

$T = 70\,N$

Poderíamos, também, ter aplicado a Segunda Lei de Newton ao bloco *B*:

$F - T - P_B = m_B \cdot a$

$112 - T - 30 = (3{,}0) \cdot (4{,}0)$

$T = 70\,N$

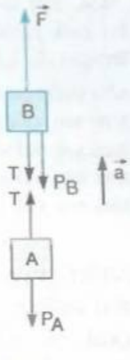
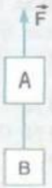


Fig. b

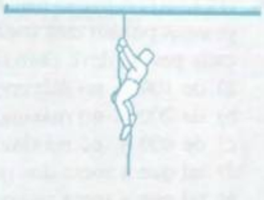
99. O sistema representado na figura sobe em movimento acelerado, sob a ação da força $\vec{F}$ de intensidade 168 N. As massas de *A* e *B* são respectivamente iguais a 6,0 kg e 8,0 kg. Supondo $g = 10\,m/s^2$ e que o fio de ligação é ideal, calcule:

a) o módulo da aceleração do conjunto;
b) o módulo da tração no fio.



100. Um homem de massa m = 80 kg está em repouso, segurando-se em um fio ideal, preso ao teto de um aposento, como mostra a figura. Adote $g = 10\,m/s^2$.

a) Calcule a intensidade da tração no fio.
b) Suponha agora que o homem esteja subindo pelo fio em movimento acelerado, cuja aceleração tem módulo $a = 0{,}50\,m/s^2$. Qual a intensidade da tração no fio?
c) Suponha agora que o homem esteja escorregando pelo fio em movimento acelerado, cuja aceleração tem módulo $a = 3{,}0\,m/s^2$. Qual a intensidade da tração no fio?



EXERCÍCIOS DE REFORÇO

101. (FATEC-SP) No sistema figurado, desprezar dissipação, inércia das rodas e efeitos do ar ambiente. Os carros são interligados por um fio leve, flexível e inextensível.

a) A aceleração do carro maior é $2{,}0\,m/s^2$.
b) O sistema move-se necessariamente para a direita.
c) A força de tração no fio de ligação é 24 N.
d) A força de tração da composição, 60 N, transmite-se inalterada para o carro menor.

102. (FCMSC-SP) Uma corda vertical pode suportar uma força máxima de tração de 800 N. Para que um indivíduo de peso igual a 1 000 N e massa igual a 100 kg possa descer escorregando por essa corda, sem rompê-la, deverá ter aceleração, no mínimo, de:

a) $1{,}0\,m/s^2$ b) $2{,}0\,m/s^2$ c) $8{,}0\,m/s^2$ d) $9{,}8\,m/s^2$ e) $10\,m/s^2$

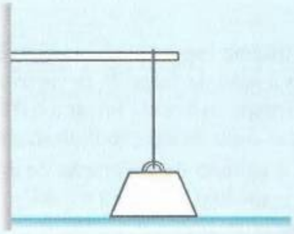
103. (FCMSC-SP) Um fio de comprimento constante sustenta um corpo X de massa $M = 10{,}00\,kg$. O fio está preso ao teto de um elevador parado. Quando o elevador começa a subir com aceleração de $1{,}8\,m \cdot s^{-2}$, a força de tração aplicada ao fio:

a) não varia porque a massa é constante.
b) tem seu valor diminuído em 1,8 N.
c) tem seu valor diminuído em 18 N.
d) tem seu valor aumentado em 1,8 N.
e) tem seu valor aumentado em 18 N.

104. (FUVEST-SP) Uma aranha de 3 g, fabricando um fio, desce 2 m em 4 horas, em movimento vertical uniforme. Adote $g = 10\,m/s^2$.

a) Qual o módulo da velocidade da aranha?
b) Qual o módulo da tração no fio?

105. (FATEC-SP) A figura ilustra um corpo de massa de 6 kg preso por uma corda ideal e apoiado numa superfície horizontal. A tração na corda vale 20 N. Sabendo que $g = 10\,m/s^2$, pode-se afirmar que a superfície exerce sobre o bloco uma força de:

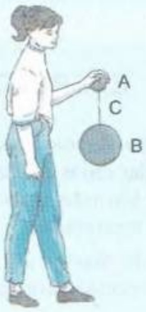


a) 60 N
b) 20 N
c) 40 N
d) 10 N
e) 26 N

106. (PUC-RJ) A tração máxima que uma certa corda pode suportar é 200 N. Isto significa que, se duas pessoas puxam esta corda em sentidos opostos, a corda permanecendo em repouso, a força que cada pessoa deve exercer para que a corda não se rompa é:

a) de 100 N, no máximo.
b) de 200 N, no máximo.
c) de 400 N, no máximo.
d) tal que a soma dos módulos das duas forças seja igual a 200 N, no máximo.
e) tal que a soma vetorial das duas forças tenha módulo igual a 200 N, no máximo.

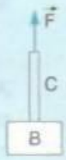
107. (FUVEST-SP) Uma pessoa segura uma esfera A de 1,0 kg que está presa numa corda inextensível C de 200 g, a qual, por sua vez, tem presa na outra extremidade uma esfera B de 3,0 kg, como se vê na figura. A pessoa solta a esfera A. Enquanto o sistema estiver caindo e desprezando-se a resistência do ar, podemos afirmar que a tensão na corda vale:



a) zero
b) 2 N
c) 10 N
d) 20 N
e) 30 N

108. (FEI-SP) Dois blocos de massas $m_1 = 2\,kg$ e $m_2 = 4\,kg$ são ligados por um fio inextensível de massa desprezível, conforme mostra a figura. Um segundo fio é ligado ao bloco superior. Aplica-se ao segundo fio uma força $\vec{F}$. Pede-se a intensidade da força $\vec{F}$ para que a aceleração dos blocos seja dirigida para cima e igual a $2\,m/s^2$. Nesse caso, qual a força tensora no fio entre os blocos? (Dado $g = 10\,m/s^2$)

109. (VUNESP-SP) Uma força $\vec{F}$ de intensidade 231 N atua verticalmente para cima na extremidade de um pedaço de corda (*C*), cuja massa é 1,00 kg, que está amarrado a um bloco (*B*) de massa 20,0 kg, como mostra a figura. Adotando $g = 10,0\ m/s^2$, calcule:



a) a aceleração do conjunto;
b) a força de tração na extremidade inferior da corda.

8. EQUILÍBRIO

Dizemos que um ponto material está em *equilíbrio* quando sua velocidade vetorial se mantém constante. Isso significa que o ponto material permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Quando o ponto material tem velocidade constante e igual a zero, dizemos que está em *equilíbrio estático*. Quando o ponto material está em movimento retilíneo uniforme, dizemos que está em *equilíbrio dinâmico*. Para que um ponto material esteja em equilíbrio, é necessário, então, que a resultante das forças que atuam sobre ele seja constante e nula.

Consideremos um ponto material em equilíbrio estático. Se deslocarmos ligeiramente o ponto material de sua posição de equilíbrio, podem ocorrer três situações:

1ª) A tendência do ponto material é voltar para a posição inicial; nesse caso o equilíbrio é dito *estável*.
2ª) A tendência do ponto material é afastar-se mais ainda da posição inicial; nesse caso o equilíbrio é dito *instável*.
3ª) O ponto material fica em equilíbrio também na nova posição; nesse caso o equilíbrio é dito *indiferente*.

Exemplo 16:

a) Consideremos uma partícula em repouso no fundo de uma calha, como na Fig. 37. Se deslocarmos ligeiramente a partícula de sua posição, sua tendência é voltar para o fundo da calha. Portanto, é uma situação de equilíbrio *estável*.

Fig. 37

b) Consideremos uma partícula em repouso no alto de um pico, como na Fig. 38. Se deslocarmos ligeiramente a partícula de sua posição, sua tendência é afastar-se mais ainda da posição inicial. A situação é, portanto, de equilíbrio *instável*.

Fig. 38

c) Consideremos uma partícula em repouso sobre uma superfície plana horizontal, como mostra a Fig. 39. Se fizermos com que a partícula sofra um pequeno deslocamento horizontal, ela ainda ficará em equilíbrio na nova posição. A situação é, portanto, de equilíbrio *indiferente*, para deslocamentos horizontais.

Fig. 39

Em resumo, temos:

equilíbrio
- estático
  - estável
  - instável
  - indiferente
- dinâmico

9. DINAMÔMETRO

Consideremos uma mola que tem uma de suas extremidades fixa (Fig. 40a). Aplicando-se à outra extremidade uma força $\vec{F}$, a mola deforma-se até que seja estabelecido o equilíbrio (Fig. 40b). Se adaptarmos a essa mola um ponteiro e uma escala graduada (Fig. 40c), teremos um instrumento para medir intensidades de força. Esse instrumento chama-se *dinamômetro*.

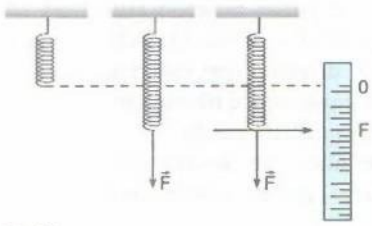


Fig. 40

Fig. 41

Na Fig. 41 vemos um dinamômetro sendo usado para medir o peso de um corpo.

Já que o dinamômetro mede intensidades de força, ele pode ser usado, por exemplo, para medir o peso de um corpo.

Em geral, a escala do dinamômetro vem graduada em unidades de força. No entanto, se quisermos, podemos transformar o dinamômetro em um instrumento para medir *massas*, fazendo uma alteração na escala. Isso pode ser feito, lembrando que o peso de um corpo de massa *m* tem intensidade $P = m \cdot g$ e, portanto, $m = \frac{P}{g}$. Assim, partindo de um dinamômetro graduado em unidades de força, dividimos todos os valores da escala pelo valor de *g* no local e teremos uma escala graduada em unidades de massa. Convém, no entanto, observar que essa graduação em unidades de massa depende do valor de *g*. Portanto, se formos para outro local em que o valor de *g* seja diferente, a escala de massas deverá ser alterada. Já o dinamômetro graduado em unidades de força não precisa ser alterado. Ele fornece o valor correto da força em qualquer local.

No dinamômetro acima descrito, consideramos que as forças aplicadas *esticam* a mola. Mas podemos também construir um medidor de intensidades de força, baseado na *compressão* da mola (Fig. 42) Nesse caso, temos a chamada *balança de mola*. Esse é o tipo de balança que algumas pessoas têm em suas casas para se "pesarem" (Fig. 43). Em geral, essas balanças caseiras já vêm com a escala graduada em unidades de massa. Porém, nos exercícios que faremos, consideraremos sempre que o mostrador está graduado em unidades de força.

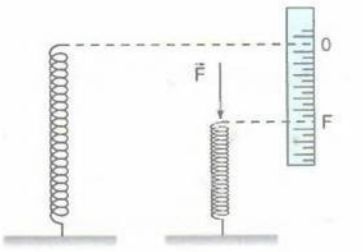


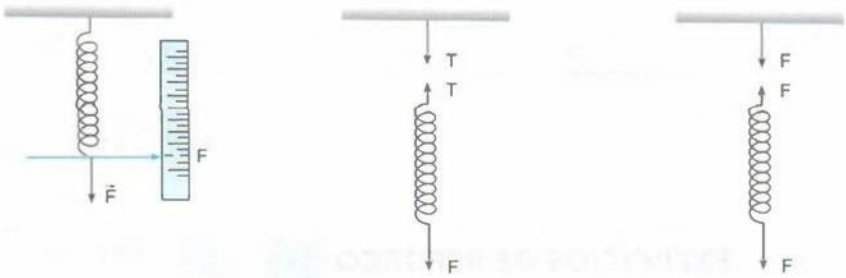
Fig. 42

Fig. 43

Nos problemas que virão a seguir, suporemos sempre que a massa do dinamômetro é desprezível. Chamaremos tal dinamômetro de dinamômetro ideal.

Consideremos um dinamômetro preso no teto de um aposento e apliquemos nele uma força vertical $\vec{F}$, como mostra a Fig. 44a. A marcação do ponteiro será, obviamente, F. No entanto, observemos as forças trocadas entre o dinamômetro e o teto (Fig. 44b). O dinamômetro exerce uma força no teto, e o teto exerce uma força sobre o dinamômetro; essas forças, pelo Princípio da Ação e Reação, devem ter o mesmo módulo T.

Supondo que o dinamômetro seja ideal, do mesmo modo que ocorreu no caso do fio ideal, deveremos ter T = F. Portanto, quando o mostrador do dinamômetro está marcando F, é porque *em cada extremidade* ele está recebendo uma força de intensidade F (Fig. 44c).

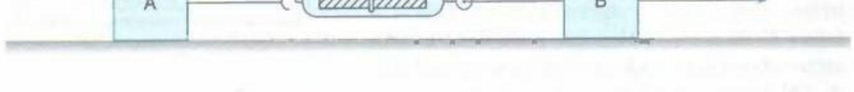


a) b) c)

Fig. 44

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

110 No sistema representado na figura, f_1 e f_2 são fios ideais. D é um dinamômetro ideal (massa nula), as massas de A e B são $m_A = 20\,kg$ e $m_B = 30\,kg$, a força $\vec{F}$ tem intensidade F = 200 N. Desprezando o atrito, determine a marcação do dinamômetro.



Resolução:

Como os fios e o dinamômetro são ideais, poderemos substituí-los por um único fio ideal *f* (Fig. a). A marcação do dinamômetro é a tração nesse fio *f*.

Fig. a *Fig. b*

Considerando todo o conjunto formando um único corpo e aplicando a Segunda Lei de Newton a esse corpo, temos:

$F = (m_A + m_B) \cdot a$

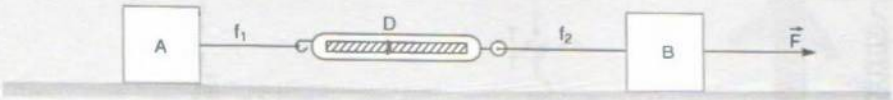
$200 = (20 + 30) \cdot a$ $\boxed{a = 4{,}0\,m/s^2}$

Aplicando a Segunda Lei de Newton para o bloco *A*, temos:

$T = m_A \cdot a = 20 \cdot 4{,}0$ $T = 80\,N$

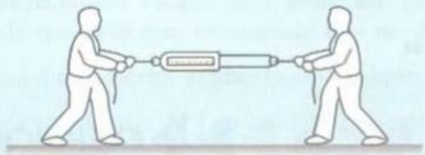
Portanto, a marcação do dinamômetro é 80 N.

111. Dois blocos, *A* e *B*, de massas $m_A = 8{,}0\,kg$ e $m_B = 4{,}0\,kg$, são ligados a fios ideais e a um dinamômetro *D* ideal, como mostra a figura. Desprezando o atrito e sabendo que $F = 36\,N$, determine a marcação do dinamômetro.



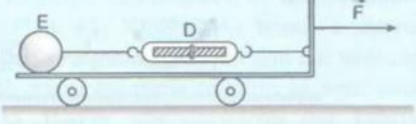
EXERCÍCIOS DE REFORÇO

112. (FEI-SP) Um dinamômetro possui suas duas extremidades presas a duas cordas. Duas pessoas puxam as cordas na mesma direção e em sentidos opostos, com força de mesma intensidade $F = 100\,N$. Quanto marcará o dinamômetro?



a) 200 N
b) 0
c) 100 N
d) 50 N
e) 400 N

113. (PUC-SP) O sistema representado no desenho, de massa total 100 kg, é puxado para a direita por uma força $\vec{F}$ que o acelera uniformemente sobre trilhos sem atrito. O dinamômetro *D* ligado à esfera *E*, de massa 10 kg, que pode deslizar sem atrito sobre a prancha horizontal, acusa uma força de 5 N durante a aceleração. A aceleração que $\vec{F}$ comunica ao sistema:

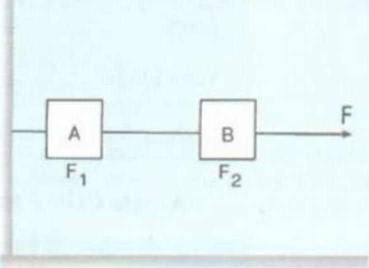


a) não pode ser determinada.
b) vale $0{,}05\ m/s^2$.
c) vale $0{,}5\ m/s^2$.
d) vale $\frac{5}{110}\ m/s^2$.
e) vale $\frac{5}{90}\ m/s^2$.

114. (FUVEST-SP) Um dinamômetro acusa 12 N ao sustentar uma corrente formada por 60 elos idênticos e independentes. Apoiando-se completamente 15 elos sobre uma mesa horizontal:

a) qual será o valor da massa da parte suspensa da corrente?
b) qual será o valor da força exercida pela superfície sobre os 15 elos?
(Adote $g = 10\ m/s^2$.)

115. (ITA-SP) Dois dinamômetros ideais, A e B, estão ligados como mostra a figura ao lado. Sejam F_1 e F_2 as leituras nos dinamômetros A e B, respectivamente, quando se aplica uma força F na extremidade livre do dinamômetro B. Valem as seguintes relações:



a) $F = F_1 + F_2 = 2F_1$
b) $F = F_1 + F_2 = 3F_2$
c) $F = F_2 = 2F_1$
d) $F = F_1 = F_2$
e) $F = F_1 = 2F_2$

10. SISTEMAS DE UNIDADES

O sistema de unidades adotado oficialmente no Brasil é o Sistema Internacional de Unidades (SI), o qual estamos usando neste livro.

O SI é conhecido também como Sistema MKS. A sigla MKS é formada pelas iniciais dos símbolos de *metro* (m), *quilograma* (kg) e *segundo* (s). O quadro a seguir mostra as unidades do SI que usamos até agora.

SISTEMA INTERNACIONAL (ou MKS)		
Grandeza	Nome da unidade	Símbolo da unidade
comprimento	metro	m
massa	quilograma	kg
tempo	segundo	s
força	newton	N
velocidade	metro por segundo	m/s
aceleração	metro por segundo ao quadrado	m/s^2

Há mais dois sistemas de unidades que às vezes são usados: o *CGS* e o *MKS técnico*. Os dois quadros a seguir trazem as unidades desses sistemas para as grandezas que estudamos até agora.

SISTEMA CGS		
Grandeza	Nome da unidade	Símbolo da unidade
comprimento	centímetro	cm
massa	grama	g
tempo	segundo	s
força	dina	dyn
velocidade	centímetro por segundo	cm/s
aceleração	centímetro por segundo ao quadrado	cm/s^2

A sigla CGS é formada pelas iniciais de *centímetro*, *grama* e *segundo*.

SISTEMA MKS TÉCNICO		
Grandeza	Nome da unidade	Símbolo da unidade
comprimento	metro	m
massa	unidade técnica de massa	utm
tempo	segundo	s
força	quilograma-força	kgf
velocidade	metro por segundo	m/s
aceleração	metro por segundo ao quadrado	m/s^2

Para representarem o quilograma-força, alguns autores usam o simbolo kg* no lugar de kgf. Esses autores representam o sistema MKS técnico por MK*S.

O quilograma-força é definido como a intensidade do peso de um corpo cuja massa é 1 kg, num local em que a aceleração da gravidade tem seu valor normal ($g_n = 9{,}80665\ m/s^2$). Portanto, a partir de

$$P = m \cdot g$$

temos: $1\ kgf = (1\ kg) \cdot (9{,}80665\ m/s^2)$

ou $\boxed{1\ kgf = 9{,}80665\ N}$

Em geral adotamos a aproximação:

$$\boxed{1\ kgf = 9{,}8\ N}$$

É fácil verificar que valem as seguintes relações:

$1\,N = 10^5\,dyn$ $\quad$ $1\,utm = 9{,}80665\,kg$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

116. (E. E. Mauá-SP) Um ponto material de massa $m = 1{,}0\,kg$ pode se deslocar num plano horizontal sem atrito. Ele, inicialmente em repouso, passa a ser submetido à ação de uma força horizontal $F = 0{,}10\,kgf$, constante, durante 10 segundos. Calcule a velocidade do ponto material após 5 segundos.

117. (FATEC-SP) Em um local em que a aceleração da gravidade é normal ($g = 9{,}80665\,m/s^2$), um bloco tem peso $P = 10{,}0000\,kgf$. Esse bloco é submetido a uma força resultante de intensidade $F = 10{,}0000\,N$. A aceleração do bloco tem intensidade:

a) $1{,}00000\,m/s^2$
b) $1{,}02175\,m/s^2$
c) $9{,}80665\,m/s^2$
d) $98{,}0665\,m/s^2$

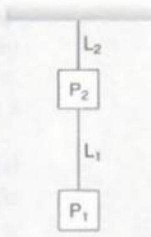
118. (FGV-SP) O peso de um corpo é 30 kgf aqui na Terra, num local em que a aceleração da gravidade tem módulo $g = 960\,cm/s^2$. Qual o peso desse mesmo objeto na Lua, onde $g = 160\,cm/s^2$?

a) 180 kgf
b) 30 kgf
c) 5,0 kgf
d) 10 kgf
e) 15 kgf

119. (FAAP-SP) Um homem está sobre a plataforma de uma balança e exerce força para baixo sobre um dinamômetro preso ao teto. Sabendo-se que, quando a leitura no dinamômetro é nula, a balança indica 80 kgf, pergunta-se:

a) Qual o peso do homem?
b) Qual será a indicação da balança se o homem tracionar o dinamômetro de modo que ele indique 10 kgf?

120. (PUC-SP) O esquema representa dois corpos, P_1 e P_2, suspensos por cordas L_1 e L_2, de pesos respectivamente iguais a 5 kg* e 10 kg*. Supondo desprezíveis os pesos das cordas, as tensões em L_1 e L_2 valem, respectivamente:



a) 10 kg* e 5 kg*
b) 10 kg* e 15 kg*
c) 5 kg* e 10 kg*
d) 15 kg* e 15 kg*
e) 5 kg* e 15 kg*

121. (Fund. Carlos Chagas-SP) No sistema de unidades XYZ, a unidade de comprimento é *x*, a de massa é *y* e a de tempo é *z*. Como se deveria escrever nesse sistema de unidades a unidade de força?

a) $\frac{x}{z}$ $\quad$ b) $\frac{x}{z^2}$ $\quad$ c) $\frac{y}{z}$ $\quad$ d) $\frac{yx}{z^2}$ $\quad$ e) $\frac{yx^2}{z^2}$

122. (Mackenzie-SP) Se num determinado sistema de unidades forem multiplicadas por *k* as unidades de comprimento, massa e tempo, então a unidade de força desse sistema será multiplicada por:

a) k^{-2} $\quad$ b) k^{-1} $\quad$ c) k^0 $\quad$ d) k^1 $\quad$ e) k^2

123. (FATEC-SP) Seja g a aceleração da gravidade em um laboratório terrestre. Nesse laboratório suspende-se um bloco A a um dinamômetro e coloca-se um bloco B em um dos pratos de uma "balança de pratos". A leitura é 2,0 kgf no dinamômetro; o massor equilibrante da balança de pratos tem massa igual a 2,0 kg. O sistema é levado a um planeta no qual a aceleração da gravidade é $g' = \frac{g}{2}$. No dinamômetro e na balança medem-se respectivamente:

a) 1,0 kgf e 2,0 kg
b) 1,0 kgf e 1,0 kg
c) 2,0 kgf e 1,0 kg
d) 2,0 kgf e 2,0 kg

11. REFERENCIAIS INERCIAIS

Pela Lei da Inércia, quando não há forças atuando sobre uma partícula, esta deve estar em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, isto é, sua velocidade vetorial deve ser constante. No entanto, ao estudarmos a Cinemática (no volume 1 desta coleção), vimos que os conceitos de repouso e movimento dependem do referencial. Uma partícula pode estar em repouso em relação a um referencial, mas estar em movimento em relação a outro referencial; a partícula pode ter trajetória retilínea em relação a um referencial e ter trajetória curva em relação a outro referencial; a partícula poderá, também, ter velocidade constante em relação a um referencial e velocidade variável em relação a outro. Assim, qual o referencial a ser adotado quando aplicamos as leis de Newton? A resposta a essa pergunta é mais complexa do que pode parecer à primeira vista. Para atacar esse problema, vamos primeiramente considerar um exemplo.

Imaginemos uma partícula que se move em relação a um referencial R constituído por um sistema cartesiano ortogonal xOy (Fig. 45). Em relação a esse referencial, sejam $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ as velocidades das partículas nos instantes t_1 e t_2, respectivamente. Suponhamos que o referencial R, por sua vez, mova-se com velocidade constante $\vec{v_R}$ em relação a outro referencial R', constituído por um sistema cartesiano ortogonal x'O'y'.

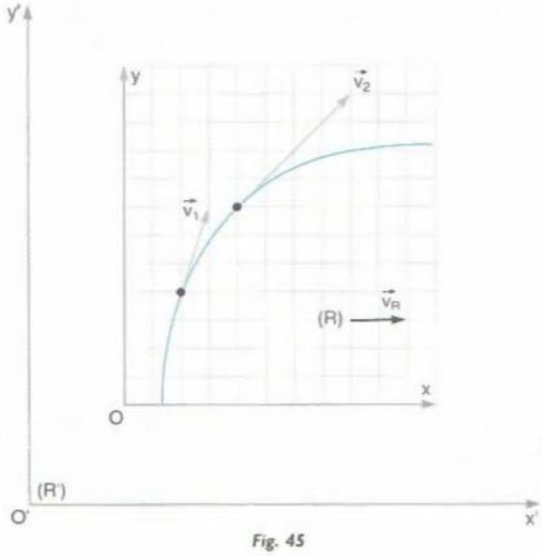


Fig. 45

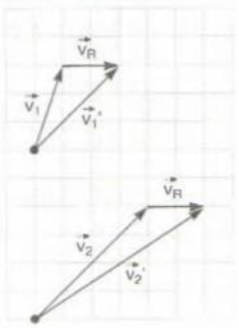


Fig. 46

Desse modo, nos instantes t_1 e t_2, as velocidades da partícula em relação a R' serão, respectivamente, $\vec{v}_1{}'$ e $\vec{v}_2{}'$, dadas por (Fig. 46):

$$\vec{v}_1{}' = \vec{v}_1 + \vec{v}_R \quad \text{e} \quad \vec{v}_2{}' = \vec{v}_2 + \vec{v}_R \qquad (\mathrm{I})$$

Vamos calcular as acelerações vetoriais médias da partícula, entre os instantes t_1 e t_2, em relação aos dois referenciais:

Em relação a R: $$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \qquad (\mathrm{II})$$

Em relação a R': $$\vec{a}_m{}' = \frac{\Delta \vec{v}\,'}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2{}' - \vec{v}_1{}'}{t_2 - t_1} \qquad (\mathrm{III})$$

Usando as igualdades (I), a igualdade (III) fica:

$$\vec{a}_m{}' = \frac{(\vec{v}_2 + \vec{v}_R) - (\vec{v}_1 + \vec{v}_R)}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{v}_2 + \vec{v}_R - \vec{v}_1 - \vec{v}_R}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \qquad (\mathrm{IV})$$

Comparando IV com II, vemos que:

$$\vec{a}_m{}' = \vec{a}_m \qquad (\mathrm{V})$$

Como a aceleração instantânea é o limite da aceleração média para Δt "tendendo a zero", a igualdade se aplica também às acelerações instantâneas:

$$\vec{a}\,' = \vec{a} \qquad (\mathrm{VI})$$

onde $\vec{a}\,'$ e $\vec{a}$ são as acelerações instantâneas da partícula, num determinado instante t, em relação a R' e R, respectivamente.

Percebemos então que as velocidades da partícula em relação aos dois referenciais são diferentes mas as acelerações são iguais e, desse modo, ao aplicarmos a Segunda Lei de Newton ($\vec{F} = m \cdot \vec{a}$) obteremos o mesmo valor para $\vec{F}$ nos dois referenciais. Assim, se as leis de Newton valem para um referencial R', deverão valer também para qualquer outro referencial R que se mova com velocidade vetorial constante em relação a R'. Os referenciais para os quais valem as leis de Newton, e em particular a Lei da *Inércia*, são chamados de *referenciais inerciais*. Mas como encontrar um desses referenciais? O que usualmente fazemos é considerar como inercial um referencial em repouso em relação às estrelas fixas (aquelas estrelas muito distantes que nos parecem em repouso) e, assim, será também inercial qualquer outro referencial que se mova em relação a ele, com movimento de translação retilíneo e uniforme.

Do que dissemos acima, concluímos que a Terra não é um referencial inercial, pois, além do seu movimento de rotação, ela tem movimento de translação circular em torno do Sol. No entanto, para a maioria das aplicações, podemos considerar a Terra como um referencial aproximadamente inercial.

Referenciais não inerciais

Vamos agora analisar um exemplo que ilustra o que ocorre quando um movimento é estudado em relação a um referencial *não inercial*, isto é, um referencial que tem uma *aceleração não nula* em relação a um referencial *inercial*.

Consideremos um indivíduo O fixo no solo (Fig. 47), que chamaremos de referencial R e suporemos inercial. O indivíduo observa o movimento de um vagão ferroviário R' que se move inicialmente com velocidade constante $\vec{v}_0$ (em relação a R), sobre trilhos retos e horizontais. Dentro do trem há um indivíduo O' (fixo em relação a R') e um bloco B apoiado no piso e em repouso em relação a R'. Vamos admitir que não haja atrito entre o bloco e o piso do vagão.

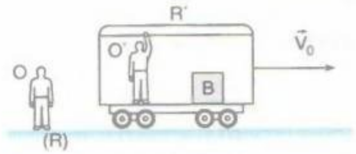


Fig. 47

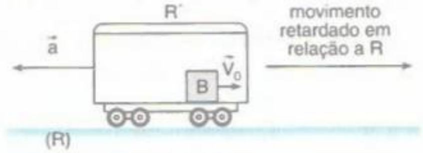


Fig. 48

Suponhamos que, a partir do instante t_0, o vagão breca, adquirindo movimento uniformemente retardado, de aceleração $\vec{a}$ em relação a R (Fig. 48). Como o movimento é retardado, o sentido de $\vec{a}$ é oposto ao da velocidade $\vec{v}_0$. Para o indivíduo O, o bloco B deverá, por inércia, continuar com velocidade $\vec{v}_0$. Para o indivíduo O', o bloco, que inicialmente estava em repouso, começa a deslizar sobre o piso do vagão (Fig. 49) com movimento acelerado de aceleração $\vec{a}'$, cujo sentido é *oposto* ao de $\vec{a}$, mas de mesmo módulo:

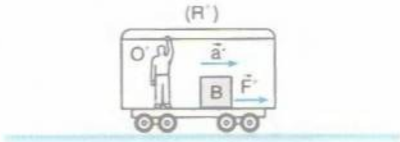


Fig. 49

$$\vec{a}' = -\vec{a} \quad \text{e} \quad |\vec{a}'| = |\vec{a}|$$

O indivíduo O' interpreta esse fato dizendo que sobre o bloco atua uma força $\vec{F}'$ dada por:

$$\vec{F}' = m \cdot \vec{a}'$$

enquanto para o indivíduo O não há essa força; para ele o bloco move-se por inércia.

O referencial R' tem aceleração em relação ao referencial inercial R; assim, R' é não inercial e a força $\vec{F}'$ é chamada de *força fictícia* ou *força inercial*.

O caso que acabamos de analisar é o de um referencial não inercial que se move em movimento *retilíneo* em relação a um referencial inercial. No capítulo 5 veremos um exemplo de referencial não inercial em movimento de rotação.

Utilidade de um referencial não inercial

Em certos casos, a resolução de um problema fica mais rápida se escolhermos um referencial não inercial para trabalhar. Vejamos isso através de um exemplo.

Consideremos um elevador subindo verticalmente com movimento acelerado cuja aceleração tem módulo $a = 2{,}0\,m/s^2$ (Fig. 50), num local em que $g = 10\,m/s^2$.

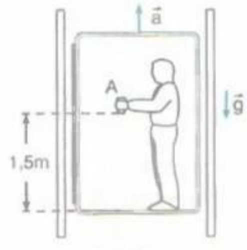


Fig. 50

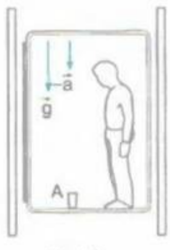


Fig. 51

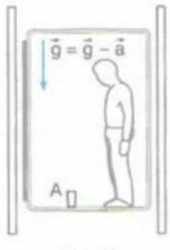


Fig. 52

Um indivíduo está dentro do elevador segurando um corpo *A* a 1,5 metro do piso do elevador. Supondo que no instante $t = 0$ o indivíduo solte o corpo, depois de quanto tempo ele atingirá o piso?

Usemos o elevador como referencial. Como ele possui aceleração $\vec{a}$ (em relação ao solo), para o indivíduo tudo se passa como se, dentro do elevador, além da aceleração da gravidade $\vec{g}$, houvesse uma aceleração adicional $-\vec{a}$ (Fig. 51) de *sentido oposto* ao de $\vec{a}$. Assim, para o indivíduo, o problema é o de um corpo abandonado ($v_0 = 0$) de uma altura de 1,5 metro, num local em que a aceleração da gravidade é $\vec{g}'$ (Fig. 52) tal que:

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}$$

$$|\vec{g}'| = |\vec{g}| + |\vec{a}| = 10\,m/s^2 + 2{,}0\,m/s^2 = 12\,m/s^2$$

Assim: $s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$

$$s = \frac{1}{2}g't^2$$

$$1{,}5 = \frac{1}{2}(12)t^2 \implies \boxed{t = 0{,}5\,s}$$

MASSA INERCIAL E MASSA GRAVITACIONAL

A massa definida no item 2 deste capítulo é chamada de *massa gravitacional*, pois é definida a partir dos efeitos da atração gravitacional que a Terra exerce sobre os corpos. Mas existe outra massa, chamada de *massa inercial*, que é a que aparece na Segunda Lei de Newton ($\vec{F} = m \cdot \vec{a}$). Supondo que tenhamos estabelecido um processo para medir forças (depois veremos como isso poderia ser feito), a experiência mostra que a *resultante das forças* ($\vec{F}$) aplicadas a um corpo é diretamente proporcional à aceleração do corpo ($\vec{a}$), isto é,

$$\frac{\vec{F}}{\vec{a}} = m$$

onde a constante de proporcionalidade *m* é a *massa inercial* do corpo.

A princípio, nada garante que a massa gravitacional de um corpo coincida com sua massa inercial, e esse foi um fato logo percebido tanto por Newton como pelos críticos de sua teoria. A partir de então foram feitas inúmeras experiências que, com grande precisão, mostraram que, dados vários corpos,

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ \ldots$$

de massas gravitacionais

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\ \ldots$$

e massas inerciais

$$m_1,\ m_2,\ m_3,\ \ldots$$

tem-se:

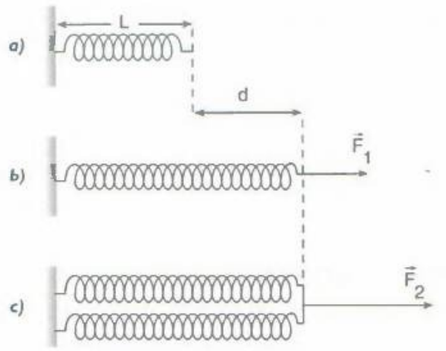
$$\frac{M_1}{m_1} = \frac{M_2}{m_2} = \frac{M_3}{m_3} = \ldots = k = \text{constante}$$

isto é, a massa gravitacional e a massa inercial são *proporcionais*. Assim, podemos escolher as unidades de modo que a constante *k* seja igual a 1 e, desse modo, considerar a massa inercial e a massa gravitacional como idênticas, que é o que se faz atualmente.

Um processo para medir forças

Um modo de medir intensidades de forças sem depender da massa é utilizar a deformação que uma força provoca em uma mola. Podemos escolher uma *mola padrão* e convencionar que a força que provoca determinada deformação d tem intensidade de 1 unidade. Se quisermos uma força de intensidade de 2 unidades, podemos usar duas molas idênticas sofrendo a mesma deformação d, como ilustra o exemplo a seguir.

Exemplo:



Na Fig. 53a temos a mola padrão não deformada, apresentando comprimento L. Na Fig. 53b aplicamos uma força $\vec{F_1}$, que provocou a deformação d; podemos convencionar que a intensidade de $\vec{F_1}$ é 1 unidade. Na Fig. 53c temos a força $\vec{F_2}$, que provocou a deformação d em duas molas idênticas à mola padrão; podemos convencionar que a intensidade de $\vec{F_2}$ é 2 unidades.

EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

124. (AEU-DF) As leis de Newton da Dinâmica são verificadas:

a) só para observadores em repouso.
b) para quaisquer observadores.
c) só para observadores em movimento acelerado.
d) para observadores parados ou com aceleração vetorial nula em relação a um sistema inercial.
e) só para observadores em movimento uniforme.

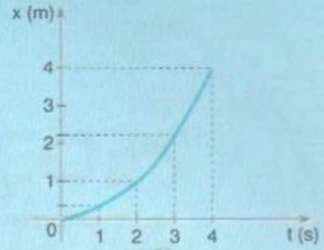
125. (ITA-SP) A velocidade de uma partícula, num determinado instante t, é nula em relação a um referencial inercial. Pode-se afirmar que no instante t:

a) a resultante das forças que agem sobre a partícula é necessariamente nula.
b) a partícula se encontra em repouso, em relação a qualquer referencial inercial.
c) a resultante das forças que agem sobre a partícula pode não ser nula.
d) a resultante das forças que agem sobre a partícula não pode ser nula.

126. (UNICAMP-SP) Em uma experiência de colisão frontal de um certo automóvel à velocidade de 36 km/h (10 m/s) contra uma parede de concreto, percebeu-se que o carro pára completamente após amassar 50 cm de sua parte frontal. No banco da frente havia um boneco de 50 kg, sem cinto de segurança. Supondo que a desaceleração do carro seja constante durante a colisão, responda:

a) Qual a desaceleração do automóvel?
b) Que força os braços do boneco devem suportar para que ele não saia do banco?

127. (CESESP-PE) O gráfico ao lado corresponde ao movimento de um pequeno disco de massa igual a 10 g sendo arrastado por uma força constante F sobre uma mesa horizontal sem atrito. Qual o valor da força em newtons?



a) $5 \cdot 10^{-4}$
b) $2 \cdot 10^{-3}$
c) $5 \cdot 10^{-3}$
d) $8 \cdot 10^{-3}$
e) $3 \cdot 10^{-2}$

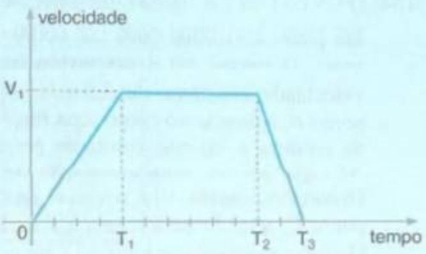
128. (F. M. ABC-SP) Um bloco de massa de 3,0 kg move-se sobre uma superfície horizontal lisa com velocidade v_0 no instante $t = 0$. Aplica-se ao corpo uma força de 18 N em sentido contrário ao do movimento. Esta força reduz v_0 à metade do seu valor enquanto o corpo percorre 9 m. A velocidade inicial v_0 vale:

a) 12 m/s
b) $\frac{3}{4}$ m/s
c) 1 m/s
d) 18 m/s

129. (F. M. ABC-SP) Para a situação da questão anterior, o tempo que o bloco gasta para percorrer os 9 m é:

a) 0,5 s
b) 6 s
c) 1 s
d) $\frac{3}{4}$ s

130. (FUVEST-SP) O gráfico ao lado representa a velocidade, em função do tempo, de um objeto deslocando-se ao longo de uma trajetória retilínea. Este gráfico poderia corresponder:



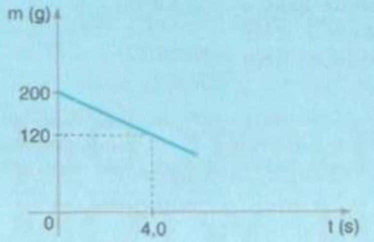
a) ao lançamento de uma esfera verticalmente para cima e seu retorno ao ponto de partida.
b) à subida, parada e descida de um elevador.
c) ao movimento de uma esfera que é solta de uma determinada altura, atinge o solo e retorna ao ponto de partida.
d) ao movimento de um objeto que, durante o seu deslocamento, fica sucessivamente sob a ação de três forças resultantes constantes, sendo uma delas nula.
e) ao movimento de um objeto que, a partir do repouso, desloca-se sob a ação de uma força resultante constante até o instante T_1, depois sob ação de uma força resultante nula entre T_1 e T_2 e finalmente sob a ação de uma força resultante que faz o objeto retornar ao ponto de partida.

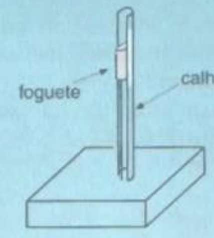
131. (UEL-PR) Um corpo se encontra submetido à ação de três forças de mesmo módulo, sendo duas horizontais que entre si formam um ângulo de 120° e a terceira vertical. A aceleração do corpo tem direção que, com a vertical, forma ângulo de

a) 60°
b) 45°
c) 30°
d) 15°
e) 0°

O enunciado a seguir refere-se às questões 132 e 133.

Durante as comemorações do "tetra", um torcedor montou um dispositivo para soltar um foguete, colocando o foguete em uma calha vertical que lhe serviu de guia durante os instantes iniciais da subida. Inicialmente, a massa de combustível correspondia a 60% da massa total do foguete. Porém, a queima do combustível, que não deixou resíduos e provocou uma força vertical constante de 1,8 N, fez com que a massa total decrescesse, uniformemente, de acordo com o gráfico a seguir.





Considere que, neste dispositivo, os atritos são desprezíveis e que a aceleração da gravidade vale $10\,m/s^2$.

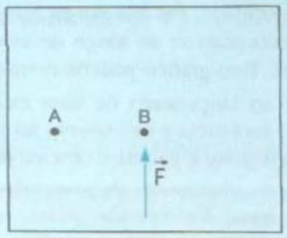
132. (CESGRANRIO-RJ) Considerando $t = 0,\ 0\,s$ o instante em que o combustível começou a queimar, então o foguete passou a se mover a partir do instante:

a) 0,0 s   b) 1,0 s   c) 2,0 s   d) 4,0 s   e) 6,0 s

133. (CESGRANRIO-RJ) O foguete deixará de ser impulsionado pela queima do combustível no instante:

a) 4,0 s   b) 5,0 s   c) 6,0 s   d) 8,0 s   e) 10 s

134. (FUVEST-SP) A figura representa, vista de cima, um plano horizontal onde um corpo desliza sem atrito. O trecho AB é percorrido em 10 s, com velocidade constante de $3,0\,m/s$. Ao atingir o ponto *B*, aplica-se ao corpo uma força horizontal, de módulo e direção constante perpendicular a AB, que produz uma aceleração de $0,40\,m/s^2$. Decorridos outros 10 s o corpo encontra-se no ponto *C*, quando então cessa a atuação da força. O corpo move-se por mais 10 s até o ponto *D*.



a) Faça um esboço da trajetória ABCD.

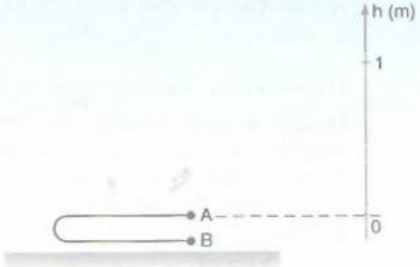
b) Com que velocidade o corpo atinge o ponto *D*?

135. (UF-RN) Uma corrente consistindo de sete anéis, cada um com massa de 200 gramas, está sendo puxada verticalmente, para cima, com aceleração constante de $2,0\,m/s^2$. A força para cima no anel do meio é: (adote $g = 10\,m/s^2$)

a) 16,8 N   c) 8,4 N   e) 1,6 N

b) 9,6 N   d) 2,4 N

136. (UNICAMP-SP) Em cada extremidade de um fio ideal e com 0,5 m de comprimento, está preso um chumbinho de massa 10 g e tamanho desprezível. Como se mostra na figura, o chumbinho *A* está sobre o outro *B* e o conjunto repousa no chão. Suponha que num dado instante você comece a erguer o chumbinho *A*, muito vagarosamente, na direção vertical, até atingir uma altura 1 m acima do solo. Construa um gráfico quantitativo da força que você aplica no chumbinho *A*, em função de sua posição vertical *h*. (Adote $g = 10\,m/s^2$.)



CAPÍTULO 2

ALGUMAS APLICAÇÕES DAS LEIS DE NEWTON

1. ELEVADORES EM MOVIMENTO VERTICAL

Consideremos um indivíduo de massa m apoiado no piso de um elevador (Fig. 1). Sendo $\vec{g}$ a aceleração da gravidade, o peso $\vec{P}$ do indivíduo é dado por $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$. O indivíduo comprime o piso do elevador, aplicando sobre ele a força normal $\vec{N}$ (Fig. 2). Pelo Princípio da Ação e Reação, o piso do elevador aplica no indivíduo a força $\vec{N}_1$ tal que $\vec{N}_1 = -\vec{N}$ e, portanto, $N_1 = N$. Assim, podemos adotar o esquema simplificado da Fig. 3.

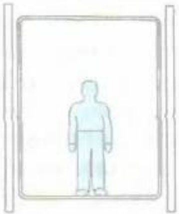


Fig. 1

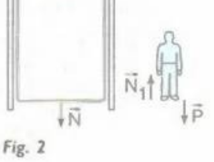


Fig. 2

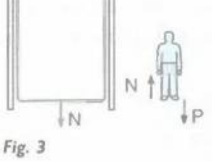


Fig. 3

Se o elevador estiver em repouso, teremos, obviamente, $N = P$. Vamos agora fazer uma análise do valor de N, quando o elevador está em movimento vertical. Para tanto consideremos alguns casos.

1º caso	*O elevador sobe ou desce em movimento uniforme.*

Nesse caso, a aceleração é nula e, portanto, a resultante das forças que atuam sobre o indivíduo é nula. Assim, teremos:

$$N = P \quad \text{(I)}$$

2º caso	*O elevador sobe em movimento acelerado de aceleração $\vec{a}$.*

Observando que a aceleração do indivíduo é a mesma do elevador, nesse caso devemos ter $N > P$. Aplicando a Segunda Lei de Newton ao indivíduo, temos:

$$N - P = m \cdot a$$

ou $N = P + m \cdot a = mg + ma$

ou, ainda, $\boxed{N = m(g + a)}$ (II)

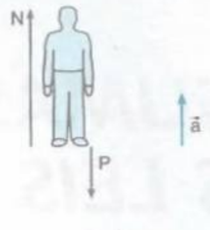


Fig. 4

3º caso	*O elevador desce em movimento acelerado de aceleração $\vec{a}$.*

Nesse caso devemos ter $P > N$ e, portanto, aplicando a Segunda Lei de Newton ao indivíduo, teremos:

$$P - N = m \cdot a$$

$$mg - N = ma$$

$$\boxed{N = m(g - a)} \quad \text{(III)}$$

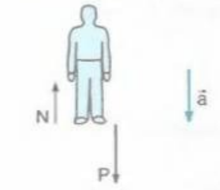


Fig. 5

Observando a igualdade (III), percebemos que se $a = g$ (isto é, o elevador cai em queda livre), teremos $N = 0$. Isso significa que o indivíduo não comprimirá o piso do elevador e terá a sensação de estar "flutuando", isto é, o indivíduo terá a impressão de ter "perdido o peso". Esse processo (elevador ou avião descendo em queda livre) pode ser usado para levar os astronautas a se acostumarem com a "ausência de gravidade".

Observemos novamente a igualdade (III) e vejamos o que acontece quando $a > g$. Substituindo em (III), obtemos $N < 0$. No entanto, como pode isso acontecer, se todas as grandezas da igualdade (III) estão em módulo? O que ocorre é que o elevador está descendo acelerado com aceleração *a* maior que a da gravidade e, assim, o indivíduo fica "para trás", isto é, a tendência é ele ficar com a cabeça em contato com o teto do elevador (Fig. 6); agora a força exercida pelo elevador sobre o indivíduo é *para baixo* (Fig. 7). Portanto, a Segunda Lei de Newton, aplicada ao indivíduo, fica:

$$N + P = m \cdot a$$

ou $N + mg = ma$

ou, ainda, $\boxed{N = m(a - g)}$

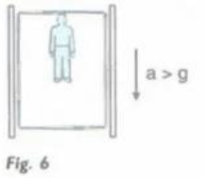


Fig. 6

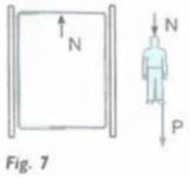


Fig. 7

4º caso	*O elevador desce em movimento retardado de aceleração $\vec{a}$.*

O elevador está descendo; mas, como o movimento é retardado, a força resultante (e a aceleração $\vec{a}$) deve ter sentido oposto ao do movimento e, para que isso aconteça, devemos ter $N > P$. Sendo *a* o módulo da aceleração, apliquemos a Segunda Lei de Newton ao indivíduo:

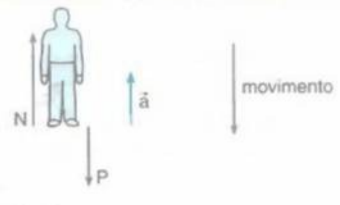


Fig. 8

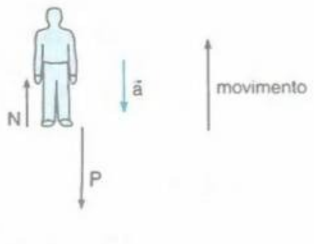
$$N - P = m \cdot a$$
$$N - mg = m \cdot a$$

ou $N = m(g + a)$ (IV)

É conveniente observar que a igualdade (IV) é idêntica à igualdade (II). Isso já era esperado, pois tanto no movimento acelerado para cima quanto no movimento retardado para baixo a força resultante é para cima.

5º caso	*O elevador sobe em movimento retardado de aceleração $\vec{a}$.*

Embora o elevador esteja subindo, pelo fato de o movimento ser retardado, a força resultante é para baixo, isto é, $P > N$. Aplicando a Segunda Lei de Newton ao indivíduo, temos:



$$P - N = m \cdot a$$

$mg - N = ma$ $N = m(g - a)$ (V)

onde a é o módulo da aceleração.

Fig. 9

Observemos que a igualdade (V) é idêntica à igualdade (III), o que já devíamos esperar, pois nos dois casos a força resultante é para baixo. Do mesmo modo que no 3º caso, para que os pés do indivíduo comprimam o piso do elevador devemos ter $a < g$.

Indivíduo sobre balança

Suponhamos agora que o indivíduo dentro do elevador esteja sobre uma balança de molas (Fig. 10). Nesse caso, ele exerce na balança uma força de intensidade N (Fig. 11) e é esse valor que a balança indicará. Assim, costuma-se dizer que N é a intensidade do *peso aparente*.

Fig. 10

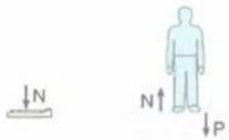


Fig. 11

Dinamômetro no teto do elevador

Consideremos um dinamômetro preso no teto do elevador e um corpo de massa m pendurado no dinamômetro (Fig. 12). O corpo exerce no dinamômetro uma força de intensidade F (Fig. 13) e, pelo Princípio da Ação e Reação, o dinamômetro exerce no corpo uma força de sentido oposto mas de mesma intensidade F.

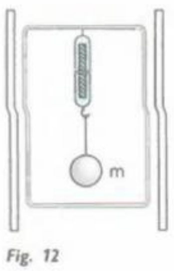


Fig. 12

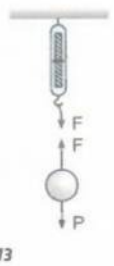


Fig. 13

O dinamômetro deve indicar o valor de F. Nesse caso, também podemos dizer que F é a intensidade do *peso aparente* do corpo. Se o elevador estiver em repouso ou em movimento uniforme, teremos $F = P$. Se o elevador estiver em movimento com aceleração não nula, teremos $F \neq P$ e, nesse caso, a análise é idêntica à que fizemos para o valor de N.

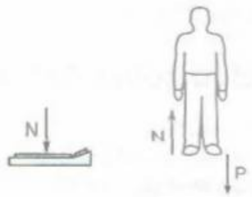
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1 Um indivíduo de massa $m = 80$ kg está de pé sobre uma balança de mola fixa no piso de um elevador, como mostra a figura. A aceleração da gravidade tem módulo $g = 10$ m/s^2. Determine a marcação da balança nos seguintes casos:

a) o elevador está em repouso;
b) o elevador sobe com movimento uniforme;
c) o elevador sobe com movimento acelerado cuja aceleração tem módulo $a = 3{,}0$ m/s^2;
d) o elevador desce com movimento acelerado cuja aceleração tem módulo $a = 3{,}0$ m/s^2;
e) o elevador sobe com movimento retardado cuja aceleração tem módulo $a = 3{,}0$ m/s^2;
f) o elevador desce com movimento retardado cuja aceleração tem módulo $a = 3{,}0$ m/s^2;
g) o elevador cai em queda livre.

Resolução:

a) Sendo $\vec{P}$ o peso do indivíduo, temos:
$P = m \cdot g = 80 \cdot 10 \qquad P = 800$ N
A balança deve marcar a intensidade da força normal (N).
Com o elevador parado, teremos $N = P$, isto é:



$N = 800$ newtons

b) Se o movimento do elevador é uniforme, sua aceleração é nula e, portanto, a força resultante também é nula. Assim, teremos $N = P$, ou:

$N = 800$ newtons

c) Com o elevador subindo em movimento acelerado, teremos $N > P$. Aplicando a Segunda Lei de Newton ao indivíduo:
$N - P = m \cdot a$
$N - 800 = 80 \cdot 3{,}0 \qquad N = 1\,040$ newtons

Podemos dizer, então, que nesse caso o peso aparente do indivíduo tem intensidade 1 040 N.

d) Se o elevador desce em movimento acelerado, devemos ter $P > N$. Assim, aplicando ao indivíduo a Segunda Lei de Newton, teremos:
$P - N = m \cdot a$
$800 - N = 80 \cdot 3{,}0 \qquad N = 560$ newtons

e) Quando o elevador sobe em movimento retardado, devemos ter $P > N$. Assim:
$P - N = m \cdot a$
$800 - N = 80 \cdot 3{,}0 \qquad N = 560$ newtons

Observemos que esse resultado é idêntico ao do item *d*.

f) Se o elevador desce com movimento retardado, devemos ter N > P. Portanto:
$N - P = m \cdot a$
$N - 800 = 80 \cdot 3{,}0$ $\quad N = 1\,040$ newtrons

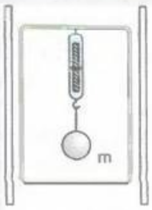
Convém observar que esse resultado é idêntico ao do item *c*.

g) Conforme discutimos na teoria, quando o elevador desce em queda livre, isto é, com aceleração $\vec{a} = \vec{g}$, a normal é nula.

2. Consideremos uma balança de molas fixa no piso de um elevador, numa região em que $g = 10\,m/s^2$. Sobre a balança está um indivíduo de massa $m = 50\,kg$. Determine a marcação da balança nos seguintes casos:

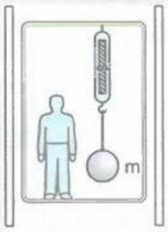
a) o elevador está em repouso;
b) o elevador está descendo com movimento uniforme;
c) o elevador está subindo com movimento acelerado, cuja aceleração tem módulo $a = 2{,}0\,m/s^2$;
d) o elevador está descendo com movimento acelerado, cuja aceleração tem módulo $a = 4{,}0\,m/s^2$;
e) o elevador está subindo com movimento retardado, cuja aceleração tem módulo $a = 3{,}0\,m/s^2$;
f) o elevador está descendo com movimento retardado, cuja aceleração tem módulo $a = 6{,}0\,m/s^2$.

3. Um corpo de massa $m = 20\,kg$ está pendurado em um dinamômetro, o qual está fixo no teto de um elevador. A aceleração da gravidade tem módulo $g = 10\,m/s^2$. Determine a marcação do dinamômetro quando o elevador sobe em movimento acelerado, cuja aceleração tem módulo $a = 2{,}5\,m/s^2$.



4. Consideremos um corpo de massa $m = 15\,kg$ pendurado em um dinamômetro, o qual está preso no teto de um elevador. A aceleração da gravidade tem intensidade $g = 10\,m/s^2$. Um indivíduo dentro do elevador observa que a marcação do dinamômetro é 180 N.

a) Calcule o módulo da aceleração do elevador.
b) O que podemos dizer sobre o movimento do elevador?



5. Um homem de massa $m_H = 80\,kg$ está sobre uma balança de molas, a qual está fixa no piso de um elevador, como mostra a figura. A massa do elevador juntamente com a balança é $m_E = 520\,kg$. O conjunto está inicialmente em repouso. A partir de determinado instante, aplica-se ao teto do elevador uma força vertical $\vec{T}$, de modo que o elevador começa a subir com movimento acelerado, cuja aceleração tem módulo $a = 2{,}0\,m/s^2$.

a) Calcule a intensidade de $\vec{T}$.
b) Calcule a indicação da balança.

Resolução:

a) Consideremos o elevador e o homem formando um único corpo, cuja massa é $M = m_H + m_E$, isto é, $M = 600\,kg$. O peso desse corpo tem módulo $P = M \cdot g$ ou $P = 6\,000\,N$. Aplicando a Segunda Lei de Newton (lembrando que o elevador está subindo com movimento acelerado), temos:

$T - P = M \cdot a$

$T - 6\,000 = 600 \cdot 2{,}0$ $\boxed{T = 7\,200\,N}$

b) O peso do homem tem módulo P_H dado por:

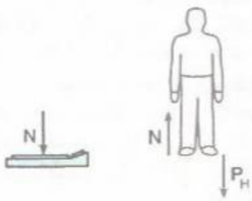
$P_H = m_H \cdot g = 80 \cdot 10$

$P_H = 800\,N$

Observando que o sistema tem movimento acelerado para cima, apliquemos a Segunda Lei de Newton ao homem:

$N - P_H = m_H \cdot a$

$N - 800 = 80 \cdot 2{,}0$ $\boxed{N = 960\,N}$



6. Uma balança de molas está fixa no piso de um elevador. A massa do elevador juntamente com a balança é de 430 kg. Sobre a balança há um indivíduo de massa igual a 70 kg. O sistema está inicialmente em repouso. A partir de determinado instante aplica-se ao teto do elevador uma força vertical $\vec{T}$ de modo que o conjunto começa a subir com movimento acelerado, cuja aceleração tem módulo $4{,}0\,m/s^2$. Sabendo que $g = 10\,m/s^2$, calcule:

a) a intensidade de $\vec{T}$;
b) o peso aparente do homem.

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

7. (Mackenzie-SP) Um elevador começa a subir, a partir do andar térreo, com aceleração de $5\,m/s^2$. O peso aparente de um homem de 60 kg no interior do elevador, supondo $g = 10\,m/s^2$, é igual a:

a) 60 N b) 200 N c) 300 N d) 600 N e) 900 N

8. (ITA-SP) No teto de um elevador temos um corpo de peso 16 N preso a um dinamômetro que acusa 20 N. A aceleração local da gravidade vale $10\,m/s^2$. A intensidade da aceleração do elevador é:

a) zero b) $2{,}5\,m/s^2$ c) $5{,}0\,m/s^2$ d) $10{,}0\,m/s^2$ e) $0{,}40\,m/s^2$

9. (ITA-SP) Em relação à situação do teste anterior, podemos afirmar que o elevador está:

a) subindo com velocidade constante.
b) em repouso.
c) subindo em movimento acelerado.
d) descendo em movimento acelerado.
e) subindo em movimento acelerado ou descendo em movimento retardado.

2. POLIA FIXA

Consideremos dois corpos, A e B, de massas respectivamente iguais a m_A e m_B, presos a um fio ideal que passa por uma polia, a qual pode girar em torno de um eixo *fixo* horizontal, como mostra a Fig. 14. Suponhamos que a massa da polia seja desprezível e que não haja atrito entre a polia e seu eixo (polia ideal).

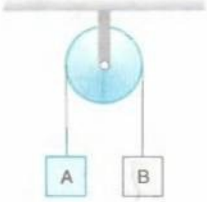


Fig. 14

As forças que agem sobre A e B são os seus pesos, de intensidades P_A e P_B, e as forças exercidas pelo fio, de intensidades T_A e T_B (Fig. 15). Mas, se o fio exerce força de intensidade T_A no bloco A, este exerce, no fio, força de mesma intensidade, pelo Princípio da Ação e Reação; o mesmo ocorre com o corpo B (Fig. 16).

Como o fio é ideal, as trações nos seus extremos devem ter o mesmo módulo: $T_A = T_B = T$ (Fig. 17).

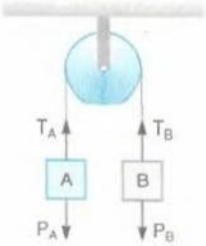


Fig. 15

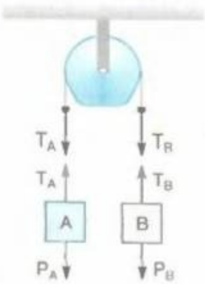


Fig. 16

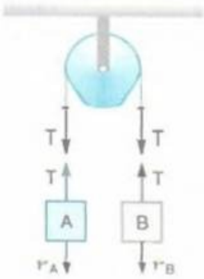


Fig. 17

Apenas para fixar idéias, suponhamos que o sistema tenha sido abandonado em repouso na posição da Fig. 18 e que $P_B > P_A$. Assim, o bloco A deve subir acelerado com aceleração $\vec{a}_A$ e o bloco B deve descer acelerado com aceleração $\vec{a}_B$. Mas, como o fio é ideal (e, portanto, inextensível), para um intervalo de tempo *qualquer*, o deslocamento $\vec{d}_A$ do bloco A para cima deve ter o mesmo módulo do deslocamento $\vec{d}_B$ do bloco B para baixo (Fig. 19): $|\vec{d}_A| = |\vec{d}_B|$.

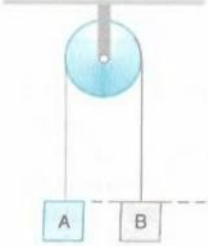


Fig. 18

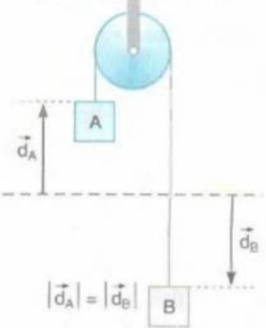


Fig. 19

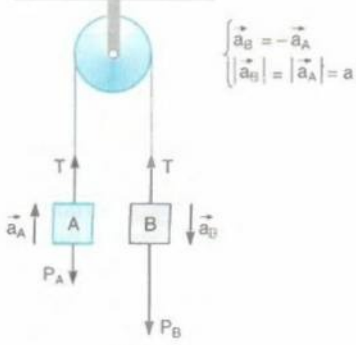


Fig. 20

Como a derivada do deslocamento é a velocidade e a derivada da velocidade é a aceleração, concluímos que, a cada instante, os dois blocos têm a *mesma velocidade* (em módulo) e a *mesma aceleração* (em módulo). Porém, como $P_B > P_A$, a aceleração $\vec{a}_A$ tem sentido para cima e $\vec{a}_B$ tem sentido para baixo (Fig. 20).

$$|\vec{v}_A| = |\vec{v}_B| \quad \text{e} \quad |\vec{a}_A| = |\vec{a}_B| = a$$

Para o corpo *A*, que sobe acelerado, apliquemos a Segunda Lei de Newton:

$T - P_A = m_A \cdot a \quad (\mathrm{I})$

Para o corpo *B*, que desce acelerado, temos:

$P_B - T = m_B \cdot a \quad (\mathrm{II})$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtemos os valores de *a* e *T*.

Façamos agora a adição, membro a membro, das equações (I) e (II):

$$\begin{cases} T - P_A = m_A \cdot a \\ P_B - T = m_B \cdot a \end{cases}$$

$$P_B - P_A = (m_A + m_B) \cdot a \qquad (\mathrm{III})$$

A equação (III) nos sugere um artifício para obtermos mais rapidamente o valor de *a*. Imaginamos o sistema "esticado" formando um único corpo de massa igual a $m_A + m_B$ (Fig. 21) e a esse corpo aplicamos a Segunda Lei de Newton:

Fig. 21

$$P_B - P_A = (m_A + m_B) \cdot a$$

Depois de obtido o valor de *a*, substituímos esse valor na equação (I) ou na equação (II) para obtermos o valor de *T*.

Na Fig. 22a reproduzimos parte da Fig. 17. Observando essa figura, percebemos que a força exercida pelo fio (ou pelo sistema "fio + corpo *A* + corpo *B*") sobre a polia tem intensidade igual a 2T (Fig. 22b).

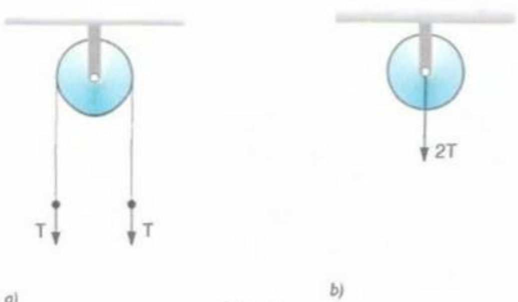


Fig. 22

Observações

1.ª) Supondo $P_B > P_A$, ao abandonarmos o sistema em repouso, o corpo *A* deve *subir* em movimento *acelerado* e *B* deve *descer* em movimento *acelerado*. No entanto, pode ocorrer o caso em que o corpo *A* recebe um impulso inicial para baixo. Nesse caso, de início teríamos *A descendo* em movimento *retardado* e *B subindo* em movimento *retardado*, até o instante em que ambos os corpos atingissem velocidade nula. A partir desse instante, *A subiria* com movimento *acelerado* e *B desceria* com movimento *acelerado*. Porém, nos dois casos, as acelerações vetoriais $\vec{a}_A$ e $\vec{a}_B$ teriam os sentidos indicados na Fig. 20.

2ª) A força exercida pelo fio sobre a polia tem intensidade igual a 2T, apenas no caso em que os dois ramos do fio são paralelos. No entanto, conforme veremos nos exercícios, há casos em que os dois ramos do fio não são paralelos (Fig. 23). Nesses casos, a força $\vec{F}$ exercida pelo fio sobre a polia deve ser obtida pela regra do paralelogramo (Fig. 24).

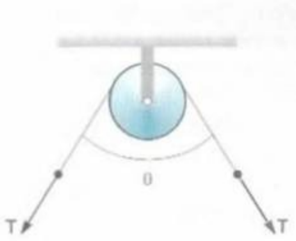


Fig. 23

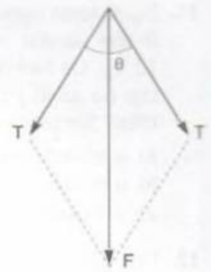
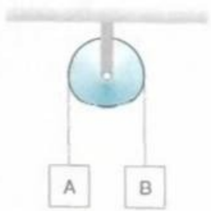


Fig. 24

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

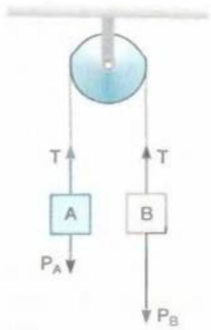
10 A figura representa dois blocos, *A* e *B*, de massas respectivamente iguais a 3,0 kg e 7,0 kg, presos às extremidades de um fio ideal que passa por uma polia ideal, como mostra a figura. Sendo $g = 10\,m/s^2$, calcule:

a) o módulo da aceleração de cada bloco;
b) o módulo da tração no fio que liga os blocos;
c) o módulo da força exercida sobre a polia pelo fio que liga os blocos.



Resolução:

a) $\begin{cases} P_A = m_A \cdot g = 3{,}0 \cdot 10 & P_A = 30\,N \\ P_B = m_B \cdot g = 7{,}0 \cdot 10 & P_B = 70\,N \end{cases}$



Observando que $P_A < P_B$, apliquemos a Segunda Lei de Newton a cada bloco:

$\begin{cases} T - P_A = m_A \cdot a \\ P_B - T = m_B \cdot a \end{cases}$

ou

$\begin{cases} T - 30 = 3{,}0 \cdot a & (I) \\ 70 - T = 7{,}0 \cdot a & (II) \end{cases}$

Adicionando membro a membro as equações (I) e (II), obtemos:

$70 - 30 = 10 \cdot a$

ou $\boxed{a = 4{,}0\,m/s^2}$

b) Substituamos o valor de *a* na equação (I):

$T - 30 = 3{,}0 \cdot 4{,}0$

$\boxed{T = 42\,N}$

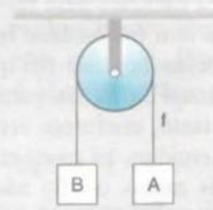
c) A intensidade da força $\vec{F}$ exercida sobre a polia pelo fio que liga os blocos é dada por $F = 2T$.

Portanto,

$F = 2(42)$ $\boxed{T = 84\,N}$

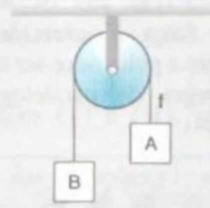
11. No sistema esquematizado na figura, os blocos *A* e *B* têm massas respectivamente iguais a 8,0 kg e 12 kg. Os blocos estão presos às extremidades de um fio ideal *f* que passa por uma polia também ideal. Sendo $g = 10\,m/s^2$, calcule:

a) o módulo da aceleração de cada bloco;
b) o módulo da tração no fio *f*;
c) o módulo da força exercida pelo fio *f* sobre a polia.

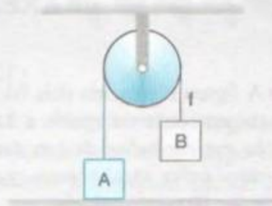


12. Dois blocos, *A* e *B*, de massas iguais a 6,0 kg, são ligados às extremidades de um fio ideal *f* que passa por uma polia ideal, como mostra a figura. Sendo $g = 10\,m/s^2$, calcule:

a) o módulo da aceleração do bloco *A*;
b) o módulo da tração no fio *f*;
c) o módulo da força que o fio *f* exerce sobre a polia.

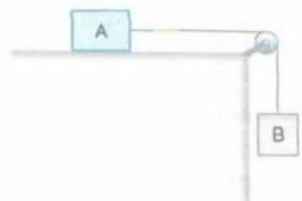


13. O esquema representa dois corpos, *A* e *B*, de pesos respectivamente iguais a 40 N e 15 N, presos às extremidades de um fio ideal *f* que passa por uma polia também ideal. O corpo *A* está apoiado sobre uma plataforma horizontal. Calcule o módulo da força exercida pela plataforma sobre o corpo *A*.



14. Dois blocos, *A* e *B*, de massas respectivamente iguais a 14 kg e 6,0 kg, são ligados a um fio ideal que passa por uma polia também ideal, como mostra a figura. A aceleração da gravidade tem módulo $g = 10\,m/s^2$ e não há atrito entre o bloco *A* e a superfície de apoio. Calcule os módulos:

a) da aceleração do bloco *B*;
b) da tração no fio;
c) da força exercida pelo fio sobre a polia.



Resolução:

a) Sobre o bloco *B* atuam o seu peso (P_B) e a tração do fio (*T*). Sobre o bloco *A* atuam o seu peso (P_A), a força normal (*N*) exercida pela superfície horizontal de apoio e a tração do fio (*T*). Como não há movimento na direção vertical, as forças *N* e P_A se anulam.

$P_B = m_B \cdot g = 6{,}0 \cdot 10 \qquad P_B = 60\,N$

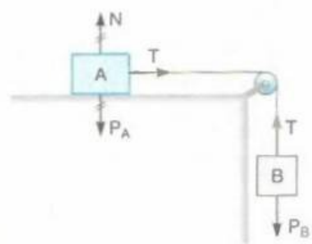


Fig. a

Os dois blocos têm acelerações de mesmo módulo *a*. Apliquemos então a Segunda Lei de Newton a cada bloco:

$$\begin{cases} T = m_A \cdot a \\ P_B - T = m_B \cdot a \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} T = 14 \cdot a & \text{(I)} \\ 60 - T = 6{,}0 \cdot a & \text{(II)} \end{cases}$$

Adicionando membro a membro as equações (I) e (II), obtemos:

$60 = 20 \cdot a \qquad \text{ou} \qquad \boxed{a = 3{,}0\,m/s^2}$

Poderíamos, também, ter usado o artifício de supor o sistema "esticado" (Fig. b) e aplicar a Segunda Lei de Newton:

$P_B = (m_A + m_B) \cdot a$
$60 = (14 + 6{,}0) \cdot a$

$a = 3{,}0\ m/s^2$

Fig. b

b) Substituindo o valor de a na equação (I), obtemos:

$T = 14 \cdot 3{,}0$ $\quad$ $T = 42\,N$

c) Seja $\vec{F}$ a força exercida pelo fio sobre a polia.

$F^2 = T^2 + T^2$
$F^2 = 2T^2$
$F = T \cdot \sqrt{2}$

$F = 42\sqrt{2}\,N$

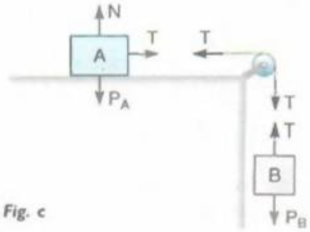


Fig. c

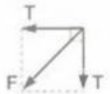
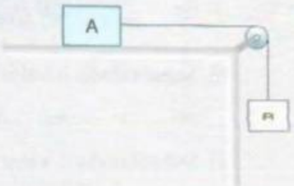


Fig. d

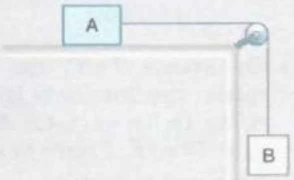
15. O desenho representa dois blocos, A e B, de massas respectivamente iguais a 12 kg e 8,0 kg, ligados por um fio ideal que passa por uma polia também ideal. Despreze o atrito e suponha $g = 10\,m/s^2$. Calcule os módulos:

a) da aceleração do bloco B;
b) da tração no fio;
c) da força que o fio exerce sobre a polia.



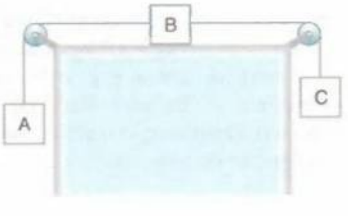
16. No sistema representado na figura, o fio e a polia são ideais, a massa do bloco A é 9,0 kg e a tração no fio tem módulo 36 N. Supondo $g = 10\,m/s^2$ e desprezando o atrito, calcule:

a) o módulo da aceleração do bloco A;
b) a massa do bloco B.



17. No sistema representado na figura, os blocos A, B e C têm massas respectivamente iguais a 9,0 kg, 6,0 kg e 5,0 kg. Os fios e as polias são ideais e a aceleração da gravidade tem módulo $10\,m/s^2$. Desprezando o atrito, calcule:

a) o módulo da aceleração do bloco B;
b) o módulo da tração no fio preso ao bloco A;
c) o módulo da tração no fio preso ao bloco C.



Resolução:

a) $\begin{cases} P_A = m_A \cdot g = 9{,}0 \cdot 10 & P_A = 90\,N \\ P_C = m_C \cdot g = 5{,}0 \cdot 10 & P_C = 50\,N \end{cases}$

O peso do bloco *B* se anula com a normal. Observando que $P_A > P_C$, apliquemos a Segunda Lei de Newton a cada bloco:

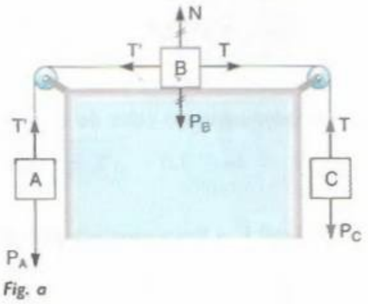


Fig. a

$$\begin{cases} P_A - T' = m_A \cdot a \\ T' - T = m_B \cdot a \\ T - P_C = m_C \cdot a \end{cases} \quad \text{ou}$$

$$\begin{cases} 90 - T' = 9{,}0 \cdot a & \text{(I)} \\ T' - T = 6{,}0 \cdot a & \text{(II)} \\ T - 50 = 5{,}0 \cdot a & \text{(III)} \end{cases}$$

Adicionando membro a membro as igualdades (I), (II) e (III), obtemos:

$90 - 50 = 20 \cdot a \qquad a = 2{,}0\,m/s^2$

Poderíamos, também, ter usado o artifício de imaginar o sistema "esticado" (Fig. b). Aplicando a Segunda Lei de Newton, temos:

$P_A - P_C = (m_A + m_B + m_C) \cdot a$

$90 - 50 = (9{,}0 + 6{,}0 + 5{,}0) \cdot a$

ou $\quad a = 2{,}0\,m/s^2$

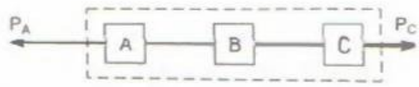


Fig. b

b) Substituindo o valor de *a* na equação (I), temos:

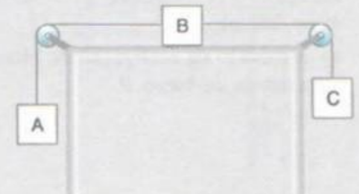
$90 - T' = 9{,}0 \cdot 2{,}0 \qquad T' = 72\,N$

c) Substituindo o valor de *a* na equação (III), temos:

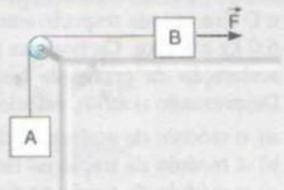
$T - 50 = 5{,}0 \cdot 2{,}0 \qquad T = 60\,N$

18. Os blocos *A*, *B* e *C*, representados na figura, têm massas respectivamente iguais a 20 kg, 12 kg e 8,0 kg. Os fios e as polias são ideais, não há atrito e $g = 10\,m/s^2$. Calcule os módulos:

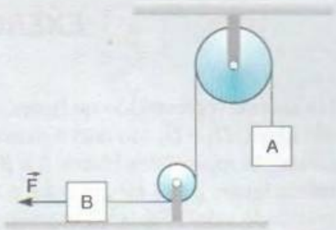
a) da aceleração do bloco *B*;
b) da tração no fio preso ao bloco *A*;
c) da tração no fio preso ao bloco *C*.



19. No sistema representado na figura, os blocos *A* e *B* têm massas 2,0 kg e 3,0 kg, respectivamente. O fio e a polia são ideais e $g = 10\,m/s^2$. Uma força horizontal $\vec{F}$ de intensidade 60 N é aplicada ao bloco *B*. Desprezando o atrito, calcule o módulo da aceleração do bloco *A*.

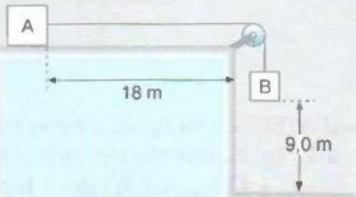


20. Dois blocos, *A* e *B*, de massas respectivamente iguais a 3,0 kg e 7,0 kg, estão ligados a um fio ideal que passa por duas polias ideais, como mostra a figura. O bloco *B* é puxado por uma força horizontal $\vec{F}$ cuja intensidade é 50 N. Sabendo que $g = 10\,m/s^2$ e desprezando o atrito, calcule o módulo da aceleração do bloco *A*.

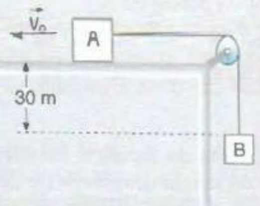


21. O sistema representado na figura é abandonado em repouso no instante t = 0. Os blocos *A* e *B* têm massas respectivamente iguais a 8,0 kg e 2,0 kg. Sabendo que $g = 10\,m/s^2$ e desprezando o atrito, calcule:

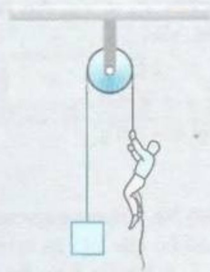
a) o instante em que o bloco *B* atinge o solo;
b) a velocidade do bloco *B* ao atingir o solo.



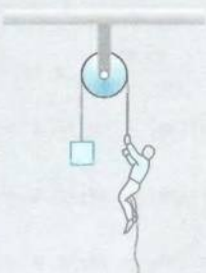
22. Os blocos *A* e *B* representados na figura têm massas respectivamente iguais a 14 kg e 6,0 kg. O fio e a polia são ideais e não há atrito. No instante t = 0, o bloco *A* tem velocidade $\vec{v}_0$, de módulo 12 m/s, como representado na figura. Sendo $g = 10\,m/s^2$, determine o instante em que a velocidade do bloco *A* se anula.



23. Um bloco de massa M = 80 kg está preso em uma das extremidades de um fio ideal que passa por uma polia também ideal e é puxada, conforme a figura, por um indivíduo de massa m = 60 kg, de modo que tanto o indivíduo como o bloco sobem em movimento acelerado. Sabendo que $g = 10\,m/s^2$ e que o módulo da aceleração do indivíduo é $4{,}0\,m/s^2$, calcule o módulo da aceleração do bloco.



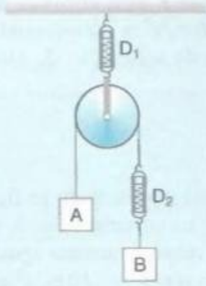
24. Um homem e um bloco de chumbo de massas iguais estão pendurados a um fio ideal que passa por uma polia ideal, conforme mostra a figura. De início, tanto o homem como o bloco estão em repouso e o bloco está no nível da cabeça do homem. A partir de determinado instante, o homem começa a puxar o fio, de modo que adquire movimento para cima. Enquanto o homem sobe, o bloco fica acima, abaixo ou no mesmo nível da cabeça do homem?



EXERCÍCIOS DE REFORÇO

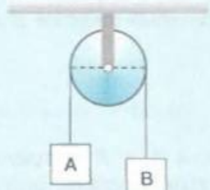
25. No sistema representado na figura, os fios e a polia são ideais, D_1 e D_2 são dois dinamômetros também ideais. As massas dos blocos A e B são respectivamente iguais a 9,0 kg e 6,0 kg e a aceleração da gravidade vale 10 m/s². Determine:

a) o módulo da aceleração de cada bloco;
b) a marcação do dinamômetro D_2;
c) a marcação do dinamômetro D_1.



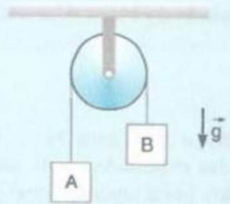
26. (FATEC-SP) Na figura, o corpo B tem massa igual a 15 kg; a polia não tem atrito com o eixo e sua massa é desprezível; o cabo é inextensível e com perfeita aderência à polia. Considerando que o corpo B desce acelerado, com aceleração cujo módulo é 2,0 m/s² e adotando $g = 10$ m/s², o valor da massa de A é:

a) 15 kg
b) 10 kg
c) 7,5 kg
d) 12 kg
e) 5,0 kg



27. O sistema da figura é constituído por uma polia fixa de massa desprezível e dois corpos A e B de massas respectivamente iguais a 8 kg e 2 kg, ligados entre si por um fio inextensível. Sendo $\vec{g}$ a aceleração da gravidade, podemos afirmar que as acelerações $\vec{a}_A$ e $\vec{a}_B$, dos corpos A e B, respectivamente, são:

a) $2\vec{g}$ e $-2\vec{g}$
b) $-\vec{g}$ e $+\vec{g}$
c) $0{,}6\vec{g}$ e $-0{,}6\vec{g}$
d) $0{,}8\vec{g}$ e $-0{,}2\vec{g}$
e) $-8\vec{g}$ e $+2\vec{g}$



28. (ITA-SP) No sistema esquematizado são desprezíveis o atrito, o momento de inércia da roldana e a massa do fio que liga as massas m_1 e m_2. Sabe-se que $m_1 > m_2$ e que a aceleração da gravidade local é g. A tensão T no fio e a aceleração a da massa m_1 são, respectivamente, dadas por:

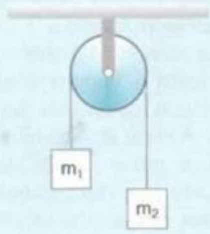
a) $T = \dfrac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2}$; $a = \dfrac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}$

b) $T = \dfrac{m_1m_2g}{m_1 + m_2}$; $a = \dfrac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}$

c) $T = (m_1 - m_2)g$; $a = \dfrac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}$

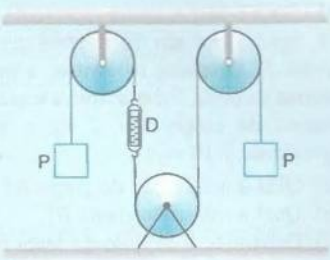
d) $T = (m_1 - m_2)g$; $a = \dfrac{(m_1 - m_2)g}{m_1}$

e) $T = (m_1 + m_2)g$; $a = \dfrac{(m_1 + m_2)g}{m_1}$



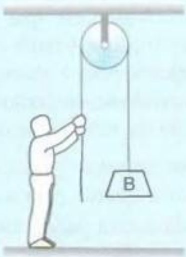
29. (Mackenzie-SP) A figura representa dois corpos de mesmo peso P, ligados a um dinamômetro D por meio de fios ideais. Desprezando as massas das polias, podemos afirmar que o dinamômetro (ideal) registra:

a) zero b) P c) $\frac{P}{2}$ d) 2 P



30. (F. M. Pouso Alegre-MG) Na montagem ao lado, um indivíduo de massa 70 kg mantém suspenso um bloco B de massa 30 kg através de um fio ideal que passa por uma polia também ideal. Sendo $g = 10\,m/s^2$, calcule as intensidades:

a) da tração no fio;
b) da força que o chão exerce no indivíduo.

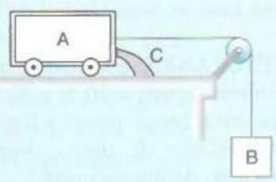


31. (Mackenzie-SP) Uma corda envolve uma roldana fixa sem atrito. Numa das extremidades da corda está um macaco e na outra, um bloco cúbico de peso igual ao do macaco. Na face do cubo voltada para o macaco há um espelho plano. O macaco começa a subir pela corda. Podemos então afirmar:

a) o macaco só verá sua imagem no espelho, se permanecer em repouso.
b) o macaco só verá sua imagem no espelho, se a sua velocidade for maior que a do cubo.
c) o macaco não verá sua imagem no espelho, porque o cubo sobe com maior velocidade.
d) o macaco verá constantemente sua imagem.

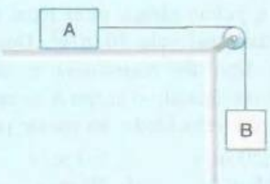
32. (FUVEST-SP) Um carrinho A de massa 20 kg é unido a um bloco B de 5 kg por meio de um fio leve e inextensível, conforme a figura. Inicialmente o sistema está em repouso devido à presença do anteparo C que bloqueia o carrinho A. Adote $g = 10\,m/s^2$.

a) Qual o valor da força que o anteparo C exerce sobre o carrinho A?
b) Retirado o anteparo C, com que aceleração o carrinho A se movimenta?

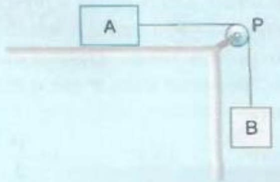


33. Os blocos A e B representados na figura têm massas respectivamente iguais a m_A e m_B. O fio e a polia são ideais, a aceleração da gravidade tem módulo igual a g e não há atrito. Calcule, em função de m_A, m_B e g:

a) o módulo da aceleração do bloco B;
b) o módulo da tração no fio.

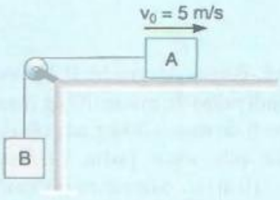


34. (FUVEST-SP) A figura representa dois corpos, *A* e *B*, ligados por um fio flexível que passa por uma polia *P*. Despreze os atritos, a massa do fio e a massa da polia. Sabe-se que a tensão no fio é 5 *N*, a massa do corpo *A* é 2 kg e a aceleração da gravidade é 10 m/s^2.



a) Qual a aceleração do corpo *A*?
b) Qual a massa do corpo *B*?
c) Determine o módulo da força feita pelo fio sobre a polia.

35. (UNIMEP-SP) Um corpo *A* de massa 1 600 gramas está unido por um fio a um outro corpo *B* de massa 400 gramas, numa região em que g = 10 m/s^2. No instante inicial, o corpo *A* tinha uma velocidade de 5 m/s e se movia para a direita, conforme o esquema. Desprezando-se os atritos, após 5 s, o módulo e o sentido da velocidade de *A* serão:



a) v = 5 m/s; da esquerda para a direita.
b) v = 0 m/s; da esquerda para a direita.
c) v = 0 m/s; da direita para a esquerda.
d) v = 5 m/s; da direita para a esquerda.
e) v = 2 m/s; da esquerda para a direita.

36. (VUNESP-SP) Nas duas situações mostradas nas figuras, carrinhos, mesas, roldanas e fios são idênticos. Observa-se, porém, que puxando o fio (figura 2) com uma força $\vec{F}$ igual ao peso $\vec{P}$ do corpo dependurado (figura 1), a aceleração do segundo carrinho é maior.

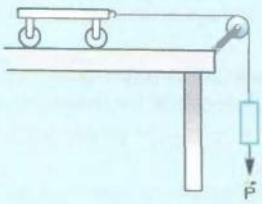


Fig. 1

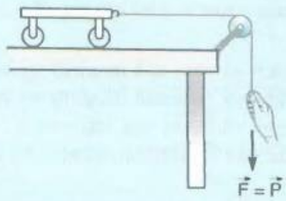
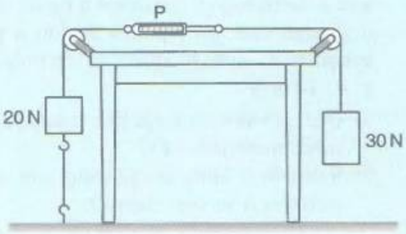


Fig. 2

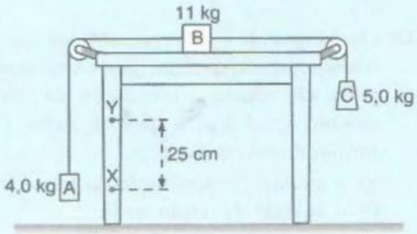
Com base na Segunda Lei de Newton, justifique o fato observado.

37. (CESGRANRIO-RJ) Dois corpos de pesos respectivamente iguais a 20 N e 30 N são mantidos em equilíbrio, como mostra a figura. *P* representa um dinamômetro de massa desprezível. Qual é a indicação do dinamômetro?



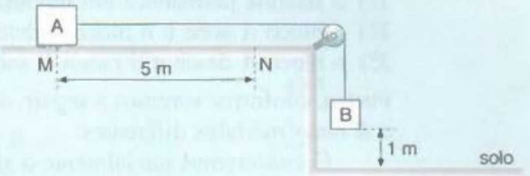
a) 50 N
b) 30 N
c) 20 N
d) 10 N
e) zero

38. (Mackenzie-SP) O sistema ao lado é constituído de fios e polias ideais, num local onde a aceleração gravitacional vale 10 m/s^2. Desprezando-se qualquer tipo de resistência e abandonando-se o conjunto quando o corpo *A* se encontra na posição *X*, a sua velocidade, ao passar por *Y*, é:



a) 0,50 m/s
b) 2,5 m/s
c) 5,0 m/s
d) 50 m/s
e) 2 500 m/s

39. (PUC-SP) O esquema representa dois corpos, A e B, de massas respectivamente iguais a 8,0 kg e 2,0 kg, ligados por um fio inextensível e de massa desprezível. No instante $t = 0$, os corpos estão em repouso na posição indicada no esquema. Nesse instante abandona-se o sistema, que assume movimento devido à tração exercida por B. Despreze as forças de atrito e suponha que a aceleração da gravidade tem intensidade $10\,m/s^2$. O tempo que A leva para ir de M até N é:

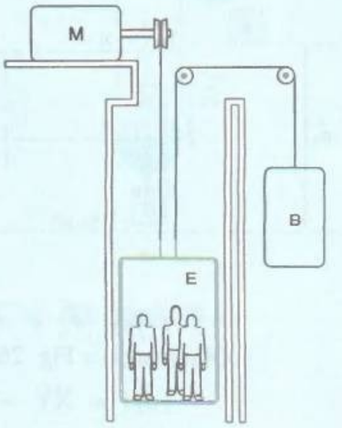


a) 1,0 s b) $\sqrt{2}$ s c) 2,0 s d) $\sqrt{5}$ s e) 3,0 s

40. (FUVEST-SP) A figura ao lado representa esquematicamente um elevador E com massa 800 kg e um contrapeso B, também de 800 kg, acionados por um motor M. A carga interna do elevador é de 500 kg. Calcule a força exercida pelo motor através do cabo, em cada um dos casos a seguir: (Adote $g = 10\,m/s^2$)

a) o elevador sobe com velocidade constante;

b) o elevador sobe com movimento acelerado, cuja aceleração é $0,50\,m/s^2$.



3. POLIA MÓVEL

No sistema representado na Fig. 25, o bloco A está preso ao fio f_1, o qual passa pelas polias P_1 e P_2; o bloco B está preso ao fio f_2, o qual está preso ao eixo da polia P_2. A polia P_1 é uma polia fixa, isto é, ela pode girar, mas o seu eixo é fixo; a polia P_2 é uma polia móvel, isto é, além de girar, o seu eixo pode movimentar-se. Suponhamos que os fios e as polias são ideais. Dependendo das massas de A e B, ao abandonarmos o sistema em repouso, podem ocorrer três situações:

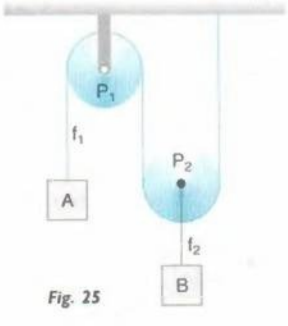
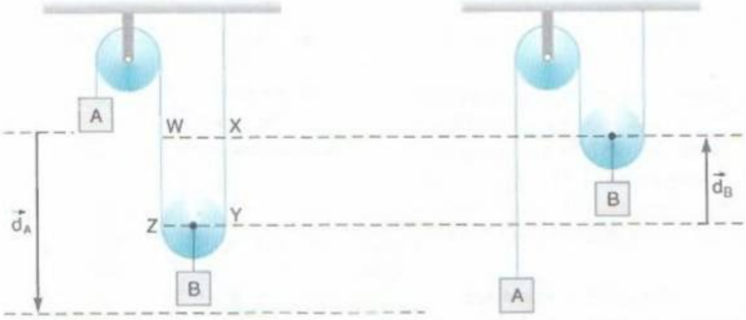


Fig. 25

1.ª) o sistema permanece em repouso;
2.ª) o bloco *A* sobe e o bloco *B* desce;
3.ª) o bloco *A* desce e o bloco *B* sobe.

Porém, conforme veremos a seguir, desde que haja aceleração, as acelerações de *A* e *B* terão módulos diferentes.

Consideremos inicialmente o sistema na posição da Fig. 26a e, apenas para fixar idéias, suponhamos que o bloco *A* esteja descendo e o bloco *B* esteja subindo, de modo que, após um intervalo de tempo Δt, o sistema esteja na posição da Fig. 26b.



a) b)

Fig. 26

Sejam $\vec{d}_A$ e $\vec{d}_B$ os deslocamentos dos blocos *A* e *B*, respectivamente. Observando a Fig. 26, percebemos que:

$$|\vec{d}_B| = \overline{XY} = \overline{WZ}$$

Como o fio é ideal (e, portanto, inextensível), os trechos de fio XY e WZ que "desapareceram" do lado da polia móvel devem ter "ido" para o lado do bloco *A*, isto é:

$$|\vec{d}_A| = 2\,|\vec{d}_B|$$

Portanto, para qualquer intervalo de tempo, o módulo do deslocamento de *A* será o dobro do módulo do deslocamento de *B*. Mas, como sabemos, a derivada do deslocamento nos dá a velocidade. Assim, sendo $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ as velocidades dos blocos *A* e *B* num instante qualquer, devemos ter:

$$|\vec{v}_A| = 2\,|\vec{v}_B|$$

Mas sabemos também que a derivada da velocidade é a aceleração. Portanto, sendo $\vec{a}_A$ e $\vec{a}_B$ as acelerações dos blocos *A* e *B*, temos:

$$\boxed{|\vec{a}_A| = 2\,|\vec{a}_B|}$$

Isolemos as polias e os blocos como mostra a Fig. 27, onde *T* é a intensidade da tração no fio. Sendo a_A e a_B os módulos das acelerações dos blocos e supondo que o sistema tenha sido abandonado em repouso, consideraremos três casos.

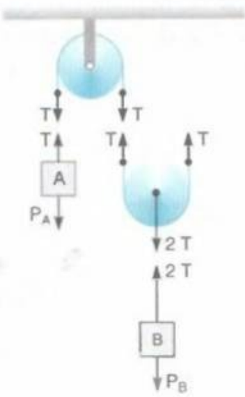


Fig. 27

1º caso:	*O sistema permanece em repouso.*

Nesse caso devemos ter $T = P_A$ e $2T = P_B$. Assim:

$P_B = 2P_A$ ou $m_B = 2m_A$

onde m_A e m_B são as massas dos blocos *A* e *B*.

Se dermos um impulso ao bloco *A* ou ao bloco *B*, o sistema entrará em movimento, porém os dois blocos terão movimentos uniformes.

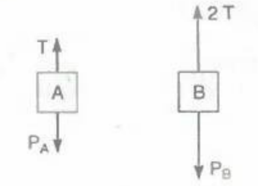


Fig 28

2º caso	$m_B > 2m_A$

Vimos no caso anterior que, para $m_B = 2m_A$, o sistema fica em equilíbrio. Assim, para $m_B > 2m_A$, o bloco *B* deve descer acelerado e o bloco *A* deve subir acelerado (supondo que o sistema tenha sido abandonado em repouso). Aplicando a Segunda Lei de Newton a cada bloco, temos:

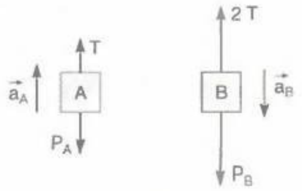


Fig 29

$$\begin{cases} T - P_A = m_A \cdot a_A \\ P_B - 2T = m_B \cdot a_B \end{cases}$$

Essas duas equações juntamente com a condição $a_A = 2a_B$ resolvem o problema.

3º caso	$m_B < 2m_A$

Como vimos, para $m_B = 2m_A$ o sistema fica em equilíbrio. Assim, para $m_B < 2m_A$, o bloco *A* deve descer em movimento acelerado e o bloco *B* deve subir em movimento acelerado (supondo que o sistema tenha sido abandonado em repouso). Portanto, as equações que resolvem o problema são:

$$\begin{cases} P_A - T = m_A \cdot a_A \\ 2T - P_B = m_B \cdot a_B \\ a_A = 2a_B \end{cases}$$

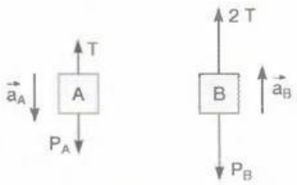


Fig. 30

Observação

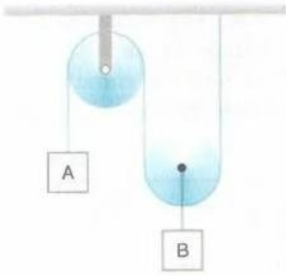
Ao resolvermos um problema do tipo que estamos analisando, podemos, se quisermos, não fazer a análise da relação entre as massas e simplesmente fazer uma das seguintes hipóteses:

1ª) $\vec{a}_A$ tem sentido para baixo e $\vec{a}_B$ tem sentido para cima.
2ª) $\vec{a}_A$ tem sentido para cima e $\vec{a}_B$ tem sentido para baixo.

A seguir, escrevemos as equações baseados na hipótese feita, sem nos preocuparmos se a hipótese é correta ou não. Como ao escrevermos as equações usamos as acelerações em módulo, perceberemos no final do problema se a hipótese está correta ou não: se as acelerações obtidas forem positivas, a hipótese estará certa; se as acelerações forem negativas, a hipótese estará errada (mas isso não quer dizer que precisamos resolver novamente o problema, pois os módulos das acelerações estarão corretos).

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

41. O sistema representado na figura é abandonado em repouso. Os fios e as polias são ideais. Sabendo que a massa do bloco *A* é $m_A = 40\,kg$, determine a massa de *B* para que o sistema permaneça em repouso.



Resolução:

Se o sistema está em repouso, devemos ter:

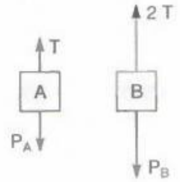
$T = P_A$ e $2T = P_B$

Portanto, $P_B = 2P_A$

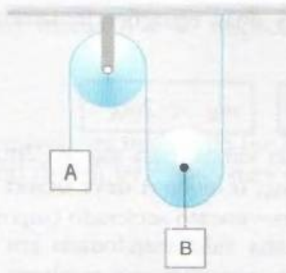
ou, $m_B \cdot g = 2m_A \cdot g$

$m_B = 2 \cdot m_A$

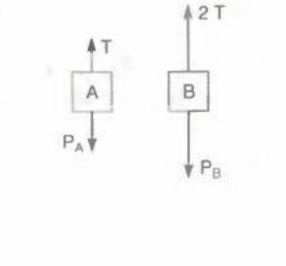
$m_B = 2 \cdot 40$ $\boxed{m_B = 80\,kg}$



42. Abandona-se em repouso o sistema representado na figura. Os fios e as polias são ideais. Sabendo que a massa de *B* é 100 kg, calcule a massa *A*, de modo que o sistema fique em equilíbrio.



43. O sistema representado na figura é formado por fios e polias ideais. A aceleração da gravidade tem módulo $g = 10\,m/s^2$, a massa de *A* é $m_A = 3{,}5\,kg$ e a massa de *B* é $m_B = 6{,}0\,kg$. Calcule os módulos das acelerações dos blocos *A* e *B* e o módulo da tração no fio ligado ao bloco *A*.



Resolução:

$$\begin{cases} P_A = m_A \cdot g = 3{,}5 \cdot 10 \\ P_B = m_B \cdot g = 6{,}0 \cdot 10 \end{cases} \qquad \begin{matrix} P_A = 35\,N \\ P_B = 60\,N \end{matrix}$$

Como $2m_A > m_B$, a aceleração de A tem sentido para baixo e a aceleração de B tem sentido para cima. Apliquemos a Segunda Lei de Newton a cada bloco:

$$\begin{cases} P_A - T = m_A \cdot a_A \\ 2T - P_B = m_B \cdot a_B \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 35 - T = 3{,}5 \cdot a_A & \text{(I)} \\ 2T - 60 = 6{,}0 \cdot a_B & \text{(II)} \end{cases}$$

Usando a condição $a_A = 2a_B$ na equação (I), o sistema de equações anterior fica:

$$\begin{cases} 35 - T = 7{,}0 \cdot a_B & \text{(III)} \\ 2T - 60 = 6{,}0 \cdot a_B & \text{(II)} \end{cases}$$

Dividindo por 2 todos os termos da equação (II), temos:

$$\begin{cases} 35 - T = 7{,}0 \cdot a_B & \text{(III)} \\ T - 30 = 3{,}0 \cdot a_B & \text{(IV)} \end{cases}$$

Adicionando membro a membro essas duas últimas equações, temos:

$35 - 30 = 10 \cdot a_B$ ou $\boxed{a_B = 0{,}50\,\text{m/s}^2}$

Como $a_A = 2a_B$, obtemos: $a_A = 2\,(0{,}50)$ $\boxed{a_A = 1{,}0\,\text{m/s}^2}$

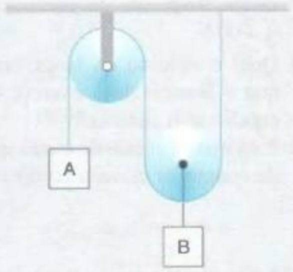
Para obtermos o valor de T, substituímos os valores obtidos para as acelerações, em qualquer das equações anteriores. Por exemplo, substituímos o valor de a_B na equação (IV):

$T - 30 = 3{,}0 \cdot a_B$

$T - 30 = 3{,}0 \cdot 0{,}50$ $\boxed{T = 31{,}5\text{ N}}$

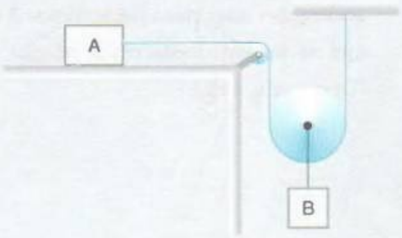
44. No sistema representado na figura, os fios e as polias são ideais. A aceleração da gravidade tem módulo $10\,\text{m/s}^2$, e as massas de A e B são respectivamente iguais a 3,0 kg e 8,0 kg. Calcule os módulos:

a) da aceleração de B;
b) da aceleração de A;
c) da tração no fio ligado ao bloco A.



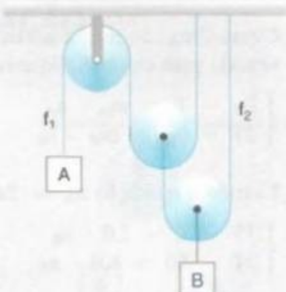
45. No sistema representado na figura, os fios e as polias são ideais e não há atrito entre o bloco A e a superfície de apoio. A aceleração da gravidade tem módulo $10\,\text{m/s}^2$ e as massas dos blocos A e B são respectivamente iguais a 2,0 kg e 12 kg. Calcule os módulos:

a) das acelerações dos blocos A e B;
b) da tração no fio ligado ao bloco A.



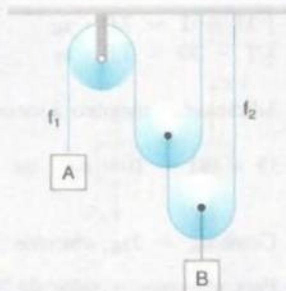
46. No sistema esquematizado na figura, os fios e as polias são ideais e a massa do bloco *B* é igual a 8,0 kg. Adote $g = 10\,m/s^2$. Sabendo que o sistema está em equilíbrio, determine:

a) o módulo da tração no fio f_2;
b) o módulo da tração no fio f_1;
c) a massa de *A*.



47. Considere o sistema representado na figura, onde os fios e as polias são ideais. A aceleração da gravidade tem módulo $10\ m/s^2$ e as massas de *A* e *B* são respectivamente iguais a 3,0 kg e 2,0 kg. Sendo a_A e a_B os módulos das acelerações dos blocos *A* e *B*, determine:

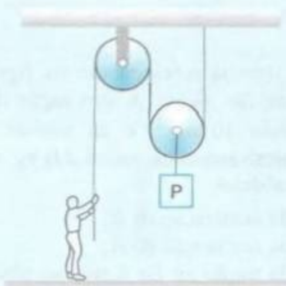
a) a relação entre a_A e a_B;
b) os valores de a_A e a_B;
c) o módulo da tração no fio ligado ao bloco *A*.



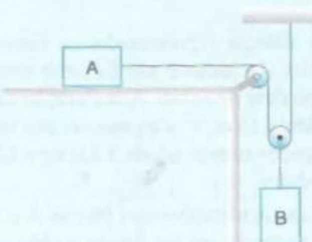
EXERCÍCIOS DE REFORÇO

48. (FUVEST-SP) Considere o esquema representado na figura ao lado. As roldanas e a corda são ideais. O corpo suspenso da roldana móvel tem peso $P = 500\,N$.

a) Qual o módulo da força vertical (para baixo) que o homem deve exercer sobre a corda para equilibrar o sistema?
b) Para cada 1 metro de corda que o homem puxa, de quanto se eleva o corpo suspenso?

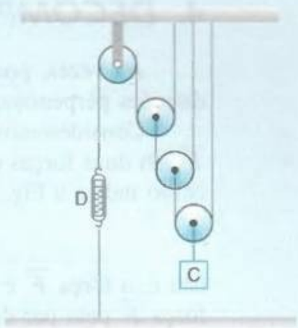


49. (FEI-SP) No sistema indicado na figura, o fio e as polias são ideais. Qual a relação $\frac{a_A}{a_B}$ entre as acelerações adquiridas pelos corpos *A* e *B*, sabendo que as massas obedecem à relação $\frac{m_A}{m_B} = \frac{1}{4}$? (Despreze o atrito.)



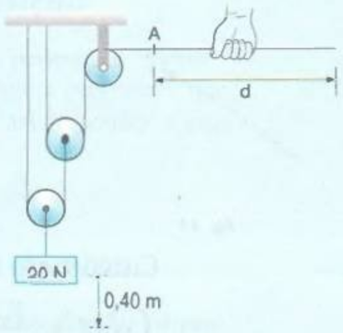
50. (Mackenzie-SP) Para conseguir obter o peso de um corpo, um profissional dispunha de apenas um dinamômetro muito leve e insuficiente para a medida desejada. Neste caso, esta pessoa adequou o instrumento (*D*) ao sistema de polias e fios ideais abaixo e suspendeu o corpo (*C*) conforme a ilustração. Sabendo que o dinamômetro assinala então 100 N, pode-se dizer que o peso do corpo é:

a) 800 N
b) 600 N
c) 400 N
d) 300 N
e) 100 N



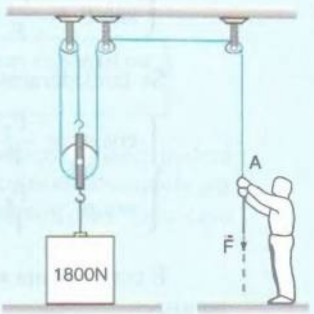
51. (PUC-MG) A figura abaixo mostra uma associação de roldanas. Ela é utilizada para elevar um caixote, de peso 20 N, até uma altura de 0,40 m. Para isso, foi necessário deslocar o ponto *A*, na corda superior, de uma distância *d* igual a:

a) 0,40 m
b) 0,80 m
c) 1,6 m
d) 2,0 m
e) 2,4 m

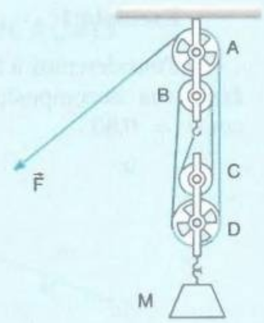


52. (FUVEST-SP) Para erguer um bloco de peso 1 800 N é utilizado um sistema de polias e fios conforme o esquema. Considerando-se o sistema ideal:

a) que força mínima *F* se deve aplicar na extremidade *A* do fio para que o corpo comece a ser erguido?
b) seria possível a uma pessoa de peso 500 N erguer o bloco puxando o fio verticalmente pelo ponto *A*? Explique.
(Adote $g = 10\,m/s^2$.)



53. Um sistema de quatro polias, como representado ao lado, é usado para suspender um bloco *M*. As polias *A* e *B* são fixas, tendo seus eixos ligados; as polias *C* e *D* são móveis e têm também seus eixos ligados. O fio e as polias são ideais e $g = 10{,}0\,m/s^2$. Sendo a massa de *M* igual a 120 kg, qual a intensidade da força $\vec{F}$ necessária para manter o bloco *M* suspenso?



4. DECOMPOSIÇÃO DE FORÇAS

Às vezes, pode ser conveniente decompormos uma dada força sobre duas direções perpendiculares.

Consideremos, por exemplo, a força $\vec{F}$ da Fig. 31. Vamos decompor a força $\vec{F}$ em duas forças componentes, que estejam nas direções perpendiculares x e y, como indica a Fig. 32. Podemos afirmar que:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$$

isto é, a força $\vec{F}$ é a resultante das forças $\vec{F}_x$ e $\vec{F}_y$. Isso nos permite substituir a força $\vec{F}$ pelo par de forças $\vec{F}_x$ e $\vec{F}_y$ (Fig. 33), isto é, as forças $\vec{F}_x$ e $\vec{F}_y$, atuando *juntas*, devem produzir o mesmo efeito que a força $\vec{F}$, atuando *sozinha*.

Fig. 31

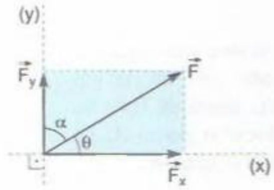


Fig. 32

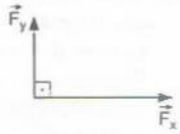


Fig. 33

Considerando o ângulo θ da Fig. 32, temos:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{F_x}{F} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{F_y}{F} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} \boxed{F_x = F \cdot \cos\theta} \\ \boxed{F_y = F \cdot \text{sen}\,\theta} \end{array}$$

Se considerarmos o ângulo α, teremos:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{F_y}{F} \\ \text{sen}\,\alpha = \dfrac{F_x}{F} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} \boxed{F_y = F \cdot \cos\alpha} \\ \boxed{F_x = F \cdot \text{sen}\,\alpha} \end{array}$$

É conveniente ressaltar que, sendo θ e α complementares ($\theta + \alpha = 90°$), temos:

$\text{sen}\,\theta = \cos\alpha$ e $\text{sen}\,\alpha = \cos\theta$

Exemplo 1:

Consideremos a força $\vec{F}$ da Fig. 34, cuja intensidade é F = 50 N, e vamos fazer sua decomposição nas direções x e y, sabendo que $\text{sen}\,\theta = 0{,}60$ e $\cos\theta = 0{,}80$.

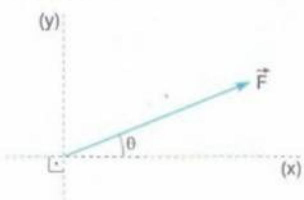


Fig. 34

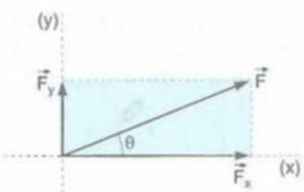


Fig. 35

Da Fig. 35 tiramos:

$$\begin{cases} F_x = F\cos\theta = 50 \cdot 0{,}80 \\ F_y = F\,\text{sen}\,\theta = 50 \cdot 0{,}60 \end{cases} \qquad \begin{matrix} F_x = 40\,N \\ F_y = 30\,N \end{matrix}$$

Portanto, a força $\vec{F}$ pode ser substituída pelas forças $\vec{F}_x$ e $\vec{F}_y$, isto é, as forças $\vec{F}_x$ e $\vec{F}_y$, atuando *juntas*, produzem o mesmo efeito que a força $\vec{F}$, atuando *sozinha*.

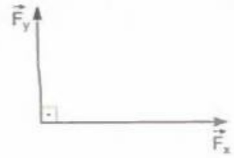


Fig. 36

Como escolher as direções de decomposição

Ao analisarmos as forças que atuam em uma partícula, poderemos "sentir" a conveniência de decompor uma ou mais forças; mas aí surge a pergunta: "que direções deveremos usar para efetuar a decomposição?". Para responder a essa pergunta, consideraremos dois casos:

1º caso	*A partícula tem aceleração $\vec{a}$ não nula.*

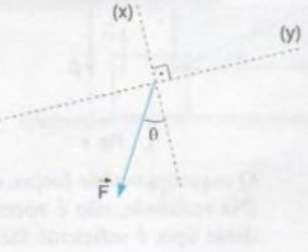
Nesse caso, o mais conveniente, em geral, é considerarmos direções perpendiculares tais que uma delas seja *coincidente* com a direção da aceleração $\vec{a}$.

2º caso	*A partícula tem aceleração nula, isto é, está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme.*

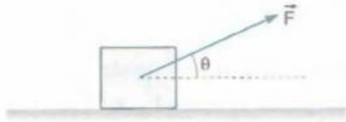
Nesse caso, em princípio, qualquer par de direções perpendiculares poderá ser usado. A escolha será ditada pela "economia", isto é, escolheremos aquele par de direções que nos permita fazer o *menor número de decomposições*. Esse caso será analisado com detalhe no capítulo 12 (Estática).

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

54. Consideremos a força $\vec{F}$ e as direções x e y indicadas na figura. Calcule os módulos das componentes de $\vec{F}$ ao longo das direções x e y, sabendo que $|\vec{F}| = 70\,N$, $\text{sen}\,\theta = 0{,}80$ e $\cos\theta = 0{,}60$.



55 Um bloco de massa m = 15 kg está inicialmente em repouso sobre um plano horizontal sem atrito, num local em que $g = 10\,m/s^2$. A partir de determinado instante aplica-se ao bloco uma força constante $\vec{F}$, como mostra a figura $\left(\text{sen}\,\theta = \frac{5}{13} \text{ e } \cos\theta = \frac{12}{13}\right)$, sendo



$|\vec{F}| = 130\,N$. A partir do instante em que $\vec{F}$ é aplicada, calcule:

a) o módulo da força normal exercida pelo plano horizontal sobre o bloco;

b) o módulo da aceleração adquirida pelo bloco.

Resolução:

a) Suponhamos que o movimento do bloco seja retilíneo e horizontal, isto é, suponhamos que o bloco não perca o contato com o plano horizontal e assim sua aceleração $\vec{a}$ tenha direção horizontal (Fig. a). Mais adiante veremos se a hipótese está correta. As forças que atuam no bloco são o peso $\vec{P}$, a força normal $\vec{N}$ e a força $\vec{F}$ (Fig. b).

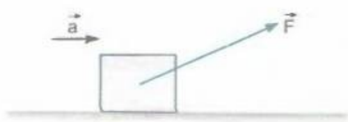


Fig. a

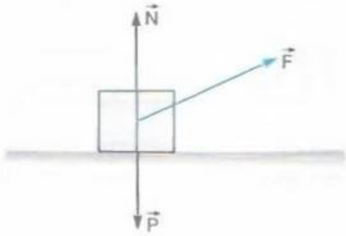


Fig. b

Temos: $P = m \cdot g = 15 \cdot 10 \qquad P = 150\,N$

Como estamos supondo que a aceleração $\vec{a}$ tem direção *horizontal*, vamos decompor a força $\vec{F}$ em duas direções perpendiculares tais que uma delas seja *horizontal* (Fig. c). Temos, então:

$$\begin{cases} F_x = F\cos\theta = 130 \cdot \dfrac{12}{13} & \boxed{F_x = 120\,N} \\ F_y = F\,\text{sen}\,\theta = 130 \cdot \dfrac{5}{13} & \boxed{F_y = 50\,N} \end{cases}$$

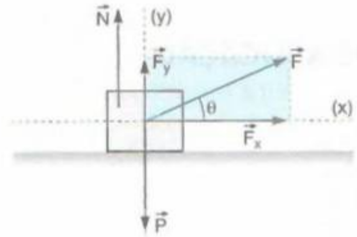


Fig. c

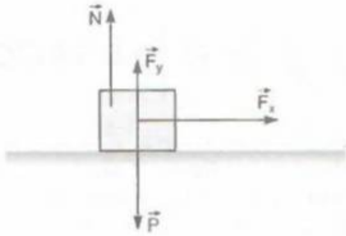


Fig. d

O esquema *real* de forças, que é o da Fig. b, é então substituído pelo esquema da Fig. d. (Na realidade, não é necessário fazer todos esses desenhos ao resolver um problema desse tipo; é suficiente fazer o desenho da Fig. c.)

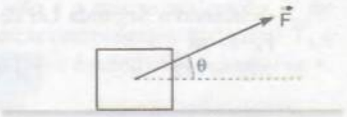
É nesse momento que percebemos se nossa hipótese de que o bloco não perde contato com o plano horizontal é ou não correta. O bloco perderia o contato se $F_y > P$. Mas, como podemos observar, neste caso temos $F_y < P$. Portanto, o bloco não perde o contato, o que significa que, na direção vertical, as forças devem se anular:

$N + F_y = P$
$N + 50 = 150$ $\qquad$ $N = 100$ newtons

b) A força resultante é a força componente $\vec{F}_x$. Portanto:

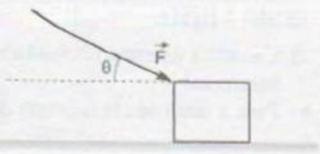
$F_x = m \cdot a$
$120 = 15 \cdot a$ $\qquad$ $a = 8{,}0\,m/s^2$

56. Consideremos um bloco de massa $m = 20$ kg, inicialmente em repouso sobre uma superfície plana e horizontal sem atrito, num local em que $g = 10\,m/s^2$. A partir de determinado instante, aplica-se ao bloco uma força constante $\vec{F}$, como mostra a figura ($\text{sen}\,\theta = 0{,}60$ e $\cos\theta = 0{,}80$), cuja intensidade é $F = 100$ N. A partir do instante em que $\vec{F}$ é aplicada, calcule:



a) o módulo da força normal exercida pela superfície horizontal sobre o bloco;
b) o módulo da aceleração do bloco.

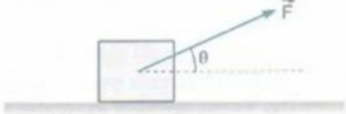
57. Um bloco de massa 6,0 kg está inicialmente em repouso sobre uma superfície plana e horizontal sem atrito. A partir de determinado instante, aplicamos ao bloco uma força constante $\vec{F}$, como mostra a figura, cuja intensidade é $F = 200$ N. São dados: $g = 10\,m/s^2$, $\text{sen}\,\theta = 0{,}40$ e $\cos\,\theta = 0{,}90$.



A partir do instante de aplicação de $\vec{F}$, calcule:

a) o módulo da força normal exercida pela superfície horizontal sobre o bloco;
b) o módulo da aceleração do bloco.

58. Consideremos um bloco de massa $m = 12$ kg, inicialmente em repouso sobre um plano horizontal sem atrito, num local em que $g = 10\,m/s^2$. A partir de determinado instante, aplicamos ao bloco uma força $\vec{F}$ de direção e sentido constantes, como indica a figura ($\text{sen}\,\theta = 0{,}60$ e $\cos\,\theta = 0{,}80$).



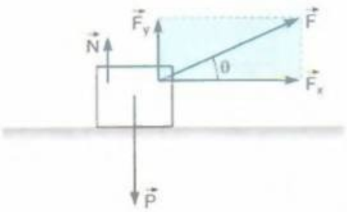
a) Calcule a máxima intensidade que pode ter a força $\vec{F}$, de modo que o bloco não perca o contato com o plano horizontal.
b) Para a intensidade máxima de $\vec{F}$, obtida no item *a*, calcule a aceleração do bloco.

Resolução:

a) Temos, então:

$P = m \cdot g = 12 \cdot 10$ $\qquad$ $P = 120\,N$

$$\begin{cases} F_x = F\cos\theta = F \cdot 0{,}80 \\ F_y = F\,\text{sen}\,\theta = F \cdot 0{,}60 \end{cases}$$



Enquanto o bloco se mantiver em contato com o plano horizontal, teremos:

$F_y + N = P$

Imaginemos agora que a intensidade de $\vec{F}$ vai aumentando a partir de zero. À medida que aumenta a intensidade de F, aumenta a intensidade de $\vec{F}_y$ e, portanto, diminui a intensidade de $\vec{N}$. Há, então, um valor de F para o qual $F_y = P$ e $N = 0$; nesse caso, o bloco ainda está em contato com o plano horizontal, mas não o comprime.

A partir daí, qualquer aumento de F fará com que o bloco adquira movimento para cima, perdendo o contato com o plano horizontal. Assim, para que o bloco não perca o contato com o plano horizontal, o valor máximo de F é aquele para o qual:

$$F_y = P$$
$$F \cdot 0{,}60 = 120$$
ou $F = 200\,N$

Portanto, $\boxed{F_{máximo} = 200\ N}$

b) A resultante das forças que agem no bloco é $\vec{F}_x$. Mas para $F = F_{máximo}$, teremos:

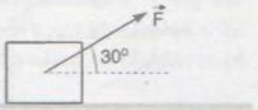
$F_x = F \cdot 0{,}80 = 200 \cdot 0{,}80$ $\quad F_x = 160\ N$

Aplicando a Segunda Lei de Newton, temos:

$F_x = m \cdot a$

$160 = 12 \cdot a$ $\quad \boxed{a \cong 13\,m/s^2}$

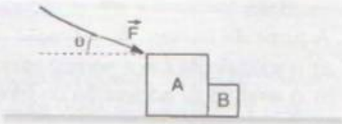
59. Um bloco de massa $m = 4{,}0\,kg$ está inicialmente em repouso sobre uma superfície plana e horizontal sem atrito, num local em que $g = 10\,m/s^2$. A partir de determinado instante, aplicamos ao bloco uma força $\vec{F}$ de direção e sentido constantes, como mostra a figura.



a) Calcule a máxima intensidade de $\vec{F}$, de modo que o bloco não perca o contato com a superfície horizontal.

b) Para a intensidade máxima de $\vec{F}$, obtida no item *a*, calcule a aceleração do bloco.

60. Consideremos dois blocos, *A* e *B*, de massas respectivamente iguais a 20 kg e 10 kg, inicialmente em repouso sobre um plano horizontal sem atrito, encostados um no outro. A partir de determinado instante, aplicamos ao bloco *A* uma força constante $\vec{F}$, de intensidade $F = 60\,N$, como mostra a figura. São dados: $g = 10\,m/s^2$, sen $\theta = 0{,}40$ e cos $\theta = 0{,}90$. Calcule as intensidades:



a) da aceleração do sistema;

b) da força exercida pelo bloco *A* sobre o bloco *B*;

c) das forças normais exercidas pelo plano horizontal sobre os blocos *A* e *B*.

61 Um pêndulo simples é constituído por uma partícula de massa *m* presa em uma das extremidades de um fio ideal cuja outra extremidade está presa a um ponto *O*. Consideremos um pêndulo simples pendendo verticalmente, preso ao teto de um vagão inicialmente em repouso (Fig. a).

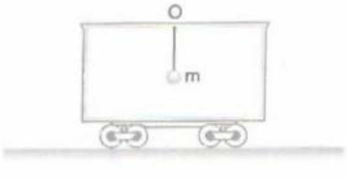


Fig. a

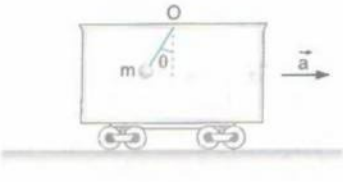


Fig. b

Suponhamos que, a partir de determinado instante, o vagão adquira movimento retilíneo acelerado, com a aceleração constante $\vec{a}$ (Fig. b). Pela Lei da Inércia, a partícula que estava em repouso "tende a" ficar em repouso. Isso ocasiona a inclinação do fio, mostrada na Fig. b. Enquanto o vagão mantiver a aceleração $\vec{a}$, o fio permanecerá inclinado e *em repouso em relação ao vagão*, mantendo com a vertical um ângulo θ. Seja g o módulo da aceleração da gravidade. Determine, em função de m, g e θ:

a) o módulo da aceleração; b) o módulo da tração no fio.

Resolução:

a) 1º modo

As forças que atuam sobre a partícula são o peso $\vec{P}$ e a tração $\vec{T}$ do fio (Fig. c). Como a partícula permanece em repouso em relação ao vagão, sua trajetória em relação ao solo é retilínea horizontal e sua aceleração em relação ao solo é a mesma aceleração $\vec{a}$ do vagão. Vamos então decompor a tração $\vec{T}$ em duas forças componentes: horizontal $\vec{T}_x$ e vertical $\vec{T}_y$ (Fig. d). Com isso, o esquema de forças da Fig. c é substituído pelo da Fig. e.

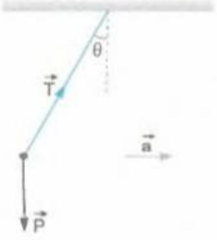


Fig. c

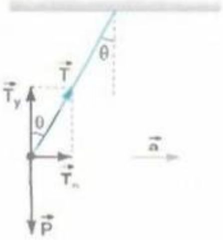


Fig. d

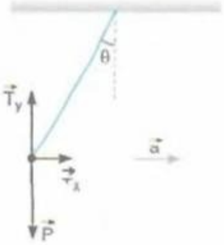


Fig. e

$P = m \cdot g$ $\quad T_x = T \cdot \text{sen}\,\theta$ $\quad T_y = T \cdot \cos\theta$

Como não há movimento na direção vertical, $\vec{T}_y$ e $\vec{P}$ devem se anular:

$T_y = P$ ou $T \cdot \cos\theta = m \cdot g$ (I)

Assim, a resultante das forças que agem sobre a partícula é a força componente T_x. Aplicando a Segunda Lei de Newton:

$T_x = m \cdot a$ ou $T \cdot \text{sen}\,\theta = m \cdot a$ (II)

Dividindo membro a membro as igualdades (I) e (II), obtemos:

$$\frac{T \cdot \cos\theta}{T \cdot \text{sen}\,\theta} = \frac{m \cdot g}{m \cdot a} \implies \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} = \frac{g}{a} \implies a = g \cdot \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$$

Lembrando que $\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \text{tg}\,\theta$, temos: $\boxed{a = g \cdot \text{tg}\,\theta}$

2º modo

Como a aceleração da partícula em relação ao solo é igual à aceleração $\vec{a}$ do vagão, a resultante $\vec{F}$ das forças $\vec{T}$ e $\vec{P}$ deve ter a mesma direção e o mesmo sentido de $\vec{a}$ (Fig. f). O triângulo sombreado na Fig. f está separado na Fig. g. Desse triângulo tiramos:

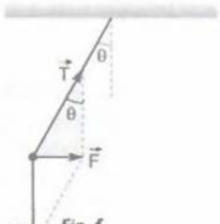


Fig. f

Fig. g

$$\text{tg}\,\theta = \frac{F}{P} \qquad \text{(III)}$$

Mas $P = m \cdot g$ e $F = m \cdot a$ (pois $\vec{F}$ é a força resultante). Substituindo em (III):

$$\text{tg}\,\theta = \frac{m \cdot a}{m \cdot g} = \frac{a}{g}$$

Portanto: $\boxed{a = g \cdot \text{tg}\,\theta}$

Vemos, então, que o ângulo θ não depende da massa da partícula: depende apenas de g e a. Por isso, o pêndulo simples pode ser usado como um *acelerômetro*: conhecido o valor de g e o valor de θ, determinamos a aceleração do vagão. Podemos observar também que quanto maior o valor de a, maior será o valor de tg θ e, portanto, maior será o valor de θ. Porém, o valor de θ não poderá chegar a 90°, isto é, o fio não poderá ficar na direção horizontal. Podemos entender isso facilmente observando a Fig. e: o fio deve ter uma inclinação θ diferente de 90°, para que haja uma força componente vertical $\vec{T}_y$ (não nula) que anule o peso. Concluímos, então, que o fio só ficaria na direção horizontal se P = 0, isto é, se g = 0.

b) Do triângulo sombreado da Fig. g temos:

$$\cos\theta = \frac{P}{T} \implies T = \frac{P}{\cos\theta} \implies \boxed{T = \frac{mg}{\cos\theta}}$$

Poderíamos também ter usado a Fig. d, impondo $T_y = P$:

$$T_y = P \implies T \cdot \cos\theta = mg \implies T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

Supondo conhecida a aceleração $\vec{a}$, poderíamos tirar da Fig. g:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{F}{T} \implies T = \frac{F}{\text{sen}\,\theta} \implies T = \frac{m \cdot a}{\text{sen}\,\theta}$$

Novamente supondo conhecida a aceleração, poderíamos também aplicar o Teorema de Pitágoras ao triângulo da Fig. g:

$$T^2 = P^2 + F^2 = (mg)^2 + (ma)^2 = m^2(g^2 + a^2)$$

ou $$\boxed{T = m\sqrt{g^2 + a^2}}$$

62. Um vagão move-se sobre trilhos retos e horizontais, com movimento uniformemente acelerado, numa região em que $g = 10\,m/s^2$. Preso ao teto do vagão há um pêndulo simples que se mantém em repouso em relação ao vagão, formando ângulo θ com a vertical. São dados: sen θ = 0,60 e cos θ = 0,80. Sabendo que a massa da partícula presa ao fio é m = 4,0 kg, calcule:

a) o módulo da aceleração do vagão;
b) o módulo da tração no fio.

63. Consideremos um veículo que se move sobre uma estrada plana horizontal, em movimento retilíneo uniformemente acelerado cuja aceleração é $a = 8{,}1\,m/s^2$. No teto do veículo está preso um pêndulo simples que se mantém em repouso em relação ao veículo. Determine o ângulo formado pelo pêndulo com a direção vertical. É dado $g = 10\,m/s^2$.

64. Consideremos um vagão movimentando-se sobre trilhos retos e horizontais, com velocidade constante. No teto do vagão está preso um pêndulo simples, com o fio na vertical, em repouso em relação ao vagão. A partir de determinado instante, o vagão adquire movimento retardado, de aceleração $\vec{a}$, até parar.

a) O que ocorrerá com o pêndulo enquanto o vagão estiver em movimento retardado?
b) O que ocorrerá com o pêndulo quando o vagão parar?

Resolução:

a) Pela Lei da Inércia, assim que o vagão começa a retardar, a tendência da partícula presa ao fio é manter a velocidade original. Isso faz com que o fio se incline "para a frente", isto é, no sentido do movimento retardado, como mostra a Fig. a. (Como o movimento é retardado, o sentido da aceleração é oposto ao sentido do movimento.) É fácil concluir que, do mesmo modo que no caso do movimento acelerado, teremos:
$a = g \cdot tg\,\theta$

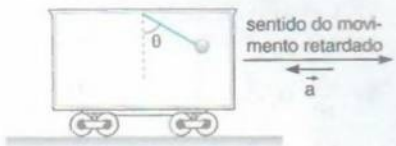


Fig. a

b) Assim que o vagão parar, a tendência do fio será voltar para a posição vertical; com isso, ficará oscilando entre duas posições A e B, como ilustra a Fig. b. Suponhamos que, depois de se retardar durante algum tempo, o vagão ficasse novamente com velocidade constante mas não nula; também nesse caso o pêndulo ficaria oscilando.

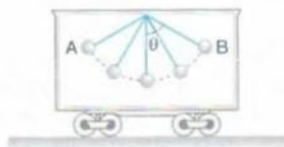
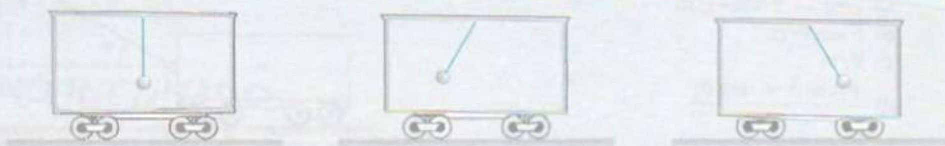


Fig. b

65. Cada uma das figuras a seguir representa um vagão (que pode mover-se sobre trilhos retos e horizontais), com um pêndulo simples pendurado no seu teto, estando o pêndulo em repouso em relação ao vagão.



(I) (II) (III)

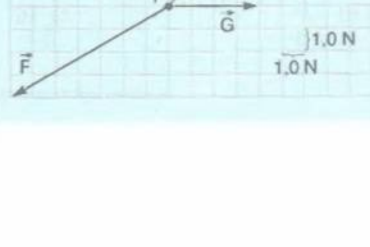
Para cada uma das situações propostas a seguir, indique qual é a figura correspondente.

a) O vagão está em repouso.
b) O vagão tem velocidade constante.
c) O vagão move-se para a direita em movimento acelerado.
d) O vagão move-se para a direita em movimento retardado.
e) O vagão move-se para a esquerda em movimento acelerado.
f) O vagão move-se para a esquerda em movimento retardado.

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

66. (FCMSC-SP) As forças $\vec{F}$, $\vec{G}$ e $\vec{H}$ representadas na figura estão aplicadas ao ponto P. O módulo da resultante dessas forças é igual a:

a) zero
b) 1,0 N
c) 2,0 N
d) 3,0 N
e) 4,0 N



67. (FEI-SP) Um carrinho de massa 100 kg está sobre trilhos e é puxado por dois homens que aplicam forças $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ conforme a figura abaixo. Qual é a aceleração do carrinho, sendo dados $|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}| = 20$ N?

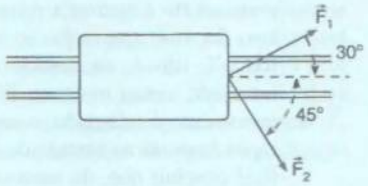
a) $0{,}31\ m/s^2$

b) $\frac{\sqrt{5}}{10}\ m/s^2$

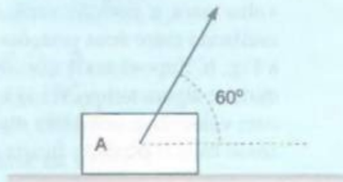
c) $\frac{\sqrt{6}}{10}\ m/s^2$

d) $0{,}5\ m/s^2$

e) $0{,}6\ m/s^2$



68. (UF-PB) O corpo *A* da figura ao lado tem 2,0 kg de massa e desliza num plano horizontal sem atrito, sob a ação de uma força de 20 N, que faz um ângulo de 60° com o plano. A aceleração do corpo, em m/s^2, será:
(adote $g = 10\ m/s^2$)



a) 10
b) 40
c) 5,0
d) 20
e) 15

69. (FATEC-SP) O carrinho de massa *m* move-se na horizontal, puxado pela força $\vec{F}$. Entre o carrinho e a pista não há atrito e a aceleração local da gravidade é *g*. A aceleração do carrinho é:

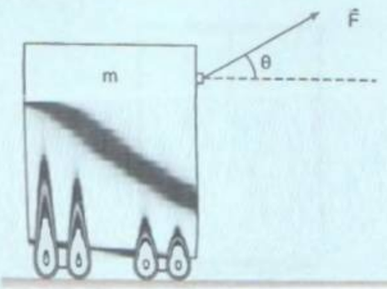
a) $(mg - F\,\text{sen}\,\theta)/m$

b) $F\,\text{sen}\,\theta/m$

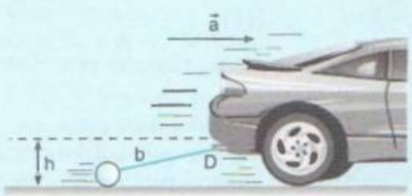
c) F/m

d) $F(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)$

e) $F\cos\theta/m$

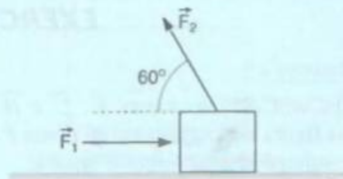


70. Um veículo move-se sobre uma estrada plana horizontal, com movimento acelerado, de aceleração $\vec{a}$. De um ponto *D* de sua traseira pende um fio ideal de comprimento *b*, o qual arrasta uma bolinha de massa *m*.
São dados: $g = 10\ m/s^2$, $b = 1{,}3$ m e $h = 0{,}50$ m.
Calcule o máximo valor de *a*, de modo que a bolinha não perca o contato com a estrada.



71. (FEI-SP) Duas forças de mesma intensidade, $F_1 = F_2 = 40$ N, são aplicadas a um corpo de massa $m = 10$ kg num plano horizontal sem atrito. $\vec{F_1}$ é horizontal e $\vec{F_2}$ forma ângulo de 60° com a horizontal. A aceleração do corpo, na posição da figura, vale (em m/s^2): (adote $g = 10\ m/s^2$)

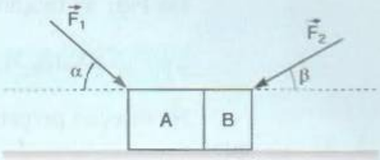
a) 0
b) 2,0
c) 4,0
d) 8,0
e) 18



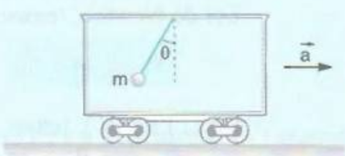
72. Os blocos A e B da figura têm massas respectivamente iguais a 6,0 kg e 4,0 kg. Aplicam-se aos blocos as forças constantes $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, de intensidades respectivamente iguais a 300 N e 100 N, como mostra a figura. São dados: $g = 10\,m/s^2$, $\cos\alpha = 0{,}30$ e $\cos\beta = 0{,}70$. Desprezando os atritos, calcule as intensidades:

a) da aceleração do sistema;

b) da força exercida pelo bloco A sobre o bloco B.



73. Um fio ideal tem uma de suas extremidades presa ao teto de um vagão que se move sobre trilhos retos e horizontais, com aceleração constante $\vec{a}$. Na outra extremidade do fio está presa uma partícula de massa $m = 5{,}0\,kg$. O fio permanece em repouso em relação ao vagão, formando com a vertical um ângulo θ, tal que $\text{sen}\,\theta = \frac{12}{13}$ e $\cos\theta = \frac{5}{13}$. Sabe-se ainda que $g = 10\,m/s^2$.



a) Calcule o módulo de $\vec{a}$.

b) Calcule o módulo da tração no fio.

74. (ITA-SP) Um vagão desloca-se horizontalmente, em linha reta, com aceleração $\vec{a}$ constante. Um pêndulo simples está suspenso do teto do vagão, sem oscilar e formando ângulo θ com a vertical. Sendo g a aceleração da gravidade e m a massa do pêndulo, a tensão F no fio do pêndulo é:

a) $F = m \cdot g \cdot \cos\theta$

b) $F = m \cdot a \cdot \text{sen}\,\theta$

c) $F = m\sqrt{a^2 + g^2}$

d) $F = m(g \cdot \cos\theta - a \cdot \text{sen}\,\theta)$

e) $F = m(g \cdot \text{sen}\,\theta + a \cdot \cos\theta)$

5. PLANO INCLINADO

Consideremos um bloco de massa m, abandonado em repouso sobre uma superfície S, plana e sem atrito, a qual forma um ângulo θ com um plano horizontal (Fig. 37). As forças que atuam no bloco são o seu peso $\vec{P}$ e a força normal $\vec{N}$ exercida pela superfície S sobre o bloco (Fig. 38):

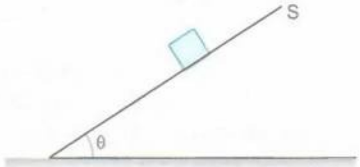


Fig. 37

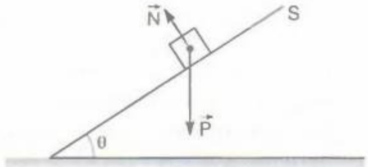


Fig. 38

Podemos decompor o peso em duas componentes: uma componente $\vec{P_t}$, tangente à superfície S, e outra componente $\vec{P_n}$, perpendicular a S (Fig. 39). Após a decomposição, o sistema de forças da Fig. 38 foi substituído pelo sistema representado na Fig. 40.

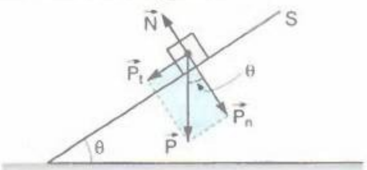


Fig. 39

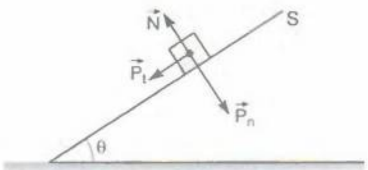


Fig. 40

Da Fig. 39 tiramos:

$P_t = P \cdot \text{sen}\,\theta$ (I) e $P_n = P \cdot \cos\theta$ (II)

Na direção perpendicular a *S* não há movimento, o que nos leva a concluir que:

$N = P_n$ (III)

Assim, a força resultante é a componente $\vec{P_t}$ e o bloco deve descer em movimento acelerado, de aceleração $\vec{a}$ (Fig. 41). Aplicando a Segunda Lei de Newton, temos:

$P_t = m \cdot a$ (IV)

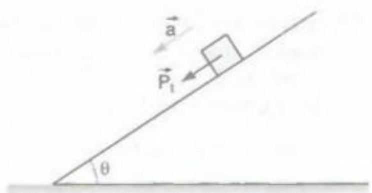


Fig. 41

De (I) e (IV), temos

$P \cdot \text{sen}\,\theta = m \cdot a$ ou $m \cdot g\,\text{sen}\,\theta = m \cdot a$

ou, ainda, $a = g \cdot \text{sen}\,\theta$ (V)

É importante observar na igualdade (V) que a aceleração não depende da massa do bloco.

Se lançarmos o bloco de baixo para cima sobre a superfície, com velocidade inicial $\vec{v_0}$ (Fig. 42), o bloco sobe em movimento retardado até o instante em que a velocidade se torna nula. A partir desse instante, o bloco desce em movimento acelerado. Porém, tanto na subida como na descida, a força resultante $\vec{P_t}$ e a aceleração $\vec{a}$ têm os sentidos indicados na Fig. 41 e o módulo de $\vec{a}$ é dado pela igualdade (V).

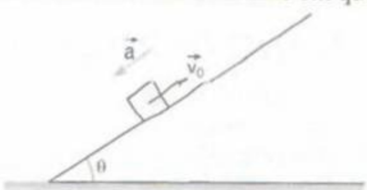


Fig. 42

Observação

Pode acontecer de a inclinação de um plano inclinado vir na forma de porcentagem. Consideremos um plano inclinado que forma ângulo θ com um plano horizontal. Dizer que "a inclinação do plano inclinado é x%" significa que "$\text{tg}\,\theta = x\%$".

Exemplo:

Consideremos o plano inclinado da Fig. 43.

Consultando a tabela do final do livro, encontramos:

$\text{tg}\,22^\circ \cong 0{,}40$

Mas $0{,}40 = \dfrac{40}{100} = 40\%$.

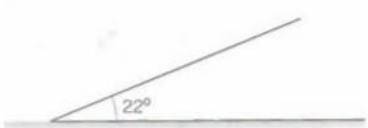
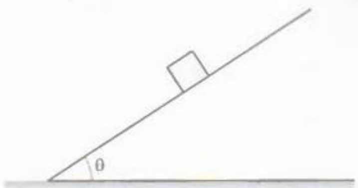


Fig. 43

Assim, podemos dizer que a inclinação desse plano inclinado é aproximadamente igual a 40%.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

75 Um bloco de massa m = 20 kg é abandonado sobre um plano inclinado sem atrito, como mostra a figura, numa região em que a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10\,m/s^2$. Sabendo que $\theta = 30°$, determine:



a) a intensidade da força normal exercida pelo plano inclinado sobre o bloco;

b) o módulo da aceleração adquirida pelo bloco.

Resolução:

a) As forças que atuam sobre o bloco são o seu peso ($\vec{P}$) e a força normal ($\vec{N}$) exercida pelo plano inclinado, conforme ilustra a Fig. a.

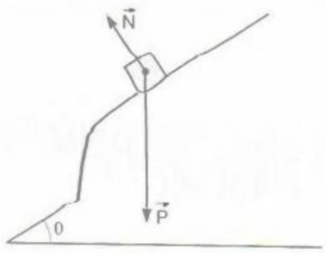


Fig. a

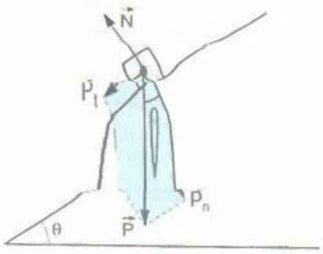


Fig. b

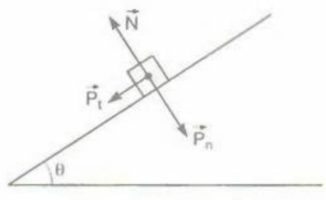


Fig. c

Temos: $P = m \cdot g = 20 \cdot 10 \qquad P = 200\,N$

Podemos decompor o peso $\vec{P}$ em uma força componente paralela ao plano inclinado ($\vec{P_t}$) e outra perpedincular ao plano inclinado ($\vec{P_n}$), conforme mostra a Fig. b. Como vimos na teoria, temos:

$$\begin{cases} P_t = P \cdot \operatorname{sen}\theta = P \cdot \operatorname{sen} 30° = 200 \cdot \dfrac{1}{2} \\ P_n = P \cdot \cos\theta = P \cdot \cos 30° = 200 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \text{ isto é: } \begin{cases} P_t = 100\,N \\ P_n = 100 \cdot \sqrt{3}N \end{cases}$$

Com a decomposição feita, o esquema de forças da Fig. a é substituído pelo esquema da Fig. c.

Na direção perpendicular ao plano inclinado não há movimento. Portanto:

$N = P_n$, isto é:

$$\boxed{N = 100 \cdot \sqrt{3} \text{ newtons}}$$

b) 1º modo

A resultante das forças que atuam no bloco é $\vec{P_t}$. Portanto, aplicando a Segunda Lei de Newton, temos:

$P_t = m \cdot a$

isto é, $a = \frac{P_t}{m} = \frac{100}{20}$ ou $a = 5{,}0\,m/s^2$

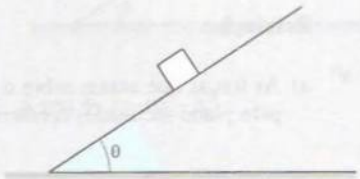
2º modo

Poderíamos ter usado o resultado obtido na teoria:

$a = g \cdot sen\,\theta = g \cdot sen\,30^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2}$ $a = 5{,}0\,m/s^2$

76. Um bloco de massa $m = 5{,}0\,kg$ é abandonado sobre um plano inclinado sem atrito, como mostra a figura, numa região em que a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10\,m/s^2$. Sabendo que $sen\,\theta = 0{,}60$ e $cos\,\theta = 0{,}80$, determine:

a) a intensidade da força normal exercida pelo plano inclinado sobre o bloco;
b) o módulo da aceleração adquirida pelo bloco.



77. Um bloco é abandonado sobre um plano inclinado de 75%, numa região em que $g = 10\,m/s^2$. Desprezando o atrito, calcule o módulo da aceleração adquirida pelo bloco.

Resolução:

Seja θ o ângulo formado pelo plano inclinado com um plano horizontal (Fig. a). Dizer que "a inclinação do plano é 75%" significa que "$tg\,\theta = 75\%$", isto é:

$tg\,\theta = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

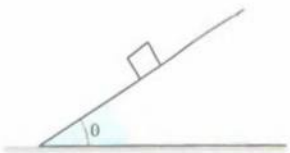


Fig. a

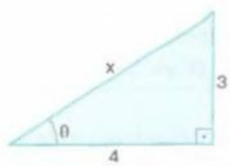


Fig. b

Para obter rapidamente o valor de *sen* θ, podemos considerar um triângulo retângulo em que um dos ângulos internos seja θ, o cateto oposto a θ tenha medida igual a 3 e o cateto adjacente a θ tenha medida igual a 4 (Fig. b). Desse modo, temos $tg\,\theta = \frac{3}{4}$. Aplicando o teorema de Pitágoras a esse triângulo retângulo, temos $x^2 = 3^2 + 4^2$, donde obtemos $x = 5$. Assim:

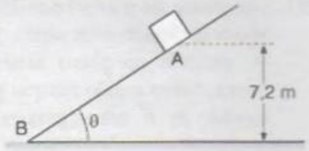
$sen\,\theta = \frac{3}{x} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

Portanto, a aceleração adquirida pelo bloco tem módulo *a* dado por:

$a = g \cdot sen\,\theta = 10 \cdot 0{,}6$ $a = 6{,}0\,m/s^2$

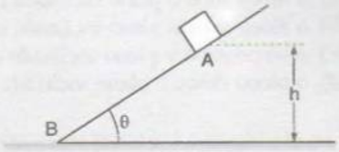
78. Uma partícula é abandonada sobre um plano inclinado de 50%. Desprezando o atrito e adotando $g = 10\,m/s^2$, calcule o módulo da aceleração adquirida pelo bloco.

79. Uma partícula é abandonada em um ponto A de um plano inclinado, conforme mostra a figura, no instante $t = 0$. Sabe-se que $g = 10\,m/s^2$ e sen $\theta = 0{,}40$. Desprezando o atrito, determine:

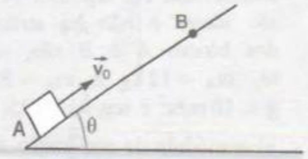


a) o instante em que a partícula atinge o ponto B;
b) o módulo da velocidade da partícula ao atingir o ponto B.

80. Uma partícula é abandonada em um ponto A de um plano que forma ângulo θ com um plano horizontal, conforme mostra a figura, numa região em que a aceleração da gravidade tem módulo g. Não há atrito. Calcule, em função de h, g e θ, o intervalo de tempo gasto pela partícula para atingir o ponto B.

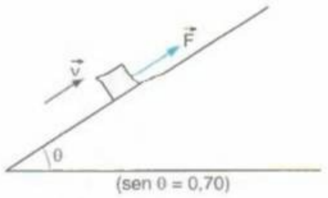


81. Uma partícula é lançada com velocidade inicial v_0 sobre um plano inclinado sem atrito, conforme mostra a figura, numa região em que a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10\,m/s^2$. São dados $v_0 = 12\,m/s$ e sen $\theta = 0{,}30$.



a) Determine o módulo da aceleração da partícula, durante a subida.
b) Determine o intervalo de tempo decorrido desde o instante em que a partícula é lançada até o instante em que ela pára.
c) Sendo B o ponto do plano inclinado em que a partícula pára, determine a distância AB.

82. Uma partícula de massa $m = 2{,}0\,kg$ sobe um plano inclinado, como mostra a figura, puxada por uma força $\vec{F}$ de intensidade $F = 22\,N$, paralela ao plano inclinado. Sendo $g = 10\,m/s^2$, calcule o módulo da aceleração da partícula. (Despreze o atrito.)

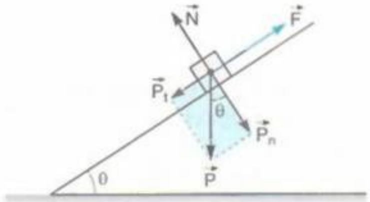


(sen θ = 0,70)

Resolução:

Além de $\vec{F}$, atuam sobre a partícula o seu peso ($\vec{P}$) e a força normal ($\vec{N}$) exercida pelo plano inclinado.

$P = m \cdot g = 2{,}0 \cdot 10 \qquad P = 20\,N$



Podemos decompor o peso em duas componentes: uma componente paralela ao plano inclinado ($\vec{P}_t$) e outra perpendicular ao plano inclinado ($\vec{P}_n$). Não havendo movimento na direção perpendicular ao plano inclinado, devemos ter $N = P_n$. Temos, então:

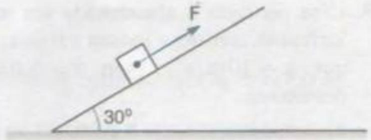
$P_t = P \cdot \text{sen}\,\theta = 20 \cdot 0{,}70 \qquad P_t = 14\,N$

Apliquemos a Segunda Lei de Newton (observando que $F > P_t$):

$F - P_t = m \cdot a$

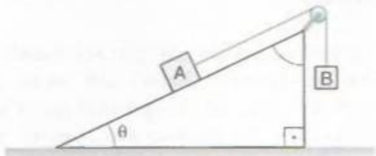
$22 - 14 = 2{,}0 \cdot a \qquad \boxed{a = 4{,}0\,m/s^2}$

83. Um bloco de massa m = 15 kg move-se sobre um plano inclinado sem atrito, puxado por uma força $\vec{F}$ paralela ao plano inclinado, como mostra a figura, numa região em que $g = 10\,m/s^2$. Calcule o módulo de $\vec{F}$ nos seguintes casos:



a) o bloco sobe o plano inclinado em movimento acelerado, com aceleração de módulo $4{,}0\,m/s^2$;
b) o bloco sobe o plano inclinado em movimento retardado, com aceleração de módulo $4{,}0\,m/s^2$;
c) o bloco sobe o plano inclinado com velocidade constante;
d) o bloco desce o plano inclinado com velocidade constante.

84 O sistema esquematizado na figura é abandonado em repouso. A polia e o fio são ideais e não há atrito. As massas dos blocos *A* e *B* são, respectivamente, $m_A = 12\,kg$ e $m_B = 8{,}0\,kg$. Sendo $g = 10\,m/s^2$ e sen $\theta = 0{,}25$, calcule:



a) o módulo da aceleração de cada bloco e o módulo da tração no fio;
b) o módulo da força exercida pelo fio sobre a polia.

Resolução:

a) Sejam $\vec{P_A}$ e $\vec{P_B}$ os pesos dos blocos *A* e *B*, respectivamente. Temos:

$$\begin{cases} P_A = m_A \cdot g = 12 \cdot 10 & P_A = 120\,N \\ P_B = m_B \cdot g = 8{,}0 \cdot 10 & P_B = 80\,N \end{cases}$$

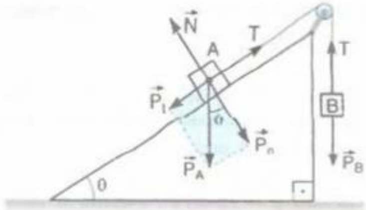


Fig. a

Podemos decompor $\vec{P_A}$ em uma componente paralela ao plano inclinado ($\vec{P_t}$) e uma componente perpendicular ao plano inclinado ($\vec{P_n}$). Temos:

$P_t = P_A \cdot \text{sen}\,\theta = 120 \cdot 0{,}25 \qquad P_t = 30\,N$

Como $P_B > P_t$, concluímos que, ao abandonar o sistema, o bloco *A* deve subir e o bloco *B* deve descer, isto é:

$P_B > T$ e $T > P_t$

Os dois blocos têm acelerações de mesmo módulo *a*.
Aplicando a Segunda Lei de Newton a cada bloco separadamente, temos:

$$\begin{cases} T - P_t = m_A \cdot a \\ P_B - T = m_B \cdot a \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} T - 30 = 12 \cdot a & \text{(I)} \\ 80 - T = 8{,}0 \cdot a & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtemos:

$\boxed{a = 2{,}5\,m/s^2}$ e $\boxed{T = 60\,N}$

Para obter de modo mais rápido a aceleração, poderíamos ter usado um artifício já empregado anteriormente: imaginar o sistema "esticado" e aplicar a Segunda Lei de Newton ao conjunto formado pelos blocos *A* e *B*.

Fig. b

$P_B - P_t = (m_A + m_B) \cdot a$

$80 - 30 = 20 \cdot a$

$a = 2{,}5\,m/s^2$

Porém, para obter a intensidade da tração no fio, teríamos de recorrer à equação (I) ou à equação (II).

b) Seja $\vec{F}$ a força exercida pelo fio sobre a polia.

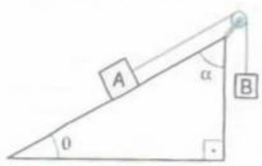


Fig. c

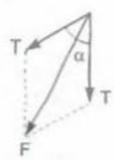


Fig. d

Observando a Fig. d e aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$F^2 = T^2 + T^2 + 2 \cdot T \cdot T \cdot \cos\alpha$$

ou $F^2 = 2T^2 + 2T^2 \cdot \cos\alpha$

ou, ainda, $F^2 = 2T^2(1 + \cos\alpha)$ (III)

Os ângulos α e θ são complementares (ver Fig. c) e, portanto:

$\cos\alpha = \operatorname{sen}\theta = 0{,}25$

Já sabemos também que $T = 60\,N$. Substituindo esses valores na igualdade (III), temos:

$$F^2 = 2(60)^2(1 + 0{,}25)$$

$$F^2 = 9\,000$$

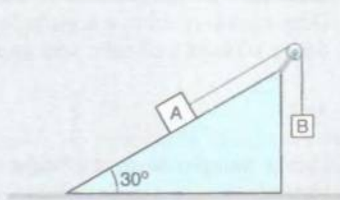
ou $F = 30\sqrt{10}\,N$

85. No sistema representado na figura, o fio e a polia são ideais e não há atrito. Os blocos *A* e *B* têm massas respectivamente iguais a 6,0 kg e 4,0 kg. Adotando $g = 10\,m/s^2$ e supondo que o sistema foi abandonado em repouso, determine:

a) o módulo da aceleração do bloco *B*;

b) o módulo da tração no fio;

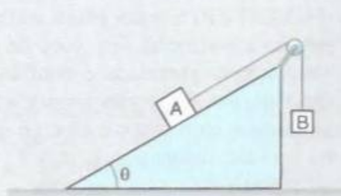
c) o módulo da força que o fio exerce na polia.



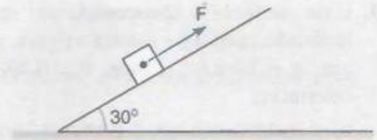
86. Os blocos *A* e *B* representados na figura têm massas iguais a *m*. O fio e a polia são ideais e a aceleração da gravidade tem módulo igual a *g*. Calcule, em função de *m*, *g* e *θ*:

a) o módulo da aceleração do bloco *B*;

b) o módulo da tração no fio.

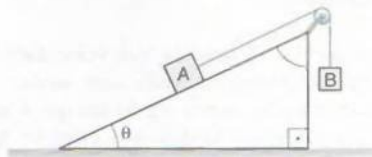


83. Um bloco de massa $m = 15\,kg$ move-se sobre um plano inclinado sem atrito, puxado por uma força $\vec{F}$ paralela ao plano inclinado, como mostra a figura, numa região em que $g = 10\,m/s^2$. Calcule o módulo de $\vec{F}$ nos seguintes casos:



a) o bloco sobe o plano inclinado em movimento acelerado, com aceleração de módulo $4{,}0\,m/s^2$;
b) o bloco sobe o plano inclinado em movimento retardado, com aceleração de módulo $4{,}0\,m/s^2$;
c) o bloco sobe o plano inclinado com velocidade constante;
d) o bloco desce o plano inclinado com velocidade constante.

84. O sistema esquematizado na figura é abandonado em repouso. A polia e o fio são ideais e não há atrito. As massas dos blocos *A* e *B* são, respectivamente, $m_A = 12\,kg$ e $m_B = 8{,}0\,kg$. Sendo $g = 10\,m/s^2$ e sen $\theta = 0{,}25$, calcule:



a) o módulo da aceleração de cada bloco e o módulo da tração no fio;
b) o módulo da força exercida pelo fio sobre a polia.

Resolução:

a) Sejam $\vec{P_A}$ e $\vec{P_B}$ os pesos dos blocos *A* e *B*, respectivamente. Temos:

$$\begin{cases} P_A = m_A \cdot g = 12 \cdot 10 & P_A = 120\,N \\ P_B = m_B \cdot g = 8{,}0 \cdot 10 & P_B = 80\,N \end{cases}$$

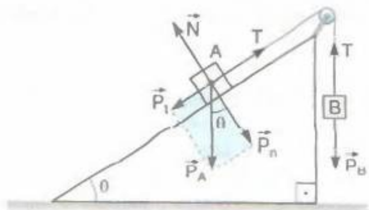


Fig. a

Podemos decompor $\vec{P_A}$ em uma componente paralela ao plano inclinado ($\vec{P_t}$) e uma componente perpendicular ao plano inclinado ($\vec{P_n}$). Temos:

$P_t = P_A \cdot \text{sen}\,\theta = 120 \cdot 0{,}25 \qquad P_t = 30\,N$

Como $P_B > P_t$, concluímos que, ao abandonar o sistema, o bloco *A* deve subir e o bloco *B* deve descer, isto é:

$P_B > T$ e $T > P_t$

Os dois blocos têm acelerações de mesmo módulo *a*.
Aplicando a Segunda Lei de Newton a cada bloco separadamente, temos:

$$\begin{cases} T - P_t = m_A \cdot a \\ P_B - T = m_B \cdot a \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} T - 30 = 12 \cdot a & \text{(I)} \\ 80 - T = 8{,}0 \cdot a & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtemos:

$a = 2{,}5\,m/s^2$ e $T = 60\,N$

Para obter de modo mais rápido a aceleração, poderíamos ter usado um artifício já empregado anteriormente: imaginar o sistema "esticado" e aplicar a Segunda Lei de Newton ao conjunto formado pelos blocos *A* e *B*.

Fig. b

$P_B - P_t = (m_A + m_B) \cdot a$

$80 - 30 = 20 \cdot a$

$a = 2{,}5\ m/s^2$

Porém, para obter a intensidade da tração no fio, teríamos de recorrer à equação (I) ou à equação (II).

b) Seja $\vec{F}$ a força exercida pelo fio sobre a polia.

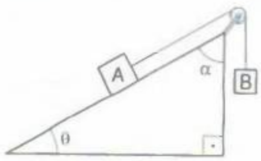


Fig. c

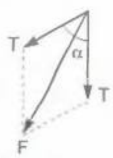


Fig. d

Observando a Fig. d e aplicando a lei dos cossenos, temos:

$F^2 = T^2 + T^2 + 2 \cdot T \cdot T \cdot \cos\alpha$

ou $F^2 = 2T^2 + 2T^2 \cdot \cos\alpha$

ou, ainda, $F^2 = 2T^2(1 + \cos\alpha)$ (III)

Os ângulos α e θ são complementares (ver Fig. c) e, portanto:

$\cos\alpha = \text{sen}\,\theta = 0{,}25$

Já sabemos também que $T = 60\ N$. Substituindo esses valores na igualdade (III), temos:

$F^2 = 2(60)^2(1 + 0{,}25)$

$F^2 = 9\,000$

ou $F = 30\sqrt{10}\ N$

85. No sistema representado na figura, o fio e a polia são ideais e não há atrito. Os blocos *A* e *B* têm massas respectivamente iguais a 6,0 kg e 4,0 kg. Adotando $g = 10\ m/s^2$ e supondo que o sistema foi abandonado em repouso, determine:

a) o módulo da aceleração do bloco *B*;

b) o módulo da tração no fio;

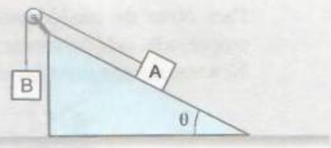
c) o módulo da força que o fio exerce na polia.

86. Os blocos *A* e *B* representados na figura têm massas iguais a *m*. O fio e a polia são ideais e a aceleração da gravidade tem módulo igual a *g*. Calcule, em função de *m*, *g* e *θ*:

a) o módulo da aceleração do bloco *B*;

b) o módulo da tração no fio.

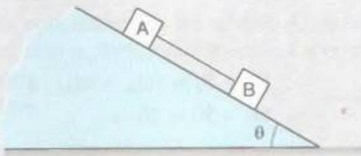
87. O bloco A da figura tem massa igual a 20 kg. O fio e a polia são ideais, o módulo da aceleração da gravidade é $10\,m/s^2$ e não há atrito. Determine a massa do bloco B, de modo que o sistema fique em equilíbrio.



(sen θ = 0,30)

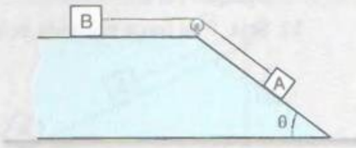
88. No sistema esquematizado na figura, os blocos A e B têm massas respectivamente iguais a m_A e m_B. A aceleração da gravidade tem módulo g, o fio é ideal e não há atrito. Determine:

a) o módulo da aceleração dos blocos;
b) o módulo da tração no fio.



89. Os blocos A e B da figura têm massas respectivamente iguais a 20 kg e 30 kg. O fio e a polia são ideais e não há atrito. Adotando $g = 10\,m/s^2$, calcule:

a) o módulo da aceleração do bloco A;
b) o módulo da tração no fio;
c) o módulo da força exercida pelo fio sobre a polia.

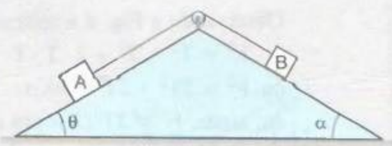


(sen θ = 0,60 e cos θ = 0,80)

Sugestão: Lembre que $\alpha + \theta = 180° \Rightarrow \cos\alpha = -\cos\theta$

90. No sistema representado a seguir, os blocos A e B têm massas respectivamente iguais a 7,0 kg e 3,0 kg. O fio e a polia são ideais e a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10\,m/s^2$. Desprezando o atrito, calcule:

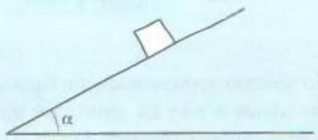
a) o módulo da aceleração do bloco A;
b) o módulo da tração no fio.



(sen θ = 0,50 e sen α = 0,60)

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

91. (PUC-RS) Uma partícula de massa m é abandonada num plano de inclinação α, num local em que a aceleração da gravidade tem módulo igual a g. Desprezando o atrito, a aceleração da partícula, ao descer o plano inclinado, será igual a:



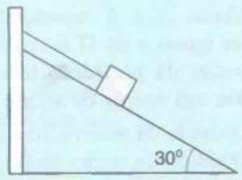
a) g b) $\frac{g}{2}$ c) $g \cdot \text{sen}\,\alpha$ d) $g \cdot \cos\alpha$ e) $g \cdot \text{tg}\,\alpha$

92. Para a situação do teste anterior, a intensidade da força exercida pelo plano inclinado sobre a partícula é:

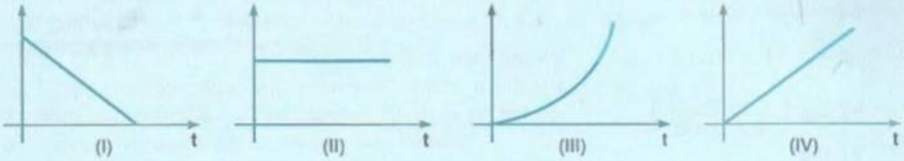
a) $mg\,\text{sen}\,\alpha$ b) $\frac{mg}{\cos\alpha}$ c) $mg\cos\alpha$ d) $\frac{mg}{\text{sen}\,\alpha}$ e) mg

93. (FUVEST-SP) Em um plano inclinado de 30° em relação à horizontal, um bloco de 10 kg de massa, sob a ação da gravidade, é mantido em repouso por meio de um fio, como mostra a figura. Desprezando-se o atrito entre o bloco e o plano, a tensão no fio vale: (adote $g = 10\,m/s^2$)

a) 100 N
b) 75 N
c) 50 N
d) 25 N
e) 10 N

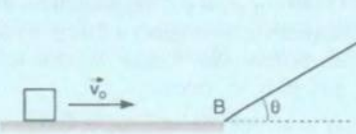


94. (FUVEST-SP) Considere o movimento de uma partícula abandonada em um plano inclinado sem atrito no instante $t = 0$. Entre os gráficos a seguir, o par que melhor representa, respectivamente, o módulo da velocidade e a distância percorrida em função do tempo é:



a) II e IV b) IV e III c) III e II d) I e II e) I e IV

95. (UF-GO) Um bloco desliza sobre um plano horizontal sem atrito com velocidade constante $\vec{v_0}$. Em seguida, ele sobe uma rampa de inclinação θ, também sem atrito, até parar no ponto C da figura. A distância BC percorrida ao longo da rampa é:



a) $\dfrac{v_0^2}{2 \cdot g \cdot tg\,\theta}$

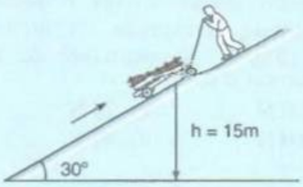
b) $\dfrac{v_0^2}{2 \cdot g \cdot \cos\theta}$

c) $\dfrac{2v_0^2}{g \cdot sen\,\theta}$

d) $\dfrac{v_0^2}{g \cdot sen\,\theta}$

e) $\dfrac{v_0^2}{2 \cdot g \cdot sen\,\theta}$

96. (UF-BA) Um garoto puxa um carrinho de massa 2,0 kg com velocidade de 10 m/s, por uma rampa de inclinação de 30°, conforme a figura. Ao atingir a altura $h = 15$ m o barbante se rompe. Sabendo que $g = 10\,m/s^2$, calcule o intervalo de tempo entre o instante do rompimento do barbante e a chegada do carrinho até a base da rampa. Despreze o atrito.



97. (VUNESP-SP) Um plano inclinado faz um ângulo de 30° com a horizontal. Determine a força constante que aplicada a um bloco de 50 kg, paralelamente ao plano, faz com que ele deslize:

a) para cima, em movimento acelerado, cuja aceleração é $1{,}2\,m/s^2$.

b) para baixo, em movimento acelerado de aceleração $1{,}2\,m/s^2$.
(Adote $g = 10\,m/s^2$.)

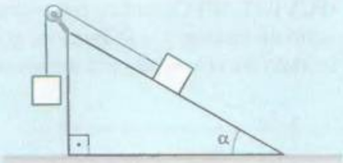
98. (UFJF-MG) Um carro é rebocado por outro, idêntico, através de uma corda ideal, mantendo o conjunto velocidade constante. O trajeto inclui algumas subidas. Sabe-se que a massa de cada carro é de 1 200 kg e que a corda suporta uma tração máxima de 6 000 N. Nessas condições, a subida de máxima inclinação (sem atrito) que o conjunto é capaz de transpor, sem que a corda se rompa, tem, em relação à horizontal, a inclinação de:
(Dado $g = 10\,m/s^2$)

a) 15° b) 30° c) 45° d) 60° e) 75°

99. (UNISA-SP) Um corpo de massa 15 kg é colocado sobre um plano inclinado de 3,0 m de altura e 5,0 m de comprimento, num local em que $g = 10\,m/s^2$. Desprezando o atrito, a intensidade de uma força paralela ao plano horizontal capaz de manter o corpo em equilíbrio é de:

a) 90 N b) 9,0 kgf c) 120 N d) 112,5 N

100. (ITA-SP) No sistema representado a seguir, são desprezíveis todos os atritos, a massa do fio e a massa da polia. Sendo m a massa de cada bloco e g e aceleração da gravidade, a tração no fio tem intensidade igual a:



a) $\frac{mg}{2}(1 + \text{sen}\,\alpha)$

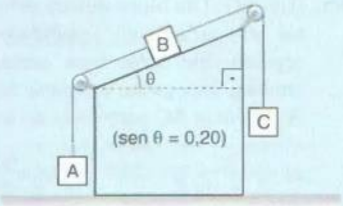
b) $mg\left(\frac{1 + \text{sen}^2\,\alpha}{1 + \text{sen}\,\alpha}\right)$

c) mg

d) $mg \cdot \text{sen}\,\alpha$

e) $mg \cdot \text{tg}\,\alpha$

101. Os blocos A, B e C representados na figura têm massas respectivamente iguais a 1,0 kg, 5,0 kg e 4,0 kg. Os fios e as polias são ideais e não há atrito. Adotando $g = 10\,m/s^2$, calcule:

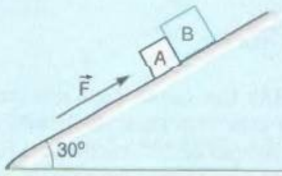


a) o módulo da aceleração do bloco B;

b) o módulo da tração no fio que liga os blocos A e B;

c) o módulo da tração no fio que liga os blocos B e C.

102. (Mackenzie-SP) Os corpos A e B da figura ao lado, cujas massas são respectivamente iguais a 2,0 kg e 4,0 kg, sobem a rampa em movimento uniforme, devido à força $\vec{F}$ paralela ao plano inclinado. Despreze os atritos e adote $g = 10\,m/s^2$. A intensidade da força que A exerce em B é:



a) 2,0 N

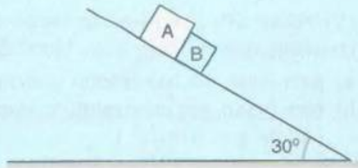
b) 3,0 N

c) 20 N

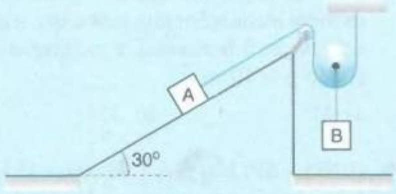
d) 30 N

e) 40 N

103. (UF-CE) Dois blocos, A e B, de massas respectivamente iguais a 20 kg e 10 kg, foram abandonados em um plano inclinado sem atrito, como ilustra a figura. Qual a intensidade da força de contato entre os blocos? (Adote $g = 10\,m/s^2$.)



104. (UFSC-SP) No sistema da figura ao lado, os fios são inextensíveis, as polias sem massa e as superfícies sem atrito. O ângulo que a hipotenusa da superfície de seção triangular faz com a horizontal é de 30°. Sabendo que a relação entre as massas dos corpos A e B é $m_A/m_B = \frac{1}{2}$ e considerando $g = 10\,m/s^2$, calcule:



a) a relação a_A/a_B entre as acelerações dos corpos A e B;

b) a aceleração dos corpos A e B.

EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

105. (UNICAMP-SP) O peso de um elevador juntamente com os passageiros tem intensidade P = 640 kgf e a força exercida no teto do elevador tem intensidade T = 768 kgf. Adote $g = 9{,}8\ m/s^2$.

a) Com essas informações, é possível dizer inequivocamente em que sentido o elevador está se movendo?

b) Calcule o módulo da aceleração do elevador.

106. (FUVEST-SP) A figura I indica um sistema composto por duas roldanas leves, capazes de girar sem atrito, e um fio inextensível que possui dois suportes em suas extremidades. O suporte *A* possui um certo número de formigas idênticas, com 20 miligramas cada. O sistema está em equilíbrio. Todas as formigas migram então para o suporte *B* e o sistema movimenta-se de tal forma que o suporte *B* se apóia numa mesa, que exerce uma força de 40 milinewtons sobre ele, conforme ilustra a figura II.

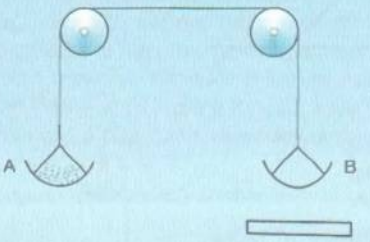


Fig. I

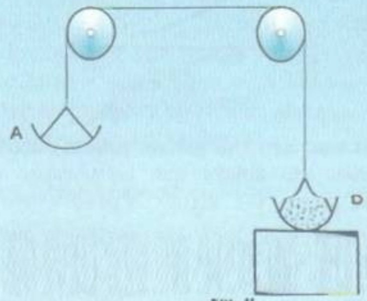


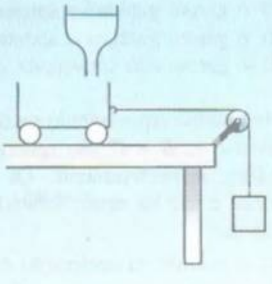
Fig. II

Sendo $g = 10\ m/s^2$, determine:

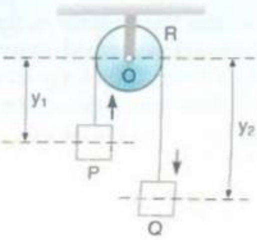
a) o peso de cada formiga;

b) o número total de formigas.

107. (FAAP-SP) Mediante fio e polia ideais, o peso suspenso de massa 100 g solicita horizontalmente o carrinho de comprimento 2 m e massa 3,9 kg, que está sobre a mesa. No instante indicado na figura, o carrinho é solto e começa a gotejar líquido dentro dele à taxa de 180 gotas por minuto. Sendo o volume de cada gota igual a $0{,}1\ cm^3$, calcule o volume máximo de líquido armazenado pelo carrinho. Despreze todos os atritos, assim como a massa das gotas em comparação com a massa do carrinho, e considere $g = 10\ m/s^2$.

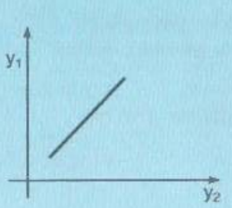


108. (CESGRANRIO-RJ) Os dois corpos *P* e *Q* são ligados por um fio inextensível que passa por cima da roldana fixa *R*. Quando o sistema está em movimento, as distâncias y_1 e y_2, mostradas na figura, variam.

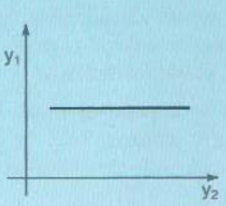


Qual dos gráficos propostos melhor representa como varia y_1 em função de y_2?

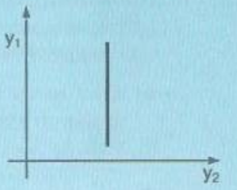
a)



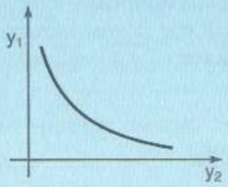
c)



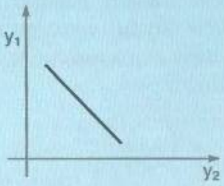
e)



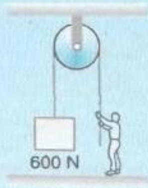
b)



d)



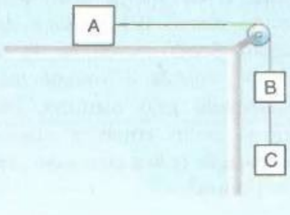
109. (UFSC-SP) Um garoto, pesando 400 N, apostou com um colega que seria capaz de manter suspenso, por alguns segundos, um bloco de 600 N, puxando-o por uma corda que passa por uma polia (considerada ideal), conforme a figura ao lado (use a aceleração da gravidade $g = 10\,m/s^2$). Podemos afirmar que:



a) o garoto ganhará a aposta se subir ao longo da corda com velocidade constante.
b) o garoto ganhará a aposta se subir ao longo da corda com uma aceleração de $15{,}0\,m/s^2$.
c) o garoto ganhará a aposta se subir ao longo da corda com uma aceleração de $2{,}0\,m/s^2$.
d) o garoto ganhará a aposta se subir ao longo da corda com uma aceleração de $5{,}0\,m/s^2$.
e) o garoto não conseguirá ganhar a aposta, pois seu peso é menor que o do bloco.

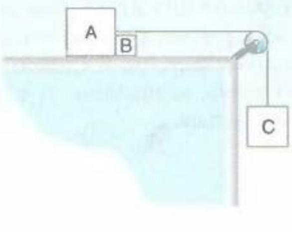
110. No sistema representado na figura, as massas dos blocos A, B e C são iguais a 3,0 kg, 2,0 kg e 5,0 kg, respectivamente. Os fios e a polia são ideais e não há atrito. Sabendo que $g = 10\,m/s^2$, calcule:

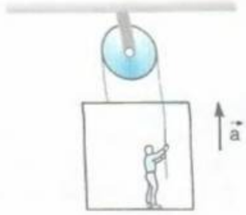
a) o módulo da aceleração do bloco A;
b) o módulo da tração no fio ligado ao bloco A;
c) o módulo da tração no fio ligado ao bloco C.



111. No sistema representado na figura, os blocos A, B e C têm massas respectivamente iguais a 4,0 kg, 3,0 kg e 13 kg. O fio e a polia são ideais e o bloco A está apenas encostado no bloco B. Sabendo que $g = 10\,m/s^2$ e desprezando o atrito, calcule os módulos:

a) da aceleração do bloco C;
b) da tração no fio;
c) da força exercida pelo bloco A sobre o bloco B.





112 Consideremos um elevador de massa $m_E = 60\,kg$ e um passageiro de massa $m_P = 80\,kg$. O elevador está suspenso por uma corda ideal que passa por uma polia ideal e é puxada pelo passageiro de modo que este sobe juntamente com o elevador, em movimento acelerado de aceleração $a = 4{,}0\,m/s^2$. Sabendo que $g = 10\,m/s^2$, calcule os módulos da tração no fio e da força exercida pelo piso do elevador sobre o passageiro.

Resolução:

Sejam P_E e P_P os pesos do elevador e do passageiro, respectivamente.

$$\begin{cases} P_E = m_E \cdot g = 60 \cdot 10 & P_E = 600\,N \\ P_P = m_P \cdot g = 80 \cdot 10 & P_P = 800\,N \end{cases}$$

As forças que atuam no elevador são o seu peso P_E, a força T que o fio exerce no teto e a força normal N que o passageiro exerce no piso do elevador (Fig. a). As forças que atuam no passageiro são o seu peso P_P, a força T que o fio exerce em suas mãos e a força normal N que o piso do elevador aplica no passageiro, conforme ilustra a Fig. b. (Obviamente, pelo Princípio da Ação e Reação, a força que o passageiro aplica no piso do elevador e a força que o piso do elevador aplica no passageiro têm o mesmo módulo.)

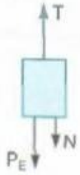


Fig. a

Fig. b

Apliquemos a Segunda Lei de Newton a cada corpo, separadamente:

$$\begin{cases} T - P_E - N = m_E \cdot a \\ T + N - P_P = m_P \cdot a \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} T - 600 - N = 60 \cdot 4 \\ T + N - 800 = 80 \cdot 4 \end{cases} \quad \text{ou}$$

$$\begin{cases} T - N = 840 & \text{(I)} \\ T + N = 1\,120 & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtemos:

$$\boxed{T = 980 \text{ newtons}} \quad \text{e} \quad \boxed{N = 140 \text{ newtons}}$$

Se quiséssemos apenas o módulo da tração no fio, poderíamos ter considerado um único corpo formado pelo elevador e pelo passageiro. Nesse caso, as duas forças N são *internas* e, assim, não aparecem no esquema de forças (Fig. c). Devemos observar também que há duas forças de módulo T puxando o corpo para cima: uma delas é a que atua no teto do elevador e a outra é que atua nas mãos do passageiro. Sejam m e P, respectivamente, a massa e o peso do corpo.

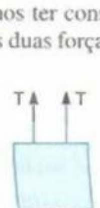


Fig. c

$$\begin{cases} m = m_E + m_P = 60 + 80 & m = 140\,kg \\ P = m \cdot g = 140 \cdot 10 & P = 1\,400\,N \end{cases}$$

Apliquemos a Segunda Lei de Newton a esse corpo.

$2T - P = m \cdot a$

$2T - 1\,400 = 140 \cdot 4$ $\boxed{T = 980\,N}$

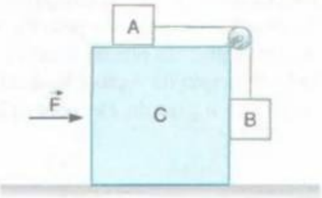
113. Um indivíduo de massa 100 kg está dentro de um elevador de massa 70 kg. O elevador está suspenso por uma corda ideal que passa por uma polia ideal e é puxada pelo indivíduo, de modo que este sobe juntamente com o elevador, em movimento acelerado de aceleração $2{,}0\,m/s^2$. Sabendo que $g = 10\,m/s^2$, calcule os módulos da tração no fio e a força que o piso do elevador exerce no indivíduo.

114 No sistema representado na figura, os blocos *A*, *B* e *C* têm massas $m_A = 20\,kg$, $m_B = 8{,}0\,kg$ e $m_C = 32\,kg$. O fio e a polia são ideais e não há atrito. Uma força horizontal $\vec{F}$ é aplicada ao bloco *C*, de modo que o conjunto todo se move em relação ao solo, mas os blocos *A* e *B* permanecem em repouso em relação a *C*. Sendo $g = 10\,m/s^2$, calcule os módulos:

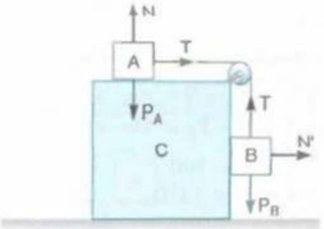
a) da aceleração do conjunto em relação ao solo;

b) da força $\vec{F}$;

c) da força exercida por *C* sobre *B*.



Resolução:



a) Sobre o bloco *A* atua o seu peso (P_A), a força normal exercida por *C* (*N*) e a tração do fio (*T*). Sobre o bloco *B* atuam o seu peso (P_B), a tração do fio (*T*) e a força normal exercida por *C*.

$P_B = m_B \cdot g = 8{,}0 \cdot 10$

$P_B = 80\,N$

Como o bloco *B* não deve ter movimento na vertical, devemos ter $T = P_B$, isto é, $T = 80\,N$. O bloco *A* também não deve ter movimento na vertical e, assim, devemos ter $N = P_A$. Desse modo, a resultante das forças que atuam sobre *A* é *T*. Sendo *a* a aceleração do bloco *A*, temos:

$T = m_A \cdot a$

$80 = 20 \cdot a$ $\boxed{a = 4{,}0\,m/s^2}$

Como os blocos *A* e *B* não devem mover-se em relação a *C*, a aceleração que acabamos de calcular é também a aceleração do conjunto.

b) Podemos considerar todo o conjunto como um único corpo de massa $m = m_A + m_B + m_C$, isto é, $m = 60\,kg$. Assim:

$F = m \cdot a = 60 \cdot 4{,}0$ $\boxed{F = 240\,N}$

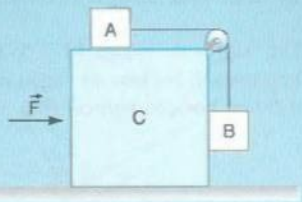
c) A resultante das forças que atuam sobre B é N'. Assim:

$N' = m_B \cdot a = 8{,}0 \cdot 4{,}0$

$N' = 32\,N$

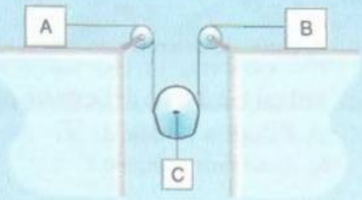
115. Os blocos A, B e C representados na figura têm massas respectivamente iguais a 8,0 kg, 6,0 kg e 26 kg. O fio e a polia são ideais, não há atrito e a aceleração da gravidade tem módulo $10\,m/s^2$. Uma força horizontal $\vec{F}$ é aplicada sobre C, de modo que o sistema todo se move em relação ao solo, mas os blocos A e B permanecem em repouso em relação a C. Calcule os módulos:

a) da aceleração do sistema em relação ao solo;
b) da força $\vec{F}$;
c) da força exercida por C sobre B.

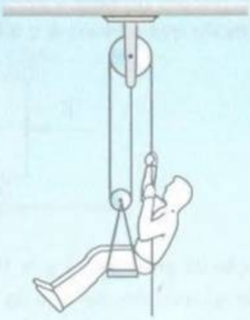


116. No sistema representado na figura, os fios e as polias são ideais, não há atrito e as massas dos blocos A, B e C são respectivamente iguais a 15 kg, 10 kg e 24 kg. A aceleração da gravidade tem módulo $10\,m/s^2$. Sendo a_A, a_B e a_C os módulos das acelerações dos blocos A, B e C, respectivamente, determine:

a) a relação entre a_A, a_B e a_C;
b) os valores de a_A, a_B e a_C;
c) o módulo da tração no fio que está ligado ao bloco A.

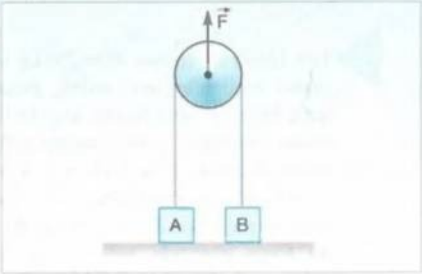


117. (ITA-SP) Um homem cuja massa é 70 kg está sentado sobre um andaime pendurado num sistema de roldanas. Ele se eleva puxando a corda que passa pela roldana fixa, conforme a figura. Considerando $g = 9{,}8\,m \cdot s^{-2}$, desprezando os atritos, resistências e a massa do andaime e supondo que o homem se eleva muito lentamente, calcule a intensidade da força que ele precisa exercer.

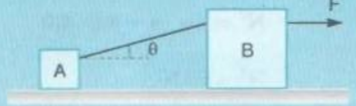


118. (EESC-USP-SP) É dada uma polia ideal pela qual um fio também ideal, suportando em suas extremidades os blocos A e B, de massas respectivamente iguais a 40 kg e 24 kg, como mostra a figura. A partir de dado instante, aplica-se ao eixo da polia uma força vertical $\vec{F}$, cujo sentido é para cima. Sendo $g = 10\,m/s^2$, calcule os módulos das acelerações adquiridas pelos blocos, nos seguintes casos:

a) $F = 400\,N$ b) $F = 720\,N$ c) $F = 1\,200\,N$



119. No sistema esquematizado na figura, os blocos *A* e *B* têm massas respectivamente iguais a 20 kg e 40 kg. O fio é ideal e não há atrito. São dados: $g = 10\,m/s^2$, $F = 240\,N$, $sen\ \theta = 0{,}60$ e $\cos \theta = 0{,}80$. Calcule as intensidades:



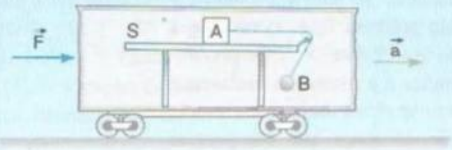
a) da aceleração do sistema;
b) da tração no fio;
c) das forças normais exercidas pela superfície horizontal sobre os blocos *A* e *B*.

120. Um vagão de massa $M = 58\,kg$ está inicialmente em repouso, apoiado sobre trilhos retos e horizontais. No teto do vagão está pendurado um pêndulo simples de massa $m = 2{,}0\,kg$, estando o fio na posição vertical (Fig. a).

A partir de determinado instante, aplica-se ao vagão uma força horizontal $\vec{F}$, de intensidade $F = 450\,N$ (Fig. b). Com isso, o vagão adquire aceleração $\vec{a}$ e o fio inclina-se, mantendo com a vertical um ângulo θ. Despreze os atritos e admita $g = 10\,m/s^2$.

a) Calcule o módulo de $\vec{a}$.
b) Determine o ângulo θ.
c) Calcule o módulo da tração no fio.

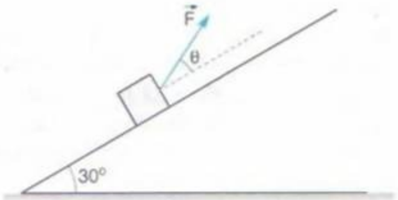
121. No sistema representado na figura, temos um vagão que se move sobre trilhos retos e horizontais com movimento acelerado, de aceleração $\vec{a}$, empurrado por uma força horizontal $\vec{F}$. Dentro do vagão há uma mesa *S*, rigidamente presa ao piso do vagão, e sobre ela está um bloco *A*, o qual está ligado por um fio ideal a uma bolinha *B*. A polia é ideal e não há atritos. O sistema todo se move de modo que o bloco *A* e a bolinha *B* permanecem em repouso em relação ao vagão.



A aceleração da gravidade é $g = 10\,m/s^2$ e as massas de *A* e *B* são $m_A = 20\,kg$ e $m_B = 12\,kg$.

a) Calcule os módulos de $\vec{a}$ e da tração no fio.
b) Sabendo que a massa do vagão juntamente com a mesa é $m = 68\,kg$, determine a intensidade de $\vec{F}$.

122. Um bloco de massa $m = 2{,}0\,kg$ sobe um plano inclinado sem atrito, puxado por uma força $\vec{F}$ que forma ângulo θ com o plano inclinado, como mostra a figura. A intensidade de $\vec{F}$ é 15 N e o módulo da aceleração da gravidade é $10\,m/s^2$. Calcule os módulos da aceleração do bloco e da força exercida pelo plano inclinado sobre o bloco.



$sen\ \theta = 0{,}60$ e $\cos \theta = 0{,}80$

Resolução:

As forças que atuam sobre o bloco são o seu peso $\vec{P}$, a força $\vec{N}$ exercida pelo plano inclinado e a força $\vec{F}$ (Fig. a).

$P = m \cdot g = 2{,}0 \cdot 10 \qquad P = 20\,N$

Como nesse caso existe aceleração, para decompormos as forças devemos escolher uma direção paralela à aceleração e uma direção perpendicular à aceleração. Seguindo esse critério, as forças $\vec{P}$ e $\vec{F}$ foram decompostas, como mostra a Fig. b.

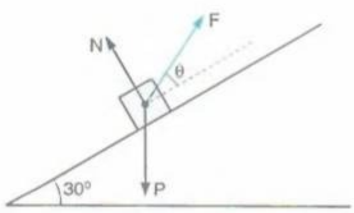


Fig. a

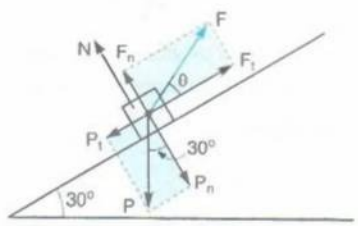


Fig. b

$P_t = P \cdot \text{sen}\,30^\circ = 20 \cdot 0{,}50 \qquad P_t = 10\,N$

$P_n = P \cdot \cos 30^\circ = 20\,\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad P_n = 10\sqrt{3}\,N$

$F_t = F \cdot \cos\theta = 15 \cdot 0{,}8 \qquad F_t = 12\,N$

$F_n = F \cdot \text{sen}\,\theta = 15 \cdot 0{,}6 \qquad F_n = 9{,}0\,N$

Na direção perpendicular ao plano inclinado não há movimento; portanto:

$N + F_n = P_n$

ou $N + 9{,}0 = 10\sqrt{3}$

ou, ainda, $N = 10\sqrt{3} - 9{,}0$

Adotando $\sqrt{3} \cong 1{,}7$, temos: $\boxed{N \cong 8{,}0 \text{ newtons}}$

Aplicando a Segunda Lei de Newton, temos:

$F_t - P_t = m \cdot a$

$12 - 10 = 2{,}0 \cdot a \qquad \boxed{a = 1{,}0\,m/s^2}$

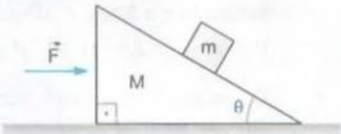
123. Um bloco de massa $m = 20\,kg$ desce um plano inclinado sem atrito, sujeito a uma força F que forma ângulo θ como o plano inclinado, como mostra a figura. São dados: $g = 10\,m/s^2$; $F = 50\,N$; $\text{sen}\,\alpha = 0{,}60$ e $\cos\alpha = 0{,}80$; $\text{sen}\,\theta = 0{,}44$ e $\cos\theta = 0{,}90$.

Calcule:

a) o módulo da aceleração do bloco;

b) o módulo da força normal exercida pelo plano inclinado sobre o bloco.

124 Um prisma triangular de massa $M = 2{,}4\,kg$ está apoiado sobre uma superfície horizontal. Uma das faces do prisma forma ângulo θ com a superfície horizontal, como mostra a figura. Sobre a face inclinada do prisma apóia-se um bloco de massa $m = 1{,}6\,kg$. Aplica-se no prisma uma força horizontal F, de modo que o sistema todo se move com o bloco ficando em repouso em relação ao prisma. São dados:



$g = 10\,m/s^2$, sen $\theta = 0{,}60$ e cos $\theta = 0{,}80$

Desprezando os atritos, determine:

a) o módulo da aceleração do conjunto;

b) o módulo de $\vec{F}$.

Resolução:

a) 1º modo

As forças que atuam sobre o bloco são o seu peso $\vec{P}$ e a força normal $\vec{N}$ exercida pelo prisma (Fig. a). Sob a ação dessas duas forças, o bloco tem movimento retilíneo de aceleração $\vec{a}$, cuja direção é horizontal, pois o bloco fica fixo em relação ao prisma. Façamos então a decomposição de $\vec{N}$ sobre as direções x e y assinaladas na Fig. b.

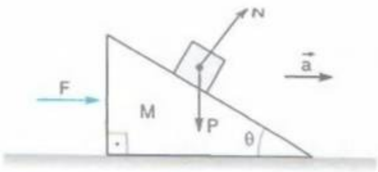


Fig. a

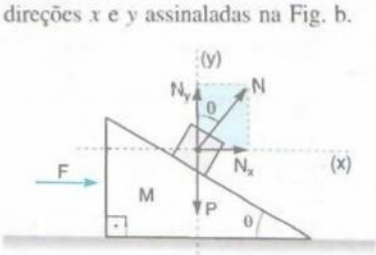


Fig. b

Temos:

$$\begin{cases} P = m \cdot g = 1{,}6 \cdot 10 \qquad P = 16\,N \\ N_x = N \cdot \text{sen}\,\theta = N \cdot 0{,}60 \\ N_y = N \cdot \cos\theta = N \cdot 0{,}80 \end{cases}$$

Como na direção y não há movimento, devemos ter:

$N_y = P$ ou $N \cdot 0{,}80 = 16$ ou $N = 20$ newtons

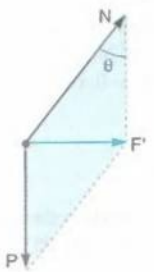
Assim, $N_x = N \cdot 0{,}60 = 20 \cdot 0{,}60$ $\quad N_x = 12\,N$

Aplicando a Segunda Lei de Newton:

$N_x = m \cdot a$ ou $12 = 1{,}6 \cdot a$ ou $a = 7{,}5\,m/s^2$

2º modo

Como há apenas duas forças atuando no bloco, é mais prático usar a regra do paralelogramo. Levando em conta que a aceleração $\vec{a}$ do bloco tem direção horizontal, a força resultante ($\vec{F'}$) de $\vec{N}$ e $\vec{P}$ deve também ter direção horizontal (Fig. c).



Devemos ter:

$$\begin{cases} P = m \cdot g \\ F' = m \cdot a \end{cases}$$

Da Fig. c tiramos: $\text{tg}\,\theta = \dfrac{F'}{P}$

Assim, $\text{tg}\,\theta = \frac{F'}{P} = \frac{m \cdot a}{m \cdot g} = \frac{a}{g}$

Portanto, $a = g \cdot \text{tg}\,\theta = g \cdot \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = 10 \cdot \frac{0{,}60}{0{,}80} = 7{,}5$ $\boxed{a = 7{,}5\,\text{m/s}^2}$

É conveniente observar que a aceleração não depende da massa do bloco.

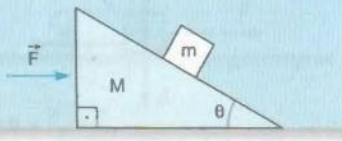
b) O prisma e o bloco têm a mesma aceleração $\vec{a}$ em relação ao solo (pois o bloco está fixo em relação ao prisma). Apliquemos então a Segunda Lei de Newton ao sistema formado pelo prisma e pelo bloco:

$F = (M + m) \cdot a$

$F = (2{,}4 + 1{,}6) \cdot (7{,}5)$ $\boxed{F = 30\,\text{N}}$

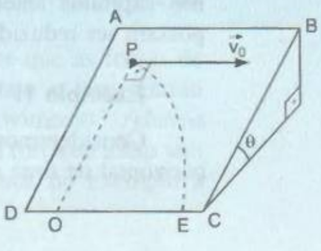
125. Um prisma triangular de massa $M = 7{,}0\,\text{kg}$ está apoiado sobre uma superfície horizontal, numa região em que $g = 10\,\text{m/s}^2$. Uma das faces do prisma forma ângulo θ com a superfície horizontal, como mostra a figura. Sobre a face inclinada do prisma, apóia-se um bloco de massa $m = 3{,}0\,\text{kg}$. Aplica-se ao prisma uma força horizontal $\vec{F}$, de modo que o conjunto se move, com o bloco permanecendo em repouso em relação ao prisma. Desprezando os atritos, determine:

a) o módulo da aceleração do conjunto;
b) o módulo de $\vec{F}$.



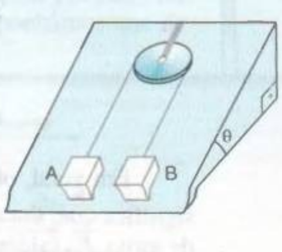
$\text{sen}\,\theta = \frac{12}{13}$ e $\cos\theta = \frac{5}{13}$

126. Consideremos um prisma triangular apoiado sobre o solo (suposto plano e horizontal), como mostra a figura. A face ABCD do prisma forma ângulo θ com o solo. De um ponto P, pertencente à face ABCD, lança-se uma partícula com velocidade inicial $\vec{v_0}$ paralela à aresta $\overline{CD}$. São dados: $PO = 50\,\text{m}$, $g = 10\,\text{m/s}^2$, $v_0 = 8{,}0\,\text{m/s}$ e $\text{sen}\,\theta = 0{,}40$.
Desprezando o atrito, calcule a distância OE.



127. Um sistema formado por dois blocos A e B, um fio ideal e uma polia também ideal foi montado sobre um plano que tem inclinação θ em relação a um plano horizontal, como mostra a figura. As massas de A e B são respectivamente iguais a $5{,}0\,\text{kg}$ e $15\,\text{kg}$. São dados: $g = 10\,\text{m/s}^2$ e $\text{sen}\,\theta = 0{,}60$.
Desprezando o atrito, calcule:

a) o módulo da aceleração do bloco B;
b) o módulo da tração no fio.



CAPÍTULO 3

FORÇAS DE ATRITO

1. ATRITO ENTRE SÓLIDOS

Quando a superfície de um corpo desliza sobre a superfície de outro corpo, isto é, quando há movimento relativo entre as superfícies, cada um dos corpos exerce sobre o outro uma força tangente à superfície de contato que se opõe ao deslizamento. Forças desse tipo recebem o nome de *forças de atrito de deslizamento*. Há situações ideais em que desprezamos essas forças, como o fizemos nos capítulos anteriores. No entanto, na prática elas sempre existem, embora possam ser reduzidas, por exemplo, com o uso de lubrificantes.

Exemplo 1:

Consideremos um bloco lançado com velocidade inicial $\vec{v}_0$ sobre a tampa horizontal de uma mesa, como mostra a Fig. 1.

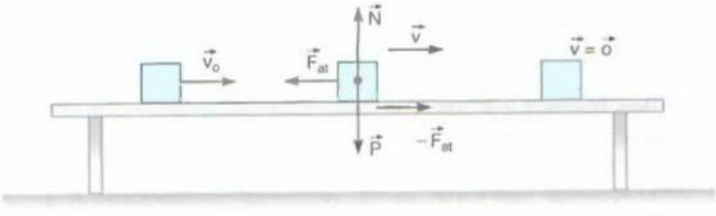


Fig. 1

Em geral, observamos que o bloco vai perdendo velocidade até parar. Isso significa que, durante o movimento, a superfície exerceu sobre o bloco uma força de atrito $\vec{F}_{at}$ (além da força normal $\vec{N}$) de *sentido oposto ao do movimento*. Mas, pelo Princípio da Ação e Reação, o bloco deve ter exercido sobre a mesa uma força de mesma intensidade e sentido contrário: é a força $-\vec{F}_{at}$ da Fig. 1. Assim que o bloco pára, a força de atrito também se anula. A resultante de $\vec{F}_{at}$ e $\vec{N}$ (força $\vec{F}$ na Fig. 2) é *a força total feita pela superfície da mesa sobre o bloco* ou, simplesmente, *a força exercida pela mesa sobre o bloco*.

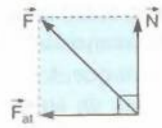


Fig. 2

As forças de atrito de deslizamento podem existir mesmo que não haja movimento relativo entre as superfícies em contato, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 2:

Consideremos um bloco inicialmente em repouso sobre uma superfície plana e horizontal sob a ação apenas da força peso ($\vec{P}$) e da força normal ($\vec{N}$) exercida pela superfície (Fig. 3).

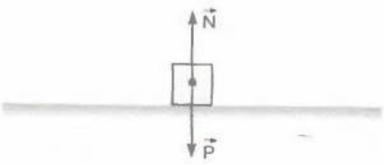


Fig. 3

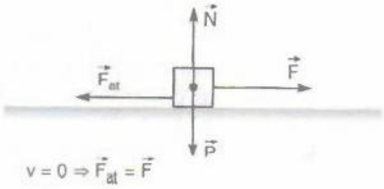


Fig. 4

Apliquemos então ao bloco uma força horizontal $\vec{F}$. Pode acontecer de, apesar da aplicação de $\vec{F}$, o bloco *não se mover* (é o que acontece, por exemplo, quando tentamos puxar um objeto muito "pesado"). Isso significa que, ao aplicarmos a força $\vec{F}$, a superfície passou a exercer no bloco uma força de atrito ($\vec{F}_{at}$), cujo sentido é *oposto* ao da "tendência de movimento" (Fig. 4) e cujo módulo é igual ao de $\vec{F}$: $|\vec{F}_{at}| = |\vec{F}|$.

Tendo em vista os exemplos 1 e 2, podemos então dizer que as forças de atrito de deslizamento são tangentes às superfícies em contato e têm sentido oposto ao do movimento relativo ou ao da "tendência de movimento" *relativo* entre as *superfícies em contato*. Existem alguns casos em que a força de atrito tem o *mesmo sentido* do movimento *do corpo*, conforme veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 3:

Consideremos um bloco *A* apoiado sobre um bloco *B*, o qual, por sua vez, está apoiado sobre uma superfície plana horizontal (Fig. 5). Suponhamos que de início o sistema esteja em repouso.

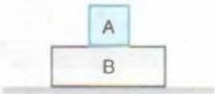


Fig. 5

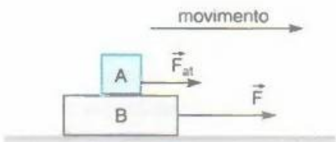


Fig. 6

Apliquemos então uma força horizontal $\vec{F}$ ao bloco B, como mostra a Fig. 6. Dependendo da intensidade de $\vec{F}$, pode acontecer de os dois blocos moverem-se juntos, isto é, sem que A escorregue sobre B. Isso significa que o bloco B aplica sobre A uma força de atrito $\vec{F}_{at}$, cujo sentido é o *mesmo* do movimento. Outro modo de concluir isso é observar que, pela Lei da Inércia, se não houvesse atrito o bloco A deveria ficar parado em relação ao solo, isto é, deveria mover-se para a *esquerda* em relação ao bloco B; portanto $\vec{F}_{at}$ tem sentido *oposto* ao da "tendência de movimento" de A em relação a B.

Exemplo 4:

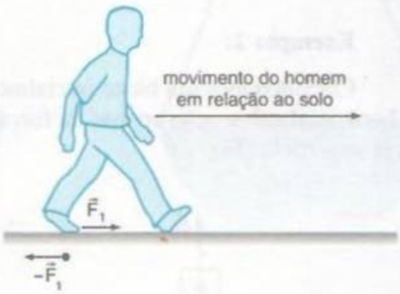


Fig. 7

A Fig. 7 representa um homem andando em relação ao solo, para a direita. O pé do homem aplica sobre o "chão" uma força $-\vec{F}_1$, cujo sentido é para a esquerda e, pelo Princípio da Ação e Reação, o "chão" aplica sobre o pé do homem uma força $\vec{F}_1$, cujo sentido é para a direita. $\vec{F}_1$ e $-\vec{F}_1$ são forças de atrito. Se não houvesse atrito, o pé do homem escorregaria para a esquerda; vemos, então, que a tendência de movimento do pé do homem em relação ao solo é para a esquerda. Assim, a força de atrito $\vec{F}_1$, que atua no pé do homem, tem o *mesmo sentido* do movimento do homem em relação ao solo, mas tem sentido oposto ao da "tendência de movimento" do seu pé em relação ao solo.

Quando existe movimento relativo entre as superfícies em contato, a força de atrito é chamada de *força de atrito dinâmico* ou força de atrito cinético; é o caso do exemplo 1. Quando não há movimento relativo entre as superfícies em contato, a força de atrito é chamada de força de atrito estático; é o caso dos exemplos 2, 3 e 4.

Exemplo 5:

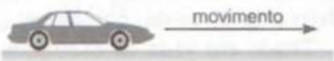
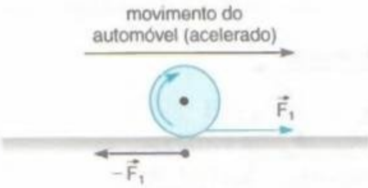


Fig. 8

Consideremos um automóvel de tração traseira *acelerando* em uma estrada plana horizontal (Fig. 8). Dizer que a tração é traseira significa que apenas as rodas de trás são tracionadas pelo motor. Consideremos primeiramente uma das rodas de trás, a qual é tracionada pelo motor (Fig. 9). Essa roda "empurra" o chão para trás exercendo sobre ele a força $-\vec{F}_1$ (do mesmo modo que o pé do homem, do exemplo anterior, empurra o chão para trás); pelo Princípio da Ação e Reação, o chão exerce sobre a roda a força $\vec{F}_1$, que é a força que impulsiona o automóvel para a frente. Desde que a roda não derrape, $\vec{F}_1$ e $-\vec{F}_1$ são forças de *atrito estático*.



roda com tração
Fig. 9

roda sem tração
Fig. 10

Consideremos agora uma das rodas da frente, a qual não é tracionada pelo motor (Fig. 10). Essa roda "empurra" o chão para a frente, exercendo sobre ele a força $-\vec{F}_2$; pelo Princípio da Ação e Reação, o chão exerce sobre a roda a força $\vec{F}_2$. Desde que a roda não derrape, $\vec{F}_2$ e $-\vec{F}_2$ são forças de *atrito estático*. Em resumo, quando a roda é tracionada, a força de atrito sobre ela tem o mesmo sentido do movimento do automóvel ($\vec{F}_1$ na Fig. 9), mas quando a roda não é tracionada, a força de atrito sobre ela tem sentido oposto ao do movimento do automóvel ($\vec{F}_2$ na Fig. 10).

2. ORIGEM DAS FORÇAS DE ATRITO

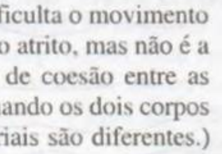
Por mais liso que um corpo possa nos parecer, microscopicamente ele apresenta irregularidades. Consideremos, por exemplo, um bloco apoiado em uma mesa, como mostra a Fig. 11, e imaginemos ampliada a região limitada pela pequena circunferência.

Fig. 11

Vemos que, na realidade, a *área real* de contato é menor do que a área da base do bloco, isto é, só há o contato em algumas pequenas regiões. As "pontas" e "depressões" das duas superfícies se interpenetram e isso dificulta o movimento de uma superfície em relação à outra. Essa é uma das causas do atrito, mas não é a única. Devemos considerar também as forças de adesão ou de coesão entre as moléculas dos dois corpos em contato. (A força é de *coesão* quando os dois corpos são feitos do mesmo material e é de *adesão* quando os materiais são diferentes.) Entre alguns pontos em contato formam-se verdadeiras soldas que precisam ser quebradas para que uma superfície deslize sobre a outra.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1 Um bloco de massa m = 2,0 kg está inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal, sob a ação apenas de seu peso ($\vec{P}$) e da força normal exercida pela superfície ($\vec{N}$), como mostra a figura. A partir de certo instante, aplica-se ao bloco uma força horizontal $\vec{F}$ de intensidade 13 N e observa-se que o bloco adquire aceleração de módulo a = 4,0 m/s². Sabendo que g = 10 m/s² e que existe atrito entre o bloco e a superfície horizontal, determine:

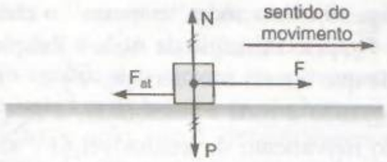


a) o módulo da força de atrito exercida pela superfície horizontal sobre o bloco, durante o movimento;

b) o módulo da força total exercida pela superfície horizontal sobre o bloco.

Resolução:

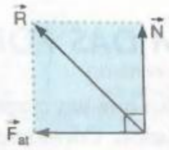
a) Nesse caso, a normal deve anular o peso, e, assim, a força resultante tem intensidade igual a $F - F_{at}$. Aplicando a Segunda Lei de Newton, temos:



$F - F_{at} = m \cdot a$

$13 - F_{at} = 2{,}0 \cdot 4{,}0$ $\qquad$ $\boxed{F_{at} = 5{,}0\ N}$

b) A *força total* exercida pela superfície sobre o bloco ou, simplesmente, a *força* exercida pela superfície sobre o bloco é a resultante de $\vec{F}_{at}$ e $\vec{N}$.



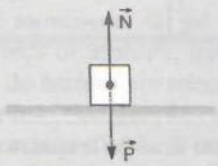
$N = P = mg = 2{,}0 \cdot 10 \qquad N = 20$ newtons

$R^2 = F_{at}^2 + N^2 = (5{,}0)^2 + (20)^2 = 425$

$R = \sqrt{425} = \sqrt{25(17)} = 5\sqrt{17}$

$\boxed{R = 5\sqrt{17}N}$

2. Consideremos um bloco de massa m = = 4,0 kg inicialmente em repouso sobre uma superfície plana e horizontal, sob a ação de apenas duas forças: o seu peso ($\vec{P}$) e a força normal ($\vec{N}$) exercida pela superfície. A partir de determinado instante, aplica-se ao bloco uma força horizontal $\vec{F}$ de intensidade 42 N e observa-se que o bloco adquire aceleração de módulo 3,0 m/s^2. Sabendo que existe atrito entre o bloco e a superfície horizontal e que $g = 10$ m/s^2, calcule:



a) o módulo da força de atrito exercida pela superfície horizontal sobre o bloco durante o movimento;

b) o módulo da força exercida pela superfície horizontal sobre o bloco.

3. Um bloco de massa 7,0 kg move-se sobre uma superfície plana e horizontal, puxado por uma força horizontal de intensidade 20 N. Sabendo que a velocidade do bloco é constante, calcule o módulo da força de atrito exercida sobre o bloco.

4. Uma partícula de massa m = 4,0 kg é lançada com velocidade $v_0 = 30$ m/s sobre uma superfície plana e horizontal com atrito, parando depois de 6,0 segundos. Calcule:

a) o módulo da aceleração da partícula (supondo que a aceleração tenha sido constante) durante o movimento;

b) o módulo da força de atrito exercida pela superfície horizontal sobre a partícula.

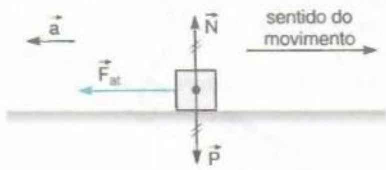
Resolução:

a) Considerando que a aceleração é constante, o movimento é uniformemente variado e tem equação horária da velocidade escalar do tipo $v = v_0 + \alpha t$, onde $v_0 = 30$ m/s. Quando a partícula parar (o que ocorre para $t = 6{,}0$ s), teremos $v = 0$. Assim:

$$0 = 30 + \alpha(6{,}0) \quad \text{ou} \quad \alpha = -5{,}0 \text{ m/s}^2$$

Sendo $\vec{a}$ a aceleração da partícula, temos: $a = |\vec{a}| = |\alpha|$ $a = 5,0 \text{ m/s}^2$

b) A força resultante é a força de atrito ($\vec{F}_{at}$). Assim:



$F_{at} = m \cdot a = 4,0 \cdot 5,0$

$F_{at} = 20 \text{ N}$

5. Um bloco de massa m = 3,0 kg é lançado com velocidade inicial de 28 m/s sobre uma superfície plana e horizontal, com atrito, parando depois de 7,0 segundos.

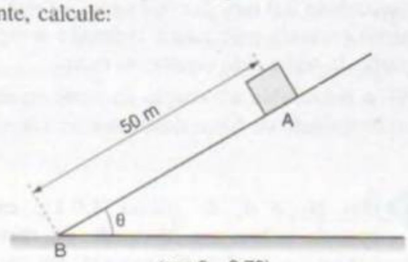
a) Calcule o módulo da aceleração do bloco (supondo-a constante) até sua parada.
b) Calcule o módulo da força de atrito exercida pela superfície horizontal sobre o bloco.

6. Lança-se uma partícula de massa m = 2,0 kg, com velocidade inicial de 20 m/s sobre uma superfície plana e horizontal, com atrito. Observa-se que a partícula pára depois de percorrer 25 metros sobre a superfície horizontal.

a) Calcule o módulo da aceleração da partícula (supondo-a constante) durante o movimento.
b) Calcule o módulo da força de atrito que a superfície horizontal exerce sobre a partícula.

7 Uma partícula de massa 2,0 kg é abandonada com velocidade inicial nula, no ponto *A* de uma rampa com atrito, como mostra a figura, numa região em que $g = 10 \text{ m/s}^2$. A partícula atinge o ponto *B* da rampa, com velocidade 20 m/s. Supondo que a força de atrito exercida pela rampa sobre a partícula tenha sido constante, calcule:

a) o módulo da aceleração da partícula durante a descida;
b) o módulo da força de atrito exercida sobre a partícula.



(sen θ = 0,70)

Resolução:

a) A partícula tem velocidade escalar $v_A = 0$ no ponto *A* e velocidade $v_B = 20$ m/s no ponto *B*. Supondo que todas as forças atuantes na partícula sejam constantes, a aceleração da partícula é constante. Podemos então usar a equação de Torricelli para o percurso AB:

$v_B^2 = v_A^2 + 2a(\Delta s)$ (I)

Sabemos que $v_B = 20$ m/s, $v_A = 0$ e $\Delta s = 50$ m. Substituindo em (I):

$20^2 = 0 + 2a(50)$

Portanto $a = 4,0 \text{ m/s}^2$

b) As forças que atuam sobre a partícula são o peso $\vec{P}$, a força normal exercida pelo plano inclinado e a força de atrito $\vec{F}_{at}$, cujo sentido é oposto ao do movimento (Fig. a).

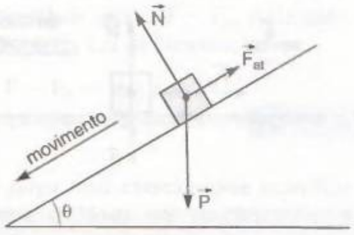


Fig. a

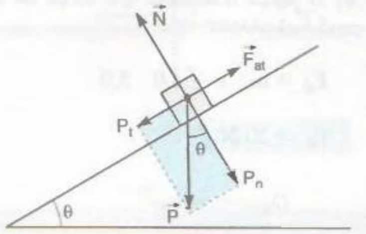


Fig. b

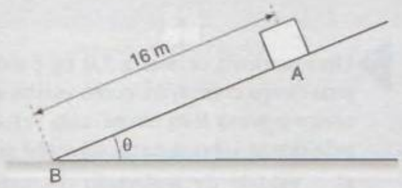
Temos: $P = mg = 2{,}0 \cdot 10 \qquad P = 20\ N$

Fazendo a decomposição do peso: $P_t = P \cdot \text{sen}\ \theta = 20 \cdot 0{,}7 \qquad P_t = 14\ N$

Não é necessário calcular o valor de P_n, pois P_n e N devem se anular. Aplicando a Segunda Lei de Newton à partícula, temos:

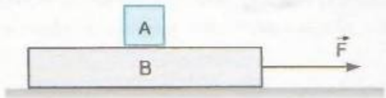
$$P_t - F_{at} = m \cdot a \qquad 14 - F_{at} = 2{,}0 \cdot 4{,}0 \qquad F_{at} = 6{,}0\ N$$

8. Em um ponto A de um plano inclinado com atrito, abandonamos com velocidade inicial nula uma partícula de massa $m = 4{,}0$ kg. Sabe-se que $g = 10\ m/s^2$, sen $\theta = 0{,}75$ e que a partícula atinge o ponto B (ver figura) com velocidade 8,0 m/s. Supondo que a força de atrito exercida pelo plano inclinado sobre a partícula tenha sido constante, calcule:



a) o módulo da aceleração da partícula durante a descida;
b) o módulo da força de atrito exercida sobre a partícula.

9. Um bloco A, de massa 4,0 kg, está apoiado sobre um bloco B, de massa 6,0 kg, o qual está apoiado em uma superfície plana horizontal. Há atrito entre os blocos A e B, mas não há atrito entre o bloco B e o solo. O sistema está inicialmente em repouso. Aplica-se então ao bloco B uma força horizontal $\vec{F}$ de intensidade 50 N e observa-se que o sistema se move de modo que o bloco A tem o mesmo movimento de B, isto é, o bloco A não escorrega sobre B.



a) Calcule o módulo da aceleração do sistema.
b) Calcule o módulo da força de atrito exercida por B sobre A.

Resolução:

a) Como o bloco A permanece em repouso em relação a B, podemos considerar os blocos A e B formando um único corpo de massa m (Fig. a) tal que: $m = m_A + m_B = 4{,}0 + 6{,}0$
$m = 10$ kg

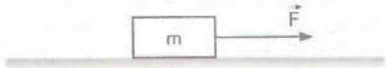


Fig. a

Apliquemos a Segunda Lei de Newton a esse corpo:

$F = m \cdot a$ $\qquad 50 = 10 \cdot a$ $\qquad \boxed{a = 5{,}0\ m/s^2}$

b) Vamos agora representar as forças que atuam sobre cada bloco (sem considerar os pesos e as normais, pois elas se anulam). O bloco *B*, ao ser "puxado" por $\vec{F}$, exerce sobre *A* a força de atrito $\vec{F}_{at}$ (Fig. b). Mas, pelo Princípio da Ação e Reação, o bloco *A* exerce sobre *B* uma força de atrito $\vec{F}'_{at}$ tal que $\vec{F}'_{at} = -\vec{F}_{at}$ ou $F'_{at} = F_{at}$. Podemos, então, adotar o esquema simplificado da Fig. c.

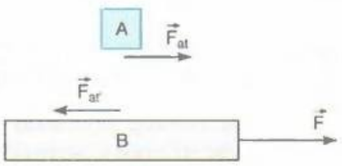


Fig. b

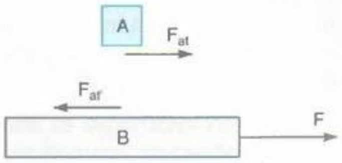


Fig. c

Aplicando a Segunda Lei de Newton ao bloco *A*, temos:

$F_{at} = m_A \cdot a$

$F_{at} = 4{,}0 \cdot 5{,}0$ $\qquad \boxed{F_{at} = 20\ N}$

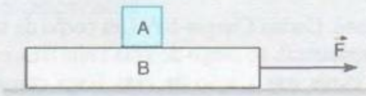
Poderíamos, também, ter aplicado a Segunda Lei de Newton ao bloco *B*:

$F - F_{at} = m_B \cdot a$

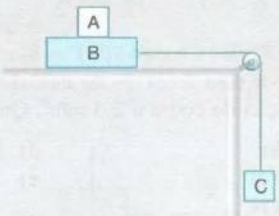
$50 - F_{at} = 6{,}0 \cdot 5{,}0$ $\qquad \boxed{F_{at} = 20\ N}$

10. Consideremos um bloco *A* de massa 7,0 kg apoiado sobre um bloco *B* de massa 15 kg, o qual está apoiado em um plano horizontal, como mostra a figura. O sistema está inicialmente em repouso. Aplica-se então ao bloco *B* uma força horizontal $\vec{F}$ de intensidade F = 80 N e observa-se que o sistema se move de modo que o bloco *A* permanece em repouso em relação ao bloco *B*, isto é, o bloco *A* acompanha o movimento de *B* sem escorregar. Supondo que haja atrito entre *A* e *B* mas não haja atrito entre *B* e o solo, calcule:

a) o módulo da aceleração do sistema;
b) o módulo da força de atrito exercida por *B* sobre *A*.



11. Abandona-se em repouso o sistema representado na figura. Observa-se, então, que o sistema entra em movimento, com o bloco *A* movendo-se juntamente com *B*, sem escorregar. O fio e a polia são ideais, há atrito entre *A* e *B* mas não há atrito entre *B* e a superfície de apoio. Sabe-se que $g = 10\ m/s^2$ e que as massas de *A*, *B* e *C* são respectivamente iguais a 2,0 kg, 4,0 kg e 6,0 kg. Após iniciar-se o movimento, calcule:



a) o módulo da aceleração do bloco *C*;
b) o módulo da tração no fio;
c) o módulo da força de atrito exercida sobre o bloco *A*;
d) o módulo da força exercida pelo bloco *B* sobre o bloco *A*.

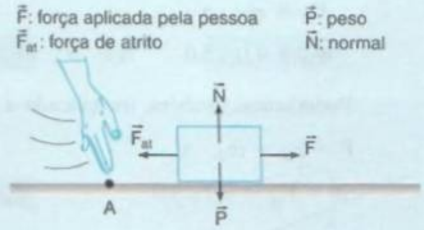
12. As figuras I, II, III e IV representam automóveis em movimento da esquerda para a direita. As flechas nas rodas representam os sentidos das forças de atrito que atuam sobre elas.

Para cada situação a seguir, escolha a figura correspondente.

a) O automóvel tem tração apenas nas rodas traseiras.
b) O automóvel tem tração nas quatro rodas.
c) O automóvel tem tração apenas nas rodas dianteiras.
d) O automóvel move-se em "ponto morto", isto é, sem que nenhuma das rodas seja tracionada.

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

13. (F. U. Itaúna-MG) Um corpo é arremessado horizontalmente numa superfície também horizontal, com atrito. No ponto *A* assinalado, o corpo já abandonou a mão da pessoa. Um aluno representou as forças que atuam no corpo após sair da mão da pessoa. É *correto* afirmar que:



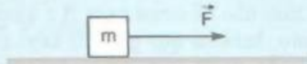
a) $\vec{P}$ e $\vec{N}$ são forças de ação e reação, pois têm o mesmo módulo, a mesma direção e sentidos contrários.
b) a força $\vec{F}$ é maior do que $\vec{F}_{at}$, pois o corpo se move para a direita.
c) a figura está errada, pois não existe a força $\vec{F}$.
d) a resultante das forças que atuam no corpo é nula.
e) a força de atrito $\vec{F}_{at}$ é maior que $\vec{F}$, pois $\vec{F}$ mantém-se constante e não nula durante o movimento.

14. (Fund. Carlos Chagas-SP) Um corpo de massa igual a 4,0 kg desloca-se sobre uma superfície plana e horizontal, ao longo de uma linha reta, com velocidade escalar constante e igual a 2,0 m/s. O corpo se move sob a ação de uma força constante cuja direção é paralela à trajetória do corpo e cuja intensidade é 3,0 N. Podemos afirmar que o módulo da força de atrito entre o corpo e a superfície é:

a) 3,0 N b) 5,0 N c) 6,0 N d) 8,0 N e) 11,0 N

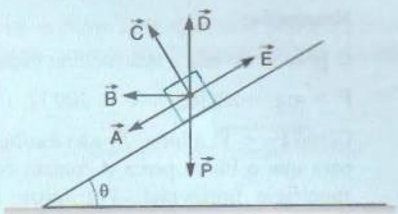
15. (Fund. Carlos Chagas-SP) Um bloco de massa m = 5,0 kg é puxado horizontalmente sobre uma mesa por uma força $\vec{F}$ de módulo 15,0 N, conforme mostra a figura abaixo. Observa-se que a aceleração do corpo é 2,0 m/s^2. Qual o módulo da força de atrito presente?

a) nulo
b) 1,0 N
c) 3,0 N
d) 5,0 N
e) 10,0 N



16. (E. E. Mauá-SP) Um corpo de massa m = 0,500 kg é abandonado sem velocidade inicial sobre um plano inclinado sem atrito, que forma um ângulo de 30° com a horizontal. Depois de deslizar durante 6,0 segundos, o corpo atinge um plano horizontal rugoso, no qual percorre a distância ℓ = 22,5 m até parar. Sendo g = 10 m/s^2 e supondo que a força de atrito tenha sido constante, calcule o tempo total do movimento.

17. Um bloco de peso $\vec{P}$ está em repouso sobre um plano inclinado, como mostra a figura. Qual dos vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$ ou $\vec{E}$ representa a força exercida pelo plano inclinado sobre o bloco?



a) $\vec{A}$
b) $\vec{B}$
c) $\vec{C}$
d) $\vec{D}$
e) $\vec{E}$

3. FORÇA DE ATRITO DINÂMICO

Como já dissemos, quando há movimento relativo entre as superfícies de contato de dois corpos, a força de atrito $\vec{F}_{at}$ é denominada *força de atrito dinâmico* (ou *cinético*). A experiência mostra que o módulo de $\vec{F}_{at}$, neste caso, é dado por:

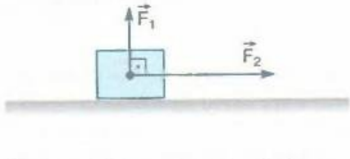
$$\boxed{F_{at} = \mu_d \cdot N} \qquad \text{(I)}$$

onde N é o módulo da força normal que um corpo exerce no outro e μ_d é uma *constante* denominada *coeficiente de atrito dinâmico* (ou *cinético*). O valor de μ_d depende do material de que é feito cada corpo, bem como do estado de polimento e lubrificação das superfícies em contato, mas *não* depende da velocidade relativa nem da área da superfície em contato. Para a maioria dos casos, tem-se $\mu_d < 1$; no entanto, há casos em que $\mu_d \geqslant 1$. Observemos ainda que μ_d é o quociente das intensidades de duas forças $\left(\mu_d = \dfrac{F_{at}}{N}\right)$, isto é, μ_d é o quociente de duas grandezas que têm a mesma unidade. Portanto, o coeficiente de atrito é uma grandeza sem unidade (adimensional).

Na realidade, tanto a fórmula (I) como a independência de μ_d em relação à área e à velocidade valem de modo aproximado. No caso da velocidade, por exemplo, nota-se uma diminuição de μ_d à medida que a velocidade aumenta; no entanto, essa diminuição é tão pequena que em geral é desprezada.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

18 Um bloco de massa m = 20 kg está inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal. A partir de certo instante, aplicamos ao bloco as forças $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ (como mostra a figura), de intensidades $F_1 = 50$ N e $F_2 = 140$ N.

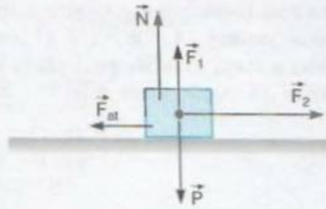


A aceleração da gravidade tem módulo $g = 10$ m/s² e o coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e a superfície horizontal é $\mu_d = 0{,}40$. Calcule o módulo da aceleração adquirida pelo bloco.

Resolução:

O peso $\vec{P}$ do bloco tem módulo dado por:

$P = mg = 20(10) \quad P = 200\ N$



Como $F_1 < P$, a força $\vec{F_1}$ não é suficiente para que o bloco perca o contato com a superfície horizontal. Por outro lado, como o bloco estava inicialmente em repouso, ao aplicarmos a força $\vec{F_2}$ o bloco passa a ter movimento (ou tendência de movimento) para a direita; portanto, a força de atrito $\vec{F_{at}}$ deve ter sentido para a esquerda. Na figura está representada, também, a força normal $\vec{N}$ exercida pela superfície horizontal sobre o bloco. Como não há movimento na vertical, temos:

$N + F_1 = P$ ou $N + 50 = 200$ ou, ainda, $N = 150$ newtons

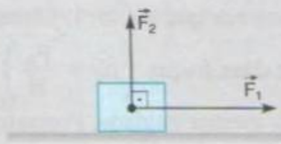
$F_{at} = \mu_d \cdot N = (0{,}40)\,(150) \quad \boxed{F_{at} = 60\ N}$

Aplicando a Segunda Lei de Newton, temos:

$F_2 - F_{at} = m \cdot a$

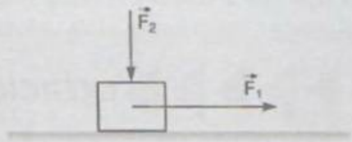
$140 - 60 = 20 \cdot a \quad \boxed{a = 4{,}0\ m/s^2}$

19. Um bloco de massa $m = 10$ kg está inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal, numa região em que $g = 10\ m/s^2$. A partir de determinado instante, aplicam-se ao bloco as forças $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, de intensidades $F_1 = 80$ N e $F_2 = 60$ N, como mostra a figura. Sabendo que o coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e a superfície horizontal é $\mu_d = 0{,}75$, calcule:

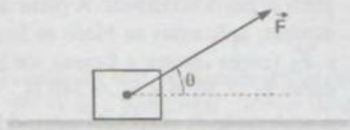


a) o módulo da força normal exercida pela superfície horizontal sobre o bloco;
b) o módulo da força de atrito exercida pela superfície horizontal sobre o bloco;
c) o módulo da força exercida pela superfície horizontal sobre o bloco;
d) o módulo da aceleração adquirida pelo bloco.

20. Uma partícula de massa $m = 6{,}0$ kg está parada, inicialmente, sobre uma superfície plana horizontal. A partir de determinado instante, aplicamos à partícula as forças $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, de intensidades $F_1 = 120$ N e $F_2 = 40$ N, como mostra a figura. Sabe-se que $g = 10\ m/s^2$ e que o coeficiente de atrito dinâmico entre a partícula e a superfície horizontal é $\mu_d = 0{,}90$. Calcule o módulo da aceleração adquirida pela partícula.



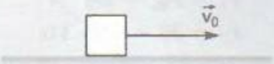
21. Aplicamos uma força $\vec{F}$, como mostra a figura, a um bloco de massa $m = 40$ kg que estava em repouso sobre uma superfície plana horizontal. São dados: $g = 10\ m/s^2$, $F = 200$ N, sen $\theta = 0{,}60$ e cos $\theta = 0{,}80$. Sabendo que o coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e a superfície horizontal é $\mu_d = 0{,}50$, calcule a aceleração adquirida pelo bloco.



3

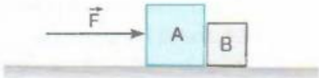
22. Um bloco de massa m é lançado com velocidade inicial v_0 sobre uma superfície plana horizontal e com atrito, cujo coeficiente é μ_d, numa região em que a aceleração da gravidade tem módulo g. Determine, em função de m, g, v_0 e μ_d, os módulos:

a) da aceleração do bloco durante o movimento;
b) da distância percorrida pelo bloco até sua parada.



23 Dois blocos, A e B, estão em repouso, encostados um no outro e apoiados sobre uma superfície plana horizontal, numa região em que g = 10 m/s^2. As massas de A e B são respectivamente iguais a 14 kg e 6,0 kg e o coeficiente de atrito dinâmico entre cada bloco e a superfície horizontal é $\mu_d = 0{,}50$. A partir de determinado instante aplica-se ao bloco A (como mostra a figura) uma força horizontal $\vec{F}$, de módulo F = 160 N. Iniciado o movimento, calcule os módulos:

a) da força de atrito exercida sobre o bloco A;
b) da força de atrito exercida sobre o bloco B;
c) da aceleração do conjunto;
d) da força exercida pelo bloco A sobre o bloco B.



Resolução:

a) As forças que atuam sobre o conjunto estão indicadas na Fig. a.

De $F_{at_A} = \mu_d \cdot N_A$, e sendo

$N_A = P = m_A \cdot g$
$N_A = P = 14 \cdot 10$
$N_A = 140$ N, vem:

$F_{at_A} = 0{,}50 \cdot 140$

$\boxed{F_{at_A} = 70 \text{ N}}$

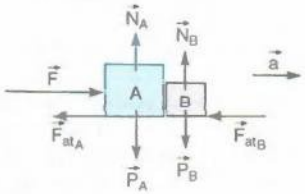


Fig. a

b) $F_{at_B} = \mu_d \cdot N_B$

Mas $N_B = P_B = m_B \cdot g$
$N_B = P_B = 6{,}0 \cdot 10$
$N_B = P_B = 60$ N

Logo:

$F_{at_B} = 0{,}50 \cdot 60$ $\quad \boxed{F_{at_B} = 30 \text{ N}}$

c) Aplicando a Segunda Lei de Newton ao conjunto, temos:

$F - F_{at_A} - F_{at_B} = (m_A + m_B) \cdot a$
$160 - 70 - 30 = (14 + 6{,}0) \cdot a$

$\boxed{a = 3{,}0 \text{ m/s}^2}$

d) Na Fig. b representamos as forças que atuam no bloco B; $\vec{F_1}$ é a força exercida pelo bloco A sobre o bloco B.

Apliquemos a Segunda Lei de Newton ao bloco *B*:

$F_1 - F_{at_B} = m_B \cdot a$

$F_1 - 30 = 6{,}0 \cdot 3{,}0$

$\boxed{F_1 = 48\ N}$

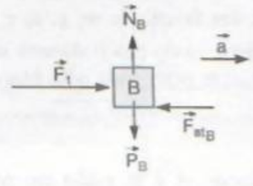
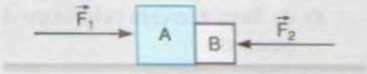


Fig. b

24. Dois blocos, *A* e *B*, estão em repouso, encostados um no outro e apoiados sobre uma superfície plana horizontal, numa região em que $g = 10\ m/s^2$. As massas de *A* e *B* são respectivamente iguais a 3,0 kg e 2,0 kg, e o coeficiente de atrito dinâmico entre cada bloco e a superfície horizontal é $\mu_d = 0{,}40$. A partir de certo instante aplicam-se aos blocos as forças horizontais $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, conforme mostra a figura.

Sendo 80 N e 30 N, respectivamente, os módulos de $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, calcule, após iniciado o movimento, os módulos:



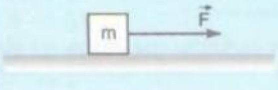
a) da força de atrito exercida sobre o bloco *A*;
b) da força de atrito exercida sobre o bloco *B*;
c) da aceleração dos blocos;
d) da força exercida pelo bloco *A* sobre o bloco *B*.

25. Os blocos *A* e *B* representados na figura têm massas respectivamente iguais a 6,0 kg e 4,0 kg. O fio e a polia são ideais e $g = 10\ m/s^2$. O coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco *A* e a superfície de apoio é $\mu_d = 0{,}50$. Sabendo que o sistema foi abandonado em repouso, calcule:

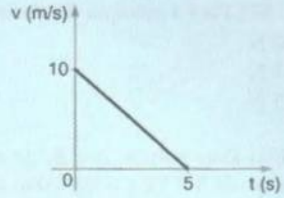
a) o módulo da aceleração adquirida pelo bloco *A*;
b) o módulo da tração no fio.

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

26. (UF-MG) Um bloco de massa $m = 1{,}0$ kg acha-se inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal. Uma força $\vec{F}$, paralela à superfície, é aplicada sobre o bloco (veja figura). O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é $\mu = 0{,}25$ e a aceleração da gravidade pode ser considerada como $g = 10\ m/s^2$. Determine a intensidade de $\vec{F}$ para que o bloco se movimente com velocidade constante.



27. (Mackenzie-SP) Um corpo é lançado sobre uma superfície plana, horizontal e rugosa com velocidade de 10 m/s. A velocidade desse corpo varia com o tempo de acordo com o gráfico ao lado. Adote g = = 10 m/s². O coeficiente de atrito entre o bloco e a superfície de apoio é:

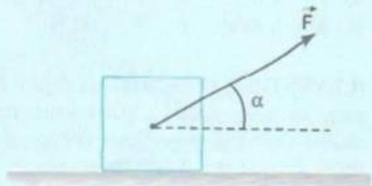


a) 0,2 c) 0,5 e) 0,8
b) 0,4 d) 0,6

28. (UNISA-SP) Um bloco desliza sobre uma superfície plana horizontal sem atrito, com velocidade 10 m/s. Ao penetrar numa região plana horizontal, com atrito, ele percorre uma distância de 20 m até parar. Qual o valor do coeficiente de atrito? (Adote g = 10 m/s².)

a) 0,50 b) 0,30 c) 0,25 d) 0,15

29. (Mackenzie-SP) Sobre um bloco de 20 kg, que se encontra em repouso sobre uma superfície horizontal, age a força de 150 N, como mostra a figura ao lado. O coeficiente de atrito entre o bloco e a superfície de apoio é 0,6. A aceleração adquirida pelo corpo é:



a) 7,5 m/s²
b) 6,0 m/s²
c) 3,3 m/s²
d) 2,7 m/s²
e) 1,3 m/s²

Dados:
cos α = 0,8
sen α = 0,6
g = 10 m/s²

30. (E. E. Mauá-SP) Um motorista está dirigindo numa estrada horizontal, com neblina densa, a 120 km/h, quando vê à sua frente um caminhão que trafega no mesmo sentido, a 36 km/h. Percebe imediatamente que deveria ter obedecido à sinalização e aos limites de segurança, pois a estrada está em obras e no trecho afunilado não é possível a ultrapassagem. Freia seu carro até travarem-se as rodas, mas o pavimento está úmido e o coeficiente de atrito é apenas $\mu = 0,10$. Quando as rodas são travadas, a velocidade do carro é de 108 km/h e a distância dele ao caminhão é de apenas 72 metros. (Adote g = 10 m/s².)

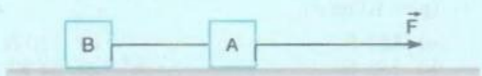
a) É possível evitar a colisão?
b) Em caso negativo, qual a velocidade do carro no instante da colisão?

31. (FUVEST-SP) Você empurra um livro sobre uma mesa horizontal comunicando-lhe uma certa velocidade inicial. Você observa que, depois de abandonado, o livro desliza aproximadamente 1 metro sobre a mesa até parar. Se a massa do livro fosse o dobro, e se você o empurrasse, comunicando-lhe a mesma velocidade inicial, ele deslizaria, até parar, aproximadamente:

a) 0,25 m b) 0,5 m c) 1 m d) 1,4 m e) 2 m

32. (PUC-SP) Dois blocos, *A* e *B*, de pesos respectivamente iguais a 30 N e 70 N, apóiam-se sobre uma mesa horizontal, ligados por um fio ideal. O coeficiente de atrito entre os blocos e a mesa é 0,4 e a aceleração da gravidade é g = 10 m/s². Aplicando-se ao bloco *A* uma força horizontal $\vec{F}$ de intensidade 50 N, os blocos entram em movimento. A aceleração comunicada ao sistema é:

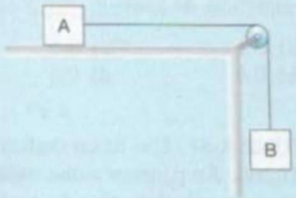
a) 5 m/s² d) 2 m/s²
b) 4 m/s² e) 1 m/s²
c) 3 m/s²



33. (PUC-SP) Para a situação da questão anterior, a tração no fio vale:

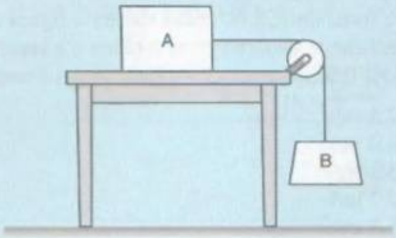
a) 50 N
b) 35 N
c) 25 N
d) 15 N
e) 10 N

34. (UC-PR) Dois corpos, *A* e *B*, de massas respectivamente iguais a 3 kg e 6 kg, estão ligados por um fio ideal que passa por uma polia sem atrito, conforme a figura. Entre o corpo *A* e o apoio, o coeficiente de atrito é 0,50. Considerando $g = 10\ m/s^2$, a aceleração de cada corpo e a tração no fio valem:



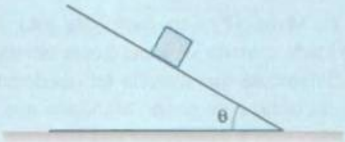
a) $a = 5\ m/s^2$ e $T = 30\ N$
b) $a = 3\ m/s^2$ e $T = 30\ N$
c) $a = 8\ m/s^2$ e $T = 80\ N$
d) $a = 2\ m/s^2$ e $T = 100\ N$
e) $a = 6\ m/s^2$ e $T = 60\ N$

35. (CEVEST-ES) O esquema da figura é usado para se determinar o coeficiente de atrito cinético entre as superfícies do corpo *A* e da mesa. Se o corpo *A* tem massa $m_A = 5,0$ kg, o corpo *B* tem massa $m_B = 15,0$ kg e o módulo da aceleração do corpo *A* é $5,0\ m/s^2$, o atrito cinético entre as duas superfícies é:



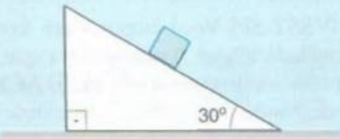
a) 1,5
b) 1,0
c) 0,75
d) 0,50
e) 0,40

36. (FATEC-SP) Uma caixa desliza ao longo de um plano com atrito e inclinação θ em relação à horizontal. Ao ser aumentado o ângulo θ, a força de atrito:



a) não se altera.
b) aumenta de intensidade.
c) muda de sentido mas não de intensidade.
d) diminui de intensidade.
e) inicialmente aumenta de intensidade e depois diminui.

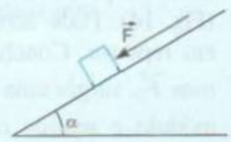
37. (UF-SC) Um bloco de massa 5 kg está descendo um plano inclinado de 30° em relação a um plano horizontal. O coeficiente de atrito entre o bloco e a superfície é $\frac{0,4}{\sqrt{3}}$ e a aceleração da gravidade é $10\ m/s^2$. Calcule a aceleração do bloco.



38. (UNISA-SP) Um corpo de 20 kg é colocado sobre um plano inclinado de 8 m de altura e 10 m de comprimento. O coeficiente de atrito entre o corpo e o plano é 0,2. A força paralela ao plano inclinado que deve ser aplicada ao corpo para que este suba o plano com movimento uniforme é: ($g = 10\ m/s^2$)

a) 184 N
b) 160 N
c) 135 N
d) 120 N
e) 24 N

39. (FAAP-SP) Um corpo de peso P desliza para baixo ao longo de um plano que tem inclinação α em relação a um plano horizontal, empurrado por uma força $\vec{F}$ paralela ao plano inclinado, como mostra a figura. O coeficiente de atrito entre o corpo e o plano inclinado é μ. Determine a intensidade de $\vec{F}$, sabendo que a velocidade do corpo é constante.



40. (PUC-SP) Uma criança de 30 kg começa a descer um escorregador inclinado de 30° em relação ao solo horizontal. O coeficiente de atrito dinâmico entre o escorregador e a roupa da criança é $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e a aceleração local da gravidade é 10 m/s². Após o início da descida, como é o movimento da criança enquanto escorrega?

Dados:

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$

a) Não há movimento nessas condições.
b) Desce em movimento acelerado.
c) Desce em movimento uniforme e retilíneo.
d) Desce em movimento retardado até o final.
e) Desce em movimento retardado e pára antes do final do escorregador.

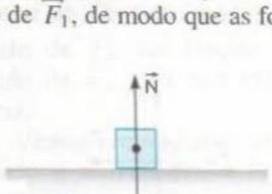
4. FORÇA DE ATRITO ESTÁTICO

Quando não há movimento relativo entre as superfícies de contato de dois corpos, a força de atrito, desde que exista, é chamada *força de atrito estático*. Uma característica importante da força de atrito estático é que seu módulo é variável.

Exemplo:

Consideremos um bloco inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal e rugosa (Fig. 12). As únicas forças que atuam no bloco são o peso $\vec{P}$ e a força normal $\vec{N}$ exercida pela superfície. Nessa situação a força de atrito é nula: $F_{at} = 0$.

Apliquemos ao bloco uma força horizontal $\vec{F_1}$ (Fig. 13) e suponhamos que, apesar da ação de $\vec{F_1}$, o bloco permaneça em repouso. Isso significa que, ao aplicarmos $\vec{F_1}$, surgiu uma força de atrito $\vec{F}_{at_1}$, de sentido oposto ao de $\vec{F_1}$ e de mesmo módulo de $\vec{F_1}$, de modo que as forças se anulam e o bloco fica parado: $F_{at_1} = F_1$.



$F_{at} = 0$

Fig. 12

$v = 0 \Rightarrow F_1 = F_{at_1}$

Fig. 13

Retiremos a força $\vec{F_1}$ e apliquemos ao bloco uma força horizontal $\vec{F_2}$, tal que $F_2 > F_1$ (Fig. 14). Pode acontecer que o bloco continue em repouso. Concluímos então que, ao aplicarmos $\vec{F_2}$, surgiu uma força de atrito $\vec{F}_{at_2}$ de mesmo módulo e sentido oposto ao de $\vec{F_2}$. Assim, ao aumentarmos a força aplicada, a força de atrito também aumentará, desde que o bloco permaneça em repouso.

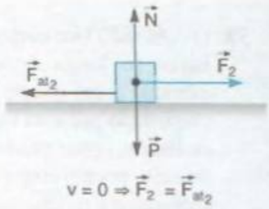


Fig. 14

Como ilustrou o exemplo, a força de atrito estático tem módulo variável. Mas a experiência mostra que essa variação tem um limite, isto é, existe um *valor máximo* para o módulo da força de atrito estático. Indicaremos essa força máxima por $\vec{F}_{at,\,máx}$. Assim, voltando ao caso do exemplo, para tirar o bloco do repouso, devemos puxá-lo com uma força $\vec{F_3}$ tal que $F_3 > F_{at,\,máx}$.

Quando a força de atrito estático atinge o seu valor máximo mas o bloco continua em repouso, dizemos que o bloco está na *iminência de movimento*.

A experiência mostra que o módulo da força máxima de atrito estático é dado por:

$$\vec{F}_{at,\,máx} = \mu_e N \qquad \text{(II)}$$

onde N é a intensidade da força normal exercida entre os corpos em contato e μ_e é uma constante chamada *coeficiente de atrito estático*. O valor de μ_e depende do material de que é feito cada corpo em contato, bem como do estado de polimento e lubrificação, mas não depende (aproximadamente) da área da superfície de contato.

Podemos observar que a fórmula (II) é semelhante à fórmula que nos dá a força de atrito dinâmico ($F_{at} = \mu_d \cdot N$). No entanto, os coeficientes μ_e e μ_d em geral são diferentes. Mostra a experiência que, para cada par de corpos em contato, temos:

$$\mu_e > \mu_d$$

Porém, às vezes, a diferença entre eles é tão pequena que podemos considerá-los iguais e representar a ambos por μ:

$$\mu_e = \mu_d = \mu \qquad \text{(em alguns casos)}$$

Exemplo:

Consideremos um bloco de massa $m = 6{,}0$ kg, inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal com atrito, num local em que $g = 10$ m/s^2 (Fig. 15). Sejam $\mu_e = 0{,}40$ e $\mu_d = 0{,}30$ os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre o bloco e a superfície horizontal. Na situação da Fig. 15, a força de atrito é nula. Apliquemos ao bloco uma força horizontal $\vec{F}$ de intensidade crescente, a partir de zero (Fig. 16).

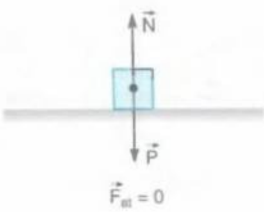


Fig. 15

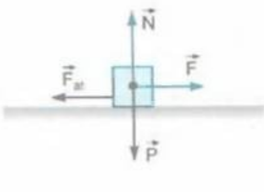


Fig. 16

Para F > 0, o bloco passa a sofrer a ação de uma força de atrito $\vec{F}_{at}$, de sentido oposto ao de $\vec{F}$. Para que o bloco saia do repouso, é necessário que F supere a máxima força de atrito estático ($F_{at,\,máx}$), a qual é dada por:

	$F_{at,\,máx} = \mu_e \cdot N$
Mas	$N = P = m \cdot g = (6{,}0)\ (10)$
isto é,	$N = 60$ newtons
Assim	$F_{at,\,máx} = \mu_e \cdot N = (0{,}40)\ (60)$
	$F_{at,\,máx} = 24$ newtons

Portanto, para que o bloco entre em movimento, devemos ter F > 24 N. Suponhamos que F = 6,0 N. Nesse caso, temos $F < F_{at,\,máx}$ e, portanto, o bloco não entra em movimento: $F = F_{at} = 6{,}0$ N (Fig. 17). Suponhamos agora que F = 12 N. Ainda temos $F < F_{at,\,máx}$ e, portanto, o bloco não entra em movimento: $F = F_{at} = 12$ N (Fig. 18). Aumentemos a intensidade de $\vec{F}$ para F = 24 N. Nesse caso, temos $F = F_{at,\,máx}$ e, assim, o bloco permanece em repouso (Fig. 19), mas está na *iminência de movimento*, isto é, qualquer aumento na intensidade de $\vec{F}$ fará com que o bloco entre em movimento.

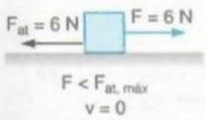


Fig. 17

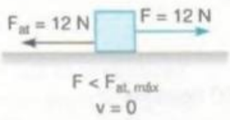


Fig. 18

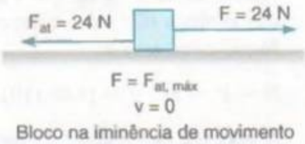


Fig. 19

Podemos ver, então, que para $0 \leqslant F \leqslant 24$ N, o bloco permanece em repouso e, em cada caso, $F_{at} = F$. Aumentemos a intensidade de $\vec{F}$ para um valor F > 24 N (Fig. 20). Agora o bloco entra em movimento e a força de atrito passa a ser a força de atrito dinâmico ($F_{at,\,d}$) dada por:

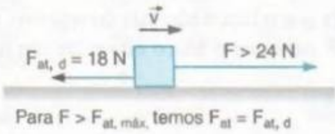


Fig. 20

$$F_{at,\,d} = \mu_d \cdot N = (0{,}30)\ (60)$$
$$F_{at,\,d} = 18\ N$$

Para F > 24 N, a força de atrito não varia mais, independentemente da velocidade. A Fig. 21 nos dá o gráfico do módulo de $\vec{F}_{at}$ em função do módulo de $\vec{F}$, para esta experiência.

Vemos então que, após iniciado o movimento, a força de atrito é menor que o máximo valor de $\vec{F}_{at}$, enquanto o bloco estava em repouso; isso sempre ocorre quando $\mu_e > \mu_d$. Supo-

Fig. 21

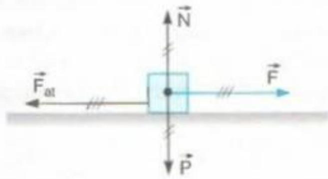
nhamos que, após *iniciado o movimento*, diminuamos o valor de F para $F = 21$ N, por exemplo. Essa força não foi suficiente para *tirar o bloco do repouso*, mas é suficiente para *manter o movimento*, pois a força de atrito dinâmico vale apenas 18 N.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

41. Um bloco de massa $m = 8{,}0$ kg está inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal, com atrito, numa região em que $g = 10$ m/s^2. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a superfície horizontal é $\mu_e = 1{,}2$, calcule a máxima intensidade de uma força horizontal $\vec{F}$ que podemos aplicar ao bloco sem que ele saia do repouso.

Resolução:

Aplicando-se a força horizontal $\vec{F}$, no mesmo instante passa a atuar sobre o bloco uma força de atrito $\vec{F}_{at}$ de sentido oposto ao de $\vec{F}$ e tal que $F_{at} = F$, desde que o bloco não saia do repouso.



Nesse caso, temos:

$N = P = m \cdot g = (8{,}0)\,(10)$ $\quad N = 80$ newtons

A máxima intensidade da força de atrito estático é:

$F_{at,\,máx} = \mu_e \cdot N = (1{,}2)\,(80)$ $\quad F_{at,\,máx} = 96$ N

Portanto, para que o bloco não saia do repouso, devemos ter $0 \leqslant F \leqslant 96$ N, isto é, o valor máximo de F para que o bloco não entre em movimento é:

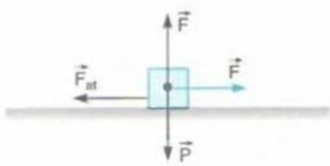
$\boxed{F_{máx} = 96 \text{ N}}$

42. Um bloco de massa $m = 15$ kg está inicialmente em repouso sobre uma superfície plana e horizontal, com atrito, num local em que $g = 10$ m/s^2. Aplica-se ao bloco uma força horizontal $\vec{F}$. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a superfície horizontal é $\mu_e = 0{,}60$, calcule o máximo valor de $\vec{F}$, de modo que o bloco não entre em movimento.

43. Consideremos um bloco de massa $m = 20$ kg inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal, numa região em que $g = 10$ m/s^2. Aplica-se ao bloco uma força horizontal $\vec{F}$ de intensidade $F = 70$ N. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a superfície horizontal é $\mu_e = 0{,}50$, calcule a intensidade da força de atrito aplicada sobre o bloco.

Resolução:

Aplicando-se a força $\vec{F}$, o bloco passa a sofrer a ação de uma força de atrito $\vec{F}_{at}$ de sentido oposto ao de $\vec{F}$.



$N = P = m \cdot g = (20)\,(10)$

$N = 200$ newtons

A máxima força de atrito estático é

$F_{at,\,máx} = \mu_e \cdot N = (0{,}50)\ (200)$
$F_{at,\,máx} = 100\ N$

Porém, $F = 70\ N$, isto é, $F < F_{at,\,máx}$. Assim concluímos que o bloco permanece em repouso e, portanto, $F_{at} = F$, isto é:

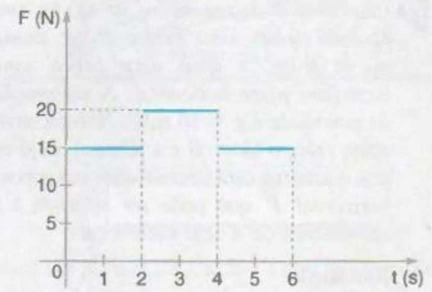
$F_{at} = 70\ N$

44. Um bloco de massa $m = 5{,}0$ kg está inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal, num local em que $g = 10\ m/s^2$. Aplica-se ao bloco uma força horizontal $\vec{F}$ de intensidade $F = 30\ N$. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a superfície horizontal é $\mu_e = 0{,}80$, calcule a força de atrito que atua sobre o bloco, após a aplicação de $\vec{F}$.

45. Consideremos um corpo de massa $m = 12$ kg inicialmente em repouso sobre uma mesa horizontal. Sabe-se que $g = 10\ m/s^2$ e que os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre o corpo e a mesa são respectivamente $\mu_e = 0{,}70$ e $\mu_d = 0{,}40$. Aplicamos ao corpo uma força horizontal $\vec{F}$. Calcule os módulos da força de atrito atuante no corpo e os módulos da aceleração do corpo após a aplicação de $\vec{F}$, nos seguintes casos:

a) $F = 60\ N$ b) $F = 84\ N$ c) $F = 90\ N$

46. Um corpo de massa $m = 2{,}0$ kg está inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal, numa região em que $g = 10\ m/s^2$. Os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre o corpo e a superfície de apoio são $\mu_e = 0{,}90$ e $\mu_d = 0{,}50$. A partir do instante $t = 0$ aplicamos ao corpo uma força horizontal $\vec{F}$, de direção e sentido constantes, mas cujo módulo varia em função do tempo de acordo com o gráfico dado. Calcule os módulos da aceleração do corpo e da força de atrito atuante no corpo, nos seguintes instantes:

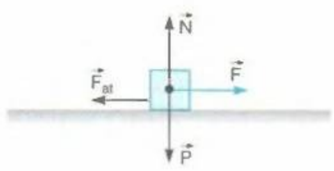


a) $t = 1$ s b) $t = 3$ s c) $t = 5$ s

47. Sobre uma superfície plana horizontal está inicialmente em repouso um bloco de massa $m = 20$ kg. A aceleração local da gravidade é $10\ m/s^2$. Aplica-se ao bloco uma força horizontal $\vec{F}$, de intensidade $F = 80\ N$, e observa-se que o bloco permanece em repouso. Calcule os possíveis valores do coeficiente de atrito estático entre o bloco e a superfície horizontal.

Resolução:

$N = P = m \cdot g = 20(10)$
$N = 200$ newtons



Já que o bloco permanece em repouso, o atrito é estático e temos:

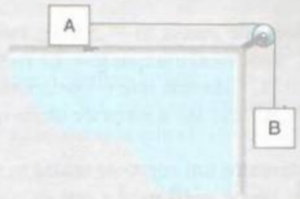
$F_{at} = F = 80\ N \qquad (I)$

A máxima força de atrito estático é: $F_{at,\,máx} = \mu_e \cdot N = \mu_e\,(200)$ (II)

Podemos também escrever: $F_{at} \leqslant F_{at,\,máx}$ (III)

Substituindo (I) e (II) em (III), temos: $80 \leqslant \mu_e \cdot (200)$ ou $\mu_e \geqslant 0{,}40$

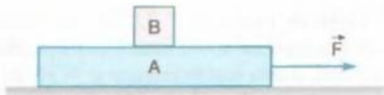
48. O sistema esquematizado na figura é abandonado em repouso. A polia e o fio são ideais, a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10\ m/s^2$ e a massa do bloco A é $m_A = 8{,}0$ kg.



a) Supondo que o coeficiente de atrito estático entre o bloco A e a superfície de apoio seja $\mu_e = 0{,}75$, calcule os possíveis valores da massa do bloco B, de modo que o sistema fique em repouso.

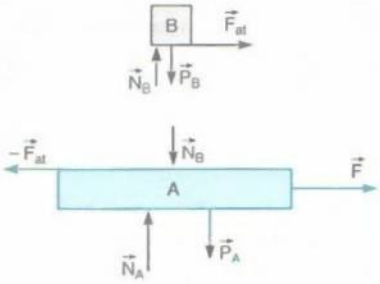
b) Supondo que a massa de B seja $m_B = 3{,}2$ kg, determine os possíveis valores do coeficiente de atrito estático entre o bloco A e a superfície de apoio, de modo que o sistema fique em repouso.

49 Um bloco B de massa $m_B = 4{,}0$ kg está apoiado sobre uma tábua A de massa $m_A = 16$ kg, a qual está sobre uma superfície plana horizontal. A aceleração da gravidade é $g = 10\ m/s^2$. Não há atrito entre a tábua A e a superfície horizontal, mas há atrito entre o bloco B e a tábua A, cujo coeficiente de atrito estático é $\mu_e = 0{,}25$. Supondo que o sistema está inicialmente em repouso, determine a máxima intensidade de uma força horizontal $\vec{F}$ que pode ser aplicada à tábua A, de modo que o bloco B acompanhe o movimento de A sem escorregar.



Resolução:

A figura representa as forças que atuam em cada corpo, analisados separadamente. Ao puxarmos a tábua para a "direita" (pela aplicação da força $\vec{F}$), a tendência de B é ficar "para trás" (pela Lei da Inércia); portanto, a força de atrito que A aplica em B ($\vec{F}_{at}$) tem sentido para a "direita". Pelo Princípio da Ação e Reação, a força de atrito que B aplica em A ($-\vec{F}_{at}$) tem sentido para a "esquerda". Temos:



$N_B = P_B = m_B \cdot g = (4{,}0)\,(10)$ $N_B = 40$ N

A força $\vec{F}$ tem intensidade máxima quando o bloco B está na iminência de escorregar sobre A. Assim,

$F_{at} = F_{at,\,máx} = \mu_e \cdot N_B = (0{,}25)\,(40)$ $F_{at} = 10$ N

Aplicando a Segunda Lei de Newton ao bloco B, temos:

$F_{at} = m_B \cdot a$

$10 = 4{,}0 \cdot a$ $a = 2{,}5\ m/s^2$

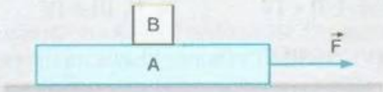
Apliquemos agora a Segunda Lei de Newton ao sistema formado pelos corpos *A* e *B*:

$F = (m_A + m_B) \cdot a$

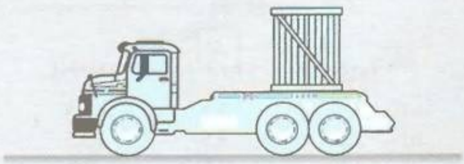
$F = (4{,}0 + 16) \cdot (2{,}5)$ $\boxed{F = 50\ N}$

Portanto, a máxima intensidade possível para $\vec{F}$ (sem que o bloco *B* escorregue) é 50 N e a máxima aceleração é 2,5 m/s². Se F < 50 N, teremos a < 2,5 m/s² e a força de atrito será inferior ao seu valor máximo.

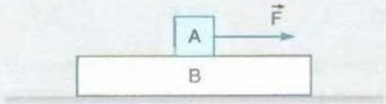
50. Consideremos um bloco *B*, de massa 3,0 kg, apoiado sobre uma tábua *A*, de massa 7,0 kg, a qual está sobre uma superfície plana horizontal. Considere $g = 10\ m/s^2$, despreze o atrito entre a tábua e a superfície horizontal e admita que o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a tábua é $\mu_e = 0{,}40$. Supondo que o sistema está inicialmente em repouso, calcule a máxima intensidade de uma força horizontal $\vec{F}$ que pode ser aplicada sobre a tábua, de modo que o bloco *B* acompanhe o movimento de *A*, sem escorregar.



51. Um caminhão está inicialmente em repouso, com uma caixa sobre sua carroceria também em repouso. Sabendo que $g = 10\ m/s^2$ e que o coeficiente de atrito estático entre a caixa e a carroceria do caminhão é $\mu_e = 0{,}20$, calcule a máxima aceleração que pode ser imprimida ao caminhão sem que a caixa escorregue.

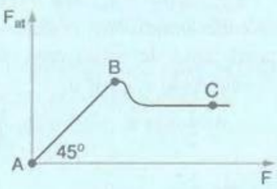


52. Um bloco *A*, de massa 4,0 kg, está sobre um bloco *B*, de massa 8,0 kg, o qual está sobre uma superfície plana horizontal, sem atrito, numa região em que $g = 10\ m/s^2$. O coeficiente de atrito estático entre o bloco *A* e o bloco *B* é $\mu_e = 0{,}20$. Calcule a máxima intensidade de uma força horizontal $\vec{F}$ que pode ser aplicada sobre o bloco *A*, de modo que o conjunto se mova sem que *A* escorregue sobre *B*.



EXERCÍCIOS DE REFORÇO

53. (UNAMA-AM) Um corpo inicialmente em repouso recebe a ação de uma força externa *F* crescente, conforme a figura. Ao lado desta, representamos graficamente a força de atrito entre o corpo e a superfície em função de *F*.



Acerca dessa situação, podemos dizer:

I – No trecho AB o corpo move-se com aceleração constante, já que o atrito varia porporcionalmente à ação *F*.

II – No trecho AB o corpo encontra-se em repouso.

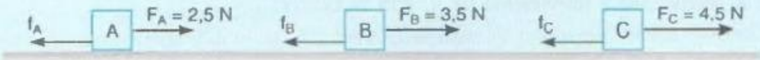
III – No ponto B, o corpo está na iminência de deslizamento.

IV – No trecho BC o corpo se movimenta, mas a força de atrito independe da velocidade do corpo, pelo menos para valores pequenos desta.

Estão corretas as afirmativas:

a) I, II e IV b) II, III e IV c) I e IV d) II e IV e) apenas a II

54. (VUNESP-SP) Os três blocos da figura, de mesmo material e mesma massa m = 1,0 kg, inicialmente em repouso sobre a superfície plana horizontal, estão submetidos às forças $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$, $\vec{F}_C$, que foram crescendo desde zero até os valores indicados. A aceleração da gravidade é g = 9,8 m/s² e os coeficientes de atrito estático e cinético são respectivamente iguais a 0,36 e 0,25. As forças de atrito $\vec{f}_A$, $\vec{f}_B$ e $\vec{f}_C$ têm intensidades iguais a:

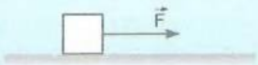


	f_A(N)	f_B(N)	f_C(N)
a)	3,5	3,5	2,5
b)	3,5	3,5	3,5
c)	2,5	2,5	2,5
d)	2,5	2,5	3,5
e)	2,5	3,5	2,5

55. (Oswaldo Cruz-SP) Um corpo de peso 10 N está apoiado sobre uma superfície horizontal. Verifica-se que, para fazer com que o corpo comece a se movimentar, é preciso uma força horizontal maior que 5 N. Para mantê-lo em movimento retilíneo uniforme é necessária uma força de 3 N. Portanto, os coeficientes de atrito estático e cinético valem, respectivamente:

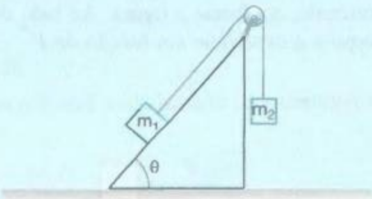
a) 3 e 5 b) 0,5 e 0,5 c) 0,5 e 0,3 d) 0,3 e 0,5 e) n.d.a.

56. (UF-ES) A figura mostra um bloco de massa 10 kg, inicialmente em repouso sobre uma mesa, ao qual se aplica uma força horizontal $\vec{F}$ de intensidade 20 N. A aceleração da gravidade tem módulo 10 m/s², o coeficiente de atrito estático é 0,3 e o cinético é 0,2. A intensidade da força de atrito entre o bloco e a mesa vale:



a) 30 N b) 25 N c) 20 N d) 5 N e) zero

57. (F. M. ABC-SP) O conjunto representado na figura encontra-se na iminência de movimento. Considere:
$m_1 = 2$ kg; $m_2 = 1$ kg; $\text{sen}\,\theta = 0,8$; $\cos\theta = 0,6$ e g = 10 m/s². Nessas condições, podemos afirmar que o coeficiente de atrito entre o bloco 1 e o plano inclinado é igual a:

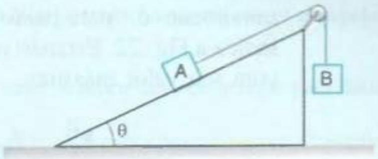


a) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{8}$

b) $\frac{3}{4}$ d) 2

58. (PUC-SP) O esquema representa um plano inclinado sobre o qual está apoiado um corpo *A* de peso P_A. O corpo *A* é solicitado por uma força paralela ao plano, de intensidade P_B, peso do corpo *B*. Chamando F_{at} a força máxima de atrito entre o corpo *A* e o plano inclinado e desprezando o atrito na polia, o máximo valor de P_B compatível com o equilíbrio é:

a) F_{at}
b) P_A
c) $P_A \cdot \text{sen}\ \theta - F_{at}$
d) $P_A \cdot \cos\theta - F_{at} \cdot \text{sen}\ \theta$
e) $P_A \cdot \text{sen}\ \theta + F_{at}$

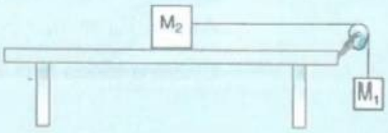


59. (UNISA-SP) Um caminhão transporta cinco caixas que não devem sofrer deslizamento. O coeficiente de atrito entre as caixas e o caminhão é 0,4. Quando o caminhão se move a 72 km/h, a menor distância que ele pode percorrer até parar, sem haver deslizamento das caixas, é: (adote $g = 10\ m/s^2$)

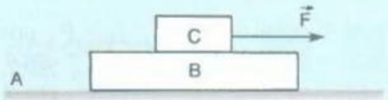
a) 100 m b) 50 m c) 30 m d) 25 m e) 20 m

60. (CESESP-PE) Dois blocos de massa M_1 e M_2 são ligados por uma corda leve e inextensível que passa por um pino fixo e liso, conforme mostra a figura. O coeficiente de atrito estático entre o bloco 2 e a mesa horizontal é μ. Se $M_2 = 4M_1$, o menor valor possível de μ para que os blocos não entrem em movimento deve ser:

a) 4,50
b) 0,45
c) 0,20
d) 0,65
e) 0,25



61. (Fund. Carlos Chagas-SP) A figura representa dois blocos, *B* e *C*, de massas respectivamente iguais a 10 kg e 5 kg, apoiados sobre uma superfície *A*, numa região em que $g = 10\ m/s^2$. O coeficiente de atrito de *B* sobre *A* é 0,05 e o de *C* sobre *B* é 0,2.



Supondo que o sistema está inicialmente em repouso e aplicando ao corpo *C* uma força horizontal $\vec{F}$ de intensidade 5 N:

a) *C* desliza sobre *B*, mas *B* não desliza sobre *A*.
b) *C* não desliza sobre *B*, mas *B* desliza sobre *A*.
c) *C* não desliza sobre *B* e *B* não desliza sobre *A*.
d) *C* desliza sobre *B* e *B* desliza sobre *A*.
e) *C* desliza sobre *B* e *B* desliza sobre *A* em sentido contrário.

62. (UF-RN) Um caminhão de entrega de mercadorias saiu para entregar uma caixa. O caminhão está se movendo, em uma rua plana, com velocidade de 20 m/s quando o motorista avista o endereço em que deve entregar a mercadoria. Ele freia uniformemente e pára em 4 segundos. O mínimo coeficiente de atrito entre a caixa e o piso do caminhão, de modo que a caixa não deslize, é:

a) 0,3 b) 0,4 c) 0,5 d) 0,6 e) 0,7

63. (FUVEST-SP) Uma locomotiva de massa *M* está ligada a um vagão de massa $\frac{2}{3}$ M, ambos sobre trilhos horizontais e retilíneos. O coeficiente de atrito estático entre as rodas da locomotiva e os trilhos é μ, e todas as demais fontes de atrito podem ser desprezadas. Ao se pôr a locomotiva em movimento, sem que suas rodas patinem sobre os trilhos, a máxima aceleração que ela pode imprimir ao sistema formado por ela e pelo vagão vale:

a) $\frac{3}{5}\mu g$ b) $\frac{2}{3}\mu g$ c) μg d) $\frac{3}{2}\mu g$ e) $\frac{5}{3}\mu g$

3

5. ÂNGULO DE ATRITO

Consideremos um bloco de massa *m*, em repouso sobre um plano inclinado com atrito, na iminência de movimento (Fig. 22). Como a tendência de movimento é "para baixo", a força de atrito $\vec{F}_{at}$ tem sentido "para cima", como indica a Fig. 22. Estando o bloco na iminência de movimento, a força de atrito está com seu valor máximo:

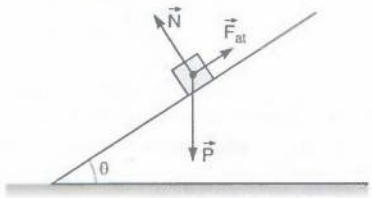


Fig. 22

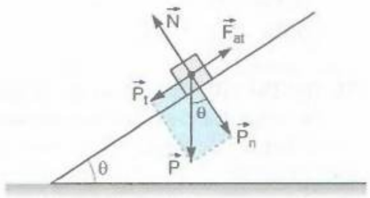


Fig. 23

$$F_{at} = F_{at,\,máx} = \mu_e \cdot N$$

Mas $N = P_n = P \cdot \cos\theta$

Assim, $F_{at} = \mu_e \cdot N = \mu_e \cdot P \cdot \cos\theta$ (I)

Como o bloco está em repouso, temos:

$$F_{at} = P_t = P \cdot \operatorname{sen}\theta \qquad \text{(II)}$$

De (I) e (II), tiramos:

$$\mu_e \cdot P \cdot \cos\theta = P \cdot \operatorname{sen}\theta$$

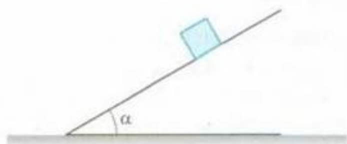
ou $$\mu_e = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

ou, ainda, $$\mu_e = \operatorname{tg}\theta$$

Assim, se colocarmos um corpo sobre um plano inclinado e formos aumentando o ângulo de inclinação, o maior ângulo para o qual o corpo permanece em repouso é o ângulo θ tal que $\operatorname{tg}\theta = \mu_e$. Esse ângulo é chamado *ângulo de atrito*.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

64 Um bloco é abandonado sobre um plano que forma com um plano horizontal um ângulo α tal que $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}60$ e $\cos\alpha = 0{,}80$. Verifique se o bloco permanece em repouso ou entra em movimento, sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano inclinado é $\mu_e = 0{,}70$.



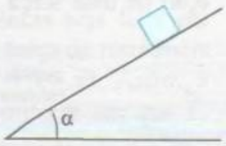
Resolução:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0{,}60}{0{,}80} = 0{,}75$$

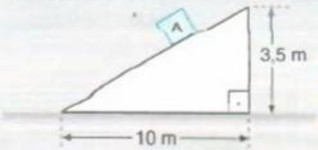
Como $\mu_e = 0{,}70$, o ângulo máximo para o qual o bloco permanece em repouso é o ângulo θ tal que $\text{tg}\ \theta = \mu_e = 0{,}70$.

Como $\text{tg}\ \alpha > \text{tg}\ \theta$, concluímos que $\alpha > \theta$ e, portanto, o bloco deve escorregar para baixo.

65. Consideremos um plano cuja inclinação em relação a um plano horizontal é um ângulo α tal que $\text{sen}\ \alpha = \frac{5}{13}$ e $\cos \alpha = \frac{12}{13}$. Sobre esse plano abandonamos em repouso um bloco cujo coeficiente de atrito estático com o plano inclinado é $\mu_e = 0{,}50$. Verifique se o bloco permanece em repouso ou escorrega.

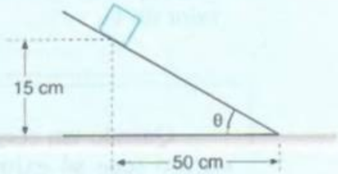


66. Um bloco A é abandonado em repouso sobre uma face de um prisma triangular fixo ao solo, como mostra a figura. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o bloco A e o prisma é $\mu_e = 0{,}27$, verifique se o bloco escorrega ou permanece em repouso.



EXERCÍCIOS DE REFORÇO

67. (F. M. ABC-SP) Um bloco de metal é colocado sobre uma mesa horizontal que se vai inclinando gradualmente. Quando a mesa forma com a horizontal o ângulo θ da figura, o bloco fica na iminência de deslizar. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a mesa vale:



a) 0,20
b) 0,30
c) 0,40
d) 0,10
e) 0,70

68. (FATEC-SP) Deposita-se uma pedra de dominó sobre uma tábua que se inclina mais e mais. Quando o ângulo da tábua com o horizonte é θ, a pedra fica na iminência de deslizar. A pedra tem peso P; a reação R da tábua sobre a pedra tem componente normal N e componente tangencial T. O coeficiente de atrito estático é μ. Assinale o conjunto correto.

	R	N	T	μ
a)	P	$P \cdot \cos \theta$	$P \cdot \text{sen}\ \theta$	$\text{sen}\ \theta$
b)	P	$P \cdot \cos \theta$	$P \cdot \text{sen}\ \theta$	$\cos \theta$
c)	P	$P \cdot \cos \theta$	$P \cdot \text{sen}\ \theta$	$\text{tg}\ \theta$
d)	P	$P \cdot \text{sen}\ \theta$	$P \cdot \cos \theta$	$\text{tg}\ \theta$

3

69. (INATEL-MG) Um bloco de massa m desce uma rampa inclinada em um ângulo θ em relação à horizontal, com velocidade constante. O coeficiente de atrito entre o bloco e a rampa mede:

a) $\text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta$
b) $\cos\theta / \text{sen}\,\theta$
c) $\text{sen}\,\theta / \cos\theta$
d) $\text{sen}\,\theta$
e) $\cos\theta$

6. RESISTÊNCIA DOS FLUIDOS

Quando um corpo se move no interior de um fluido (líquido ou gás), sofre a ação de uma força ($\vec{F_r}$) que tem sentido oposto ao do movimento do corpo em relação ao fluido (Fig. 24). Essa força pode ser chamada de *força de atrito fluido*, *força de atrito viscoso* ou, simplesmente, *força de resistência do fluido*. Experimentalmente obtém-se que sua intensidade é dada por:

Fig. 24

$$F_r = k \cdot v^n$$

onde:

v é o módulo da velocidade do corpo em relação ao fluido;
n é uma constante que depende da ordem de grandeza da velocidade e do tamanho do corpo; para a maioria dos casos temos n = 1 ou n = 2;
k é uma constante que depende da natureza do fluido (bem como de sua temperatura e densidade), do formato do corpo e da área da maior seção reta do corpo, perpendicular à direção do movimento (quanto maior essa área, maior o valor de k).

Observação

Quando um corpo está no interior de um fluido, além da força de atrito viscoso (que só existe quando o corpo está em movimento em relação ao fluido), o fluido aplica ao corpo uma outra força (que existe mesmo quando o corpo está parado), denominada *empuxo* ($\vec{E}$). Esse empuxo tem sentido oposto ao da aceleração da gravidade (Fig. 25) e módulo dado por:

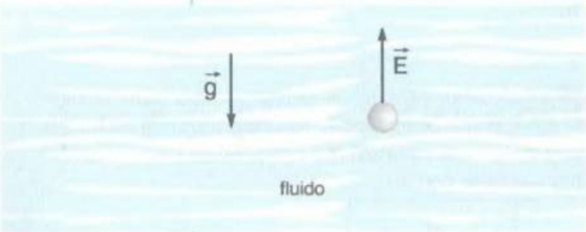


Fig. 25

$$E = d \cdot V \cdot g$$

onde:

g é o módulo da aceleração da gravidade;
V é o volume do corpo;
d é a densidade do fluido.

Assim, desde que a densidade do fluido seja pequena em comparação com a densidade do corpo, o empuxo pode ser desprezado; é o caso, por exemplo, de um corpo movendo-se no ar. No volume de Termologia faremos o estudo detalhado do empuxo. Por enquanto, vamos nos limitar a considerar exercícios onde o empuxo possa ser desprezado.

Exemplo:

Consideremos um bloco inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal e sem atrito (Fig. 26). Apliquemos então ao bloco uma força horizontal $\vec{F}$ de intensidade constante. Não havendo atrito com a superfície de apoio, o bloco entra em movimento. Porém, supondo que a experiência seja feita em presença do ar, assim que se inicia o movimento aparece uma força de resistência do ar, de sentido oposto ao de $\vec{F}$ (Fig. 27) e de módulo $F_r = k \cdot v^n$. Assim, à medida que v aumenta, F_r também aumenta. Há então um instante em que F_r torna-se igual a F (Fig. 28). A partir desse instante, a resultante das forças que atuam no bloco torna-se nula e a velocidade fica constante. Essa velocidade é denominada *velocidade limite* ou *velocidade terminal* e é indicada por v_L.

Fig. 26

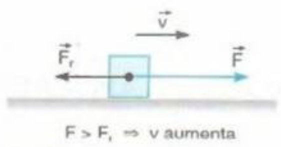


Fig. 27

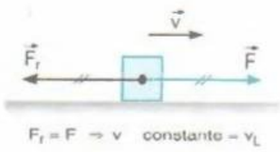


Fig. 28

O gráfico do módulo v da velocidade em função do tempo tem o aspecto da Fig. 29. No instante em que a velocidade limite é atingida, temos $F_r = F$, isto é, $k \cdot v_L^n = F$, ou

$$v_L = \sqrt[n]{\frac{F}{k}}$$

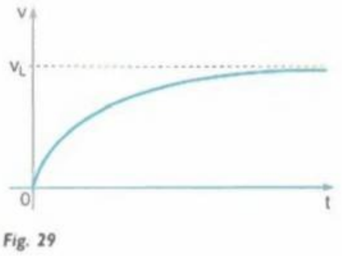


Fig. 29

Sendo a o módulo da aceleração do bloco, temos (pela Segunda Lei de Newton):

$$F - F_r = m \cdot a$$

ou $$a = \frac{F - F_r}{m} = \frac{F - kv^n}{m}$$

Assim, o módulo de a é variável (pois F_r varia). No instante inicial de aplicação de $\vec{F}$, a velocidade é nula e, assim, $a = \frac{F}{m}$; no instante em que $F_r = F$, teremos $a = 0$ e o gráfico de a em função do tempo tem o aspecto da Fig. 30.

Fig. 30

Exemplo:

Suponhamos um caso em que a força de resistência de um fluido seja dada por $F_r = k \cdot v^2$. Vamos verificar qual é a unidade de *k* no Sistema Internacional de Unidades. De $F_r = k \cdot v^2$, tiramos $k = \frac{F_r}{v^2}$. No Sistema Internacional, a unidade de força é o newton (N) e a unidade de velocidade é m/s. Assim:

$$\text{unidade de } k = \frac{N}{\left(\frac{m}{s}\right)^2} = \frac{N \cdot s^2}{m^2} \qquad \text{(I)}$$

Poderíamos dar a unidade de *k* de outro modo, lembrando que força = (massa) · (aceleração). Assim:

$$N = kg \cdot m/s^2$$

Substituindo em (I), temos:

$$\text{unidade de } k = \frac{(kg \cdot m/s^2)s^2}{m^2} = \frac{kg}{m}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

70 Um bloco de massa m = 32 kg está inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal e sem atrito. No instante t = 0 aplica-se ao bloco uma força horizontal $\vec{F}$ de intensidade F = 128 N. O ar aplica sobre o bloco uma força resistente de intensidade $F_r = k \cdot v^2$, onde *v* é o módulo da velocidade e $k = 2{,}0\ N \cdot s^2/m^2$.

a) Determine a velocidade limite atingida pelo bloco.
b) Esboce os gráficos dos módulos da velocidade e da aceleração do bloco em função do tempo.

Resolução:

a) Como o bloco estava em repouso, ao receber a ação da força $\vec{F}$, começa a mover-se no mesmo sentido de $\vec{F}$ e, assim, a força de resistência do ar ($\vec{F}_r$) tem sentido oposto ao de $\vec{F}$ (Fig. a). A velocidade do bloco aumenta até que $F_r = F$, isto é, $kv_L^2 = F$, onde v_L é o módulo da velocidade limite.

$k \cdot v_L^2 = F$

$2{,}0 \cdot v_L^2 = 128$

$\boxed{v_L = 8{,}0\ m/s}$

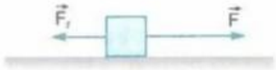


Fig. a

b) O gráfico de *v* em função de *t* é o da Fig. b. No instante t = 0, o bloco ainda está em repouso e assim a força resultante é $\vec{F}$. Portanto, no instante t = 0 temos $F = m \cdot a_i$, onde a_i é o módulo da aceleração para t = 0.

$F = m \cdot a_i$

$128 = 32 \cdot a_i \qquad \boxed{a_i = 4{,}0\ m/s^2}$

Portanto, o gráfico de a em função de t é o da Fig. c.

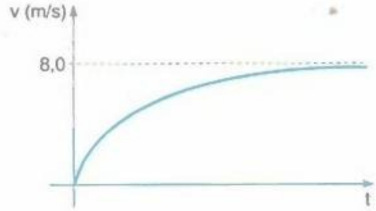


Fig. b

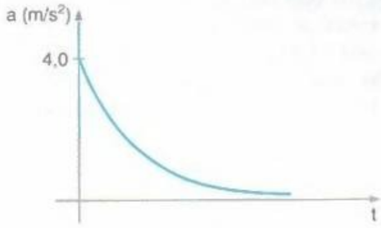
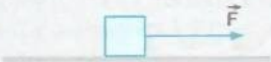


Fig. c

71. Consideremos um bloco de massa m = = 9,0 kg, inicialmente em repouso sobre uma superfície plana e horizontal, sem atrito. A partir de determinado instante, aplica-se ao bloco uma força horizontal $\vec{F}$ de intensidade 18 N. Ao iniciar-se o movimento, o bloco sofre a ação de uma força de resistência do ar cuja intensidade é dada por $F_r = k \cdot v^2$, onde v é o módulo da velocidade e $k = 0{,}50 \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$. Calcule a velocidade limite atingida pelo bloco.



72. Um pára-quedista salta de grande altura, numa região em que $g = 10 \text{ m/s}^2$. O sistema formado pelo pára-quedas e pelo pára-quedista tem massa 100 kg e a força de resistência do ar que atua no sistema tem módulo dado por $F_r = k \cdot v^2$, onde v é o módulo da velocidade e $k = 40$ kg/m. Calcule a máxima velocidade atingida pelo sistema. (Despreze o empuxo.)

73. Uma partícula de massa m é abandonada de grande altura, numa região em que a aceleração da gravidade tem módulo g. Desprezando o empuxo do ar e sabendo que a força de resistência do ar que atua na partícula tem módulo $F_r = k \cdot v^2$, determine o módulo da velocidade limite.

Resolução:

Durante a queda da partícula, há duas forças atuando na partícula: o peso ($\vec{P}$) e a força de resistência do ar ($\vec{F_r}$). A velocidade limite é atingida no instante em que $F_r = P$. Assim: $k \cdot v_L^2 = m \cdot g$

ou $\boxed{v_L = \sqrt{\dfrac{m \cdot g}{k}}}$

74. Consideremos dois objetos esféricos, A e B, de mesmo raio e massas respectivamente iguais a m_A e m_B, com $m_A > m_B$. Os dois objetos são abandonados simultaneamente de uma mesma altura em relação ao solo.

a) Supondo que a experiência tenha sido feita no vácuo, qual dos dois objetos atinge o solo em primeiro lugar?

b) Supondo que a experiência tenha sido feita em presença do ar, qual dos objetos atinge o solo em primeiro lugar?

3

75 Uma partícula de massa m = 20 kg é lançada verticalmente para baixo, com velocidade inicial de módulo $v_0 = 7{,}0$ m/s, numa região em que $g = 10$ m/s^2. Despreze o empuxo do ar e admita que a força de resistência do ar que atua na partícula tem módulo $F_r = 8{,}0\ v^2$ (no Sistema Internacional). Analise o que ocorre com a velocidade da partícula.

Fig. a

Resolução:

Calculemos primeiramente a velocidade limite da partícula. Quando a partícula atinge a velocidade limite, devemos ter $F_r = P$, isto é,

$8{,}0\ v_L 2 = m \cdot g$

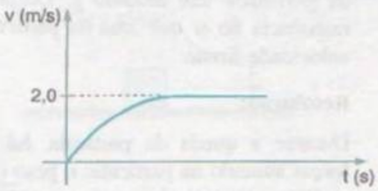
$8{,}0\ v_L 2 = 20(10)$

$v_L = 5{,}0$ m/s

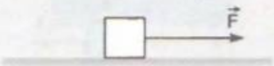
Percebemos, então, que a partícula foi lançada com velocidade v_0 maior que a velocidade limite v_L ($v_0 > v_L$). Isso significa que, inicialmente, teremos $F_r > P$ e o movimento é retardado. A velocidade deve ir diminuindo até atingir a velocidade limite (Fig. b). A partir desse instante, a velocidade torna-se constante.

Fig. b

76. Uma gota de chuva cai verticalmente, a partir do repouso, numa região em que $g = 10$ m/s^2. A figura nos dá o módulo da velocidade da gota em função do tempo. A força de resistência que o ar aplica na gota é dada por $F_r = 2{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot v$ (no Sistema Internacional). Desprezando o empuxo do ar, calcule a massa da gota.



77. Um bloco de massa m = 15 kg está inicialmente em repouso sobre uma superfície plana horizontal e com atrito, cujo coeficiente é $\mu = 0{,}80$. A aceleração local da gravidade tem módulo $g = 10$ m/s^2. A partir de determinado instante, aplica-se ao bloco uma força horizontal $\vec{F}$, de intensidade F = 320 N. Sabendo que a força de resistência do ar é dada por $F_r = 0{,}50 \cdot v^2$ (no Sistema Internacional), calcule a máxima velocidade atingida pelo bloco.



78. Uma partícula de massa m = 2,0 kg move-se em trajetória retilínea no interior de um fluido, sendo $\vec{F}$ a resultante das forças que atuam na partícula. Sabendo que $F = 8{,}0 - 20 \cdot v$ (no Sistema Internacional), onde v é o módulo da velocidade da partícula, calcule os módulos.

a) da velocidade limite da partícula;

b) da aceleração da partícula quando sua velocidade tiver módulo v = 0,10 m/s.

3

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

79. (FUVEST-SP) As duas forças que agem sobre uma gota de chuva, a força peso e a força devida à resistência do ar, têm mesma direção e sentidos opostos. A partir da altura de 125 m acima do solo, estando a gota com uma velocidade de 8 m/s, essas duas forças passam a ter o mesmo módulo. A gota atinge o solo com a velocidade de:

a) 8 m/s
b) 35 m/s
c) 42 m/s
d) 50 m/s
e) 58 m/s

80. (ITA-SP) Numa região em que $g = 10\ m/s^2$, um corpo de massa $m = 8{,}0$ gramas cai na água, atingindo após alguns segundos uma velocidade praticamente constante de 5,0 m/s. Sabe-se que, neste caso, a força de resistência exercida pela água é dada por $F_r = k \cdot v$, onde v é a velocidade do corpo. Desprezando o empuxo da água, podemos afirmar que a constante k é igual a:

a) $16\ N \cdot s/m$
b) $1{,}6 \cdot 10^2\ kg/s$
c) $1{,}6 \cdot 10^3\ kgf/s$
d) $1{,}6 \cdot 10^{-3}\ N \cdot s/m$
e) $1{,}6 \cdot 10^{-2}\ N \cdot s/m$

81. (Mackenzie-SP) Abandona-se no ar um corpo a uma grande altura do solo. Após certo tempo o seu movimento apresenta velocidade constante. Podemos então afirmar que:

a) a aceleração da gravidade torna-se nula.
b) a força de resistência do ar desaparece.
c) a força de resistência do ar é igual em módulo e de sentido oposto ao do peso do corpo.
d) a resultante das forças aplicadas ao corpo é nula.
e) o movimento do corpo não pode ser uniforme.

82. (FATEC-SP) Com pára-quedas aberto, um soldado salta de um helicóptero em grande altura acima de uma planície. Sobre o sistema formado pelo pára-quedas e pelo homem, podemos afirmar que:

a) a velocidade cresce uniformemente com aceleração inferior a g.
b) a velocidade de chegada ao solo depende da altura inicial.
c) a velocidade de chegada ao solo depende da duração do processo.
d) à medida que a velocidade se eleva, aumenta a força resultante que as cordas exercem no homem.
e) a velocidade permanece constante durante toda a queda.

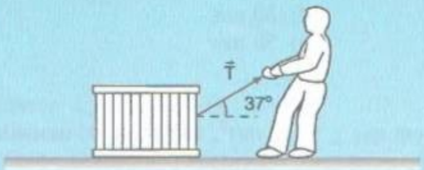
83. (UF-RJ) Um método de medir a resistência oferecida por um fluido é mostrado na figura a seguir:

Uma bolinha de massa m desce verticalmente ao longo de um tubo de vidro graduado totalmente preenchido com glicerina. Com a ajuda das graduações do tubo percebe-se que, a partir de um determinado instante t, a bolinha percorre distâncias iguais em intervalos de tempo iguais. Nestas condições, sendo g a aceleração da gravidade e desprezando o empuxo do fluido sobre a bolinha, calcule, após o instante t, o módulo da:

a) resultante das forças que atuam sobre a bolinha;
b) força resultante que o fluido exerce sobre a bolinha.

3 EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

84. (VUNESP-SP) A figura ilustra um jovem arrastando um caixote com uma corda, ao longo de uma superfície horizontal, com velocidade constante. A tração $\vec{T}$ que ele exerce no fio é de 20 N.



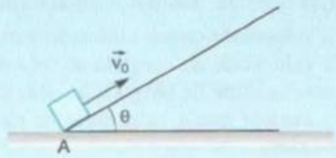
a) Desenhe todas as forças que atuam sobre o caixote, nomeando-as.
b) Calcule a força de atrito entre o caixote e o solo.

São dados: sen 37° = cos 53° = 0,6; sen 53° = cos 37° = 0,8.

85. (VUNESP-SP) Durante a partida, uma locomotiva imprime ao comboio (conjunto de vagões) de massa $2{,}5 \times 10^6$ kg uma aceleração constante de 0,05 m/s².

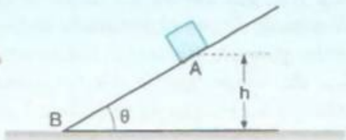
a) Qual é a intensidade da força resultante que acelera o comboio?
b) Se as forças de atrito, que se opõem ao movimento do comboio, correspondem a 0,006 de seu peso, qual é a intensidade da força que a locomotiva aplica no comboio? (Considere $g = 10$ m/s².)

86. Uma partícula de massa m = 20 kg é lançada com velocidade inicial $v_0 = 30$ m/s de um ponto *A* de uma rampa que forma ângulo θ com o solo, como mostra a figura. O coeficiente de atrito dinâmico entre a partícula e a rampa é $\mu_d = \frac{1}{3}$, $g = 10$ m/s², sen θ = = 0,80 e cos θ = 0,60. Calcule:



a) o módulo da aceleração da partícula durante a subida;
b) o intervalo de tempo decorrido até que a velocidade da partícula se anule;
c) a distância percorrida pela partícula sobre a rampa, até parar;
d) a altura máxima atingida pela partícula, em relação ao solo.

87. Uma partícula de massa *m* é abandonada com velocidade inicial nula, no ponto *A* de um plano inclinado, como mostra a figura. A aceleração da gravidade tem módulo *g* e o coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e o plano inclinado é μ. Suponhamos que, apesar do atrito, o bloco deslize para baixo. Calcule, em função de m, g, μ, h e θ:



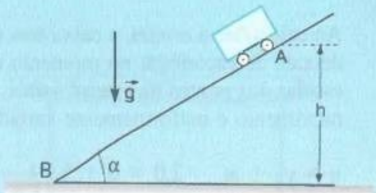
a) o módulo da aceleração do bloco durante a descida;
b) o intervalo de tempo decorrido no percurso $\overline{AB}$, onde *B* é o ponto em que o bloco atinge o solo.

88. (FAAP-SP) Um corpo de massa igual a 4 kg sobe um plano inclinado de 45° em relação a um plano horizontal, em movimento retilíneo e uniforme, sob a ação de uma força de tração paralela ao plano inclinado e de intensidade $30\sqrt{2}$ N. Adote $g = 10\ m/s^2$.

a) Qual o coeficiente de atrito entre o corpo e o plano?

b) Se o corpo parte da base do plano inclinado e se desloca 4 metros em 2 segundos e, nesse instante, o fio que lhe transmite a força de tração se rompe, qual a distância que o corpo percorre plano acima?

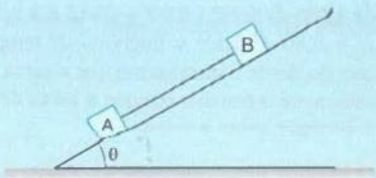
89. (FUVEST-SP) Um bloco de massa m, montado sobre rodas (para tornar o atrito desprezível), parte do repouso em A e leva um tempo t_0 para atingir B. A massa das rodas é desprezível. Retirando-se as rodas, verifica-se que o bloco, partindo do repouso em A, leva um tempo $2t_0$ para atingir B.



a) Determine o valor de t_0.

b) Determine o valor do coeficiente de atrito entre o plano e o bloco (sem rodas), em função de α.

90. Sobre um plano inclinado são abandonados dois blocos, A e B, ligados por um fio ideal, como mostra a figura. As massas de A e B são respectivamente iguais a 4,0 kg e 6,0 kg. Os coeficientes de atrito dinâmico entre os blocos A e B e o plano inclinado são, respectivamente, $\mu_A = 0,25$ e $\mu_B = 0,50$. Sabendo que $g = 10\ m/s^2$, calcule:

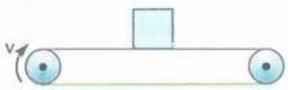


a) o módulo da aceleração do conjunto;

b) o módulo da tração no fio.

91. Considere a situação do exercício anterior. Calcule a intensidade da tração no fio, supondo $\mu_A = \mu_B = 0,50$.

92 Uma caixa cai, de pequena altura, sobre uma esteira transportadora cujos pontos se movem com velocidade escalar $v = 2,0$ m/s. A aceleração da gravidade tem módulo $g = 10\ m/s^2$ e o coeficiente de atrito dinâmico entre a caixa e a esteira é $\mu = 0,50$. Calcule o intervalo de tempo decorrido desde o instante em que a caixa cai sobre a esteira até o instante em que a caixa pára de escorregar sobre a esteira.



Resolução:

Admitamos que a caixa não tem velocidade inicial na direção horizontal. Ao entrar em contato com a esteira, a caixa está sob a ação de três forças: o seu peso $\vec{P}$, a força normal $\vec{N}$ exercida pela esteira e a força de atrito $\vec{F}_{at}$, a qual tem o mesmo sentido do movimento da esteira, pois, pela Lei da Inércia, a tendência da caixa é ficar "para trás". Nesse caso, a normal deve anular o peso:

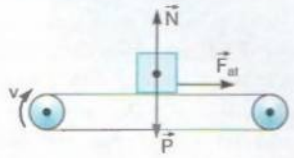
$$N = P = m \cdot g$$

3

Sabemos que $F_{at} = \mu N$. Portanto:

$F_{at} = \mu m \cdot g$

Aplicando a Segunda Lei de Newton à caixa, temos:



$F_{at} = m \cdot a \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \Rightarrow a = \mu g \Rightarrow a = (0{,}50)\ (10)$

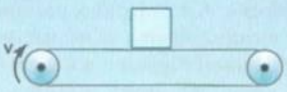
$a = 5{,}0\ m/s^2$

Ao cair sobre a esteira, a caixa tem velocidade nula na direção horizontal ($v_0 = 0$). A caixa deixará de escorregar no momento em que sua velocidade escalar v for igual à velocidade escalar dos pontos da esteira, isto é, $v = 2{,}0$ m/s. Como a aceleração escalar é constante, o movimento é uniformemente variado. Assim:

$v = v_0 + at \qquad 2{,}0 = 0 + 5{,}0\ t$

$t = 0{,}40\ s$

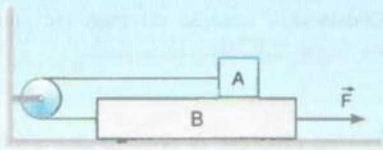
93. Uma caixa cai, de pequena altura, sobre uma esteira transportadora, cujos pontos se movem com velocidade escalar $v = 4{,}0$ m/s. A aceleração da gravidade tem módulo $g = 10\ m/s^2$ e o coeficiente de atrito dinâmico entre a caixa e a esteira é $\mu = 0{,}80$. Calcule o intervalo de tempo decorrido desde o instante em que a caixa toca a esteira até o instante em que a caixa deixa de escorregar sobre a esteira.



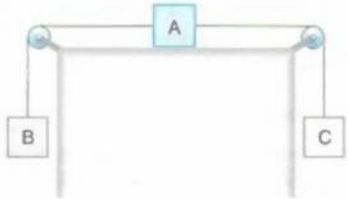
94. O sistema esquematizado na figura está inicialmente em repouso. O fio e a polia são ideais, $g = 10\ m/s^2$, a massa de *A* é 4,0 kg e a de *B* é 16 kg. Existe atrito entre *A* e *B* e entre *B* e a superfície de apoio, sendo o coeficiente de atrito dinâmico igual a 0,20 em ambos os casos. A partir de determinado instante, aplica-se ao bloco *B* uma força horizontal $\vec{F}$, como mostra a figura. Calcule o módulo de $\vec{F}$ nos seguintes casos:

a) os blocos passam a mover-se com velocidade constante;

b) os blocos passam a mover-se com aceleração constante de módulo $a = 3{,}0\ m/s^2$.



95 O sistema representado na figura é abandonado em repouso. As polias e os fios são ideais e as massas dos blocos *A* e *B* são respectivamente iguais a 5,0 kg e 7,0 kg. Adote $g = 10\ m/s^2$ e suponha que o coeficiente de atrito estático entre o bloco *A* e a superfície de apoio é $\mu_e = 0{,}20$.



a) Determine os valores possíveis para a massa do bloco *C*, de modo que o sistema fique em repouso.

b) Para que valor da massa de *C* a força de atrito entre o bloco *A* e a superfície de apoio é nula?

Resolução:

a) $N = P_A = m_A \cdot g = (5{,}0)\,(10)$ $N = 50$ Newtons

A força máxima de atrito entre o bloco *A* e a superfície de apoio é:

$F_{at,\,máx} = \mu_e \cdot N = (0{,}20)\,(50)$

$F_{at,\,máx} = 10\ N$

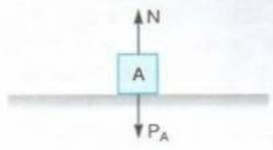


Fig. a

Façamos duas hipóteses:

1ª hipótese: Bloco *A* na iminência de movimento para a direita. Nesse caso, a força de atrito $\vec{F}_{at}$ tem sentido para a esquerda e já atingiu seu valor máximo:

$F_{at} = F_{at,\,máx} = 10\ N$

Como o sistema está em repouso, temos:

$P_C = P_B + F_{at}$ (I)

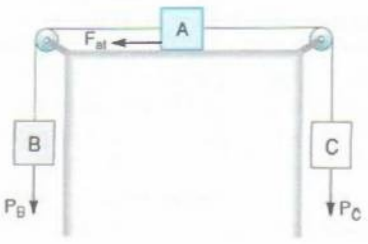


Fig. b

Mas $P_B = m_B \cdot g = (7{,}0)\,(10)$, isto é, $P_B = 70\ N$. Substituindo em (I), temos:

$P_C = 70 + 10$

ou $P_C = 80\ N$

Portanto, $m_C = \dfrac{P_C}{g} = \dfrac{80}{10}$ $m_C = 8{,}0\ kg$

2ª hipótese: Bloco *A* na iminência de movimento para a esquerda. Nesse caso, a força de atrito $\vec{F}_{at}$ tem sentido para a direita e atingiu seu valor máximo:

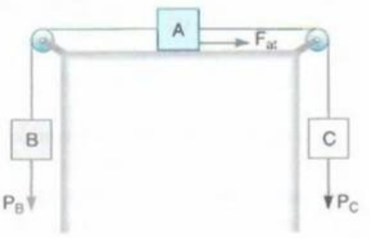
$F_{at} = F_{at,\,máx} = 10\ N$

Como o sistema está em repouso, temos:

$P_C + F_{at} = P_B$

ou $P_C = P_B - F_{at} = 70 - 10 = 60$

$P_C = 60\ N$



Portanto,

$m_C = \dfrac{P_C}{g} = \dfrac{60}{10}$ $m_C = 6{,}0\ kg$

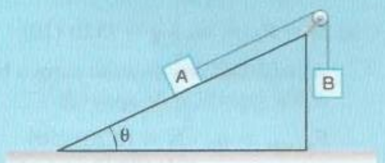
Observando as conseqüências da 1ª e 2ª hipóteses, concluímos que, para que o sistema fique em repouso, devemos ter:

$6{,}0\ kg \leqslant m_C \leqslant 8{,}0\ kg$

b) Para que a força de atrito seja nula, devemos ter $P_C = P_B$, isto é, $m_C = m_B$.

$m_C = 7{,}0\ kg$

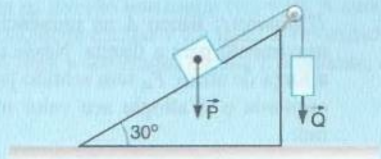
96. No sistema representado na figura, o fio e a polia são ideais e a massa do bloco A é 20 kg. Adote $g = 10\ m/s^2$, suponha que o coeficiente de atrito estático entre o bloco A e o plano inclinado é $\mu = 0{,}25$ e admita que o sistema tenha sido abandonado em repouso.



sen θ = 0,60 e cos θ = 0,80

a) Determine os valores da massa de B para os quais o sistema permanece em repouso.
b) Para que valor da massa de B a força de atrito entre o bloco A e o plano inclinado é nula?

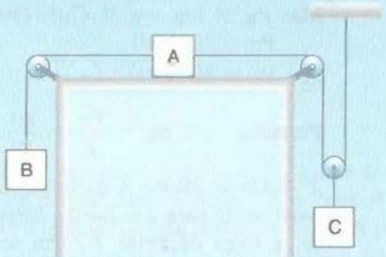
97. (E. E. Mauá-SP) Um corpo de peso $P = 50$ N está apoiado num plano inclinado de 30° com a horizontal. O coeficiente de atrito estático entre o corpo e o plano é $\mu = 0{,}2$. Um segundo corpo de peso Q está preso ao primeiro por meio de um fio que passa por uma polia sem atrito. Considere $\cos 30° = 0{,}87$.



a) Entre que limites pode variar o peso Q de forma que o sistema permaneça em repouso?
b) Para que valor de Q a força de atrito entre o corpo e o plano inclinado é nula?

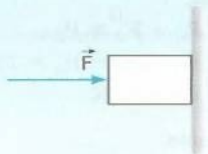
98. (PUC-SP) No sistema representado na figura, as polias e os fios são ideais, o peso de A é 20 N e o peso de B é 10 N. O coeficiente de atrito entre A e a superfície horizontal é igual a 0,2. Para que o sistema fique em equilíbrio, o peso de C deve ficar no intervalo:

a) 3 N a 5 N
b) 6 N a 8 N
c) 8,5 N a 11 N
d) 12 N a 28 N
e) 30 N a 45 N

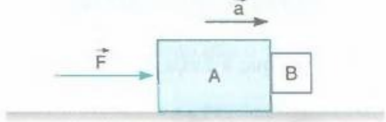


99. Um bloco de massa de 8,0 kg é mantido em repouso, encostado em um parede vertical, aplicando-se a ele uma força horizontal $\vec{F}$, como mostra a figura. Adote $g = 10\ m/s^2$.

a) Supondo que o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a parede seja igual a 0,40, determine os valores possíveis para a intensidade de $\vec{F}$.
b) Supondo que a intensidade de $\vec{F}$ é 400 N, determine os valores possíveis para o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a parede.



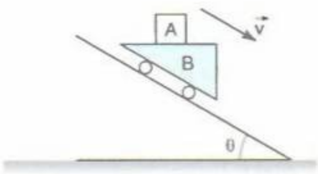
100. Um bloco A, apoiado em uma superfície plana horizontal sem atrito, move-se em movimento acelerado de aceleração $\vec{a}$, empurrado por uma força horizontal $\vec{F}$. O bloco A, por sua vez, empurra um bloco B, como mostra a figura, de modo que B não caia. Adote $g = 10\ m/s^2$ e suponha que o coeficiente de atrito estático entre os blocos A e B seja igual a μ.



3

a) Supondo $\mu = 0{,}40$, determine os valores possíveis para o módulo de $\vec{a}$.
b) Supondo $\mu = 0{,}40$ e que as massas de A e B sejam $m_A = 8{,}0$ kg e $m_B = 2{,}0$ kg, calcule os valores possíveis para a indensidade de $\vec{F}$.
c) Supondo $|\vec{a}| = 20$ m/s², calcule os valores possíveis de μ.

101 Um bloco A, de massa m = 10 kg, está sobre um carro B, o qual desce por uma rampa sem atrito, como mostra a figura, sem que A escorregue sobre B. São dados: $g = 10$ m/s², sen $\theta = 0{,}60$ e cos $\theta = 0{,}80$. Calcule as intensidades da força normal ($\vec{N}$) e da força de atrito ($\vec{F}_{at}$) exercidas pelo carro sobre o bloco A.



Resolução:

1º modo:

O conjunto A + B move-se pela rampa sem atrito, como se fosse um único corpo. Portanto, de acordo com o que vimos na teoria do plano inclinado, o conjunto A + B tem aceleração $\vec{a}$ cuja direção é paralela à rampa, cujo sentido é para baixo (Fig. a) e cujo módulo é dado por:

$$a = g \cdot \text{sen}\,\theta$$

isto é, $a = (10)\,(0{,}60)$ $\quad a = 6{,}0$ m/s²

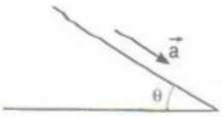


Fig. a

Sobre o bloco A atuam pelo menos duas forças, ambas *verticais*: o peso $\vec{P}$ e a força normal $\vec{N}$ exercida pelo carro (Fig. b). Mas a aceleração $\vec{a}$ pode ser decomposta em uma componente horizontal $\vec{a}_x$ e uma componente vertical $\vec{a}_y$ (Fig. c). Existindo a componente horizontal $\vec{a}_x$, deve haver uma força horizontal: é a força de atrito $\vec{F}_{at}$ (Fig. d). Se não houvesse essa força de atrito, o bloco A escorregaria sobre B.

Fig. b

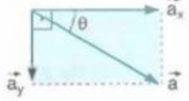


Fig. c

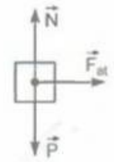


Fig. d

$P = m \cdot g = 10(10)$ $\quad P = 100$ N

Da Fig. c, tiramos:

$$\begin{cases} a_x = a \cdot \cos\theta = (6{,}0)\,(0{,}80) & a_x = 4{,}8 \text{ m/s}^2 \\ a_y = a \cdot \text{sen}\,\theta = (6{,}0)\,(0{,}60) & a_y = 3{,}6 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

Aplicando a Segunda Lei de Newton para a direção horizontal e para a direção vertical, temos:

$$\begin{cases} P - N = m \cdot a_y \\ F_{at} = m \cdot a_x \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 100 - N = 10(3{,}6) \\ F_{at} = 10(4{,}8) \end{cases}$$

isto é, $N = 64\ N$ e $F_{at} = 48\ N$

A *força total* (ou simplesmente *a força*) exercida por *B* sobre *A* é a resultante $\vec{R}$ de $\vec{N}$ e $\vec{F}_{at}$ (Fig. e):

$$R^2 = N^2 + F_{at}^2 = 64^2 + 48^2$$

$R = 80\ N$

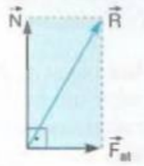


Fig. e

2º modo:

Podemos resolver o exercício usando o método convencional (recomendado no item 4 do capítulo 2), que consiste em decompor as forças em duas direções perpendiculares, sendo uma destas direções coincidente com a direção da aceleração. Façamos então essa decomposição, usando as direções perpendiculares *x* e *y*, sendo a direção *x* coincidente com a direção de $\vec{a}$ (Fig. g). Mas, de qualquer modo, deveremos usar o fato de que $a = g \cdot \text{sen}\ \theta$, isto é, $a = 6{,}0\ m/s^2$.

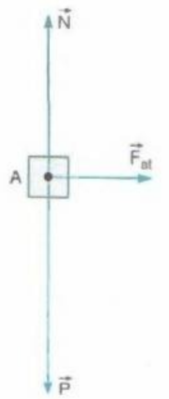


Fig. f

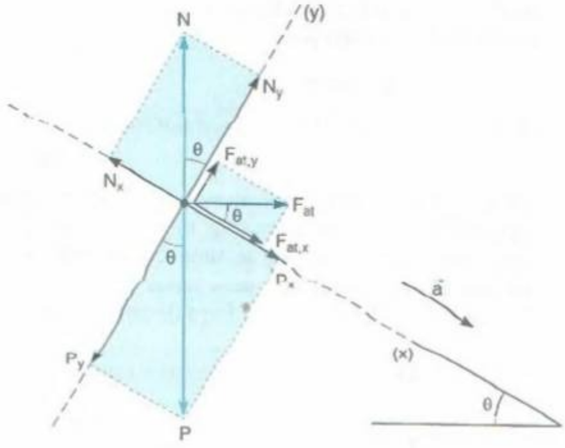


Fig. g

Da Fig. g, tiramos:

$$\begin{cases} P_x = P \cdot \text{sen}\ \theta = 100(0{,}60) \\ P_y = P \cdot \cos\theta = 100(0{,}80) \end{cases} \qquad \begin{matrix} P_x = 60\ N \\ P_y = 80\ N \end{matrix}$$

$$\begin{cases} N_x = N \cdot \text{sen}\ \theta = N(0{,}60) \\ N_y = N \cdot \cos\theta = N(0{,}80) \end{cases} \qquad \begin{cases} F_{at,x} = F_{at} \cdot \cos\theta = F_{at}(0{,}80) \\ F_{at,y} = F_{at} \cdot \text{sen}\ \theta = F_{at}(0{,}60) \end{cases}$$

Como não há componente de $\vec{a}$ na direção de *y*, nessa direção as forças devem se cancelar:

$$N_y + F_{at,y} = P_y$$

isto é: $N(0{,}80) + F_{at}(0{,}60) = 80$ (I)

Aplicando a Segunda Lei de Newton para a direção x, temos:

$P_x + F_{at,x} - N_x = m \cdot a$

ou $\quad 60 + F_{at}(0{,}80) - N(0{,}60) = 10(6{,}0) \qquad$ (II)

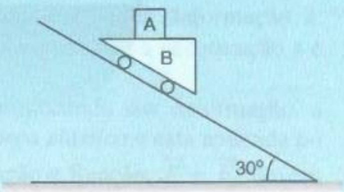
Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtemos:

$N = 64$ newtons $\quad$ e $\quad F_{at} = 48$ newtons

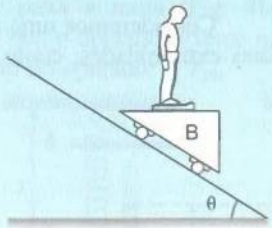
Conforme podemos observar, o método convencional não é o mais rápido nesse caso. Assim, é preferível resolver o exercício pelo 1º modo.

102. Um bloco A, de massa 20 kg, está sobre um carro B, o qual desce por uma rampa sem atrito, como mostra a figura, sem que A escorregue sobre B. Adotando $g = 10$ m/s², calcule:

a) o módulo da força normal exercida por B sobre A;
b) o módulo da força de atrito exercida por B sobre A;
c) o módulo da força exercida por B sobre A.



103. Um indivíduo de massa $m = 50$ kg está sobre uma balança de molas, a qual está fixa num carrinho B que desce por uma rampa sem atrito, como mostra a figura. São dados: $g = 10$ m/s² e $\operatorname{sen} \theta = 0{,}20$. Determine a marcação da balança, supondo que seu mostrador esteja calibrado em newtons.

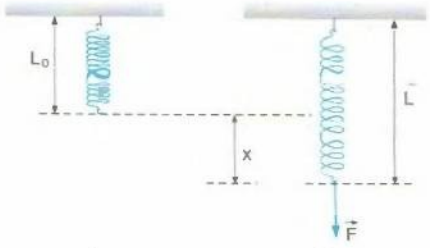


CAPÍTULO 4

FORÇA ELÁSTICA

1. LEI DE HOOKE

Consideremos uma mola de comprimento natural L_0, estando fixa uma de suas extremidades, como indica a Fig. 1a. Apliquemos à outra extremidade da mola uma força $\vec{F}$ de mesma direção da mola, de modo que seu comprimento aumente para o valor L (Fig. 1b). A diferença x entre L e L_0 é denominada *deformação* da mola. A experiência mostra que, desde que x não seja muito grande em comparação com L_0 (e esse "muito grande" vai depender de cada mola), a intensidade de $\vec{F}$ é proporcional a x, isto é:



a) *b)*

Fig. 1

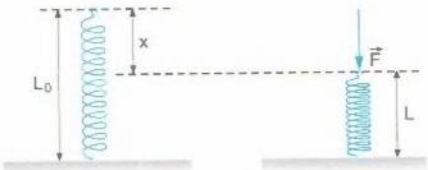
$$F = k \cdot x$$

onde k é uma constante que depende da mola. Esse resultado é conhecido como *Lei de Hooke*.

A constante k é chamada de *constante elástica da mola* (ou "constante de força da mola") e sua unidade no SI é o newton por metro (N/m).

A Lei de Hooke vale também para o caso em que a mola é *comprimida*, como no caso da Fig. 2 (desde que x não seja "muito grande").

Sendo a mola alongada ou comprimida, vale a relação:



$$F = k \cdot x$$

Fig. 2

sendo o valor de k o mesmo tanto no alongamento como na compressão de uma mesma mola.

Como $F = k \cdot x$, o gráfico de F em função de x deve ser retilíneo, como indica a Fig. 3.

Fig. 3

Tanto no caso em que a mola é "esticada" quanto no caso em que é comprimida, ao retirarmos a força $\vec{F}$ que causou a deformação, a *tendência* da mola é voltar ao seu comprimento inicial; em alguns casos pode acontecer de a mola voltar a um comprimento diferente do seu comprimento inicial, mas nós só consideraremos aqui os casos em que a mola volta rigorosamente ao seu comprimento inicial, ao ser retirada a força $\vec{F}$ que causou a deformação x. Quando isso ocorre e é obedecida a Lei de Hooke, dizemos que a deformação x é *elástica*.

Quando uma força $\vec{F}$ é aplicada na mola, provocando sua deformação, a mola reage com uma força $\vec{F}_{el}$, que é chamada de *força elástica* e está aplicada no "agente" que aplica a força $\vec{F}$; pelo Princípio da Ação e Reação, $\vec{F}$ e $\vec{F}_{el}$ devem ter o mesmo módulo, a mesma direção e sentidos opostos.

Exemplo 1:

Na Fig. 4a temos uma mola inicialmente não deformada, cujo comprimento natural é L_0, presa a um suporte S. Um operador puxa a mola (Fig. 4b) provocando um aumento no seu comprimento. A força que o operador exerce na mola é $\vec{F}$ (Fig. 4c) e a força que a mola exerce na mão do operador é $\vec{F}_{el}$.

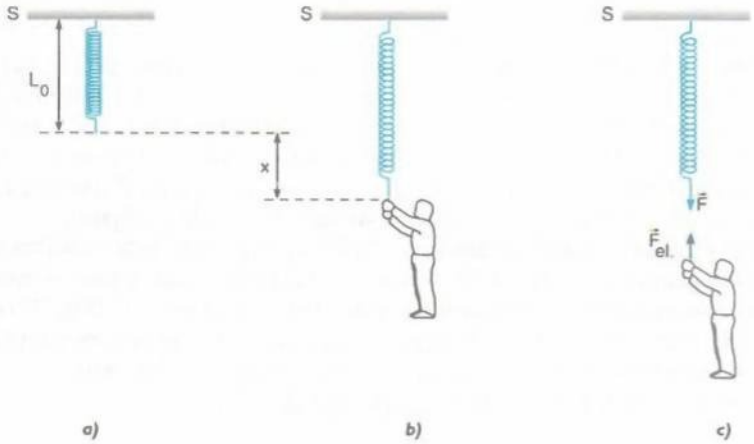


Fig. 4

Pelo Princípio da Ação e Reação, $\vec{F}$ e $\vec{F}_{el}$ têm a mesma direção, sentidos opostos e mesmo módulo:

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_{el}| = kx$$

Exemplo 2:

Na Fig. 5 representamos um bloco *B* preso a uma das extremidades de uma mola, cuja outra extremidade está presa a um suporte *S*, estando a mola *não* deformada. Temos ainda um eixo cuja origem (*O*) corresponde à posição de uma das extremidades da mola; nessa posição temos uma situação de equilíbrio.

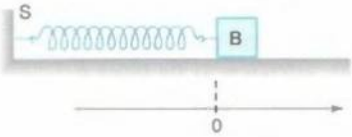


Fig. 5

Fig. 6 a) b)

Fig. 7 a) b)

Vamos tirar o bloco *B* da posição de equilíbrio puxando-o para a direita (Fig. 6a) de modo que o comprimento da mola aumente, sendo x a deformação. Nessa posição, o bloco exerce sobre a mola uma força $\vec{F}$ (Fig. 6b) e a mola exerce a força $\vec{F}_{el}$ sobre o bloco. A força $\vec{F}_{el}$ tende a trazer o bloco *B* de volta a sua posição de equilíbrio e, por isso, costuma-se dizer que a força $\vec{F}_{el}$ é uma força de *restauração*, isto é, ela procura restaurar a situação inicial de equilíbrio.

Vamos agora deslocar o bloco de modo que a mola seja comprimida (Fig. 7a); em relação ao eixo adotado, temos $x < 0$ e, portanto, a deformação nesse caso é $|x|$. Nessa posição, o bloco exerce sobre a mola uma força $\vec{F}$ (Fig. 7b) e a mola exerce sobre o bloco a força $\vec{F}_{el}$ que, novamente, tende a levar o bloco para a situação de equilíbrio, isto é, procura *restaurar* a posição de equilíbrio.

Tanto no caso da Fig. 6 como no caso da Fig. 7, temos:

$$|\vec{F}_{el}| = k \cdot |x|$$

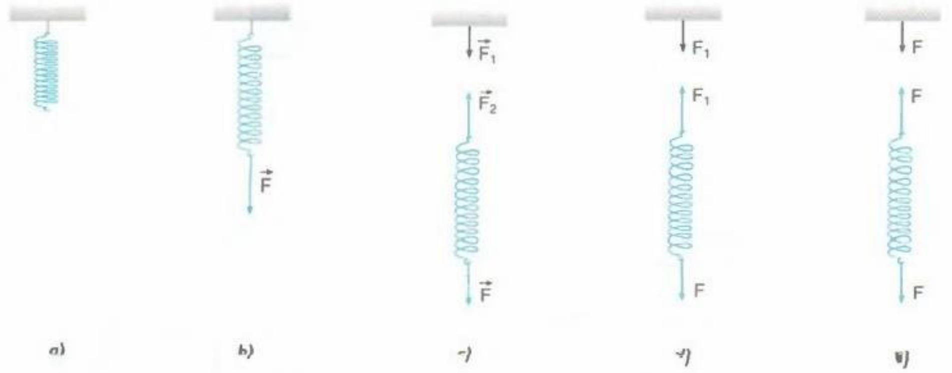
No entanto, às vezes pode ser útil atribuir um sinal à força elástica $\vec{F}_{el}$, convencionando que seu sinal é positivo quando tem o mesmo sentido do eixo e negativo quando tem sentido oposto. Desse modo, tanto no caso da Fig. 6 como no caso da Fig. 7 podemos escrever:

$$F_{el} = -k \cdot x$$

A mola ideal

Consideremos uma mola disposta verticalmente, com sua extremidade superior presa a um suporte (Fig. 8a). Apliquemos à mola uma força vertical $\vec{F}$ (Fig. 8b), de modo que o seu comprimento aumente. A mola exerce uma força $\vec{F_1}$ no suporte (Fig. 8c) e este exerce uma força $\vec{F_2}$ na mola. Mas, pelo Princípio da Ação e Reação, devemos ter $\vec{F_1} = \vec{F_2}$ (Fig. 8d). Supondo que a mola esteja em equilíbrio e que sua massa seja desprezível, teremos $F_1 = F$ (Fig. 8e).

Fig. 8



Assim, quando escrevemos

$$F = k \cdot x$$

F é a intensidade de cada uma das duas forças que atuam nas duas extremidades da mola (supondo que sua massa seja desprezível).

Chamamos de mola ideal a uma mola de massa desprezível que obedeça à Lei de Hooke.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Uma mola ideal, de comprimento natural $L_0 = 1,2\,m$, é pendurada a um suporte (Fig. a). Na extremidade inferior da mola prendemos um bloco de massa $m = 1,6\,kg$ de modo que, na posição de equilíbrio, o novo comprimento da mola é $L = 1,4\,m$ (Fig. b). Sabendo que a aceleração da gravidade tem intensidade $g = 10\,m/s^2$, calcule a constante elástica da mola.

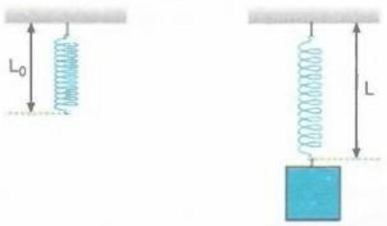


Fig. a   Fig. b

Resolução:

As forças que atuam no bloco são o seu peso ($\vec{P}$) e a força elástica $\vec{F}$ exercida pela mola. Como o bloco está em equilíbrio, devemos ter:

$F = P = m \cdot g = 1{,}6 \cdot 10 \qquad F = 16\,N$

A deformação x sofrida pela mola é dada por:

$x = L - L_0$ ou $x = 1{,}4 - 1{,}2$

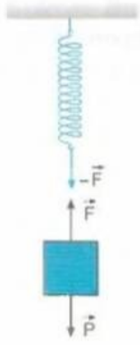
$x = 0{,}2\,m$

De acordo com a Lei de Hooke, temos:

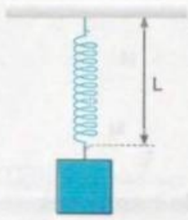
$F = k \cdot x$

$16 = k \cdot 0{,}2$

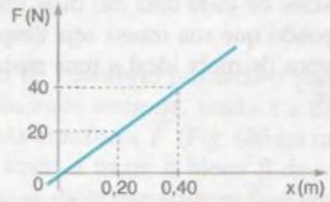
$\boxed{k = 80\,N/m}$



2. Consideremos uma mola ideal, de comprimento natural $L_0 = 0{,}70\,m$. Prendemos uma das extremidades da mola a um suporte e na outra extremidade penduramos um bloco de massa $m = 0{,}60\,kg$, como mostra a figura, de modo que, na posição de equilíbrio, o comprimento da mola seja $L = 0{,}80\,m$. Calcule a constante elástica da mola, sabendo que a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10\,m/s^2$.



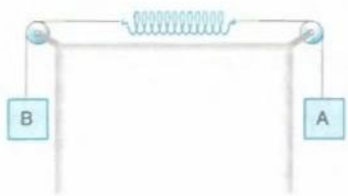
3. A figura nos dá o gráfico da intensidade da força $\vec{F}$ exercida por uma mola ideal, em função da deformação x. Calcule a constante elástica da mola.



4. Uma mola ideal tem constante elástica $k = 60\,N/m$. Calcule a deformação da mola quando a força exercida por ela tem intensidade $F = 15\,N$.

5. Consideremos uma mola ideal de constante elástica $k = 4{,}0\,kgf/cm$. Calcule a deformação da mola quando a força exercida por ela tem intensidade $F = 12\,kgf$.

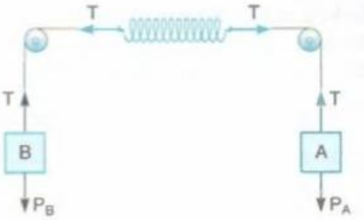
6. No sistema representado na figura, os blocos A e B têm massas iguais a $4{,}0\,kg$. Os fios e a mola são ideais, a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10\,m/s^2$ e a constante elástica da mola é $k = 5{,}0\,N/cm$. Calcule a deformação da mola.



4

Resolução:

$$\begin{cases} P_A = P_B = m \cdot g = 4{,}0 \cdot 10 \\ P_A = P_B = 40\,N \end{cases}$$



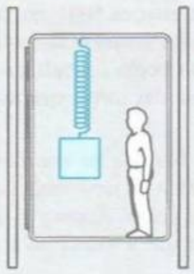
Como a mola e o fio são ideais, a força exercida em cada extremidade da mola tem intensidade *T* igual à da tração no fio. Por outro lado, $P_A = P_B$, donde concluímos que o sistema está em equilíbrio e $T = P_A = P_B = 40\,N$. Pela Lei de Hooke, temos:

$T = k \cdot x$

Assim, $x = \frac{T}{k} = \frac{40\,N}{5{,}0\,N/cm}$ $\boxed{x = 8{,}0\,cm}$

7. O sistema representado na figura é abandonado em repouso. Os blocos *A* e *B* têm massas respectivamente iguais a 3,0 kg e 7,0 kg. Os fios e a mola *M* são ideais, a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10\,m/s^2$ e a constante elástica da mola é $k = 210\,N/m$. Calcule a deformação da mola durante o movimento.

8. Uma mola de comprimento natural $L_0 = 1{,}3\,m$ e constante elástica $k = 260\,N/m$ está pendurada no teto de um elevador. Na extremidade inferior da mola está preso um bloco de massa $m = 4{,}0\,kg$. A aceleração local da gravidade tem módulo $g = 10\,m/s^2$ e o elevador está subindo em movimento acelerado, de aceleração $a = 3{,}0\,m/s^2$. Calcule o comprimento da mola, sabendo que o bloco está em repouso para um observador situado dentro do elevador.

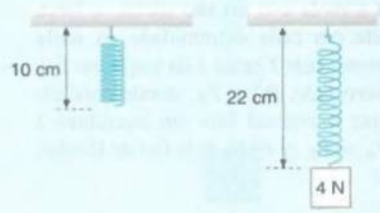


9. O sistema representado na figura está em equilíbrio. O bloco *A* tem massa $m = 4{,}0\,kg$, a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10\,m/s^2$, não há atrito e a mola é ideal. Determine a deformação da mola, sabendo que sua constante elástica é $k = 50\,N/m$.

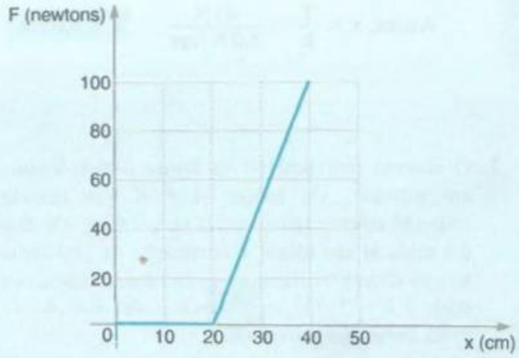
EXERCÍCIOS DE REFORÇO

10. (Mackenzie-SP) A mola da figura abaixo varia seu comprimento de 10 cm para 22 cm quando penduramos em sua extremidade um corpo de 4 N. O comprimento total dessa mola quando penduramos nela um corpo de 6 N é:

a) 28 cm
b) 42 cm
c) 50 cm
d) 56 cm
e) 100 cm



11. (FUVEST-SP) Uma mola pendurada num suporte apresenta comprimento igual a 20 cm. Na sua extremidade livre dependura-se um balde vazio, cuja massa é 0,50 kg. Em seguida coloca-se água no balde até que o comprimento da mola atinja 40 cm. O gráfico ao lado ilustra a força que a mola exerce sobre o balde, em função do seu comprimento. Pede-se a massa de água colocada no balde. (Adote $g = 10\,m/s^2$.)

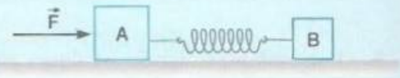


12. (FUVEST-SP) Um corpo está preso nas extremidades de duas molas idênticas, não deformadas, de constante elástica 100 N/m, como ilustra a figura. Quando o corpo é afastado, horizontalmente, 1 cm do ponto central, qual a intensidade da resultante das forças que as molas exercem sobre ele?

13. (Mackenzie-SP) No teto de um elevador que sobe com aceleração constante de $1\,m/s^2$, tem-se presa a extremidade de uma mola de constante elástica 550 N/m. Na outra extremidade da mola, está suspenso um corpo. Adote $g = 10\,m/s^2$. Sabendo que a mola é ideal e está distendida de 4 cm, podemos afirmar que a massa do corpo suspenso é:

a) 20 kg
b) 10 kg
c) 5 kg
d) 2 kg
e) 1 kg

14. (Mackenzie-SP) O conjunto ao lado está em movimento devido à ação da força horizontal de 50 N. Despreze os atritos. O coeficiente de elasticidade da mola ideal que está entre os blocos *A* e *B*, de massas respectivamente iguais a 6 kg e 4 kg, é 1 000 N/m. A deformação sofrida pela mola é:



a) 2 cm
b) 4 cm
c) 5 cm
d) 7 cm
e) 10 cm

15. (UF-PA) Dois blocos, de massas m_1 e m_2, interligados por uma mola fina, estão colocados sobre uma mesa plana, horizontal, sem atrito. A razão entre os valores de suas acelerações a_1 e a_2, após terem sido afastados e soltos, é:

a) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$

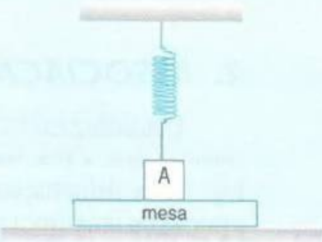
b) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1 - m_2}{m_1}$

c) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1 - m_1}{m_2}$

d) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_1}{m_2}$

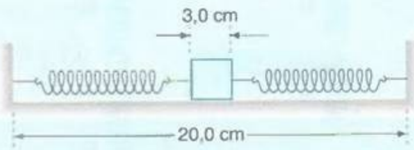
e) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$

16. (FATEC-SP) A figura indica um corpo *A* de 4 kg preso na extremidade de uma mola, de constante elástica 100 N/m, e apoiado numa mesa. Nestas condições a mola experimenta um aumento de comprimento de 10 cm. Considerando-se g = 10 m/s², podemos afirmar que a mesa exercerá sobre o corpo *A* uma força de intensidade:



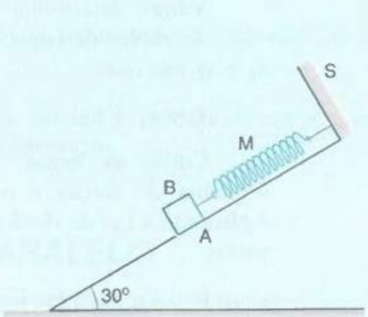
a) 40 N
b) 30 N
c) 20 N
d) 10 N

17. (CESESP-PE) Duas molas têm o mesmo comprimento de 10,0 cm quando em equilíbrio e com constantes elásticas k_1 e k_2, respectivamente. Elas são usadas para fixar um pequeno cubo de aresta igual a 3,0 cm no fundo de uma caixa de largura igual a 20,0 cm, conforme indicado na figura. Se $k_1 = 2k_2$, os comprimentos das molas 1 e 2 após a montagem do sistema são, em centímetros, respectivamente:



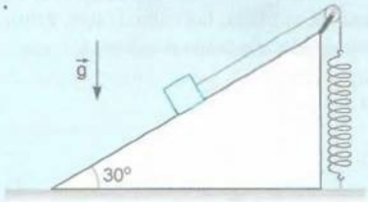
a) 9,0 e 8,0
b) 5,7 e 11,3
c) 10,3 e 6,7
d) 6,3 e 10,7
e) 7,3 e 9,7

18. (Mackenzie-SP) A figura representa um bloco *B* de massa 10 kg preso a uma mola de constante elástica 1 000 N/m, a qual está presa a um suporte *S*. A mola é ideal e não há atritos. Adotando g = 10 m/s² e supondo que o sistema esteja em equilíbrio, a deformação da mola é:



a) 1 cm
b) 2 cm
c) 5 cm
d) 10 cm
e) 20 cm

19. (FUVEST-SP) Um corpo de massa igual a 3 kg está em equilíbrio estático sobre um plano inclinado, suspenso por um fio de massa desprezível preso a uma mola fixa no solo como mostra a figura. O comprimento natural da mola (sem carga) é 1,2 m e, ao sustentar estaticamente o corpo, ela se distende, atingindo o comprimento 1,5 m. Despreze os atritos e adote $g = 10\,m/s^2$. A constante elástica da mola, em N/m, vale então:



a) 10
b) 30
c) 50
d) 90
e) 100

2. ASSOCIAÇÃO DE MOLAS EM SÉRIE

Consideremos duas molas ideais, de constantes k_1 e k_2, associadas em série, como mostra a Fig. 9a. Se aplicarmos ao conjunto uma força $\vec{F}$, como indica a Fig. 9b, a deformação do conjunto será x. Chamamos de *mola equivalente à associação* uma única mola de constante elástica k que, sob a ação da mesma força $\vec{F}$, sofre a mesma deformação x (Fig. 10).

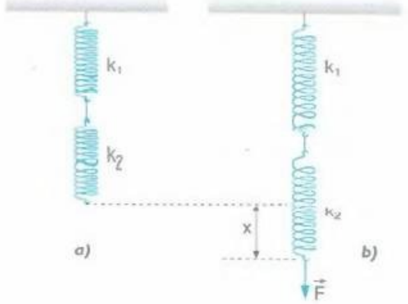


Fig. 9

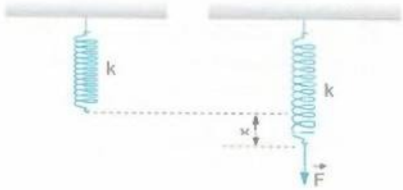


Fig. 10

Vamos determinar o valor de k em função de k_1 e k_2.

As molas de constantes k_1 e k_2 sofreram deformações x_1 e x_2 tais que:

$$x = x_1 + x_2 \qquad (I)$$

Como as molas são ideais, o esquema de forças é o da Fig. 11. Aplicando a Lei de Hooke a cada mola, temos:

$$F = k_1 \cdot x_1 \quad e \quad F = k_2 \cdot x_2$$

$$\text{ou } x_1 = \frac{F}{k_1} \quad e \quad x_2 = \frac{F}{k_2} \qquad (II)$$

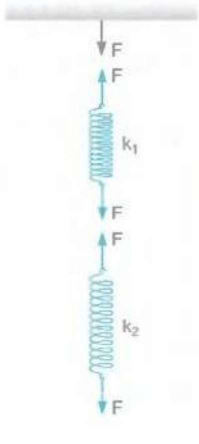


Fig. 11

Aplicando a Lei de Hooke à mola equivalente (Fig. 11), temos:

$$F = k \cdot x \quad \text{ou} \quad x = \frac{F}{k} \qquad \text{(III)}$$

Substituindo (III) e (II) em (I), obtemos:

$$\frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} \qquad \text{(IV)}$$

A fórmula (IV) pode ser ampliada para um número maior de molas. Se tivermos, por exemplo, associadas em série três molas ideais de constantes elásticas k_1, k_2 e k_3, a constante k da mola equivalente será dada por:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

20 Consideremos duas molas ideais, de constantes elásticas $k_1 = 3{,}0\,N/m$ e $k_2 = 6{,}0\,N/m$, associadas em série. Determine a constante elástica da mola equivalente.

Resolução:

Sendo k a constante elástica da mola equivalente, temos:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{3{,}0} + \frac{1}{6{,}0} \qquad \frac{1}{k} = \frac{2{,}0 + 1{,}0}{6{,}0} \qquad \boxed{k = 2{,}0\,N/m}$$

21. Três molas ideais, de constantes elásticas $k_1 = 20\,N/m$, $k_2 = 30\,N/m$ e $k_3 = 60\,N/m$, foram associadas em série.

a) Determine a constante elástica da mola equivalente à associação.

b) Determine a deformação sofrida pela associação quando submetida a uma força de intensidade $F = 7{,}0\,N$.

22. Duas molas ideais, de constantes elásticas iguais a $80\,N/m$, foram associadas em série. Determine a constante elástica da mola equivalente à associação.

23. Três molas ideais e idênticas foram associadas em série. Sendo k a constante elástica de cada mola, determine a constante elástica da mola equivalente à associação.

3. ASSOCIAÇÃO DE MOLAS EM PARALELO

Quando a associação é em paralelo, só tem interesse prático o caso de molas idênticas, isto é, molas que têm o mesmo comprimento natural e a mesma constante elástica.

Consideremos duas molas idênticas de constante elástica k_1, cada uma, associadas em paralelo, como indica a Fig. 12. As molas são presas a um mesmo suporte S e a uma barra de massa desprezível, no centro da qual é aplicada a força $\vec{F}$. Ao aplicarmos a força $\vec{F}$ no centro da barra, o sistema sofrerá uma deformação x (Fig. 13), isto é, cada mola sofrerá a mesma deformação x. Seja k a constante elástica da mola equivalente. Sob a ação da mesma força $\vec{F}$ deverá sofrer a mesma deformação x (Fig. 14).

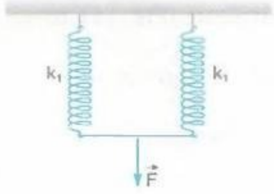


Fig. 12

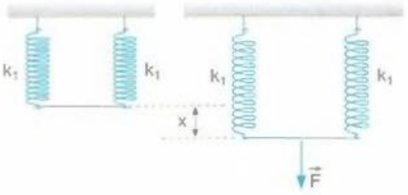


Fig. 13

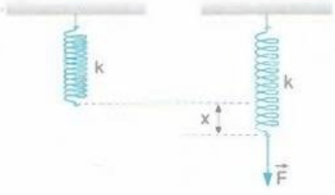


Fig. 14

Cada uma das duas molas da associação receberá uma força de intensidade $\frac{F}{2}$ (Fig. 15). Aplicando a Lei de Hooke a uma delas, temos:

$$\frac{F}{2} = k_1 \cdot x$$

ou $\quad F = 2k_1 \cdot x \qquad (I)$

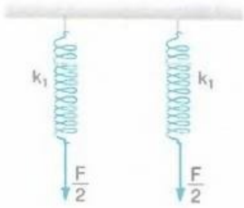


Fig. 15

Aplicando a Lei de Hooke à mola equivalente, temos:

$$F = k \cdot x \qquad (II)$$

Comparando (I) e (II), obtemos:

$$k \cdot x = 2k_1 \cdot x \quad \text{ou} \quad \boxed{k = 2k_1} \qquad (III)$$

A fórmula (III) pode ser ampliada para um número maior de molas idênticas, associadas em paralelo. De modo geral, se tivermos n molas idênticas associadas em paralelo, sendo k_1 a constante elástica de cada uma, a constante elástica da mola equivalente é dada por:

$$\boxed{k = nk_1}$$

4

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

24. Três molas idênticas, de constante elástica $k_1 = 20\,N/m$ cada uma, foram associadas em paralelo. Determine a constante elástica da mola equivalente à associação.

Resolução:

$k = 3k_1 = 3 \cdot 20$

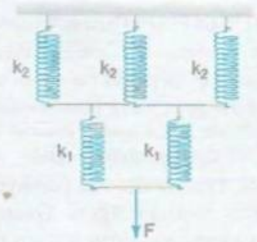
$k = 60\,N/m$

25. Cinco molas idênticas foram associadas em paralelo. Sabendo que a constante elástica de cada uma é $80\,N/m$, determine a constante elástica da mola equivalente à associação.

26. Duas molas idênticas foram associadas em paralelo. Determine a constante elástica de cada uma delas, sabendo que a constante elástica da mola equivalente é igual a $300\,N/m$.

27. Uma mola ideal tem constante elástica $30\,N/m$. Cortamos essa mola ao meio e com as duas metades fazemos uma associação em paralelo. Determine a constante elástica da mola equivalente a esta associação.

28. Calcule a constante elástica equivalente da associação ao lado, sabendo que $k_1 = 15\,N/m$ e $k_2 = 20\,N/m$.



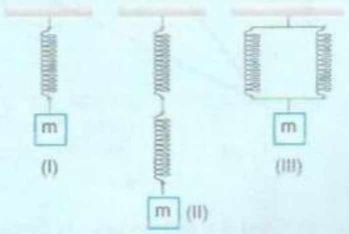
EXERCÍCIOS DE REFORÇO

29. Duas molas de constantes elásticas $14\,N/m$ e $6{,}0\,N/m$ foram associadas em série. Calcule a constante elástica da mola equivalente à associação.

30. Quatro molas idênticas, de constante elástica $60\,N/m$ cada uma, foram associadas em paralelo. Calcule a constante elástica da mola equivalente à associação.

31. (FATEC-SP) Dispõe-se de duas molas idênticas e de um objeto de massa *m*. O objeto pode ser pendurado em apenas uma das molas ou numa associação delas mesmas, conforme a figura. O objeto provocará uma deformação total:

a) igual nos três arranjos.
b) maior no arranjo I.
c) maior no arranjo II.
d) maior no arranjo III.



32. (CESGRANRIO-RJ) Um corpo suspenso a uma mola ideal alonga-a de 12 cm (Fig. a). Corta-se a mola no meio e suspende-se o mesmo corpo ao conjunto das duas metades, como na Fig. b. Cada uma dessas metades se acha alongada de:

a) 3,0 cm
b) 9,5 cm
c) 24 cm
d) 6,0 cm
e) 12 cm


Fig. a

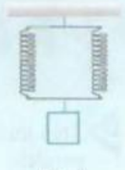
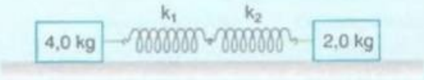


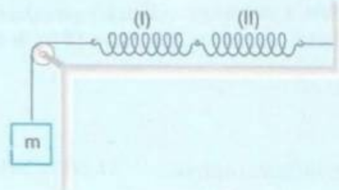
Fig. b

33. (UF-MT) Dois corpos, A e B, estão ligados, conforme esquema ao lado, por duas molas, k_1 e k_2, idênticas e de massas desprezíveis. Sabe-se que os atritos com a superfície horizontal são desprezíveis e que o sistema está oscilando, sendo, num dado instante, Δx_1 a distensão não nula de k_1 e Δx_2 a distensão não nula de k_2. Então $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ vale, em módulo:



a) $\frac{1}{2}$
b) 1
c) $\sqrt{2}$
d) 2
e) $2\sqrt{2}$

34. (VUNESP-SP) Dinamômetros são instrumentos destinados a medir forças. O tipo mais usual é constituído por uma mola cuja deformação varia linearmente com a intensidade da força que a produz (Lei de Hooke). Dois dinamômetros estão montados sobre uma mesa horizontal perfeitamente lisa, conforme mostra a figura. Quando um corpo de massa m é suspenso por um fio de massa desprezível à extremidade do dinamômetro I, a força que este indica é 5 N. Adote $g = 10\ m/s^2$.



a) Que força indicará o dinamômetro II?
b) Qual a massa do corpo suspenso?

35. (VUNESP-SP) O gráfico da Fig. I mostra as elongações sofridas por duas molas, M_1 e M_2, em função da força aplicada a elas. Quando essas molas são distendidas, como mostra a Fig. II, sobre uma superfície horizontal perfeitamente lisa, a elongação sofrida por M_2 é igual a 3,0 cm.

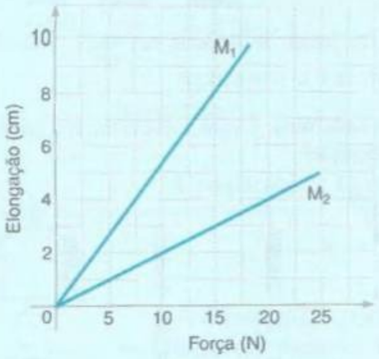


Fig. I

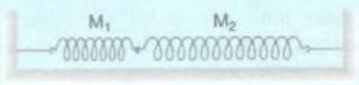


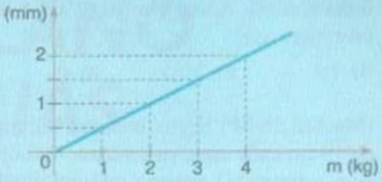
Fig. II

a) Qual é a intensidade da força que está distendendo a mola M_2?
b) Qual a elongação sofrida por M_1?

4

EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

36. (FEI-SP) Em uma mola foram penduradas diferentes massas e verificou-se que a deformação *y* (medida em milímetros) experimentada pela mola variou com a massa *m* (medida em quilogramas), de acordo com o gráfico ao lado. Dado $g = 10\,m/s^2$, determine a constante elástica da mola em N/m.



37. (FUVEST-SP) A figura I representa um cabide dependurado na extremidade de uma mola de constante elástica $k = 50\,N/m$. Na figura II, tem-se a nova situação de equilíbrio logo após a roupa molhada ser colocada no cabide e exposta ao sol para secar, provocando na mola uma deformação inicial $x = 18\,cm$. O tempo de insolação foi mais que suficiente para secar a roupa completamente. A variação da deformação da mola (em cm) em função do tempo (em horas) em que a roupa ficou sob a ação dos raios solares está registrada no gráfico da figura III.

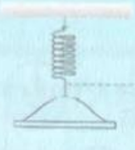


Fig. I

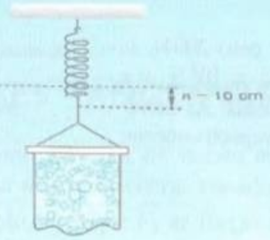


Fig. II

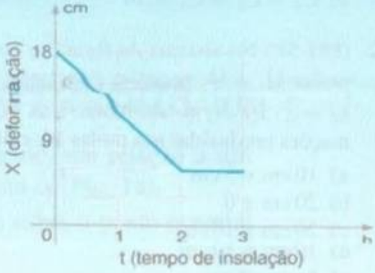
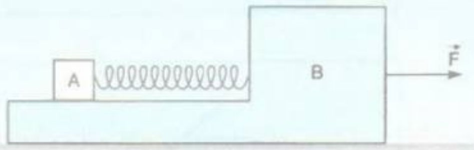


Fig. III

Calcule o peso da água que evaporou.

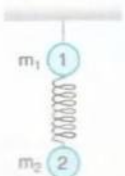
38. (FEI-SP) Os corpos *A* e *B* representados na figura possuem, respectivamente, massas $m_A = 2{,}0\,kg$ e $m_B = 4{,}0\,kg$. A mola é ideal e tem constante elástica $k = 50\,N/m$. Despreze os atritos. Aplicando-se ao conjunto a força $\vec{F}$ constante e horizontal, verifica-se que a mola experimenta deformação de 20 cm.
Calcule as intensidades:

a) da aceleração do conjunto;
b) da força $\vec{F}$.



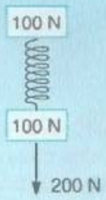
39. (FUVEST-SP) Um conjunto de duas bolas de massas m_1 e m_2, ligadas através de uma mola ideal de constante elástica *k*, está em repouso, preso ao teto, conforme indica a figura. No instante $t = 0$, é cortado o fio que prende a bola (1) ao teto. Determine:

a) a aceleração da bola (1) no instante $t = 0$;
b) a aceleração da bola (2) no instante $t = 0$.
(Considere a aceleração da gravidade igual a *g*.)



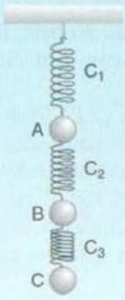
40. (FATEC-SP) O conjunto dos blocos representados na figura está sujeito a uma força vertical para baixo, cuja intensidade é 200 N. A constante elástica da mola (ideal) que une os blocos vale 1 000 N/m e o movimento do sistema se dá na mesma linha vertical. Adote $g = 10\,m/s^2$. A deformação da mola, em centímetros, é:

a) 10 b) 5 c) 0 d) 60 e) 6



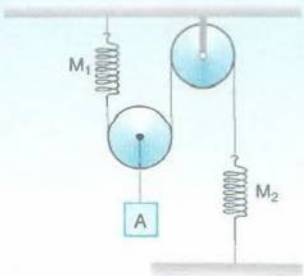
41. (Mackenzie-SP) Sejam três molas com comprimentos naturais de 10 cm cada uma, sustentando os corpos *A*, *B* e *C*, de acordo com a figura. O sistema está em equilíbrio e cada corpo tem peso igual a 4 kgf. Sendo as constantes elásticas das molas iguais a 2 kgf/cm e desprezando os pesos das molas, os novos comprimentos C_1, C_2 e C_3 das molas serão, em centímetros:

a) $C_1 = 16$; $C_2 = 14$; $C_3 = 12$
b) $C_1 = C_2 = C_3 = 16$
c) $C_1 = C_2 = C_3 = 12$
d) $C_1 = 12$; $C_2 = 14$; $C_3 = 16$
e) $C_1 = C_2 = C_3 = 14$



42. (FEI-SP) No sistema da figura, o corpo *A* tem peso 200 N, as molas M_1 e M_2 possuem constantes elásticas $k_1 = 10^3$ N/m e $k_2 = 2 \cdot 10^3$ N/m. As molas e as polias são ideais. As deformações produzidas nas molas M_1 e M_2 valem, respectivamente:

a) 10 cm e 5 cm
b) 20 cm e 0
c) 20 cm e 10 cm
d) 10 cm e 10 cm
e) 5 cm e 5 cm



CAPÍTULO 5

MOVIMENTO PLANO COM TRAJETÓRIAS CURVAS

1. RESULTANTES TANGENCIAL E CENTRÍPETA

Considere um ponto material de massa m descrevendo, em relação a um referencial inercial, uma trajetória curva, situada num plano α (Fig. 1a).

Sejam, por exemplo, $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ e $\vec{F_3}$ as forças que agem sobre o ponto material em certo instante (Fig. 1b).

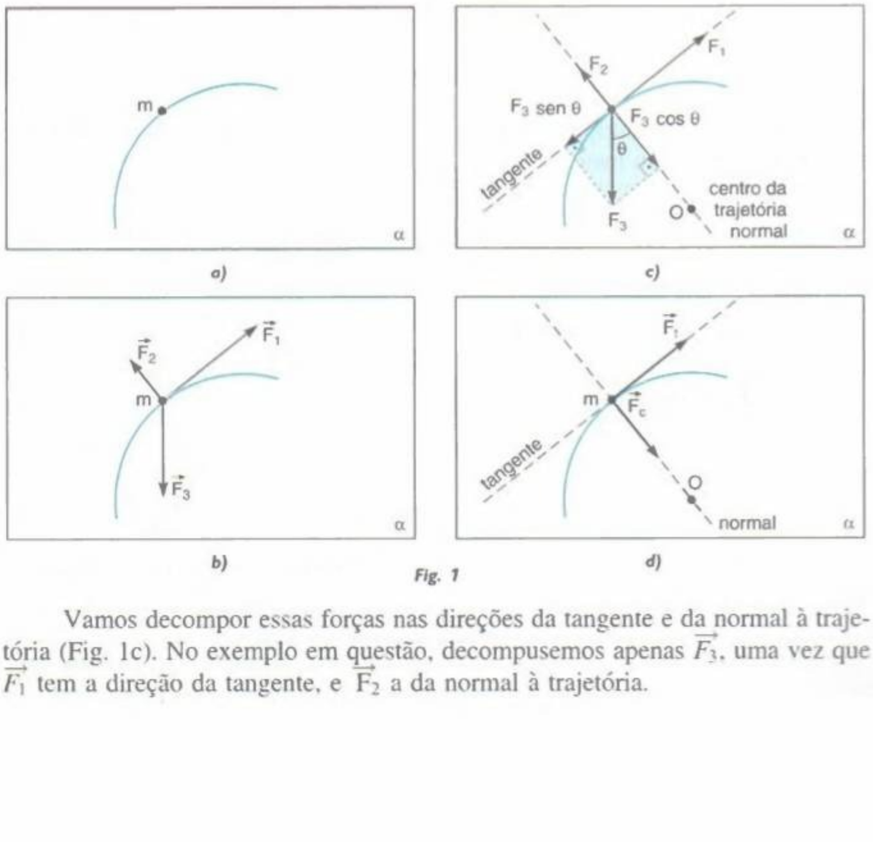


Fig. 1

Vamos decompor essas forças nas direções da tangente e da normal à trajetória (Fig. 1c). No exemplo em questão, decompusemos apenas $\vec{F_3}$, uma vez que $\vec{F_1}$ tem a direção da tangente, e $\vec{F_2}$ a da normal à trajetória.

A resultante das forças tangentes à trajetória é denominada *resultante tangencial* $\vec{F}_t$, e a resultante das forças normais à trajetória constitui a *resultante centrípeta* $\vec{F}_c$ (Fig. 1d).

A resultante tangencial produz a aceleração tangencial $\vec{a}_t$ e, de acordo com a Segunda Lei de Newton, temos:

$$\vec{F}_t = m \cdot \vec{a}_t$$

Portanto:

> A resultante tangencial é que produz a variação do módulo da velocidade vetorial $\vec{v}$ do ponto material.

No movimento acelerado, $\vec{F}_t$ tem o mesmo sentido de $\vec{v}$ (Fig. 2a).
No movimento retardado, $\vec{F}_t$ tem sentido oposto ao de $\vec{v}$ (Fig. 2b).

a) movimento acelerado **Fig. 2** *b) movimento retardado*

A resultante centrípeta produz a aceleração centrípeta $\vec{a}_c$ e, de acordo com a Segunda Lei de Newton, temos:

$$\vec{F}_c = m \cdot \vec{a}_c$$

Portanto:

> A resultante centrípeta é que produz a variação da direção da velocidade vetorial $\vec{v}$ do ponto material.

A resultante centrípeta $\vec{F}_c$ tem sentido voltado para o centro da trajetória (Fig. 2).

A resultante de todas as forças que agem sobre o ponto material é:

$$\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_c$$

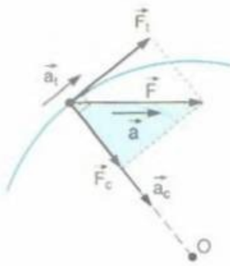


Fig. 3

O módulo da força resultante é obtido aplicando-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo sombreado da Fig. 3:

$$|\vec{F}|^2 = |\vec{F}_t|^2 + |\vec{F}_c|^2 \quad \therefore \quad |\vec{F}| = \sqrt{|\vec{F}_t|^2 + |\vec{F}_c|^2}$$

A aceleração tangencial tem módulo igual ao módulo da aceleração escalar α, isto é: $|\vec{a_t}| = |\alpha|$.

A aceleração centrípeta tem módulo dado por: $|\vec{a_c}| = \frac{v^2}{R}$ onde v é o módulo da velocidade e R é o raio de curvatura da curva no ponto considerado.

2. MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME

No caso particular do movimento circular uniforme, a velocidade vetorial tem módulo constante e portanto a resultante tangencial é nula. Nessas condições, *a resultante de todas as forças que agem sobre o ponto material é centrípeta* (Fig. 4).

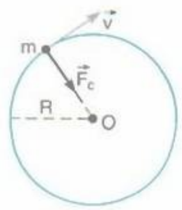
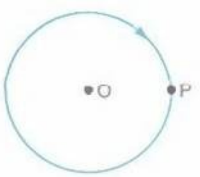


Fig. 4

MCU:
$\vec{F_t} = \vec{0}$
$\vec{F} = \vec{F_c} = m\vec{a_c}$
$|\vec{a_c}| = \frac{v^2}{R}$

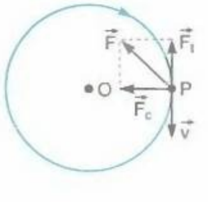
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1 Uma partícula descreve um movimento circular uniformemente retardado no sentido horário. Represente graficamente a velocidade vetorial, a resultante tangencial, a resultante centrípeta e a resultante de todas as forças, quando a partícula passa pelo ponto *P* indicado.

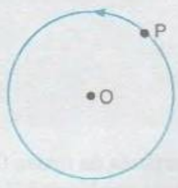


Resolução:

A velocidade vetorial $\vec{v}$ é tangente à trajetória por *P* e tem o sentido do movimento. A resultante tangencial $\vec{F_t}$ tem sentido oposto ao de $\vec{v}$, pois o movimento é retardado. A resultante centrípeta $\vec{F_c}$ tem direção perpendicular a $\vec{v}$ e sentido de *P* para *O*, isto é, ela é orientada para o centro da circunferência. A resultante $\vec{F}$ de todas as forças é obtida pela soma vetorial de $\vec{F_t}$ e $\vec{F_c}$.



2. Uma partícula descreve um movimento circular uniformemente acelerado no sentido anti-horário. Represente graficamente a velocidade vetorial, a resultante tangencial, a resultante centrípeta e a resultante de todas as forças, quando a partícula passa pelo ponto *P* indicado.



5

3 Um móvel, de massa m = 1,0 kg, realiza um movimento circular de raio R = 2,0 m, obedecendo à seguinte equação horária do espaço: $s = 2,0 - 8,0t + 3,0t^2$ (SI). Determine, no instante t = 2,0 s, a intensidade da resultante:

a) tangencial; b) centrípeta; c) de todas as forças que agem no móvel.

Resolução:

a) Sendo $\vec{F_t} = m \cdot \vec{a_t}$, vem: $|\vec{F_t}| = m \cdot |\vec{a_t}|$, com $|\vec{a_t}| = |\alpha|$. O cálculo da aceleração escalar α é feito a partir da equação horária do espaço:

$s = 2,0 - 8,0t + 3,0t^2$ (SI)

$v = \frac{ds}{dt} = -8,0 + 6,0t$ (SI)

$\alpha = \frac{dv}{dt} = 6,0\ m/s^2$

Portanto: $|\vec{a_t}| = 6,0\ m/s^2$

$|\vec{F_t}| = m \cdot |\vec{a_t}|$

$|\vec{F_t}| = 1,0 \cdot 6,0$ $\boxed{|\vec{F_t}| = 6,0\ N}$

b) Sendo $\vec{F_c} = m \cdot \vec{a_c}$, vem: $|\vec{F_c}| = m \cdot |\vec{a_c}|$, com $|\vec{a_c}| = \frac{v^2}{R}$

De $v = -8,0 + 6,0t$ (SI), para t = 2,0 s resulta:

$v = -8,0 + 6,0 \cdot 2,0$ $v = 4,0\ m/s$

Sendo R = 2,0 m, temos:

$|\vec{a_c}| = \frac{v^2}{R}$ $|\vec{a_c}| = \frac{(4,0)^2}{2,0}$ $|\vec{a_c}| = 8,0\ m/s^2$

Portanto: $|\vec{F_c}| = m \cdot |\vec{a_c}|$ $|\vec{F_c}| = 1,0 \cdot 8,0$ $\boxed{|\vec{F_c}| = 8,0\ N}$

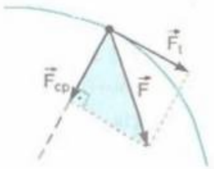
c) A resultante de todas as forças que agem no móvel tem intensidade dada por $|\vec{F}|^2 = |\vec{F_t}|^2 + |\vec{F_c}|^2$, conforme se depreende da aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo sombreado.

Sendo $|\vec{F_t}| = 6,0$ N e $|\vec{F_c}| = 8,0$ N

vem:

$|\vec{F}|^2 = (6,0)^2 + (8,0)^2$

$|\vec{F}|^2 = 100$ $\boxed{|\vec{F}| = 10\ N}$



4. Um móvel de massa m = 0,50 kg realiza um movimento circular de raio R = 1,0 m, obedecendo à equação horária do espaço: $s = 1,0 - 2,0t^2$ (SI). Determine, no instante t = 1,0 s, a intensidade da resultante:

a) tangencial;
b) centrípeta.

5 Uma partícula de massa 0,20 kg realiza um movimento circular uniforme de raio 2,0 m e velocidade escalar de 5,0 m/s. Determine a intensidade da resultante de todas as forças que agem na partícula.

Resolução:

Sendo o movimento circular uniforme, a resultante tangencial é nula. Desse modo, a resultante de todas as forças é centrípeta.

$|\vec{F_c}| = m \cdot |\vec{a_c}|$ $\qquad |\vec{F_c}| = m \cdot \frac{v^2}{R}$ $\qquad |\vec{F_c}| = 0{,}20 \cdot \frac{(5{,}0)^2}{2}$

$\boxed{|\vec{F_c}| = 2{,}5 \text{ N}}$

5

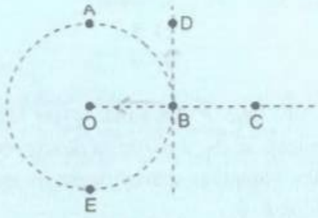
6. Uma partícula de massa m = 0,25 kg descreve trajetória circular de raio R = 0,50 m com velocidade escalar constante de 10 m/s. Calcule a intensidade da força resultante que age sobre a partícula.

7. Um ponto material de massa m = 0,20 kg descreve uma trajetória circular de raio R = 0,50 m, com velocidade angular constante $\omega = 8{,}0$ rad/s. Determine a intensidade da resultante centrípeta que age sobre a partícula.

8. Um ponto material de massa m = 0,25 kg descreve uma trajetória circular de raio R = 0,50 m, com velocidade escalar constante e freqüência f = 4,0 Hz. Calcule a intensidade da resultante centrípeta que age sobre o ponto material. Adote $\pi^2 = 10$.

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

9. (FATEC-SP) Um objeto descreve uma trajetória em movimento circular uniforme. Num instante, o corpo passa por *B* no sentido de *B* para *A*. No ponto *B* a força resultante orienta-se para:



a) A
b) D
c) O
d) C
e) E

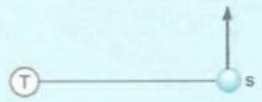
10. Um satélite orbita em torno da Terra com movimento circular uniforme. Indique o diagrama correto das forças atuantes sobre o satélite (suponha o movimento no sentido anti-horário).

a)

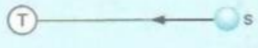
b)

c)

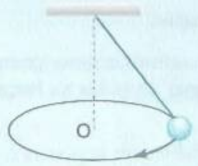
d)

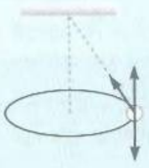


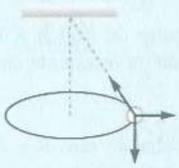
e)

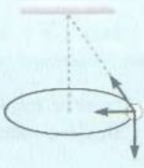


11. (CESGRANRIO-RJ) Uma esfera de aço suspensa por um fio descreve uma trajetória circular de centro *O* em um plano horizontal no laboratório. As forças exercidas sobre a esfera (desprezando-se a resistência do ar) são:

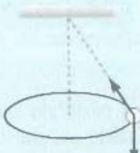


a)


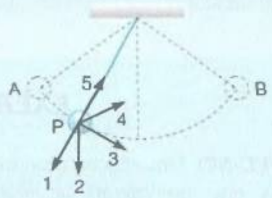
b)


c)


d)

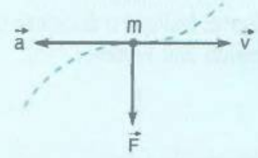

e)


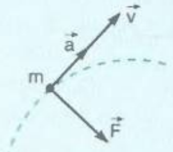
12. (Fund. Carlos Chagas-SP) A figura ao lado representa um pêndulo simples que oscila entre as posições *A* e *B* no campo gravitacional terrestre. Quando o pêndulo se encontra na posição *P*, a sua força resultante é melhor indicada pelo vetor:

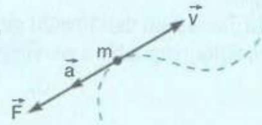


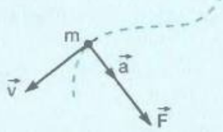
a) 1 c) 3 e) 5
b) 2 d) 4

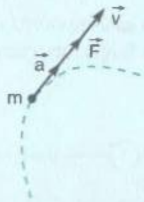
13. (ITA-SP) Seja $\vec{F}$ a resultante das forças aplicadas a uma partícula de massa *m*, velocidade $\vec{v}$ e aceleração $\vec{a}$. Se a partícula descrever uma trajetória plana, indicada pela curva tracejada em cada um dos esquemas abaixo, segue-se que, aquele que relaciona corretamente os vetores coplanares $\vec{v}$, $\vec{a}$ e $\vec{F}$ é:

a)


b)


c)


d)


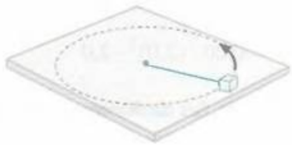
e)


14. Uma partícula de massa m = 0,30 kg descreve trajetória circular de raio R = 0,60 m, com velocidade escalar constante de 6,0 m/s. Determine a intensidade da força resultante que age sobre a partícula.

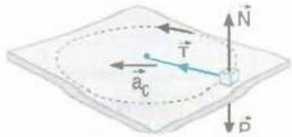
Movimento circular uniforme de um móvel sobre um plano de apoio horizontal

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

15 Um pequeno bloco de massa m = 2,0 kg, preso à extremidade de um fio, descreve, sobre uma mesa lisa, uma circunferência horizontal de raio R = 0,60 m, com velocidade escalar constante v = 6,0 m/s. Sendo g = 10 m/s², determine a intensidade da força de tração que o fio exerce no bloco.



Resolução:



As forças que atuam no bloco são: peso $\vec{P}$, força normal $\vec{N}$ e tração do fio $\vec{T}$.
Observe que $\vec{P}$ e $\vec{N}$ se equilibram e portanto a resultante das forças que agem sobre o bloco é $\vec{T}$. Esta resultante está orientada para o centro da trajetória, sendo portanto centrípeta:

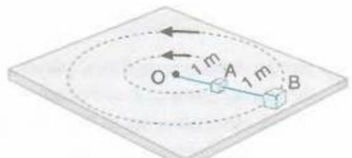
$\vec{F}_c = m \cdot \vec{a}_{cp}$

$T = m \cdot \dfrac{v^2}{R}$ $\qquad$ $T = 2,0 \cdot \dfrac{(6,0)^2}{0,6}$

$T = 120\ N$

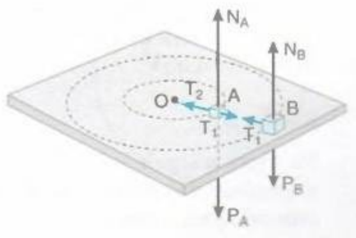
16. Um carrinho de brinquedo de massa 2,0 kg, amarrado na extremidade de uma corda de 0,70 m de comprimento, descreve uma trajetória circular sobre uma mesa horizontal polida. Se a intensidade da força de tração máxima que a corda pode agüentar sem romper-se é de 140 N, qual será o módulo da velocidade máxima do carrinho, nesse dispositivo?

17 Na figura temos dois corpos de massas iguais a 0,20 kg, ligados por fios de 1,0 m de comprimento cada, girando num plano horizontal, sem atrito, com velocidade angular constante $\omega = 2,0$ rad/s, em torno do ponto fixo O. Determine as intensidades das trações nos fios.



Resolução:

As forças que agem nos blocos estão indicadas na figura ao lado. A resultante das forças que agem sobre B tem intensidade T_1 e a resultante das forças em A tem intensidade $T_2 - T_1$. Observe que $T_2 > T_1$, pois o sentido da resultante é para o centro da trajetória.



Segunda Lei de Newton aplicada ao corpo B:

$|\vec{F_c}| = m_B \cdot |\vec{a_c}|$, com:

$|\vec{F_c}| = T_1$ e $|\vec{a_{cp}}| = \dfrac{v_B^2}{R_B} = \omega^2 \cdot R_B$

Portanto:

$T_1 = m_B \cdot \omega^2 \cdot R_B$. Sendo $m_B = 0{,}20$ kg, $\omega = 2{,}0$ rad/s e $R_B = 2{,}0$ m, vem:

$T_1 = 0{,}20 \cdot (2{,}0)^2 \cdot 2{,}0$ $\boxed{T_1 = 1{,}6\ N}$

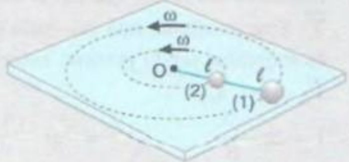
Segunda Lei de Newton aplicada ao corpo A:

$|\vec{F_c}| = m_A \cdot |\vec{a_c}|$

$T_2 - T_1 = m_A \cdot \omega^2 \cdot R_A$

$T_2 - 1{,}6 = 0{,}20 \cdot (2{,}0)^2 \cdot 1{,}0$ $\boxed{T_2 = 2{,}4\ N}$

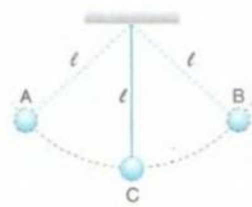
18. A figura mostra um sistema de dois corpos de massas iguais, ligados por fios inextensíveis e de massas desprezíveis, girando num plano horizontal, sem atrito, com velocidade angular ω, constante, em torno do ponto fixo O. Determine a razão $\dfrac{T_2}{T_1}$ entre as intensidades das trações T_2 e T_1 que atuam, respectivamente, nos fios (2) e (1).



Movimento circular de um móvel num plano vertical

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

19 No esquema, temos um pêndulo simples de comprimento $\ell = 1{,}0$ m e com uma esfera de massa $m = 0{,}40$ kg, oscilando entre os pontos A e B. A velocidade escalar da esfera ao passar pelo ponto mais baixo C é $v = 5{,}0$ m/s. Qual a intensidade da força que traciona o fio quando a esfera passa pelo ponto C? É dado $g = 10$ m/s^2.



Resolução:

Na figura a seguir indicamos as forças que agem na esfera na posição mais baixa C. A intensidade da resultante centrípeta é $T - P$. Observe que $T > P$, pois a resultante está orientada para o centro da trajetória.

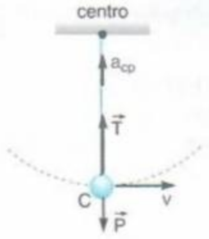
Segunda Lei de Newton:

$|\vec{F_c}| = m \cdot |\vec{a_c}|$ $\quad T - P = m \cdot \frac{v^2}{R}$

Sendo $P = m \cdot g = 0{,}40 \cdot 10$ $\quad P = 4{,}0\ N$

$m = 0{,}40\ kg$, $v = 5{,}0\ m/s$ e $R = \ell = 1{,}0\ m$, vem:

$T - 4{,}0 = 0{,}40 \cdot \frac{(5{,}0)^2}{1{,}0}$ $\quad \boxed{T = 14\ N}$



20 Uma pequena esfera de massa 0,3 kg está presa a um fio de comprimento 0,6 m e gira num plano vertical, descrevendo uma trajetória circular. Ao passar pelo ponto mais baixo, a velocidade escalar da esfera é 7 m/s e no ponto mais alto é 5 m/s. Determine a intensidade da força de tração no fio, nas duas posições em questão. É dado $g = 10\ m/s^2$.

Resolução:

Posição mais baixa A

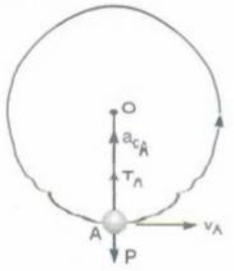
$\vec{F_c} = m \cdot \vec{a_c}$

$T_A - P = m \cdot \frac{{v_A}^2}{R}$

Sendo $P = m \cdot g = 0{,}3 \cdot 10$ $\quad P = 3\ N$,

$m = 0{,}3\ kg$, $v_A = 7\ m/s$, $R = 0{,}6\ m$ vem:

$T_A - 3 = 0{,}3 \cdot \frac{7^2}{0{,}6}$ $\quad \boxed{T_A = 27{,}5\ N}$

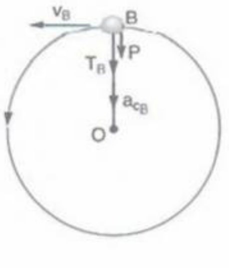


Posição mais alta B

$\vec{F_c} = m \cdot \vec{a_c}$

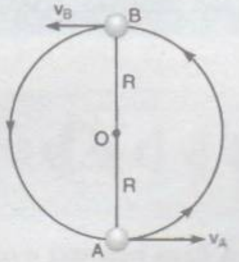
$T_B + P = m \cdot \frac{{v_B}^2}{R}$ $\quad T_B + 3 = 0{,}3 \cdot \frac{5^2}{0{,}6}$

$\boxed{T_B = 9{,}5\ N}$



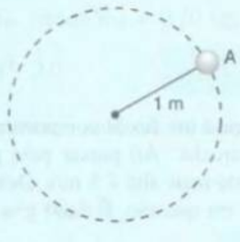
21. Um pêndulo simples possui comprimento $\ell = 0{,}80$ m e a massa da esfera pendular é $m = 0{,}40$ kg. Ao passar pelo ponto mais baixo da trajetória, a velocidade escalar da esfera é $v = 2{,}0$ m/s. Sendo $g = 10\ m/s^2$, determine a intensidade da força que traciona o fio na posição mais baixa.

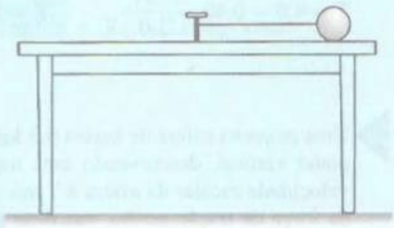
22. Uma pequena esfera de massa $m = 0{,}20$ kg está presa a um fio de comprimento $\ell = 0{,}80$ m e gira num plano vertical, descrevendo uma circunferência. Ao passar pelo ponto mais baixo *A*, a velocidade da esfera é $v_A = 5{,}0$ m/s e pelo ponto mais alto *B* é $v_B = 3{,}0$ m/s. Determine as intensidades das trações nos fios, nos pontos *A* e *B*.



EXERCÍCIOS DE REFORÇO

23. (FUVEST-SP) Um objeto *A* de 8 kg, preso na extremidade de uma corda de 1 m de comprimento e de massa desprezível, descreve um movimento circular uniforme sobre uma mesa horizontal. A tração na corda é 200 N.





Com relação ao objeto determine

a) o valor da aceleração

b) o valor da velocidade.

24. (VUNESP-SP) Uma pedra de massa $m = 0,20$ kg gira, presa a um fio, descrevendo uma circunferência horizontal de raio $R = 20$ cm, enquanto perfaz 2,0 rotações por segundo. Tentando aumentar a velocidade angular, vemos que o fio se rompe. Calcule a tração máxima que o fio suporta ($g = 10\ m/s^2$).

a) 10 N b) 6,0 N c) 6,3 N d) 2,0 N e) 6,6 N

25. (Fund. Carlos Chagas-SP) Uma esfera de massa 0,50 kg oscila no vácuo suspensa por um fio de 1 m de comprimento. Ao passar pela parte mais baixa da trajetória, ela tem velocidade de $\sqrt{10}\ m/s$. Aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$. O valor da intensidade da força de tração no fio, na parte mais baixa da trajetória, é um valor expresso em *N*, igual a:

a) 10,0 b) 8,0 c) 7,5 d) 5,0 e) zero

26. (UF-PA) Um pequeno corpo de massa *m* está preso à extremidade de uma corda de comprimento *L* e gira com velocidade angular ω em uma circunferência vertical. A tração na corda, quando o corpo está no ponto mais alto da trajetória, é dada por:

a) $m(\omega^2 L + g)$

b) $m\left(\dfrac{\omega^2 L}{4} - g\right)$

c) $m(\omega^2 L - g)^{1/2}$

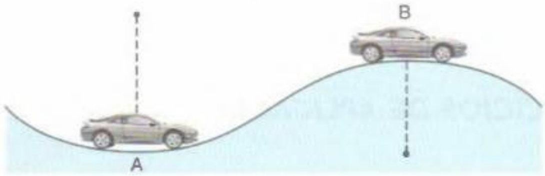
d) $m(\omega^2 L - g)$

e) $m(\omega^2 L + g)^{1/2}$

Estrada com lombada e com depressão

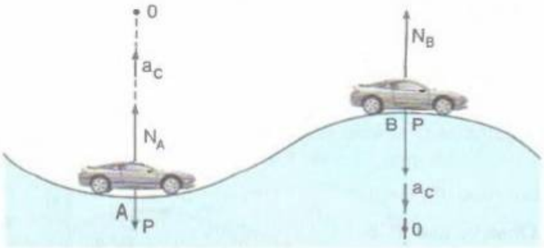
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

27 A figura representa o corte vertical de um trecho de rodovia. Os raios de curvatura nos pontos *A* e *B* são iguais a 100 m. Um automóvel de massa 1 000 kg percorre o citado trecho com velocidade escalar 10 m/s. Determine as intensidades das forças normais que a pista aplica no automóvel nos pontos *A* e *B*. É dado $g = 10\ m/s^2$.



Resolução:

As forças que agem sobre o automóvel nas posições *A* e *B* estão mostradas na figura abaixo.



Segunda Lei de Newton para a posição A:

$\vec{F_c} = m \cdot \vec{a_c}$

A intensidade da resultante centrípeta é $N_A - P$. Logo:

$N_A - P = m \cdot \frac{v^2}{R}$ (observe que $N_A > P$)

$N_A - m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{R}$

Sendo: $m = 1\,000$ kg, $g = 10\ m/s^2$, $v = 10\ m/s$ e $R = 100$ m, vem:

$N_A - 1\,000 \cdot 10 = 1\,000 \cdot \frac{10^2}{100}$ $\boxed{N_A = 11\,000\ N}$

Segunda Lei de Newton para a posição B:

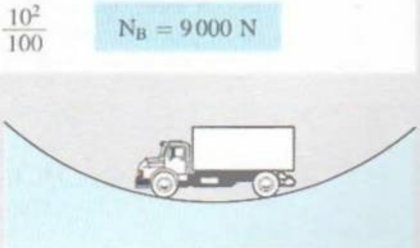
$|\vec{F_c}| = m \cdot |\vec{a_c}|$

A intensidade da resultante centrípeta é $P - N_B$. Logo:

$P - N_B = m \cdot \frac{v^2}{R}$ (observe que $P > N_B$)

$m \cdot g - N_B = m \cdot \frac{v^2}{R}$ $1\,000 \cdot 10 - N_B = 1\,000 \cdot \frac{10^2}{100}$ $\boxed{N_B = 9\,000\ N}$

28. Um caminhão transporta em sua carroceria uma carga de 2,0 toneladas. Determine a intensidade da força normal exercida pela carga sobre o piso da carroceria, quando o veículo, a 30 m/s, passa pelo ponto mais baixo de uma depressão com 300 m de raio. É dado $g = 10\ m/s^2$.



Movimento circular e uniforme de um móvel sobre um plano de apoio horizontal em casos especiais

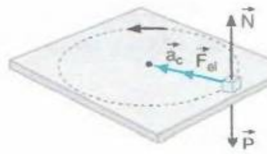
5

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

29 Um bloco de massa 1,0 kg descreve um movimento circular numa mesa horizontal lisa, preso a uma mola de constante elástica $1{,}0 \cdot 10^2$ N/m. Sabendo-se que a mola não deformada tem comprimento 0,75 m, determine a deformação que a mola sofre, quando o bloco gira com velocidade escalar de 5,0 m/s.

Resolução:

As forças que atuam no bloco são: peso $\vec{P}$, força normal $\vec{N}$ e força elástica $\vec{F}_{el}$. Observe que $\vec{P}$ e $\vec{N}$ se equilibram e, portanto, a resultante das forças é $\vec{F}_{el}$. Esta resultante é centrípeta:



$|\vec{F}_c| = m \cdot |\vec{a}_c| \qquad \vec{F}_{el} = m \cdot \dfrac{v^2}{R}$

Sendo $F_{el} = k \cdot x$ (Lei de Hooke), onde x é a deformação e k é a constante elástica da mola, e lembrando que o raio R da trajetória é a soma do comprimento ℓ da mola não deformada com a deformação x, vem:

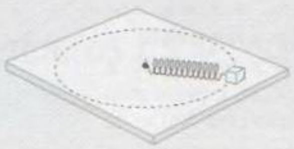
$$k \cdot x = m \cdot \frac{v^2}{\ell + x}$$

Sendo $k = 1{,}0 \cdot 10^2$ N/m, m = 1,0 kg, v = 5,0 m/s e $\ell = 0{,}75$ m, vem:

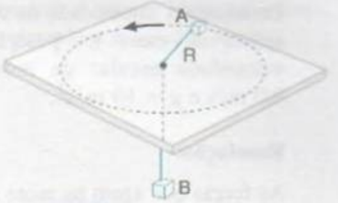
$$1{,}0 \cdot 10^2 \cdot x = 1{,}0 \cdot \frac{(5{,}0)^2}{0{,}75 + x}$$

Portanto $100x^2 + 75x - 25 = 0$ ou $4x^2 + 3x - 1 = 0$. As raízes desta equação são $x = 0{,}25$ m e $x = -1{,}0$ m. Obviamente serve a solução: $\boxed{x = 0{,}25 \text{ m}}$

30. Um bloco de massa m = 2,0 kg, preso a uma mola, descreve um movimento circular numa mesa horizontal lisa. A mola, quando não deformada, tem comprimento $\ell = 0{,}50$ m. Sabendo que, quando o bloco gira com velocidade escalar v = 3,0 m/s, o raio da trajetória é R = 0,90 m, determine a constante elástica k da mola.



31. Um pequeno bloco A de massa 1,0 kg gira numa mesa horizontal sem atrito. O bloco A está ligado ao bloco B, de massa 3,0 kg, por meio de um fio que passa por um orifício existente na mesa. Sabendo que o bloco A descreve um movimento circular uniforme de velocidade escalar 6,0 m/s e que o bloco B permanece em repouso, determine o raio R da trajetória. Considere $g = 10\ m/s^2$.

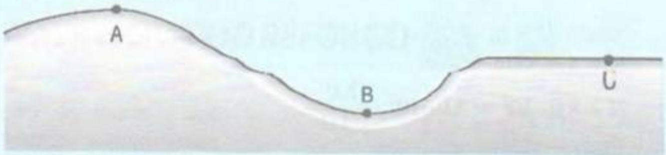


5

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

32. (Mackenzie-SP) O eixo de um trecho de rodovia está contido num plano vertical e apresenta-se em perfil. Os raios de curvatura nos pontos A e B são iguais e o trecho que contém C é horizontal. Um carro percorre a estrada com velocidade escalar constante. Sendo N_A, N_B e N_C a reação normal da rodovia sobre o carro nos pontos A, B e C, tem-se:

a) $N_B > N_A > N_C$
b) $N_B > N_C > N_A$
c) $N_C > N_B > N_A$
d) $N_A > N_B > N_C$
e) $N_A = N_C = N_B$



33. (UnB-DF) Um certo trecho de uma montanha-russa é aproximadamente um arco de circunferência de raio R. Os ocupantes de um carrinho, ao passar por este trecho, sentem uma sensação de aumento de peso. Avaliam que, no máximo, o seu peso foi triplicado. Desprezando os efeitos de atritos, os ocupantes concluirão que a velocidade máxima atingida foi de:

a) $\sqrt{3gR}$ b) $3\sqrt{gR}$ c) $2\sqrt{gR}$ d) $\sqrt{2gR}$

34. Na figura ao lado, um disco de massa 3,0 kg encontra-se preso a uma mola de constante elástica $3{,}0 \cdot 10^4$ N/m, podendo mover-se em torno do ponto O num plano horizontal, sem atrito. Para que o disco possa executar um movimento circular e uniforme com velocidade escalar de 5,0 m/s numa trajetória de raio 10 cm, a deformação apresentada pela mola deverá ser, em centímetros, igual a:

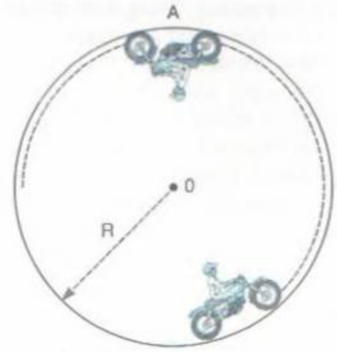
a) 1,1 b) 2,5 c) 3,0 d) 5,0 e) 10

O globo da morte

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

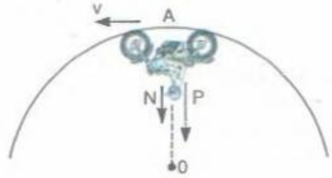
35 Um motociclista realiza um movimento circular, num plano vertical, no interior de um "globo da morte" de raio 4,0 m. A massa do homem mais a da moto é de $8{,}0 \cdot 10^2$ kg.

Determine a intensidade da força normal que o globo aplica na moto na posição *A* mais elevada. A velocidade escalar da moto nesta posição é de 8,0 m/s e g = 10 m/s^2.



Resolução:

As forças que agem na moto são o peso $\vec{P}$ e a normal $\vec{N}$. Observe que $\vec{N}$ tem sentido de *A* para *O*, isto é, para o centro da curva: a moto aplica no globo uma força de *O* para *A*, isto é, para fora da curva, e o globo aplica na moto uma força de *A* para *O* (para dentro da curva). A Segunda Lei de Newton aplicada ao conjunto (moto + homem) fornece:



$|\vec{F_c}| = m \cdot |\vec{a_c}|$

A intensidade da resultante centrípeta é N + P. Logo:

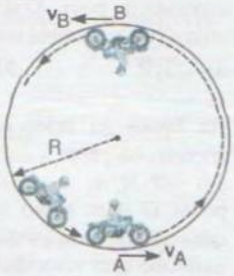
$$N + P = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

Sendo $P = m \cdot g$, $P = 8{,}0 \cdot 10^2 \cdot 10$, $P = 8{,}0 \cdot 10^3$ N, $m = 8{,}0 \cdot 10^2$ kg, v = 8,0 m/s e R = 4,0, vem:

$$N + 8{,}0 \cdot 10^3 = 8{,}0 \cdot 10^2 \cdot \frac{(8{,}0)^2}{4{,}0}$$

$N = 4{,}8 \cdot 10^3$ newtons

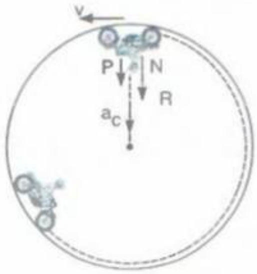
36. Um motociclista realiza um movimento circular, num plano vertical, no interior de um "globo da morte", de raio 4,8 m. A massa do homem mais a da moto é de 900 kg. A moto passa pelo ponto mais baixo *A* com velocidade escalar de 16 m/s e pelo ponto mais alto *B* com 8,0 m/s. Sendo g = 10 m/s^2, determine a intensidade da força normal que o globo aplica na moto nas posições *A* e *B*.



37 Um motociclista realiza um movimento circular, num plano vertical, no interior de um "globo da morte", de raio *R*. Determine a menor velocidade do motociclista no ponto mais alto, para conseguir efetuar a curva completa. É conhecida a aceleração da gravidade *g*.

Resolução:

As forças que agem no sistema (moto + motociclista) são o peso $\vec{P}$ e a força normal $\vec{N}$.
A Segunda Lei de Newton nos fornece:



$|\vec{F_c}| = m \cdot |\vec{a_c}|$

$$P + N = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$m \cdot g + N = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

Desta última expressão, observe que quanto menor a velocidade v, menos intensa é a força normal $\vec{N}$. Isto significa que a mínima velocidade v corresponde a N igual a zero:

$$v_{mín} \rightarrow N = 0$$

Nestas condições:

$$m \cdot g + 0 = m \cdot \frac{v_{mín}^2}{R} \qquad v_{mín}^2 = R \cdot g \qquad \boxed{v_{mín} = \sqrt{R \cdot g}}$$

38. Uma esfera presa a um fio, de comprimento $\ell = 0{,}40$ m, gira num plano vertical descrevendo uma circunferência. Determine a menor velocidade que a esfera deve ter no ponto mais alto para que permaneça em trajetória circular. É dado $g = 10$ m/s^2.

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

39. (VUNESP-SP) No "globo da morte", um clássico do espetáculo circense, a motocicleta passa num determinado instante pelo ponto mais alto do globo, como mostra a figura.

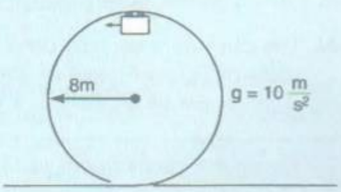
Supondo que, nesse trecho, a trajetória é circular e o módulo da velocidade é constante, no sentido anti-horário, indique a alternativa que apresenta corretamente a direção e o sentido da força resultante que atua sobre a motocicleta nesse ponto.

a)
c)
e) 
b)
d)

40. (UNISA-SP) Um motociclista descreve uma circunferência vertical num "globo da morte" de raio 4 m. Que força é exercida sobre o globo no ponto mais alto da trajetória se a velocidade da moto é ali de 12 m/s? A massa total (motociclista + moto) é de 150 kg.

a) 1 500 N b) 2 400 N c) 3 900 N d) 5 400 N e) 6 900 N

41. (FUVEST-SP) A figura mostra, num plano vertical, parte dos trilhos do percurso circular de uma "montanha russa" de um parque de diversões. A velocidade mínima que o carrinho deve ter, ao passar pelo ponto mais alto da trajetória, para não desgrudar dos trilhos vale, em m/s:



a) $\sqrt{20}$ c) $\sqrt{60}$ e) $\sqrt{320}$
b) $\sqrt{40}$ d) $\sqrt{80}$

42. (UF-MG) Uma pedra é amarrada em um cordão de 40 cm de comprimento e posta a girar num plano vertical. Qual o módulo da velocidade mínima da pedra, no ponto mais alto da trajetória, para que ela possa descrever uma trajetória circular? Adotar $g = 10\ m/s^2$.

Carro em curva num plano horizontal

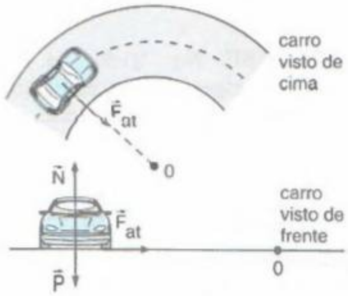
5

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

43 Um carro entra em uma curva circular de raio R, num plano horizontal, em movimento uniforme. O coeficiente de atrito de escorregamento lateral é μ. Sendo g a aceleração da gravidade, determine a máxima velocidade do carro para fazer a curva sem derrapar.

Resolução:

No carro agem as forças: peso $\vec{P}$, força normal $\vec{N}$ e a força de atrito $\vec{F}_{at}$ que o chão exerce nos pneus. Observe que, como a tendência do carro é a de derrapar para fora da curva, a força de atrito, opondo-se ao escorregamento, tem sentido para o centro da trajetória. $\vec{N}$ e $\vec{P}$ se equilibram e $\vec{F}_{at}$ é a resultante centrípeta:



$$|\vec{F}_c| = m \cdot |\vec{a}_c|$$

$$\boxed{F_{at} = m \cdot \frac{v^2}{R}}$$

Para que o carro não derrape, a força de atrito deve ter intensidade menor ou igual a $\mu \cdot N$, isto é, $F_{at} \leqslant \mu \cdot N$.

Portanto:

$$F_{at} = m \cdot \frac{v^2}{R} \leqslant \mu \cdot N, \text{ com } N = P = m \cdot g$$

$$m \cdot \frac{v^2}{R} \leqslant \mu \cdot m \cdot g \qquad v^2 \leqslant \mu \cdot g \cdot R \qquad v \leqslant \sqrt{\mu \cdot g \cdot R}$$

$$\boxed{v_{máx} = \sqrt{\mu \cdot g \cdot R}}$$

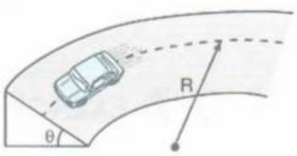
44. Um carro entra em uma curva circular de raio $R = 50$ m, num plano horizontal, em movimento uniforme. O coeficiente de atrito de escorregamento lateral é $\mu = 0{,}2$, e $g = 10\ m/s^2$ é a aceleração da gravidade. Calcule a velocidade máxima do carro, para fazer a curva sem derrapar.

Carro em curva numa pista sobrelevada

5

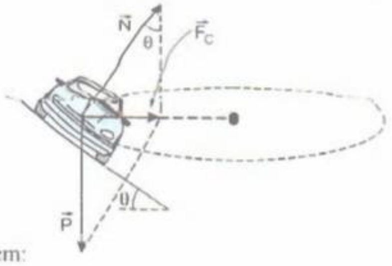
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

45. Um automóvel, de dimensões desprezíveis e de massa m = 1 000 kg, percorre com velocidade escalar constante de 10 m/s uma circunferência de raio 100 m, contida num plano horizontal. Esse movimento ocorre numa pista sobrelevada, isto é, a margem externa é mais elevada que a margem interna. Determine o ângulo θ de sobrelevação da pista com a horizontal para que o automóvel consiga efetuar a curva independentemente da força de atrito. É dado g = 10 m/s². O ângulo θ pode ser dado pela tg θ.



Resolução:

As forças que agem sobre o automóvel são o peso $\vec{P}$ e a força normal $\vec{N}$. Como o automóvel realiza MCU, a resultante dessas forças é centrípeta. O triângulo sombreado permite calcular a tg θ:



$$\text{tg}\,\theta = \frac{F_c}{P}, \quad \text{tg}\,\theta = \frac{m \cdot \frac{v^2}{R}}{m \cdot g}, \quad \text{tg}\,\theta = \frac{v^2}{R \cdot g}$$

Sendo v = 10 m/s, R = 100 m e g = 10 m/s², vem:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{10^2}{100 \cdot 10} \qquad \boxed{\text{tg}\,\theta = 0{,}10}$$

46. Um veículo de dimensões desprezíveis desloca-se com velocidade escalar constante descrevendo uma circunferência contida num plano horizontal. O raio da trajetória é de 50 m e o ângulo de sobrelevação é de 27° (tg 27° = 0,51). Determine a velocidade escalar que o veículo deve ter a fim de que possa efetuar a curva, independentemente da força de atrito. É dado g = 10 m/s².

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

47. (E. E. Mauá-SP) Numa estrada existe uma curva circular plana de raio 150 m. O coeficiente de atrito lateral entre o pneu e a estrada é 0,15 (g = 10 m/s²). Determine a maior velocidade com que o carro pode percorrer a curva sem derrapar.

48. (UNISA-SP) Um toca-discos tem o prato na posição horizontal e realiza 3 revoluções em π segundos. Colocando-se uma pequena moeda sobre o prato, ela deslizará se estiver a mais de 10 cm do centro. Então, o coeficiente de atrito estático entre a moeda e o prato é de:

a) 0,12 b) 0,24 c) 0,36 d) 0,48 e) n.d.a.

49. (PUCC-SP) O raio de uma curva ferroviária é de 400 metros e um trem deve percorrê-la com a velocidade de 72 km/h. De quanto deve estar elevado o trilho externo para reduzir a um mínimo a força para fora sobre ele? A distância entre os trilhos é de 1,2 metros e $g = 10\ m/s^2$.

a) d = 0,20 m b) d = 0,12 m c) d = 0,15 m d) d = 0,18 m

5

Pêndulo simples

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

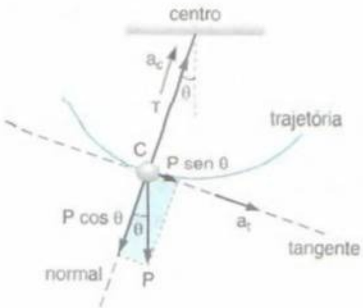
50 No esquema, temos um pêndulo simples de comprimento $\ell = 1,0$ m e com uma esfera de massa $m = 0,50$ kg, oscilando entre os pontos *A* e *B*. A velocidade escalar da esfera ao passar pelo ponto *C* indicado é $v = 4,0$ m/s. Determine:

a) a intensidade da força que traciona o fio, quando a esfera passa pelo ponto *C*;

b) o módulo da aceleração tangencial da esfera em *C*.
Dados: $g = 10\ m/s^2$, $\text{sen}\,\theta = 0,60$ e $\cos\theta = 0,80$.

Resolução:

a) As forças que agem sobre a esfera são o peso $\vec{P}$ e a tração $\vec{T}$. A tração tem a direção da normal à trajetória e o peso foi decomposto nas direções da normal e da tangente à trajetória.



Nessas condições, a resultante centrípeta tem intensidade:

$T - P \cdot \cos\theta$

Sendo $|\vec{F_c}| = m \cdot |\vec{a_c}|$, vem:

$$T - P \cdot \cos\theta = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$T - m \cdot g \cdot \cos\theta = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

Sendo $m = 0,50$ kg, $g = 10\ m/s^2$, $\cos\theta = 0,80$, $v = 4,0$ m/s e $R = \ell = 1,0$ m, vem:

$$T - 0,50 \cdot 10 \cdot 0,80 = 0,50 \cdot \frac{(4,0)^2}{1,0} \qquad \boxed{T = 12\ N}$$

b) A intensidade da resultante tangencial é: $P \cdot \text{sen}\,\theta$.

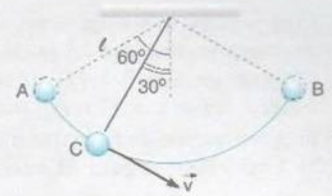
Portanto: $|\vec{F_t}| = m \cdot |\vec{a_t}|$

$P \cdot \text{sen}\,\theta = m \cdot |\vec{a_t}| \qquad m \cdot g \cdot \text{sen}\,\theta = m \cdot |\vec{a_t}|$

$|\vec{a_t}| = g \cdot \text{sen}\,\theta$

$|\vec{a_t}| = 10 \cdot (0,60) \qquad \boxed{|\vec{a_t}| = 6,0\ m/s^2}$

51. No esquema, temos um pêndulo simples de comprimento $\ell = 0{,}60$ m e com uma esfera de massa $m = 1{,}0$ kg, oscilando entre os pontos *A* e *B*. A velocidade escalar da esfera ao passar pelo ponto *C* é $v = 6{,}0$ m/s. Determine a intensidade da força que traciona o fio e o módulo da aceleração tangencial nos pontos *A* e *C*.
Dados: sen $30° = \cos 60° = 0{,}50$;
sen $60° = \cos 30° = 0{,}87$; $g = 10$ m/s^2.

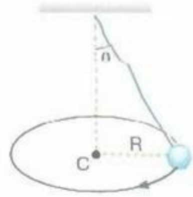


Pêndulo cônico

5

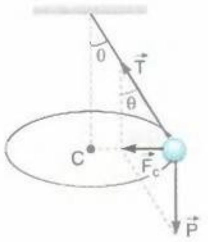
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

52 Uma pequena esfera, de massa $m = 0{,}40$ kg, suspensa por um fio, descreve um movimento circular uniforme em torno do centro *C*, em um plano horizontal, constituindo o chamado pêndulo cônico. Sendo o raio da trajetória $R = 0{,}30$ m, $g = 10$ m/s^2, sen $\theta = 0{,}60$ e $\cos\theta = 0{,}80$, determine a intensidade da força que traciona o fio e a velocidade escalar da esfera.



Resolução:

As forças que agem sobre a esfera são o peso $\vec{P}$ e a tração $\vec{T}$ do fio. Como a esfera realiza MCU, a resultante dessas forças é centrípeta. O triângulo sombreado, que está redesenhado ao lado, permite calcular *T* e *v*:



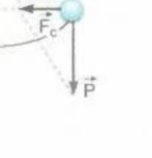
$$\cos\theta = \frac{m \cdot g}{T}$$

$$0{,}80 = \frac{0{,}40 \cdot 10}{T} \qquad \boxed{T = 5{,}0 \text{ N}}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{m \cdot \frac{v^2}{R}}{m \cdot g}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{v^2}{R \cdot g} \qquad v^2 = R \cdot g \cdot \text{tg}\,\theta$$

Sendo $R = 0{,}30$ m, $g = 10$ m/s^2 e $\text{tg}\,\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{0{,}60}{0{,}80}$, vem:



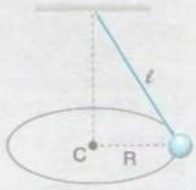
$$v^2 = 0{,}30 \cdot 10 \cdot \frac{0{,}60}{0{,}80}$$

$$v^2 = \frac{9{,}0}{4{,}0}$$

$$v = \frac{3{,}0}{2{,}0} \qquad \boxed{v = 1{,}5 \text{ m/s}}$$

53. Uma pequena esfera, de massa m = 0,30 kg, suspensa por um fio, de comprimento $\ell = 2,5$ m, descreve um movimento circular uniforme de raio R = 2,0 m, em um plano horizontal (pêndulo cônico). Sendo g = 10 m/s², determine:

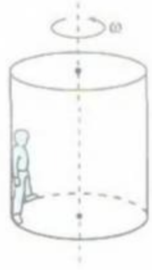
a) a intensidade da força que traciona o fio;
b) a velocidade angular da esfera.



O rotor

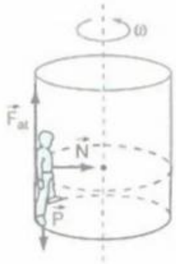
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

54. O "rotor" é um brinquedo que existe em parques de diversões. Ele é constituído de um cilindro oco provido de um assoalho. As pessoas entram no cilindro e ficam em pé encostadas na parede interna. O cilindro começa a girar em torno de seu eixo vertical e, a partir de uma velocidade angular mínima, o assoalho é retirado e as pessoas ficam "presas" à parede do cilindro. Sendo R = 2,0 m o raio do cilindro, g = 10 m/s² a aceleração da gravidade e $\mu = 0,20$ o coeficiente de atrito entre as pessoas e o cilindro, determine a velocidade angular mínima que o cilindro deve ter para que as pessoas não escorreguem.



Resolução:

As forças que agem sobre cada pessoas são: o peso $\vec{P}$, a força de atrito que se opõe à tendência de escorregamento e a força normal $\vec{N}$ que a parede exerce na pessoa. Essa força está orientada para o centro da trajetória. Ela é a resultante centrípeta:



$|\vec{F}_c| = m \cdot |\vec{a}_c|$ $\quad$ $N = m \cdot \omega^2 \cdot R$

Para não haver escorregamento na vertical, devemos ter:

$F_{at} = P$ $\quad$ com $F_{at} \leqslant \mu \cdot N$

Portanto:

$F_{at} \leqslant \mu \cdot N$ $\qquad$ $P \leqslant \mu \cdot m \cdot \omega^2 \cdot R$ $\qquad$ $m \cdot g \leqslant \mu \cdot m \cdot \omega^2 \cdot R$

$\omega^2 \geqslant \dfrac{g}{\mu \cdot R}$ $\qquad$ $\omega^2_{mín} = \dfrac{g}{\mu \cdot R}$ $\qquad$ $\omega_{mín} = \sqrt{\dfrac{g}{\mu \cdot R}}$

$\omega_{mín} = \sqrt{\dfrac{10}{0,20 \cdot 2,0}}$ $\qquad$ $\omega_{mín} = 5,0$ rad/s

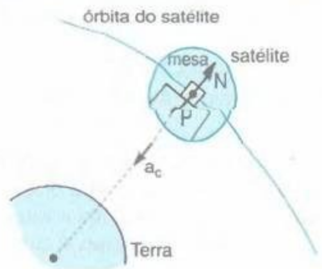
55. Um cilindro oco, de raio $R = 2{,}0$ m, gira em torno de seu eixo, que é vertical, com velocidade angular $\omega = 10$ rad/s. Um corpo gira juntamente com o cilindro, "preso" em sua superfície interna. Determine o menor coeficiente de atrito necessário para que não haja deslizamento do corpo na superfície do cilindro. É dado $g = 10$ m/s^2.

56 Um satélite artificial, depois de desligados todos os seus propulsores, fica numa órbita circular em torno da Terra. Abandonando um objeto, dentro do satélite, observa-se que ele fica "flutuando". Explique por que isso ocorre.

Resolução:

O objeto e o satélite são atraídos pela Terra e ambos possuem a mesma aceleração, que é a aceleração da gravidade g, nos pontos da órbita do satélite. No exercício 1 do capítulo 2 vimos que, quando um elevador cai com aceleração da gravidade g, os objetos no seu interior "flutuam" (o peso aparente N é nulo). Da mesma forma, os objetos no interior do satélite "flutuam", pois o satélite está continuamente caindo para a Terra com aceleração g.

Para elucidar tal fato, vamos imaginar uma experiência na qual colocamos um objeto em cima de uma mesa, ligada ao satélite, e provar que a força entre o objeto e a mesa é nula. No objeto atuam as forças: peso $\overrightarrow{P}$ do objeto, que é a força de atração que a Terra exerce no objeto, e normal $\overrightarrow{N}$, que é a força que a mesa exerce no objeto. A resultante entre $\overrightarrow{P}$ e $\overrightarrow{N}$ é centrípeta:



$|\overrightarrow{F_c}| = m \cdot |\overrightarrow{a_c}|$

$P - N = m \cdot |\overrightarrow{a_c}|$

Mas a aceleração do objeto é a aceleração da gravidade g. Portanto $|\overrightarrow{a_c}| = g$.

Logo: $P - N = m \cdot g$ $\qquad$ $P - N = P$ $\qquad$ $\boxed{N = 0}$

Concluímos, então, que a força com que a Terra atrai o objeto ($\overrightarrow{P}$) está sendo usada como resultante centrípeta, que tem como única função manter o objeto em movimento circular.

57. Um satélite artificial descreve uma órbita circular de raio R, em torno da Terra, com velocidade de módulo v. Sendo g a aceleração da gravidade nos pontos da órbita, prove que $v = \sqrt{g \cdot R}$.

Satélites artificiais

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

58. (FEI-SP) Uma esfera gira com velocidade 1 m/s, descrevendo uma trajetória circular, horizontal, de raio $R = 10$ cm. Estando a esfera suspensa por meio de um fio. Qual o ângulo que este forma com a vertical? Adotar $g = 10{,}0$ m/s^2.

59. (Mackenzie-SP) Um avião descreve uma trajetória circular horizontal com velocidade escalar constante v. As asas formam um ângulo θ com a horizontal. Devem ser considerados apenas o peso do avião e a força de sustentação que é perpendicular à asa. Sendo g a aceleração da gravidade, o raio da trajetória descrita é:

a) $v^2 \cdot \text{sen}\,\theta$
b) $v^2 g \cdot \text{tg}\,\theta$
c) $\dfrac{v^2}{g} \cdot \text{tg}\,\theta$
d) $\dfrac{v^2}{g} \cdot \text{cotg}\,\theta$
e) $\dfrac{g}{v^2} \cdot \text{tg}\,\theta$

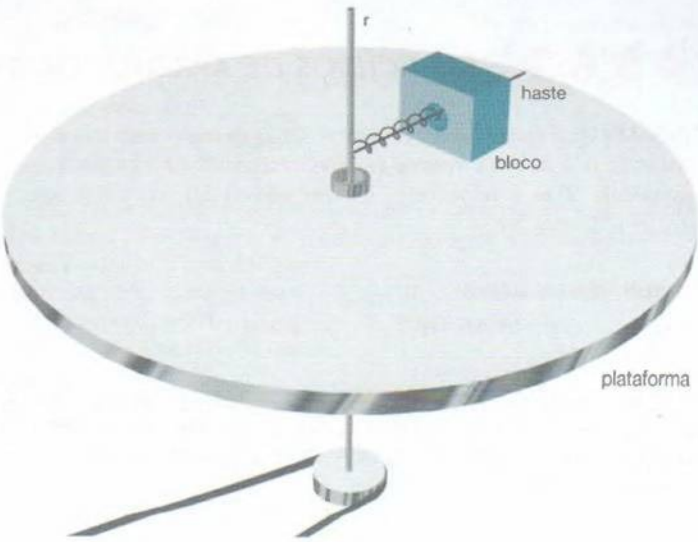
60. (Mackenzie-SP) Admitamos que você esteja apoiado, em pé, sobre o fundo de um cilindro de 4 m de raio, que gira em torno do seu eixo vertical. Admitindo $g = 10\ \text{m/s}^2$ e o coeficiente de atrito μ entre a sua roupa e a superfície do cilindro igual a 0,4, a mínima velocidade tangencial que o cilindro deve ter para que, retirado o fundo do mesmo, você fique "preso" à parede dele, é:
a) 10 m/s
b) 8 m/s
c) 9 m/s
d) 11 m/s
e) é necessário conhecer sua massa, pois sem ela nada se pode afirmar.

61. Um satélite artificial, depois de desligados todos os seus propulsores, fica numa órbita circular estável em torno da Terra. Abandona-se um objeto no centro do satélite, observa-se que ele permanece indefinidamente "flutuando" neste local. Isto ocorre porque:
a) dentro do satélite não existe atmosfera.
b) no local onde se encontra o satélite o campo gravitacional devido à Terra é nulo.
c) no local onde se encontra o satélite a soma dos campos gravitacionais devidos à Terra e a todos os outros corpos celestes é nula.
d) a carcaça do satélite funciona como blindagem para os campos gravitacionais.
e) a força de atração gravitacional está sendo usada como resultante centrípeta, que tem como única função manter o objeto em movimento circular.

62. (VUNESP-SP) Dentro de um satélite artificial da Terra um astronauta flutua, porque:
a) sua massa específica fica menor que a do ar dentro do satélite.
b) existe vácuo dentro do satélite e no vácuo os corpos não têm peso.
c) as acelerações da nave e do astronauta com relação à Terra são iguais.
d) a força da gravidade é nula no local onde se encontra o satélite.
e) o satélite serve de blindagem de modo que a força da gravidade não se exerce sobre o astronauta.

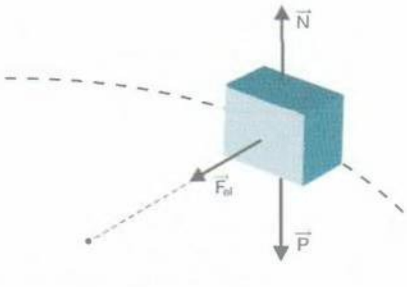
Referenciais inerciais e não inerciais

Na figura temos uma plataforma horizontal que pode girar em torno de um eixo vertical r. Uma haste presa ao eixo passa por um furo existente no bloco. Uma mola tem uma de suas extremidades presa ao eixo e a outra ao bloco. Não existe atrito entre o bloco e a plataforma e entre a haste e o bloco. Quando a plataforma entra em rotação, com velocidade angular ω constante, a mola se distende e o bloco passa a realizar movimento circular uniforme de raio R, em relação à Terra.

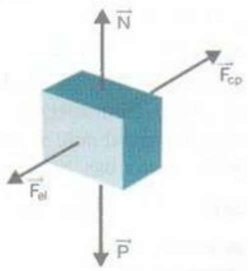


As forças que agem no bloco, em relação a um referencial fixo na Terra, suposto inercial são: o peso $\vec{P}$, a força normal $\vec{N}$, e a força elástica $\vec{F}_{el}$. As forças $\vec{N}$ e $\vec{P}$ se equilibram e a resultante das forças é $\vec{F}_{el}$, que é centrípeta:

$F_{el} = F_{cp} = m\omega^2R = mv^2/R$, onde m é a massa do bloco e v sua velocidade escalar.



Em relação a um referencial fixo na plataforma, que é um referencial acelerado em relação à Terra e portanto um referencial não inercial, o bloco está em repouso. Então, deve existir outra força que anula a força elástica. Essa outra força tem sentido para fora da curva e recebe o nome de *força centrífuga*.

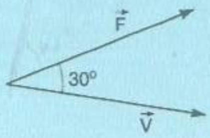


A força centrífuga tem o mesmo módulo da centrípeta: $E_{cf} = m\omega^2R = mv^2/R$. É importante ressaltar que a força centrífuga não é reação à centrípeta e *não existe quando o referencial é inercial.*

EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

5

63. (UNIP-SP) Uma partícula de massa m = 3,0 kg descreve uma trajetória circular de raio R. Num instante t_0 a força resultante ($\vec{F}$) na partícula tem módulo 60 N, a velocidade ($\vec{v}$) tem módulo 2,0 m/s e o ângulo entre $\vec{F}$ e $\vec{v}$ é de 30°.



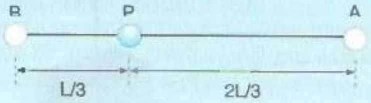
O raio R vale, em metros:

a) 4,0 b) $4{,}0 \cdot 10^{-1}$ c) $2{,}0 \cdot 10^{-1}$ d) 2,0 e) $\frac{4{,}0}{\sqrt{3}} \cdot 10^{-1}$

64. (CESUPA-PA) Um corpo de 500 g de massa gira num plano horizontal em torno de um ponto fixo, preso à extremidade de um fio de 1 m de comprimento e massa desprezível. Se o corpo efetua 60 voltas completas a cada meio minuto, então a força de tração exercida no fio, em newtons, é: (considere $\pi^2 = 10$)

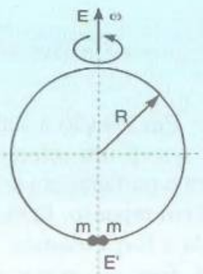
a) 10 b) 80 c) 30 d) 160 e) 50

65. (FUVEST-SP) Dois pequenos corpos A e B de massas iguais a m estão presos às extremidades de uma barra rígida, de massa desprezível e de comprimento L. O sistema gira livremente sobre um plano horizontal em torno de um pino P fixo no plano, como mostra a figura. Despreze qualquer atrito. O sistema é posto em rotação, sendo v_A o módulo constante da velocidade do corpo A.



a) Qual o módulo v_B da velocidade do corpo B?
b) Qual o valor da razão entre os módulos das forças resultantes que agem nos corpos A e B, respectivamente?
c) Determine, em função dos dados do problema, o valor do módulo F_P da força que o pino P exerce sobre a barra.

66. (ITA-SP) Um aro metálico circular e duas esferas são acoplados conforme ilustra a figura ao lado. As esferas dispõem de um furo diametral que lhes permite circular pelo aro sem atrito. O aro começa a girar, a partir do repouso, em torno do diâmetro vertical EE′, que passa entre as esferas, até atingir uma velocidade angular constante ω. Sendo R o raio do aro, m a massa de cada esfera e desprezando-se os atritos, pode-se afirmar que:



a) as esferas permanecem na parte inferior do aro porque esta é a posição de mínima energia potencial.
b) as esferas permanecem a distâncias r de EE′ tal que, se 2θ for o ângulo central cujo vértice é o centro do aro e cujos lados passam pelo centro das esferas na posição de equilíbrio estável, então $\operatorname{tg}\theta = \frac{\omega^2 r}{g}$, estando as esferas abaixo do diâmetro horizontal do aro.
c) as esferas permanecem a distâncias r de EE′ tal que, se 2θ for o ângulo central cujo vértice é o centro do aro e cujos lados passam pelos centros das esferas, na posição de equilíbrio estável, então $\operatorname{tg}\theta = \frac{\omega^2 r}{g}$, estando as esferas acima do diâmetro horizontal do aro.
d) as alternativas (B) e (C) anteriores estão corretas.
e) a posição de maior estabilidade ocorre quando as esferas estão nos extremos de um mesmo diâmetro.

67. (ITA-SP) Para um avião executar uma curva nivelada (sem subir ou descer) e equilibrada, o piloto deve inclina-lo com respeito à horizontal (à maneira de um ciclista em uma curva), de um ângulo θ. Se $\theta = 60°$, a velocidade da aeronave é $100\ m/s$ e a aceleração local da gravidade é $9{,}5\ m/s^2$, qual é aproximadamente o raio de curvatura?

a) 600 m b) 750 m c) 200 m d) 350 m e) 1 000 m

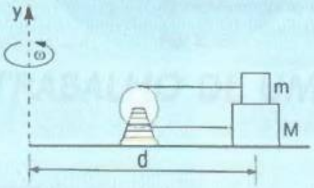
68. (IME) Uma mesa giratória tem velocidade angular constante ω, em torno do eixo y. Sobre esta mesa encontram-se dois blocos, de massas m e M, ligados por uma corda inelástica que passa por uma roldana fixa à mesa, conforme a figura abaixo.

Considerando que não existe atrito entre a mesa e o bloco M, determine o coeficiente de atrito mínimo entre os dois blocos para que não haja movimento relativo entre eles.

Considere d a distância dos blocos ao eixo de rotação.

Despreze as massas da roldana e da corda.

Considere m > M. É dada a aceleração local da gravidade: g.



CAPÍTULO 6

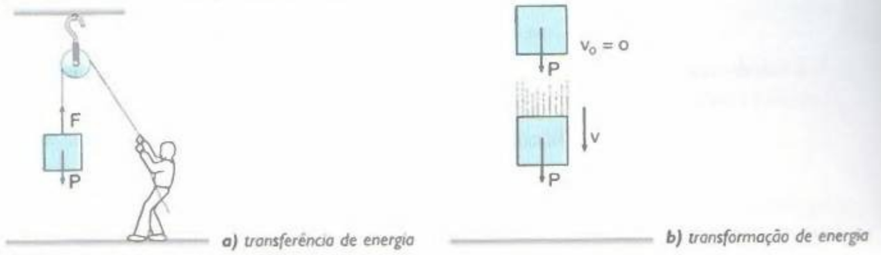
TRABALHO E POTÊNCIA

1. INTRODUÇÃO

Um dos mais importantes conceitos da Física é o de *energia*. Embora seja um conceito de difícil definição, pode-se compreender o que é energia estudando suas diferentes formas. Todos entendem que, se ligarmos um gerador elétrico (pilha, bateria, dínamo, etc.) a um motor elétrico, este consumirá *energia elétrica*, a qual será transformada em *energia mecânica* (o eixo do motor gira) e em *energia térmica*, que provoca certo aquecimento do motor. Obviamente, a energia elétrica fornecida pelo gerador provém de outra forma de energia (*energia química*, nas pilhas e baterias; *energia mecânica*, nos dínamos).

Além das formas de energia citadas, existem outras formas, como a energia associada ao estado de movimento de um corpo, denominada *energia cinética*. Um automóvel em movimento possui energia cinética. Esta resulta, em última análise, do *calor* produzido pela combustão explosiva do combustível.

Quando erguemos um corpo até certa posição, despendemos energia que fica armazenada no corpo e que recebe o nome de *energia potencial gravitacional* (Fig. 1a). Se, a seguir, deixamos o corpo cair livremente, ele adquire energia cinética cada vez maior, proveniente da diminuição da energia potencial gravitacional do corpo (Fig. 1b).

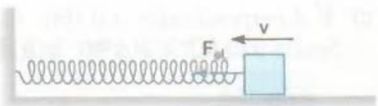


a) transferência de energia *b) transformação de energia*

Fig. 1

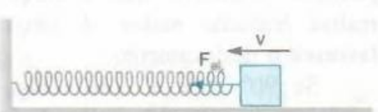
Da mesma forma, quando deformamos um sistema elástico, constituído de uma mola e de um corpo (Fig. 2a), a energia despendida fica armazenada no sistema e recebe o nome de *energia potencial elástica* (Fig. 2b). Abandonando-se o corpo, a energia potencial elástica vai se transformando em energia cinética (Fig. 2c).

Em todas essas situações, a energia não é criada e nem pode ser destruída, mas apenas transformada. Numa transformação, a soma de todas as energias envolvidas permanece constante. Esta é a *lei da conservação da energia.*



a) sistema elástico

b) transferência de energia



c) transformação de energia

Fig. 2

2. DEFINIÇÃO DE TRABALHO DE UMA FORÇA CONSTANTE

Considere um ponto material que, sujeito a um sistema de forças, descreve uma trajetória qualquer, desde a posição A até a posição B (Fig. 3).

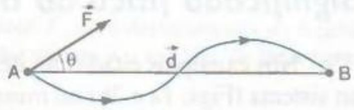


Fig. 3

Indiquemos por $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$ o vetor deslocamento e seja $\vec{F}$ uma *força constante* dentre aquelas que agem sobre o ponto material. Seja θ o ângulo entre $\vec{F}$ e $\vec{d}$, F a intensidade da força $\vec{F}$ e d o módulo do vetor deslocamento $\vec{d}$.

Por definição, *o trabalho da força constante* $\vec{F}$ ao longo do *deslocamento* $\vec{d}$ é dado por:

$$\mathcal{T} = F \cdot d \cdot \cos\theta$$

Da definição apresentada, notamos que o trabalho de uma força é uma grandeza escalar e que o trabalho de uma força constante não depende da trajetória entre os pontos A e B.

Casos particulares

a) $\vec{F}$ *e* $\vec{d}$ *têm a mesma direção e sentido* (Fig. 4)
Nesse caso, $\theta = 0$ e, sendo $\cos 0 = 1$, vem:

$$\mathcal{T} = F \cdot d$$

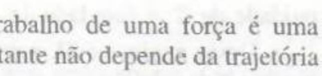


Fig. 4

b) $\vec{F}$ *e* $\vec{d}$ *têm a mesma direção e sentidos opostos* (Fig. 5)
Agora, $\theta = 180°$ e $\cos 180° = -1$.
Portanto: $\mathcal{T} = F \cdot d \cdot \cos 180°$

$$\mathcal{T} = -F \cdot d$$

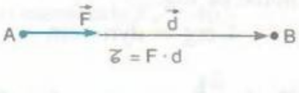


Fig. 5

c) $\vec{F}$ é *perpendicular a* d (Fig. 6)

Sendo $\theta = 90°$ e $\cos 90° = 0$, vem:

$\tau = 0$

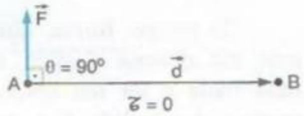


Fig. 6

Trabalho motor e resistente

Se $0 \leqslant \theta < 90°$ (Fig. 7), temos $\cos \theta > 0$ e o trabalho da força $\vec{F}$ é *positivo*. Dizemos que a força $\vec{F}$ realiza *trabalho motor*. A força $\vec{F}$ favorece o deslocamento.

Se $90° < \theta \leqslant 180°$ (Fig. 8), temos $\cos \theta < 0$ e o trabalho da força $\vec{F}$ é *negativo*. Dizemos que a força $\vec{F}$ realiza *trabalho resistente*. A força $\vec{F}$ desfavorece o deslocamento.

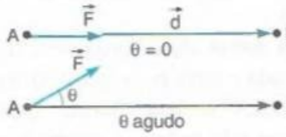


Fig. 7 $\tau > 0$: Trabalho motor

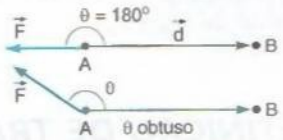


Fig. 8 $\tau < 0$: Trabalho resistente

Significado físico do trabalho

Nos exemplos citados no item anterior, notamos que a *energia* é *transferida* ao sistema (Figs. 1a e 2b) ou *transformada* (Figs. 1b e 2c) através da ação de uma força, que realiza trabalho. Podemos, então, considerar *o trabalho de uma força como uma medida da energia transferida ou transformada*.

3. UNIDADE DE TRABALHO

A unidade de trabalho é a unidade de intensidade de força, multiplicada pela unidade de comprimento:

unidade de τ = (unidade de F) · (unidade de d)

Desse modo, no SI, a unidade de trabalho é o **newton × metro**, que recebe o nome de *joule* (J):

$1\ J = 1\ N \cdot m$

No sistema CGS, a unidade de trabalho é o **dina × centímetro**, que recebe o nome de *erg*:

$1\ erg = dyn \cdot cm$

Relação entre joule e erg

$1\ J = 1\ N \cdot m$

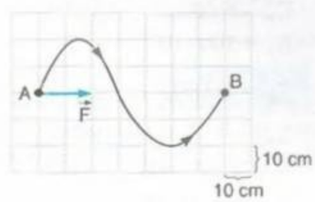
$1\ J = 10^5\ dyn \cdot 10^2\ cm$

$1\ J = 10^7\ dyn \cdot cm$

$1\ J = 10^7\ erg$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

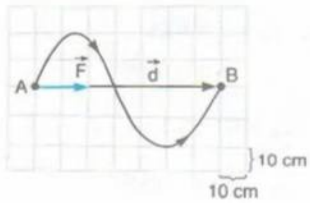
1. Um ponto material, sujeito a um sistema de forças, descreve a trajetória indicada na figura. Seja $\vec{F}$ uma força constante dentre aquelas que agem no ponto material. Calcule o trabalho que a força $\vec{F}$, de intensidade 20 N, realiza ao longo do deslocamento de *A* até *B*.



Resolução:

Sendo de 10 cm o comprimento do lado de cada quadradinho, concluímos que o módulo do vetor deslocamento é d = 70 cm = 0,70 m

De $\mathcal{T} = F \cdot d \cdot \cos\theta$, sendo F = 20 N, d = 0,70 m e $\theta = 0$ ($\cos 0 = 1$, ver tabela), vem:



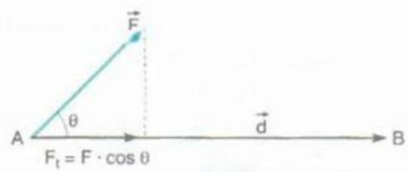
$$\mathcal{T} = 20 \cdot 0{,}70 \quad \therefore \quad \boxed{\mathcal{T} = 14\ J}$$

2. Prove que o trabalho de uma força constante $\vec{F}$, num deslocamento $\vec{d}$, é igual ao produto entre a projeção de $\vec{F}$ na direção do deslocamento e o módulo do deslocamento.

Resolução:

Sabemos que $\mathcal{T} = F \cdot d \cdot \cos\theta$, ou $\mathcal{T} = F \cdot \cos\theta \cdot d$.

Mas $F \cdot \cos\theta = F_t$ é a projeção de $\vec{F}$ na direção de $\vec{d}$, também chamada *componente tangencial*. Portanto:



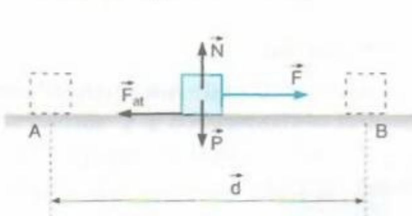
$$\boxed{\mathcal{T} = F_t \cdot d}$$

3. Prove que o trabalho de uma força constante $\vec{F}$, num deslocamento $\vec{d}$, é igual ao produto entre a intensidade da força $\vec{F}$ e a projeção do deslocamento $\vec{d}$ na direção da força.

4. O bloco da figura, de peso P = 50 N, é arrastado ao longo do plano horizontal pela força $\vec{F}$ de intensidade F = 100 N. A força de atrito tem intensidade $F_{at} = 40$ N.

a) Determine o trabalho realizado pelas forças $\vec{F}$, $\vec{F}_{at}$, $\vec{P}$ e pela força normal $\vec{N}$, no deslocamento $\vec{d}$ de módulo 10 m.

b) Calcule a intensidade da resultante e o trabalho da resultante no deslocamento $\vec{d}$.



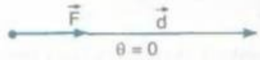
Resolução:

a) $\tau_F = F \cdot d \cdot \cos 0$

$\tau_F = F \cdot d$

$\tau_F = 100 \cdot 10$

$\tau_F = 1\,000\,J$

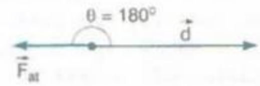


$\tau_{Fat} = F_{at} \cdot d \cdot \cos 180^\circ$

$\tau_{Fat} = -F_{at} \cdot d$

$\tau_{Fat} = -40 \cdot 10$

$\tau_{Fat} = -400\,J$

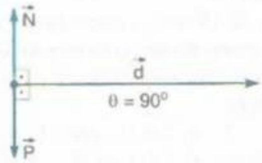


$\tau_P = P \cdot d \cdot \cos 90^\circ$

$\tau_P = 0$

$\tau_N = N \cdot d \cdot \cos 90$

$\tau_N = 0$



b) $\vec{N}$ e $\vec{P}$ se equilibram. Desse modo, a intensidade da resultante será:

$F_R = F - F_{at}$

$F_R = 100 - 40$

$F_R = 60\,N$

O trabalho de $\vec{F_R}$ no deslocamento $\vec{d}$ é dado por:

$\tau_{result} = F_R \cdot d \cdot \cos 0$

$\tau_{result} = F_R \cdot d$

$\tau_{result} = 60 \cdot 10$

$\tau_{result} = 600\,J$

Somando-se todos os trabalhos obtidos no item *A* ($\tau_F = 1\,000\,J$, $\tau_{Fat} = -400\,J$, $\tau_P = 0$ e $\tau_N = 0$) e comparando-se com o trabalho da resultante obtido no item *B* ($\tau_{result} = 600\,J$), concluímos que o "*trabalho da resultante é igual à soma algébrica dos trabalhos das forças componentes*":

$\tau_{result} = \tau_F + \tau_{Fat} + \tau_P + \tau_N$

5 A força $\vec{F}$ de intensidade 80 N atua sobre um corpo, formando ângulo constante de 60° com a direção do deslocamento $\vec{d}$ do corpo. Se d = 5,0 m, determine o trabalho realizado pela força $\vec{F}$.

Resolução:

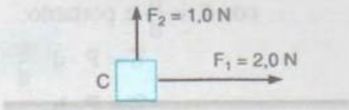
$\tau = F \cdot d \cdot \cos 60^\circ$. Sendo $\cos 60^\circ = 0{,}50$ (ver tabela), vem:

$\tau = 80 \cdot 5{,}0 \cdot 0{,}50$

$\tau = 200\,J$

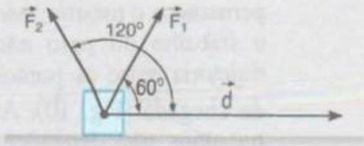
6

6. Um corpo *C*, representado na figura, desloca-se no sentido da força $\vec{F_1}$ de intensidade 2,0 N. Durante um deslocamento de módulo 2,0 m, calcule os trabalhos realizados pelas forças $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$.



7. Um bloco, de massa m = 10 kg, desliza numa superfície horizontal, sem atrito, com velocidade constante. A seguir, penetra numa região rugosa onde se desloca d = 5,0 m até parar. Sendo $\mu = 0{,}40$ o coeficiente de atrito entre o bloco e a superfície rugosa, calcule o trabalho realizado pela força de atrito, nestes 5,0 m. É dado $g = 10\,m/s^2$.

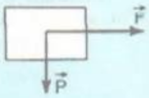
8. O bloco da figura desloca-se horizontalmente. Sejam $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ duas forças entre as diversas forças que agem no bloco. Sendo $F_1 = F_2 = 10\,N$, $\cos 60° = -\cos 120° = 0{,}50$, calcule os trabalhos que $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ realizam num deslocamento de módulo d = 4,0 m.



EXERCÍCIOS DE REFORÇO

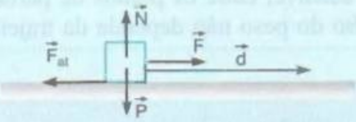
9. (PUC-SP) O corpo representado no esquema tem peso P = 20 N. Sob ação da força horizontal $\vec{F}$, de intensidade 10 N, o corpo é deslocado horizontalmente 5 metros para a direita. Nesse deslocamento, os trabalhos realizados pelas forças $\vec{F}$ e $\vec{P}$ têm valores respectivamente iguais a:

a) 50 J e 0
b) 50 J e −100 J
c) 0 e 100 J
d) 50 J e 100 J
e) 50 J e 50 J



10. O bloco de massa *m* se desloca horizontalmente sob ação das forças mostradas na figura. Seja *g* a aceleração da gravidade e μ o coeficiente de atrito entre o bloco e o plano. Após um deslocamento de módulo *d*, a força de atrito $\vec{F_{at}}$ realiza um trabalho igual a:

a) $\mu \cdot m \cdot g$
b) $\mu \cdot m \cdot g \cdot d$
c) $-\mu \cdot m \cdot g \cdot d$
d) $-m \cdot g \cdot d$
e) zero



4. TRABALHO DO PESO

Um ponto material de massa *m* parte da posição *A* e chega à posição *B*, segundo a trajetória mostrada na Fig. 9, num local onde a aceleração da gravidade $\vec{g}$ é constante. Nessas condições, o peso $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ é constante. Seja $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$ o vetor deslocamento, θ o ângulo entre $\vec{P}$ e $\vec{d}$, e *h* o desnível entre as posições *A* e *B*. Da definição de trabalho de uma força constante, resulta que o trabalho do peso é dado por:

$$\tau = P \cdot d \cdot \cos\theta$$

Mas no triângulo ABC, temos:

$\cos\theta = \dfrac{h}{d}$ e portanto:

$$\tau = P \cdot d \cdot \frac{h}{d}$$

$$\tau = P \cdot h$$

$$\boxed{\tau = m \cdot g \cdot h}$$

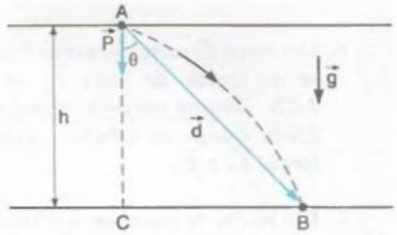


Fig. 9

Observe que, mudando-se a trajetória entre os pontos *A* e *B*, o trabalho permanece o mesmo; isso significa que o trabalho do peso não depende da trajetória entre os pontos de partida e de chegada (Fig. 10). As forças cujos trabalhos não dependem da trajetória são denominadas forças *conservativas*.

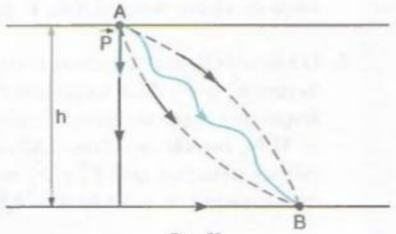


Fig. 10
τ = mgh, qualquer que seja a trajetória entre A e B.

Se o ponto material se deslocasse de *B* para *A*, o trabalho do peso seria negativo (Fig. 11):

$$\boxed{\tau = -m \cdot g \cdot h}$$

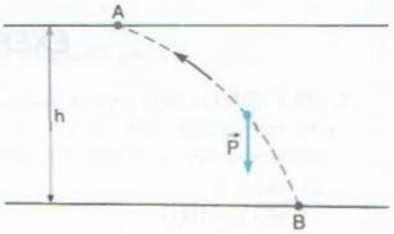


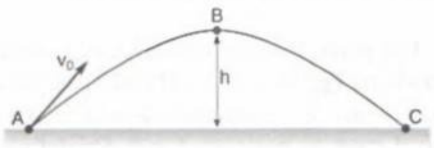
Fig. 11 $\tau = -mgh$

Em resumo, temos:

$\tau = \pm\, m \cdot g \cdot h$
+ mgh: quando o corpo desce
− mgh: quando o corpo sobe
h: desnível entre os pontos de partida e de chegada
O trabalho do peso não depende da trajetória.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

11 Um ponto material, de massa m = 0,30 kg, é lançado obliquamente de um ponto *A* descrevendo a trajetória indicada. A altura máxima obtida é h = 5,0 m. Considere a aceleração da gravidade constante e de módulo g = 10 m/s². Determine o trabalho do peso nos deslocamentos de *A* para *B*, *B* para *C* e *A* para *C*.



Resolução:

A *para* B: $\tau_{AB} = -m \cdot g \cdot h$

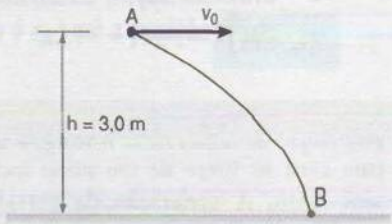
$\tau_{AB} = -0{,}30 \cdot 10 \cdot 5{,}0$ $\boxed{\tau_{AB} = -15\,J}$

B *para* C: $\tau_{BC} = +m \cdot g \cdot h$

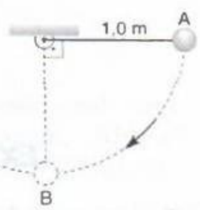
$\tau_{BC} = +0{,}30 \cdot 10 \cdot 5{,}0$ $\boxed{\tau_{BC} = +15\,J}$

A *para* C: $\boxed{\tau_{AC} = 0}$, pois o desnível entre *A* e *C* é nulo.

12. Um ponto material, de massa m = 0,20 kg, é lançado horizontalmente de um ponto *A* situado a 3,0 m do solo. Considere a aceleração da gravidade constante e de módulo $g = 10\,m/s^2$. Determine o trabalho do peso no deslocamento de *A* para *B*. *B* é ponto onde o ponto material atinge o solo.



13 Uma pequena esfera, de massa m = 1,0 kg, está presa à extremidade de um fio de comprimento 1,0 m. Determine o trabalho realizado pelo peso da esfera no deslocamento de *A* para *B*. É dado $g = 10\,m/s^2$.



Resolução:

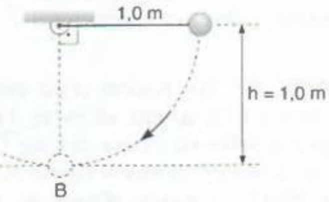
Como a esfera desce, temos:

$\tau = +m \cdot g \cdot h$

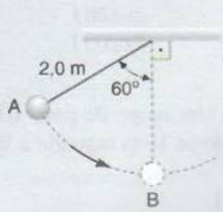
Sendo m = 1,0 kg, $g = 10\,m/s^2$ e h = 1,0 m, vem:

$\tau = +1{,}0 \cdot 10 \cdot 1{,}0$

$\boxed{\tau = +10\,J}$

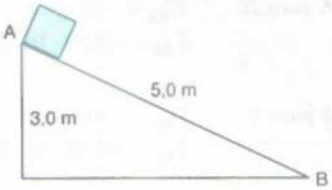


14. Uma pequena esfera, de massa m = 2,0 kg, está presa à extremidade de um fio de comprimento 2,0 m. Determine o trabalho realizado pelo peso da esfera no deslocamento de *A* para *B*. É dado $g = 10\,m/s^2$.



6

15 Um corpo, de massa igual a 0,50 kg, desliza sobre um plano inclinado sem atrito, partindo do repouso no ponto *A*. A aceleração da gravidade é de $10\,m/s^2$. Determine o trabalho do peso do corpo no deslocamento de *A* até *B*.



Resolução:

Como o corpo desce, temos:

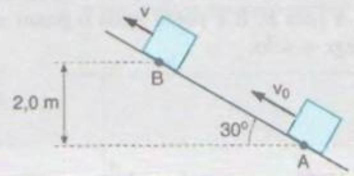
$\tau = +m \cdot g \cdot h$

Sendo $m = 0{,}50\,kg$, $g = 10\,m/s^2$ e $h = 3{,}0\,m$ o desnível entre *A* e *B*, vem:

$\tau = +0{,}50 \cdot 10 \cdot 3{,}0$

$\boxed{\tau = +15\,J}$

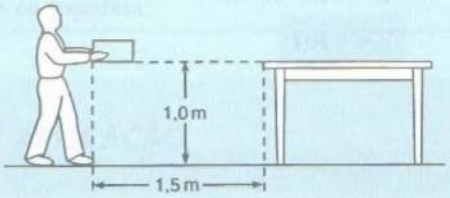
16. Um corpo, de massa $m = 0{,}30\,kg$, é lançado para cima ao longo de um plano inclinado, sem atrito. A aceleração da gravidade é $g = 10\,m/s^2$. Determine o trabalho do peso do corpo no deslocamento de *A* para *B*, indicado.



EXERCÍCIOS DE REFORÇO

17. (COVEST-PE) Uma pessoa levanta um corpo de massa 5,0 kg do solo até uma altura de 1,8 m e, em seguida, o abaixa até uma altura final de 1,2 m. Determine, em joules, o módulo do trabalho realizado pela força gravitacional. É dada a aceleração local da gravidade: $10\,m/s^2$.

18. (FATEC-SP) Um homem ergue uma caixa de massa 8 kg, a uma altura de 1 m, para colocá-la sobre uma mesa distante 1,5 m do local, conforme mostra a figura. Adotando $g = 10\,m/s^2$, é correto afirmar que o trabalho realizado pela força peso, até a superfície superior da mesa, é



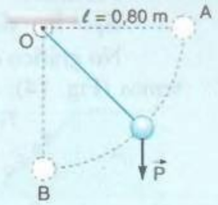
a) −80 J.
b) 80 J.
c) 120 J.
d) 200 J.
e) −120 J.

19. (UE-CE) Um corpo de peso 100 N é abandonado sobre um plano inclinado de 30°, sem atrito, deslocando-se 10 m segundo a linha de maior declive do plano. O trabalho realizado pelo peso do corpo é:

a) 1 000 J
b) 500 J
c) 100 J
d) 10 J

20. A pequena esfera de peso $P = 2{,}0\,N$, presa a um fio de comprimento $\ell = 0{,}80\,m$, é solta do ponto A. O trabalho realizado pelo peso $\vec{P}$, entre as posições A e B, sendo B o ponto mais baixo da trajetória, vale:

a) zero
b) $+2{,}0\,J$
c) $+1{,}6\,J$
d) $-1{,}6\,J$
e) $+3{,}2\,J$



6

5. TRABALHO DE UMA FORÇA VARIÁVEL

Considere um ponto material que, sujeito a um sistema de forças, descreve uma trajetória qualquer, desde a posição A (cujo espaço é s_A) até a posição B (de espaço s_B) (Fig. 12).

Fig. 12

Seja $\vec{F}$ uma força variável dentre aquelas que agem sobre o ponto material. Para o cálculo do trabalho de $\vec{F}$, ao longo do deslocamento AB, dividimos a trajetória em pequenos trechos, de modo que possam ser considerados retilíneos e a força $\vec{F}$, em cada um deles, possa ser considerada constante. Assim, a força $\vec{F}$ assume o valor $\vec{F_1}$ no deslocamento $\vec{d_1}$, $\vec{F_2}$ em $\vec{d_2}$, ..., $\vec{F_i}$ em $\vec{d_i}$, ... (Fig. 13).

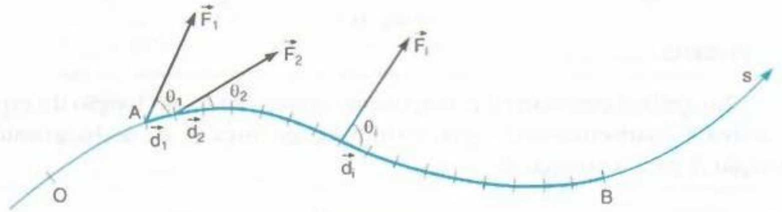


Fig. 13

Desse modo, temos:

$$\tau_F = \tau_{F_1} + \tau_{F_2} + ... + \tau_{F_i} + ...$$
$$\tau_F = F_1 d_1 \cdot \cos\theta_1 + F_2 d_2 \cos\theta_2 + ... + F_i d_i \cos\theta_i + ...$$

Mas

$F_1 \cdot \cos\theta_1 = F_{t_1}$ é a componente tangencial de $\vec{F_1}$

$F_2 \cdot \cos\theta_2 = F_{t_2}$ é a componente tangencial de $\vec{F_2}$

⋮

$F_i \cdot \cos\theta_i = F_{t_i}$ é a componente tangencial de $\vec{F_i}$

⋮

Portanto:

$\mathcal{T}_F = F_{t_1} \cdot d_1 + F_{t_2} \cdot d_2 + \cdots + F_{t_i} \cdot d_i + \cdots$

No gráfico cartesiano da componente tangencial de $\vec{F}$ em função do espaço, temos (Fig. 14):

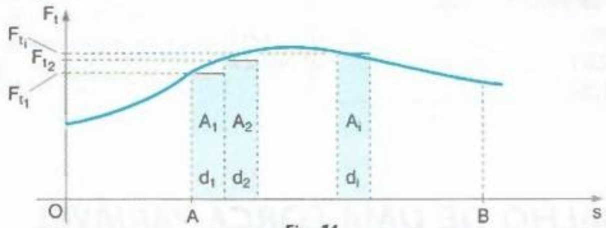


Fig. 14

Considerando as áreas dos retângulos $A_1 = F_{t_1} \cdot d_1$, $A_2 = F_{t_2} \cdot d_2$, $\cdots$, $A_i = F_{t_i} \cdot d_i$, $\cdots$, vem:

$$\mathcal{T}_F = A_1 + A_2 + \cdots + A_i + \cdots$$

Dividindo-se a trajetória em um número maior de pequenos deslocamentos, obtemos um valor mais exato para o trabalho da força F, equivalendo à obtenção de um número maior de pequenos retângulos.

Desse modo, para um número de deslocamentos tendendo a infinito, o trabalho da força $\vec{F}$, entre as posições A e B, fica numericamente igual à área da superfície compreendida entre a curva e o eixo s (Fig. 15).

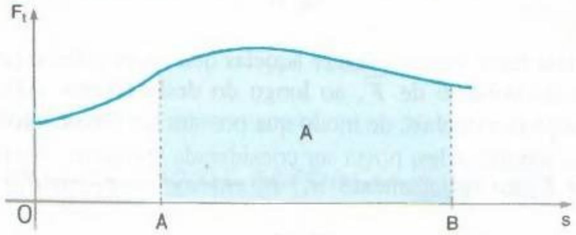


Fig. 15

Portanto:

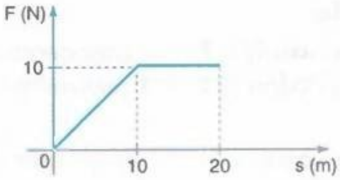
No gráfico cartesiano da componente tangencial F_t em função do espaço s, a área A é numericamente igual ao trabalho da força $\vec{F}$ no deslocamento da posição A para a posição B.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

21 Sobre um móvel, em movimento retilíneo, aplica-se uma força $\vec{F}$ na direção do deslocamento. O gráfico indica a intensidade F da força em função do espaço s. Determine o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ nos deslocamentos:

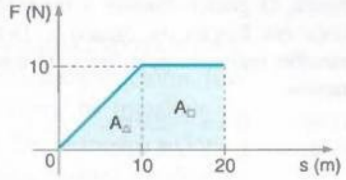
a) de s = 0 a s = 10 m;

b) de s = 10 m a s = 20 m.



Resolução:

a) Observemos, inicialmente, que $\vec{F}$ tem a direção do deslocamento e portanto a intensidade F é a própria componente tangencial. O trabalho da força $\vec{F}$ no deslocamento de s = 0 a s = 10 m é numericamente igual à área do triângulo indicado:



$$A_\triangle = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50$$

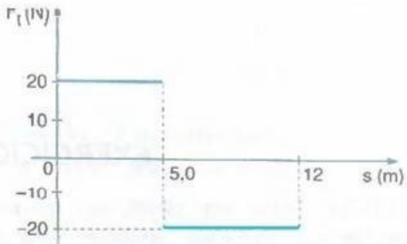
$$\boxed{\tau_{0 \vdash\!\dashv 10\,\mathrm{m}} = 50\,\mathrm{J}}$$

b) No deslocamento de s = 10 m a s = 20 m, o trabalho de $\vec{F}$ é numericamente igual à área do retângulo da figura acima:

$A_\square$ = base · altura = 10 · 10 = 100

$$\boxed{\tau_{10\,\mathrm{m} \vdash\!\dashv 20\,\mathrm{m}} = 100\,\mathrm{J}}$$

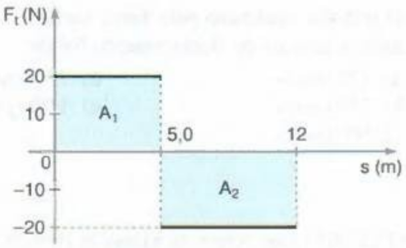
22 A componente tangencial de uma força $\vec{F}$, que age num ponto material, varia com o espaço de acordo com o gráfico anexo. Determine o trabalho que $\vec{F}$ realiza nos deslocamentos:



a) de s = 0 a s = 5,0 m;
b) de s = 5,0 m a s = 12 m;
c) de s = 0 a s = 12 m.

Resolução:

Inicialmente, observe que $F_t > 0$ significa que $\vec{F}$ favorece o deslocamento e, portanto, realiza trabalho positivo. $F_t < 0$ significa que $\vec{F}$ desfavorece o deslocamento e seu trabalho é negativo.



a) De s = 0 a s = 5,0 m, temos:

A_1 = base · altura = 5,0 · 20 = 100

$$\therefore \quad \boxed{\tau_{0 \vdash\!\dashv 5{,}0\,\mathrm{m}} = 100\,\mathrm{J}}$$

b) De s = 5,0 m a s = 12 m:

A_2 = base · altura = 7,0 · 20 = 140

$$\therefore \quad \boxed{\tau_{5{,}0\,\mathrm{m} \vdash\!\dashv 12\,\mathrm{m}} = -140\,\mathrm{J}}$$

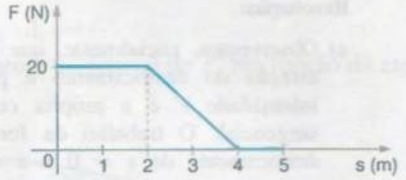
c) De s = 0 a s = 12 m:

$$\tau_{0 \vdash\!\dashv 12\,\mathrm{m}} = \tau_{0 \vdash\!\dashv 5{,}0\,\mathrm{m}} + \tau_{5{,}0 \vdash\!\dashv 12\,\mathrm{m}} = 100 - 140$$

$$\therefore \quad \boxed{\tau_{0 \vdash\!\dashv 12\,\mathrm{m}} = -40\,\mathrm{J}}$$

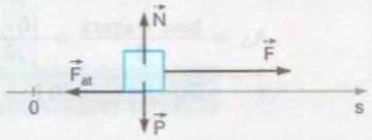
23. Sobre um móvel, em movimento retilíneo, aplica-se uma força $\vec{F}$ na direção do deslocamento. O gráfico fornece a intensidade F da força em função do espaço s. Determine o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ nos deslocamentos:

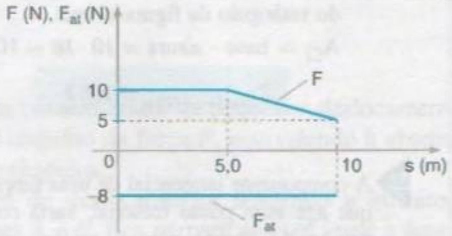
a) de s = 0 a s = 2,0 m;
b) de s = 0 a s = 5,0 m.



24. Sobre um móvel em movimento retilíneo ao longo do eixo 0s atuam as forças indicadas na figura. Os gráficos de F e F_{at} em função de s estão representados no diagrama ao lado. Determine no deslocamento de s = 0 a s = 10 m o trabalho:

a) da força $\vec{F}$;
b) da força de atrito $\vec{F}_{at}$;
c) da resultante.

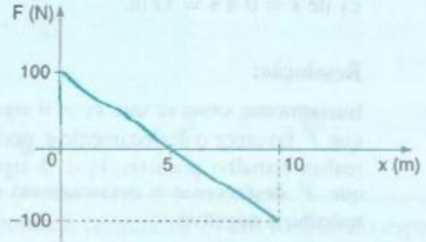




EXERCÍCIOS DE REFORÇO

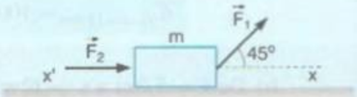
25. (UF-PA) Sobre um móvel, em movimento retilíneo e uniforme, aplica-se uma força variável (gráfico ao lado), na direção do deslocamento.
O trabalho realizado pela força variável nos 5 metros iniciais do deslocamento foi de:

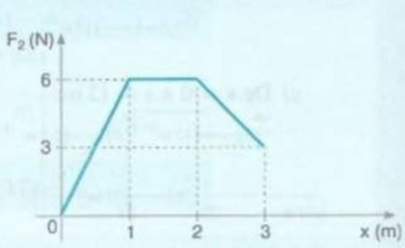
a) 125 joules
b) 250 joules
c) 500 joules
d) 750 joules
e) 1 000 joules



26. (PUC-RS) Um corpo de massa m desliza ao longo do eixo X'X sob a ação de duas forças, $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$. A força $\vec{F_1}$ é constante e tem módulo igual a 5,0 N e o módulo de $\vec{F_2}$ varia com a posição x de acordo com o gráfico ao lado (cos 45° = 0,7).
Considerando $\mathcal{T}_1$ o trabalho realizado pela força $\vec{F_1}$ e $\mathcal{T}_2$ o trabalho realizado pela força $\vec{F_2}$, pode-se afirmar que, para um deslocamento de x = 0 até x = 3 m:

a) $\mathcal{T}_1 > \mathcal{T}_2$
b) $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$
c) $\mathcal{T}_1 = 0$ e $\mathcal{T}_2 \neq 0$
d) $\mathcal{T}_1 \neq 0$ e $\mathcal{T}_2 = 0$
e) $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2$





6. TRABALHO DA FORÇA NORMAL E DE UMA FORÇA CENTRÍPETA

A força normal $\vec{N}$ (no caso em que um corpo se move numa superfície fixa) e uma força centrípeta $\vec{F}_c$ são, em cada instante, perpendiculares à trajetória. Isso significa que, se dividirmos a trajetória em pequenos trechos, os trabalhos de $\vec{N}$ e $\vec{F}_c$ em cada trecho serão nulos ($\theta = 90°$, $\cos 90° = 0$). Desse modo, ao longo do deslocamento AB (Figs. 16 e 17) o trabalho total da força normal e o de uma força centrípeta são nulos:

$$\mathcal{T}_N = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{T}_{F_c} = 0$$

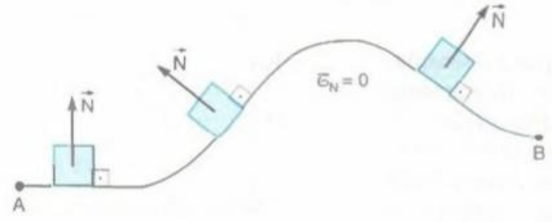


Fig. 16

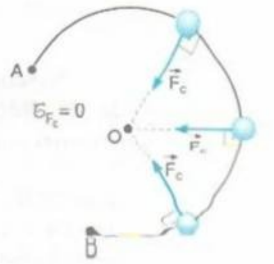


Fig. 17

Por exemplo, considere um pêndulo simples (Fig. 18). O trabalho que a força de tração $\vec{T}$ realiza, ao longo do deslocamento AB, é nulo, pois ela é, neste caso, uma força centrípeta: $\mathcal{T}_T = 0$

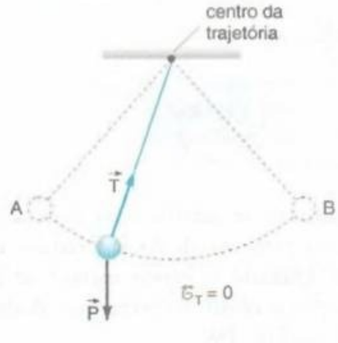


Fig. 18

7. TRABALHO DA FORÇA ELÁSTICA

Considere o sistema elástico constituído de uma mola e um bloco, na posição de equilíbrio (Fig. 19a). Ao ser distendida (Fig. 19b) ou comprimida (Fig. 19c), a mola exerce no bloco a força elástica $\vec{F}_{el}$, que tende a trazer o bloco para a posição de equilíbrio.

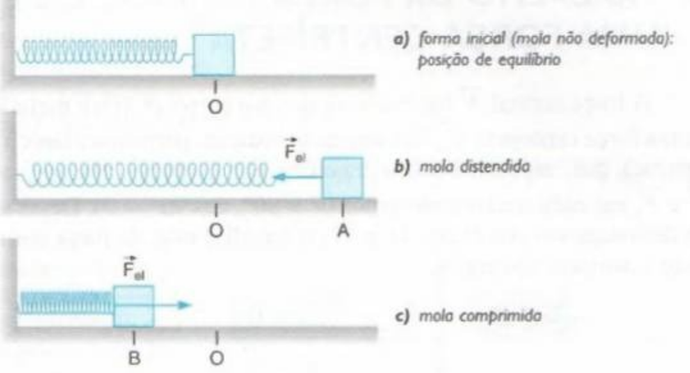


Fig. 19

Sabemos, ainda, que a intensidade da força elástica é diretamente proporcional à deformação x: $F_{el} = k \cdot x$, onde *k* é a constante elástica da mola. Desse modo, como a força elástica é variável, para o cálculo de seu trabalho devemos utilizar o gráfico de F_{el} em função de *x* (Fig. 20).

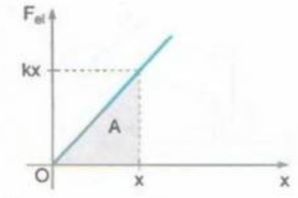


Fig. 20

A área *A* do triângulo indicado na Fig. 20 fornece o valor absoluto do trabalho da força elástica na deformação *x*:

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{x \cdot k \cdot x}{2} = \frac{kx^2}{2}$$

Portanto: $|\tau| = \frac{kx^2}{2}$ ou

$$\boxed{\tau = \pm \frac{kx^2}{2}}$$

Quando o bloco estiver se deslocando para a posição de equilíbrio, *o trabalho da força elástica é positivo*: deslocamento de *A* para *O*, na Fig. 19b, e de *B* para *O*, na Fig. 19c. Quando o bloco estiver se afastando da posição de equilíbrio, *o trabalho da força elástica é negativo*: deslocamento de *O* para *A*, na Fig. 19b, e de *O* para *B*, na Fig. 19c.

A força elástica, a exemplo do peso, é uma força conservativa. Seu trabalho não depende da trajetória. Assim, por exemplo, considere um anel, ligado a uma mola e que desliza ao longo de uma guia circular (Fig. 21). O trabalho da força elástica, ao longo da trajetória ACB, é igual ao trabalho ao longo de ADB.

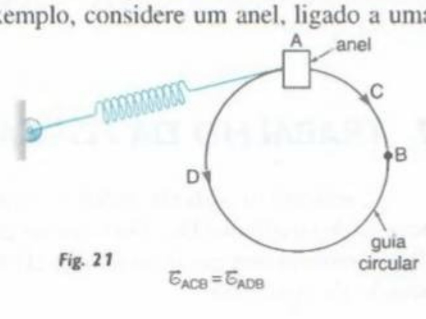
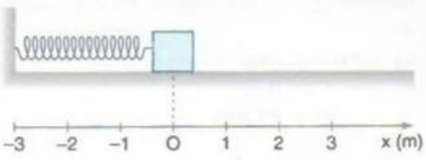


Fig. 21

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

27 A mola da figura, de constante elástica $k = 100\,N/m$, encontra-se não-deformada. Calcule o trabalho da força elástica nos deslocamentos de:

a) 0 a 2,0 m
b) 2,0 m a 0
c) 0 a −3,0 m
d) 1,0 m a 3,0 m



Resolução:

a) De 0 a 2,0 m, o bloco se afasta da posição de equilíbrio e, portanto, a força elástica realiza trabalho negativo:

$$\tau = -\frac{kx^2}{2} \qquad \tau = -\frac{100 \cdot (2{,}0)^2}{2} \qquad \boxed{\tau = -200\,J}$$

b) De 2,0 m a 0, o bloco se desloca para a posição de equilíbrio e, portanto, o trabalho da força elástica é positivo:

$$\tau = +\frac{kx^2}{2} \qquad \tau = +\frac{100 \cdot (2{,}0)^2}{2} \qquad \boxed{\tau = +200\,J}$$

c) De 0 a −3,0 m, o bloco se afasta da posição de equilíbrio e a força elástica realiza trabalho negativo:

$$\tau = -\frac{k \cdot x^2}{2} \qquad \tau = -\frac{100 \cdot (3{,}0)^2}{2} \qquad \boxed{\tau = -450\,J}$$

d) De 1,0 m a 3,0 m, o bloco se afasta da posição de equilíbrio e o trabalho da força elástica é negativo. Observe agora que não podemos usar, diretamente, a expressão do trabalho dos itens anteriores, pois ela vale somente nas deformações de zero a x e de x a zero (no gráfico F_{el} em função de x o trabalho corresponde à área do triângulo).
Neste caso (de 1,0 m a 3,0 m), o trabalho será calculado pela área do trapézio indicado na figura ao lado:

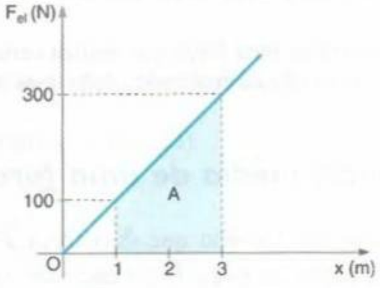
$$A_{trapézio} = \frac{(\text{base maior} + \text{base menor})}{2} \cdot \text{altura}$$

$$A_{trapézio} = \frac{(300 + 100)}{2} \cdot 2 = 400$$

Portanto:

$$|\tau| = 400\,J$$

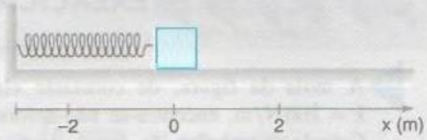
$$\boxed{\tau = -400\,J}$$



$F_{el} = k \cdot x \longrightarrow F_{el} = 100 \cdot x$
$x = 1{,}0\ m \longrightarrow F_{el} = 100\ N$
$x = 3{,}0\ m \longrightarrow F_{el} = 300\ N$

28. Um bloco, preso a uma mola de constante elástica 20 N/m, oscila entre as posições *A* (−2,0 m) e *B* (+2,0 m). Calcule o trabalho realizado pela força elástica nos deslocamentos de:

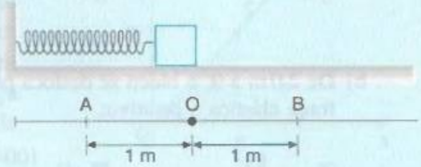
a) −2,0 m a zero;
b) zero a +2,0 m;
c) −2,0 m a +2,0 m.



EXERCÍCIOS DE REFORÇO

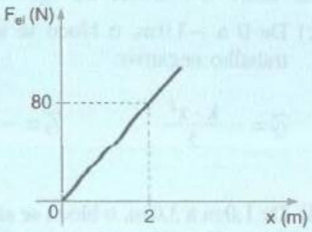
29. Um bloco, preso a uma mola de constante elástica k = 10 N/m, oscila entre as posições *A* e *B*. Calcule o trabalho realizado pela força elástica nos deslocamentos:

a) de *B* para *O*;
b) de *O* para *A*;
c) de *A* para *B*.



30. O gráfico ao lado fornece a intensidade da força elástica que uma mola exerce num bloco. Determine:

a) a constante elástica da mola;
b) o trabalho da força elástica quando o bloco se desloca de x = 0 a x = 1,0 m;
c) o trabalho da força elástica quando o bloco se desloca de x = 1,0 m a x = 2,0 m.



8. POTÊNCIA DE UMA FORÇA

Considere uma força que realiza certo trabalho. Para levarmos em conta o intervalo de tempo em que o trabalho é realizado, definimos a grandeza chamada *potência*.

Potência média de uma força

Seja $\mathcal{T}$ o trabalho que uma força $\vec{F}$ realiza num intervalo de tempo Δt. Por definição, a potência média da força $\vec{F}$ no intervalo de tempo Δt é a grandeza:

$$P_m = \frac{\mathcal{T}}{\Delta t}$$

Potência instantânea de uma força

A potência de uma força em certo instante pode ser entendida como uma potência média quando o intervalo de tempo Δt tende a zero:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathcal{T}}{\Delta t}$$

$$\boxed{P = \frac{d\mathcal{T}}{dt}}$$

A potência instantânea de uma força é a derivada do trabalho desta força em relação ao tempo.

No caso particular em que a força $\vec{F}$ é constante, sabemos que o trabalho $\mathcal{T}$ realizado por $\vec{F}$ no deslocamento $\vec{d}$ é dado por $\mathcal{T} = F \cdot d \cdot \cos\theta$ (Fig. 22), onde θ é o ângulo entre $\vec{F}$ e $\vec{d}$. Nessas condições, resulta para a potência média:

$$P_m = \frac{\mathcal{T}}{\Delta t} = \frac{F \cdot d \cdot \cos\theta}{\Delta t}$$

Mas $\frac{d}{\Delta t}$ é o módulo da velocidade vetorial média $\vec{v}_m$, no intervalo de tempo Δt. Portanto:

$$\boxed{P_m = F \cdot v_m \cdot \cos\theta}$$

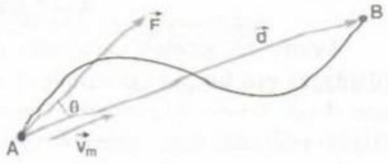


Fig. 22 $\mathcal{T} = F \cdot d \cdot \cos\theta \quad v_m = \frac{d}{\Delta t}$

Observe que θ é, também, o ângulo entre $\vec{F}$ e a velocidade vetorial média $\vec{v}_m$.

Calculando-se o limite da expressão anterior para Δt tendendo a zero, os valores médios passam a ser valores instantâneos. Assim, temos:

$$\boxed{P = F \cdot v \cdot \cos\theta}$$

O ângulo θ é, agora, o ângulo entre a força $\vec{F}$ e a velocidade vetorial instantânea $\vec{v}$.

Particularmente, quando a força $\vec{F}$ tem o mesmo sentido de $\vec{v}$, o ângulo θ é nulo ($\cos 0 = 1$) e, portanto:

$$\boxed{P = F \cdot v}$$

Quando o ângulo θ é 90°, isto é, $\vec{F}$ é perpendicular a $\vec{v}$, a potência é nula, pois $\cos 90° = 0$.

É o que acontece, por exemplo, com uma força *centrípeta* (Fig. 23).

Deste modo, *a potência de uma força centrípeta e o trabalho que ela realiza são nulos*:

$$\boxed{P_{F_c} = 0} \quad \text{e} \quad \boxed{\mathcal{T}_{F_c} = 0}$$

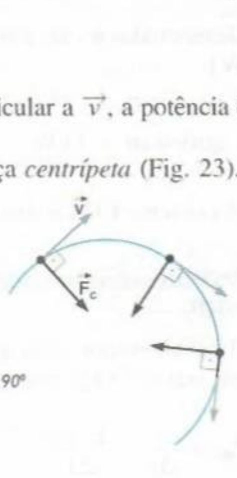


Fig. 23

9. GRÁFICO DA POTÊNCIA EM FUNÇÃO DO TEMPO

Inicialmente vamos considerar o caso em que a potência instantânea é constante e portanto igual à potência média em qualquer intervalo de tempo (Fig. 24).

Calculemos a área *A* do retângulo indicado:

$A = \text{base} \cdot \text{altura}$
$A = \Delta t \cdot P$

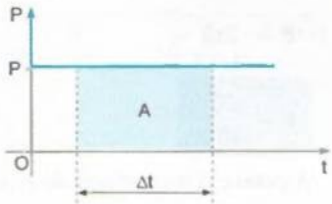


Fig. 24 $A = \tau$ (numericamente)

Mas sendo $P_m = P = \dfrac{\tau}{\Delta t}$, vem: $\tau = \Delta t \cdot P$. Portanto, concluímos que:

$$A = \tau \text{ (numericamente)}$$

Assim, no gráfico cartesiano da potência instantânea em função do tempo, a área *A* num intervalo de tempo Δt é numericamente igual ao trabalho realizado nesse intervalo de tempo.

Essa propriedade foi deduzida no caso particular em que a potência é constante, mas ela vale, mesmo quando a potência for variável (Fig. 25).

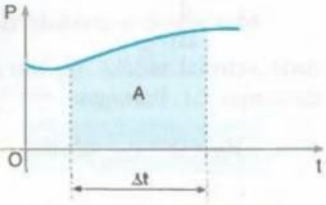


Fig. 25 $A = \tau$ (numericamente)

10. UNIDADES

A unidade de potência é a unidade de trabalho dividida pela unidade de intervalo de tempo:

$$\text{unidade de P} = \frac{\text{unidade de } \tau}{\text{unidade de } \Delta t}$$

Deste modo, no SI, a unidade de potência é $\dfrac{\text{joule}}{\text{segundo}}$, que recebe o nome de watt (W):

$1\ W = 1\ J/s$
$1 \text{ quilowatt} = 1\ kW = 10^3\ W$

No sistema CGS a unidade de potência é o $\dfrac{\text{erg}}{\text{segundo}}$.

Existem outras unidades de potência, como o cavalo-vapor (cv) e o *horse-power* (HP).

O cavalo-vapor corresponde à potência necessária para erguer de 1 m um corpo de massa 75 kg, em 1 s, num lugar onde $g = 9{,}8\ m/s^2$:

$$P_m = \frac{\tau}{\Delta t} = \frac{F \cdot d}{\Delta t} = \frac{m \cdot g \cdot d}{\Delta t}$$

$$1\ \text{cv} = \frac{75\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 1\ \text{m}}{1\ \text{s}}$$

$$1\ \text{cv} = \frac{735\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 \cdot \text{m}}{\text{s}} \qquad \boxed{1\ \text{cv} = 735\ \text{W}}$$

O *horse-power* pertence ao sistema técnico inglês e vale 746 W:

$$\boxed{1\ \text{HP} = 746\ \text{W}}$$

Pode-se expressar a unidade de trabalho como a unidade de potência, multiplicada pela unidade de intervalo de tempo. Assim, medindo-se a potência em quilowatt (kW) e o intervalo de tempo em hora (h), o trabalho será medido em quilowatt-hora (kWh).

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

31. Calcule a potência média de uma força que realiza um trabalho de $3{,}6 \cdot 10^3$ J em 6,0 min.

Resolução:

De $P_m = \dfrac{\mathcal{T}}{\Delta t}$, sendo $\mathcal{T} = 3{,}6 \cdot 10^3$ J e $\Delta t = 6{,}0\ \text{min} = 6{,}0 \cdot 60\ \text{s} = 3{,}6 \cdot 10^2$ s, vem:

$$P_m = \frac{3{,}6 \cdot 10^3}{3{,}6 \cdot 10^2} \qquad \boxed{P_m = 10\ \text{W}}$$

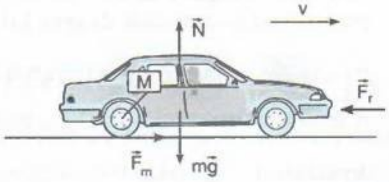
32. Um motor de potência 100 kW aciona um veículo durante 1,0 h. Determine o trabalho realizado pela força motora. Dê a resposta em kWh e em joules.

33. A potência de um automóvel, que se movimenta com velocidade constante de 15 m/s, é de $3{,}0 \cdot 10^4$ W. Considerando-se a trajetória retilínea e horizontal, determine:

a) a intensidade da força motora que propulsiona o automóvel;
b) a intensidade da força que se opõe ao movimento.

Resolução:

a) No automóvel agem as forças: peso $m \cdot \vec{g}$, normal $\vec{N}$, força motora $\vec{F}_m$ que propulsiona o automóvel e a força resistente $\vec{F}_r$, devida à resistência do ar e atritos.



Sendo $P = F_m \cdot v$, com $P = 3{,}0 \cdot 10^4$ W e $v = 15$ m/s, vem: $3{,}0 \cdot 10^4 = F_m \cdot 15$

$$\boxed{F_m = 2{,}0 \cdot 10^3\ \text{N}}$$

b) Como o movimento é retilíneo e uniforme, concluímos que a resultante é nula e portanto $\vec{F}_m$ e $\vec{F}_r$ devem ter intensidades iguais:

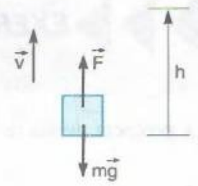
$$F_r = F_m = 2{,}0 \cdot 10^3\ N$$

34. Um automóvel num trecho reto e horizontal tem velocidade escalar constante de 10 m/s, apesar de atuar sobre ele uma força resistente total de intensidade $2{,}5 \cdot 10^3$ N. Determine a potência necessária para mantê-lo em movimento.

35 Uma máquina ergue verticalmente um corpo, de massa 100 kg, a uma altura de 5,0 m, em 10 s e com velocidade escalar constante. Sendo g = 10 m/s², determine a potência necessária da máquina.

Resolução:

Na figura, $m \cdot \vec{g}$ é o peso do corpo, e $\vec{F}$ é a força que a máquina aplica no corpo, erguendo-o.
Sendo o movimento retilíneo e uniforme, a resultante é nula e portanto $\vec{F}$ e $m \cdot \vec{g}$ devem ter intensidades iguais: $F = m \cdot g$.
O trabalho que $\vec{F}$ realiza é igual a $\mathcal{T} = F \cdot h = m \cdot g \cdot h$. A potência necessária da máquina vale:



$$P = \frac{\mathcal{T}}{\Delta t} \qquad P = \frac{m \cdot g \cdot h}{\Delta t}$$

Sendo m = 100 kg, g = 10 m/s², h = 5,0 m e Δt = 10 s, vem:

$$P = \frac{100 \cdot 10 \cdot 5{,}0}{10} \qquad P = 500\ W$$

36. Calcule a potência necessária de uma máquina que ergue verticalmente um corpo de peso 50 N a uma altura de 4,0 m em 2,0 s e com velocidade constante.

37. Calcule a potência necessária de uma máquina que ergue verticalmente um corpo de peso 50 N, com velocidade constante de módulo 1,0 m/s.

38 Uma usina hidrelétrica foi construída para aproveitar uma queda-d'água de 20 m de altura. Se a vazão da água é de $1{,}5 \cdot 10^3\ m^3/s$, qual a potência disponível, supondo que não haja perdas? Dados: densidade da água $1{,}0 \cdot 10^3\ kg/m^3$ e aceleração da gravidade g = 10 m/s².

Resolução:

A potência disponível é $P = \frac{\mathcal{T}}{\Delta t}$, onde $\mathcal{T} = m \cdot g \cdot h$ é o trabalho da gravidade. Sendo a densidade $d = \frac{m}{V}$, onde V é o volume, resulta $m = d \cdot V$ e, portanto, $\mathcal{T} = dVgh$.

Portanto: $P = \frac{dVgh}{\Delta t}$.

Sendo $\frac{V}{\Delta t} = Z$ (vazão), vem: $\boxed{P = d \cdot Z \cdot g \cdot h}$

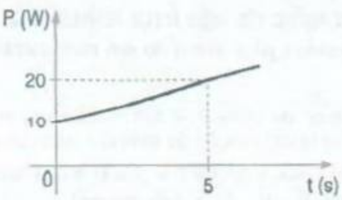
Fazendo $d = 1{,}0 \cdot 10^3\ kg/m^3$, $Z = 1{,}5 \cdot 10^3\ m^3/s$, $g = 10\ m/s^2$ e $h = 20\ m$, vem:

$P = 1{,}0 \cdot 10^3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 20$ $\boxed{P = 3{,}0 \cdot 10^8\ W}$

6

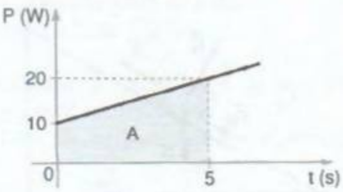
39. A potência disponível de uma queda-d'água, de 10 m de altura, é de $2{,}0 \cdot 10^6$ W. Determine a vazão da água em m^3/s. Considere $g = 10\ m/s^2$ e a densidade da água $1{,}0 \cdot 10^3\ kg/m^3$.

40 A potência *P* de uma força varia com o tempo de acordo com o gráfico ao lado. Qual o trabalho realizado pela força entre os instantes 0 e 5,0 s?



Resolução:

O trabalho realizado pela força, desde o instante zero até o instante 5,0 s, é numericamente igual à área do trapézio indicado:



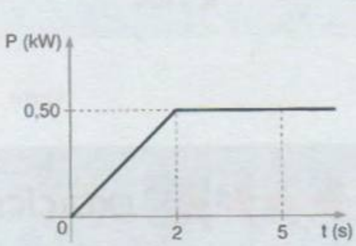
$$A = \frac{\text{base maior} + \text{base menor}}{2} \cdot \text{altura}$$

$$A = \frac{20 + 10}{2} \cdot 5{,}0 = 75$$

$\boxed{\mathcal{T} = 75\ J}$

41. A potência de um motor, em função do tempo, está representada no gráfico ao lado. Determine o trabalho realizado pela força motora, nos intervalos de tempo de:

a) 0 a 2,0 s;
b) 2,0 s a 5,0 s.



EXERCÍCIOS DE REFORÇO

42. (UC-MG) Um motor é instalado no alto de um prédio para elevar pesos e deve executar as seguintes tarefas:

I) elevar 100 kg a 20 m de altura em 10 s;
II) elevar 200 kg a 10 m de altura em 20 s;
III) elevar 300 kg a 15 m de altura em 30 s.

A ordem crescente das potências que o motor deverá desenvolver para executar as tarefas anteriores é:

a) I, II, III
b) I, III, II
c) II, I, III
d) III, I, II
e) II, III, I

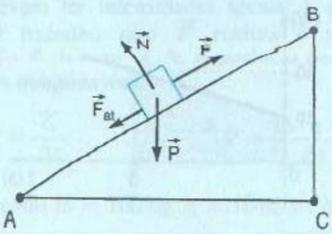
6

43. (FATEC-SP) Uma máquina tem potência útil 2,5 kW e ergue um corpo de massa m com velocidade 5 m/s ($g = 10\,m/s^2$). O valor de m em kg é:

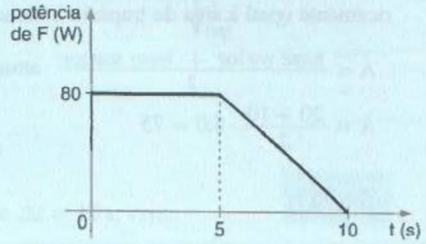
a) 25
b) 50
c) 250
d) 12,5
e) n.d.a

44. (FCMSC-SP) Um automóvel num trecho horizontal tem velocidade constante de 20 m/s apesar de atuar sobre ele uma força resistente de 800 N que se opõe ao movimento. Determine a potência necessária para mantê-lo em movimento.

45. O bloco de peso P = 5,0 N sobe um plano inclinado sob ação de uma força $\vec{F}$, cujo gráfico da potência em função do tempo é dado abaixo. O deslocamento de A até B é feito em 10 s. A força de atrito entre o bloco e o plano tem intensidade $F_{at} = 2{,}0\,N$. Determine o trabalho realizado pelas forças $\vec{F}$, $\vec{P}$, $\vec{F}_{at}$ e pela normal $\vec{N}$.

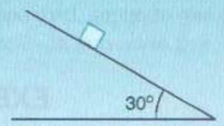


$\overline{AB} = 100\,m$
$\overline{BC} = 60\,m$



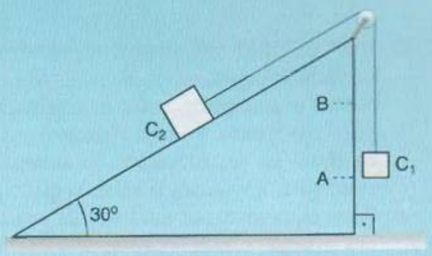
EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

46. (PUCC-SP) Um bloco de massa 2,0 kg escorrega, com velocidade constante, por um plano inclinado de 30° com a horizontal, descendo 10 m ao longo do plano.
Considerando $g = 10\,m/s^2$ e sen 30° = 0,50, pode-se afirmar que, neste deslocamento, os trabalhos realizados pelas forças peso e atrito são, respectivamente, em joules:



a) 20 e 10
b) 20 e −20
c) 100 e −100
d) 100 e −200
e) 200 e −200

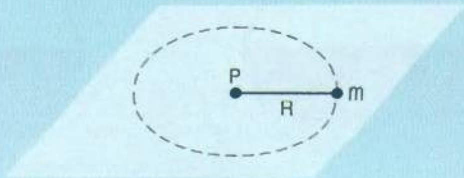
47. (Mackenzie-SP) No sistema ao lado, de fio e polia ideais, o corpo C_1 de massa 5,0 kg sobe 50 cm, desde o ponto A até o ponto B, com velocidade constante. O trabalho realizado pela força de atrito existente entre o corpo C_2, de massa 20 kg, e o plano inclinado, neste intervalo, foi:



$(g = 10\,m/s^2)$

a) −15 J b) 20 J c) −25 J d) 40 J e) −50 J

48. (FUVEST-SP) Um corpo de massa m está em movimento circular sobre um plano horizontal, preso por uma haste rígida de massa desprezível e comprimento R. A outra extremidade da haste está presa a um ponto fixo P, como mostra a figura (em perspectiva). O coeficiente de atrito entre o corpo e o plano é μ, constante. Num dado instante, o corpo tem velocidade de módulo V e direção paralela ao plano e perpendicular à haste.



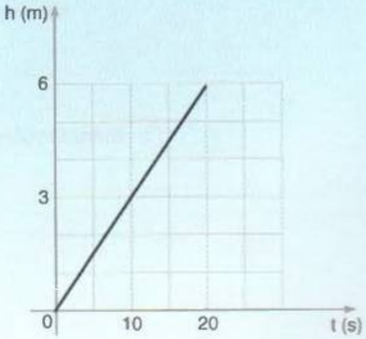
a) Qual deve ser o valor de V para que o corpo pare após 2 (duas) voltas completas?
b) Qual o tempo gasto pelo corpo para percorrer a última volta antes de parar?
c) Qual o trabalho realizado pela força de atrito durante a última volta?

49. (U. E. Uberlândia-MG) Dois guindastes G_1 e G_2 transportam a mesma carga de peso P até uma mesma altura H. O primeiro gasta 20 s nessa tarefa e o segundo, 30 s. Sendo $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ os trabalhos realizados e P_1 e P_2 as potências desenvolvidas por G_1 e G_2, respectivamente, é correto afirmar que:

a) $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ e $P_1 = P_2$
b) $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ e $3P_1 = 2P_2$
c) $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ e $2P_1 = 3P_2$
d) $2\mathcal{T}_1 = 3\mathcal{T}_2$ e $P_1 = P_2$
e) $3\mathcal{T}_1 = 2\mathcal{T}_2$ e $P_1 = P_2$

50. (FUVEST-SP) Uma empilhadeira elétrica transporta do chão até uma prateleira, a 6 m do chão, um pacote de 120 kg. O gráfico ilustra a altura do pacote em função do tempo. A aceleração local da gravidade é $10\,m/s^2$. A potência aplicada ao corpo pela empilhadeira é:

a) 120 W
b) 360 W
c) 720 W
d) 1.200 W
e) 2.400 W



51. (FESP-PE) Uma caixa-d'água, cuja capacidade é de 5 000 litros, está situada a 6,0 m de altura do reservatório. Uma bomba funcionando durante 20 minutos eleva a água, enchendo completamente a caixa. A aceleração da gravidade é $10\,m/s^2$. A potência desenvolvida pelo motor da bomba para realizar essa tarefa foi, em watts, de:

a) 1 500 b) 400 c) 250 d) 1 800 e) 240 000

52. (FUVEST-SP) Um automóvel possui um motor de potência máxima Po. O motor transmite sua potência completamente às rodas. Movendo-se em uma estrada retilínea horizontal, na ausência de vento, o automóvel sofre a resistência do ar, que é expressa por uma força cuja magnitude é $F = Av^2$, onde A é uma constante positiva e v é a velocidade do automóvel. O sentido dessa força é oposto ao da velocidade do automóvel. Não há outra força resistindo ao movimento. Nessas condições, a velocidade máxima que o automóvel pode atingir é v_0. Se quiséssemos trocar o motor desse automóvel por um outro de potência máxima P, de modo que a velocidade máxima atingida nas mesmas condições fosse $v = 2v_0$, a relação entre P e Po deveria ser:

a) $P = 2Po$
b) $P = 4Po$
c) $P = 8Po$
d) $P = 12Po$
e) $P = 16Po$

6

6. Um ponto material descreve um movimento circular, de raio 0,30 m, com energia cinética constante de 6,0 J. Qual a intensidade da força resultante que age sobre o ponto material?

7 Um corpo de massa m = 10 kg, inicialmente em repouso, é posto em movimento sob ação de uma força resultante $\vec{F}$ e adquire, após certo instante, uma velocidade escalar de 10 m/s. Determine o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ nesse intervalo de tempo.

Resolução:

Pelo Teorema da Energia Cinética, temos:

$$\tau_{result} = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2}$$

Sendo m = 10 kg, $v_0 = 0$ e v = 10 m/s, vem:

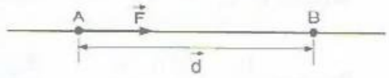
$$\tau_{result} = \frac{10 \cdot 10^2}{2} - 0 \qquad \tau_{result} = 500 \text{ J}$$

8 Um ponto material, sob a ação de uma força constante $\vec{F}$ de intensidade 10 N, move-se sobre uma reta. As energias cinéticas do ponto material, em dois pontos *A* (anterior) e *B* (posterior) da trajetória, são iguais a 5,0 J e 20 J, respectivamente. Determine a distância entre *A* e *B*.

Resolução:

Pelo Teorema da Energia Cinética, temos:

$\tau_{result} = E_{c_B} - E_{c_A}$



$\tau_{result} = 20 - 5,0$

$\tau_{result} = 15$ J

Da definição de trabalho, sendo $\vec{F}$ a resultante, temos:

$\tau_{result} = F \cdot d \cdot \cos\theta$

$15 = 10 \cdot d \cdot \cos 0$. Sendo $\cos 0 = 1$ (ver tabela), vem:

$15 = 10 \cdot d \qquad d = 1,5$ m

9. Qual o trabalho realizado pela força resultante que age sobre um corpo de massa 1,0 kg, cuja velocidade escalar variou de 2,0 m/s para 6,0 m/s?

10. Um bloco, de massa m = 5,0 kg, sob ação de uma força resultante constante $\vec{F}$, move-se sobre uma reta conforme a figura. Ao passar pelo ponto *A*, sua velocidade escalar é de 10 m/s e pelo ponto *B*, 12 m/s. Sendo de 2,0 m a distância entre *A* e *B*, determine a intensidade de $\vec{F}$.

11 Um projétil de massa m = 0,10 kg atinge perpendicularmente uma parede vertical com velocidade escalar 60 m/s. O projétil penetra na parede e desloca-se 20 cm até parar. Determine a intensidade da força que a parede exerce no projétil e que se opõe ao movimento. Considere essa força constante.

Resolução:

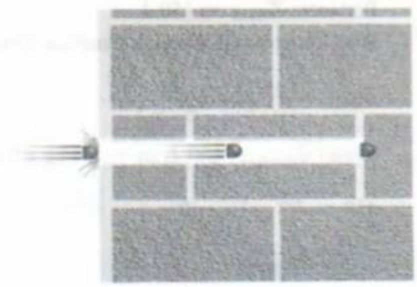
Calculemos o trabalho da resultante pelo Teorema da Energia Cinética:

$$\tau_{result} = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2}$$

Sendo m = 0,10 kg, v = 0 e v_0 = 60 m/s, vem:

$$\tau_{result} = 0 - \frac{0{,}10 \cdot 60^2}{2}$$

$$\tau_{result} = -180 \text{ J}$$



O trabalho da resultante pode também ser calculado pela definição, observando que a força que a parede exerce sobre o projétil, e que se opõe ao movimento, é a resultante:

$$\tau_{result} = F \cdot d \cdot \cos 180°$$
$$-180 = F \cdot 0{,}20 \cdot (-1)$$

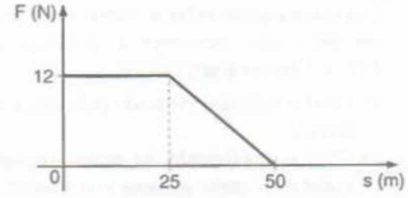
$$F = 9{,}0 \cdot 10^2 \text{ N}$$

Observação

No caso real, a força de resistência que a parede exerce no projétil tem intensidade variável. O que acabamos de calcular é a intensidade da *força média*.

12. Um bloco de massa m = 10 kg realiza um movimento retilíneo e uniforme com velocidade escalar 10 m/s, quando lhe é aplicada uma força constante $\vec{F}$, em sentido contrário ao do movimento, levando-o ao repouso após percorrer 5,0 m. Calcule a intensidade da força $\vec{F}$.

13 Um ponto material cuja massa é 1,0 kg está sujeito a uma força $\vec{F}$ que varia com o espaço dele, segundo o gráfico a seguir. Supondo que o ponto material estivesse inicialmente em repouso no espaço s = 0, qual seria sua velocidade escalar no espaço s = 50 m? A trajetória é retilínea.

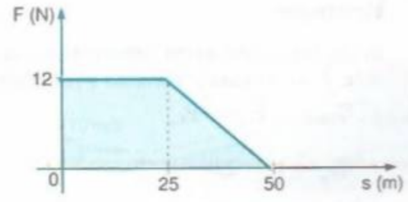


Resolução:

A força $\vec{F}$ é a resultante e seu trabalho, de s = 0 a s = 50 m, é numericamente igual à área do trapézio no gráfico F × s:

$$A = \frac{\text{base maior} + \text{base menor}}{2} \cdot \text{altura}$$

$$A = \frac{50 + 25}{2} \cdot 12 = 450$$



Portanto: $\tau_{result} = 450$ J

Pelo Teorema da Energia Cinética, temos:

$$\tau_{result} = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2}$$

Sendo $\tau_{result} = 450$ J, m = 1,0 kg e $v_0 = 0$, vem:

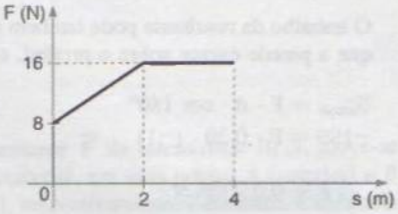
$$450 = \frac{1{,}0 \cdot v^2}{2} - 0$$

$v = 30$ m/s

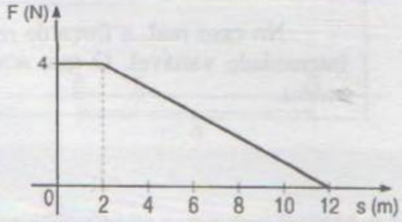
14. É dado o gráfico da intensidade da força resultante $\vec{F}$, aplicada num corpo, em função do espaço s. A massa do corpo é 2,0 kg e a sua velocidade é 5,0 m/s, quando s = 0. Considerando a trajetória retilínea, determine:

a) a energia cinética do corpo, quando s = = 2,0 m;

b) a velocidade escalar do corpo, quando s = = 4,0 m.



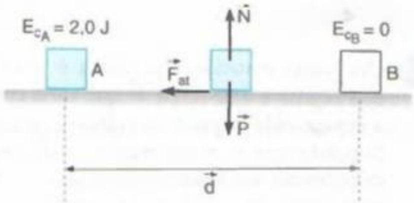
15. Um bloco de massa 2,0 kg move-se em linha reta, sob ação de uma única força $\vec{F}$. A intensidade de $\vec{F}$ em função do espaço do bloco está representada no gráfico. Sabendo-se que, para s = 2,0 m, a velocidade escalar do bloco é 4,0 m/s, determine sua velocidade escalar, quando s = 12 m.



16 Um bloco de 1,0 kg de massa é posto a deslizar sobre uma mesa horizontal com uma energia cinética inicial de 2,0 joules. Devido ao atrito entre o bloco e a mesa, ele pára após percorrer a distância de 1,0 m. Pergunta-se:

a) Qual o trabalho efetuado pela força de atrito?

b) Qual o coeficiente de atrito, suposto constante, entre a mesa e o bloco? É dado g = 10 m/s².



Resolução:

a) As forças que agem sobre o bloco são: peso $\vec{P}$, força normal $\vec{N}$ e força de atrito $\vec{F}_{at}$. $\vec{N}$ e $\vec{P}$ se anulam e portanto a resultante é $\vec{F}_{at}$. Pelo Teorema da Energia Cinética, temos:

$\tau_{result} = E_{c_B} - E_{c_A}$

$\tau_{F_{at}} = 0 - 2{,}0$

$\tau_{F_{at}} = -2{,}0$ J

b) Da definição de trabalho, temos:

$\tau_{F_{at}} = F_{at} \cdot d \cdot \cos 180°$

Sendo $F_{at} = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g$, vem: $\tau_{F_{at}} = \mu \cdot m \cdot g \cdot d \cdot \cos 180°$

Sendo $\tau_{F_{at}} = -2{,}0$ J, $m = 1{,}0$ kg, $g = 10$ m/s^2, $d = 1{,}0$ m e $\cos 180° = -1$, vem:

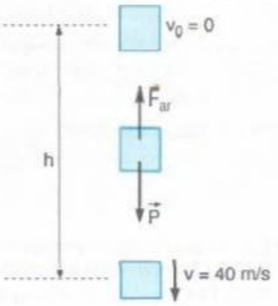
$-2{,}0 = \mu \cdot 1{,}0 \cdot 10 \cdot 1{,}0 \cdot (-1)$ $\boxed{\mu = 0{,}20}$

17. Um bloco de massa m = 2,0 kg desliza sobre uma superfície horizontal sem atrito, com velocidade $v_0 = 10$ m/s, penetrando assim numa região onde existe atrito de coeficiente $\mu = 0{,}50$ ($g = 10$ m/s^2). Pergunta-se:

a) Qual é o trabalho (τ) realizado pela força de atrito após ter o bloco percorrido 5,0 m com atrito?

b) Qual é a velocidade do bloco ao final desses 5,0 m?

18 Um corpo de 10 kg cai, a partir do repouso, de uma altura de 100 m e chega ao solo com uma velocidade de 40 m/s. São praticamente constantes a aceleração da gravidade $g = 10$ m/s^2 e a força de resistência que o ar exerce no corpo. Calcule o trabalho realizado pela força de resistência do ar.



Resolução:

As forças que agem sobre o corpo são: peso $\vec{P}$ e força de resistência do ar $\vec{F}_{ar}$. Pelo Teorema da Energia Cinética, temos:

$$\tau_{result} = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2}$$

Sendo $\tau_{result} = \tau_P + \tau_{F_{ar}}$ com $\tau_P = +mgh$, vem:

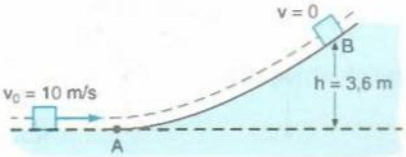
$$mgh + \tau_{F_{ar}} = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2}$$

Sendo $m = 10$ kg, $g = 10$ m/s^2, $h = 100$ m, $v = 40$ m/s e $v_0 = 0$, resulta:

$$10 \cdot 10 \cdot 100 + \tau_{F_{ar}} = \frac{10 \cdot 40^2}{2} - 0 \qquad \boxed{\tau_{F_{ar}} = -2{,}0 \cdot 10^3 \text{ J}}$$

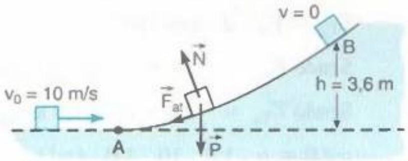
19. Um corpo de massa 20 kg é lançado verticalmente para cima com velocidade 20 m/s, atingindo altura máxima de 8,0 m. Sendo $g = 10$ m/s^2, calcule o trabalho realizado pela força de resistência do ar, durante a subida.

20 Um corpo de 0,50 kg se move horizontalmente com velocidade escalar constante de 10 m/s, num plano sem atrito. Encontra uma rampa e sobe até uma altura máxima de 3,6 m, onde pára, para retornar. Só houve atrito a partir do ponto *A*, no início da subida da rampa. Qual foi o trabalho realizado pela força de atrito na subida da rampa? É dado $g = 10$ m/s^2.



Resolução:

As forças que agem no corpo são: peso $\vec{P}$, força normal $\vec{N}$ e a força de atrito $\vec{F}_{at}$. Pelo Teorema da Energia Cinética, temos:



$$\tau_{result} = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2}$$

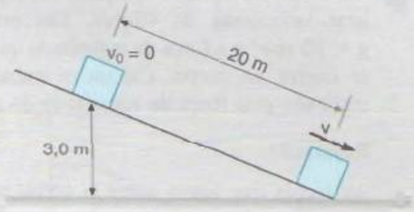
Sendo $\tau_{result} = \tau_P + \tau_N + \tau_{F_{at}}$, com $\tau_P = -mgh$ e $\tau_N = 0$, vem:

$$-mgh + \tau_{F_{at}} = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2}$$

Sendo $m = 0{,}50$ kg, $g = 10$ m/s², $h = 3{,}6$ m, $v = 0$ e $v_0 = 10$ m/s, vem:

$$-0{,}50 \cdot 10 \cdot 3{,}6 + \tau_{F_{at}} = 0 - \frac{0{,}50 \cdot 10^2}{2} \qquad \boxed{\tau_{F_{at}} = -7{,}0 \text{ J}}$$

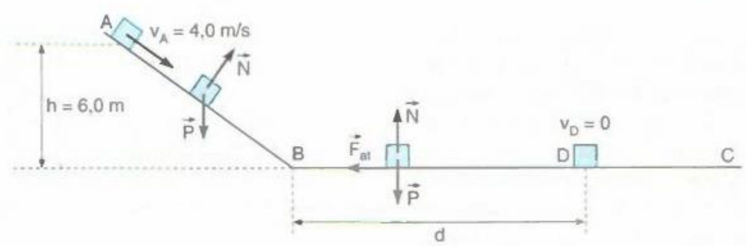
21. Um bloco de 4,0 kg é abandonado do alto de um plano inclinado, atingindo o plano horizontal com velocidade escalar de 6,0 m/s. Sendo $g = 10$ m/s², determine a intensidade da força de atrito, suposta constante, entre o bloco e o plano inclinado.



22. Um pequeno bloco possui velocidade escalar inicial em *A* de 4,0 m/s e percorre a trajetória ABC. O trecho $\overline{AB}$ é perfeitamente liso e a partir de *B* existe atrito de coeficiente igual a 0,20. Determine a distância horizontal que o bloco percorre até parar. É dado $g = 10$ m/s².

Resolução:

Seja *D* o ponto do plano horizontal, onde o bloco pára. Ao percorrer o plano inclinado, somente o peso $\vec{P}$ realiza trabalho. No plano horizontal é a força de atrito que realiza trabalho. Aplicando o Teorema da Energia Cinética entre os pontos *A* e *D*, temos:



$$\tau_{result} = \frac{m \cdot v_D^2}{2} - \frac{m \cdot v_A^2}{2}$$

$$\tau_P + \tau_{F_{at}} = \frac{m \cdot v_D^2}{2} - \frac{m \cdot v_A^2}{2}$$

Sendo $\tau_P = mgh$ e $\tau_{F_{at}} = F_{at} \cdot d \cdot \cos 180^o = \mu \cdot N \cdot d \cdot (-1) = -\mu mgd$, vem:

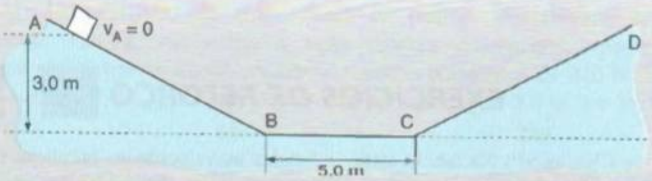
$$mgh - \mu mgd = \frac{m \cdot v_D^2}{2} - \frac{m \cdot v_A^2}{2}$$

$$gh - \mu gd = \frac{v_D^2}{2} - \frac{v_A^2}{2}$$

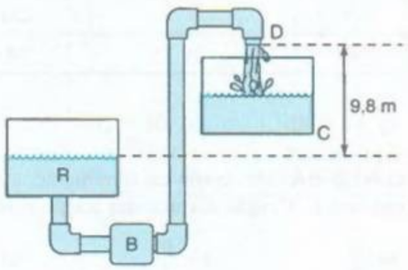
Sendo $g = 10\ m/s^2$, $h = 6{,}0\ m$, $\mu = 0{,}20$, $v_D = 0$ e $v_A = 4{,}0\ m/s$, resulta:

$$10 \cdot 6{,}0 - 0{,}20 \cdot 10 \cdot d = 0 - \frac{(4{,}0)^2}{2} \qquad \boxed{d = 34\ m}$$

23. Um bloco é abandonado em repouso num ponto *A* de um plano inclinado, conforme a figura. Os trechos inclinados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são perfeitamente lisos e o trecho horizontal $\overline{BC}$ apresenta atrito de coeficiente 0,40. Determine a altura máxima que o bloco atinge no trecho $\overline{CD}$.



24 Uma bomba *B* recalca água com uma vazão de $3{,}0 \cdot 10^{-2}\ m^3/s$, de um reservatório *R* para uma caixa *C*. A altura de recalque é de 9,8 m e a água é injetada na caixa com uma velocidade escalar de 2,0 m/s. Considere $g = 10\ m/s^2$ e a densidade da água $1{,}0 \cdot 10^3\ kg/m^3$. Desprezando as perdas de energia, determine a potência da bomba.



Resolução:

O Teorema da Energia Cinética aplicado a certa porção de água, de massa *m* e volume *V*, nos fornece:

$$\tau_{result} = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2}$$

Sendo $\vec{P}$ o peso da porção de água e $\vec{F}$ a força que a bomba exerce na porção de água, temos:

$$\tau_P + \tau_F = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2}$$

$$-mgh + \tau_F = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2}$$

Fazendo $m = d \cdot V$ e sendo $v_0 = 0$, vem:

$$-dVgh + \mathcal{T}_F = \frac{d \cdot V \cdot v^2}{2}$$

Dividindo ambos os membros por Δt e lembrando que $\frac{\mathcal{T}_F}{\Delta t}$ é a potência da bomba, temos:

$$-\frac{dVgh}{\Delta t} + P_B = \frac{dVv^2}{2\Delta t}$$

Sendo $d = 1{,}0 \cdot 10^3$ kg/m³, $\frac{V}{\Delta t} = 3{,}0 \cdot 10^{-2}$ m³/s, $g = 10$ m/s², $h = 9{,}8$ m e $v = 2{,}0$ m/s, vem:

$$-1{,}0 \cdot 10^3 \cdot 3{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot 10 \cdot 9{,}8 + P_B = \frac{1{,}0 \cdot 10^3 \cdot 3{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot (2{,}0)^2}{2}$$

$$\boxed{P_B = 3{,}0 \cdot 10^3 \text{ W}}$$

25. O motor de uma bomba hidráulica tem potência de $1{,}0 \cdot 10^3$ W. Em quanto tempo essa bomba enche uma caixa de $5{,}0 \cdot 10^2$ ℓ colocada a uma altura de 9,6 m? A água é injetada na caixa com velocidade escalar de 4,0 m/s. Despreze as perdas de energia, considere $g = 10$ m/s² e a densidade da água 1,0 kg/ℓ.

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

26. (Fund. Carlos Chagas-SP) Na tabela estão indicadas as velocidades escalares e as massas de dois corpos (*A* e *B*). Qual é a relação entre as energias cinéticas (Ea e Eb) dos dois corpos?

	Velocidade	Massa
A	v	2M
B	2v	M

a) Ea = Eb b) Ea = 2Eb c) $Ea = \frac{Eb}{2}$ d) Ea = 4Eb e) $Ea = \frac{Eb}{4}$

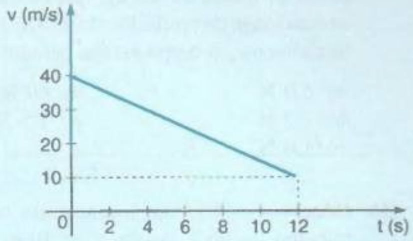
27. (UNEB-BA) Um corpo cai livremente, a partir do repouso, durante um tempo *t* e adquire energia cinética *E*. Caindo durante um tempo metade de *t*, deverá adquirir energia cinética:

a) $\frac{E}{8}$ b) $\frac{E}{4}$ c) $\frac{E}{2}$ d) 2E e) 4E

28. (UF-PE) O gráfico ao lado representa o movimento de um corpo de massa igual a 10 kg submetido à ação de uma força resultante constante. Determine o valor em joules da variação da energia cinética do corpo entre os instantes $t_1 = 20$ s e $t_2 = 30$ s.

29. (UnB-DF) O gráfico abaixo representa a variação da velocidade escalar causada em um corpo de massa 2,0 kg, por uma força $\vec{F}$, em função do tempo.
O valor do trabalho realizado pela força $\vec{F}$ sobre o corpo entre os instantes 0 e 12 segundos foi de:

a) $1{,}6 \cdot 10^3$ J
b) $-3{,}0 \cdot 10^3$ J
c) $-1{,}5 \cdot 10^3$ J
d) $2{,}0 \cdot 10^3$ J



30. (FEI-SP) Um corpo de massa m = 30 kg, inicialmente em repouso, é posto em movimento sob a ação de uma força constante e adquire, ao fim de dois minutos, uma velocidade de 72 km/h na direção da força aplicada. Determinar:

a) a intensidade da força aplicada ao corpo;
b) o trabalho realizado pela referida força ao longo da distância percorrida pelo corpo.

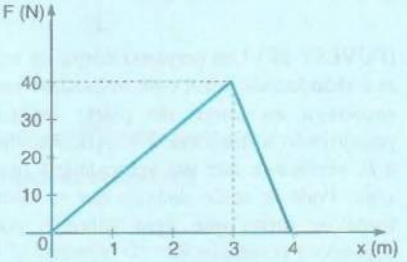
31. (ITA-SP) Uma partícula, sujeita a uma força constante de módulo 2,0 N, move-se sobre uma reta. A variação da energia cinética da partícula, entre dois pontos *A* e *B*, é igual a 3,0 J. Calcular a distância entre *A* e *B*.

a) x = 1,0 m
b) x = 1,5 m
c) x = 2,0 m
d) x = 2,5 m
e) x = 3,0 m

32. (UNAMA-AM) Um carrinho de mão, cheio de pedras, inicialmente em repouso, tem aproximadamente 120 kg. Ao sofrer a ação externa do operário, passa a se deslocar horizontalmente com força resultante constante, também horizontal, de 240 N. Desprezando-se o atrito, podemos afirmar que a sua energia cinética após percorrer 5,0 m, em joules, será:

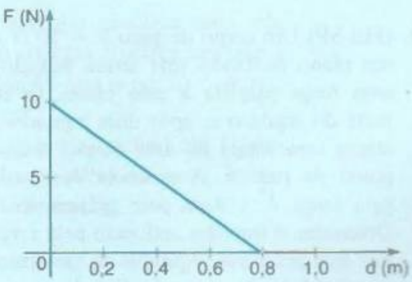
a) 2 000
b) 1 200
c) 800
d) 2 400
e) 240

33. (E. E. Mauá-SP) Uma partícula de massa m = = 2,0 kg está em movimento retilíneo, segundo a direção Ox de um referencial cartesiano. Quando ela passa pela origem do referencial, a sua velocidade $v_0 = 1{,}0$ m/s, no sentido dos *x* crescentes e, a partir desse ponto, fica submetida à ação da força $\vec{F}$, paralela ao eixo Ox, a qual varia, de acordo com a posição, na forma indicada no gráfico ao lado. Calcular o módulo da velocidade da partícula quando ela se encontra no ponto de abscissa x = 4,0 m.



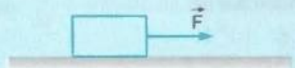
34. (FCMSC-SP) Uma esfera de metal, homogênea, de massa 0,10 kg, está em repouso num local onde a aceleração gravitacional é 10 m/s². A partir de um certo instante, uma força de intensidade *F*, variável com a distância (*d*), conforme o gráfico ao lado, passa a atuar na esfera na direção vertical e sentido para cima. Qual a energia cinética da esfera no instante em que *F* se anula? (Despreze todos os atritos.)

a) 0,80 joules
b) 3,2 joules
c) 4,0 joules
d) 7,2 joules
e) 8,0 joules



35. (FATEC-SP) A figura indica uma força horizontal, de intensidade 6,0 newtons, agindo sobre um corpo de massa de 4,0 kg, que se desloca numa superfície horizontal áspera (com atrito). A força atua ao longo de um deslocamento de 10 metros, ao final do qual a velocidade do corpo é de 5,0 m/s. Se, inicialmente, o corpo estava parado, a intensidade da força de atrito vale:

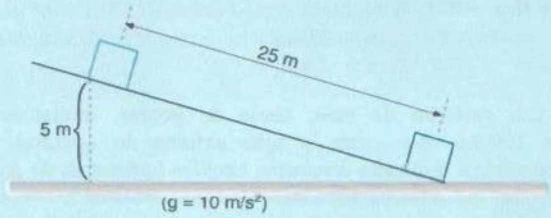
a) 6,0 N
b) 1,2 N
c) 1,0 N
d) 60 N
e) 1,5 N



36. (Mackenzie-SP) Para levantar um corpo de 4 kg a uma altura de 2 m, uma força realizou um trabalho de 96 J. Adote $g = 10\ m \cdot s^{-2}$. Se, inicialmente, o corpo estava em repouso, a sua velocidade ao atingir essa altura é de:

a) $12\ m \cdot s^{-1}$
b) $4 \cdot \sqrt{3}\ m \cdot s^{-1}$
c) $4 \cdot \sqrt{2}\ m \cdot s^{-1}$
d) $2 \cdot \sqrt{2}\ m \cdot s^{-1}$
e) $\sqrt{2}\ m \cdot s^{-1}$

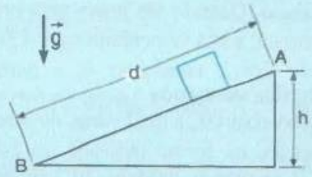
37. (FUVEST-SP) O bloco de 2 kg é solto do alto de um plano inclinado atingindo o plano horizontal com velocidade 5 m/s.



A força de atrito, suposta constante, entre o bloco e o plano inclinado vale:

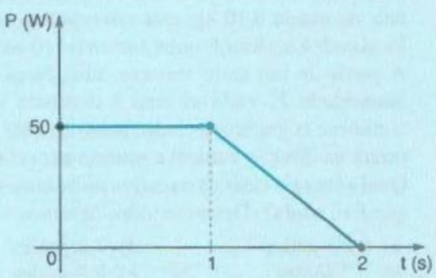
a) 1 N
b) 2 N
c) 3 N
d) 4 N
e) 5 N

38. (FUVEST-SP) Um pequeno corpo de massa m é abandonado em A com velocidade nula e escorrega ao longo do plano inclinado, percorrendo a distância $d = \overline{AB}$. Ao chegar a B, verifica-se que sua velocidade é igual a $\sqrt{gh}$. Pode-se então deduzir que o valor da força de atrito que agiu sobre o corpo, supondo-a constante, é:

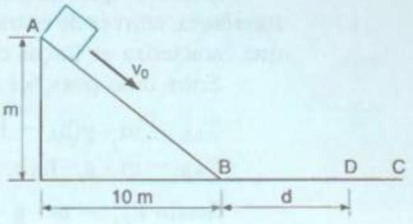


a) zero
b) mgh
c) mgh/2
d) mgh/2d
e) mgh/4d

39. (FEI-SP) Um corpo de peso P = 20 N sobe um plano inclinado sem atrito, puxado por uma força paralela a esse plano. O corpo parte do repouso e, após dois segundos, ele atinge uma altura de dois metros acima do ponto de partida. A potência desenvolvida pela força $\vec{F}$ é dada pelo gráfico ao lado. Determine o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ nos dois primeiros segundos do movimento e a velocidade do corpo no fim desse tempo. Adote para os cálculos o valor: $g = 10\ m/s^2$.

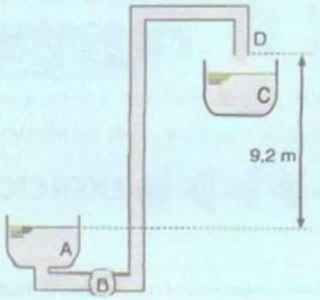


40. (UF-AM) Um corpo de massa m possui velocidade inicial em A de 2 m/s e percorre a trajetória ABC, como mostra a figura. O trecho em rampa é perfeitamente liso e a partir do ponto B existe atrito de coeficiente igual a 0,10. A distância horizontal d que o corpo percorre até parar é: (adote $g = 10\ m/s^2$)



a) 60 m
b) 81 m
c) 72 m
d) 90 m

41. (Mackenzie-SP) Uma bomba (B) recalca água à taxa de 0,02 m³ por segundo, de um depósito (A) para uma caixa (C) no topo de uma casa. A altura de recalque é 9,2 m e a velocidade da água na extremidade do tubo de descarga (D) é $4\ m \cdot s^{-1}$. Considerar $g = 10\ m \cdot s^{-2}$ e massa específica da água $= 1\ 000\ kg \cdot m^{-3}$. Desprezar as dissipações de energia. A potência da bomba é:



a) 2 500 W
b) 2 000 W
c) 1 500 W
d) 1 000 W
e) 500 W

2. ENERGIA POTENCIAL GRAVITACIONAL

Considere um ponto material de massa m abandonado em repouso ($v_0 = 0$) em um ponto O, situado a uma altura h de um plano horizontal de referência (Fig. 2). Vamos admitir que a única força que atua no ponto material é seu peso $\vec{P}$.

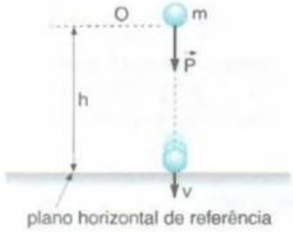


Fig. 2

Tendo o ponto material partido do repouso, isto é, com energia cinética inicial nula, no deslocamento da posição O até o plano horizontal de referência, o peso $\vec{P}$ realiza um trabalho que é igual à energia cinética que o ponto material adquire ao passar pelo plano horizontal de referência.

Na posição O, embora o ponto material tivesse energia cinética nula, ele possuía outra forma de energia, que foi transformada em energia cinética durante a sua queda. Essa outra forma de energia, associada à posição que o ponto material ocupa, é denominada *energia potencial gravitacional.*

A energia potencial gravitacional E_p que o ponto material possui em O, em relação ao plano horizontal de referência, é medida pelo trabalho do peso $\vec{P}$, no deslocamento da posição O, até o plano horizontal de referência:

$$\mathcal{T} = m \cdot g \cdot h$$

Portanto: $\boxed{E_p = m \cdot g \cdot h}$

Observe que mesmo deslocando o ponto material, de *O* ao plano de referência, através de outra trajetória, o trabalho do peso é o mesmo. Esse fato é o que caracteriza as forças conservativas.

Entre duas posições *A* e *B* (Fig. 3) o trabalho do peso será:

$\mathcal{T}_{AB} = m \cdot g(h_A - h_B)$

$\mathcal{T}_{AB} = m \cdot g \cdot h_A - m \cdot g \cdot h_B$

Sendo $E_{p_A} = m \cdot g \cdot h_A$ e $E_{p_B} = m \cdot g \cdot h_B$ as energias potenciais gravitacionais inicial e final, vem:

$$\boxed{\mathcal{T}_{AB} = E_{p_A} - E_{p_B}}$$

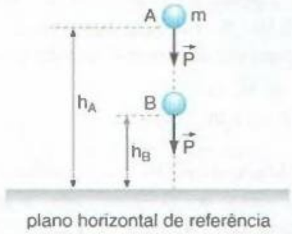
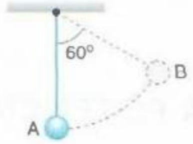


Fig. 3

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

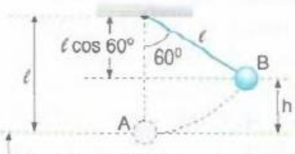
42. Uma pequena esfera de massa igual a 10 kg, suspensa na extremidade de um fio de peso desprezível, é deslocada da posição de equilíbrio *A* até uma nova posição *B* que forma com a vertical um ângulo de 60°. O comprimento do fio é de 1,0 m, g = 10 m/s² e cos 60° = 0,50. Determine a energia potencial gravitacional da pequena esfera nas posições *A* e *B*, em relação a um plano horizontal de referência que passa por *A*.



Resolução:

Na posição *A*, a energia potencial gravitacional da esfera é nula, pois esta encontra-se no plano horizontal de referência:

$h = 0 \rightarrow \boxed{E_{p_A} = 0}$



Para o cálculo da energia potencial gravitacional da esfera na posição *B* (E_{p_B}), devemos determinar a altura *h* indicada na figura:

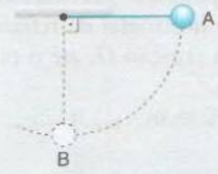
$h = \ell - \ell \cdot \cos 60°$

$h = 1,0 - 1,0 \cdot 0,50 \qquad \boxed{h = 0,50 \text{ m}}$

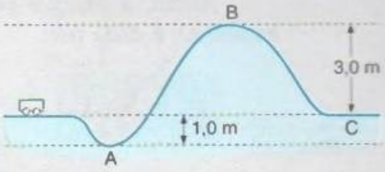
$E_{p_B} = m \cdot g \cdot h$

$E_{p_B} = 10 \cdot 10 \cdot 0,50 \qquad \boxed{E_{p_B} = 50 \text{ J}}$

43. Uma pequena esfera de massa igual a 5,0 kg, suspensa por um fio de peso desprezível, é abandonada da posição *A*. O comprimento do fio é de 0,80 m e g = 10 m/s². Determine a energia potencial gravitacional da pequena esfera nas posições *A* e *B*, em relação a um plano horizontal de referência que passa por *B*.



44. Um carrinho, de massa igual a 2,0 kg, move-se ao longo de um trilho, cujo perfil está representado ao lado. Sendo $g = 10\ m/s^2$, determine a energia potencial gravitacional do carrinho nas posições *A*, *B* e *C*, em relação a um plano horizontal de referência que passa por *A*.



EXERCÍCIOS DE REFORÇO

45. (UC-BA) Uma pessoa ergue uma pedra do chão e coloca-a sobre a superfície de uma mesa. Para se calcular a energia potencial gravitacional da pedra em relação ao chão, deve-se conhecer, além da altura da mesa, somente:

a) a massa da pedra.
b) o peso da pedra.
c) o valor da aceleração da gravidade no local.
d) o tempo transcorrido para erguer a pedra.
e) a velocidade média com que a pedra foi erguida.

46. Em qual dos casos abaixo a energia potencial gravitacional não varia?

a) Um carro sobe uma ladeira.
b) Um carro desce uma ladeira.
c) Uma pessoa desce pela escada de um prédio.
d) Uma pessoa sobe pela escada de um prédio.
e) Um veículo acelera numa pista horizontal.

47. Qual é a ordem de grandeza da variação da energia potencial gravitacional do corpo de um homem que desce 10 m de uma escada que se encontra na posição vertical?

a) 10^0 J b) 10^1 J c) 10^2 J d) 10^3 J e) 10^4 J

3. ENERGIA POTENCIAL ELÁSTICA

Considere um sistema elástico constituído de uma mola de constante elástica *k* e de um bloco. Na posição *P* o sistema está deformado de *x* em relação à posição natural *O* (Fig. 4).

No deslocamento de *P* a *O* a força elástica $\vec{F}_{el}$ realiza o trabalho $\mathcal{T} = \frac{kx^2}{2}$, que mede a energia que o sistema elástico possui quando deformado. Essa energia é denominada *energia potencial elástica* E_p.

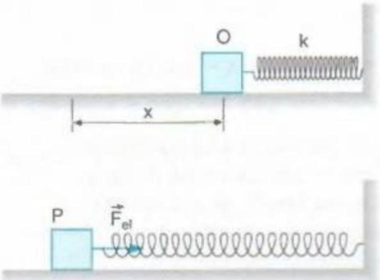


Fig. 4

Assim, a *energia potencial elástica* na posição *P*, em relação à posição natural *O*, é dada por:

$$\boxed{E_p = \frac{k \cdot x^2}{2}}$$

Analogamente ao peso, o trabalho da força elástica entre duas posições *A* e *B* (Fig. 5) é dado por:

$$\tau_{AB} = \frac{k \cdot x_A^2}{2} - \frac{k \cdot x_B^2}{2} \quad \text{ou}$$

$$\boxed{\tau_{AB} = E_{p_A} - E_{p_B}}$$

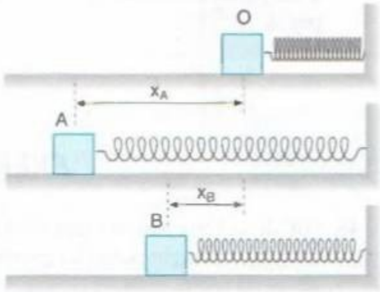


Fig. 5

Além do peso e da força elástica, também a força de interação entre cargas elétricas é conservativa. A essas forças associa-se o conceito de energia potencial.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

48. Quando deformada de 0,30 m, a mola helicoidal da figura exerce no bloco uma força elástica de intensidade 30 N. Determine:

a) a constante elástica da mola;
b) a energia potencial elástica armazenada pelo sistema, quando a mola estiver deformada de 0,60 m.

Resolução:

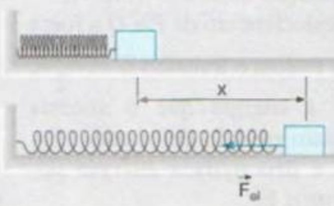
a) A intensidade da força elástica é dada por: $F_{el} = k \cdot x$, onde *k* é a constante elástica da mola.
Sendo $F_{el} = 30$ N e $x = 0,30$ m, vem: $30 = k \cdot 0,30$ $\boxed{k = 100 \text{ N/m}}$

b) A energia potencial elástica armazenada pelo sistema, em relação à posição natural, é dada por:

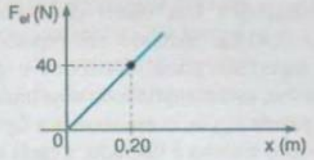
$$E_p = \frac{kx^2}{2}$$

Para $k = 100$ N/m e $x = 0,60$ m, resulta: $E_p = \frac{100 \cdot (0,60)^2}{2}$ $\boxed{E_p = 18 \text{ J}}$

49. O gráfico ao lado representa a intensidade da força elástica que a mola helicoidal da figura exerce no bloco, em função de sua deformação. Determine:

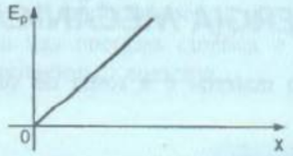


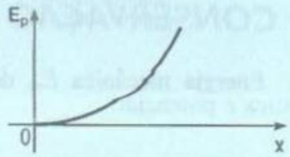
a) a constante elástica da mola;
b) a energia potencial elástica quando deformada de 0,50 m.

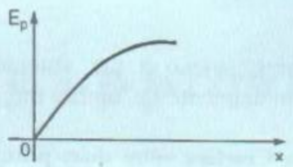


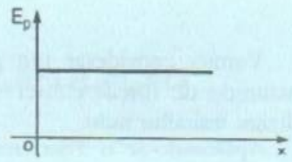
EXERCÍCIOS DE REFORÇO

50. (UnB-DF) A dependência da energia potencial elástica E_p de uma mola, com a sua compressão x, é mais bem representada pelo gráfico:

a)


c)


b)


d)


51. Tracionada por uma força de intensidade 500 N, certa mola helicoidal sofre uma deformação elástica de 0,50 m. A energia potencial elástica armazenada na mola, quando deformada de 0,20 m, é igual a:

a) 10^3 J b) 500 J c) 100 J d) 50 J e) 20 J

52. (FUVEST-SP) Um corpo está preso nas extremidades de duas molas idênticas, não deformadas, de constante elástica 100 N/m, conforme ilustra a figura.

Quando o corpo é afastado de 1,0 cm do ponto central:

a) Qual a intensidade da resultante das forças que as molas exercem sobre ele?
b) Qual a energia armazenada nas molas?

53. (ITA-SP) A variação da energia cinética de uma partícula em movimento, num dado referencial inercial, entre dois pontos distintos P e Q, é sempre igual:

I – à variação da energia potencial entre esses dois pontos.
II – ao trabalho da resultante das forças aplicadas à partícula para deslocá-la entre esses dois pontos.
III – à variação da energia potencial entre esses dois pontos, a menos de sinal, quando a força resultante aplicada à partícula for conservativa.

a) somente I é correta.
b) I e II são corretas.
c) somente III é correta.
d) II e III são corretas.
e) somente II é correta.

54. (VUNESP-SP) Um bloco de madeira, de massa 0,40 kg, mantido em repouso sobre uma superfície plana, horizontal e perfeitamente lisa, está comprimindo uma mola contra uma parede rígida, como mostra a figura.

Quando o sistema é liberado, a mola se distende, impulsiona o bloco e este adquire, ao abandoná-la, uma velocidade final de 2,0 m/s. Determine o trabalho da força exercida pela mola, ao se distender completamente:

a) sobre o bloco;
b) sobre a parede.

7

4. ENERGIA MECÂNICA. TEOREMA DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA

Energia mecânica E_m de um ponto material é a soma de suas energias cinética e potencial:

$$\boxed{E_m = E_c + E_p}$$

Vamos considerar um ponto material, sujeito a um sistema de forças constituído de forças conservativas e eventualmente de outras forças mas que realizam trabalho nulo.

Aplicando-se o Teorema da Energia Cinética entre duas posições A e B, vem:

$$\mathcal{T}_{AB} = E_{c_B} - E_{c_A}$$

Como as forças que realizam trabalho são conservativas (peso, força elástica, etc.), o trabalho entre as posições A e B é também dado por:

$$\mathcal{T}_{AB} = E_{p_A} - E_{p_B}$$

Comparando-se os dois resultados anteriores, vem:

$$E_{c_B} - E_{c_A} = E_{p_A} - E_{p_B}$$

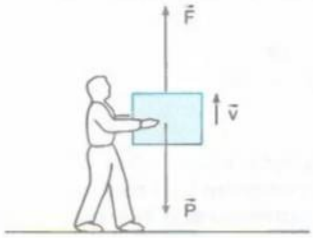
$$\boxed{\underbrace{E_{c_A} + E_{p_A}}_{\substack{E_{m_A} \\ \text{energia} \\ \text{mecância em } A}} = \underbrace{E_{c_B} + E_{p_B}}_{\substack{E_{m_B} \\ \text{energia} \\ \text{mecânica em } B}}}$$

Esse resultado constitui o *teorema da conservação da energia mecânica*. Portanto:

> quando um ponto material se movimenta sob a ação de forças conservativas e eventualmente de outras forças que realizam trabalho nulo, a energia mecânica se conserva.

Se forças não-conservativas realizarem trabalho, a energia mecânica não se conservará. Nesse caso, a energia mecânica pode diminuir ou aumentar. As forças não-conservativas que diminuem a energia mecânica são denominadas *forças dissipativas*. É o caso da força de atrito de escorregamento, da força de resistência do ar, etc. Nessa situação, há conversão de energia mecânica em *energia térmica*.

Considere, agora, um operador erguendo um corpo, com velocidade escalar constante (Fig. 6). À medida que o corpo vai subindo, sua energia potencial gravitacional vai aumentando. Sendo a velocidade escalar constante, sua energia cinética permanece constante. Desse modo, a energia mecânica (soma das energias cinética e potencial gravitacional) aumenta.



$\vec{F}$: força aplicada pelo operador

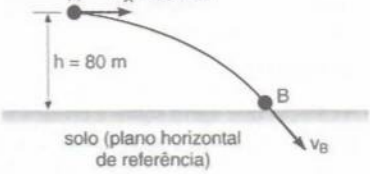
Fig. 6

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

55 Uma bola é lançada, horizontalmente, com velocidade escalar de 30 m/s de um ponto situado a 80 m acima do solo, suposto horizontal. Adote aceleração da gravidade 10 m/s² e despreze a resistência do ar. Determine a velocidade da bola ao atingir o solo.

Resolução:

Sendo o peso a única força que age na bola e sendo uma força conservativa, podemos aplicar entre as posições *A* (inicial) e *B* (final) a conservação da energia mecânica:



$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$

Adotando-se o solo como plano horizontal de referência, para medida de energia potencial, vem:

$$\frac{m \cdot v_A^2}{2} + m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot v_B^2}{2} + 0 \qquad \frac{v_A^2}{2} + g \cdot h = \frac{v_B^2}{2} \qquad v_B^2 = v_A^2 + 2gh$$

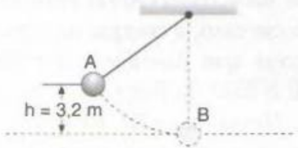
Sendo $v_A = 30$ m/s, $g = 10$ m/s² e $h = 80$ m, vem:

$v_B^2 = 30^2 + 2 \cdot 10 \cdot 80$

$\boxed{v_B = 50 \text{ m/s}}$

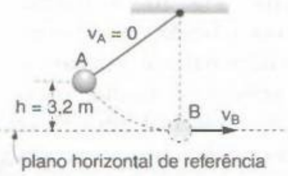
56 Um pêndulo simples, cuja esfera pendular tem massa de 1,0 kg, é abandonado em repouso na posição A, indicada na figura. No local, a aceleração da gravidade é $g = 10\ m/s^2$ e a resistência do ar é nula. Determine, quando a esfera passa pela posição B:

a) sua energia cinética;
b) sua velocidade escalar.



Resolução:

a) As forças que agem sobre a esfera são: o peso, que é conservativa, e a tração do fio, que realiza trabalho nulo. Podemos, então, aplicar a conservação da energia mecânica. Adotamos o plano horizontal de referência passando por B.



$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$$

$$0 + m \cdot g \cdot h = E_{c_B} + 0$$

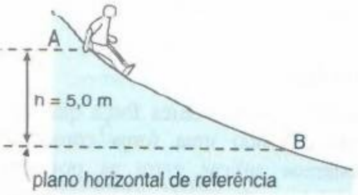
Sendo $m = 1,0$ kg, $g = 10\ m/s^2$ e $h = 3,2$ m, resulta:

$$1,0 \cdot 10 \cdot 3,2 = E_{c_B} \qquad \boxed{E_{c_B} = 32\ J}$$

b) De $E_{c_B} = \dfrac{m \cdot v_B^2}{2}$, vem:

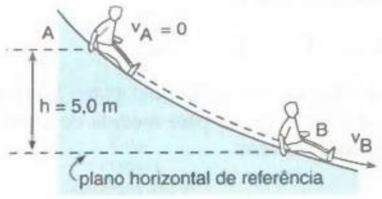
$$32 = \frac{1,0 \cdot v_B^2}{2} \qquad \boxed{v_B = 8,0\ m/s}$$

57 No escorregador mostrado na figura, uma criança com 25 kg de massa, partindo do repouso em A, desliza até B. Adotando-se $g = 10\ m/s^2$ e desprezando-se os atritos, determine o módulo da velocidade da criança ao chegar a B.



Resolução:

As forças que agem sobre a criança são: o peso, que é força conservativa, e a força normal, que realiza trabalho nulo. Podemos, então, aplicar a conservação da energia mecânica. Adotamos o plano horizontal de referência passando por B.



$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$$

$$0 + m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot v_B^2}{2} + 0 \qquad v_B = \sqrt{2gh}$$

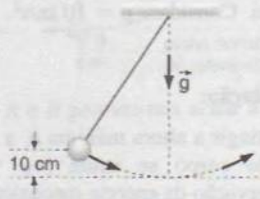
Sendo $g = 10\ m/s^2$ e $h = 5,0$ m, vem:

$$v_B = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 5,0} \qquad \boxed{v_B = 10\ m/s}$$

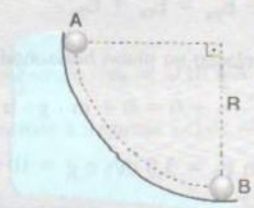
58. Um corpo de massa 20 kg é abandonado de uma altura 20 m em relação ao solo. A única força que age sobre o corpo durante a queda é o seu peso. Adote $g = 10\ m/s^2$ e considere o solo como referencial para medida de energia potencial. Determine:

a) a energia potencial do corpo no instante em que é abandonado;
b) a energia cinética do corpo ao atingir o solo;
c) a velocidade do corpo ao atingir o solo.

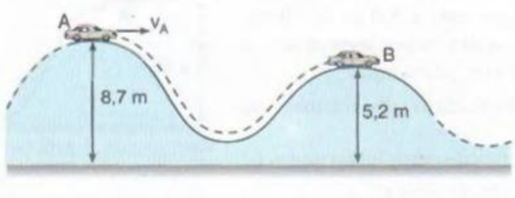
59. Um pêndulo simples, cuja massa pendular é uma pequena esfera de 2,0 kg, é abandonado do repouso na posição indicada na figura. No local, a aceleração da gravidade é $g = 10\ m/s^2$ e a resistência do ar é nula. No instante em que a esfera intercepta a vertical do lugar, qual é a sua energia cinética?



60. Um corpo de massa $m = 2,0$ kg, abandonado sem velocidade inicial no ponto *A*, desce, sem atrito, ao longo do arco de circunferência vertical de raio $R = 45$ cm, como mostra a figura. Determine a velocidade do corpo ao atingir o ponto *B*. Adote $g = 10\ m/s^2$.



61 Num trecho de uma montanha-russa, um carrinho de 100 kg passa pelo ponto *A*, que está a 8,7 m de altura, com velocidade escalar de 10 m/s. Supondo que o atrito seja desprezível e adotando-se $g = 10\ m/s^2$, determine a energia cinética do carrinho no ponto *B*, que está a 5,2 m de altura.

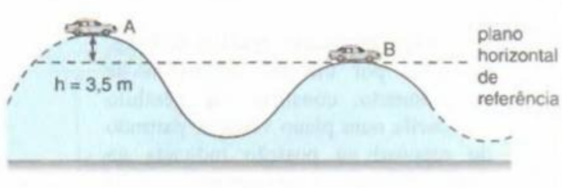


Resolução:

As forças que agem sobre o carrinho são: o peso, que é força conservativa, e a força normal, que realiza trabalho nulo. Podemos, então, aplicar a conservação da energia mecânica. Vamos adotar como referencial o plano horizontal que passa por *B*. A altura do ponto *A* em relação a esse plano é $h = 8,7\ m - 5,2\ m = 3,5\ m$.

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$$

$$\frac{m \cdot v_A^2}{2} + mgh = E_{c_B} + 0$$

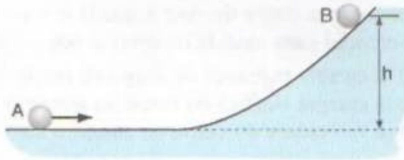


Sendo $m = 100$ kg, $v_A = 10$ m/s, $g = 10\ m/s^2$ e $h = 3,5$ m, vem:

$$\frac{100 \cdot 10^2}{2} + 100 \cdot 10 \cdot 3,5 = E_{c_B}$$

$$\boxed{E_{c_B} = 8,5 \cdot 10^3\ J}$$

62. Um corpo desloca-se sobre um plano horizontal sem atrito com velocidade de módulo 3,0 m/s e em seguida sobe uma rampa, também sem atrito. Sabendo que a massa do corpo é de 2,0 kg, determine a altura máxima que o corpo atinge na rampa. Considere $g = 10\ m/s^2$.



Resolução:

Ao atingir a altura máxima *h*, a velocidade do corpo se anula ($v_B = 0$). A conservação da energia mecânica fornece:

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$$

Em relação ao plano horizontal adotado na figura, temos:

$$\frac{m \cdot v_A^2}{2} + 0 = 0 + m \cdot g \cdot h \qquad \frac{v_A^2}{2} = g \cdot h$$

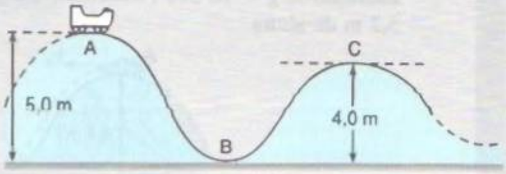
Sendo $v_A = 3,0\ m/s$ e $g = 10\ m/s^2$, vem:

$$\frac{(3,0)^2}{2} = 10 \cdot h \qquad \boxed{h = 0,45\ m}$$

63. Numa montanha-russa, um carrinho com 300 kg de massa é abandonado do repouso de um ponto *A* que está a 5,0 m de altura. Supondo que o atrito seja desprezível, e adotando-se $g = 10\ m/s^2$, determine:

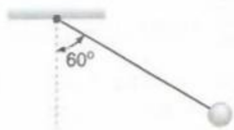
a) o valor da velocidade do carrinho no ponto *B*;

b) a energia cinética do carrinho no ponto *C*, que está a 4,0 m de altura.



64. Um projétil é lançado verticalmente para cima, com velocidade inicial v_0. Desprezando-se a resistência do ar e sendo *g* a aceleração local da gravidade, determine a altura máxima que o projétil atinge, em relação ao ponto de lançamento.

65. Um corpo de massa igual a 0,10 kg, suspenso por um fio de 1,0 m de comprimento, constitui um pêndulo que oscila num plano vertical, partindo do repouso na posição indicada na figura. Sabendo-se que cos 60° = 0,50 e $g = 10\ m/s^2$, determine a intensidade da força de tração no fio, quando o corpo passa pela posição mais baixa. Despreze a resistência do ar.



Resolução:

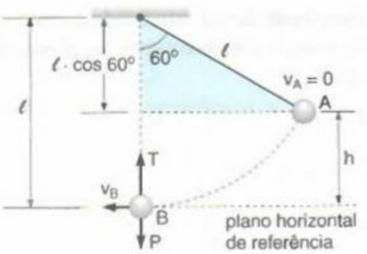
Vamos, inicialmente, calcular a altura h do ponto A, em relação ao plano horizontal de referência:

$h = \ell - \ell \cdot \cos 60°$

$h = \ell - \ell \cdot 0{,}50$

$h = 1{,}0 - 1{,}0 \cdot 0{,}50$

$h = 0{,}50$ m



A conservação da energia mecânica entre as posições A e B permite-nos achar a velocidade v_B:

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$$

$$0 + mgh = \frac{m \cdot v_B^2}{2} + 0 \qquad gh = \frac{v_B^2}{2}$$

Sendo $g = 10\ m/s^2$ e $h = 0{,}50$, vem: $\quad 10 \cdot 0{,}50 = \frac{v_B^2}{2} \qquad v_B = \sqrt{10}\ m/s$

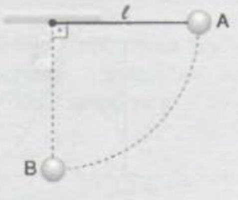
Para o cálculo da intensidade T da força de tração, aplicamos a Segunda Lei de Newton na posição B:

$$T - P = m \cdot \frac{v_B^2}{R} \qquad T - m \cdot g = m \cdot \frac{v_B^2}{R}$$

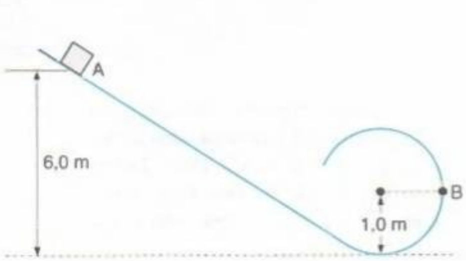
Sendo $m = 0{,}10$ kg, $g = 10\ m/s^2$, $v_B = \sqrt{10}\ m/s$ e $R = \ell = 1{,}0$ m, resulta:

$$T - 0{,}10 \cdot 10 = 0{,}10 \cdot \frac{(\sqrt{10})^2}{1{,}0} \qquad \boxed{T = 2{,}0\ N}$$

66. O fio ideal da figura tem comprimento ℓ e a esfera tem massa m. A esfera é abandonada na posição A. Sendo g a aceleração da gravidade e desprezando-se a resistência do ar, determine a intensidade da força de tração no fio, em função de m e g, quando a esfera passa pela posição B.



67 O bloco da figura, de massa 5,0 kg, é abandonado no ponto A. Considere a inexistência de atrito. Determine a intensidade da força normal que o trilho de apoio exerce sobre o bloco, quando este passa pelo ponto B. Adote $g = 10\ m/s^2$.



7

7

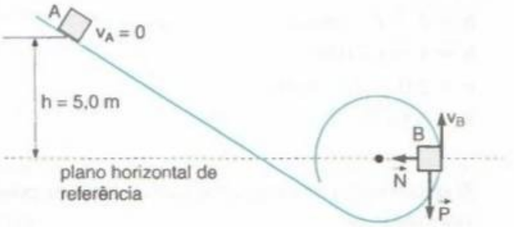
Resolução:

Para o cálculo da velocidade do bloco ao passar pelo ponto *B*, vamos aplicar a conservação da energia mecânica entre os pontos *A* e *B*. Vamos adotar o plano horizontal por *B* como referencial.

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$$

$$0 + mgh = \frac{m \cdot v_B^2}{2} + 0$$

$$gh = \frac{v_B^2}{2}$$



Sendo g = 10 m/s² e h = 5,0 m, vem: $10 \cdot 5{,}0 = \frac{v_B^2}{2}$ $\quad v_B = 10$ m/s

As forças que agem sobre o bloco são: o peso e a força normal. Esta é a resultante centrípeta, quando o bloco passa por *B*:

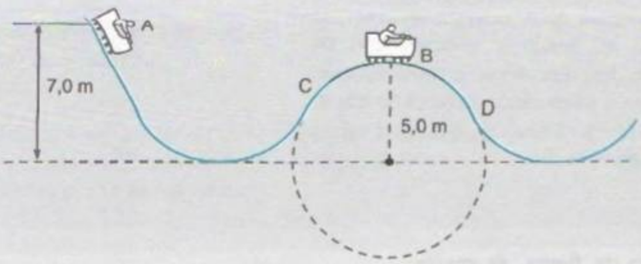
$$N = m \cdot \frac{v_B^2}{R}$$

Sendo m = 5,0 kg, R = 1,0 m e v_B = 10 m/s, resulta:

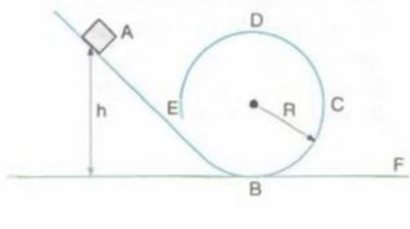
$$N = 5{,}0 \cdot \frac{(10)^2}{1{,}0}$$

$$N = 5{,}0 \cdot 10^2 \text{ newtons}$$

68. A figura representa um trecho de montanha-russa. Na posição *A*, o carrinho de massa 50 kg possui velocidade escalar 3,0 m/s. Determine a intensidade da força normal que age sobre o carrinho, no ponto *D*, sabendo-se que o trecho CBD é um arco de circunferência de raio 5,0 m. Adote g = 10 m/s² e despreze os atritos.



69 Um pequeno corpo de massa *m* parte do repouso em *A* e desliza, sem atrito, ao longo do trilho ABCDEF. Determine, em função do raio *R*, a menor altura *h* para que o corpo não perca contato com o trilho.

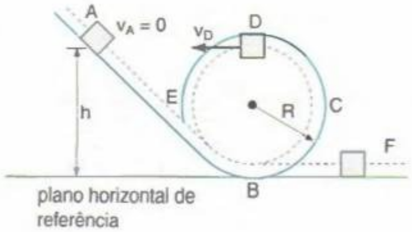


Resolução:

O ponto crítico da trajetória é o ponto *D*. O menor valor de *h* corresponde ao menor valor da velocidade no ponto *D*. A velocidade mínima que o corpo deve ter ao passar pelo ponto *D* é $v_{D_{min}} = \sqrt{R \cdot g}$, conforme vimos no exercício 37 do capítulo 5.

Aplicando-se a conservação da energia mecânica entre as posições *A* e *D* e para o referencial indicado na figura, vem:

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_D} + E_{p_D}$$



$$0 + mgh = \frac{m \cdot v_D^2}{2} + m \cdot g \cdot 2R$$

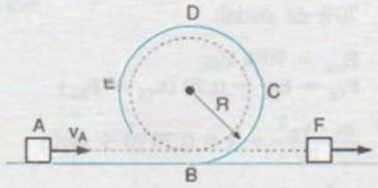
$$gh = \frac{v_D^2}{2} + g \cdot 2R$$

$$h = \frac{v_D^2}{2g} + 2R$$

Para *h* mínimo, devemos ter v_D mínimo:

$$h_{min} = \frac{v_{D_{min}}^2}{2g} + 2R \qquad h_{min} = \frac{(\sqrt{Rg})^2}{2g} + 2R \qquad \boxed{h_{min} = 2,5\ R}$$

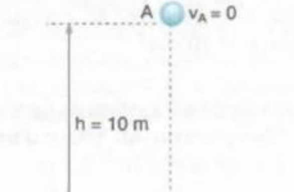
70. Um pequeno objeto é lançado horizontalmente do ponto *A* e deseja-se que ele percorra a trajetória ABCDEF. A aceleração da gravidade tem módulo *g* e o raio da circunferência indicada é *R*. Desprezando-se os atritos, prove que a mínima velocidade v_A, com que o objeto deve ser lançado para percorrer a trajetória indicada, é $v_A = \sqrt{5Rg}$.



71 Uma pedra de massa igual a 0,40 kg é abandonada a partir do repouso de uma altura de 10 m e atinge o solo com velocidade de 8,0 m/s. Determine a quantidade de energia mecânica transformada em energia térmica durante a descida. Considere $g = 10\ m/s^2$.

Resolução:

A energia mecânica transformada em térmica é dada pela diferença entre a energia mecânica inicial (em *A*) e a energia mecânica final (em *B*). Adotando o solo como referencial para medida de energia potencial, temos:



$E_{m_A} = E_{c_A} + E_{p_A}$

$E_{m_A} = 0 + m \cdot g \cdot h$

$E_{m_A} = 0,40 \cdot 10 \cdot 10$

$\boxed{E_{m_A} = 40\ J}$

$$E_{m_B} = E_{c_B} + E_{p_B} \qquad E_{m_B} = \frac{m \cdot v_B^2}{2} + 0 \qquad E_{m_B} = \frac{0,40 \cdot (8,0)^2}{2} \qquad \boxed{E_{m_B} = 12,8\ J}$$

Portanto, a energia mecânica transformada em térmica é igual a:

$E_{térm} = E_{m_A} - E_{m_B}$ $\qquad E_{térm} = 40 - 12{,}8$ $\qquad \boxed{E_{térm} = 27{,}2\ J}$

A transformação de energia mecânica em térmica é devida à resistência do ar. O mesmo resultado pode ser obtido pela aplicação do Teorema da Energia Cinética. A energia térmica é igual ao módulo do trabalho realizado pela força de resistência do ar:

$$\tau_{result} = \frac{m \cdot v_B^2}{2} - \frac{m \cdot v_A^2}{2} \qquad \tau_P + \tau_{F_{ar}} = \frac{m \cdot v_B^2}{2} - \frac{m \cdot v_A^2}{2}$$

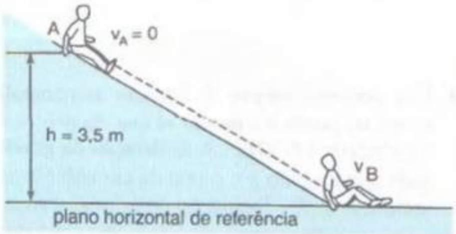
$$m \cdot g \cdot h + \tau_{F_{ar}} = \frac{m \cdot v_B^2}{2} - \frac{m \cdot v_A^2}{2} \qquad 0{,}40 \cdot 10 \cdot 10 + \tau_{F_{ar}} = \frac{0{,}40 \cdot (8{,}0)^2}{2} - 0$$

$$\tau_{F_{ar}} = -27{,}2\ J \qquad E_{térm} = |\tau_{F_{ar}}| \qquad \boxed{E_{térm} = 27{,}2\ J}$$

72. Uma criança se encontra a 3,5 m do solo, em repouso, num escorregador. Começa a escorregar e durante a queda há uma perda de 30% da energia mecânica inicial. Calcule a velocidade da criança ao chegar ao solo. É dado $g = 10\ m/s^2$.

Resolução:

Se, durante a queda, há uma perda de 30% da energia mecânica inicial (E_{m_A}), significa que a energia mecânica final (E_{m_B}) é 70% da inicial:



$E_{m_B} = 70\%\ E_{m_A}$

$E_{c_B} + E_{p_B} = 0{,}70\ (E_{c_A} + E_{p_A})$

$$\frac{m \cdot v_B^2}{2} + 0 = 0{,}70\ (0 + mgh)$$

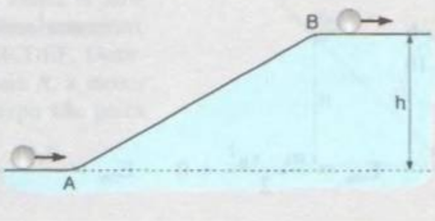
$v_B^2 = 2 \cdot 0{,}70 \cdot g \cdot h$

Sendo $g = 10\ m/s^2$ e $h = 3{,}5$ m, vem: $v_B^2 = 2 \cdot 0{,}70 \cdot 10 \cdot 3{,}5$

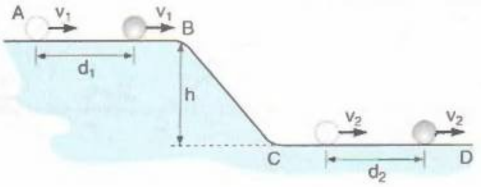
$\boxed{v_B = 7{,}0\ m/s}$

73. Uma pedra de massa igual a 0,60 kg é lançada verticalmente para baixo com velocidade de 10 m/s, de uma altura de 20 m do solo. Sabendo-se que a pedra atinge o solo com velocidade de 20 m/s, determine a quantidade de energia mecânica transformada em térmica, durante a descida. Considere $g = 10\ m/s^2$.

74. Com que velocidade a esfera da figura deve passar pelo ponto *A* para chegar a *B* com velocidade de 5,0 m/s? No percurso $\overline{AB}$ houve uma perda de 25% de energia mecânica.
Dados: $g = 10\ m/s^2$ e $h = 2{,}5$ m.



75 Na figura, os planos horizontais AB e CD e o plano inclinado BC são perfeitamente lisos. Duas pequenas esferas, dotadas de velocidades iguais $v_1 = 4{,}0$ m/s, deslocam-se sobre o plano AB separadas por uma distância $d_1 = 2{,}0$ m. Após descerem o plano inclinado BC, as esferas passam a se deslocar no plano CD com velocidade v_2 e separadas de uma distância d_2. Calcule v_2 e d_2. Dados: $g = 10$ m/s² e $h = 1{,}0$ m.



Resolução:

Para o cálculo de v_2, aplicamos a conservação da energia mecânica, para uma das esferas, adotando o plano CD como plano de referência:

$$\frac{m \cdot v_1^2}{2} + mgh = \frac{m \cdot v_2^2}{2}$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2\,gh$$

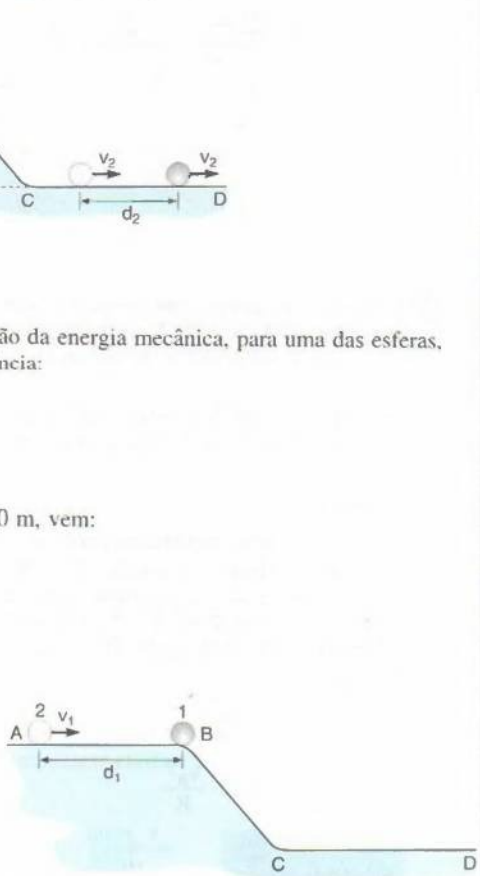
Sendo $v_1 = 4{,}0$ m/s, $g = 10$ m/s² e $h = 1{,}0$ m, vem:

$$v_2^2 = (4{,}0)^2 + 2 \cdot 10 \cdot 1{,}0$$

$\boxed{v_2 = 6{,}0 \text{ m/s}}$

Cálculo de d_2

Considere a situação da figura ao lado. À medida que a esfera 1 desce o plano inclinado, sua velocidade vai aumentando. A velocidade da esfera 2 permanece constante, e igual a v_1, durante o intervalo de tempo $\Delta t = \frac{d_1}{v_1} = \frac{2{,}0 \text{ m}}{4{,}0 \text{ m/s}} = 0{,}50$ s.

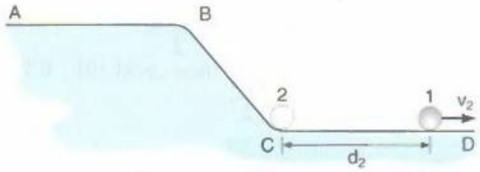


A partir daí, a esfera 2 atinge o ponto *B* e sua velocidade começa a aumentar. Quando a esfera 1 atinge o plano CD, sua velocidade passa a ser constante e igual a v_2. Como os intervalos de tempo de queda das esferas ao longo do plano inclinado são iguais, concluímos que, quando a esfera 2 atinge o plano CD, a esfera 1 já se deslocou uma distância d_2, durante o intervalo de tempo $\Delta t = 0{,}50$ s, anteriormente calculado. Assim:

$d_2 = v_2 \cdot \Delta t$

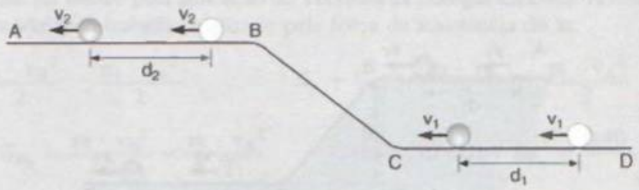
$d_2 = 6{,}0 \cdot 0{,}50$

$\boxed{d_2 = 3{,}0 \text{ m}}$



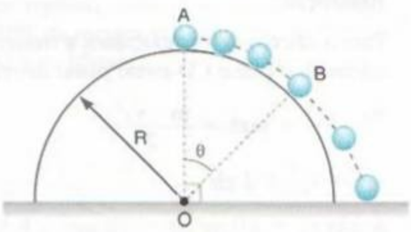
7

76. Os planos horizontais AB e CD e o plano inclinado BC são perfeitamente lisos. Duas esferas, dotadas de velocidades iguais v_1 caminham sobre o plano CD separadas por uma distância d_1. A velocidade v_1 é suficiente para fazê-las subir o plano inclinado e continuar em movimento no plano AB. Nesse plano as esferas se deslocam separadas por uma distância d_2. Responda: d_2 é maior, menor ou igual a d_1? Justifique.



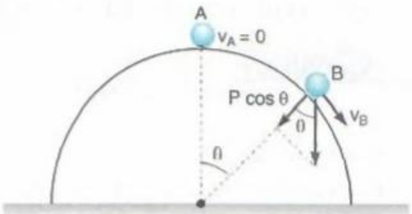
7

77 Considere a secção transversal de um semicilindro de raio R. Uma partícula é abandonada no ponto A e, ao atingir o ponto B, perde contato com o cilindro. Determine o valor do ângulo θ que define a posição do ponto B. Despreze os atritos.



Resolução:

No ponto B, onde a partícula perde contato com o cilindro, a normal se anula. Assim, nesse ponto a resultante sobre a partícula é o seu peso $\vec{P}$. A resultante centrípeta tem intensidade $P \cdot \cos\theta$. Portanto:



$$P \cdot \cos\theta = m \cdot \frac{v_B^2}{R}$$

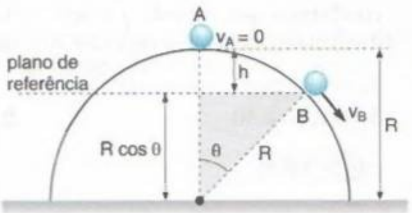
$$m \cdot g \cdot \cos\theta = m \cdot \frac{v_B^2}{R}$$

$$\boxed{g \cdot \cos\theta = \frac{v_B^2}{R}} \quad \text{(I)}$$

Por outro lado, a conservação da energia mecânica entre os pontos A e B, com plano horizontal de referência passando por B, fornece:

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$$

$$0 + mgh = \frac{m \cdot v_B^2}{2} + 0$$



$$m \cdot g\,(R - R \cdot \cos\theta) = \frac{m \cdot v_B^2}{2}$$

$$g \cdot R\,(1 - \cos\theta) = \frac{v_B^2}{2}$$

$$\boxed{2g\,(1 - \cos\theta) = \frac{v_B^2}{R}} \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), vem:

$g \cdot \cos\theta = 2g\,(1 - \cos\theta)$

$\cos\theta = 2 - 2\cos\theta$

$\cos\theta = \dfrac{2}{3}$

$\boxed{\theta = \text{arc cos}\,\dfrac{2}{3}}$

Consultando a tabela, no final do livro, tiramos:

$\boxed{\theta = 48^\circ}$

78. Um pequeno bloco é abandonado do repouso do ponto *A* de uma pista contida num plano vertical, com o formato mostrado na figura. Desprezam-se os atritos. O trecho circular tem raio *R*. Determine, em função de *R*, a altura *h* que define a posição do ponto *B*, onde o bloco perde contato com a pista.

79. Um bloco de massa 5,0 kg desloca-se, sem atrito, sobre uma superfície horizontal, com velocidade de 10 m/s, atingindo uma mola de constante elástica $2{,}0 \cdot 10^3$ N/m, conforme a figura. Determine a contração da mola, no instante em que a velocidade do bloco se anula.

Resolução:

Como não há atrito, a energia cinética do bloco transforma-se em energia potencial elástica da mola:

$E_c = E_p$

$\dfrac{m \cdot v^2}{2} = \dfrac{kx^2}{2}$

$x^2 = \dfrac{m \cdot v^2}{k}$

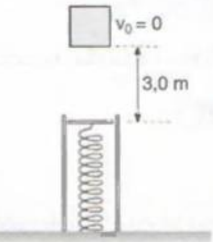
Sendo m = 5,0 kg, v = 10 m/s e k = $2{,}0 \cdot 10^3$ N/m, vem:

$x^2 = \dfrac{5{,}0 \cdot 10^2}{2{,}0 \cdot 10^3}$

$\boxed{x = 5{,}0 \cdot 10^{-1}\text{ m}}$

80. Um corpo de massa 2,0 kg está em repouso, encostado em uma mola que está comprimida de 0,40 m. A constante elástica da mola é $2{,}0 \cdot 10^2$ N/m. Destrava-se a mola e o corpo é lançado. Determine a velocidade que o corpo adquire. Despreze os atritos.

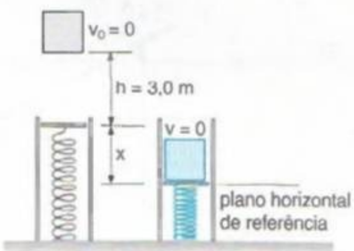
81. Um pequeno bloco de massa m = 2,5 kg é abandonado em repouso a 3,0 m acima de uma mola de constante elástica k = $= 2{,}0 \cdot 10^2$ N/m, conforme mostra a figura. Sabendo-se que $g = 10$ m/s^2, determine a compressão máxima da mola. Despreze as perdas de energia mecânica.



Resolução:

Vamos adotar como plano de referência, para medida da energia potencial gravitacional, o plano horizontal que passa pelo ponto em que a velocidade do bloco se anula. Nesse ponto, a mola está em sua compressão máxima.

Nessas condições, a energia potencial gravitacional inicial do bloco, $mg(h + x)$, transforma-se em potencial elástica da mola, $\frac{kx^2}{2}$.



$$mg(h + x) = \frac{kx^2}{2}$$

Sendo m = 2,5 kg, g = 10 m/s^2, h = 3,0 m e k = $2{,}0 \cdot 10^2$ N/m, resulta:

$$2{,}5 \cdot 10 \cdot (3{,}0 + x) = \frac{2{,}0 \cdot 10^2 \cdot x^2}{2}$$

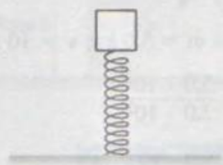
$$25 \cdot (3{,}0 + x) = 10^2 \cdot x^2$$

$$4{,}0\, x^2 - x - 3{,}0 = 0$$

$$x = \frac{1{,}0 \pm 7{,}0}{8{,}0}$$

Sendo $x > 0$, vem: $\boxed{x = 1{,}0 \text{ m}}$

82. Um corpo de massa 1,0 kg está sobre uma mola comprimida de 0,50 m. Determine a máxima altura, em relação à posição inicial, que o corpo atinge quando a mola é destravada. A constante elástica da mola é igual a $2{,}0 \cdot 10^2$ N/m. Adote $g = 10$ m/s^2 e despreze a resistência do ar.

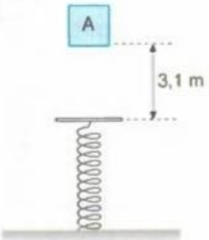


83 O bloco *A*, de massa m = 10 kg, é abandonado em repouso da posição indicada na figura. Sendo a constante elástica da mola $k = 5{,}0 \cdot 10^2$ N/m e $g = 10$ m/s², determine:

a) a deformação que a mola sofre, quando o bloco *A* atinge sua máxima velocidade;

b) a máxima velocidade do bloco *A*.

Despreze as perdas de energia mecânica.



7

Resolução:

a) Abandonando-se o bloco, ele ficará sob ação de seu peso $\vec{P}$, somente até encontrar a mola (Fig. a). A partir desse instante, além de $\vec{P}$, passa a agir no bloco a força elástica $\vec{F}_{el}$, cuja intensidade aumenta com a deformação da mola (Fig. b). Enquanto $P > F_{el}$ o movimento do bloco é *acelerado*, atingindo a *velocidade máxima* quando $F_{el} = P$ (Fig. c). A partir desse instante, $P < F_{el}$ e o movimento do bloco passa a ser retardado (Fig. d), até que sua velocidade se anule.

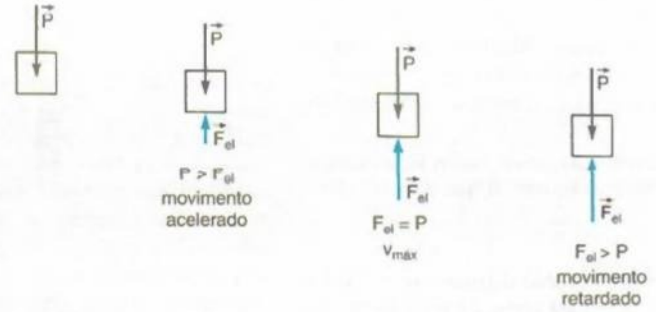


Fig. a *Fig. b* *Fig. c* *Fig. d*

Portanto: $v_{máx} \rightarrow F_{el} = P$

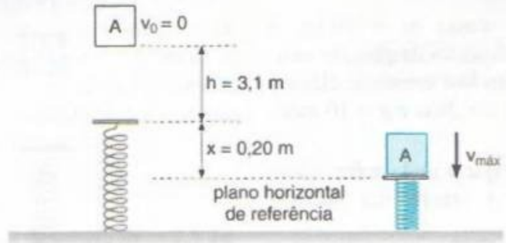
$k \cdot x = m \cdot g$

Sendo $k = 5{,}0 \cdot 10^2$ N/m, m = 10 kg e g = 10 m/s², vem:

$5{,}0 \cdot 10^2 \cdot x = 10 \cdot 10$

$\boxed{x = 0{,}20 \text{ m}}$

b) Vamos adotar como plano de referência, para medida da energia potencial gravitacional, o plano horizontal que passa pelo ponto em que a velocidade do bloco é máxima. Nessas condições, a energia potencial gravitacional inicial do bloco, $mg(h + x)$, transforma-se em energia potencial elástica da mola, $\frac{kx^2}{2}$, e em energia cinética do bloco, $\frac{m \cdot v_{máx}^2}{2}$:



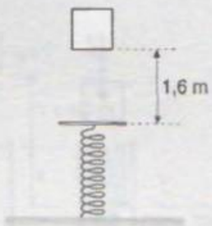
$$mg(h + x) = \frac{kx^2}{2} + \frac{m \cdot v_{máx}^2}{2}$$

Sendo m = 10 kg, g = 10 m/s², h = 3,1 m, x = 0,20 m e k = $5{,}0 \cdot 10^2$ N/m, vem:

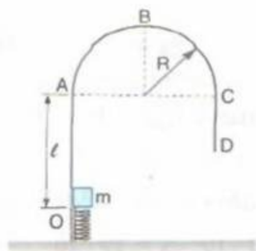
$$10 \cdot 10 \cdot (3{,}1 + 0{,}20) = \frac{5{,}0 \cdot 10^2 \cdot (0{,}20)^2}{2} + \frac{10 \cdot v_{máx}^2}{2} \qquad \boxed{v_{máx} = 8{,}0 \text{ m/s}}$$

84. O bloco de massa m = 8,0 kg é abandonado em repouso da posição indicada na figura. A constante elástica da mola é $k = 2{,}0 \cdot 10^2$ N/m. Adote g = 10 m/s² e despreze as perdas de energia mecânica. Determine:

a) a máxima velocidade que o bloco atinge;
b) a máxima deformação que a mola sofre.

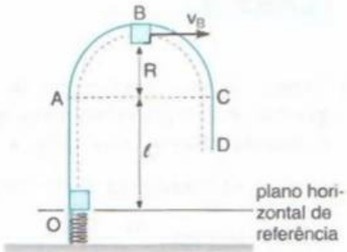


85 Um pequeno bloco de massa m = 5,0 kg é projetado para cima, da posição *O*, por uma mola comprimida de x = 0,50 m. Determine o mínimo valor da constante elástica *k* da mola, que permitirá ao bloco um contato permanente com a guia OABCD, ao longo da qual desliza sem atrito. Considere g = 10 m/s², ℓ = 3,0 m e R = 1,0 m.



Resolução:

O ponto crítico da trajetória é o ponto *B*. Adotando-se o plano horizontal de referência passando por *O*, concluímos que a energia potencial elástica da mola em *O*, $\frac{kx^2}{2}$, é transformada em energia potencial gravitacional e energia cinética do bloco, em *B*, respectivamente: $mg(\ell + R)$ e $\frac{m \cdot v_B^2}{2}$. Assim, temos:



$$\frac{kx^2}{2} = mg(\ell + R) + \frac{m \cdot v_B^2}{2}$$

Observe que o mínimo valor de k corresponde a v_B mínimo. Sabemos que o mínimo valor da velocidade v_B, para que o bloco consiga efetuar a curva, é igual a $\sqrt{Rg}$. Portanto:

$$\frac{k_{mín} \cdot x^2}{2} = mg(\ell + R) + \frac{m \cdot v_{B_{mín}}^2}{2}$$

$$\frac{k_{mín} \cdot x^2}{2} = mg(\ell + R) + \frac{m \cdot (\sqrt{Rg})^2}{2}$$

$$\frac{k_{mín} \cdot x^2}{2} = mg(\ell + R) + \frac{m \cdot g \cdot R}{2}$$

$$\frac{k_{mín} \cdot x^2}{2} = mg\left(\ell + \frac{3R}{2}\right)$$

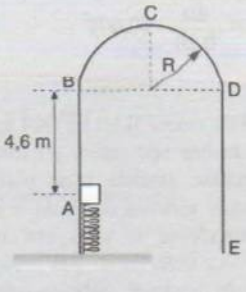
$$k_{mín} = \frac{mg(2\ell + 3R)}{x^2}$$

Sendo $m = 5{,}0$ kg, $g = 10$ m/s^2, $\ell = 3{,}0$ m, $R = 1{,}0$ m e $x = 0{,}50$ m, vem:

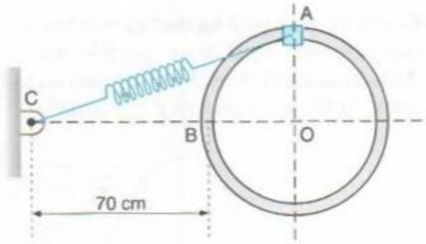
$$k_{mín} = \frac{5{,}0 \cdot 10(2 \cdot 3{,}0 + 3 \cdot 1{,}0)}{(0{,}50)^2}$$

$$\boxed{k_{mín} = 1{,}8 \cdot 10^3 \text{ N/m}}$$

86. No esquema ao lado, ABCDE é um trilho liso cujo trecho BCD tem a forma de uma semicircunferência de raio $R = 3{,}6$ m. Uma partícula de massa $m = 4{,}0$ kg é colocada sobre uma mola, de constante elástica $k = 2{,}0 \cdot 10^4$ N/m, comprimida na posição A. Soltando-se o sistema, a partícula é empurrada pela mola e começa a subir. Sabendo que $g = 10$ m/s^2, calcule a mínima compressão que a mola deve ter, na posição A, de modo que a partícula deslize por todo o trecho ABCDE sem perder contato com o trilho.



87 Um anel de massa 0,20 kg, ligado a uma mola de constante elástica 80 N/m, desliza sem atrito ao longo de uma guia circular de raio 50 cm. O sistema está localizado num plano horizontal. Abandonando-se o anel em repouso na posição A, determine sua velocidade ao passar pela posição B. Sabe-se que em B a mola não está deformada.



Resolução:

Na posição A, o sistema possui apenas energia potencial elástica $E_{p_A} = \frac{k \cdot x_A^2}{2}$. Em B, a mola não está deformada e portanto o sistema possui apenas energia cinética

$E_{c_B} = \frac{m \cdot v_B^2}{2}$. Aplicando-se a conservação da energia mecânica entre as posições *A* e *B*, resulta:

$E_{p_A} = E_{c_B}$

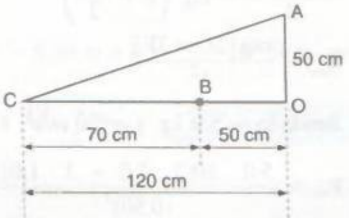
$$\frac{kx_A^2}{2} = \frac{m \cdot v_B^2}{2}$$

$$v_B^2 = \frac{k}{m} \cdot x_A^2$$

Para o cálculo de x_A, devemos determinar o comprimento da mola CA, através do triângulo COA:

$\overline{CA}^2 = 50^2 + 120^2$

$\overline{CA} = 130$ cm



Sendo 70 cm o comprimento da mola não deformada, vem:

$x_A = 130$ cm $- 70$ cm

$x_A = 60$ cm $= 0,60$ m

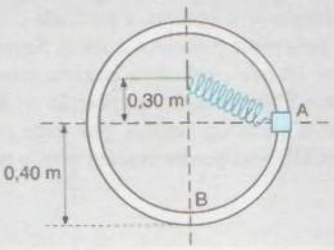
Sendo k = 80 N/m, m = 0,20 kg e $x_A = 0,60$ m, vem:

$$v_B^2 = \frac{k}{m} \cdot x_A^2$$

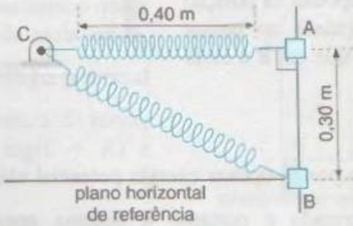
$$v_B^2 = \frac{80}{0,20} \cdot (0,60)^2$$

$v_B = 12$ m/s

88. Um anel de massa 0,80 kg está ligado a uma mola e desliza sem atrito ao longo de uma guia circular, situada num plano vertical. A constante elástica da mola é de 40 N/m. Abandonando-se o anel em repouso na posição *A*, determine sua velocidade ao passar pelo ponto *B*. Sabe-se que o comprimento da mola, quando não deformada, é de 0,40 m. Considere g = 10 m/s².

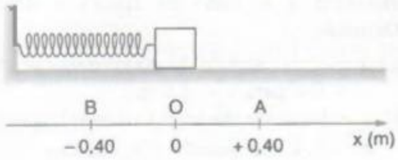


89. O anel de massa 1,2 kg desliza sem atrito ao longo da guia vertical. A mola ligada ao anel tem um comprimento de 0,20 m, quando não deformada, e sua constante elástica é de 48 N/m. Abandonando-se o anel em repouso na posição *A*, determine sua velocidade na posição *B*, após descer 0,30 m. Considere g = 10 m/s².



90 Um bloco de massa *m*, ligado a uma mola presa a uma parede, oscila em torno de *O*, entre as posições *A* e *B*, sobre uma superfície sem atrito, como mostra a figura.
Sendo $k = 2,0 \cdot 10^2$ N/m a constante elástica da mola, construa os gráficos:

a) da energia potencial elástica E_p em função da deformação *x*;
b) da energia mecânica E_m em função de *x*;
c) da energia cinética E_c em função de *x*.



Resolução:

a) A energia potencial elástica é dada por $E_p = \frac{kx^2}{2}$. Nessas condições, o gráfico de E_p em função de *x* é um arco de parábola, com a concavidade voltada para cima e passando pela origem:

ponto 0:

$x = 0 \rightarrow E_{p_0} = 0$

ponto A:

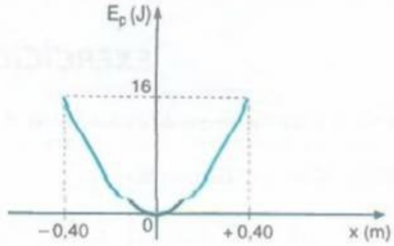
$x = +0,40$ m

$E_{p_A} = \frac{kx^2}{2} = \frac{2,0 \cdot 10^2 \cdot (0,40)^2}{2}$

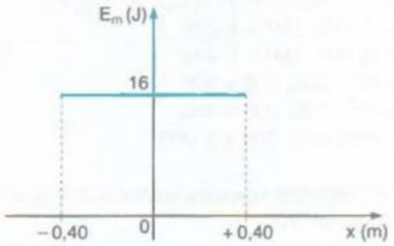
$E_{p_A} = 16$ J

ponto B:

$x = -0,40$ m $\rightarrow E_{p_B} = 16$ J



b) A energia mecânica permanece constante. Nos pontos *A* e *B*, a energia potencial é igual a 16 J e, nesses pontos, como a velocidade do bloco é nula, a energia cinética é nula. Assim, a energia mecânica é constante e igual a 16 J. Temos, então, o gráfico ao lado.



c) Sendo $E_m = E_c + E_p$, vem: $E_c = E_m - E_p$ e $E_c = 16 - \frac{kx^2}{2}$. Nessas condições, o gráfico de E_c em função de *x* é, também, um arco de parábola, mas com concavidade voltada para baixo:

ponto 0:

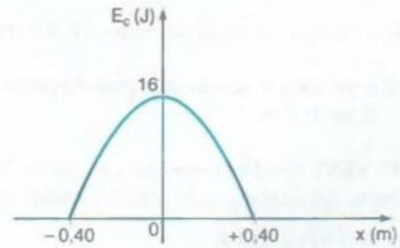
$E_{p_0} = 0$; $E_{c_0} = 16$ J

ponto A:

$E_{p_A} = 16$ J; $E_{c_A} = 0$

ponto B:

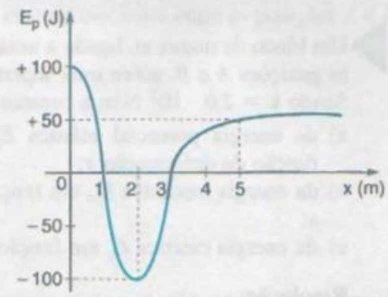
$E_{p_B} = 16$ J; $E_{c_B} = 0$



91. Um ponto material de massa m = 4,0 kg se movimenta num campo de forças conservativo. Sua energia mecânica é igual a 100 J e o gráfico de sua energia potencial em função da distância x é dado na figura à direita. Determine:

a) a energia cinética do ponto material, para x = 0 e para x = 1,0 m;

b) a velocidade do ponto material, quando x = 2,0 m e quando x = 5,0 m.



7

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

92. (UNEB-BA) Um corpo de massa 4,0 kg é solto de uma altura de 20 m. Em três posições, A, B e C, deseja-se relacionar as energias cinética, potencial com nível zero no solo e mecânica do corpo, desprezando a resistência do ar.

	E_c (J)	E_p (J)	E_m (J)
A	0	X	800
B	Y	500	800
C	600	Z	W

Os valores de X, Y, Z e W são, respectivamente,

a) 0, 500, 600 e 1 200

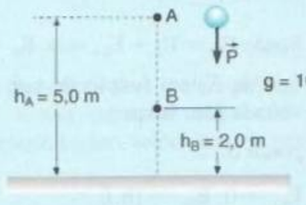
b) 0, [illegible], [illegible] e 1 400

c) 800, 200, 300 e 900

d) 800, 300, 200 e 800

e) 800, 400, 200 e 1 000

93. (UC-MG) Um corpo de massa m = 3,0 kg é abandonado de um ponto A, situado a 5,0 m de altura. Afirma-se que:



a) a energia cinética do corpo em A é 150 J.

b) a energia mecânica do corpo no ponto A é 90 J.

c) a energia mecânica do corpo no ponto B é 60 J.

d) a energia potencial do corpo em B é igual a 150 J.

e) o trabalho realizado pelo peso do corpo de A até B é 90 J.

94. (FUVEST-SP) Um corpo com massa de 20 kg é abandonado do topo de um edifício de 45 m de altura. Ao atingir o solo, sua velocidade e sua energia cinética são, aproximadamente:

a) 900 m/s e 450 J

b) 45 m/s e 900 J

c) 30 m/s e 9 000 J

d) 30 m/s e 600 J

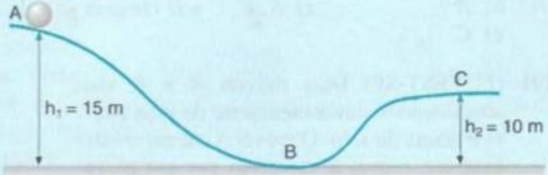
e) 450 m/s e 9 000 J

95. (FUVEST-SP) Uma bola de 0,2 kg é chutada para o ar. Sua energia mecânica, em relação ao solo, vale 50 J. Quando está a 5 m do solo, o valor de sua velocidade é: ($g = 10\ m/s^2$)

a) 5 m/s
b) 10 m/s
c) $\sqrt{50}$ m/s
d) 20 m/s
e) 100 m/s

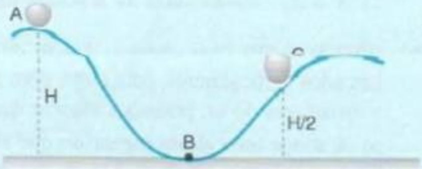
96. (FEI-SP) A figura representa uma pista perfeitamente lisa, onde deve-se mover uma bola de massa 2,0 kg. A bola é abandonada do repouso, em *A*. Adote $g = 10\ m/s^2$. Analisando este movimento podemos afirmar que:

a) a bola não consegue atingir o ponto *C*.
b) a energia cinética da bola em *C* é de 300 J.
c) a energia potencial da bola em *C* é de 300 J.
d) a energia cinética da bola em *B* é 300 J.



97. (UNIP-SP) Uma partícula desce o trilho, sem atrito, como indicado na figura. No ponto *A* a partícula possui velocidade. A energia potencial é nula no ponto *B*. A energia potencial no ponto *A* é *E* e a energia cinética no ponto *B* é *2E*. Quando a partícula passa pelo ponto *C* a energia cinética e a potencial serão, respectivamente:

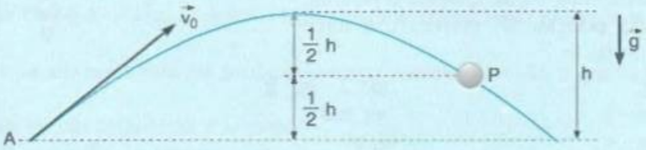
a) $\frac{3E}{2}$ e $\frac{E}{2}$
b) E e E
c) $\frac{3E}{2}$ e $\frac{3E}{2}$
d) $\frac{E}{2}$ e $\frac{E}{2}$
e) $\frac{E}{2}$ e $\frac{3E}{2}$



98. (FUVEST-SP) Uma bola move-se livremente, com velocidade de módulo *v*, sobre uma mesa de altura *h*, e cai no solo. O módulo da velocidade quando ela atinge o solo é:

a) v
b) $v + \sqrt{2gh}$
c) $\sqrt{2gh}$
d) $\sqrt{v^2 + 2gh}$
e) $v^2 + (2gh)^2$

99. (FUVEST-SP) Um projétil de massa *m* é lançado em *A* com velocidade $\vec{v_0}$ e descreve a trajetória indicada na figura.

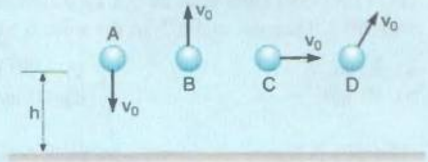


Desprezando-se a resistência do ar, a energia cinética do projétil, no ponto *P*, será:

a) $\frac{1}{2}\ mgh$
b) $\frac{1}{4}\ m \cdot v_0^2$
c) $\frac{1}{2}\ m \cdot v_0^2 - mgh$
d) $\frac{1}{2}\ m \cdot v_0^2 + \frac{1}{2}\ mgh$
e) $\frac{1}{2}\ m \cdot v_0^2 - \frac{1}{2}\ mgh$

7

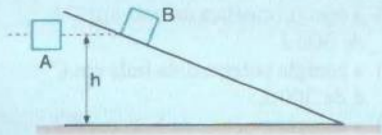
100. Quatro projéteis são lançados de uma mesma altura, com velocidades de mesmo módulo v_0: *A* é lançado verticalmente para baixo, *B* é lançado verticalmente para cima, *C* é lançado horizontalmente e *D* é lançado obliquamente. Qual deles chega ao solo com maior velocidade?



a) *A*
b) *B*
c) *C*
d) *D*
e) *A*, *B*, *C* e *D* chegam ao solo com mesma velocidade, em módulo.

7

101. (FUVEST-SP) Dois móveis *A* e *B* são abandonados simultaneamente de uma altura *h* acima do solo. O móvel *A* cai em queda livre e o móvel *B* escorrega por um plano inclinado sem atrito. Podemos afirmar que:

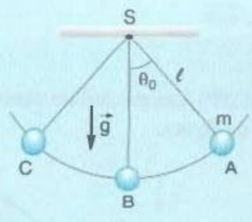


a) *A* atinge o solo ao mesmo tempo que *B* e com velocidade maior do que *B*.
b) *A* atinge o solo ao mesmo tempo que *B* e com velocidade menor do que *B*.
c) *A* atinge o solo ao mesmo tempo que *B* e com velocidade igual à de *B*.
d) *A* atinge o solo antes de *B* e com velocidade igual à de *B*.
e) *A* atinge o solo antes de *B* e com velocidade maior que a de *B*.

102. (FUVEST-SP) Dois objetos, *A* e *B*, de massas $m_A = 1$ kg e $m_B = 2$ kg são simultaneamente lançados verticalmente, para cima, com a mesma velocidade inicial, a partir do solo. Desprezando a resistência do ar, podemos afirmar que:

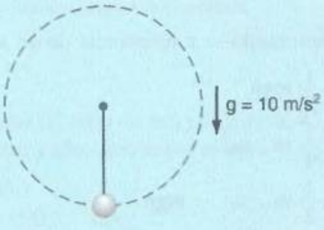
a) *A* atinge uma altura menor do que *B* e volta ao solo ao mesmo tempo que *B*.
b) *A* atinge uma altura menor do que *B* e volta ao solo antes de *B*.
c) *A* atinge uma altura igual à de *B* e volta ao solo antes de *B*.
d) *A* atinge uma altura igual à de *B* e volta ao solo ao mesmo tempo que *B*.
e) *A* atinge uma altura maior do que *B* e volta ao solo depois de *B*.

103. (FATEC-SP) Um pêndulo é constituído por uma partícula de massa *m* suspensa a um fio leve, flexível e inextensível, de comprimento ℓ. A gravidade local é *g*. O pêndulo é abandonado em repouso na posição SA, formando com a vertical ângulo $\theta_0 = 60°$. Desprezar efeitos do ar. Quando o pêndulo passa pela posição SB (vertical), a força tensora no fio é:



a) $m \cdot g$
b) $4 \cdot m \cdot g$
c) $3 \cdot m \cdot g$
d) $2 \cdot m \cdot g$
e) n.d.a.

104. (UNISA-SP) Uma esfera de massa 0,2 kg presa a um fio ideal de comprimento 0,4 m descreve uma circunferência vertical. No ponto mais baixo da trajetória, a velocidade da esfera é 6 m/s. A força que traciona o fio no ponto mais alto da trajetória é:

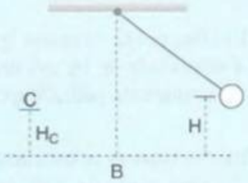


a) 0 N
b) 8 N
c) 10 N
d) 16 N
e) 2 N

105. (UNAMA-AM) Uma pequena esfera que pesa 100 N está suspensa por uma corda cujo comprimento é de 6 m. A esfera é deslocada lateralmente, distando horizontalmente de $3\sqrt{3}$ m em relação à vertical, e em seguida é solta a partir do repouso. Desprezando-se os atritos podemos afirmar que a velocidade máxima atingida pela esfera, em m/s, é de (considere $g = 10$ m/s²):

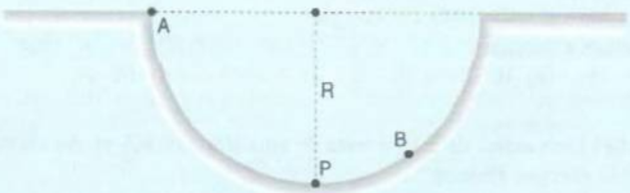
a) $12\sqrt{3}$ b) $5\sqrt{6}$ c) $4\sqrt{15}$ d) $6\sqrt{3}$ e) $2\sqrt{15}$

106. (UF-RN) A esfera do pêndulo ideal, na figura ao lado, encontra-se trincada de forma que 1/3 de sua massa se desprende quando esta atinge o ponto *B*. O pêndulo segue seu movimento e atinge o ponto *C*. Desprezando-se a resistência do ar, podemos afirmar que a altura atingida H_C é:



a) H
b) 4 H/3
c) 5 H/3
d) H/3
e) 2 H/3

107. (FUVEST-SP) Uma esfera de 2,0 kg é solta no ponto *A* da borda de uma depressão esférica de raio R = 20 cm, conforme mostra a figura. Despreza-se o atrito e adota-se $g = 10$ m/s².



a) Qual a força que a superfície da depressão exerce sobre a esfera, quando ela passa pelo ponto *P*?
b) Qual a energia mecânica da esfera no ponto *B* em relação ao plano horizontal que passa por *P*?

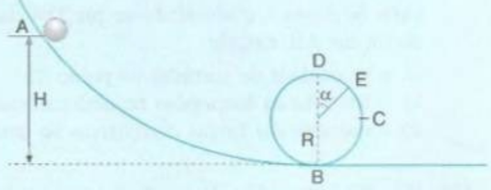
108. (FEI-SP) Uma pedra gira em um plano vertical, amarrada à extremidade de um fio de comprimento ℓ, inextensível, e de massa desprezível, fixo na outra extremidade, no limite em que o fio permanece esticado.

a) Sendo *g* a aceleração da gravidade, qual a velocidade da pedra no ponto mais alto da sua trajetória?
b) Sendo *P* o peso da pedra, qual a tração no fio, no ponto mais baixo da trajetória?

109. (PUC-RJ) Um corpo de massa *m* desce o trilho quando abandonado no ponto *A*, a uma altura *H* do solo.

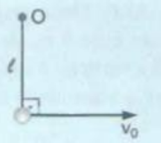
Sabe-se que essa altura é a mínima para que o corpo complete a volta, e que todos os atritos são desprezíveis.

Sendo *R* o raio da circunferência, e o corpo permanecendo nos trilhos, podemos afirmar que:



a) a altura *H* é igual a 2 R.
b) a força que o trilho exerce sobre o corpo quando este passa pelo ponto *E* é igual ao peso *P*.
c) a força que o trilho exerce sobre o corpo no ponto *D* é máxima.
d) a velocidade do corpo, ao passar por *B*, é gH.
e) a velocidade do corpo, ao atingir o ponto *C*, é igual a $\sqrt{3gR}$.

110. (FEI-SP) Qual a velocidade escalar inicial mínima v_0, a ser dada ao corpo de massa m ligado ao fio inextensível de comprimento ℓ, fixo em O, para que realize uma volta completa?



Dados: $\ell = 8$ cm; $g = 10$ m/s^2.

111. (UF-CE) Uma pedra de massa igual a 0,5 kg é solta, a partir do repouso, de uma altura de 20 m e atinge a velocidade de 16 m/s no instante em que chega ao solo. Determine, em joules, a perda de energia mecânica da pedra, supondo $g = 10$ m/s^2.

112. (UF-CE) Um homem se encontra a 25 metros do solo, e em repouso, num tobogã. Escorrega e, na queda, há uma perda de 20% da energia mecânica inicial.
Determinar, em m/s, a velocidade do homem na chegada ao solo. Adote $g = 10$ m/s^2.

113. (CESGRANRIO-RJ) Uma criança de 40 kg desce com velocidade constante ao longo do escorregador de um parque de diversões. O escorregador tem 3,0 m de altura. Qual é, em ordem de grandeza, a quantidade de energia mecânica transformada em energia térmica durante a descida?

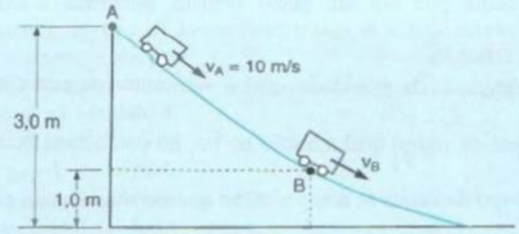
a) zero b) 10^1 J c) 10^2 J d) 10^3 J e) 10^4 J

114. (FUVEST-SP) Uma esfera de 1 kg é solta de uma altura de 0,5 m. Ao chocar-se com o solo ela perde 60% de energia. Pede-se:

a) a energia cinética da esfera imediatamente após o 1º choque;
b) a velocidade da esfera ao atingir o solo pela 2ª vez.

É dado $g = 10$ m/s^2.

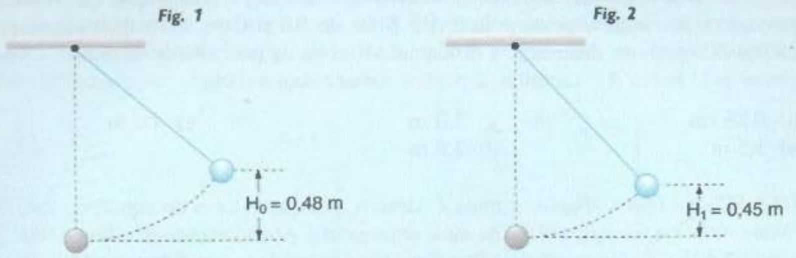
115. (CEFE-RJ)



Considerando-se que o carrinho $m = 1{,}0$ kg da figura acima, inicialmente com $v_A = 10$ m/s, parte do ponto A, e admitindo-se que 25% da sua energia mecânica inicial são dissipados ao longo do trajeto AB, calcule:

a) a velocidade do carrinho no ponto B;
b) o trabalho da força-peso no deslocamento AB;
c) o trabalho das forças dissipativas no deslocamento AB.

116. (UF-RJ) Uma esfera de aço de massa $m = 0{,}20$ kg, suspensa por um fio a um suporte, é afastada de sua posição de equilíbrio e abandonada a uma altura $H_0 = 0{,}48$ m, como mostra a figura 1. Ao completar a primeira oscilação, verifica-se que ela consegue atingir apenas uma altura $H_1 = 0{,}45$ m, como mostra a figura 2.



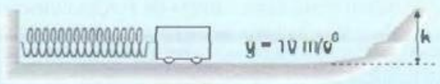
Sendo $g = 10$ m/s^2 a aceleração da gravidade, calcule:

a) o trabalho realizado pelos diversos atritos que se opõem ao movimento da esfera durante essa primeira oscilação;

b) o trabalho realizado pela força de tração no fio durante essa primeira oscilação.

117. (UF-SC) Um bloco de 10 kg de massa desloca-se, sem atrito, sobre uma superfície horizontal lisa, com uma velocidade constante de 7 m/s, em direção a uma mola de constante elástica igual a 1 000 N/m, presa a uma parede. Determine a contração da mola, em cm, no instante em que o bloco atingir o repouso.

118. (UF-MG) A mola ($k = 100$ N/m) está comprimida de 0,10 m. Se ela for liberada, o carrinho de massa 0,10 kg atingirá a altura h, em metros, de:

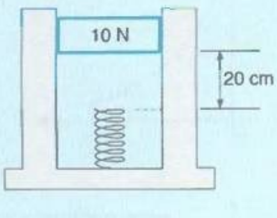


a) 0,10 b) 0,25 c) 0,50 d) 1,0 e) 5,0

119. (PUC-SP) Um corpo de massa 20 g está sobre uma mola comprimida de 40 cm. Solta-se a mola e deseja-se que o corpo atinja a altura de 10 m ($g = 10$ m/s^2). A constante da mola em N/m é:

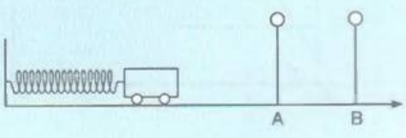
a) 50
b) 25
c) 60
d) 100
e) 150

120. (Mackenzie-SP) Um bloco de peso 10 N é abandonado do repouso na situação ilustrada na figura. Se a constante da mola for igual a $2 \text{ N} \cdot \text{cm}^{-1}$, então a compressão máxima sofrida por ela valerá:



a) 5 cm
b) 10 cm
c) 20 cm
d) 30 cm
e) 50 cm

121. (PUC-SP) O carrinho mostrado na figura ao lado, de massa 1 kg, é colocado junto a uma mola de constante elástica 400 N/m e comprimida de 4 cm. Com a liberação da mola, o carrinho adquire movimento ao

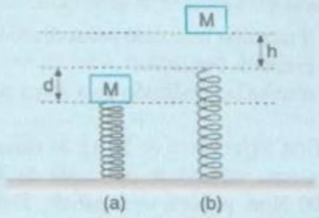


longo do eixo orientado. Através de marcadores de tempo, verificou-se que o intervalo entre as passagens do carrinho pelos pontos *A* e *B* foi de 5,0 s. Com esses dados e desprezando-se os efeitos dissipativos, determine a distância AB entre os marcadores de tempo. Considere que ao passar pelo ponto *A* o carrinho já perdeu contato com a mola.

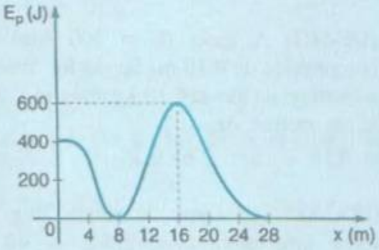
a) 0,25 cm
b) 1,5 m
c) 2,0 m
d) 2,5 m
e) 4,0 m

122. (ITA-SP) Na figura abaixo, a mola é ideal; a situação (a) é a de equilíbrio estável do sistema massa-mola e a situação (b) é a da mola em repouso. Abandonando-se o bloco "M", como indica a situação (b), podemos afirmar que a máxima velocidade que o bloco "M" atingirá será dada por:

a) $v_{máx} = \sqrt{2gd}$
b) $v_{máx} = \sqrt{g(h + d)}$
c) $v_{máx} = \sqrt{2g(h + d)}$
d) $v_{máx} = \sqrt{2gh}$
e) $v_{máx} = \sqrt{g(2h + d)}$



123. (Mackenzie-SP) Um corpo de massa *m* se movimenta num campo de forças conservativo. Sua energia mecânica é igual a 600 J e o gráfico da sua energia potencial é:

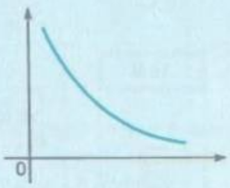


Nessas condições, podemos afirmar:

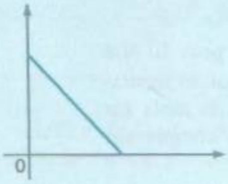
a) no ponto de abscissa x = 28 m a energia mecânica é nula.
b) no ponto de abscissa x = 0 a energia cinética é máxima.
c) no ponto de abscissa x = 28 m a energia cinética é nula.
d) no ponto de abscissa x = 16 m a energia cinética é nula.

124. (FCMSC-SP) Representando-se no eixo das ordenadas a energia potencial e no eixo das abscissas a energia cinética de um sistema isolado conservativo, o gráfico que se obtém é melhor representado por:

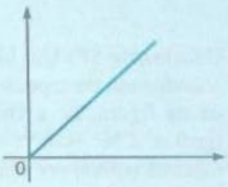
a)



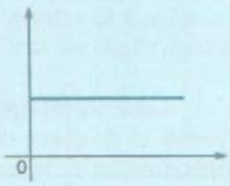
c)



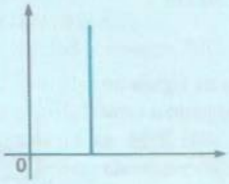
e)



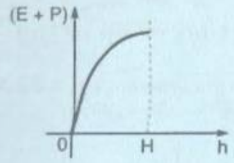
b)

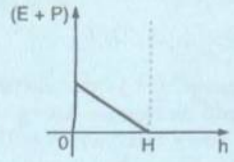


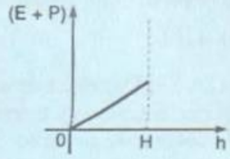
d)

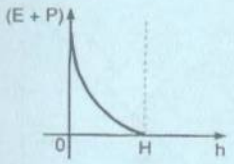


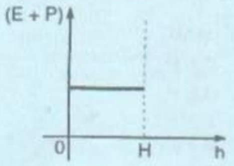
125. (Fund. Carlos Chagas-SP) Um projétil é lançado verticalmente até uma altura H. Qual dos seguintes gráficos poderia representar a soma (E + P) das energias cinética e potencial gravitacional do projétil em função de sua altura (h)? (Considere os atritos desprezíveis e considere constante a aceleração da gravidade.)

a) 

c) 

e) 

b) 

d) 

EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

126. (FUVEST-SP) Um veículo de 800 kg desloca-se numa trajetória retilínea animado inicialmente de velocidade uniforme, até o instante t = 2,0 s. É então freado, passando a descrever movimento uniformemente retardado, e pára no instante t = 7,0 s. A tabela indica as posições e os correspondentes instantes durante o movimento deste veículo. Pede-se:

a) a energia cinética perdida pelo veículo durante os 7,0 s.

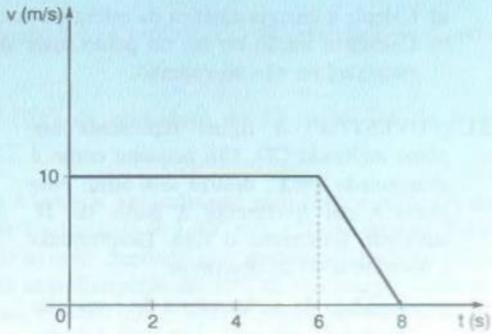
b) a velocidade do veículo no instante t = 5,0 s.

s (m)	t (s)
10	0
20	1,0
30	2,0
39	3,0
46	4,0
51	5,0
54	6,0
55	7,0

127. (FUVEST-SP) O gráfico velocidade contra tempo, mostrado ao lado, representa o movimento retilíneo de um carro de massa m = 600 kg numa estrada molhada. No instante t = 6 s o motorista vê um engarrafamento à sua frente e pisa no freio. O carro então, com as rodas travadas, desliza na pista até parar completamente. Despreze a resistência do ar.

a) Qual é o coeficiente de atrito entre os pneus do carro e a pista?

b) Qual o trabalho, em módulo, realizado pela força de atrito entre os instantes t = 6 s e t = 8 s? É dado g = 10 m/s^2.



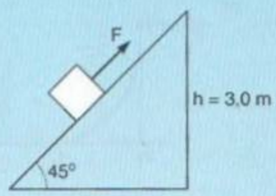
128. (PUC-SP) Um corpo de massa 0,3 kg está em repouso num local onde a aceleração gravitacional é 10 m/s^2. A partir de um certo instante, uma força variável com a distância segundo a função $F = 10 - 20\ d$, onde F (N) e d (m), passa a atuar no corpo na direção vertical e sentido ascendente. Qual a energia cinética do corpo no instante em que a força F se anula? (Despreze todos os atritos.)

a) 1,0 J b) 1,5 J c) 2,0 J d) 2,5 J e) 3,0 J

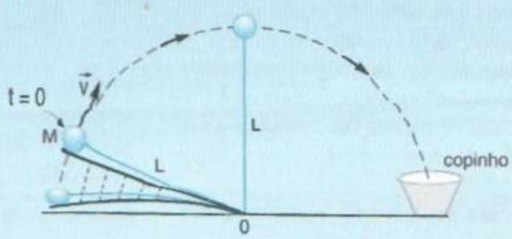
129. (ITA-SP) Um bloco de massa igual a 5,0 kg é puxado para cima por uma força F = 50 N sobre o plano inclinado da figura, partindo do repouso. Use $g = 10\ m/s^2$.
O coeficiente de atrito cinético plano–bloco é $\mu = 0,25$.

a) Calcule a energia cinética com que o bloco chega ao topo do plano.
b) Calcule a aceleração do bloco.
c) Escreva a velocidade do bloco em função do tempo.

	E_c(J)	a(m/s^2)	v(m/s)
a)	20	1,0	$0,5\ t^2$
b)	25	1,2	$0,6\ t^2$
c)	50	2,4	$1,2\ t$
d)	25	1,2	$1,2\ t$
e)	15	1,0	$0,4\ t$



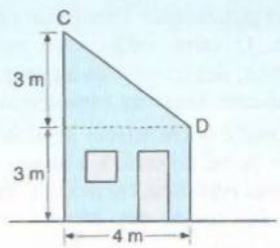
130. (UF-RJ) Um brinquedo muito popular entre as crianças é a minicatapulta. Ela consiste de uma fina tira de madeira que pode ser flexionada a fim de impulsionar uma pequena esfera de massa M, presa a um dos extremos de um fio ideal de comprimento L (o outro extremo está fixo no ponto O), para que esta se encaixe em um copinho no extremo oposto do brinquedo, como ilustra a figura. Para que o arremesso seja bem-sucedido, é necessário que no ponto mais alto da trajetória da esfera o fio esteja esticado.



Suponha que no momento do lançamento ($t = 0$) o fio encontre-se esticado e que a energia mecânica total da esfera neste instante seja 5 MgL, tomando como nível zero de energia potencial o nível do ponto O.

a) Calcule a energia cinética da esfera no ponto mais alto de sua trajetória.
b) Calcule a tração no fio no ponto mais alto da trajetória da esfera e responda se esta se encaixará ou não no copinho.

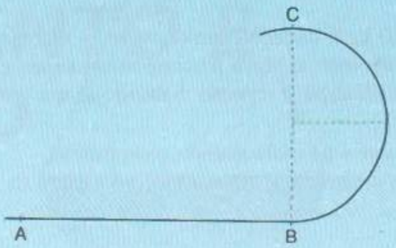
131. (FUVEST-SP) A figura representa um plano inclinado CD. Um pequeno corpo é abandonado em C, desliza sem atrito pelo plano e cai livremente a partir de D, atingindo finalmente o solo. Desprezando a resistência do ar, determine:



a) o módulo da aceleração a do corpo, no trecho CD, em m/s^2. Use para a aceleração da gravidade o valor $g = 10\ m/s^2$.

b) o valor do módulo da velocidade do corpo, imediatamente antes de ele atingir o solo, em m/s.
c) o valor da componente horizontal da velocidade do corpo, imediatamente antes de ele atingir o solo, em m/s.

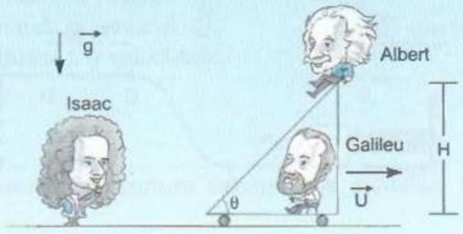
132. (FATEC-SP) Um móvel de 2 kg passa pelo ponto A da pista da figura abaixo com velocidade 12 m/s. A pista ABC não apresenta atrito, e o trecho BC é uma semicircunferência de diâmetro BC = 4 m, contida num plano vertical.



Adotando-se $g = 10\ m/s^2$, o valor da força que o móvel exerce sobre a pista no ponto C é, em newtons:

a) 0 b) 20 c) 44 d) 64 e) 84

133. (FUVEST-SP) Um carro alegórico do bloco carnavalesco Os filhos do Nicolau possui um plano inclinado e se move com velocidade horizontal U constante em relação à pista. Albert, o filho mais moço, escorrega desde o alto da rampa sem atrito. É observado por Galileu, o mais velho, sentado no carro, e por Isaac, parado na pista. Quando Albert chega ao fim da rampa, Isaac observa que a componente horizontal da velocidade de Albert é nula. Suponha que o movimento de Albert não altera a velocidade do carro, muito mais pesado do que ele. São dados: H = 5,0 m, $\theta = 30°$. Adote $g = 10\ m/s^2$.



a) Quais os valores das componentes horizontal (V_H) e vertical (V_V) da velocidade de Albert no fim da rampa, observados por Galileu?
b) Quanto vale U?
c) Qual o valor da componente vertical (V_V') da velocidade de Albert no fim da rampa, observado por Isaac?

134. (INATEL-MG) Um foguete meteorológico é lançado verticalmente para cima a partir do solo. A sua propulsão funciona até o foguete atingir a velocidade de 3 600 m/s, a 50 km do solo. A partir daí ele continua subindo até parar e retornar ao solo. Supondo que, durante a subida do foguete depois que a propulsão foi interrompida, há uma dissipação de 40% da sua energia cinética na posição a 50 km do solo, determine a altitude máxima que o foguete atinge, em relação ao solo. Use neste exercício o valor médio $g = 9,25\ m/s^2$.

135. (UNICAMP-SP) Um pára-quedista de 80 kg (pessoa + pára-quedas) salta de um avião. A força de resistência do ar no pára-quedas é dada pela expressão: $F = -bV^2$, onde $b = 32$ kg/m é uma constante e V a velocidade do pára-quedista. Depois de saltar, a velocidade de queda vai aumentando até ficar constante. O pára-quedista salta de 2 000 m de altura e atinge a velocidade constante antes de chegar ao solo.

a) Qual a velocidade com que o pára-quedista atinge o solo?

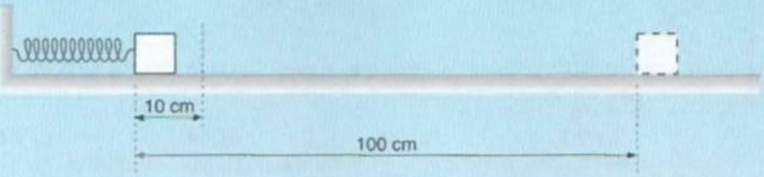
b) Qual foi a energia total dissipada pelo atrito com o ar na queda desse pára-quedista?

Dado: $g = 10$ m/s^2.

136. (UE-SC) Um bloco de 2,0 kg é forçado contra uma mola de massa desprezível, comprimindo-a 10 centímetros. Quando liberado, o bloco percorre numa superfície horizontal uma distância de 100 centímetros, antes de alcançar o repouso. Sabendo-se que a constante elástica da mola vale 150 N/m, determine:

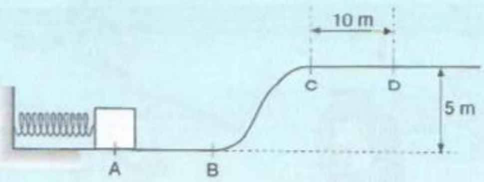
a) a energia potencial elástica na mola quando comprimida;

b) o coeficiente de atrito dinâmico μ, entre o bloco e a mesa ($g = 10$ m/s^2).



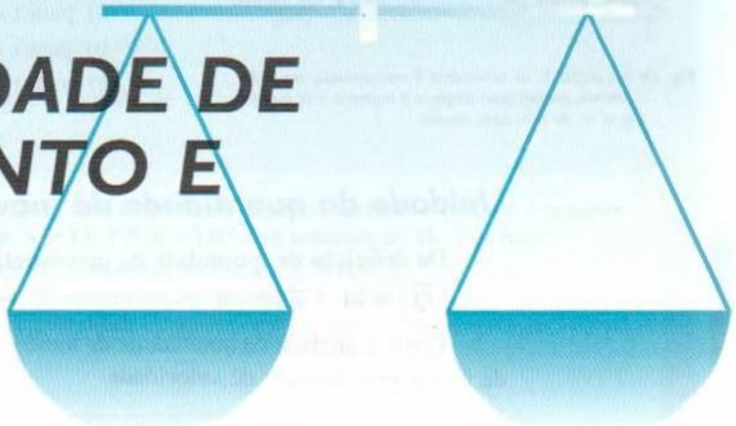
137. (Mackenzie-SP) Um corpo de 2 kg repousa em A à frente de uma mola ideal de constante elástica $1 \cdot 10^4$ N/m, que está comprimida de 20 cm. Os trechos AB e BC são lisos e CD é rugoso. Liberando a mola, o corpo pára em D, sem perder o contato com a pista. O coeficiente de atrito no trecho CD é:

a) 0,2 b) 0,3 c) 0,4 d) 0,5 e) 0,6



CAPÍTULO 8

QUANTIDADE DE MOVIMENTO E IMPULSO



1. QUANTIDADE DE MOVIMENTO DE UM PONTO MATERIAL

Consideremos um ponto material P, de massa m, dotado de velocidade vetorial instantânea $\vec{v}$ (Fig. 1).

Definimos *quantidade de movimento* do ponto material P como a grandeza vetorial $\vec{Q}$, dada pelo produto entre sua massa e a velocidade vetorial.

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{v}$$

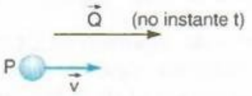


Fig. 1

A *quantidade de movimento* é também denominada *momento linear* ou ainda *momentum*.

Observações

1ª) *A quantidade de movimento* e a *velocidade vetorial* têm a mesma *direção* (Fig. 1).

2ª) Como a massa m é uma grandeza escalar positiva, então a *quantidade de movimento* e a *velocidade vetorial* têm o mesmo *sentido* (Fig. 1).

Exemplo:

Uma partícula de massa m percorre uma trajetória curvilínea ocupando as sucessivas posições P_1, P_2 e P_3, respectivamente, nos instantes t_1, t_2 e t_3 (Fig. 2). Sejam ainda $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ e $\vec{v_3}$ as respectivas velocidades vetoriais da partícula.

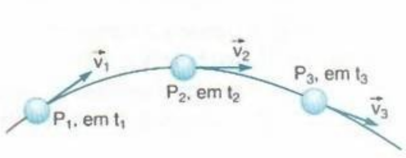


Fig. 2a

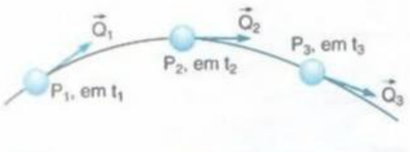


Fig. 2b A quantidade de movimento é representada, em cada instante, por um vetor tangente à trajetória e de sentido igual ao da velocidade vetorial.

Como a *quantidade de movimento* é uma grandeza instantânea, em cada um desses instantes teremos:

a) para $t = t_1$, $\vec{Q}_1 = m \cdot \vec{v}_1$;

b) para $t = t_2$, $\vec{Q}_2 = m \cdot \vec{v}_2$;

c) para $t = t_3$, $\vec{Q}_3 = m \cdot \vec{v}_3$;

8

Unidade da quantidade de movimento

Da definição de quantidade de movimento, temos:

$|\vec{Q}| = m \cdot |\vec{v}|$

Logo, a unidade da *quantidade de movimento* é igual ao produto da unidade de massa pela unidade de velocidade.

$$\boxed{\text{unidade de } Q = \text{unidade de } m \times \text{unidade de } v}$$

No Sistema Internacional de Unidades (SI):

$$\boxed{\text{unidade de } Q = kg \cdot m/s}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

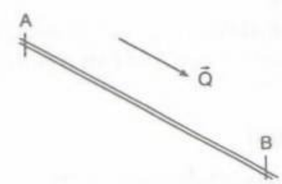
1 Um carrinho de supermercado, carregado de latas de óleo, foi esquecido numa rampa e adquiriu uma velocidade escalar constante $v = 0{,}50$ m/s. Sabendo que sua massa total é 20 kg, determine o módulo da quantidade de movimento do carrinho, bem como direção e sentido.

Resolução:

O módulo da quantidade de movimento é:

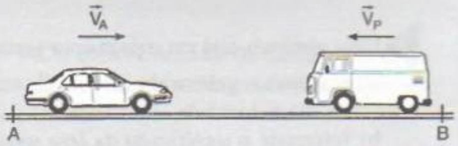
$|\vec{Q}| = m \cdot |\vec{v}|$ ou, simplesmente, $Q = m \cdot v$

$Q = 20 \cdot 0{,}50 \implies \boxed{Q = 10\ kg \cdot \frac{m}{s}}$



A direção do vetor $\vec{Q}$ é paralela à rampa, no mesmo sentido de $\vec{v}$, isto é, de *A* para *B*. Nesse caso, como o movimento é retilíneo e uniforme, a quantidade de movimento se mantém constante.

2. Um automóvel de massa 800 kg e uma perua de massa 1 200 kg percorrem uma estrada retilínea com velocidades constantes e iguais em módulo, isto é, 72 km/h, porém em sentidos opostos.



a) Determine os módulos de suas quantidades de movimento.

b) Determine ainda a direção e o sentido de cada um dos vetores $\vec{Q}$.

3. Uma partícula de massa 2,0 kg desloca-se numa trajetória retilínea e obedece à seguinte equação horária de espaço: $s = 1{,}0 + 5{,}0t - 3{,}0t^2$ (em unidades do SI). Determine:

a) o módulo da quantidade de movimento no instante $t_1 = 0{,}50$ s;

b) o módulo da quantidade de movimento no instante $t_2 = 1{,}0$ s;

c) o módulo da variação da quantidade de movimento no intervalo de tempo entre t_1 e t_2.

Resolução:

a) Derivemos a equação horária dos espaços:

$v = \dfrac{ds}{dt}$ $\quad v = 0 + 5{,}0 - 6{,}0t \quad$ $v = 5{,}0 - 6{,}0t$ (unidades do SI)

Para $t_1 = 0{,}50$ s, temos:

$v_1 = 5{,}0 - 6{,}0 \cdot 0{,}50 \quad v_1 = +2{,}0$ m/s

$|\vec{Q}_1| = m \cdot |\vec{v}_1| \quad |\vec{Q}_1| = 2{,}0 \cdot 2{,}0 \quad \boxed{|\vec{Q}_1| = 4{,}0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}$

b) Para $t_2 = 1{,}0$ s, temos:

$v_2 = 5{,}0 - 6{,}0 \cdot 1{,}0 \quad v_2 = -1{,}0$ m/s

$|\vec{Q}_2| = m \cdot |\vec{v}_2| \quad |\vec{Q}_2| = 2{,}0 \cdot |-1{,}0| = 2{,}0 \cdot 1{,}0 \quad \boxed{|\vec{Q}_2| = 2{,}0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}$

c) A variação da quantidade de movimento ($\Delta\vec{Q}$), no intervalo de tempo $[t_1 ; t_2]$, é:

$\Delta\vec{Q} = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1$

Da Fig. b, vem:

$|\Delta\vec{Q}| = |\vec{Q}_2| + |\vec{Q}_1|$

$|\Delta\vec{Q}| = 2{,}0 + 4{,}0$

$\boxed{|\Delta\vec{Q}| = 6{,}0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}$

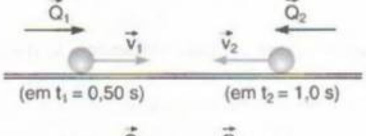


Fig. a

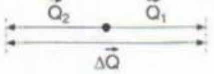


Fig. b

4. Uma bola de tênis é lançada perpendicularmente contra uma parede e volta com velocidade de mesmo módulo, 12 m/s. Sabendo que a bola possui massa $m = 0{,}20$ kg, determine a variação da quantidade de movimento sofrida por ela.

5. Uma partícula de massa $m = 0{,}50$ kg em trajetória retilínea tem velocidade escalar dada pela equação horária: $v = 2{,}0t - 8{,}0$ (unidades do SI).

Determine:

a) o módulo da quantidade de movimento nos instantes: $t_0 = 0$, $t_1 = 4{,}0$ s, $t_2 = 8{,}0$ s;

b) o módulo da variação da quantidade de movimento entre $t_0 = 0$ e $t_2 = 8{,}0$ s.

6 Uma partícula está em movimento variado a partir do repouso em uma trajetória qualquer.

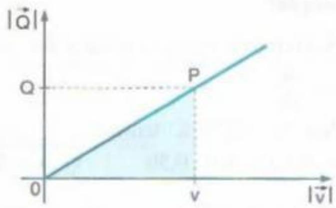
a) Construa o gráfico do módulo da sua quantidade de movimento em função do módulo da sua velocidade.

b) Interprete o significado da área medida sob o gráfico construído.

Resolução:

a) Como a quantidade de movimento é dada por $\vec{Q} = m \cdot \vec{v}$, seu módulo é $|\vec{Q}| = m \cdot |\vec{v}|$.
Concluímos que o módulo da quantidade de movimento é diretamente proporcional ao da velocidade. O gráfico é, portanto, linear, passando pela origem.

b) Tomemos um ponto P do gráfico, correspondente a uma velocidade de módulo v e quantidade de movimento de módulo Q.
Determinemos a área hachurada (triângulo):



$$\text{área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

$$\text{área} \overset{N}{=} \frac{v \cdot Q}{2}$$

Como $Q = m \cdot v$, vem: $\text{área} \overset{N}{=} \frac{v \cdot m \cdot v}{2} = \frac{m \cdot v^2}{2}$ $\boxed{\text{área} \overset{N}{=} E_c}$

Concluímos, assim, que a área medida sob o gráfico é numericamente igual à energia cinética da partícula.

7. O diagrama que ao lado representa o módulo da quantidade de movimento (Q) de uma partícula em função do módulo de sua velocidade (v). Determine:

a) sua energia cinética quando $v = 5{,}0$ m/s;

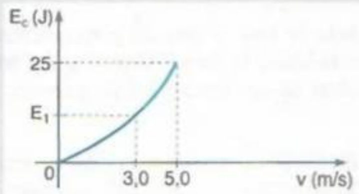
b) sua massa.

8. O gráfico à direita representa a energia cinética de uma partícula em função de sua velocidade escalar. Determine:

a) a massa da partícula;

b) o módulo da quantidade de movimento quando a energia cinética for 16 J;

c) o valor de E_1.



9. Duas partículas 1 e 2 têm massas iguais, e suas respectivas energias cinéticas E_{c_1} e E_{c_2} são tais que $E_{c_1} = 4\,E_{c_2}$. Calcule a razão entre os módulos de suas quantidades de movimento: Q_1/Q_2.

10 Uma partícula de massa m = 1,0 kg realiza um MCU com velocidade de módulo 1,0 m/s. Determine o módulo da variação de seu momento linear nos seguintes intervalos de tempo:

a) meio período; b) um quarto de período.

Resolução:

O módulo do momento linear (quantidade de movimento) da partícula vale:

$Q = m \cdot v \qquad Q = 1{,}0 \cdot 1{,}0 \qquad Q = 1{,}0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ (constante)

a) Tomemos a partícula em duas posições, correspondentes ao intervalo de tempo de meio período (meia volta) (Fig. a).

$$\Delta\vec{Q} = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1$$

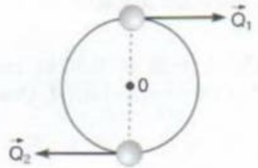


Fig. a

Da Fig. b:

$$|\Delta\vec{Q}| = |\vec{Q}_2| + |\vec{Q}_1|$$

$$|\Delta\vec{Q}| = 1{,}0 + 1{,}0$$

$$\boxed{|\Delta\vec{Q}| = 2{,}0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}$$

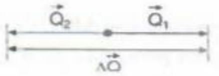


Fig. b

b) Tomemos a partícula em duas posições, correspondentes ao intervalo de tempo de um quarto de período (um quarto de volta) (Fig. c).

$$\Delta\vec{Q} = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1$$

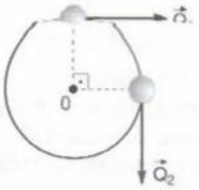


Fig. c

Apliquemos o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo da Fig. d:

$$|\Delta\vec{Q}|^2 = |\vec{Q}_1|^2 + |\vec{Q}_2|^2$$

$$|\Delta\vec{Q}|^2 = (1{,}0)^2 + (1{,}0)^2 = 2{,}0$$

$$\boxed{|\Delta\vec{Q}| = \sqrt{2{,}0} \text{ kg} \cdot \text{m/s}}$$

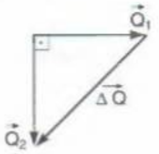
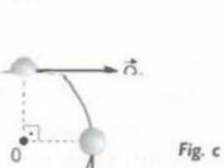


Fig. d

11. Um corpo de tamanho desprezível e massa m = 2,0 kg realiza um MCU tendo energia cinética de 1,0 J. Determine:

a) o módulo da quantidade de movimento;
b) a variação da quantidade de movimento em uma volta completa.

12. Uma partícula *P* de massa m = 2,0 kg percorre, em movimento uniforme, um arco de circunferência de raio R = 2,0 m, sob ação de uma única força de módulo F = 1,0 N. Determine:



a) o módulo da velocidade de *P*;
b) a variação do módulo da quantidade de movimento entre as posições *A* e *B*.

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

13. (UNISA-SP) Um móvel de 10 kg está animado de movimento retilíneo uniforme cuja velocidade é 8 m/s. Se sua velocidade passar a 16 m/s:

a) sua energia cinética se reduz à metade.
b) o módulo da quantidade de movimento se torna o dobro do anterior.
c) sua energia cinética se torna o dobro da anterior.
d) o módulo da quantidade de movimento se torna o quádruplo do anterior.
e) nenhuma das respostas acima.

8

14. (FUVEST-SP) Um veículo de 0,30 kg parte do repouso com aceleração constante; 10 s após, encontra-se a 40 m da posição inicial. Qual o valor da quantidade de movimento nesse instante?

a) 2,4 kg · m/s
b) 6,0 kg · m/s
c) 60 kg · m/s
d) 120 kg · m/s
e) 400 kg · m/s

15. (PUC-SP) Uma partícula tem MRUV, regido pela lei horária $s = 2t^2$, com s em metros e t em segundos. A massa da partícula é de 0,5 kg. A variação da quantidade de movimento da partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = 2$ s é:

a) 1 kg · m/s
b) 2 kg · m/s
c) 3 kg · m/s
d) 4 kg · m/s
e) 5 kg · m/s

16. (F. M. Jundiaí-SP) Sejam m, v, E e Q, respectivamente, as medidas, no Sistema Internacional de Unidades, da massa, da velocidade, da energia cinética e da quantidade de movimento de uma partícula, num dado instante t_0. Dentre as várias relações entre essas medidas, apresentadas nas alternativas, a correta é a:

a) $\dfrac{Q^2}{m} = 2E$
b) $Qv = E$
c) $\dfrac{Q^2}{m} = E$
d) $2Q^2 = mE$
e) $2Qv = E$

17. (VUNESP-SP) Um objeto de massa 0,50 kg está se deslocando ao longo de uma trajetória retilínea com aceleração constante 0,30 m/s². Se partiu do repouso, o módulo da sua quantidade de movimento, em kg · m/s, ao fim de 8,0 s, é:

a) 0,80 b) 1,2 c) 1,6 d) 2,0 e) 2,4

18. (IME) Dois corpos, A e B, de massas diferentes m_A e m_B, têm a mesma energia cinética. Qual a relação entre os módulos de suas quantidades de movimento?

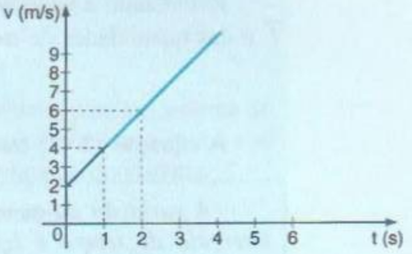
19. (FCMSC-SP) Em uma carta de Benjamin Franklin, como objeção à teoria corpuscular da luz, ele declarava:

"Uma partícula de luz, caminhando com velocidade de $3 \cdot 10^8$ m/s, deveria produzir o mesmo impacto (transferir mesma quantidade de movimento) que uma bala de canhão de massa 10 kg, animada de velocidade de 300 m/s, ao atingir a superfície da Terra".

Nessas condições, a partícula de luz a que se referia Franklin deveria ter massa, expressa em kg, de ordem de grandeza igual a:

a) 10^{-8} b) 10^{-6} c) 10^{-5} d) 10^{-7} e) 10^{-4}

20. (UF-PE) O gráfico ao lado representa a variação da velocidade com o tempo de um objeto de massa igual a 10 kg que se desloca em linha reta. Qual a variação do momento linear do objeto a cada intervalo de 2,0 segundos?



21. (UNEB-BA) Durante uma partida de tênis, um jogador golpeia a bola imprimindo-lhe uma velocidade $\vec{v}$, de módulo 20 m/s. Sabendo-se que a massa da bola é 100 g e que ela havia chegado ao jogador com velocidade $\vec{v_0}$, de módulo 15 m/s, de mesma direção mas sentido oposto a $\vec{v}$, a variação da quantidade de movimento da bola, devido ao golpe, é, em kg m/s, igual a

a) 0,50 b) 1,5 c) 2,0 d) 3,5 e) 5,0

8

2. IMPULSO

Consideremos uma partícula de massa m em movimento retilíneo uniformemente variado sob a ação de uma força resultante $\vec{F}$ (constante) (Fig. 3). Sejam $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ as respectivas velocidades nos instantes t_1 e t_2.

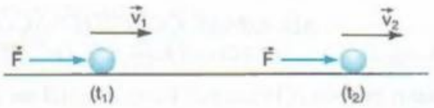


Fig. 3 Partícula em movimento retilíneo uniformemente variado, sob a ação da força constante $\vec{F}$.

Da Segunda Lei de Newton temos $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

Porém: $\vec{a} = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

Então: $\vec{F} = m \cdot \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \implies \vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v}$

ou ainda $\vec{F} \cdot \Delta t = m(\vec{v_2} - \vec{v_1}) \implies$

$$\implies \boxed{\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \vec{v_2} - m \cdot \vec{v_1}} \quad (2 \cdot 1)$$

No segundo membro dessa equação temos as respectivas quantidades de movimento da partícula nos instantes t_1 e t_2:

$$m \cdot \vec{v_1} = \vec{Q_1} \quad \text{e} \quad m \cdot \vec{v_2} = \vec{Q_2}$$

No primeiro membro dessa equação temos o produto $(\vec{F} \cdot \Delta t)$, que é chamado *impulso* da força $\vec{F}$ e que se indica por $\vec{I}$.

$$\boxed{\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t}$$

O *impulso* é uma grandeza vetorial que tem a direção e o sentido da força $\vec{F}$; módulo dado por $F \times \Delta t$ e unidade no SI dada por $N \cdot s$.

Retomando a equação (2 · 1), poderemos escrevê-la em função do impulso $\vec{I}$ e das quantidades de movimento $\vec{Q}_1$ e $\vec{Q}_2$:

$$\vec{I} = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 \qquad (2 \cdot 2)$$

A equação (2 · 2) traduz o teorema do impulso, que assim se enuncia:

> *A variação da quantidade de movimento de uma partícula durante um intervalo de tempo é igual ao impulso da força resultante que atuou na partícula durante esse intervalo de tempo.*

Outras notações para o teorema do impulso:

$$\vec{I} = \vec{Q}_{\text{final}} - \vec{Q}_{\text{inicial}} \qquad \vec{I} = \vec{Q}_f - \vec{Q}_i \qquad \vec{I} = \vec{Q}_f - \vec{Q}_0$$

Observação

Em decorrência do teorema do impulso, a unidade de impulso (N · s) e a unidade de quantidade de movimento $\left(kg \cdot \frac{m}{s}\right)$ são equivalentes, isto é:

$$1\ N \cdot s = 1\ kg \cdot \frac{m}{s}$$

8

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE A SEGUNDA LEI DE NEWTON

Quando Newton propôs o Princípio Fundamental da Dinâmica, ele o fez sob a forma de quantidade de movimento, ou seja:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt}}$$

"A derivada, em relação ao tempo, da quantidade de movimento da partícula é igual à força resultante que nela atua."

A sua verificação é simples, basta partirmos do teorema do impulso:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{I} = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \Delta\vec{Q} \\ \vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t \end{array}\right\} \vec{F} \cdot \Delta t = \Delta\vec{Q}$$

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{Q}}{\Delta t} \quad \text{ou ainda} \quad \vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

No capítulo 1 deste livro propusemos um enunciado mais simples:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Evidentemente, eles são absolutamente equivalentes, pois partindo-se de um deles chegamos ao outro e vice-versa:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt} \iff \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Como a massa m é constante, pode sair da derivada:

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \iff \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

É possível ainda generalizar a Segunda Lei de Newton para um sistema de n partículas, onde $\vec{F}$ será a resultante de todas as forças externas ao sistema e m o somatório das massas; $\vec{Q}$ será a quantidade de movimento do sistema.

$$\vec{F} = \Sigma\,\vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n \quad \text{(forças externas)}$$

$$m = \Sigma\,m_i = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

$$\vec{Q} = \Sigma\,\vec{Q}_i = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \cdots + \vec{Q}_n$$

3. MÉTODO GRÁFICO PARA CALCULAR O IMPULSO

Já vimos que a variação da quantidade de movimento e o impulso são grandezas que se relacionam através do teorema do impulso. No entanto, em algumas situações, não basta a definição matemática do impulso para o seu cálculo, pois nem sempre a força resultante na partícula permanece constante. Desenvolveremos então um método gráfico para o seu cálculo e o da conseqüente variação de quantidade de movimento da partícula.

1º) Se tivéssemos o caso particular de uma força constante atuando na partícula, o seu gráfico em função do tempo seria o da Fig. 4.

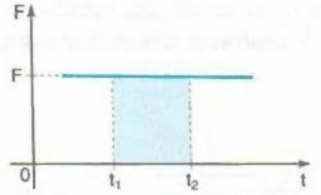


Fig. 4 Força resultante constante.

A área da figura sombreada é:

$A = b \cdot h \overset{N}{=} (t_2 - t_1) \cdot F = F \cdot \Delta t$

Logo: $A \overset{N}{=} I$ (módulo do impulso de $\vec{F}$)

Concluímos, assim, que a área sombreada A é numericamente igual à intensidade do impulso da força $\vec{F}$ constante.

2º) Quando a força $\vec{F}$ tiver intensidade variável, mas mantiver constante sua direção, a propriedade gráfica anterior continuará verdadeira.

Verificamos essa generalização de propriedade, dividindo a região limitada pelo gráfico, entre t_1 e t_2, em faixas elementares de áreas iguais a:

$\Delta A_i \overset{N}{=} F_i \cdot \Delta t_i = I_i$

Assim, teremos, na Fig. 5a

$\Delta A_1 \overset{N}{=} F_1 \cdot \Delta t_1 = I_1$

$\Delta A_2 \overset{N}{=} F_2 \cdot \Delta t_2 = I_2$

....

$\Delta A_n \overset{N}{=} F_n \cdot \Delta t_n = I_n$

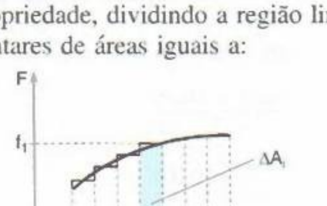


Fig. 5a

A área total *A*, sombreada na Fig. 5b, corresponde à soma das áreas elementares:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \overset{N}{=} \sum_{i=1}^{n} I_i$$

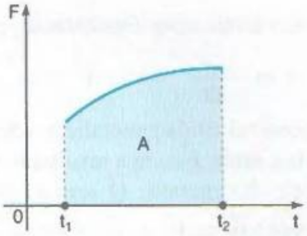


Fig. 5b

Como a força $\vec{F}$ tem direção constante, todos os impulsos elementares ($\vec{I}_1$, $\vec{I}_2$, ..., $\vec{I}_n$) têm a mesma direção. Por conseguinte, o somatório ΣI_i representa a intensidade do impulso da força $\vec{F}$ no intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$.

Concluindo, podemos dizer que:

No diagrama cartesiano da intensidade da força pelo tempo, a área é numericamente igual à intensidade do impulso da força, no correspondente intervalo de tempo.

Exemplo:

Sobre o carrinho da Fig. 6a, aplicamos uma força $\vec{F}$ de direção constante e sentido igual ao de sua velocidade vetorial $\vec{v}$. Sua intensidade é, no entanto, variável, conforme nos mostra a Fig. 6b.

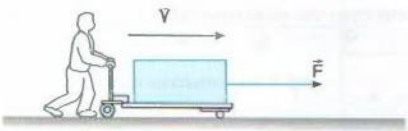


Fig. 6a
O carrinho está sendo empurrado durante certo intervalo de tempo Δt.

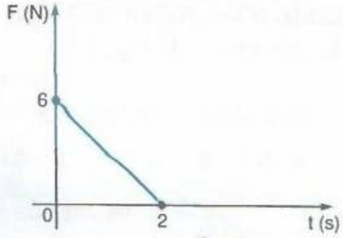


Fig. 6b

O impulso de $\vec{F}$ durante os 2,0 s de sua duração tem direção e sentido iguais aos da velocidade $\vec{v}$.

O módulo do impulso é dado pela área do triângulo.

$I \overset{N}{=}$ área do triângulo

$$I \overset{N}{=} \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

$$I = \frac{(2,0) \cdot (6,0)}{2}$$

$$\boxed{I = 6,0\ N \cdot s}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

22. Sobre um carrinho de massa m = 2,0 kg e tamanho desprezível, inicialmente em repouso, atuou uma força $\vec{F}$ constante de intensidade 12 N, conforme a figura a seguir. Determine o módulo da velocidade adquirida após 5,0 s de movimento.

Resolução:

Apliquemos o teorema do impulso:

$$I = Q_f - Q_0$$

onde: $I = F \cdot \Delta t$

$Q_f = m \cdot v_f$

$Q_0 = m \cdot v_0$

$$F \cdot \Delta t = m \cdot v_f - m \cdot v_0$$

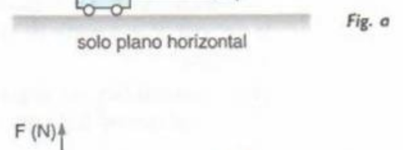
Sendo $F = 12$ N; $m = 2,0$ kg; $\Delta t = 5,0$ s; $v_0 = 0$, vem:

$$12 \cdot 5,0 = 2,0 \cdot v_f - 2,0 \cdot 0$$

$$\boxed{v_f = 30 \text{ m/s}}$$

23. Uma partícula de massa m = 12 g estava em movimento retilíneo e uniforme com velocidade escalar de $1,0 \times 10^3$ m/s. Num dado instante $t_0 = 0$, aplicou-se sobre ela uma força constante F = 5,0 N de direção e sentido iguais ao do movimento. Determine a velocidade da partícula no instante t = 12 s.

24. Na figura ao lado, o carrinho está em movimento retilíneo uniforme com velocidade v = 12 m/s. A sua massa é 10 kg. Num dado instante, aplica-se sobre ele uma força constante $\vec{F}$ de sentido oposto ao do movimento e ele pára em 3,0 s. Determine o módulo da força $\vec{F}$.



25. Considere o carrinho de massa m = 1,0 kg e tamanho desprezível, sob a ação da força $\vec{F}$, horizontal da Fig. a. O módulo de $\vec{F}$ variou conforme o gráfico da Fig. b, mas sua direção e sentido permaneceram constantes. Admitindo que o carrinho tenha partido do repouso no instante $t_0 = 0$, determine:

a) o módulo do impulso da força $\vec{F}$ durante os 4,0 s de movimento;

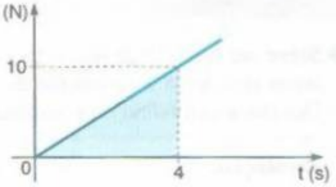
b) o módulo da velocidade do carrinho, no instante $t_1 = 4,0$ s.

Fig. a

Fig. b

Resolução:

a) O módulo do impulso da força $\vec{F}$ é numericamente igual à área do triângulo hachurado:



$$I \overset{N}{=} \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4{,}0 \cdot 10}{2} \implies \boxed{I = 20\ N \cdot s}$$

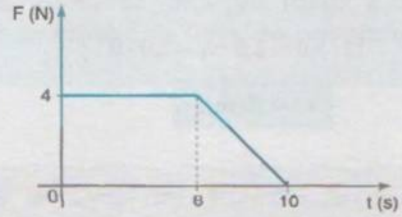
b) Apliquemos o teorema do impulso entre os instantes $t_0 = 0$ e $t_1 = 4{,}0$ s.

$I = Q_f - Q_0 = m \cdot v_f - m \cdot v_0 = m \cdot v_1 - m \cdot v_0$

Como ele partiu do repouso, temos $v_0 = 0$

$$20 = 1{,}0 \cdot v_1 - 1{,}0 \cdot 0 \implies \boxed{v_1 = 20\ m/s}$$

26. O gráfico ao lado representa a intensidade da força resultante que atua sobre uma partícula em movimento retilíneo. Sabe-se que a força tem direção constante e sentido igual ao do movimento da partícula.



a) Determine o módulo do impulso sobre a partícula no intervalo de tempo de 0 a 10 s.

b) Sendo a massa da partícula de 2,0 kg e a velocidade inicial $v_0 = 8{,}0$ m/s (para $t = 0$), determine o módulo da velocidade final (para $t = 10$ s).

27 Sobre o carrinho da Fig. a foi aplicada uma força $\vec{F}$ de direção igual à de sua velocidade $\vec{v}$, de valor algébrico variável, conforme mostra o gráfico (Fig. b).

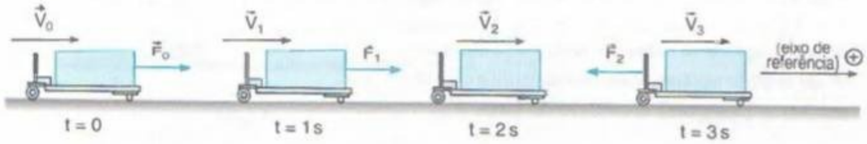


Fig. a

Desde o instante $t = 0$ até o instante $t = 2{,}0$ s, o sentido de $\vec{F}$ foi o mesmo da velocidade vetorial $\vec{v}$ e, a partir de então, a força foi invertida.

a) Determine a intensidade do impulso da força $\vec{F}$ nos primeiros 2,0 s de movimento.

b) Determine a intensidade do impulso de $\vec{F}$ entre os instantes $t_1 = 2{,}0$ s e $t_2 = 4{,}0$ s; determine também a intensidade do impulso total de $\vec{F}$ durante os 4,0 s de movimento.

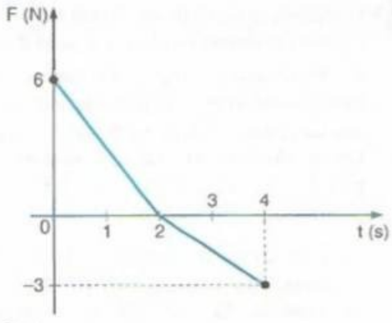
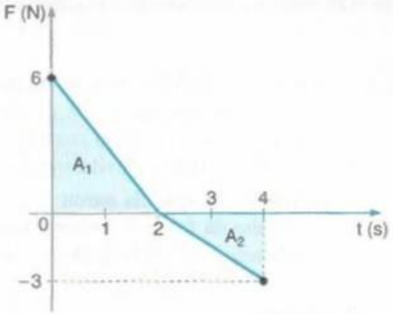


Fig. b

c) Sendo $\vec{v_0} = 1{,}0$ m/s e a massa m = 4,0 kg, determine o sentido e o módulo da velocidade $\vec{v_1}$ no instante $t_1 = 2{,}0$ s.

d) Determine o sentido e o módulo da velocidade final $\vec{v_2}$ no instante $t_2 = 4{,}0$ s.

Resolução:



a) Nos primeiros 2,0 s, o impulso de $\vec{F}$ tem valor algébrico positivo, pois $F > 0$.

$I_1 \overset{N}{=} \text{área } A_1 = \dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$

$I_1 = \dfrac{(2{,}0) \cdot (6{,}0)}{2}$ $\boxed{I_1 = 6{,}0 \text{ N} \cdot \text{s}}$

b) No intervalo de tempo compreendido entre $t_1 = 2{,}0$ s e $t_2 = 4{,}0$ s, o impulso tem valor algébrico negativo, pois $F < 0$.

$I_2 \overset{N}{=} -\text{área } A_2$ $I_2 \overset{N}{=} -\dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$

$I_2 = -\dfrac{(2{,}0) \cdot (3{,}0)}{2}$ $\boxed{I_2 = -3{,}0 \text{ N} \cdot \text{s}}$

O impulso total recebido pelo carrinho, durante os primeiros 4,0 s, tem valor algébrico dado por:

$I = I_1 + I_2$ $I = 6{,}0 + (-3{,}0)$ $\boxed{I = +3{,}0 \text{ N} \cdot \text{s}}$

Ressaltemos que foi permitido fazer a soma algébrica de I_1 com I_2 somente porque a força $\vec{F}$ *não alterou sua direção*.

c) Para calcularmos o módulo da velocidade $\vec{v_1}$ apliquemos o teorema do impulso entre os instantes $t_0 = 0$ e $t_1 = 2{,}0$ s:

$I_1 = Q_1 - Q_0 = m \cdot v_1 - m \cdot v_0$

$6{,}0 = 4{,}0 \times v_1 - 4{,}0 \times 1{,}0 \implies \boxed{v_1 = +2{,}5 \text{ m/s}}$

O sentido de $\vec{v_1}$ é o mesmo de $\vec{v_0}$.

d) Para calcularmos o módulo da velocidade final $\vec{v_2}$ usaremos o teorema do impulso entre os instantes $t_1 = 2{,}0$ s e $t_2 = 4{,}0$ s

$I_2 = Q_2 - Q_1 = m \cdot v_2 - m \cdot v_1$

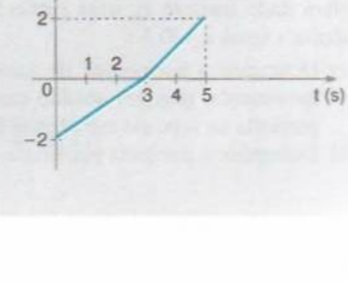
$-3{,}0 = 4{,}0 \cdot v_2 - 4{,}0 \cdot 2{,}5$

$4{,}0 \cdot v_2 = 7{,}0 \implies \boxed{v_2 = +1{,}75 \text{ m/s}}$

O sentido de $\vec{v_2}$ é o mesmo de $\vec{v_0}$.

28. Uma partícula possui movimento retilíneo e no instante $t = 0$ a sua velocidade é $v_0 = +2{,}0$ m/s. A partir desse instante, passou a atuar na partícula um conjunto de forças cuja resultante é $\vec{F}$, de direção constante e de sentido inicial oposto ao de $\vec{v_0}$.

O gráfico ao lado mostra a variação do valor algébrico da força resultante $\vec{F}$ com o tempo.



Sendo m = 0,50 kg a massa da partícula, determine:

a) o valor algébrico do impulso de $\vec{F}$ nos primeiros 3,0 s;

b) o valor algébrico do impulso total de $\vec{F}$ durante os 5,0 s de sua atuação;

c) o módulo da velocidade $\vec{v_1}$ no instante $t_1 = 3{,}0$ s;

d) o módulo e o sentido da velocidade final $\vec{v_2}$ no instante $t_2 = 5{,}0$ s.

29. Uma partícula em MRU possui, no instante t = 0, *energia cinética* E_c e *momento linear* de módulo Q. No instante t = 0 é aplicada a ela uma força constante $\vec{F}$, na direção do movimento, mas em sentido contrário. O corpo é levado ao repouso e a força $\vec{F}$ é retirada. Não considere efeitos gravitacionais. Determine:

a) o instante em que ela parou;

b) o trabalho da força $\vec{F}$ durante sua aplicação;

c) a distância percorrida desde t = 0 até parar.

Resolução:

a) No instante t = 0, tínhamos a situação abaixo:

Pelo teorema do impulso podemos escrever:

$\vec{I} = \vec{Q}_f - \vec{Q}_0$

$F \cdot \Delta t = |m \cdot v_f - m \cdot v_0|$

$F(t - 0) = |m \cdot 0 - m \cdot v_0|$

$F \cdot t = |0 - Q| = Q \implies \boxed{t = \dfrac{Q}{F}}$

Apliquemos o TEC (Teorema da Energia Cinética):

$\tau = \Delta E_c \qquad \tau = E_{c_f} - E_{c_0}$

Como $v_f = 0 \implies E_{c_f} = 0$

Sendo dado que $E_{c_0} = E_c$, vem: $\tau = 0 - E_c \qquad \boxed{\tau = -E_c}$

c) Sendo $\tau = F \cdot d \cdot \cos 180^\circ \qquad -E_c = F \cdot d \cdot (-1) \qquad \boxed{d = \dfrac{E_c}{F}}$

30. Uma partícula é acelerada a partir do repouso por uma única força constante de módulo F = 10 N, adquirindo, após um intervalo de tempo Δt, uma quantidade de movimento de módulo Q = 20 kg · m/s, quando a força é então retirada. Determine:

a) a duração do intervalo de tempo Δt;

b) o trabalho da força $\vec{F}$, sabendo que a massa da partícula é de 2,0 kg.

31. Num dado instante t_0, uma partícula possui momento linear de módulo 40 kg · m/s e energia cinética igual a 400 J.

a) Determine a intensidade de uma força $\vec{F}$ que, atuando sobre a partícula na direção de seu movimento, mas em sentido contrário a ele, com módulo constante, seja capaz de levar a partícula ao repouso em apenas 1,0 s.

b) Determine a distância percorrida pela partícula durante a ação da força $\vec{F}$.

32 Uma partícula em trajetória retilínea possui velocidade de módulo $v_0 = 5{,}0$ m/s no instante $t = 0$. Seu movimento permanece retilíneo e uniforme até o instante $t = 5{,}0$ s, quando lhe é aplicada uma força de mesma direção e sentido do movimento, mas com módulo variável em função do tempo e dado pela equação: $F = 4{,}0\,(t - 5{,}0)$, para $t \geqslant 5{,}0$ s (com o tempo medido em *segundos* e a força em *newtons*).

Sendo a massa da partícula igual a 2,0 kg, pedem-se:

a) a construção do gráfico da intensidade da força resultante em função do tempo;

b) o módulo do impulso da força resultante, no intervalo de tempo de 0 a 10 s;

c) o módulo da velocidade no instante $t = 10$ s.

Resolução:

a) Até o instante $t = 5{,}0$ s a partícula manteve-se em MRU e, portanto, a força resultante é nula. O seu gráfico é um segmento de reta sobre o eixo.

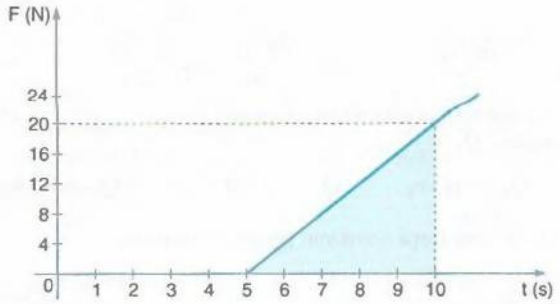
Para $t \geqslant 5{,}0$ s vale a equação:

$F = 4{,}0\,(t - 5{,}0)$ (SI)

O gráfico de *F* em função de *t* é uma reta oblíqua em relação ao eixo dos tempos.

Construamos uma tabela:

t(s)	5,0	6,0	7,0	10
F(N)	0	4,0	8,0	20



b) O *impulso* de $\vec{F}$ desde $t = 0$ até $t = 10$ s é dado pela área do triângulo sombreado.

Como $I_{(0\text{ a }5{,}0\text{ s})} = 0$, temos $I_{(0\text{ a }10\text{ s})} = I_{(5{,}0\text{ a }10\text{ s})} \overset{N}{=} \dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$

$I_{(0\text{ a }10\text{ s})} = I_{(5{,}0\text{ a }10\text{ s})} = \dfrac{5{,}0 \cdot 20}{2}$ $\boxed{I_{(0\text{ a }10\text{ s})} = 50 \text{ N} \cdot \text{s}}$

c) De acordo com o teorema do impulso podemos escrever:

$I_{(0\text{ a }10\text{ s})} = |\vec{Q}_{10}| - |\vec{Q}_0|$ (O movimento é retilíneo e não houve inversão.)

$I_{(0\text{ a }10\text{ s})} = m \cdot v_{10} - m \cdot v_0$

$50 = 2{,}0 \cdot v_{10} - 2{,}0 \cdot 5{,}0$

$50 = 2{,}0 \cdot v_{10} - 10$

$60 = 2{,}0 \cdot v_{10}$ $v_{10} = \dfrac{60}{2{,}0}$ $\boxed{v_{10} = 30 \text{ m/s}}$

8

33. Uma partícula encontrava-se em repouso no instante $t = 0$, quando lhe foi aplicada uma força de intensidade variável segundo a equação abaixo:

$F = 5{,}0 - 2{,}5t$ (SI)

(válida para $0 \leqslant t \leqslant 10\,s$)

Sendo $m = 1{,}0$ kg a massa da partícula, obtenha:

a) o gráfico do valor algébrico da força em função do tempo;

b) o valor algébrico do impulso da força no referido intervalo de tempo (0, 10 s);

c) o módulo da velocidade no instante $t = 10$ s.

34. Uma partícula de massa $m = 2{,}0$ kg é lançada obliquamente ao espaço num local onde a aceleração da gravidade se mantém constante e de módulo $g = 10\ m/s^2$. Ao atingir o ponto mais alto da trajetória, sua energia cinética era igual a 16 J. Sabendo que o tempo total de vôo foi de 6,0 s, calcule:

a) o módulo da quantidade de movimento na direção do eixo horizontal ($\vec{Q}_x$) nos instantes $t_1 = 2{,}0$ s e $t_2 = 4{,}0$ s;

b) o módulo do impulso da força peso entre os referidos instantes t_1 e t_2;

c) o módulo das componentes verticais da velocidade ($\vec{v}_{y_2}$ e $\vec{v}_{y_4}$) nos referidos instantes 2,0 s e 4,0 s.

Despreze a resistência do ar.

Resolução:

a) No ponto mais alto temos:

$v = v_x$

$$E_c = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{m \cdot v_x^2}{2} \qquad v_x = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 16}{2{,}0}} \qquad v_x = 4{,}0\ m/s$$

Como $\vec{v}_x$ se mantém constante (em módulo, direção e sentido), em qualquer instante tem-se o mesmo $\vec{Q}_x$.

$$Q_x = Q_{x_1} = Q_{x_2} = m \cdot v_x \qquad Q_x = 2{,}0 \cdot 4{,}0 \qquad \boxed{Q_x = 8{,}0\ kg \cdot m/s}$$

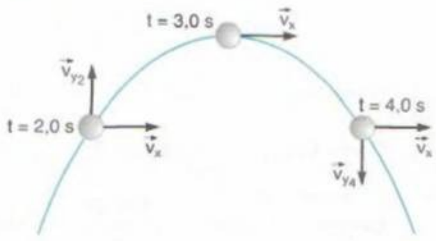
b) Como o peso é uma força constante podemos escrever:

$I = P \cdot \Delta t$

$I = m \cdot g \cdot \Delta t$

$I = 2{,}0 \cdot 10 \cdot 2{,}0$

$\boxed{I = 40\ N \cdot s}$



c) Pelo teorema do impulso:

$\vec{I} = \vec{Q}_{y_4} - \vec{Q}_{y_2}$

$\vec{I} = m \cdot \vec{v}_{y_4} - m \cdot \vec{v}_{y_2}$

Como $|\vec{v}_{y_4}| = |\vec{v}_{y_2}|$, pois ela atingiu o pico no instante $t = 3{,}0$ s, podemos escrever:

$$I = 2 \cdot m \cdot |\vec{v}_{y_2}| \quad |\vec{v}_{y_2}| = \frac{I}{2\,m} \quad |\vec{v}_{y_2}| = \frac{40}{2 \cdot 2{,}0} = 10 \Longrightarrow |\vec{v}_{y_2}| = |\vec{v}_{y_4}| = 10\ m/s$$

35. Uma bolinha rola sobre uma mesa horizontal e, no instante em que ela cai, sua energia cinética vale 36 J. Sua massa é de 2,0 kg. Despreze a resistência do ar. Calcule o módulo do momento linear horizontal durante a queda.

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

36. (Fund. Carlos Chagas-SP) Uma força constante de módulo 5,0 N é a única força que atua sobre um corpo de massa m que parte do repouso e atinge uma velocidade de módulo 5,0 m/s ao cabo de 4,0 s.
Pedem-se:
a) o módulo da variação de quantidade de movimento do corpo;
b) a massa do corpo.

37. (FUVEST-SP) Um objeto de 4,0 kg, deslocando-se sobre uma superfície horizontal com atrito constante, passa por um ponto, onde possui 50 J de energia cinética, e pára dez metros adiante. Adote $g = 10\ m/s^2$.
a) Qual o coeficiente de atrito entre o ponto e a superfície?
b) Qual o módulo do impulso aplicado sobre o corpo para detê-lo?

38. (UF-PI) Uma bola de massa 200 g tem velocidade de 10 m/s e, logo depois, tem sua velocidade alterada para 20 m/s, na mesma direção e no mesmo sentido. O impulso resultante sofrido pela bola tem módulo, em N · s:

a) 4 000 b) 2 000 c) 4 d) 2 e) 0,2

39. (Fund. Carlos Chagas-SP) Uma força constante em módulo, direção e sentido atua sobre um corpo de massa 10 kg durante 2,0 segundos. O corpo, inicialmente em repouso, desliza sobre um plano horizontal sem atrito e atinge velocidade de módulo 10 m/s, ao fim dos 2,0 segundos.
a) Qual a intensidade da força que atuou sobre o corpo?
b) Qual o módulo da quantidade de movimento do corpo ao fim dos 2,0 s?

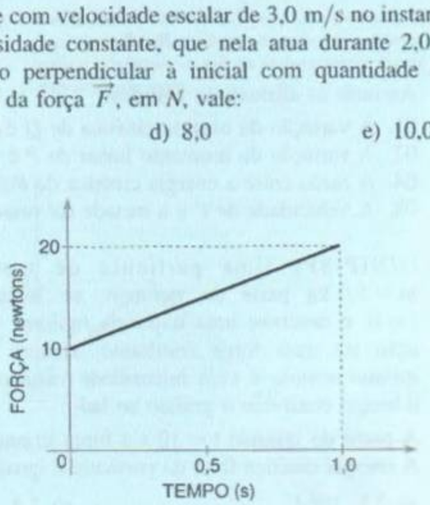
40. (UEL-PR) Um corpo de massa 2,0 kg é lançado verticalmente para cima, com velocidade inicial de 20 m/s. Despreze a resistência do ar e considere a aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$. O módulo do impulso exercido pela força-peso, desde o lançamento até atingir a altura máxima, em unidades do Sistema Internacional, vale:

a) 10 b) 20 c) 30 d) 40 e) 50

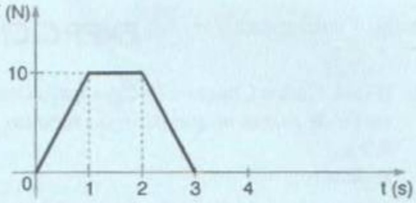
41. (UEL-PR) Uma partícula de massa 2,0 kg move-se com velocidade escalar de 3,0 m/s no instante em que recebe a ação de uma força $\vec{F}$, de intensidade constante, que nela atua durante 2,0 s. A partícula passa, então, a se mover na direção perpendicular à inicial com quantidade de movimento de módulo 8,0 kg m/s. A intensidade da força $\vec{F}$, em N, vale:

a) 3,0 b) 5,0 c) 6,0 d) 8,0 e) 10,0

42. (COVEST-PE) Uma força aplicada durante 1 segundo a um objeto de massa 10 kg varia de intensidade conforme o gráfico ao lado. Qual o impulso total da força após a interação?



43. (UF-CE) Um corpo com massa $m = 1,0$ kg desloca-se em linha reta, a partir do repouso, sob a ação de uma força que varia conforme o diagrama.



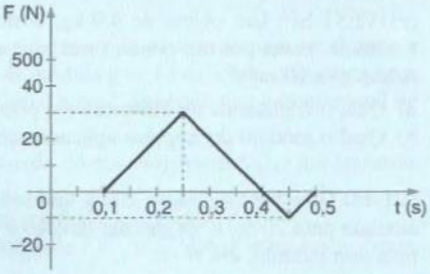
Calcule:

a) a variação da quantidade de movimento (momento linear) entre os intervalos $t = 0$ e $t = 4$ s;

b) a velocidade do corpo no instante $t = 3$ s;

c) a variação da energia cinética no mesmo intervalo de tempo do item a).

44. (ITA-SP) Um corpo de massa igual a 2,0 kg acha-se em movimento retilíneo. Num certo trecho de sua trajetória faz-se agir sobre ele uma força que tem a mesma direção do movimento e que varia com o tempo, conforme a figura ao lado. Neste trecho e nestas condições, pode-se afirmar que a variação da velocidade escalar "Δv" do corpo será dada por:



a) $\Delta v = 2,5$ m/s;

b) $\Delta v = 5,0$ m/s;

c) $\Delta v = 8,0$ m/s;

d) $\Delta v = 2,0$ m/s;

e) $\Delta v = 4,0$ m/s.

45. (UF-CE) Sejam P e Q dois corpos de mesma massa, $m = 2,0$ kg, em repouso, na origem, no instante $t = 0$. Sobre P, age a força que depende do tempo de acordo com o gráfico da figura 1, e, sobre Q, age uma força que depende da posição, como mostra o gráfico da figura 2. No instante em que cessa a ação das forças, podemos afirmar:

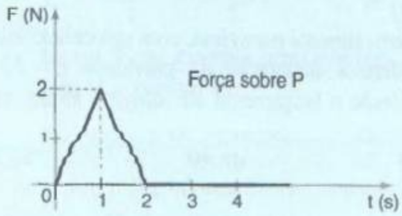


Fig. 1

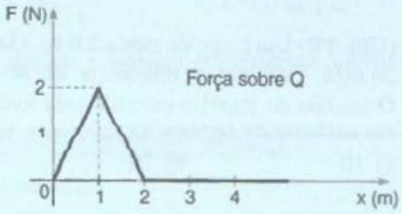


Fig. 2

Assinale as afirmativas corretas:

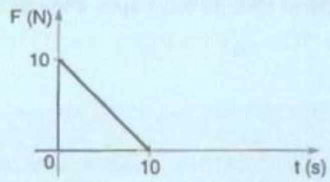
01. A variação da energia cinética de Q é 2,0 J.

02. A variação do momento linear de P é 4,0 – kg m/s.

04. A razão entre a energia cinética de P e a energia cinética de Q é $E_P/E_Q = 1/2$.

08. A velocidade de P é a metade da velocidade de Q.

46. (UNIP-SP) Uma partícula de massa $m = 5,0$ kg parte do repouso, no instante $t = 0$, e descreve uma trajetória retilínea sob ação de uma força resultante, sempre no mesmo sentido e cuja intensidade varia com o tempo conforme o gráfico ao lado:



A partir do instante $t = 10$ s a força se anula.
A energia cinética final da partícula é igual a:

a) $2,5 \cdot 10^2$ J

b) $2,0 \cdot 10^2$ J

c) $1,5 \cdot 10^2$ J

d) $1,0 \cdot 10^2$ J

e) 50 J

47. (E. E. Mauá-SP) Uma bola de massa m = 100 g possui velocidade $\vec{v}_1$, de direção horizontal e módulo 3,00 m/s. Ela recebe um impulso $\vec{I}$ de módulo $5{,}00 \cdot 10^{-1}$ N · s, que altera sua velocidade inicial $\vec{v}_1$ para $\vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_2$ perpendicular a $\vec{v}_1$. Determinar o módulo da velocidade $\vec{v}_2$.

48. (Mackenzie-SP) Um corpo de massa *m*, sujeito ao peso próprio, é lançado do solo com uma velocidade inicial $\vec{v}_0$, que forma um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ com a horizontal. Com relação ao movimento desse corpo, assinale a afirmação correta:

a) No ponto de altura máxima, a componente horizontal da quantidade de movimento é nula.
b) Na trajetória em um par de pontos de mesma altura, a quantidade de movimento é a mesma.
c) Existe um ponto da trajetória em que a aceleração normal é nula.
d) No ponto de altura máxima a quantidade de movimento tem direção horizontal.

8

4. FORÇA MÉDIA

Definimos força média num dado intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ como a força constante capaz de proporcionar ao corpo o mesmo impulso que a força variável aplicada, durante o referido intervalo de tempo.

Se considerarmos o gráfico mostrado na Fig. 7, onde a força $\vec{F}$ tem direção constante, a área sombreada será a medida da intensidade do seu impulso, no intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$.

A força média $\vec{F}_m$ é constante e deve produzir o mesmo impulso que $\vec{F}$. A área retangular hachurada, que é igual a $(F_m \cdot \Delta t)$, representa a intensidade desse impulso.

Evidentemente, essas duas áreas deverão ser iguais.

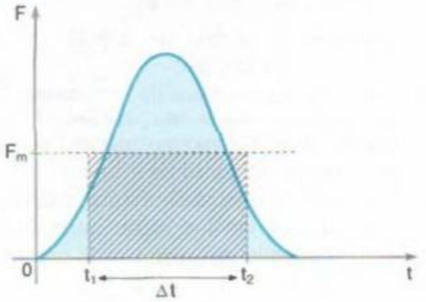


Fig. 7 A área sombreada mede a intensidade do impulso da força variável, enquanto a área do retângulo hachurado mede a intensidade do impulso da força média $\vec{F}_m$. As duas áreas são iguais.

Exemplo:

Sobre um ponto material aplicamos uma força de direção constante e de intensidade variável, como mostra o gráfico da Fig. 8. A intensidade do impulso $\vec{F}$ é numericamente igual à área do triângulo hachurado para os primeiros 4,0 s de movimento.

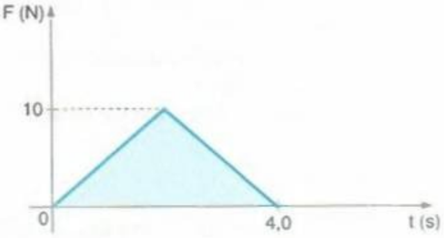


Fig. 8

$$I_{(0\text{ a }4{,}0\text{ s})} \overset{N}{=} \text{área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{4{,}0 \cdot 10}{2}$$

$$\boxed{I_{(0\text{ a }4{,}0\text{ s})} = 20\ \text{N} \cdot \text{s}}$$

O mesmo impulso poderia ser obtido por uma força constante $\vec{F}_m$, de direção e sentido iguais aos de $\vec{F}$ e intensidade $\vec{F}_m$, tal que:

$F_m \cdot \Delta t = I_{(0 \text{ a } 4{,}0 \text{ s})}$

Então:

$F_m \cdot 4{,}0 = 20 \quad \boxed{F_m = 5{,}0 \text{ N}}$

Se representarmos a intensidade de $\vec{F}_m$ no mesmo diagrama da intensidade de $\vec{F}$, em função do tempo, teremos, por comparação de áreas, uma noção exata do seu significado.

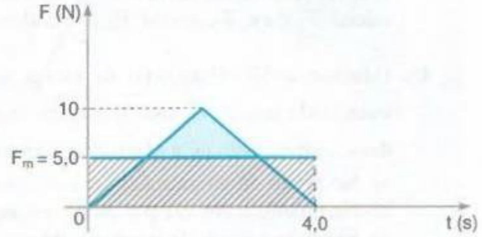


Fig. 9 A área do retângulo mede a intensidade do impulso da força média $\vec{F}_m$. A área do triângulo mede a intensidade do impulso da força variável $\vec{F}$. Ambas as áreas são iguais.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

49. O gráfico representa a intensidade de uma força $\vec{F}$ de direção constante que atua sobre uma partícula de massa m = 2,0 kg.

a) Determine o módulo do impulso de $\vec{F}$ durante os 6 s iniciais.

b) Determine a intensidade da força média $\vec{F}_m$ que, atuando sobre ela durante os 6 s iniciais, produz o mesmo impulso que $\vec{F}$ nesse mesmo intervalo de tempo.

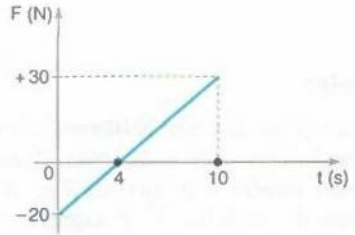
c) Determine a velocidade escalar adquirida pela partícula ao final desse intervalo de tempo, sabendo que em $t_0 = 0$ tínhamos $v_0 = 6{,}0$ m/s.

50. Considere uma partícula sob a ação de uma força $\vec{F}$ de direção constante e sentido variável, conforme mostra o diagrama horário de seu valor algébrico. Determine:

a) o instante em que a força $\vec{F}$ tem o seu sentido invertido;

b) o módulo do impulso durante os 10 s de aplicação da força;

c) o módulo da força média durante os 10 s.



Resolução:

a) No instante em que $\vec{F}$ tem módulo nulo ocorre a inversão de sentido, pois ela deixou de ter valor algébrico negativo e está na iminência de tê-lo positivo. Esse instante, no diagrama, corresponde a t = 4,0 s.

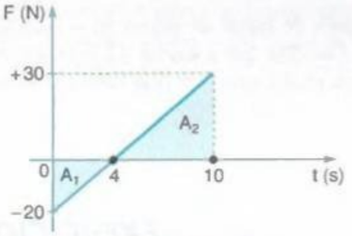
b) Os respectivos valores algébricos dos impulsos são numericamente iguais às áreas sombreadas:

$I_1 \overset{N}{=} -\text{ área } A_1 = -\dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$

$I_1 = -\dfrac{4{,}0 \cdot 20}{2}$ $\boxed{I_1 = -40\ N \cdot s}$

$I_2 \overset{N}{=} \text{área } A_2 = \dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$

$I_2 = \dfrac{6{,}0 \cdot 30}{2}$ $\boxed{I_2 = 90\ N \cdot s}$



$I_{(0\ a\ 10\ s)} = I_1 + I_2$ (soma algébrica) $\boxed{I_{(0\ a\ 10\ s)} = +50\ N \cdot s}$

$I_{(0\ a\ 10\ s)} = -40 + 90$

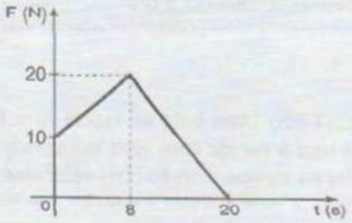
c) A força média $\vec{F}_m$ é constante e produz, em 10 s, o mesmo impulso de módulo 50 N · s:

$I_{(0\ a\ 10\ s)} = F_m \cdot \Delta t$ $F_m = \dfrac{50}{10}$ $\boxed{F_m = 5{,}0\ N}$

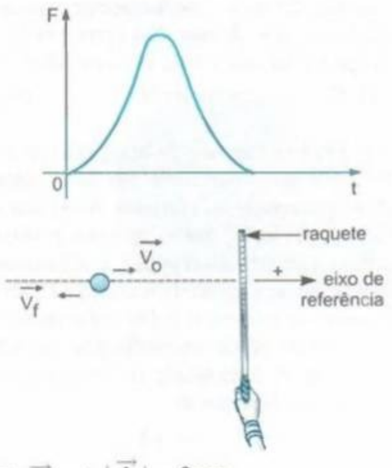
51. Uma partícula descreve uma trajetória retilínea sob ação da força $\vec{F}$ de direção e sentido constantes. Sua intensidade é variável como mostra o seu diagrama horário ao lado. Determine:

a) o módulo do impulso durante os 20 s de aplicação de $\vec{F}$.

b) o módulo da força média durante os 20 s acima.



52 Uma bola de tênis de massa *m* atinge a raquete com velocidade vetorial $\vec{v}$ e, após o impacto, retorna com velocidade vetorial $-\vec{v}$ (mesmo módulo, mesma direção e sentido oposto ao de $\vec{v}$). Sabendo que a raquete ficou em contato com a bola durante o intervalo de tempo Δt, como mostra o diagrama horário ao lado, determine o módulo da força média $\vec{F}_m$, da raquete contra a bola de tênis.



Resolução:

$\vec{Q}_0 = m \cdot \vec{v}_0 = +m \cdot \vec{v}$

$\vec{Q}_f = m \cdot \vec{v}_f = -m \cdot \vec{v}$

Pelo teorema do impulso:

$\vec{I} = \vec{Q}_f - \vec{Q}_0 = (+m \cdot \vec{v}) - (-m \cdot \vec{v}) = 2m \cdot \vec{v} \Longrightarrow |\vec{I}| = 2mv$

$|\vec{I}| = |\vec{F}_m| \cdot \Delta t$

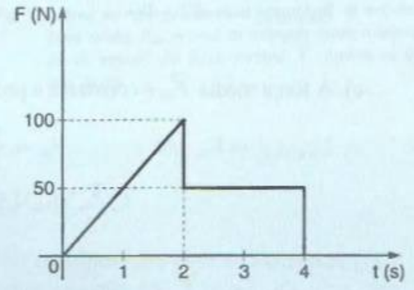
$|\vec{F}_m| \cdot \Delta t = 2mv \Longrightarrow$ $\boxed{|\vec{F}_m| = \dfrac{2mv}{\Delta t}}$

53. Uma bola de bilhar de massa m = 0,25 kg colide contra uma tabela e volta com velocidade de mesmo módulo que a inicial, 12 m/s, na mesma direção, e no sentido oposto. Determine o módulo da força média exercida pela tabela, sabendo que a colisão durou 0,12 s.

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

8

54. (FUVEST-SP) Um corpo de massa m = 10 kg, inicialmente à velocidade escalar $v_0 = 5{,}0$ m/s, é solicitado por uma força $\vec{F}$ que atua na direção e sentido do movimento, e varia com o tempo da forma vista no gráfico.



a) Determine o módulo de uma força constante capaz de produzir no móvel a mesma variação de velocidade que $\vec{F}$ proporcionou, desde que atue na direção e sentido do movimento, durante 4,0 s.

b) Determine a velocidade escalar ao fim dos 4,0 s.

55. (CEVEST-ES) Uma bola de massa m = 0,30 kg é chutada horizontalmente contra uma parede. A bola toca a parede com uma velocidade de módulo 10,0 m/s. Após a colisão, que dura 0,20 s, ela volta na mesma direção com velocidade de mesmo módulo. A intensidade média da força, que atua sobre a bola durante a colisão, em newtons, é:

a) 75,0 b) 45,0 c) 30,0 d) [illegible] e) [illegible]

56. (UFJF-MG) Uma bola de massa 1,0 kg cai verticalmente e atinge o solo horizontal com velocidade de módulo 25 m/s. Imediatamente após a colisão com o solo, a bola tem velocidade vertical de módulo 10 m/s. A interação entre a bola e o solo durou $5{,}0 \cdot 10^{-2}$ s.

A força média que a bola exerceu sobre o solo tem intensidade igual a:

a) 35 N b) 70 N c) $6{,}9 \cdot 10^2$ N d) $7{,}0 \cdot 10^2$ N e) $7{,}1 \cdot 10^2$ N

57. (PUC-SP) Um carrinho de brinquedo de massa 200 g é impulsionado por um balão plástico inflado e acoplado ao carrinho. Ao liberar-se o balão, permitindo que o mesmo esvazie, o carrinho, partindo do repouso, é impulsionado ao longo de uma trajetória retilínea. O intervalo de tempo gasto para o balão esvaziar-se é de 0,4 s e a velocidade adquirida pelo carrinho é de 20 m/s. A intensidade da força média de impulsão em newtons é:

a) 2,0 b) 2,8 c) 4,0 d) 8,8 e) 10,0

58. (FUVEST-SP) Após o chute para cobrança de uma penalidade máxima, uma bola de futebol de massa igual a 0,40 kg sai com velocidade igual a 24 m/s. O tempo de contato entre o pé do jogador e a bola é $3{,}0 \cdot 10^{-2}$ s.

a) Qual a quantidade de movimento adquirida pela bola com o chute?

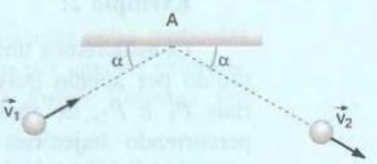
b) Qual a força média aplicada pelo pé do jogador?

59. (CESESP-PE) Uma bola de bilhar de 0,30 kg de massa, movendo-se com uma velocidade de 2,0 m/s, perpendicular à tabela, colide com esta e volta com uma velocidade de mesmo módulo e de mesma direção que a velocidade de incidência. Supondo que o tempo de interação da bola com a tabela foi de 0,10 s, pode-se concluir que o valor da força média exercida pela tabela sobre a bola foi, em *N*, igual a:

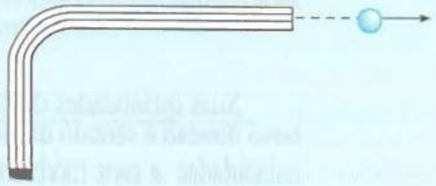
a) 12 b) 15 c) 9 d) 6 e) 3

60. (FEI-SP) Uma partícula de massa m = 10 kg e velocidade constante $|\vec{v}_1| = 20$ m/s choca-se com o anteparo no ponto *A*, passando a ter a velocidade constante $|\vec{v}_2| = 20$ m/s.

Sendo $\alpha = \frac{\pi}{6}$ rad e sabendo-se que o contato da partícula com o anteparo durou 10 s, qual a força média *F* que a partícula aplicou ao anteparo?



61. (FAAP-SP) Uma partícula de massa 2,0 kg, movendo-se no interior de uma canaleta com velocidade escalar constante de $10\sqrt{2}$ m/s, gasta 5,0 s para passar pelo cotovelo indicado na figura. Qual é a força resultante média que atua na partícula ao passar pelo cotovelo?



5. QUANTIDADE DE MOVIMENTO DE UM SISTEMA DE *n* PARTÍCULAS

Consideremos um sistema constituído por *n* partículas, $P_1, P_2, ..., P_n$, cujas massas respectivas são $m_1, m_2, ..., m_n$. Consideremos ainda, num dado instante *t*, as suas respectivas velocidades vetoriais $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ (Fig. 10).

Para cada partícula do sistema, a quantidade de movimento vale:

$$\vec{Q}_i = m_i \cdot \vec{v}_i$$

Definimos quantidade de movimento do sistema como a soma vetorial das quantidades de movimento de cada partícula.

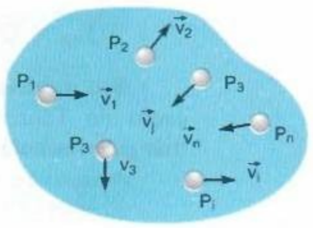


Fig. 10 Sistema de n partículas: $P_1, P_2 ..., P_n$
$\vec{Q}_{sist} = \Sigma m_i \cdot \vec{v}_i$

$$\boxed{\vec{Q}_{sist} = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + ... + m_n \cdot \vec{v}_n}$$

Exemplo 1:

Considere dois carrinhos de massas iguais a *m* e dotados de velocidades vetoriais $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ como na figura 11.

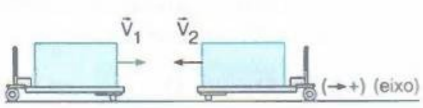


Fig. 11

Adotando-se o sentido positivo indicado na figura e considerando o sistema formado pelos dois carrinhos, sua quantidade de movimento é dada por:

$$\vec{Q}_{sist} = m \cdot \vec{v}_1 + m \cdot \vec{v}_2$$

ou ainda, em valores algébricos:

$$Q_{sist} = m \cdot v_1 - m \cdot v_2$$

Exemplo 2:

Consideremos um sistema constituído por apenas dois pontos materiais P_1 e P_2, de massas m_1 e m_2, percorrendo trajetórias perpendiculares e dotados de velocidades vetoriais constantes $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente (Fig. 12a).

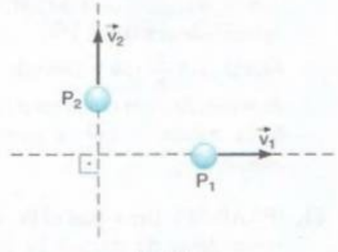


Fig. 12a

Suas quantidades de movimento terão direção e sentido das respectivas velocidades, e seus módulos serão:

a) de P_1, $Q_1 = m_1 \cdot v_1$
b) de P_2, $Q_2 = m_2 \cdot v_2$

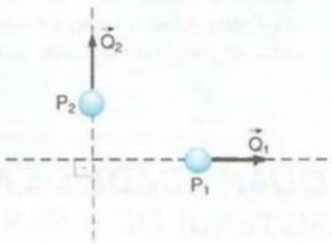


Fig. 12b

A quantidade de movimento do sistema (P_1 e P_2) é dada pela soma vetorial de $\vec{Q}_1$ e $\vec{Q}_2$ e representada na Fig. 12c pelo vetor $\vec{Q}_{sist}$.

$$\vec{Q}_{sist} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2$$

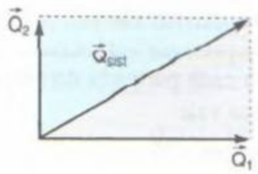


Fig. 12c

Seu módulo é obtido pela aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo hachurado:

$$|\vec{Q}_{sist}|^2 = |\vec{Q}_1|^2 + |\vec{Q}_2|^2$$

6. TEOREMA DO IMPULSO PARA UM SISTEMA DE VÁRIAS PARTÍCULAS

O impulso total sobre um sistema de várias partículas, num dado intervalo de tempo, é igual à variação da quantidade de movimento do sistema de partículas, naquele intervalo de tempo.

$$\vec{I}_{total} = \vec{Q}_{final} - \vec{Q}_{inicial} \quad \text{ou} \quad \vec{I}_{total} = \vec{Q}_f - \vec{Q}_0 \quad \text{ou} \quad \vec{I}_{total} = \Delta\vec{Q}$$

7. SISTEMA ISOLADO

As forças que atuam num sistema de várias partículas são, basicamente, de dois tipos: internas e externas.

São chamadas de *forças internas* aquelas que são trocadas entre as partículas do sistema. Essas forças obedecem ao Princípio da Ação e Reação, isto é, a cada força interna $\vec{F_i}$ corresponde uma outra $-\vec{F_i}$. Observemos que a soma dos impulsos devidos a essas forças é nula.

São chamadas de *forças externas* aquelas que são trocadas pelas partículas do sistema com outros corpos estranhos a ele. São causadas por agentes externos.

O sistema de várias partículas diz-se *isolado de forças externas* (ou simplesmente *isolado*) quando ocorrer uma das situações:

1º) *não atua nenhuma força externa sobre nenhuma de suas partículas;*
2º) *atuam forças externas, mas elas têm resultante nula.*

Quando as forças externas tiverem intensidades desprezíveis em comparação com as forças internas, poderemos considerar o sistema isolado.

Em resumo:

> *Sistema isolado é aquele em que a resultante das forças externas é nula.*

8. CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO PARA UM SISTEMA DE VÁRIAS PARTÍCULAS ISOLADO

Consideremos um sistema constituído de *n* partículas $P_1, P_2, \ldots, P_n$, isolado de forças externas.

Como observamos no item anterior, o impulso total das forças internas é nulo. Por outro lado, estando o sistema isolado, o impulso resultante das forças externas também é nulo. Concluímos, portanto, que o *impulso total* é *nulo*.

Apliquemos o teorema do impulso ao sistema:

$$\vec{I}_{total} = \vec{Q}_{final} - \vec{Q}_{inicial}$$

Sendo $\vec{I}_{total} = \vec{0}$, $\quad \vec{Q}_{final} - \vec{Q}_{inicial} = \vec{0} \qquad \boxed{\vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial}}$

> *A quantidade de movimento num sistema isolado se mantém constante.*

(Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento)

O princípio da conservação da quantidade de movimento constitui um dos grandes princípios de conservação; foi o segundo até agora estudado; o primeiro deles foi o da conservação da energia mecânica para o sistema conservativo.

Observemos ainda o seguinte: embora haja conservação da quantidade de movimento do sistema, forças internas poderão modificar as quantidades de movimento de suas partículas e teremos:

$$\vec{Q}_i = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \ldots + m_n\vec{v}_n$$

$$\vec{Q}_f = m_1\vec{v}\,'_1 + m_2\vec{v}\,'_2 + m_3\vec{v}\,'_3 + \ldots + m_n\vec{v}\,'_n$$

Sendo ainda: $\boxed{\vec{Q}_f = \vec{Q}_i}$

$Q_A = m_A \cdot v_A$ $\quad Q_A = 2{,}0 \cdot (+2{,}0)$ $\quad Q_A = +4{,}0\ kg \cdot m/s$

$Q_B = m_B \cdot v_B$ $\quad Q_B = 1{,}0 \cdot (-1{,}0)$ $\quad Q_B = -1{,}0\ kg \cdot m/s$

$\vec{Q}_{sist} = \vec{Q}_A + \vec{Q}_B$

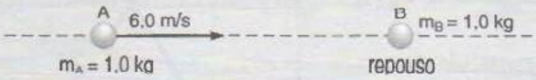
$Q_{sist} = +4{,}0 - 1{,}0$ $\quad \boxed{Q_{sist} = +3{,}0\ kg \cdot m/s}$

Conclusão: A quantidade de movimento do sistema tem a direção da reta *r*; sentido de *A* para *B*, ou seja, o mesmo da orientação da trajetória; módulo igual a 3,0 kg · m/s.

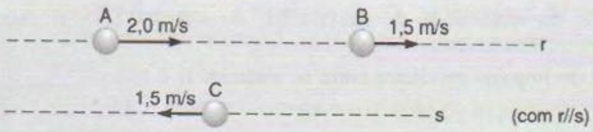
63. Determine o módulo da quantidade de movimento dos sistemas das figuras abaixo:

a)

b)



c)



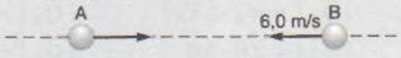
Dados: $m_A = m_B = m_C = 2{,}0$ kg

64. Duas partículas de massas iguais a 1,0 kg possuem velocidades escalares iguais a *v* e percorrem em movimento uniforme uma mesma trajetória retilínea. Sendo de 5,0 kg · m/s o módulo da quantidade de movimento do sistema, calcule:

a) a velocidade escalar *v*;

b) a energia cinética de cada uma.

65. A quantidade de movimento do sistema ao lado é nula. Sendo a massa de *A* igual ao dobro da de *B*, determine o módulo da velocidade de *A*.

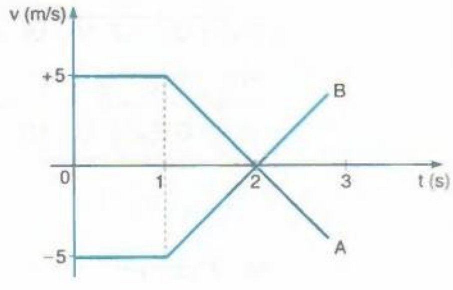


66 Duas partículas, *A* e *B*, têm massas respectivamente iguais a 0,50 kg e 0,25 kg. Elas percorrem uma mesma trajetória orientada, retilínea, e suas velocidades escalares são dadas, em função do tempo, pelo diagrama horário ao lado.

Determine o módulo da quantidade de movimento do sistema A + B nos instantes:

a) $t_1 = 1{,}0$ s;

b) $t_2 = 2{,}0$ s.



Resolução:

a) $Q_{sist} = m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_B$

Usando valores algébricos, no instante $t_1 = 1{,}0$ s:

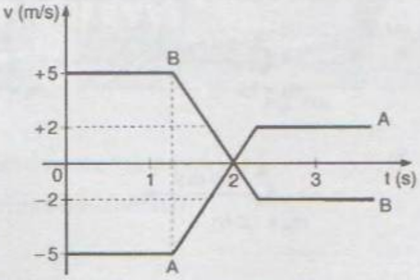
$Q_{sist} = 0{,}50 \cdot (+5{,}0) + 0{,}25 \cdot (-5{,}0) \implies \boxed{Q_{sist} = 1{,}25 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}$

b) Para o instante $t_2 = 2{,}0$ s

$Q_{sist} = m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_B$

$Q_{sist} = 0{,}50 \times (0) + 0{,}25 \times (0) \implies \boxed{Q_{sist} = 0}$

67. Duas partículas, *A* e *B*, percorrem uma mesma trajetória orientada e suas velocidades escalares variam com o tempo, como nos mostra o gráfico ao lado. Suas massas são idênticas e valem *m*.

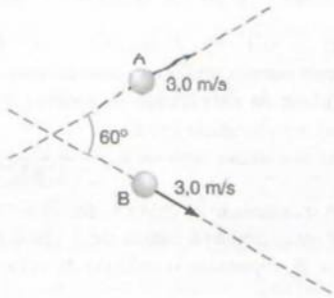


a) Determine a intensidade da quantidade de movimento do sistema (A + B) no instante $t_1 = 1{,}0$ s;

b) Determine a intensidade da quantidade de movimento do sistema (A + B) no instante $t_2 = 3{,}0$ s;

c) Determine a intensidade do impulso resultante entre os instantes t_1 e t_2.

68 Determine o módulo da quantidade de movimento do sistema A + B, sabendo que as partículas têm massas iguais a 2,0 kg.



Resolução:

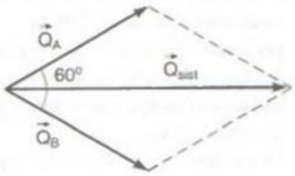
Determinemos, inicialmente, os módulos de cada quantidade de movimento.

$|\vec{Q}_A| = m_A \cdot |\vec{v}_A|$ $\qquad$ $|\vec{Q}_B| = m_B \cdot |\vec{v}_B|$

$|\vec{Q}_A| = 2{,}0 \cdot 3{,}0$ $\qquad$ $|\vec{Q}_B| = 2{,}0 \cdot 3{,}0$

$|\vec{Q}_A| = 6{,}0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ $\qquad$ $|\vec{Q}_B| = 6{,}0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$

Sabemos que: $\vec{Q}_{sist} = \vec{Q}_A + \vec{Q}_B$



$|\vec{Q}_{sist}| = \sqrt{Q_A^2 + Q_B^2 + 2 \cdot Q_A \cdot Q_B \cdot \cos 60°}$

Como $Q_A = Q_B$

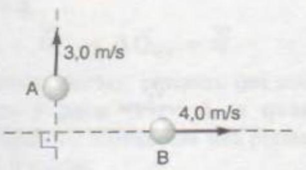
$|\vec{Q}_{sist}| = \sqrt{Q_A^2 + Q_A^2 + 2 \cdot Q_A \cdot Q_A \cdot \frac{1}{2}}$

$|\vec{Q}_{sist}| = \sqrt{3 \cdot Q_A^2} = Q_A\sqrt{3}$

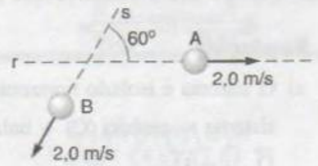
$\boxed{|\vec{Q}_{sist}| = 6{,}0\sqrt{3} \text{ kg} \cdot \text{m/s}}$

69. Determine o módulo da quantidade de movimento dos sistemas formados pelas partículas *A* e *B* de massas iguais a 1,0 kg.

a)



b)

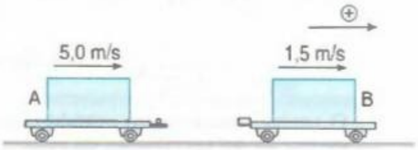


70 Considere os dois carrinhos abaixo. Suas velocidades escalares são constantes e as trajetórias são retilíneas e coincidentes. Num dado instante, o carrinho *A* alcança o *B* e nele fica engatado. Determine:

a) o módulo da quantidade de movimento inicial do sistema;

b) o módulo da velocidade final do conjunto.

São dados: $m_A = 10$ kg e $m_B = 4{,}0$ kg.



Resolução:

a) $Q_i = m_A v_A + m_B v_B$ $\quad Q_i = 10 \cdot 5{,}0 + 4{,}0 \cdot 1{,}5$ $\quad \boxed{Q_i = 56 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}$

b) Quando *A* alcança *B* e nele se engata, há uma troca de forças internas ao conjunto, mas nenhuma força externa horizontal nele atua. O sistema está isolado de forças externas, logo:

$\vec{Q}_f = \vec{Q}_i$ (conservação da quantidade de movimento)

Formando um único corpo, os carrinhos engatados terão velocidade $\vec{v}$ e massa $m_A + m_B$.

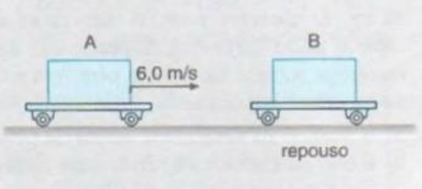
$\vec{Q}_f = (m_A + m_B) \cdot \vec{v}$

Em relação ao eixo orientado:

$Q_{final} = Q_{inicial}$

$(m_A + m_B) \cdot v_f = Q_i$ $\quad (10 + 4{,}0) \cdot v_f = 56$ $\quad 14 \cdot v_f = 56$ $\quad \boxed{v_f = 4{,}0 \text{ m/s}}$

71. Os carrinhos *A* e *B* têm massas iguais. Determine o módulo da velocidade do conjunto após a colisão, sabendo que eles permaneceram unidos.



72 Um canhão está rigidamente preso a uma carreta que se move com velocidade constante $v_1 = 2{,}08$ m/s sobre trilhos retos e horizontais, como mostra a figura. Em determinado instante, o canhão dispara uma bala de massa m = 2,0 kg, que sai com velocidade de 300 m/s *em relação ao solo*. A massa do canhão mais a carreta é igual a 98 kg.

a) Calcular o módulo da velocidade do canhão após o tiro.
b) Após o tiro o canhão move-se no mesmo sentido que antes do tiro?

Resolução:

a) O sistema é isolado horizontalmente

sistema = canhão (C) + bala (B)

$\vec{Q}_{sist_f} = \vec{Q}_{sist_{in}}$

$$\left.\begin{aligned} Q_{sist_{in}} &= (m_C + m_B) \cdot v_1 \\ Q_{sist_f} &= m_C \cdot v_C + m_B \cdot v_B \end{aligned}\right\} m_C \cdot v_C + m_B \cdot v_B = (m_C + m_B) \cdot v_1$$

Adotemos um eixo de referência para as velocidades:

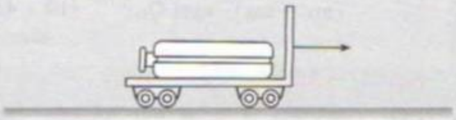
$98 \cdot v_C + 2{,}0 \times 300 = (98 + 2{,}0) \cdot 2{,}08$

$$\boxed{v_C = -4{,}0 \text{ m/s}}$$

b) O canhão move-se em sentido contrário ao do eixo de referência, isto é, em sentido oposto ao do movimento da bala.

73. Os cinco vagões da figura a seguir são idênticos e a massa de cada um vale m. A velocidade escalar do conjunto é constante e vale v. Num dado instante, explode uma bomba colocada no engate E e este se abre, dividindo a composição em dois conjuntos. Os dois vagões da frente adquirem velocidade de módulo duas vezes maior que os outros três. Determine a velocidade escalar de cada uma das partes. Admita que os trilhos sejam retos e horizontais. Despreze as forças dissipativas.

74. (PUC-SP) Um carregador joga uma mala de massa 20 kg com velocidade horizontal 5,0 m/s sobre um carrinho parado de massa 80 kg. O carrinho pode deslizar sem atrito sobre o plano horizontal. Supondo que a mala escorrega sobre o carrinho e pára (em relação ao carrinho), determine:



a) o módulo da velocidade adquirida pelo conjunto mala-carrinho;
b) a energia cinética adquirida pelo conjunto mala-carrinho.

75. (FUVEST-SP) Um recipiente de metal, com X kg de massa, desliza inicialmente vazio sobre uma superfície horizontal, com velocidade 1,0 m/s. Começa a chover verticalmente e, após certo tempo, a chuva pára. Depois da chuva, o recipiente contém 1,0 kg de água e se move com velocidade 2/3 m/s. Desprezando o atrito, pergunta-se: quanto vale X?

Resolução:

O módulo da quantidade de movimento do recipiente (carrinho) vazio (Fig. a), vale:

$Q_{inicial} = m_r \cdot v_0 \qquad Q_{inicial} = X \cdot 1{,}0$

Como a chuva é vertical, ela não produzirá nenhum impulso externo horizontal no sistema.

$\vec{I}_{hor} = \vec{0} \longrightarrow \Delta\vec{Q}_{hor} = \vec{0}$

Podemos concluir, portanto, que assim que a chuva parar (Fig. c), a quantidade horizontal de movimento terá permanecido igual à inicial.

$Q_{final} = Q_{rec} + Q_{água}$

$Q_{final} = m_r \cdot v_f + m_a \cdot v_f$

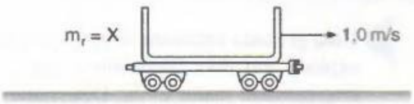
$Q_{final} = X \cdot \frac{2}{3} + 1{,}0 \cdot \frac{2}{3}$

Pelo Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento:

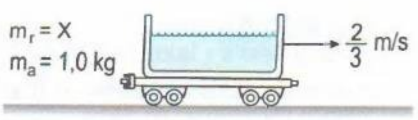
$Q_{final} = Q_{inicial}$

$X \cdot \frac{2}{3} + 1{,}0 \cdot \frac{2}{3} = X \cdot 1{,}0$

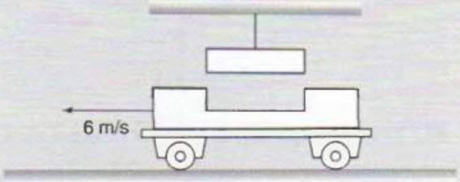
$2{,}0 \cdot X + 2{,}0 = 3{,}0 \cdot X$ $\boxed{X = 2{,}0 \text{ kg}}$



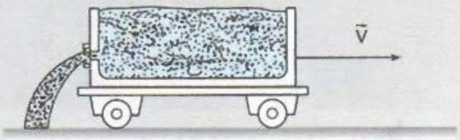
Está chovendo.



76. (FESP-SP) No instante em que o carrinho, com velocidade de 6,0 m/s, passa debaixo do tijolo suspenso, corta-se o fio de suspensão. O tijolo cai no encaixe do carrinho e os dois continuam juntos com velocidade de módulo v. Sabendo que o carrinho e o tijolo têm massas iguais, determine o valor de v.



77. Um carrinho está cheio de areia e a massa total vale m. O conjunto tem velocidade de módulo constante v_0 e trajetória horizontal. Num dado instante t_0 abre-se um pequeno orifício na traseira do carrinho e a areia começa a vazar para trás. Nota-se que os grãos de areia ao tocarem o solo permanecem em repouso.



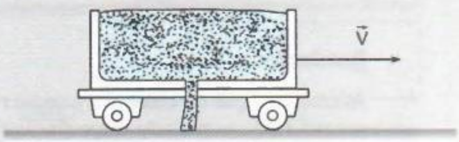
No instante t_1 fecha-se o orifício: o conjunto tem agora uma velocidade de módulo v_1 e sua massa é m/2.

a) Determine o módulo da velocidade v_1 em função de v_0.

b) Esboce o diagrama do módulo da quantidade de movimento do carrinho em função do tempo. Indique no gráfico t_0 e t_1.

c) Esboce o diagrama do módulo da velocidade do carrinho em função do tempo.

78. Retome a questão anterior e refaça seus três itens, porém mude o orifício para a parte inferior do carrinho. Observe que os grãos de areia, ao deixar o carrinho, mantêm a velocidade horizontal deste.



79 Uma granada encontra-se em repouso num solo plano e horizontal. Num dado instante, ela explode em dois fragmentos: um de massa *m* e outro de massa 3 m. A velocidade do fragmentado maior é $\vec{v}_0$. Determine a velocidade do menor.

Resolução:

$\vec{Q}_i = \vec{0}$ (a granada estava em repouso)

$\vec{I} = \vec{0}$ (o sistema é isolado de forças externas)

$\vec{Q}_f = \vec{Q}_i$ e, então, $\vec{Q}_f = \vec{0}$

$\vec{Q}_f = 3\ m \cdot \vec{v}_0 + m \cdot \vec{v} = \vec{0}$

$m \cdot \vec{v} = -3\ m \cdot \vec{v}_0$

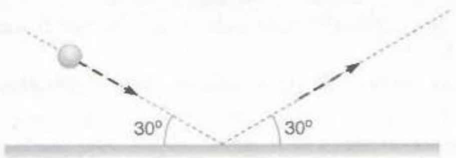
$\boxed{\vec{v} = -3\ \vec{v}_0}$

Conclusão: Após a explosão, o fragmento menor adquire velocidade de módulo $3\ v_0$ e sentido contrário ao do maior.

80. Um corpo em repouso sofre uma explosão e se divide em três fragmentos de massas iguais. Dois deles adquiriram movimentos de sentidos opostos, conforme mostra a figura. Determine o módulo, direção e sentido da velocidade do terceiro fragmento.

81. Retome a questão anterior e refaça-a para a configuração abaixo (após a explosão).

82 Um objeto de 15,0 kg de massa, com velocidade de módulo 10,0 m/s, atinge uma placa de aço lisa horizontal formando com ela um ângulo de 30°. Ricocheteia com velocidade do mesmo módulo e mesmo ângulo. Determine o módulo e a direção da variação da sua quantidade de movimento.



Resolução:

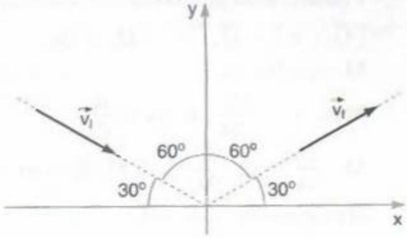
Adotemos o par de eixos *x* e *y* como referenciais. Durante a colisão haverá apenas a força normal e o peso atuando sobre ela e ambas terão a direção *y*. Haverá variação da quantidade de movimento vertical.

1º) Na direção x:

$Q_i = m \cdot v_i \cdot \cos 30°$

$Q_f = m \cdot v_f \cdot \cos 30°$

Como $v_i = v_f$, concluímos que $Q_i = Q_f$ e não haverá variação da quantidade de movimento horizontal.



2º) Na direção y:

$Q_i = -m \cdot v_i \cdot \cos 60° =$

$= -(15,0) \cdot (10,0) \cdot (0,500)$

$Q_i = -75,0 \text{ N} \cdot \text{s}$

$Q_f = +m \cdot v_f \cdot \cos 60° =$

$= +(15,0) \cdot (10,0) \cdot (0,500)$

$Q_f = +75,0 \text{ N} \cdot \text{s}$

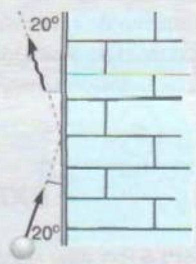
A variação da quantidade de movimento terá a direção vertical y e módulo dado por:

$\Delta Q = Q_f - Q_i \qquad \Delta Q = (+75,0) - (-75,0) \qquad \boxed{\Delta Q = 150 \text{ N} \cdot \text{s}}$

8

83. Uma bola de borracha de massa 1,0 kg é lançada contra a parede lisa com uma velocidade inicial horizontal de módulo 3,0 m/s e direção de 20° com ela.

Após a colisão, sua velocidade tinha o mesmo módulo e mantinha o mesmo ângulo na reflexão: 20° com a parede. Determine o módulo da variação da quantidade de movimento da bola. Use a tabela trigonométrica no final do livro.



84 Um homem de massa m está na ponta de uma carreta de massa M e comprimento L, e ambos se encontram inicialmente em repouso em relação ao solo.

Num dado instante, o homem começa a se movimentar para a direita. Calcule o deslocamento da carreta durante o movimento do homem. Considere desprezíveis os atritos nas rodas.

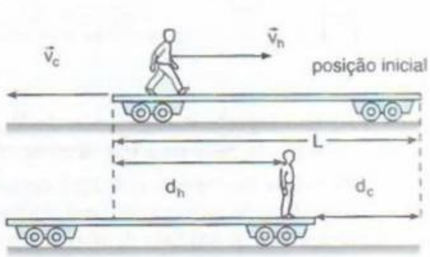
Resolução:

Inicialmente, a quantidade total de movimento do sistema é nula:

$\vec{Q}_i = \vec{Q}_h + \vec{Q}_c = \vec{0}$

Durante o movimento do homem não há forças externas atuando no sistema, e portanto ele é isolado. A quantidade de movimento se conserva nula:

$\vec{Q}_h + \vec{Q}_c = \vec{0} \qquad \vec{Q}_c = -\vec{Q}_h$



Assim, se o homem se desloca para a direita, a carreta se desloca para a esquerda. Considerando em módulo as quantidades de movimento:

$|\vec{Q}_c| = |-\vec{Q}_h| \qquad Q_c = Q_h$

$M \cdot v_c = m \cdot v_h$

Mas: $v_c = \dfrac{d_c}{\Delta t}$ e $v_h = \dfrac{d_h}{\Delta t}$

$M \cdot \dfrac{d_c}{\Delta t} = m \cdot \dfrac{d_h}{\Delta t} \qquad M \cdot d_c = m \cdot d_h \quad \text{(I)}$

Da figura: $d_c + d_h = L$

$d_h = L - d_c \quad \text{(II)}$

Substituindo (II) em (I):

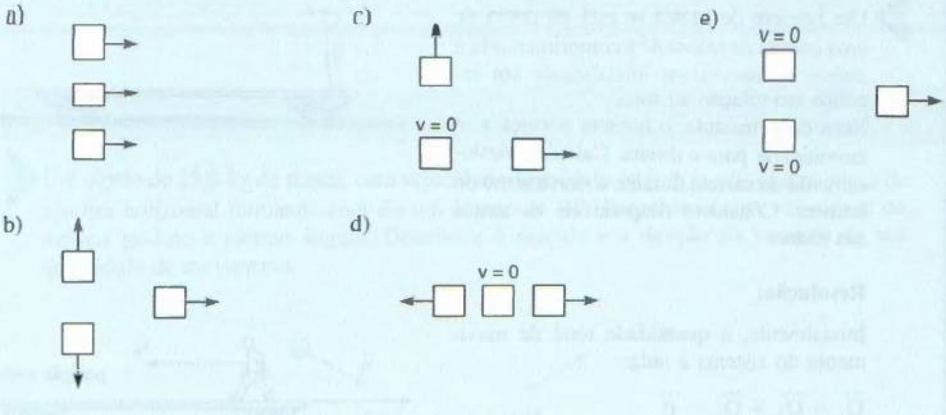
$M \cdot d_c = m(L - d_c) \qquad M \cdot d_c = mL - md_c \qquad d_c(M + m) = mL \qquad d_c = \dfrac{mL}{m + M}$

85. Um pescador está em pé numa ponta de sua canoa de 6,0 m de comprimento, que repousa nas águas tranqüilas de um lago. Num dado instante, o pescador começa a se movimentar sobre a canoa até atingir a outra extremidade. Sendo a massa da canoa igual ao triplo da do pescador, determine:

a) o deslocamento da canoa durante o movimento do pescador;
b) o deslocamento do pescador, em relação às águas.

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

86. (FUVEST-SP) Sobre uma superfície horizontal e sem atrito, um objeto, inicialmente em repouso, explode em três partes idênticas. Qual das figuras abaixo melhor representa o fenômeno após a explosão?



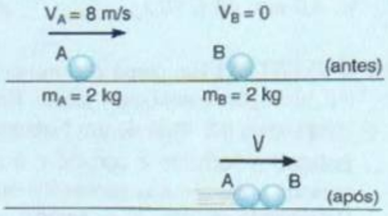
87. (UF-PA) Um foguete intergaláctico desloca-se no vácuo em movimento retilíneo uniforme. Em dado instante, ele ejeta para trás uma de suas secções. Pode-se afirmar que:

a) a velocidade do foguete é sempre crescente.
b) a quantidade de movimento final do sistema é nula.
c) a variação da quantidade de movimento total do sistema é nula.
d) não há conservação da quantidade de movimento.
e) a quantidade de movimento final do sistema troca de sinal.

88. Duas partículas iguais deslocam-se em uma mesma trajetória retilínea em sentidos opostos com velocidades de módulos iguais. Sejam E_c e $\vec{Q}$, respectivamente, a energia cinética e a quantidade de movimento de uma das partículas. Para o sistema constituído pelas duas partículas, a energia cinética total e a quantidade de movimento total serão respectivamente iguais a:

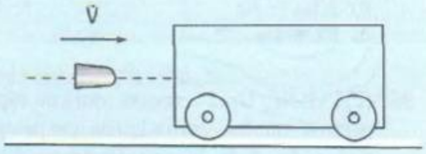
a) $\frac{1}{2}E_c$ e $\vec{0}$
b) $2E_c$ e $\vec{0}$
c) $2E_c$ e $2\vec{Q}$
d) $4E_c$ e $2\vec{Q}$
e) $4E_c$ e $\vec{0}$

89. (Mackenzie-SP) Um corpo *A* de 2 kg que se movimenta sobre uma superfície horizontal sem atrito, com 8 m/s, choca-se com outro *B* de mesma massa que se encontra em repouso nessa superfície. Após o choque, os corpos *A* e *B* se mantêm juntos com velocidade de:



a) 2 m/s
b) 4 m/s
c) 6 m/s
d) 8 m/s
e) 10 m/s

90. (VUNESP-SP) Um bloco de madeira de 6,0 kg, dotado de pequenas rodas com massa desprezível, repousa sobre trilhos retilíneos. Quando uma bala de 12 g disparada horizontalmente e na mesma direção dos trilhos se aloja no bloco, o conjunto (bloco + bala) desloca-se 0,70 m em 0,50 s, com velocidade praticamente constante. A partir destes dados, pode-se concluir que o módulo da velocidade da bala é, em m/s, aproximadamente igual a:

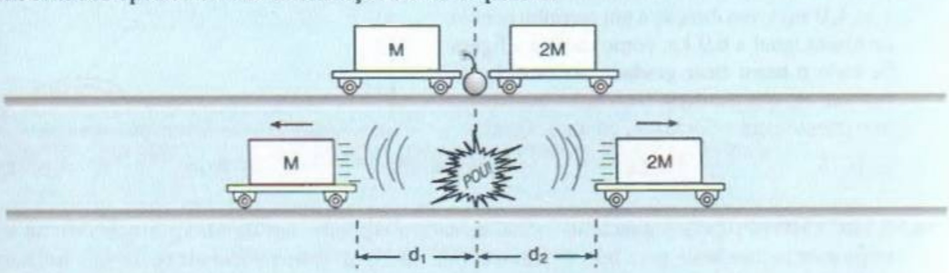


a) 500
b) 600
c) 700
d) 800
e) 900

91. (UNEB-BA) Um objeto em repouso se fragmenta em dois pedaços iguais durante uma explosão. Um dos fragmentos se movimenta para a direita a 10 m/s. Pode-se afirmar que o outro fragmento movimentar-se-á:

a) para a esquerda a 10 m/s.
b) para a esquerda a 5 m/s.
c) para baixo a 10 m/s.
d) para baixo a 5 m/s.
e) para a direita a 5 m/s.

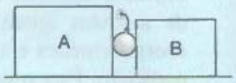
92. (U. F. Viçosa-MG) Dois carrinhos inicialmente em repouso, de massas *M* e 2*M*, são impulsionados em sentidos opostos devido à detonação de um explosivo:



Desprezando as forças de atrito, a relação entre as distâncias percorridas pelos carrinhos num intervalo de tempo Δt é:

a) $d_1 = d_2$
b) $d_2 = 2d_1$
c) $d_1 = 2d_2$
d) $d_1 = 3d_2$
e) $d_2 = 3d_1$

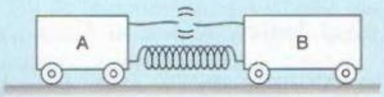
93. (PUC-RJ) Uma pequena carga explosiva de massa desprezível é colocada entre dois corpos *A* e *B*, onde $m_A = 2\,m_B$, inicialmente em repouso, sobre uma superfície perfeitamente plana e sem atrito.



Quando o explosivo é detonado, ele libera 60 J de energia, que é integralmente transferida aos corpos *A* e *B*.
Sabendo que, após a explosão, o módulo da velocidade de *A* é 2,0 m/s, podemos afirmar que o módulo da velocidade de *B*, a energia cinética de *A* e de *B* após a explosão são, respectivamente:

a) 2,0 m/s, 20 J, 40 J
b) 4,0 m/s, 30 J, 30 J
c) 4,0 m/s, 20 J, 40 J
d) 2,0 m/s, 15 J, 45 J
e) 4,0 m/s, 40 J, 20 J

94. (FUVEST-SP) Um corpo *A* com massa *M* e um corpo *B* com massa 3 *M* estão em repouso sobre um plano horizontal sem atrito. Entre eles existe uma mola, de massa desprezível, que está comprimida por meio de um barbante tensionado que mantém ligados os dois corpos. Num dado instante, o barbante é cortado e a mola distende-se, empurrando as duas massas, que dela se separam e passam a se mover livremente.
Designando-se por *E* a energia cinética, pode-se afirmar que:



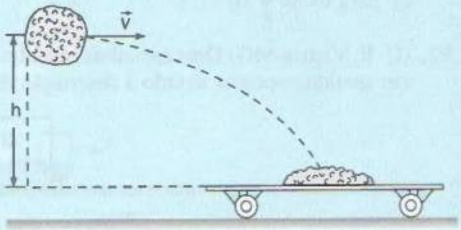
a) $9\,E_A = E_B$
b) $3\,E_A = E_B$
c) $E_A = E_B$
d) $E_A = 3\,E_B$
e) $E_A = 9\,E_B$

95. (FAAP-SP) Uma aeronave viaja no espaço com velocidade v_0 e tem massa *m*. Num dado instante, parte-se em duas partes iguais que passam a viajar na mesma direção da aeronave antes do acidente. Se a velocidade de uma das partes é o dobro da velocidade da outra, quais são os módulos das velocidades finais?

96. (ITA-SP) Uma bomba tem velocidade $\vec{v_0}$ no instante em que explode e se divide em dois fragmentos, um de massa *m* e outro de massa 2 *m*. A velocidade do fragmento menor, logo após a explosão, é igual a $5\,\vec{v_0}$. Calcular a velocidade do outro fragmento, desprezando a ação da gravidade e a resistência do ar, durante a explosão.

a) $\vec{v} = -\frac{5}{2}\,\vec{v_0}$
b) $\vec{v} = \frac{5}{2}\,\vec{v_0}$
c) $\vec{v} = -\vec{v_0}$
d) $\vec{v} = \vec{v_0}$
e) $\vec{v} = -\frac{2}{5}\,\vec{v_0}$

97. (FUVEST-SP) Uma quantidade de barro de massa 2,0 kg é atirada de uma altura h = 0,45 m, com uma velocidade horizontal v = 4,0 m/s, em direção a um carrinho parado, de massa igual a 6,0 kg, como mostra a figura. Se todo o barro ficar grudado no carrinho no instante em que o atingir, o carrinho iniciará um movimento com velocidade, em m/s, igual a:

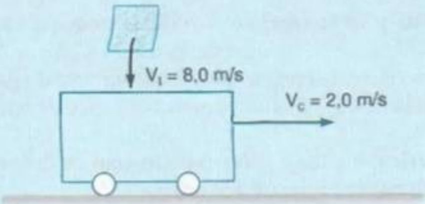


a) 0,75
b) 1,0
c) 1,25
d) 2,0
e) 3,0

98. (UNICAMP-SP) Dois patinadores inicialmente em repouso, um de 36 kg e outro de 48 kg, se empurram mutuamente para trás. O patinador de 48 kg sai com velocidade de 18 km/h. Despreze o atrito.

a) Qual a velocidade com que sai o patinador de 36 kg?
b) Qual o trabalho total realizado por esses dois patinadores?

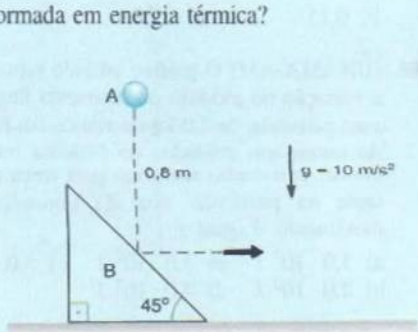
99. Um carrinho de massa 1,5 kg está se movimentando sobre um plano horizontal com velocidade constante de módulo 2,0 m/s, e um tijolo de massa 0,50 kg está caindo segundo a vertical, conforme indica a figura:



a) Qual será o módulo da quantidade de movimento do sistema constituído pelo tijolo e pelo carrinho no instante em que a velocidade do tijolo tem módulo igual a 8,0 m/s?
b) Admitindo que o tijolo se encaixe no carrinho, haverá conservação de quantidade de movimento? Em que direção?
c) Qual será o módulo da velocidade do carrinho levando o tijolo a bordo?

100. (UNICAMP-SP) Um carrinho, de massa $m_1 = 80$ kg, desloca-se horizontalmente com velocidade $v_1 = 5{,}0$ m/s. Um bloco de massa $m_2 = 20$ kg cai verticalmente sobre o carrinho, de uma altura muito pequena, aderindo a ele.
a) Com que velocidade final move-se o conjunto?
b) Que quantidade de energia mecânica foi transformada em energia térmica?

101. Na figura temos um plano horizontal sem atrito e um bloco *B*, em repouso. Uma pequena esfera de massa *m* é abandonada em repouso de certa altura e, após uma queda livre, colide com o prisma, perdendo 75% de sua energia cinética. Sabe-se que, imediatamente após a colisão, a esfera *A* tem velocidade horizontal. Sabendo que o bloco *B* tem massa $\left(\frac{m}{2}\right)$, após a colisão as velocidades adquiridas por *A* e *B* são, respectivamente:



a) 8 m/s; 16 m/s
b) 4 m/s; 8 m/s
c) 2 m/s; 4 m/s
d) 1 m/s; 2 m/s
e) 2 m/s; 1 m/s

EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

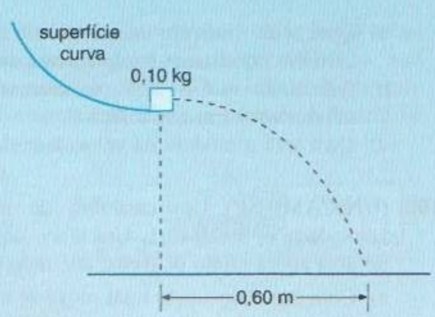
102. (FUVEST-SP) Um objeto de 4,0 kg, deslocando-se sobre uma superfície horizontal com atrito constante, passa por um ponto onde possui 50 J de energia cinética, e pára dez metros adiante. Adote $g = 10$ m/s^2
a) Qual o coeficiente de atrito entre o ponto e a superfície?
b) Qual o valor do módulo do impulso aplicado sobre o corpo para detê-lo?

103. (ITA-SP) Um avião a jato se encontra na cabeceira da pista com a sua turbina ligada e com os freios acionados, que o impedem de se movimentar. Quando o piloto aciona a máxima potência, o ar é expelido a uma razão de 100 kg por segundo, a uma velocidade de 600 m/s em relação ao avião. Nessas condições:

a) a força transmitida pelo ar expelido ao avião é nula, pois um corpo não pode exercer força sobre si mesmo.
b) as rodas do avião devem suportar uma força horizontal igual a 60 kN.
c) se a massa do avião é de $7,0 \times 10^3$ kg, o coeficiente de atrito mínimo entre as rodas e o piso deve ser de 0,20.
d) não é possível calcular a força sobre o avião com os dados fornecidos.
e) nenhuma das afirmativas acima é verdadeira.

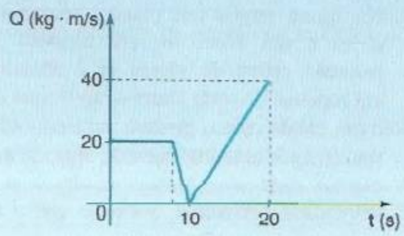
104. (UNESP-SP) Um bloco de massa 0,10 kg desce ao longo da superfície curva mostrada na figura, e cai num ponto situado a 0,60 m da borda da superfície, 0,40 s depois de abandoná-la.

Desprezando-se a resistência oferecida pelo ar, pode-se afirmar que o módulo (intensidade) da quantidade de movimento do bloco, no instante em que abandona a superfície curva é, em kg · m/s,



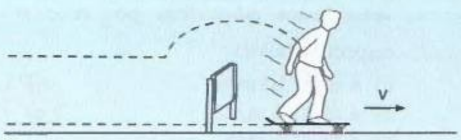
a) 0,10 c) 0,20 e) 0,30
b) 0,15 d) 0,25

105. (UNAMA-AM) O gráfico ao lado representa a variação do módulo do momento linear de uma partícula, de 2,0 kg de massa, em função do tempo em unidades do Sistema Internacional. O trabalho realizado pela força resultante na partícula, nos 20 segundos de movimento, é igual a:



a) $1,0 \cdot 10^2$ J c) $3,0 \cdot 10^2$ J e) $5,0 \cdot 10^2$ J
b) $2,0 \cdot 10^2$ J d) $4,0 \cdot 10^2$ J

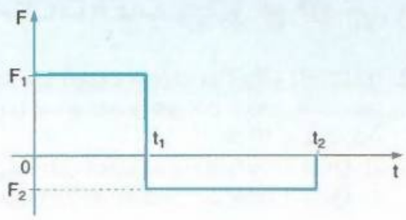
106. (FUVEST-SP) Um menino de 40 kg está sobre um *skate* que se move com velocidade constante de 3,0 m/s numa trajetória retilínea e horizontal. Defronte de um obstáculo ele salta e após 1,0 s cai sobre o *skate*, que durante todo o tempo mantém a velocidade de 3,0 m/s.



Desprezando-se as eventuais forças de atrito, pede-se:

a) a altura que o menino atingiu no seu salto, tomando como referência a base do *skate*.
b) a quantidade de movimento do menino no ponto mais alto de sua trajetória.

107. (ITA-SP) A figura mostra o gráfico da força resultante agindo numa partícula de massa *m*, inicialmente em repouso. No instante t_2 a velocidade da partícula, v_2, será:



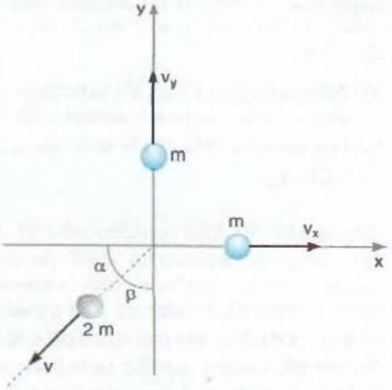
a) $V_2 = [(F_1 + F_2)t_1 - F_2t_2]/m$
b) $V_2 = [(F_1 - F_2)t_1 - F_2t_2]/m$
c) $V_2 = [(F_1 - F_2)t_1 + F_2t_2]/m$
d) $V_2 = (F_1t_1 - F_2t_2)/m$
e) $V_2 = [(t_2 - t_1)(F_1 - F_2)]/2m$

108. (ITA-SP) Todo caçador, ao atirar com um rifle, mantém a arma firmemente apertada contra o ombro evitando assim o "coice" da mesma. Considere que a massa do atirador é 95,0 kg, a massa do rifle é 5,00 kg, e a massa do projétil é 15,0 g, o qual é disparado a uma velocidade de $3{,}00 \times 10^4$ cm/s. Nestas condições, a velocidade de recuo do rifle (v_r), quando se segura muito frouxamente a arma, e a velocidade de recuo do atirador (v_a), quando ele mantém a arma firmemente apoiada no ombro, serão respectivamente:

a) 0,90 m/s; $4{,}7 \times 10^{-2}$ m/s
b) 90,0 m/s; 4,7 m/s
c) 90,0 m/s; 4,5 m/s
d) 0,90 m/s; $4{,}5 \times 10^{-2}$ m/s
e) 0,10 m/s; $1{,}5 \times 10^{-2}$ m/s

109 Um navio em repouso explode, partindo-se em três pedaços. Dois deles, que têm a mesma massa, saem em direções perpendiculares entre si, com velocidades de módulos iguais a 70 m/s. O terceiro pedaço tem massa igual ao dobro da dos outros dois. Qual o módulo e a direção de sua velocidade?

Resolução:



$\vec{Q}_i = \vec{0}$ (sistema em repouso inicial)

Como $\vec{I} = \vec{0}$, temos $\vec{Q}_f = \vec{Q}_i = \vec{0}$.

Adotemos um par de eixos x e y para referencial.

1º) Na direção x devemos ter:

$\vec{Q}_f = \vec{0}$

$m \cdot v_x - 2m \cdot v \cdot \cos\alpha = 0$

$v_x = 2v \cdot \cos\alpha$ (I)

2º) Na direção y devemos ter:

$\vec{Q}_f = \vec{0}$

$m \cdot v_y - 2m \cdot v \cdot \cos\beta = 0$

$v_y = 2 \cdot v \cdot \cos\beta$ (II)

Sendo $v_x = v_y$ concluímos que: $2v \cdot \cos\alpha = 2v \cdot \cos\beta$

$\alpha = \beta = 45°$

Voltando em (I):

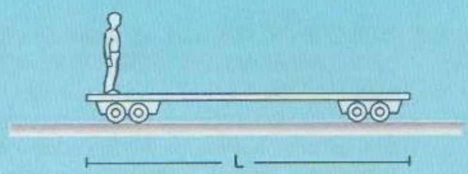
Sendo $v_x = 70$ m/s, obtemos $70 = 2v \cdot \cos 45°$.

Da tabela no final do livro tiramos $\cos 45° \cong 0{,}70$

$70 \cong 2v \cdot (0{,}70)$ $v \cong 50$ m/s

O terceiro pedaço adquire velocidade de módulo de aproximadamente 50 m/s e direção de 135° com cada um dos outros dois.

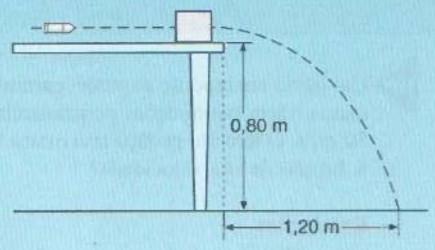
110. (UF-GO) Um homem de massa *m* encontra-se na extremidade de um vagão-prancha em repouso. O vagão tem massa 9 m e comprimento *L*. O homem caminha até a extremidade oposta do vagão e pára.



Desprezando-se o atrito entre o vagão e os trilhos, o deslocamento do homem em relação ao solo é:

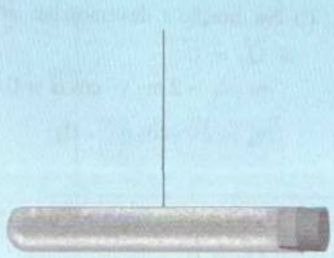
a) $\frac{L}{10}$ b) L c) $\frac{L}{3}$ d) $\frac{9L}{10}$ e) $\frac{L}{9}$

111. (UNESP) Para medir a velocidade de uma bala, preparou-se um bloco de madeira de 0,990 kg, que foi colocado a 0,80 m do solo, sobre uma mesa plana, horizontal e perfeitamente lisa, como mostra a figura.
A bala, disparada horizontalmente contra o bloco em repouso, alojou-se nele, e o conjunto (bala + bloco) foi lançado com velocidade *V*, atingindo o solo a 1,20 m da borda da mesa.



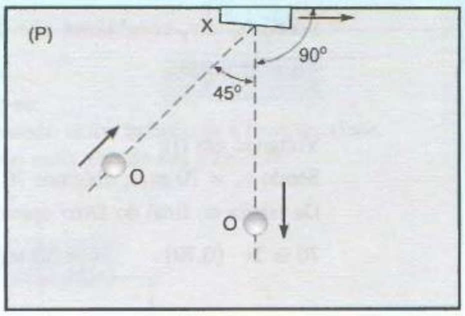
a) Adotando $g = 10\ m/s^2$, determine a velocidade *V* do conjunto, ao abandonar a mesa. (Despreze a resistência e o empuxo do ar.)
b) Determine a velocidade com que a bala atingiu o bloco, sabendo-se que sua massa é igual a 0,010 kg.

112. (Mackenzie-SP) Um pequeno tubo de ensaio está suspenso por um fio ideal, de comprimento 0,50 m, que tem uma extremidade presa ao pino *O*. O tubo de 100 g está cheio de gás e está fechado por uma rolha de 50 g. Aquecendo o tubo, a rolha salta com velocidade de módulo *v*. A menor velocidade *v* da rolha que faz com que o tubo descreva uma volta completa em torno de *O* é: (Despreze a massa do gás.)

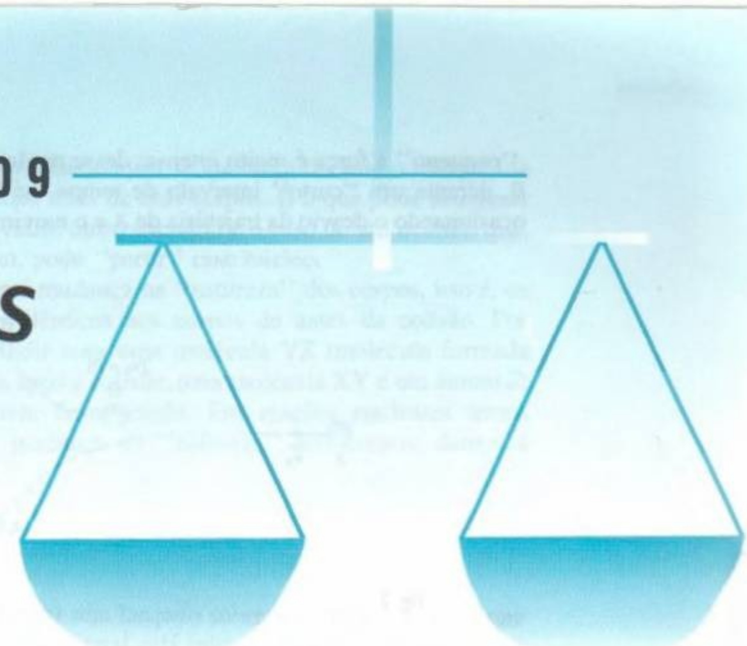


a) 2,0 m/s b) 4,0 m/s c) 5,0 m/s d) 8,0 m/s e) 10,0 m/s

113. (FCMSC-SP) Sobre uma superfície horizontal, uma esfera (*O*) se move com velocidade (*v*) constante e colide elasticamente com o bloco (*X*), seguindo a trajetória tracejada. O bloco está apoiado em uma parede (*P*) perpendicular à superfície. A massa do bloco *X* é igual à massa da esfera.
Desprezando-se os atritos, qual é o módulo da velocidade do bloco após a colisão? (Após a colisão, o bloco desliza rente à parede.)



a) v b) 2v c) $\frac{v}{2}$ d) $v\sqrt{2}$ e) $\frac{v\sqrt{2}}{2}$



CAPÍTULO 9

COLISÕES

1. O QUE SÃO COLISÕES

Consideremos dois corpos que se aproximam e durante um "curto" intervalo de tempo interagem fortemente, de modo que tanto antes como depois desse intervalo de tempo as forças de interação entre eles são nulas ou desprezíveis. Diremos que, nesse intervalo de tempo, houve uma *colisão* (ou um *choque*) entre os corpos. Como exemplos podemos citar o chute numa bola de futebol, a batida do taco numa bola de beisebol, o impacto entre duas bolas de bilhar. Esses são exemplos de colisões entre corpos macroscópicos (formados por um grande número de átomos) nos quais podemos dizer que houve contato entre os corpos durante a colisão. Entretanto, quando se trata de corpos microscópicos como átomos, moléculas ou partículas ainda menores (prótons e nêutrons), não é necessário haver contato entre os corpos, como ilustra o exemplo a seguir.

Exemplo 1:

A Fig. 1 representa um próton *A* que inicialmente move-se com uma "grande" velocidade $\vec{v}_A$, bem distante de um próton *B* em repouso. No volume de Eletricidade desta coleção, veremos que, entre dois prótons, há uma força de repulsão cujo módulo é dado por:

$$F = k\,\frac{1}{d^2}$$

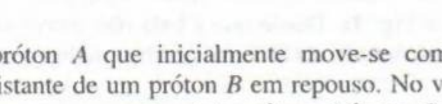


Fig. 1

onde *k* é uma constante e *d* é a distância entre eles. Assim, quando a distância *d* é "grande", a intensidade da força entre eles é desprezível, mas quando *d* é "pequeno" a força é muito intensa; desse modo, quando *A* está bem próximo de *B*, durante um "curto" intervalo de tempo, há uma intensa repulsão entre eles ocasionando o desvio da trajetória de *A* e o movimento de *B*, como ilustra a Fig. 2.

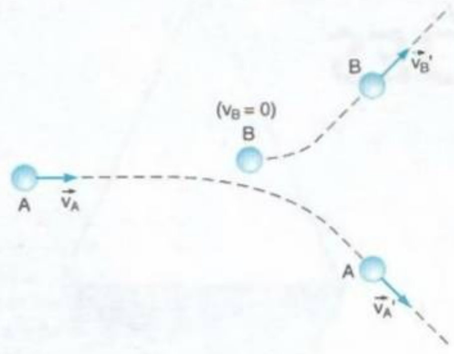


Fig. 2

Nessa figura, os círculos "vazios" representam as posições iniciais dos prótons (antes da interação) e os círculos "cheios" representam os prótons após a interação, quando a distância entre eles fica novamente "grande" e a força de interação torna-se desprezível; assim, as trajetórias dos prótons serão aproximadamente retilíneas.

Na realidade, entre corpos macroscópicos nunca há um contato. O que ocorre é que, quando eles ficam muito próximos, há uma intensa força de repulsão de origem elétrica, mas, até onde nossos olhos conseguem perceber, tudo se passa como se de fato houvesse o contato.

Possibilidades após a colisão

Há várias possibilidades para o que acontece após a colisão de dois corpos; a seguir destacaremos algumas.

Pode ocorrer de os corpos continuarem separados após a colisão, como no caso do choque entre duas bolas de bilhar ou no caso dos prótons do exemplo 1. Mas também é possível que os corpos fiquem unidos após o choque. Como exemplo, podemos citar o disparo de uma bala de revólver sobre um "grande" bloco de madeira apoiado numa superfície horizontal plana sem atrito, como ilustra a Fig. 3a. Desde que a bala não atravesse todo o bloco, após a colisão ela estará incrustada no bloco (Fig. 3b) e todo o conjunto se moverá como um único corpo.

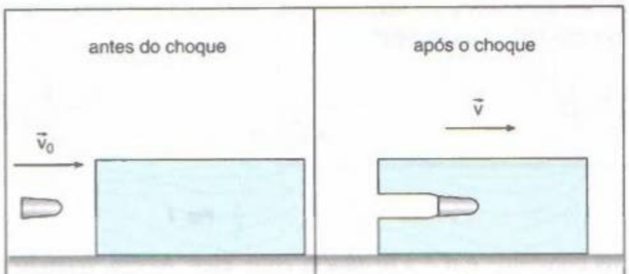


Fig. 3

Outra possibilidade é que os dois corpos se quebrem durante o choque, de modo que, após o choque, teremos mais de dois corpos. É o que pode acontecer com a colisão de duas bolas de vidro; outro exemplo é o caso de um nêutron que, ao atingir o núcleo de um átomo, pode "partir" esse núcleo.

Pode acontecer também uma mudança na "natureza" dos corpos, isto é, os corpos após a colisão não são idênticos aos corpos de antes da colisão. Por exemplo, um átomo *X* pode colidir com uma molécula YZ (molécula formada pelos átomos *Y* e *Z*), produzindo, após a colisão, uma molécula XY e um átomo *Z*; muitas reações químicas ocorrem desse modo. Em reações nucleares temos também, freqüentemente, uma mudança da "natureza" dos corpos; damos a seguir um exemplo desse caso.

Exemplo 2:

Suponhamos que um próton (*p*) seja lançado sobre um núcleo de flúor que tenha 9 prótons e 10 nêutrons (F^{19}), o qual está inicialmente em repouso, como indica a Fig. 4a. Dependendo da velocidade do próton, pode acontecer que este "penetre" no núcleo do flúor e, depois de um intervalo de tempo muito curto, o conjunto se parta em dois corpos (Fig. 4b): um núcleo de O^{16} (oxigênio com 8 prótons e 8 nêutrons) e uma partícula α, a qual é o núcleo de um dos isótopos do hélio, sendo formada por 2 prótons e 2 nêutrons.

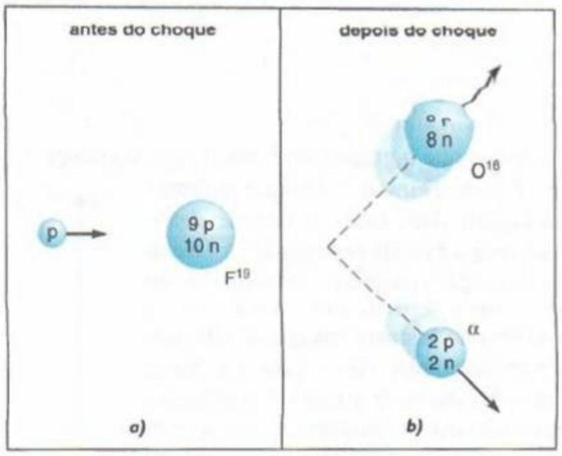


Fig. 4

Em Física Nuclear, é costume chamar de *espalhamento* a colisão em que os corpos após o choque são os mesmos de antes do choque.

A maior parte do que sabemos a respeito das interações entre núcleos e partículas elementares vem de experiências de colisões, daí a grande importância dada a esse assunto. Porém, daqui por diante vamos tratar, quase exclusivamente, de colisões entre corpos macroscópicos que não se quebrem nem mudem sua natureza durante a colisão. Apenas eventualmente trataremos de colisões entre núcleos e partículas elementares, pois essas colisões apresentam aspectos complexos que são tratados apenas em cursos de nível universitário.

Colisões de corpos macroscópicos

Tomemos uma colisão entre dois corpos macroscópicos que não se quebrem nem mudem sua natureza durante o choque e suponhamos inicialmente que, após o choque, os corpos se separem. Na Fig. 5 ilustramos um desses casos, antes, durante e após a colisão.

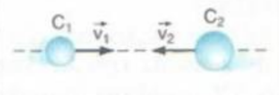
		
a) Os corpos C_1 e C_2 estão se aproximando.	*b) Durante a interação, os corpos experimentam a ação de forças opostas $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{21}$, que obedecem à Terceira Lei de Newton.* $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ e $\lvert\vec{F}_{12}\rvert = \lvert\vec{F}_{21}\rvert$	*c) C_1 e C_2 estão se afastando.*

Fig. 5

Durante o intervalo de tempo (Δt) em que ocorre a colisão, o corpo C_1 exerce no corpo C_2 uma força variável $\vec{F}_{12}$, enquanto o corpo C_2 exerce em C_1 uma força $\vec{F}_{21}$, que, pela lei da Ação e Reação, deve ter, a cada instante, o mesmo módulo, a mesma direção e sentido oposto ao de $\vec{F}_{12}$:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad ; \quad |\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = F$$

Na realidade, não sabemos como varia F em função do tempo; apenas sabemos que o gráfico de F em função do tempo é algo parecido com o mostrado na Fig. 6. Durante o choque podemos distinguir duas fases: a fase de *deformação* e a fase de *restituição*. A fase de deformação começa no instante em que os corpos entram em contato (t_1) e termina no instante em que a velocidade relativa entre eles é nula (t'). Nesse instante, inicia-se a fase de restituição, que termina no instante t_2 em que os corpos se separam. Durante a colisão, cada corpo se comporta como uma mola que é comprimida (fase de deformação) e depois se distende (fase de restituição), podendo (ou não) voltar à sua forma inicial; em geral, após a colisão os corpos ficam deformados, por pouco que seja.

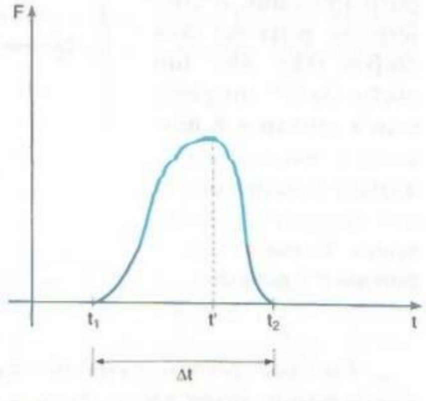


Fig. 6

No caso em que os corpos ficam unidos após o choque, não há fase de restituição, e o gráfico de F em função do tempo tem um aspecto semelhante ao mostrado na Fig. 7.

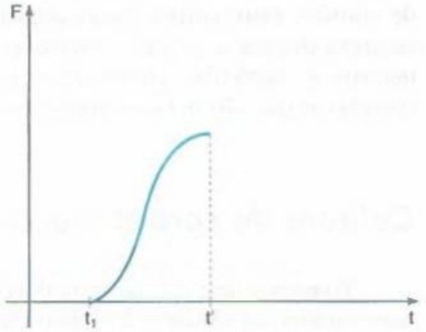


Fig. 7

Classificação dos choques quanto à direção do movimento

Um choque entre dois corpos é chamado de *unidimensional* (ou *unidirecional*) quando, tanto antes como depois do choque, os corpos se movem sobre a mesma reta. As figuras 8 e 9 ilustram dois exemplos desse choque.

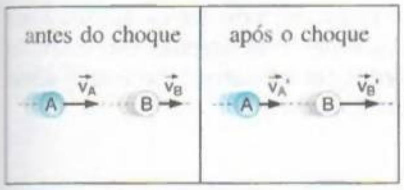


Fig. 8

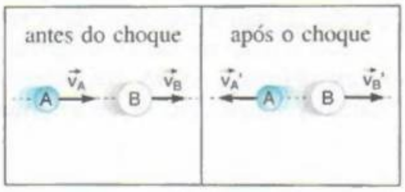


Fig. 9

O choque unidimensional é também chamado de *choque central direto* ou *choque frontal*.

Quando, antes ou depois do choque, os corpos se movimentam em *direções diferentes*, dizemos que o choque é *oblíquo*. As colisões descritas nos exemplos 1 (colisão de dois prótons) e 2 (colisão de um próton e um núcleo de flúor) são exemplos de choques oblíquos em que um dos corpos estava inicialmente em repouso. Na Fig. 10 damos um exemplo de choque oblíquo em que os dois corpos estavam em movimento antes do choque.

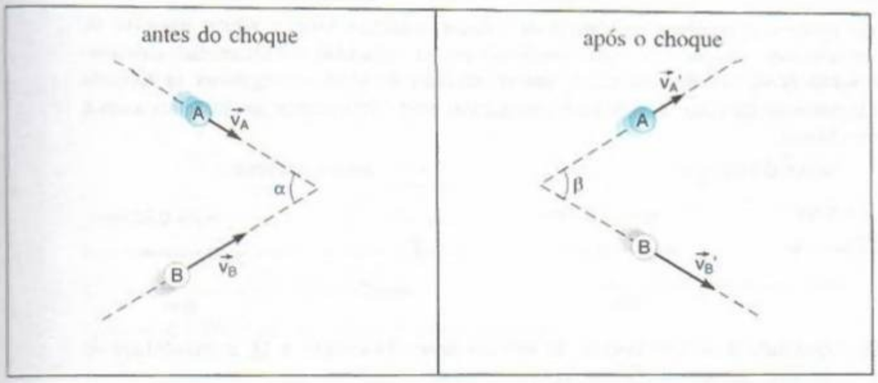


Fig. 10

2. COLISÕES E QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Consideremos um sistema formado por dois corpos que sofrem uma colisão. Como vimos no início deste capítulo, a colisão ocorre num intervalo de tempo "muito curto" e, durante esse intervalo de tempo, as forças de interação entre os corpos são muito mais intensas do que as forças externas. Isso nos permite desprezar a variação da quantidade de movimento produzida pelas forças externas, isto é, considerar que, durante o curto intervalo de tempo em que ocorre a colisão, a quantidade de movimento do sistema permanece constante. Assim, ao resolvermos um problema de colisão, a primeira coisa que fazemos é considerar as quantidades de movimento "um pouco antes" da colisão ($\vec{Q}_i$) e "um pouco depois" da colisão ($\vec{Q}_f$); a seguir impomos:

$$\vec{Q}_i = \vec{Q}_f \qquad \text{(I)}$$

O problema básico da colisão consiste em fornecer as massas e as velocidades dos corpos antes da colisão e pedir as velocidades dos corpos após a colisão. A não ser no caso em que, após o choque, os corpos ficam unidos, a equação (I) não é suficiente para resolver o problema, pois temos apenas *uma equação* e *duas* ou *mais* incógnitas: as velocidades e os ângulos (no caso do choque oblíquo). Assim, precisamos de informações adicionais. Ao longo deste capítulo veremos como essas informações são fornecidas.

9

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1 Duas partículas *A* e *B*, de massas $m_A = 1{,}0$ kg e $m_B = 2{,}0$ kg, movem-se inicialmente sobre a mesma reta, como ilustra a figura, onde estão assinalados os sentidos e os módulos das velocidades. As partículas realizam uma colisão unidimensional, de modo que, após a colisão, a partícula *B* move-se para a direita, com velocidade 0,50 m/s. Determine o módulo e o sentido da velocidade da partícula *A* após a colisão.

Resolução:

Um modo prático de resolver problemas de colisão unidimensional é adotar um eixo de mesma direção dos movimentos e convencionar que as velocidades e quantidades de movimento serão positivas se tiverem o mesmo sentido do eixo, e negativas se tiverem sentidos opostos ao do eixo. Vamos então adotar um eixo e representar as situações antes e depois do choque.

antes do choque | após o choque

Sendo Q_i a quantidade de movimento do sistema antes do choque e Q_f a quantidade de movimento do sistema após o choque, temos:

$$Q_i = Q_f$$

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'$$

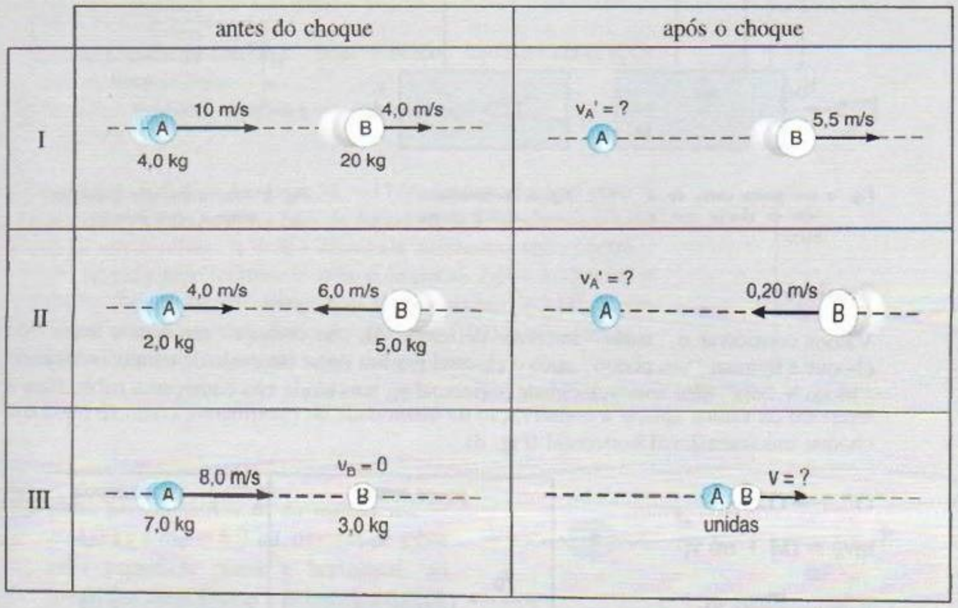
$$(1{,}0)\,(3{,}0) + (2{,}0)\,(-2{,}0) = (1{,}0)\,(v_A') + (2{,}0)\,(0{,}50)$$

Resolvendo esta última equação, obtemos:

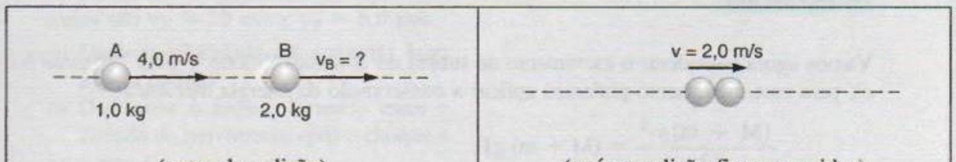
$$v_A' = -2{,}0 \text{ m/s}$$

Como v_A' é negativa, isso significa que, após o choque, a partícula *A* move-se em sentido oposto ao do eixo adotado, isto é, para a esquerda.

2. Em cada caso representado a seguir, temos as situações antes e depois de um choque unidimensional entre duas partículas *A* e *B*. Determine em cada caso a velocidade da partícula *A* após o choque.



3. As duas esferas, *A* e *B*, da figura a seguir realizaram um choque unidimensional. Os módulos das respectivas velocidades, bem como suas massas, estão indicados na própria figura.



(antes da colisão) (após a colisão ficaram unidas)

Calcule a velocidade da esfera *B* antes do choque.

4. O pêndulo balístico é um dispositivo usado para a medida do módulo da velocidade de uma bala de revólver ou fuzil. O sistema é constituído de um grande bloco de madeira de massa *M* (ou uma caixa de madeira com areia dentro) pendurado por quatro fios a uma superfície horizontal; os fios são inextensíveis, flexíveis e de massa desprezível. Uma bala de massa *m* e velocidade v_0 é disparada horizontalmente contra o bloco (Fig. a), nele penetrando e ficando incrustada (Fig. b). Com isso, o conjunto "bala + bloco" se eleva a uma altura máxima *H* em relação à posição de repouso (Fig. c). Conhecidos os valores de *H*, *M*, *m* e da aceleração da gravidade (*g*), é possível calcular o valor de v_0. Neste exercício faremos o inverso, daremos o valor de v_0 e pediremos o valor de *H*:

$m = 0,05$ kg; $M = 29,95$ kg; $g = 10,0$ m/s^2; $v_0 = 600$ m/s

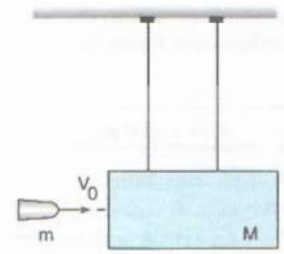


Fig. a um pouco antes de a bala se chocar com o bloco

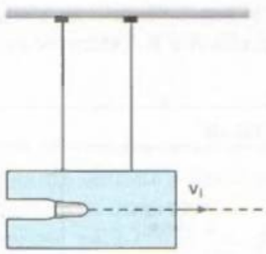


Fig. b imediatamente após o choque

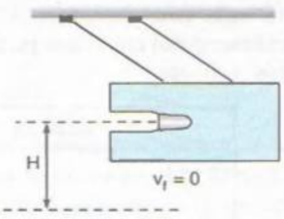


Fig. c instante em que o conjunto atinge a altura máxima

Resolução:

Vamos considerar o "curto" intervalo de tempo Δt, que começa "um pouco antes" do choque e termina "um pouco" após o choque. No fim desse intervalo de tempo, o conjunto "bloco + bala" está com velocidade horizontal v_i, mas ainda não começou a subir. Para o intervalo Δt vamos aplicar a conservação da quantidade de movimento, como se fosse um choque unidimensional horizontal (Fig. d):

$$Q_{antes} = Q_{depois}$$

$$mv_0 = (M + m)\, v_i$$

$$v_i = \frac{m}{M + m} v_0$$

$$v_i = \frac{0{,}05}{29{,}95 + 0{,}05} \cdot (600)$$

$v_i = 1{,}00$ m/s

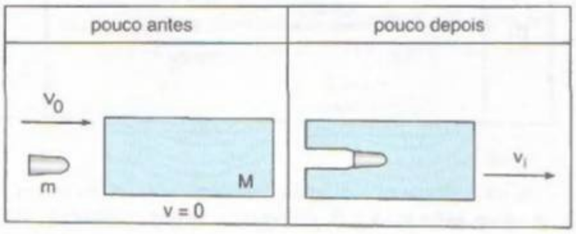


Fig. d

Vamos agora considerar o movimento de subida do conjunto "bloco + bala" (figuras *b* e *c*): para esse movimento podemos aplicar a conservação da energia mecânica:

$$\frac{(M + m)\, v_i^2}{2} = (M + m)\, gH$$

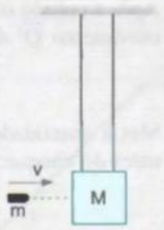
Assim: $H = \dfrac{v_i^2}{2g} = \dfrac{(1{,}00)^2}{2(10{,}0)}$ $\quad$ $H = 0{,}05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$

Alguém poderia, talvez, sugerir que resolvêssemos esse problema de outro modo, aplicando a conservação da energia mecânica para todo o processo, igualando a energia cinética inicial da bala (Fig. a) à energia potencial final do conjunto "bala + bloco" (Fig. c), isto é, escrevendo:

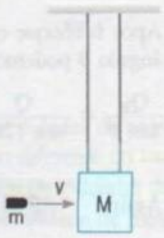
$$\frac{mv_0^2}{2} = (m + M)\, gH \text{ (será que vale?)}$$

Se o leitor fizer as substituições numéricas na equação acima, verá que o valor de *H* será diferente de 5 cm. Isso acontece porque não há conservação da energia mecânica para todo o processo. Uma parte da energia mecânica é usada para o trabalho de deformação da bala e do bloco; uma parte ainda é transformada em outras formas de energia como, por exemplo, o calor. Assim, este problema tem que ser necessariamente resolvido separando-o em duas fases: *fase da colisão* e *fase da subida do conjunto*.

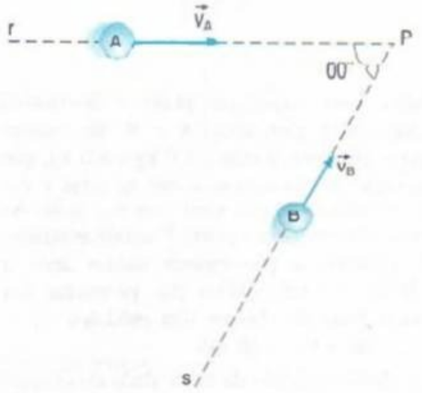
5. Uma bala de massa m = 20,0 gramas e velocidade horizontal cujo módulo é v = 400 m/s atinge e se encrava num bloco de massa M = 9,98 kg, inicialmente em repouso e suspenso por fios ideais presos ao teto de um aposento, como ilustra a figura. Sendo g = = 10,0 m/s², calcule:
   a) a velocidade do conjunto "bala + bloco" imediatamente após o impacto da bala;
   b) a altura máxima atingida pelo conjunto (em relação à posição inicial).



6. Um pêndulo balístico de massa M = 11,96 kg é usado para obter a velocidade *v* com que uma bala de massa m = 40,0 gramas sai do cano de um revólver. A bala é disparada horizontalmente contra o bloco, ficando nele incrustada após o impacto. Após o choque, o conjunto "bala + bloco" atinge uma altura máxima de 5,00 cm em relação à posição inicial. Sabendo que g = 10,0 m/s², calcule a velocidade da bala ao sair do cano do revólver.



7. Duas partículas *A* e *B*, de massas m_A = = 4,0 kg e m_B = 6,0 kg, movem-se sobre uma superfície plana e horizontal, ao longo das retas *r* e *s* como indica a figura. As partículas chegam simultaneamente ao ponto *P*, onde sofrem uma colisão, de modo que, após o choque, as partículas ficam unidas. Um pouco antes da colisão, as partículas têm velocidades cujos módulos são v_A = 10 m/s e v_B = 5,0 m/s.
   a) Qual a velocidade do conjunto logo após a colisão?
   b) Determine o ângulo formado entre a direção do movimento após o choque e a reta *r*.



Resolução:

a) Sejam $\vec{Q}_A$ e $\vec{Q}_B$ as quantidades de movimento das partículas antes do choque. Temos:

$$\begin{cases} Q_A = m_A \cdot v_A = (4,0 \text{ kg})\,(10 \text{ m/s}) = 40 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \\ Q_B = m_B \cdot v_B = (6,0 \text{ kg})\,(5,0 \text{ m/s}) = 30 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \end{cases}$$

Para obtermos o módulo da quantidade de movimento total do sistema antes da colisão ($\vec{Q}$) podemos usar a lei dos cossenos:

$$Q^2 = Q_A{}^2 + Q_B{}^2 + 2Q_A \cdot Q_B \cdot \cos 60°$$

$$Q^2 = (40)^2 + (30)^2 + 2(40)(30)\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 3\,700 \Rightarrow Q \cong 60 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

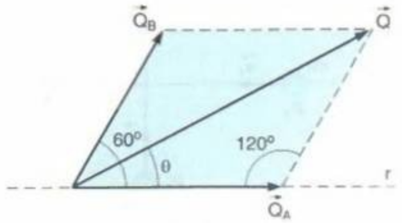


Fig. a

Após a colisão os corpos ficam unidos, movendo-se com velocidade $\vec{v}$ e quantidade de movimento $\vec{Q}'$ dada por:

$$\vec{Q}' = (m_A + m_B)\ \vec{v}$$

Mas a quantidade de movimento depois do choque é igual à quantidade de movimento antes do choque:

$$\vec{Q}' = \vec{Q}$$

$(m_A + m_B)\ v \cong 60 \Rightarrow 10 \cdot v \cong 60 \Rightarrow$ $\boxed{v \cong 6{,}0\ m/s}$

b) Após o choque o conjunto move-e na direção do vetor $\vec{Q}$ da Fig. a. Para obtermos o ângulo θ podemos aplicar a lei dos senos ao triângulo sombreado na figura:

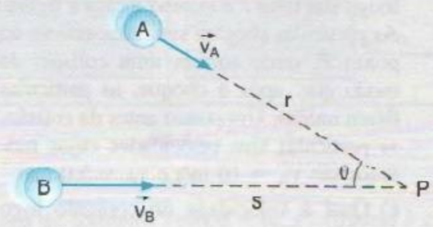
$$\frac{Q_B}{\text{sen}\ \theta} = \frac{Q}{\text{sen}\ 120^o} \Rightarrow \frac{30}{\text{sen}\ \theta} \cong \frac{60}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \text{sen}\ \theta \cong \frac{\sqrt{3}}{4} \cong 0{,}43$$

Assim: $\boxed{\theta \cong \text{arc sen}\ 0{,}43}$

Usando a tabela do final do livro obtemos:

$\boxed{\theta \cong 25^o}$

8. Sobre uma superfície plana e horizontal temos duas partículas, *A* e *B*, de massas respectivamente iguais a 4,0 kg e 6,0 kg, que inicialmente movem-se sobre as retas *r* e *s* como indica a figura, sendo cos $\theta = 0{,}46$. As partículas atingem o ponto *P* simultaneamente, colidem, e prosseguem unidas após a colisão. As velocidades das partículas um pouco antes do choque têm módulos $v_A = 20$ m/s e $v_B = 10$ m/s.



a) Qual o módulo da velocidade do conjunto após a colisão?
b) Determine o ângulo formado entre a direção do movimento após a colisão e a reta *s*.

9. Duas partículas, P_1 e P_2, colidem e permanecem juntas, como sugerem as figuras *a* e *b*. A partícula P_1 tem massa $m_1 = 0{,}10$ kg e velocidade de módulo $v_1 = 6{,}0$ m/s, enquanto P_2 tem massa $m_2 = 0{,}30$ kg e velocidade de módulo $v_2 = 2{,}0$ m/s. Determine o módulo da velocidade final do conjunto e o ângulo θ.

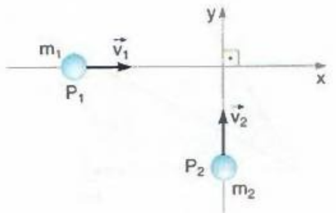


Fig. a

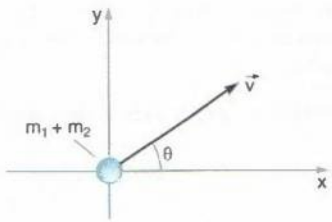


Fig. b

Resolução:

As quantidades de movimento das partículas antes do choque são $\vec{Q}_1$ e $\vec{Q}_2$, cujos módulos são:

$$\begin{cases} Q_1 = m_1 \cdot v_1 = (0{,}10 \text{ kg})\,(6{,}0 \text{ m/s}) = 0{,}60 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \\ Q_2 = m_2 \cdot v_2 = (0{,}30 \text{ kg})\,(2{,}0 \text{ m/s}) = 0{,}60 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \end{cases}$$

As quantidades de movimento antes e depois do choque são iguais a $\vec{Q}$ (Fig. c). Como as partículas ficam unidas após o choque, devemos ter:

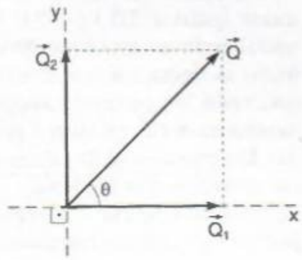


Fig. c

$$\vec{Q} = (m_A + m_B)\,\vec{v} = (0{,}40)\,\vec{v}$$

Nesse caso, podemos aproveitar o fato de que as direções das quantidades de movimento iniciais são perpendiculares e resolver o exercício por um processo diferente do usado nos dois exercícios anteriores: vamos trabalhar com as componentes das quantidades de movimento nas direções x e y, isto é, vamos impor a conservação da quantidade de movimento separadamente, nas direções x e y.

$$\begin{cases} Q_x = Q \cdot \cos\theta = (0{,}40)\ v \cdot \cos\theta \\ Q_y = Q \cdot \text{sen}\ \theta = (0{,}40)\ v \cdot \text{sen}\ \theta \end{cases}$$

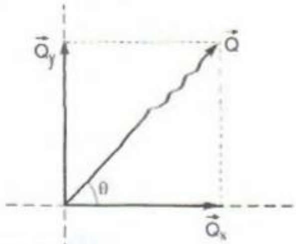


Fig. d

Imponhamos a conservação da quantidade de movimento na direção x.

$Q_x = Q_1$

$(0{,}40) \cdot v \cdot \cos\theta = 0{,}60 \qquad \text{(I)}$

Imponhamos agora a conservação da quantidade de movimento na direção y:

$Q_y = Q_2$

$(0{,}40) \cdot v \cdot \text{sen}\ \theta = 0{,}60 \qquad \text{(II)}$

Dividindo membro a membro as equações (II) e (I), temos:

$$\frac{(0{,}40) \cdot v \cdot \text{sen}\,\theta}{(0{,}40) \cdot v \cdot \cos\theta} = \frac{0{,}60}{0{,}60}$$

ou: $\text{tg}\ \theta = 1 \Rightarrow \boxed{\theta = \text{arc tg}\ 1 = 45^\circ}$

Portanto: $\text{sen}\ \theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Substituindo, por exemplo, na equação (I):

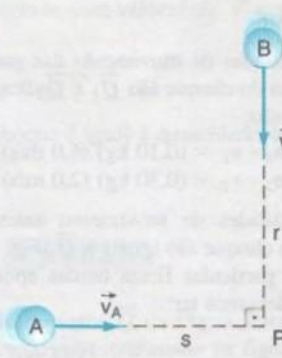
$$(0{,}40) \cdot v \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0{,}60$$

donde: $\boxed{v = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \text{ m/s} \cong 2{,}1 \text{ m/s}}$

10. Duas partículas, *A* e *B*, de massas respectivamente iguais a 5,0 kg e 3,0 kg, movem-se inicialmente ao longo das retas *r* e *s*, mostradas na figura, sobre uma superfície plana e horizontal. As partículas atingem o ponto *P* simultaneamente, colidem e prosseguem unidas. Um pouco antes da colisão as velocidades das partículas têm módulos $v_A = 8,0$ m/s e $v_B = 10$ m/s. Sendo $\vec{v}$ a velocidade do conjunto após a colisão, determine:

a) o ângulo formado entre $\vec{v}$ e a reta *s*;

b) o módulo de $\vec{v}$.



11 Sobre uma superfície horizontal, um disco *A* de massa 2,0 kg é lançado ao longo da reta *x*, como mostra a Fig. a, indo colidir com um disco *B*, de massa 4,0 kg, que estava em repouso. Um pouco antes da colisão, a velocidade do disco *A* tem módulo $v_A = 30$ m/s. Após a colisão, os discos movem-se em direções diferentes, como mostra a Fig. b, tendo o disco *B* velocidade de módulo $v_B{}' = 10\sqrt{2}$ m/s.

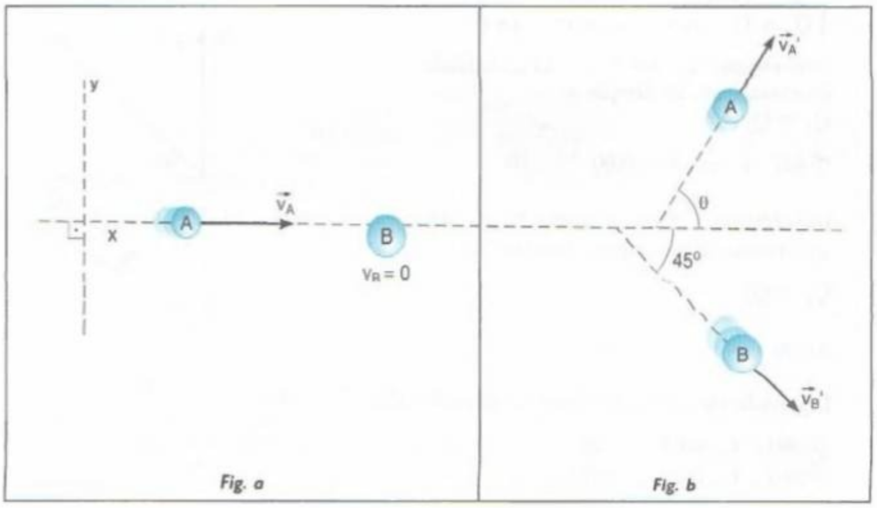


Fig. a *Fig. b*

Determine os valores de v'_A e θ.

Resolução:

Vamos considerar as componentes das quantidades de movimento nas direções perpendiculares *x* e *y* (Fig. a). Antes da colisão, como o disco *B* estava em repouso, a quantidade de movimento do sistema ($\vec{Q}$) é a quantidade de movimento do disco *A*, que está na direção *x*:

$$Q = Q_A = Q_x = m_A \cdot v_A = (2,0\ \text{kg})\ (30\ \text{m/s}) = 60\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

Após a colisão, as quantidades de movimento dos discos *A* e *B* são $\vec{Q}'_A$ e $\vec{Q}'_B$ (Fig. d):

$$\begin{cases} Q'_A = m_A \cdot v'_A = (2,0) \cdot v'_A \\ Q'_B = m_B \cdot v'_B = (4,0\ \text{kg})\ (10\sqrt{2}\ \text{m/s}) = 40\sqrt{2}\ \text{kg} \cdot \text{m/s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q'_{Ax} = Q'_A \cdot \cos\theta = (2{,}0) \cdot v'_A \cdot \cos\theta \\ Q'_{Ay} = Q'_A \cdot \text{sen}\,\theta = (2{,}0) \cdot v'_A \cdot \text{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q'_{Bx} = Q'_B \cdot \cos 45° = (40\sqrt{2}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 40\ \text{kg} \cdot \text{m/s} \\ Q'_{By} = Q'_B \cdot \text{sen}\,45° = (40\sqrt{2}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 40\ \text{kg} \cdot \text{m/s} \end{cases}$$

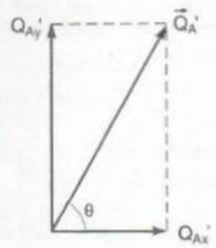


Fig. c

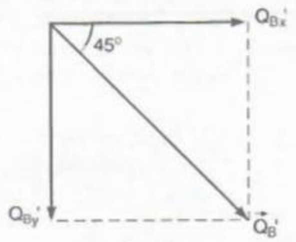


Fig. d

Imponhamos a conservação da quantidade de movimento na direção x:

$Q_x = Q'_{Ax} + Q'_{Bx}$

$60 = (2{,}0) \cdot v'_A \cdot \cos\theta + 40 \Rightarrow v'_A \cdot \cos\theta = 10$ (I)

Antes da colisão, não havia quantidade de movimento na direção y; portanto, após a colisão, a quantidade de movimento na direção y também deve ser nula. Para que isso ocorra, devemos ter:

$Q'_{Ay} = Q'_{By}$

$(2{,}0) \cdot v'_A \cdot \text{sen}\,\theta = 40 \Rightarrow v'_A \cdot \text{sen}\,\theta = 20$ (II)

Dividindo membro a membro as equações (II) e (I), temos:

$$\frac{v'_A \cdot \text{sen}\,\theta}{v'_A \cdot \cos\theta} = \frac{20}{10} \Rightarrow \text{tg}\,\theta = 2 \Rightarrow \theta = \text{arc tg}\,2$$

Consultando a tabela do final do livro, obtemos:

$\theta \cong 63°$

Usando a mesma tabela, podemos obter os valores aproximados de sen θ e cos θ. Outra possibilidade é usar o triângulo retângulo da Fig. e, onde tg $\theta = 2$. Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$z^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow z = \sqrt{5}$

Desse modo, temos:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \text{e} \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

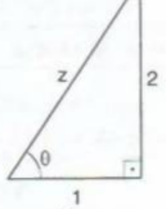


Fig. e

Substituindo na equação (I), temos:

$$v'_A \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = 10 \Rightarrow v'_A = 10\sqrt{5}\ \text{m/s}$$

Poderíamos, também, ter substituído na equação (II).

12. Uma partícula A, de massa 2,0 kg, é lançada em uma superfície plana e horizontal ao longo da reta x, como mostra a Fig. a, indo colidir com uma partícula B, de massa 12 kg, que estava em repouso sobre a mesma superfície. Um pouco antes da colisão, a partícula A tem velocidade cujo módulo é $v_A = 26$ m/s. Após a colisão, as partículas movem-se em direções diferentes, como mostra a Fig. b, tendo a partícula A velocidade de módulo $v'_A = 10$ m/s. Sabendo que $\cos \alpha = 0{,}80$, determine os valores de v'_B e do ângulo β.

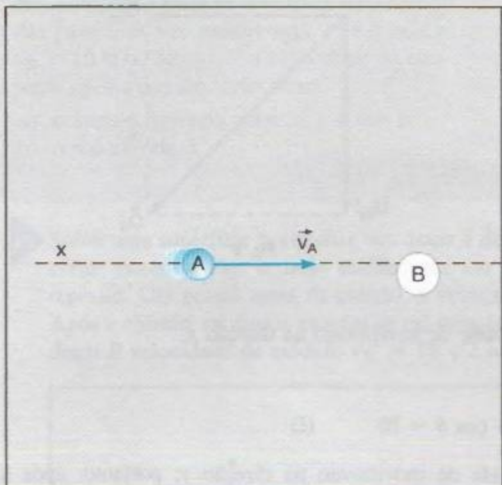


Fig. a

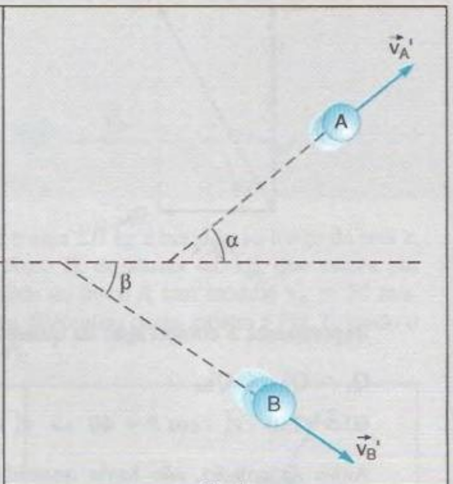
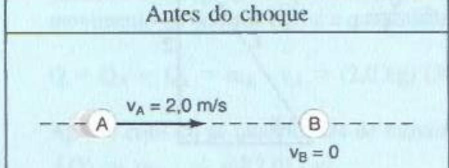
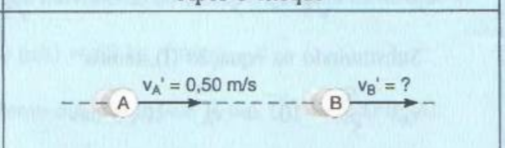


Fig. b

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

13. (FEI-SP) Uma partícula de massa $m = 1{,}0$ kg e velocidade $v_1 = 5$ m/s choca-se com outra partícula de massa M, inicialmente em repouso. Após o choque, esta última adquire velocidade $\frac{10}{9}$ m/s e a primeira retrocede com velocidade $v_2 = \frac{55}{9}$ m/s. Determine M.

14. (E. E. Mauá-SP) Uma bola A desloca-se em translação com velocidade escalar de 2,0 m/s, num plano horizontal sem atrito. Ela choca-se frontalmente com uma segunda bola B, de mesma massa, que estava em repouso e prossegue seu movimento na mesma direção e sentido com velocidade escalar 0,50 m/s. Qual é a velocidade da segunda bola?

Antes do choque	Após o choque
	

15. (FCMSC-SP) Um vagão de massa $4{,}0 \times 10^4$ kg está parado e é atingido por outro de massa $8{,}0 \times 10^4$ kg e velocidade de 30 m/s. Após o choque, eles movem-se juntos e as forças de atrito são desprezíveis. A velocidade comum após o choque é, em m/s, igual a:

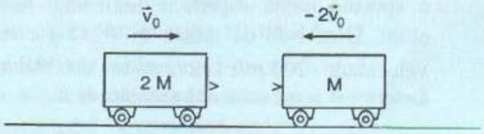
a) 10 b) 20 c) 30 d) 40 e) 60

16. (VUNESP-SP) Um carrinho cheio de areia, de massa total 4,0 kg, pode se deslocar sobre uma superfície plana e horizontal, ao longo de uma direção *x*, sem encontrar qualquer resistência. Uma bala de 15 g, disparada na direção *x* contra o carrinho, inicialmente em repouso, aloja-se na areia e o conjunto (carrinho + areia + bala) passa a mover-se com velocidade constante, percorrendo 0,60 m em 0,40 s.

a) Qual é a velocidade do conjunto após a bala ter-se alojado na areia?
b) Qual era, aproximadamente, a velocidade da bala antes do choque?

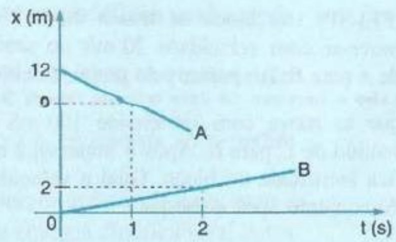
17. (UERJ-RJ) Dois carrinhos se deslocam sobre um mesmo trilho retilíneo e horizontal, com movimentos uniformes e em sentidos contrários, como mostra a figura, na qual estão indicadas suas massas e velocidades.

Após o choque, eles ficam presos um ao outro, e a velocidade comum a ambos passa a ser:



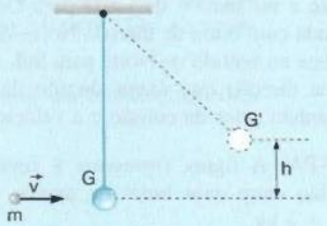
a) $\frac{\vec{v}_0}{3}$ b) $\frac{\vec{v}_0}{2}$ c) nula d) $\frac{-\vec{v}_0}{2}$ e) $\frac{-\vec{v}_0}{3}$

18. (FUVEST-SP) O gráfico ilustra as posições de duas esferas idênticas (*A* e *B*) que se deslocam ao longo de uma reta sobre uma superfície horizontal. As esferas chocam-se frontalmente e, após o choque, movimentam-se unidas.



a) Qual a distância inicial entre as esferas?
b) Qual a velocidade das esferas após o choque?

19. (FEI-SP) Uma bala de fuzil de massa m = 20 g atinge o centro de uma esfera de massa M = 1,0 kg, pendurada por um fio fino (pêndulo simples), que lhe imprime uma velocidade inicial horizontal, encravando-se na esfera e provocando uma elevação de seu centro de massa de uma altura h = 50 mm, em relação à sua posição inicial. Calcular a velocidade da bala no momento do choque. Dado $g = 10\ m/s^2$.



20. (ITA-SP) Uma bala de massa *m* e velocidade *v* atinge um bloco de massa *M*, em repouso e suspenso por um fio de comprimento *d*. O conjunto atinge uma altura máxima *h*. Sendo *g* a aceleração da gravidade, tem-se:

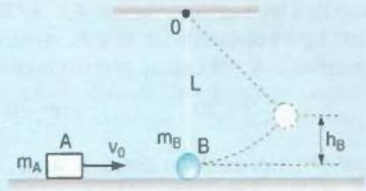
a) $\frac{m \cdot v^2}{2} = (m + M)gh$

b) $\frac{mv^2}{2} > (m + M)gh$

c) *h* depende de *d*

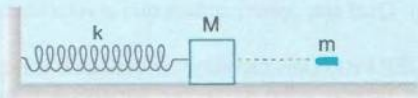
d) $mv^2 = (m + M)gh$

21. (EPUSP-SP) Um corpo *A* de massa $m_A = 2{,}0$ kg é lançado com velocidade $v_0 = 4{,}0$ m/s num plano horizontal liso, colidindo com uma esfera *B* de massa $m_B = 5{,}0$ kg. A esfera, inicialmente parada e suspensa por um fio flexível e inextensível de comprimento *L* e fixo em *O*, atinge a altura $h_B = 0{,}20$ m após a colisão.



a) Qual a velocidade v_B da esfera *B* imediatamente após a colisão?
b) Qual o módulo e o sentido da velocidade v_A do corpo *A* após a colisão?

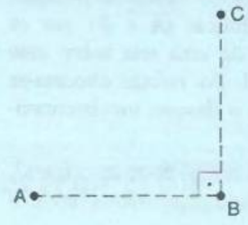
22. (ITA-SP) O bloco de massa M = 132 g, inicialmente em repouso, está preso a uma mola de constante elástica $k = 1{,}6 \cdot 10^4$ N/m e apoiado numa superfície horizontal sem atrito. Uma bala de massa m = 12 g com velocidade 200 m/s incrusta-se no bloco. Determine a máxima deformação da mola.



23. (UNISA-SP) Um projétil de massa 5,0 gramas é disparado horizontalmente contra um pedaço de madeira de massa 3,0 kg que está sobre uma superfície horizontal. O coeficiente de atrito entre a madeira e a superfície é 0,20. O projétil se engasta na madeira e esta se desloca 25 cm sobre a superfície, até parar. Sabendo que $g = 10$ m/s², podemos afirmar que a velocidade do projétil ao atingir a madeira era aproximadamente:

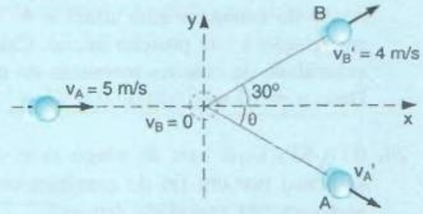
a) 400 m/s b) 500 m/s c) 600 m/s d) 700 m/s e) 800 m/s

24. (FEI-SP) Um bloco de massa m = 250 g move-se com velocidade 20 m/s no sentido de *A* para *B*. Ao passar pelo ponto *B*, o bloco sofre o impacto de uma bala de massa 50 g, que se move com velocidade 100 m/s no sentido de *C* para *B*. Após o impacto, a bala fica incrustada no bloco. Qual a velocidade do conjunto após o choque?



25. (E. E. Mauá-SP) Um automóvel de massa m = 1 800 kg trafega numa estrada, na direção Leste–Oeste e no sentido de Leste para Oeste, com velocidade v = 108 km/h. No cruzamento dessa estrada com outra de direção Norte–Sul, colide com um caminhão de massa M = 19 800 kg que trafega no sentido de Norte para Sul. Após a colisão os dois veículos se engancham e prosseguem numa direção que forma ângulo de 30° com a direção Norte–Sul. Calcule a velocidade do caminhão antes da colisão e a velocidade do conjunto após a colisão.

26. (UF-PA) A figura representa a geometria de uma colisão entre duas bolas de massas $m_A = 4$ kg e $m_B = 3$ kg.
Os módulos dos componentes da velocidade da bola de massa m_A, nas direções *x* e *y*, após a colisão, valem, em m/s, respectivamente:



a) $\dfrac{10 - 3\sqrt{3}}{2}$ e $\dfrac{3}{2}$ d) $\dfrac{10 - 5\sqrt{3}}{2}$ e $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $3\sqrt{3}$ e 3 e) $2\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$

c) $\dfrac{5 - \sqrt{3}}{2}$ e $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

27. (UF-PA) No exercício anterior, o ângulo θ, segundo o qual a bola de massa m_A foi espalhada, é aproximadamente:
a) arc tg 0,325
b) arc tg 0,575
c) arc tg 0,625
d) arc tg 0,750
e) arc tg 0,855

3. COLISÕES E ENERGIA CINÉTICA

Durante a colisão de dois corpos macroscópicos, em geral, certa quantidade da energia cinética total dos dois corpos é perdida. Uma parte dessa energia perdida é usada para executar o trabalho de deformação dos corpos. Outra parte é transformada em outras formas de energia, como, por exemplo, energia térmica e energia vibratória, a qual produz o som que ouvimos durante o choque. Em certos casos, porém, essa perda é tão pequena que admitimos que a energia cinética total "um pouco antes" do choque é igual à energia cinética total "um pouco após" o choque; tais choques são denominados *elásticos*. Como exemplos de choques aproximadamente elásticos, podemos citar o choque entre duas bolas de aço e o choque entre duas bolas de bilhar (feitas de marfim). Na realidade, os únicos choques totalmente elásticos que conhecemos são certos choques entre partículas subatômicas.

É possível demonstrar que, num choque elástico, os corpos necessariamente se separam após a colisão, isto é, num choque em que os corpos ficam unidos após a colisão, obrigatoriamente há perda de energia cinética.

Levando em conta a conservação ou não da energia cinética, os choques são classificados em três tipos:

I. *Choques elásticos*: A energia cinética se conserva e os corpos se separam após o choque.
II. *Choques parcialmente elásticos*: Os corpos se separam após o choque, mas a energia cinética total após o choque é menor que a energia cinética total antes do choque.
III. *Choques inelásticos*: Os corpos ficam unidos após o choque e a energia cinética total após o choque é menor que antes do choque. Os choques inelásticos são também chamados de *anelásticos*.

Convém destacar que estamos considerando apenas as translações dos corpos, não nos preocupando com as eventuais rotações.

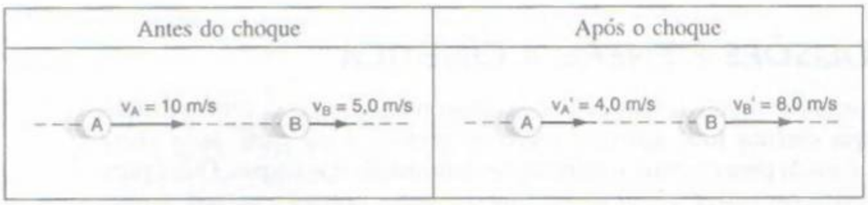
Choques superelásticos

Em alguns casos, pode acontecer de a energia cinética total após o choque ser *maior* que a de antes do choque. Isso acontece quando, durante o choque, algum tipo de energia potencial é liberada, transformando-se em energia cinética. Como exemplo podemos citar alguns tipos de colisões envolvendo núcleos atômicos. Quando o núcleo é quebrado, pode ser liberada uma quantidade de energia que estava armazenada nele; a bomba atômica é um desses casos. Outro exemplo é o caso de uma bomba que, ao atingir o alvo, explode, transformando a energia potencial química em energia cinética.

Nós não trabalharemos com os choques superelásticos.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

28 Na figura a seguir temos representadas as situações antes e depois de um choque unidimensional de duas partículas *A* e *B*, cujas massas são $m_A = 1,0$ kg e $m_B = 2,0$ kg. Classifique o choque.



Resolução:

Sendo E_i e E_f as energias cinéticas do sistema, antes e depois do choque, respectivamente, temos:

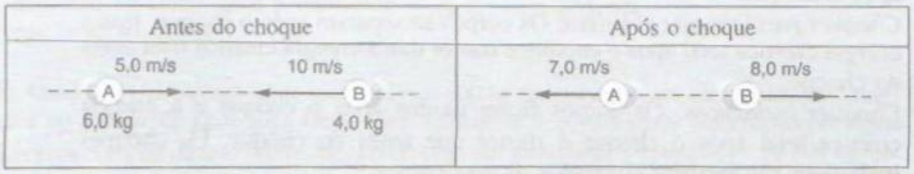
$$E_i = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2}(1,0)(10)^2 + \frac{1}{2}(2,0)(5,0)^2 \Rightarrow E_i = 75 \text{ J}$$

$$E_f = \frac{1}{2} m_A (v_A')^2 + \frac{1}{2} m_B \cdot (v_B')^2 = \frac{1}{2}(1,0)(4,0)^2 + \frac{1}{2}(2,0)(8,0)^2 \Rightarrow E_f = 72 \text{ J}$$

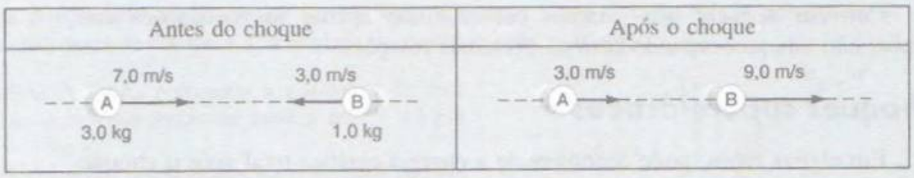
Como os corpos se separam e temos $E_f < E_i$, trata-se de um choque parcialmente elástico.

29. Em cada caso a seguir são representadas as situações antes e depois de uma colisão entre dois corpos, *A* e *B*. Classifique os choques segundo a conservação da energia cinética e calcule sua perda, se houver.

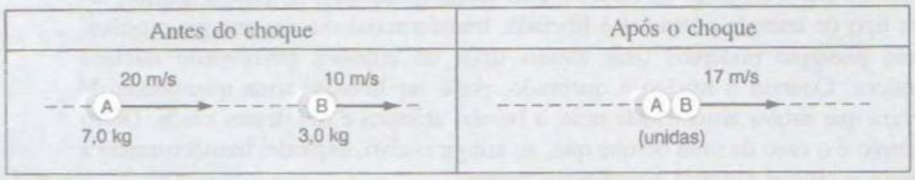
a)



b)

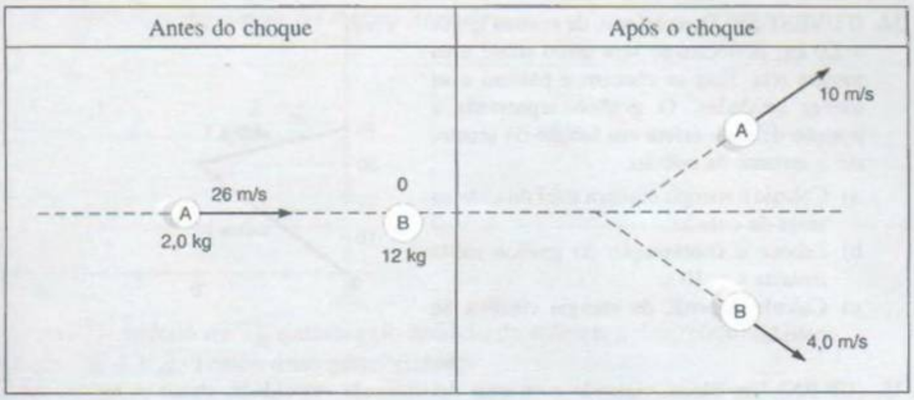


c)



9

d)



EXERCÍCIOS DE REFORÇO

30. (F. M. Jundiaí-SP) Duas partículas que constituem um sistema isolado colidem uma com a outra. A colisão é analisada num referencial inercial. Nesse caso, necessariamente ocorre a conservação da:
   a) energia cinética total.
   b) energia potencial total.
   c) energia mecânica total.
   d) quantidade de movimento total.
   e) quantidade de movimento da partícula de maior massa.

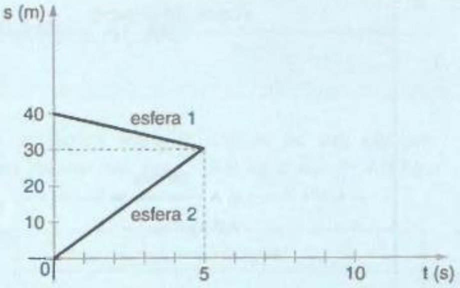
31. (FCMSC-SP) A energia cinética de um sistema isolado, constituído de dois corpos que colidem, se conserva sempre que:
   a) ocorra qualquer tipo de colisão.
   b) sua quantidade de movimento não se conserve.
   c) sua quantidade de movimento se conserve.
   d) os dois corpos sofram deformações permanentes.
   e) a colisão seja perfeitamente elástica.

32. (FUVEST-SP) Um objeto de 0,8 kg desloca-se sem atrito numa superfície horizontal e choca-se frontalmente com outro objeto idêntico e em repouso. O choque é perfeitamente inelástico. A quantidade de movimento do objeto antes do choque é 3,2 kg · m/s.
   a) Qual a quantidade de movimento do sistema após o choque?
   b) Qual a velocidade de cada corpo após o choque?

33. (FUVEST-SP) Um carro de 800 kg, parado num sinal vermelho, é abalroado por trás por outro carro, de 1 200 kg, com uma velocidade de 72 km/h. Imediatamente após o choque os dois carros se movem juntos.
   a) Calcule a velocidade do conjunto logo após a colisão.
   b) Prove que o choque não é elástico.

34. (FUVEST-SP) Duas esferas, de massas iguais a 2,0 kg, deslocam-se sem atrito sobre uma mesma reta. Elas se chocam e passam a se mover grudadas. O gráfico representa a posição de cada esfera em função do tempo, até o instante da colisão.

a) Calcule a energia cinética total do sistema antes da colisão.
b) Esboce a continuação do gráfico até o instante t = 10 s.
c) Calcule a perda de energia cinética na colisão.



35. (UF-RN) Um bloco, viajando com uma determinada velocidade, choca-se inelasticamente com outro bloco de mesma massa, inicialmente em repouso. A razão entre a energia cinética do conjunto antes e depois do choque vale:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) 4

36. (FUVEST-SP) Dois corpos movem-se sem atrito sobre uma mesa horizontal, com velocidades de mesma direção mas de sentidos opostos. O primeiro tem massa M_1 = 3,0 kg e velocidade v_1 = = 4,0 m/s; o segundo tem M_2 = 2,0 kg e velocidade v_2 = 6,0 m/s. Com o choque, a trajetória do segundo corpo sofre um desvio de 60° e sua velocidade passa a 4,0 m/s.

a) Represente graficamente os vetores quantidade de movimento dos dois corpos antes e depois do choque. Justifique.
b) Determine se o choque foi elástico ou inelástico.

4. VELOCIDADE RELATIVA

Antes de continuar com a análise dos choques, gostaríamos de recordar um conceito estudado na Cinemática (volume 1 desta coleção): é o conceito de *velocidade relativa*, para duas partículas que se movem sobre uma mesma reta, pois esse conceito nos será bastante útil mais adiante.

1º caso	*As partículas movem-se em sentidos opostos*

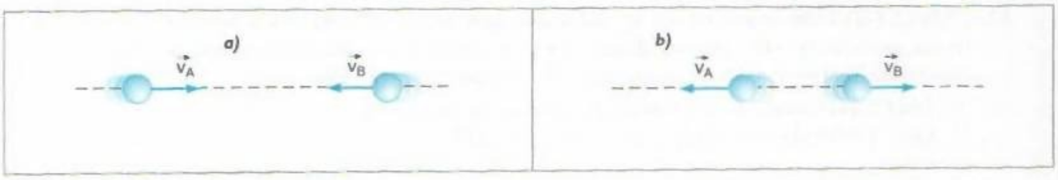


Fig. 11

Nesse caso, o módulo da velocidade relativa ($\vec{v}_R$) entre *A* e *B* é dado pela *soma dos módulos* das velocidades de *A* e *B*:

$$|\vec{v}_R| = |\vec{v}_A| + |\vec{v}_B|$$

2º caso	*As partículas movem-se no mesmo sentido*

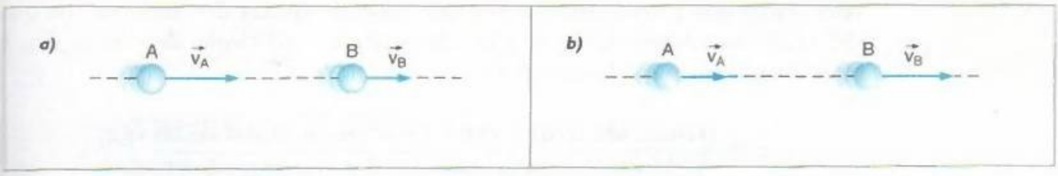


Fig. 12

Nesse caso, o módulo de $\vec{v}_R$ é dado pelo módulo da diferença dos módulos das velocidades de *A* e *B*. Temos duas possibilidades:

I. Se $|\vec{v}_A| > |\vec{v}_B|$ (caso da Fig. 12a), fazemos:

$$|\vec{v}_R| = |\vec{v}_A| - |\vec{v}_B|$$

II. Se $|\vec{v}_B| > |\vec{v}_A|$ (caso da Fig. 12b), fazemos:

$$|\vec{v}_R| = |\vec{v}_B| - |\vec{v}_A|$$

Exemplo 3:

Em cada situação representada a seguir, vamos calcular o módulo da velocidade relativa ($\vec{v}_R$) entre as partículas *A* e *B*.

a) 

$v_R = 7\ m/s + 2\ m/s = 9\ m/s$

b) 

$v_R = 7\ m/s - 2\ m/s = 5\ m/s$

c) 

$v_R = 5\ m/s - 2\ m/s = 3\ m/s$

d) 

$v_R = 10\ m/s - 4\ m/s = 6\ m/s$

e) 

$v_R = 11\ m/s - 3\ m/s = 8\ m/s$

5. COEFICIENTE DE RESTITUIÇÃO

Como já observamos no início do capítulo (e confirmamos nos exercícios), a não ser no caso do choque inelástico, a conservação da quantidade de movimento não é suficiente para resolver um problema de choque; temos mais incógnitas do que equações e, assim, precisamos de mais informações.

Para o caso do choque *unidimensional* de dois corpos macroscópicos A e B, Newton descobriu, experimentalmente, uma interessante relação entre as velocidades dos corpos, relação esta que depende apenas dos *materiais* de que são feitos os corpos. Essa relação, denominada *coeficiente de restituição*, é representada por e e calculada por:

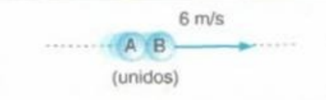
$$e = \frac{|\text{velocidade relativa entre } A \text{ e } B \text{ pouco depois do choque}|}{|\text{velocidade relativa entre } A \text{ e } B \text{ pouco antes do choque}|}$$

Pela definição vemos que o coeficiente de restituição não tem unidade, isto é, é adimensional. Na tabela ao lado damos os valores de alguns coeficientes de restituição, obtidos experimentalmente.

Materiais	e
vidro com vidro	0,93
marfim com marfim	0,90
chumbo com chumbo	0,20
ferro com chumbo	0,12

Exemplo 4:

Em cada caso a seguir são representadas as situações de dois corpos, A e B, antes e depois de um choque unidimensional. Calculemos em cada caso o coeficiente de restituição.

Pouco antes	Pouco depois	e
		$e = \frac{11 - 3}{12 - 2} = \frac{8}{10} = 0,8$
		$e = \frac{2 + 4}{5 + 3} = \frac{6}{8} = 0,75$
		$e = \frac{6 - 6}{7 - 5} = \frac{0}{2} = 0$

Choque inelástico

Como vimos no exemplo anterior, num choque inelástico o coeficiente de restituição é *sempre nulo*, pois a velocidade relativa após o choque é nula:

choque inelástico → $\boxed{e = 0}$

Choque elástico

Para o choque elástico é possível demonstrar (e o faremos no item 10 deste capítulo) que o coeficiente de restituição é igual a 1:

choque elástico → $\boxed{e = 1}$

Isso significa que a velocidade relativa após o choque (em módulo) é *igual* à velocidade relativa antes do choque.

Choques parcialmente elásticos

Nesses choques, a energia cinética total depois da colisão é menor que a energia cinética total antes da colisão. Como conseqüência, a velocidade relativa após o choque é menor que a velocidade relativa antes do choque (em módulo) e assim temos:

$$\boxed{0 < e < 1}$$

Observações

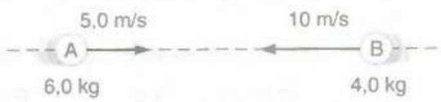
1ª) Na realidade, o coeficiente de restituição não depende apenas do material; depende também, em parte, das velocidades e das formas dos corpos.

2ª) Em certos casos, o coeficiente de restituição pode ser usado também para o choque oblíquo. Veremos um desses casos mais adiante.

3ª) Para os choques superelásticos temos $e > 1$.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

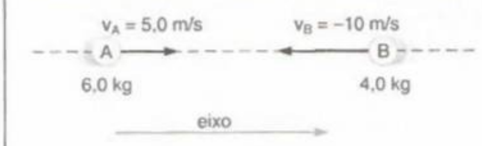
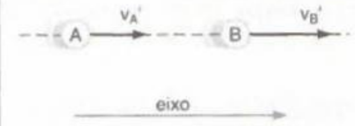
37 A figura ao lado representa a situação de duas partículas, *A* e *B*, um pouco antes de sofrerem um choque central direto elástico. Determine as velocidades das partículas logo após o choque.



Resolução:

Como vimos na teoria, dizer que o choque é *central direto* (ou *frontal*) é a mesma coisa que dizer que o choque é *unidimensional*.

Vamos adotar um eixo para atribuir sinais às velocidades (e às quantidades de movimento) e representar a situação inicial (Fig. a). Muitas vezes não conseguimos prever quais serão os sentidos das velocidades finais. Assim, o mais prático é supor inicialmente que ambas serão positivas (Fig. b); se alguma delas (ou ambas) for negativa, perceberemos no fim do problema.

Pouco antes do choque	Pouco depois do choque
 *Fig. a*	 *Fig. b*

Em primeiro lugar, imponhamos a conservação da quantidade de movimento:

$m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_B = m_A \cdot v'_A + m_B \cdot v'_B$

$(6{,}0)\,(5{,}0) + (4{,}0)\,(-10) = (6{,}0) \cdot v'_A + (4{,}0) \cdot v'_B$

ou: $(3{,}0) \cdot v'_A + (2{,}0) \cdot v'_B = -5{,}0$ (I)

A equação (I) não é suficiente para resolver o problema, pois temos duas incógnitas; assim, precisamos de mais uma equação, a qual será obtida usando-se o coeficiente de restituição. O enunciado diz que o choque é elástico; portanto, o coeficiente de restituição é igual a 1. Sendo:

v_R = |velocidade relativa antes do choque|

e v'_R = |velocidade relativa após o choque|

temos:

$$e = \frac{v'_R}{v_R} = 1 \qquad \text{(II)}$$

Da Fig. a, tiramos: $v_R = |5{,}0| + |-10|$ ou $v_R = 15$ m/s

Mas e quanto a v'_R? Fazemos $v'_A - v'_B$ ou $v'_B - v'_A$? Como após o choque as partículas estarão *necessariamente se afastando*, devemos ter $v'_B > v'_A$ e, portanto:

$v'_R = v'_B - v'_A$

Substituindo na equação (II):

$$\frac{v'_R}{v_R} = 1 \Rightarrow \frac{v'_B - v'_A}{15} = 1 \Rightarrow v'_B - v'_A = 15 \qquad \text{(III)}$$

Temos então um sistema formado pelas equações (I) e (III):

$$\begin{cases} 3{,}0\, v'_A + (2{,}0)\, v'_B = -5{,}0 \\ v'_B - v'_A = 15 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema obtemos:

$v'_A = -7{,}0$ m/s e $v'_B = +8{,}0$ m/s

O fato de obtermos $v'_A < 0$ significa que seu sentido é negativo e portanto a situação real após o choque é a da Fig. c.

Fig. c

38. Dois blocos, *A* e *B*, de massas respectivamente iguais a 3,0 kg e 1,0 kg, movem-se sobre uma superfície plana sem atrito e têm inicialmente as velocidades mostradas na figura. Supondo que o choque entre os blocos seja central direto e que o coeficiente de restituição seja igual a 0,60, determine:

a) os módulos e os sentidos das velocidades dos blocos após o choque.
b) a perda de energia cinética durante o choque.

39 Dois blocos, *A* e *B*, de massas respectivamente iguais a 0,1 kg e 15 kg movem-se sobre uma superfície plana, horizontal e sem atrito, como indica a figura. Supondo que o choque entre os blocos seja central direto e tenha coeficiente de restituição igual a 0,80, calcule os valores aproximados das velocidades dos blocos após o choque.

Resolução:

Pelos dados do problema percebemos que a massa do bloco *B* é *muito maior* que a massa do bloco *A*:

$$m_B = 150 \cdot m_A$$

Por outro lado, embora a velocidade de *A* seja maior que a de *B*, a diferença não é muito grande, de modo que a quantidade de movimento de *B* também é muito maior que a de *A*:

$$\left.\begin{array}{l} Q_A = (0{,}1\ \text{kg})\ (30\ \text{m/s}) = 3\ \text{kg} \cdot \text{m/s} \\ Q_B = (15\ \text{kg})\ (10\ \text{m/s}) = 150\ \text{kg} \cdot \text{m/s} \end{array}\right\} \Rightarrow Q_B = 50 \cdot Q_A$$

Assim, podemos supor que, após o choque, o bloco *B* continua com praticamente a mesma velocidade.

Antes do choque	Após o choque
	

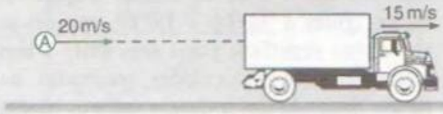
Nesse caso podemos resolver o problema usando apenas o coeficiente de restituição:

$$e = 0{,}80 = \frac{v'_R}{v_R} \cong \frac{10 - v'_A}{30 - 10} \Rightarrow \frac{10 - v'_A}{20} \cong 0{,}80 \Rightarrow v'_A \cong -6{,}0\ \text{m/s}$$

Portanto, após o choque teremos, *aproximadamente*, a situação representada na figura ao lado.

9

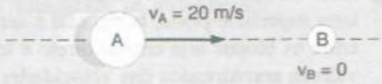
40. Uma bolinha *A*, de massa 0,2 kg, atinge com velocidade 20 m/s a traseira de um caminhão de massa igual a 2 toneladas, que se move a 15 m/s, como ilustra a figura. Supondo que a colisão seja elástica, determine:



a) os valores aproximados das velocidades da bolinha e do caminhão logo após o choque;

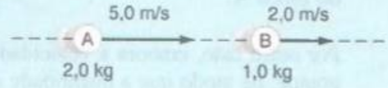
b) o sentido da velocidade da bolinha logo após o choque.

41. A figura ilustra a situação inicial de dois corpos, *A* e *B*, de massas respectivamente iguais a 400 kg e 2 kg. Supondo que o choque entre os corpos seja central direto e elástico, calcule os valores aproximados das velocidades após o choque.

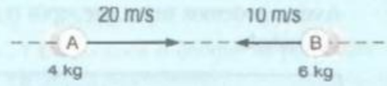


EXERCÍCIOS DE REFORÇO

42. A figura representa duas partículas, *A* e *B*, antes de uma colisão unidimensional. Sabendo que a colisão é elástica, calcule as velocidades das partículas após o choque.



43. Duas partículas, *A* e *B*, de massas 4 kg e 6 kg, movem-se sobre a mesma reta como mostra a figura. Sabendo que o coeficiente de restituição é 0,8 e que o choque é unidimensional, calcule:



a) as velocidades das partículas após o choque;

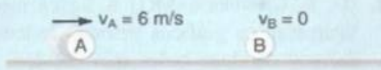
b) a perda de energia cinética durante o choque.

44. (PUCC-SP) Uma esfera de massa 4,0 kg, animada de velocidade de módulo 1,2 m/s, colide unidimensionalmente com outra esfera de massa 5,0 kg, que a move no mesmo sentido com velocidade de módulo 0,60 m/s. Sabendo que o coeficiente de restituição vale 0,50, determine as velocidades escalares das esferas após a colisão.

45. (CESGRANRIO-RJ) Observa-se uma colisão elástica e unidimensional, no referencial do laboratório, de uma partícula de massa *m* e velocidade de módulo 5,0 m/s com outra partícula de massa $\frac{m}{4}$, inicialmente em repouso. Quais são os valores dos módulos das velocidades das partículas após a colisão?

	Partícula de massa *m*	Partícula de massa $\frac{m}{4}$
a)	3,0 m/s	8,0 m/s
b)	4,0 m/s	6,0 m/s
c)	2,0 m/s	12,0 m/s
d)	6,0 m/s	4,0 m/s
e)	5,0 m/s	5,0 m/s

46. (PUC-MG) A bola *A*, de massa 0,1 kg e velocidade 6 m/s, colide elasticamente com a bola *B*, de massa 0,05 kg, que está parada. Após o impacto, *A* tem velocidade 2 m/s. A velocidade de *B* após o choque é:



a) 2 m/s b) 4 m/s c) 6 m/s d) 8 m/s e) 10 m/s

47. (E. E. Mauá-SP) Uma bola desloca-se em translação, com velocidade escalar $v_1 = 2{,}0$ m/s, num plano horizontal sem atrito. Choca-se frontalmente com outra bola idêntica, em repouso, e prossegue seu movimento na mesma direção e sentido com velocidade escalar $v'_1 = 0{,}50$ m/s.

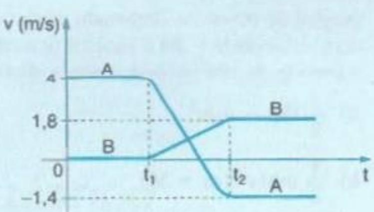
a) Calcule a velocidade escalar da segunda bola.
b) Verifique se houve conservação de energia cinética. Que se pode concluir?

48. (FUVEST-SP) Uma esfera *A* de 2 kg desloca-se numa superfície horizontal, sem atrito, com velocidade de 3 m/s, e atinge frontalmente uma segunda esfera *B*, de massa *M*, inicialmente em repouso. Após o choque, perfeitamente elástico, a esfera *A* recua com uma velocidade de 1 m/s. Podemos afirmar que, após o choque:

a) o módulo da quantidade de movimento da esfera *B* é maior que o da esfera *A*.
b) a energia cinética da esfera *A* é maior que a da esfera *B*.
c) as esferas possuirão a mesma quantidade de movimento.
d) a esfera *A* recua porque *B* tem menor massa.
e) as esferas possuirão a mesma energia cinética.

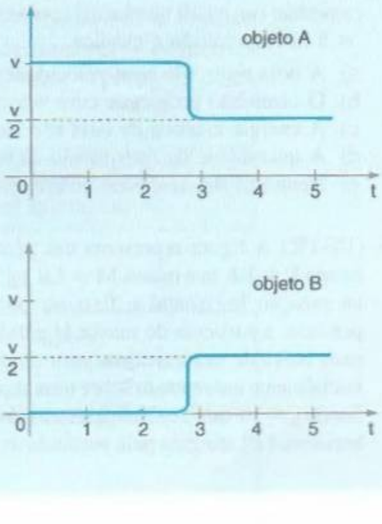
49. (UF-CE) Duas partículas, *A* e *B*, realizam uma colisão unidimensional. O gráfico a seguir representa as velocidades escalares de *A* e de *B*, tendo a colisão início no instante t_1 e término no instante t_2.

a) Qual o coeficiente de restituição na colisão esquematizada?
b) Qual a relação entre as massas de *A* e de *B*?

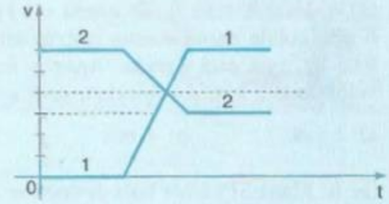


50. (FUVEST-SP) Os gráficos representam as velocidades, em função do tempo, de dois objetos esféricos homogêneos idênticos, que colidem frontalmente. Se *p* é a quantidade de movimento do sistema formado pelos dois objetos e *E* a energia cinética deste mesmo sistema, podemos afirmar que na colisão:

a) *p* se conservou e *E* não se conservou.
b) *p* se conservou e *E* se conservou.
c) *p* não se conservou e *E* se conservou.
d) *p* não se conservou e *E* não se conservou.
e) (p + E) se conservou.



51. (U. F. Uberlândia-MG) A figura mostra esquematicamente os gráficos velocidade-tempo dos movimentos de duas bolas que colidem segundo uma mesma direção. Assinale a alternativa correta:

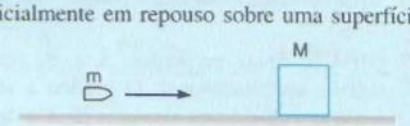


a) a colisão foi perfeitamente inelástica
b) após a colisão a bola 2 inverteu o sentido de seu movimento
c) a colisão foi perfeitamente elástica
d) em nenhum instante as bolas possuíram a mesma velocidade escalar
e) a relação entre suas massas é $M_2/M_1 = 2$

52. Um corpo *A* de massa *m*, movendo-se com velocidade de 10 m/s, choca-se com um segundo corpo, *B*, idêntico ao primeiro, que se encontrava em repouso. Considerando que a colisão seja completamente inelástica, pode-se afirmar que:

a) *A* entra em repouso e *B* adquire uma velocidade exatamente igual à que *A* possuía antes da colisão.
b) a velocidade de *A* não se modifica.
c) a energia cinética do sistema antes da colisão é 100% maior do que a energia cinética do sistema após a colisão.
d) a energia cinética do sistema aumenta, pois após a colisão os corpos se juntam formando um único corpo de massa 2m.
e) tanto *A* quanto *B* ficarão em repouso após a colisão.

53. (CESESP-PE) Um bloco de madeira de massa *M*, inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal perfeitamente lisa, é atingido por um projétil de massa *m*, disparado na direção horizontal com velocidade *v*. Se o projétil fica retido no bloco, a parcela de sua energia cinética dissipada é:



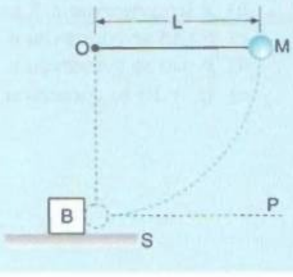
a) $\frac{1}{2}(M - m)v^2$ c) $\frac{1}{2}Mv^2$ e) zero

b) $\frac{1}{2}mMv^2/(m + M)$ d) $\frac{1}{2}(m + M)v^2$

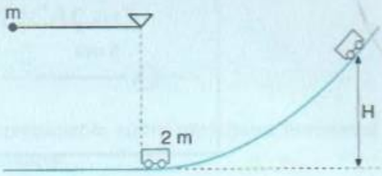
54. (FATEC-SP) Uma bola de futebol ($m_1 = 0{,}50$ kg) atinge com velocidade $v_1 = 20$ m/s a traseira de um caminhão ($m_2 = 10$ toneladas) com velocidade $v_2 =$ $= 5$ m/s. A colisão é elástica.

a) A bola retrocede com velocidade próxima de 10 m/s.
b) O caminhão prossegue com velocidade sensivelmente aumentada.
c) A energia cinética da bola não varia.
d) A quantidade de movimento da bola não varia.
e) Nenhuma das respostas anteriores.

55. (UF-PR) A figura representa um pêndulo simples de comprimento L = 1,8 m e massa M = 4,0 kg, inicialmente em repouso na posição horizontal e fixo no ponto *O*. Ao liberarmos o pêndulo, a partícula de massa *M* colide elasticamente, na parte mais baixa de sua trajetória, com um bloco *B* de massa 2,0 kg, inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal e lisa *S*. Sendo $g = 10$ m/s², calcule a altura máxima (em relação ao plano horizontal *P*) atingida pela partícula de massa *M*, após a colisão.

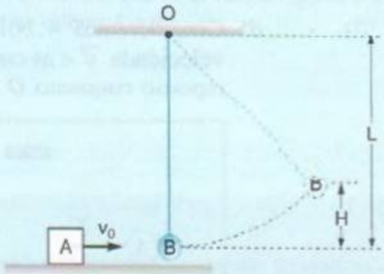


56. (CESGRANRIO-RJ) Na figura, a bolinha do pêndulo simples, de comprimento L, tem massa m e é largada, sem velocidade inicial, com o fio do pêndulo na horizontal. Ao passar pelo ponto mais baixo de sua trajetória, a bolinha colide frontal e elasticamente com um carrinho de massa 2m, inicialmente em repouso e apoiado em um trilho que é horizontal naquela região. Depois do choque, o carrinho se desloca sem atrito ao longo do trilho e sobe até uma determinada altura máxima H. O valor de H é:



a) L b) $\frac{L}{2}$ c) $\frac{L}{4}$ d) $\frac{2L}{3}$ e) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 L$

57. (FEI-SP) Um corpo A, de massa 2,0 kg, é lançado com velocidade $v_0 = 4{,}0$ m/s num plano horizontal liso, colidindo com a esfera B, de massa 5,0 kg. A esfera, inicialmente parada, suspensa por um fio ideal de comprimento L e fixo em O, atinge a altura máxima $H = 0{,}20$ m após a colisão. Adote $g = 10$ m/s^2.



a) Qual a velocidade da esfera B imediatamente após o choque?
b) Qual o módulo e o sentido da velocidade do corpo A após a colisão?
c) Qual a perda de energia cinética no choque?
d) O choque foi elástico?

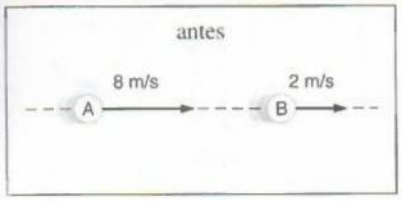
6. CHOQUE UNIDIMENSIONAL E ELÁSTICO ENTRE DUAS PARTÍCULAS DE MASSAS IGUAIS

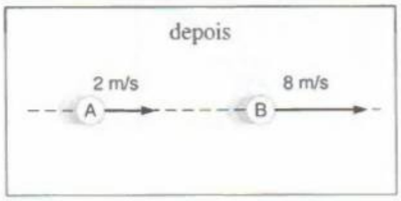
Um caso interessante de colisão é o do choque unidimensional e elástico entre duas partículas, A e B, de massas iguais. É possível demonstrar (e o faremos no item 10 deste capítulo) que, após o choque, há uma "permuta" das velocidades, isto é:

velocidade vetorial final de A = velocidade vetorial inicial de B
velocidade vetorial final de B = velocidade vetorial inicial de A

Vejamos alguns exemplos:

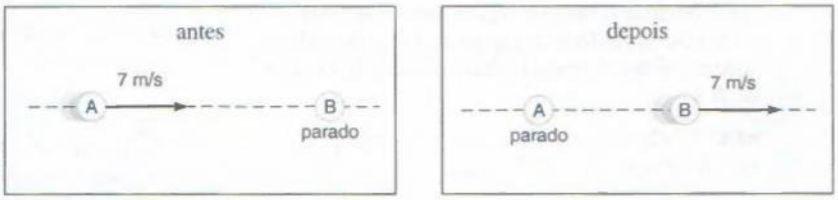
a)



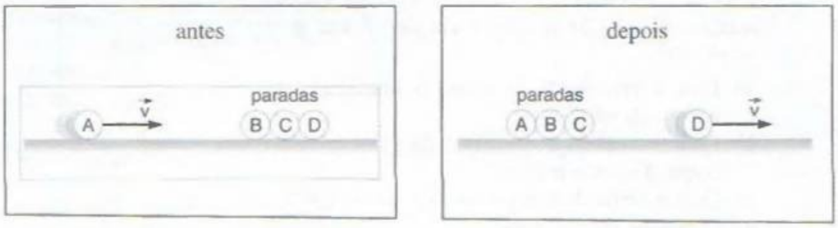


b)

c)

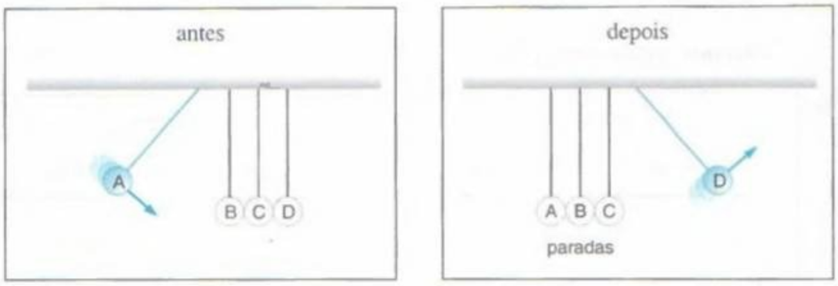


d) Consideremos 4 bolas, idênticas e alinhadas, tais que inicialmente *A* tem velocidade $\vec{v}$ e as outras estão em repouso. Após o choque, *A*, *B* e *C* ficam em repouso enquanto *D* sai com velocidade $\vec{v}$.



e) Na figura a seguir temos 5 bolas idênticas e alinhadas tanto antes como depois do choque. Inicialmente as bolas *A* e *B* têm velocidade $\vec{v}$, enquanto as outras três estão em repouso. Após o choque, *A*, *B* e *C* ficam em repouso, enquanto *D* e *E* saem com velocidade $\vec{v}$.

f) Situações semelhantes às anteriores ocorrem com pêndulos de mesmo comprimento, tendo em seus extremos esferas idênticas.



EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

58 Duas esferas (1 e 2), de massas iguais, colidem frontalmente sobre uma mesa horizontal sem atrito. Não há perda de energia mecânica no choque.
Determine a velocidade escalar da esfera (2) antes e depois do choque.

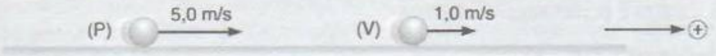
Resolução:

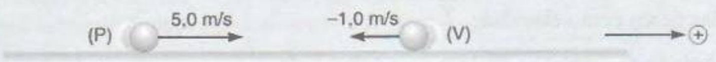
Como não há perda de energia mecânica, o choque é elástico. Sendo as massas iguais e a colisão elástica, há uma troca de velocidades entre as esferas 1 e 2.

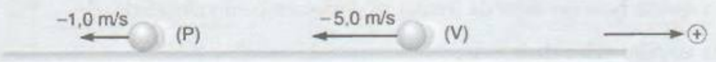
Logo: $v_2 = v'_1$ $\quad \boxed{v_2 = -3{,}0 \text{ m/s}}$

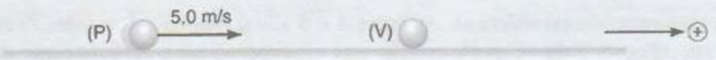
$v'_2 = v_1$ $\quad \boxed{v'_2 = +2{,}0 \text{ m/s}}$

59. Numa mesa de bilhar as bolas preta (*P*) e vermelha (*V*) realizaram uma colisão unidimensional perfeitamente elástica. Suas massas são exatamente iguais. As figuras abaixo mostram-nas em diversas situações, imediatamente antes do choque.
Determine a *velocidade escalar* de cada uma delas, em relação ao eixo orientado, imediatamente após o choque.

a) 

b) 

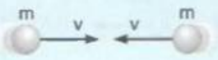
c) 

d) 

60. Os corpos *A* e *B* têm massas iguais. O corpo *A* é abandonado em repouso no ponto *O* e realiza uma colisão frontal e perfeitamente elástica com *B*. Que altura atingirá *B*? Despreze os atritos.

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

61. (CESGRANRIO-RJ) Duas bolas de aço, idênticas, de massa m, movimentam-se em sentidos opostos (veja a figura), com velocidade de módulo v.



Assinale a opção que melhor representa as velocidades das bolas imediatamente depois da colisão elástica:

a) 

d) 

b) 

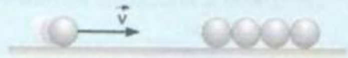
e) 

c) 

62. (FUVEST-SP) Uma bola preta, de massa m e velocidade $\vec{v}$, movendo-se sobre uma superfície muito lisa, sofre uma colisão frontal, perfeitamente elástica, com uma bola vermelha idêntica, que estava parada. Após a colisão, qual a velocidade da bola preta?

a) $\vec{v}$ b) $\frac{\vec{v}}{2}$ c) 0 d) $-\frac{\vec{v}}{2}$ e) $-\vec{v}$

63. (FCMSC-SP) Quatro bolas idênticas estão encostadas uma em seguida à outra, em fila. Uma quinta bola, idêntica às anteriores, com velocidade $\vec{v}$ horizontal, dirigida segundo o eixo comum das bolas, atinge a primeira bola da fila. Nestas condições, após o choque, suposto central e perfeitamente elástico:



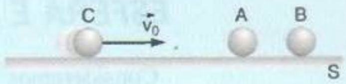
antes do choque

a) as 4 bolas da fila adquirem velocidade $\frac{\vec{v}}{4}$.
b) todas as bolas ficam com velocidade $\frac{\vec{v}}{5}$.
c) só a quarta bola (a da frente) se desloca com velocidade $\vec{v}$.
d) a terceira e a quarta bola (as duas da frente) se deslocam com velocidade $\frac{\vec{v}}{2}$.
e) a quinta bola adquire velocidade $-\vec{v}$.

64. A figura abaixo apresenta 5 bolas idênticas. As bolas A e B têm a mesma velocidade $\vec{v}$, enquanto C, D e E estão em repouso. Sabe-se que a colisão será unidimensional e perfeitamente elástica. Após a colisão:

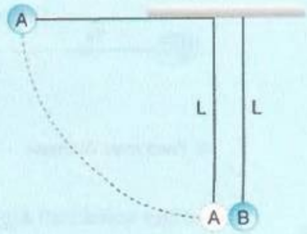
a) a bola E adquire velocidade $2\vec{v}$ e as demais permanecem em repouso.
b) as bolas D e E adquirem velocidade $\vec{v}$ e as outras três permanecem em repouso.
c) as bolas C, D e E adquirem velocidade $\vec{v}$, enquanto A e B permanecem em repouso.
d) pode ser que a bola E adquira velocidade $\vec{v}$ e as outras quatro permaneçam em repouso.
e) as bolas C, D e E adquirem velocidades respectivamente iguais a $\frac{\vec{v}}{2}$, $\frac{\vec{v}}{2}$ e $\vec{v}$, enquanto A e B permanecem em repouso.

65. (Mackenzie-SP) Duas bolas de bilhar idênticas, *A* e *B*, inicialmente em repouso, estão alinhadas com uma outra (*C*) idêntica às primeiras e animada com velocidade $v_0 = 12$ m/s, numa superfície *S* sem atrito. A bola *C* colide elasticamente com a bola *A*, a qual, por sua vez, choca-se elasticamente com a bola *B*. A velocidade da bola *B* após o choque será:



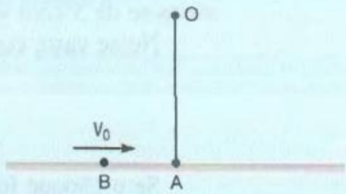
a) 3,0 m/s b) 4,0 m/s c) 6,0 m/s d) 9,0 m/s e) 12 m/s

66. (U. F. Uberlândia-MG) A figura mostra dois pêndulos de massas iguais e comprimentos L = 5 m. Eleva-se o pêndulo *A* até a posição horizontal, onde é então abandonado. Sendo $g = 10$ m/s^2, as alturas máximas atingidas pelas esferas *A* e *B* após a primeira colisão serão, respectivamente (a colisão é elástica):



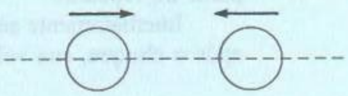
a) 5 m e 5 m
b) zero e 5 m
c) 2,5 m e 2,5 m
d) 3 m e 3 m
e) zero e 3 m

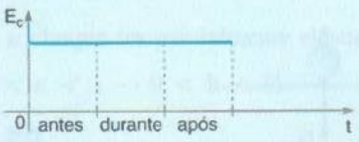
67. (UNICAMP-SP) Uma esferazinha *A* de massa *m* está presa a um pino *O* por um fio leve e inextensível e tangencia um plano horizontal liso. Uma segunda esferazinha *B*, de massa *m* e deslocando-se com velocidade $v_0 = 1{,}0$ m/s vai chocar-se frontalmente com a primeira em repouso. Admita que todas as possíveis colisões neste evento são perfeitamente elásticas.

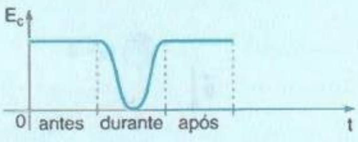


a) quantas colisões haverá entre as duas esferazinhas?
b) quais as velocidades das esferazinhas imediatamente após a última colisão?

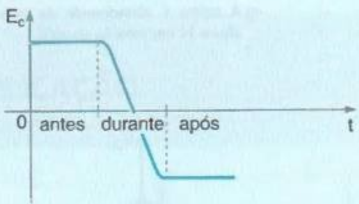
68. (FCMSC-SP) A figura adiante representa duas esferas maciças, homogêneas, iguais entre si, animadas somente de movimentos de translação, que estão prestes a se chocar frontalmente. Antes do choque, as velocidades dessas esferas são constantes e têm o mesmo módulo, a mesma direção e sentidos opostos. Qual dos gráficos adiante melhor representa a variação da energia cinética de uma das esferas *antes* e *após* o choque, se, durante todo este tempo, a direção de seus movimentos não se alterou e o choque foi perfeitamente elástico?



a)


d)


b)


e)


c)


7. CHOQUE UNIDIMENSIONAL ENTRE UMA ESFERA E UMA SUPERFÍCIE FIXA

Consideremos uma esfera lançada contra uma superfície plana e fixa S (Fig. 13a), de modo que um pouco antes do choque a esfera tem velocidade $\vec{v}_a$ cuja direção é *perpendicular* a S.

a) Pouco antes do choque b) Durante o choque, a esfera se deforma c) Pouco depois do choque

Fig. 13

Supondo que o choque não seja inelástico, logo depois do choque a esfera afasta-se de S com velocidade $\vec{v}_d$ cuja direção é perpendicular a S.

Nesse caso, como S é fixa, o coeficiente de restituição será dado por:

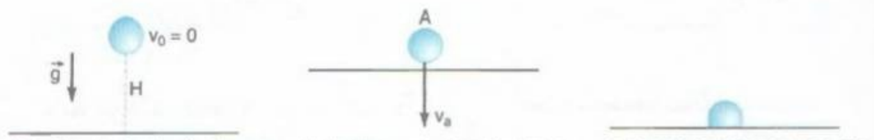
$$e = \frac{v_a}{v_d}$$

Se o choque for elástico, teremos $e = 1$ e portanto $v_a = v_d$.

Caso em que a superfície é horizontal

Estudemos, particularmente, o caso de uma esfera de massa m que é abandonada em queda livre de uma altura H, em relação ao solo rígido (Fig. 14a), a partir do repouso.

Imediatamente antes de atingir o solo, sua velocidade tem módulo v_a e, logo após o choque, sua velocidade tem módulo v_d.



a) A esfera é abandonada de uma altura H em relação ao solo. b) Imediatamente antes de atingir o solo, sua velocidade tem módulo v_a. c) Durante a colisão contra o solo rígido, a esfera se deforma e converte energia cinética em potencial elástica.

d) Imediatamente após deixar o solo, sua velocidade tem módulo v_d.

Fig. 14

e) Após a colisão, a esfera atinge a altura h.

O coeficiente de restituição é dado por:

$$e = \frac{v_d}{v_a} \qquad \text{(I)}$$

A seguir, vamos relacionar: *h*, *H* e o coeficiente de restituição *e*. Admitindo a queda livre (resistência do ar desprezível), bem como livre a subida, poderemos aplicar o teorema da conservação da energia mecânica entre a posição inicial e o solo.

$$E_{p_0} + E_{c_0} = E_{p_a} + E_{c_a} \quad \text{(imediatamente antes do choque)}$$

$$mgH + 0 = 0 + \frac{m \cdot v_a^2}{2}$$

$$2gH = v_a^2 \qquad v_a = \sqrt{2gH} \qquad \text{(II)}$$

Aplicando novamente o teorema da conservação da energia mecânica entre o solo e a posição final:

$$E_{c_f} + E_{p_f} = E_{c_d} + E_{p_d} \quad \text{(imediatamente depois do choque)}$$

$$0 + mgh = \frac{m \cdot v_d^2}{2} + 0$$

$$v_d = \sqrt{2gh} \qquad \text{(III)}$$

Substituindo (II) e (III) em (I), vem:

$$e = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gH}} \qquad e = \sqrt{\frac{h}{H}}$$

Assim, teremos os seguintes casos:

a) se o choque for anelástico:

$e = 0 \rightarrow h = 0$

b) se o choque for elástico:

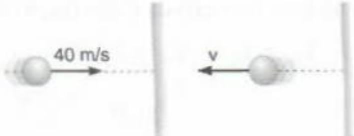
$e = 1 \rightarrow h = H$

c) se o choque for parcialmente elástico:

$0 < e < 1 \rightarrow 0 < h < H$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

69 Uma partícula incide sobre uma superfície fixa, perpendicularmente a ela, com velocidade 40 m/s. Sabendo que o coeficiente de restituição é e = 0,70, calcule o módulo da velocidade *v* com que a partícula retorna.



Resolução:

Sendo $e = \frac{v_d}{v_a}$ e sendo: $e = 0{,}70$; $v_d = v$; $v_a = 40$ m/s, vem:

$0{,}70 = \frac{v}{40}$

$\boxed{v = 28 \text{ m/s}}$

70. Um jogador chutou uma bola na trave com velocidade horizontal de módulo 30 m/s. A bola voltou com uma velocidade de módulo 24 m/s, também de direção horizontal. Determine o coeficiente de restituição do choque.

71. A bola de borracha da Fig. a incide perpendicularmente contra o obstáculo de cimento. Sabendo que o choque apresentou coeficiente de restituição $e = 0{,}50$, determine o módulo da velocidade v_d com que ela se afasta dele.

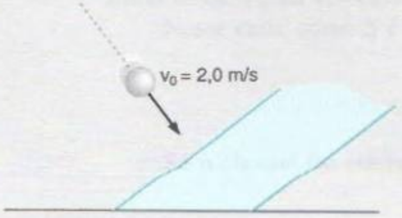


Fig. a

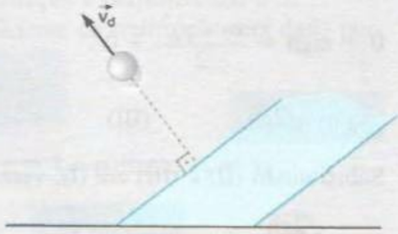
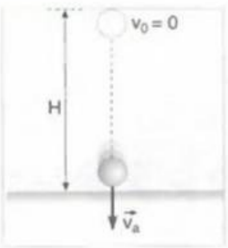


Fig. b

72. Partindo do repouso, uma bola é abandonada em queda livre de uma altura de 20 m em relação ao solo, plano e horizontal. Após a colisão, ela ganha uma altura máxima de 5,0 m. Dado $g = 10$ m/s², determine:

a) a velocidade de impacto contra o solo;
b) a velocidade imediatamente depois do choque;
c) o coeficiente de restituição.

Resolução:



a) Pelo Princípio da Conservação da Energia:

$E_{c_0} + E_{p_0} = E_{c_a} + E_{p_a}$

$\frac{m \cdot v_0^2}{2} + m \cdot g \cdot H = \frac{m \cdot v_a^2}{2} + m \cdot g \cdot 0$

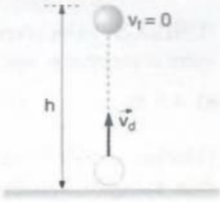
Fazendo as substituições obtemos $v_a = 20$ m/s.

b) Pelo Princípio da Conservação da Energia aplicado depois do choque:

$E_{c_d} + E_{p_d} = E_{c_f} + E_{p_f}$

$\frac{m \cdot v_d^2}{2} + m \cdot g \cdot 0 = \frac{m \cdot v_f^2}{2} + m \cdot g \cdot h$

v_d é a velocidade imediatamente depois do choque.
v_f é a velocidade no pico da trajetória: $v_f = 0$.



$$\frac{m \cdot v_d^2}{2} = m \cdot g \cdot h$$

$$v_d^2 = 2gh = 2(10)(5{,}0) \Rightarrow \boxed{v_d = 10 \text{ m/s}}$$

c) O coeficiente de restituição pode ser calculado de dois modos:

$$e = \frac{v_d}{v_a} = \frac{10}{20} \qquad \boxed{e = 0{,}50}$$

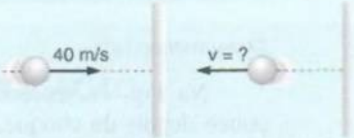
$$\text{ou:} \quad e = \sqrt{\frac{h}{H}} = \sqrt{\frac{5{,}0}{20}} \qquad \boxed{e = 0{,}50}$$

73. Abandona-se de uma altura de 10,0 m uma bolinha de borracha. Sua queda é livre da resistência do ar. Após colidir com o solo, ela consegue alcançar a altura máxima de 6,40 m. Determine:
a) o coeficiente de restituição do choque;
b) o valor aproximado da velocidade da bolinha, imediatamente após o choque. Adote $g = 10{,}0 \text{ m/s}^2$.

74. Abandona-se, a partir do repouso, uma bola de tênis de uma altura de 8,0 m. Após dois choques sucessivos com o solo, ela alcançou a altura de 2,0 m. Determine o coeficiente de restituição dos choques.

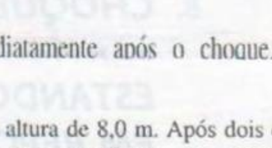
EXERCÍCIOS DE REFORÇO

75. Uma partícula incide sobre uma superfície fixa, perpendicularmente a ela, com velocidade 40 m/s. Sabendo que o coeficiente de restituição é 0,7, calcule a velocidade v com que a partícula retorna.



76. Uma partícula incide perpendicularmente contra uma placa de aço que permanece imóvel com o choque. Imediatamente antes do choque a energia cinética era de $2{,}5 \cdot 10^3$ J e, após o choque, de $9{,}0 \cdot 10^2$ J. Determine o coeficiente de restituição do choque.

77. Uma pequena esfera presa a um fio inextensível, flexível e sem massa, como na figura, é abandonada do repouso em A, oscila livremente até B, onde se choca com um plano rígido. O coeficiente de restituição é 0,1. A esfera, após o choque, volta até a máxima altura em C. Quanto ao ângulo θ pode-se dizer que:



a) $\theta = 0°$
b) $0° < \theta < 45°$
c) $\theta = 45°$
d) $45° < \theta < 90°$
e) $\theta = 135°$

78. (UNISA-SP) Um corpo é largado de uma altura de 20 m; sabendo que o coeficiente de restituição entre o corpo e o solo é 0,50, a nova altura atingida pelo corpo é de:

a) 4,5 m b) 5,0 m c) 4,0 m d) 10 m e) 15 m

79. (Mackenzie-SP) De um ponto situado a 12 m acima do solo abandona-se uma bola, a qual, após dois choques sucessivos com o solo, alcança uma altura de 6 m. Podemos concluir que o coeficiente de restituição vale:

a) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ b) $\sqrt{\frac{1}{6}}$ c) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ d) $\sqrt{\frac{1}{5}}$ e) $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

80. (Mackenzie-SP) Uma esfera de 0,5 kg, abandonada de uma altura de 1,8 m, choca-se com o solo. Adote $g = 10\ m/s^2$. Sabe-se que o choque dura 0,02 s e que o coeficiente de restituição entre a esfera e o solo é 0,8.

Nessas condições, podemos afirmar que a força média que age sobre a esfera durante o choque é:

a) 54 N b) 108 N c) 162 N d) 216 N e) 270 N

9

8. CHOQUE OBLÍQUO E ELÁSTICO ENTRE PARTÍCULAS DE MASSAS IGUAIS, ESTANDO UMA DELAS INICIALMENTE EM REPOUSO

Um caso de choque oblíquo que tem muito interesse em experiências de Física Nuclear é aquele em que as partículas têm a mesma massa, o choque é elástico e uma das partículas está inicialmente em repouso. É o caso, por exemplo, da colisão elástica entre um próton e outro próton inicialmente em repouso.

É possível demonstrar (e o faremos a seguir) que após o choque:

as partículas movem-se em direções perpendiculares

Demonstração:

Na Fig. 15 representamos as situações um pouco antes do choque e um pouco depois do choque.

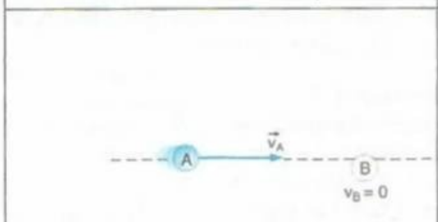
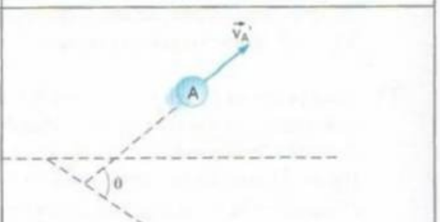
Pouco antes do choque	Pouco depois do choque
 a)	 b)

Fig. 15

Por enquanto, representemos por θ o ângulo formado pelas direções dos movimentos logo após o choque.

As partículas têm a mesma massa *m*. Portanto, suas quantidades de movimento antes e depois do choque são:

$\vec{Q}_A = m \cdot \vec{v}_A \qquad \vec{Q}'_A = m \cdot \vec{v}'_A$

$\vec{Q}_B = 0 \qquad \vec{Q}'_B = m \cdot \vec{v}'_B$

Impondo a conservação da quantidade de movimento, temos (Fig. 16):

$$\vec{Q}_A + \vec{Q}_B = \vec{Q}'_A + \vec{Q}'_B$$

ou $$\vec{Q}_A = \vec{Q}'_A + \vec{Q}'_B$$

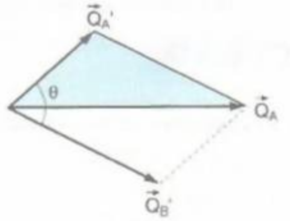


Fig. 16

Como o choque é elástico, há conservação da energia cinética:

$$\frac{1}{2} m \cdot v_A^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_A'^2 + \frac{1}{2} m \cdot v_B'^2 \qquad (I)$$

Multiplicando todos os termos da equação (I) por 2m, obtemos:

$$m^2 v_A^2 = m^2 v_A'^2 + m^2 \cdot v_B'^2$$

ou: $$(mv_A)^2 = (m \cdot v'_A)^2 + (m \cdot v'_B)^2$$

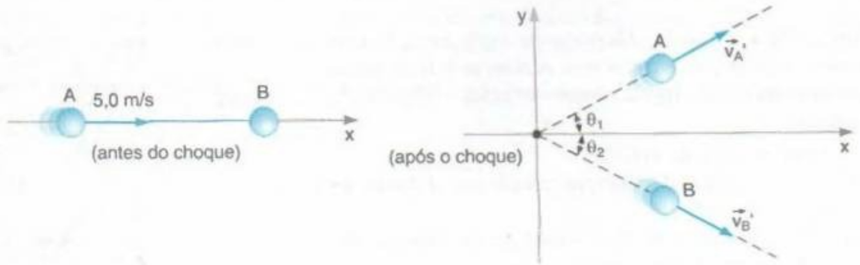
ou ainda: $$|\vec{Q}_A|^2 = |\vec{Q}'_A|^2 + |\vec{Q}'_B|^2 \qquad (II)$$

Mas a equação (II) corresponde ao Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo sombreado da Fig. 16. Portanto, o triângulo é retângulo e temos:

$$\boxed{\theta = 90°}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

81 Duas esferas, de massa m = 2,0 kg cada uma, realizam uma colisão elástica, conforme mostra a figura. A esfera *B* estava inicialmente em repouso. Dado cos θ_1 = 0,6.



Determine:

a) a soma $(\theta_1 + \theta_2)$;

b) os módulos das velocidades após o choque:

Resolução:

a) O choque oblíquo foi elástico, uma das esferas estava em repouso e suas massas são iguais. Conforme se demonstrou, as esferas após o choque espalham-se no plano e as direções de seus movimentos são perpendiculares.

Assim: $\theta_1 + \theta_2 = 90°$

b) Inicialmente determinemos alguns valores trigonométricos úteis no problema:

$\cos\theta_1 = 0{,}6 \rightarrow \text{sen}\,\theta_1 = 0{,}8$

$\theta_1 + \theta_2 = 90° \rightarrow \text{sen}\,\theta_2 = \cos\theta_1 = 0{,}6$

$\cos\theta_2 = \text{sen}\,\theta_1 = 0{,}8$

Da conservação da quantidade de movimento, segundo x:

$\cancel{m} \cdot v_A = \cancel{m} \cdot v'_A \cdot \cos\theta_1 + \cancel{m} \cdot v'_B \cdot \cos\theta_2$

$5{,}0 = (v'_A) \cdot 0{,}6 + (v'_B) \cdot 0{,}8 \qquad \text{(I)}$

Da conservação da quantidade de movimento, segundo y:

$0 = \cancel{m} \cdot v'_A \cdot \text{sen}\,\theta_1 - \cancel{m} \cdot v'_B \cdot \text{sen}\,\theta_2$

$0 = (v'_A) \cdot 0{,}8 - (v'_B) \cdot 0{,}6$

$(v'_B) \cdot 0{,}6 = (v'_A) \cdot 0{,}8$

$v'_B = \frac{4}{3} v'_A \qquad \text{(II)}$

Substituindo-se (II) em (I), vem:

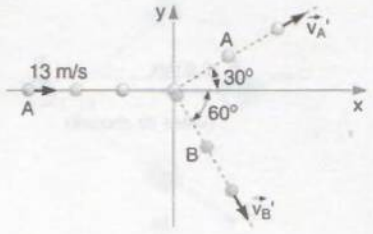
$5{,}0 = (v'_A) \cdot 0{,}6 + \frac{4}{3} \cdot 0{,}8 \cdot (v'_A)$

Então: $v'_A = 3{,}0 \text{ m/s}$

Voltando-se em (II), vem:

$v'_B = \frac{4}{3} \cdot 3{,}0 \qquad v'_B = 4{,}0 \text{ m/s}$

82. Uma esfera A colide obliquamente com outra B, que estava inicialmente em repouso. Ambas as esferas têm a mesma massa. A figura mostra-as antes e depois da colisão.



a) Qual é o tipo de colisão?

b) Houve perda de energia mecânica durante a colisão?

c) Há conservação de quantidade de movimento de cada esfera? E do sistema?

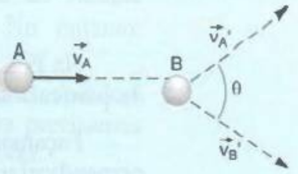
83. Retome a questão anterior e determine o módulo das velocidades das esferas após a colisão.

84. Em uma experiência de laboratório projetou-se um próton de massa m com velocidade $\vec{v}$ de encontro a um nêutron, de mesma massa, inicialmente em repouso. Supondo que a colisão tenha sido elástica, na qual o próton sofreu um desvio angular de 45° na sua trajetória, determine:
a) o módulo da velocidade de cada partícula após o choque;
b) a direção do movimento do nêutron (dê o ângulo medido com a direção inicial do movimento do próton);
c) a energia cinética que se transferiu para o nêutron durante a colisão.

9

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

85. (Fund. Carlos Chagas-SP) Uma bola de bilhar A choca-se com uma bola idêntica B, que estava inicialmente em repouso. Suponha que o choque é elástico e que não há atritos ou outras forças passivas a considerar. Após o choque as bolas seguem em direções diferentes, as quais formam um ângulo θ. O valor de θ:



a) é igual a 90°.
b) é superior a 90°.
c) é não-nulo, maior que 0° e menor que 90°.
d) não pode ser calculado apenas com os dados fornecidos.
e) é igual a 45°.

86. (E. E. Mauá-SP) Um bloco de massa m e velocidade $v_1 = 2{,}00$ m/s colide elasticamente com um outro bloco idêntico, que se encontra parado. Após a colisão, o segundo bloco desloca-se com velocidade $v_2 = 1{,}74$ m/s numa direção que forma um ângulo $\theta = 30°$ com a direção do movimento inicial do primeiro bloco. Determine, imediatamente após a colisão:
a) o desvio angular sofrido pela trajetória do primeiro bloco;
b) a velocidade do primeiro bloco.

87. (UELON-PR) P e Q são dois corpos iguais que interagem numa colisão perfeitamente elástica. Antes da colisão, Q estava em repouso e P estava em movimento horizontal de Norte para Sul com velocidade escalar V_0. Durante a colisão, a velocidade vetorial de P sofre um desvio de 60° para Leste, e passa a ter módulo $\frac{V_0}{2}$. Nessas condições, a velocidade de Q, após a colisão, tem módulo V, tal que:

a) $V = \frac{V_0}{2}$
b) $V = \frac{3V_0}{4}$
c) $V = V_0 \frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $V = V_0 \frac{\sqrt{3}}{3}$
e) $V = V_0 \frac{\sqrt{3}}{4}$

9. CHOQUE OBLÍQUO CONTRA PLANO LISO E FIXO

Consideremos uma partícula lançada com velocidade $\vec{v}_i$ contra um plano liso e fixo, obliquamente a ele (Fig. 17). Supondo que o choque não seja inelástico, a partícula será "rebatida" com velocidade $\vec{v}_f$.

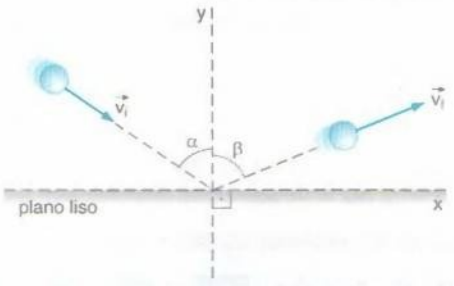


Fig. 17

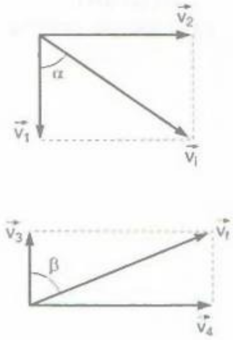


Fig. 18

Na Fig. 17, a reta y é perpendicular ao plano e passa pelo ponto de impacto da partícula sobre o plano.

Façamos as decomposições de $\vec{v}_i$ e $\vec{v}_f$ segundo as direções das retas perpendiculares x e y (Fig. 18).

$$\begin{cases} v_1 = v_i \cdot \cos\alpha \\ v_2 = v_i \cdot \text{sen}\,\alpha \end{cases} \quad \text{(I)} \quad \begin{cases} v_3 = v_f \cdot \cos\beta \\ v_4 = v_f \cdot \text{sen}\,\beta \end{cases}$$

Como o plano é liso, ele não exerce forças sobre a partícula na direção x; assim, na direção x não há mudança de velocidade:

$$v_2 = v_4 \Rightarrow v_i \cdot \text{sen}\,\alpha = v_f \cdot \text{sen}\,\beta \quad \text{(II)}$$

Para a direção y podemos usar o coeficiente de restituição:

$$e = \frac{v_3}{v_1} = \frac{v_f \cdot \cos\beta}{v_i \cdot \cos\alpha} \Rightarrow e \cdot v_i \cdot \cos\alpha = v_f \cdot \cos\beta \quad \text{(III)}$$

Dividindo membro a membro as equações (II) e (III), temos:

$$\frac{v_i \cdot \text{sen}\alpha}{e \cdot v_i \cdot \cos\alpha} = \frac{v_f \cdot \text{sen}\,\beta}{v_f \cdot \cos\beta} \Rightarrow \boxed{\text{tg}\,\alpha = e \cdot \text{tg}\,\beta}$$

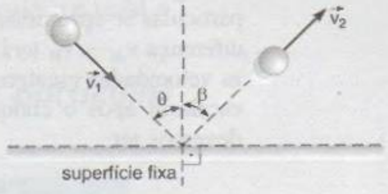
Se o choque for elástico, o coeficiente de restituição será igual a 1 e assim teremos $\alpha = \beta$.

EXERCÍCIO DE APLICAÇÃO

88. Uma partícula incide sobre uma superfície fixa, plana e sem atrito, com ângulo de incidência $\theta = 45°$ (como indica a figura) e velocidade cujo módulo é $v_1 = 10\sqrt{2}$ m/s. Sabendo que o coeficiente de restituição é 0,80, determine:

a) o ângulo de reflexão β;

b) o módulo da velocidade da partícula (v_2) logo após o choque.



10. DUAS DEMONSTRAÇÕES SOBRE O CHOQUE UNIDIMENSIONAL

Neste item vamos demonstrar duas propriedades referentes ao choque unidimensional que foram apenas enunciadas anteriormente. No entanto, primeiramente vamos reformular o conceito de velocidade relativa.

A maneira como calculamos a velocidade relativa no item 4 deste capítulo é a mais prática para a resolução de problemas. No entanto, quando precisamos fazer uma análise mais ampla, é conveniente calculá-la de outro modo.

Suponhamos duas partículas, *A* e *B*, movendo-se sobre um mesmo eixo, com velocidades escalares v_A e v_B. A *velocidade de A em relação a B* é representada por v_{AB} e pode ser calculada por:

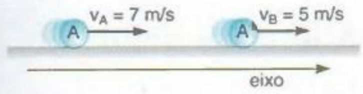
$$v_{AB} = v_A - v_B$$

Analogamente, a *velocidade de B em relação a A* é representada por v_{BA} e é calculada por:

$$v_{BA} = v_B - v_A$$

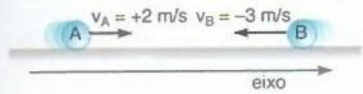
Exemplos:

a)



$$\begin{cases} v_{AB} = v_A - v_B = 7 \text{ m/s} - 5 \text{ m/s} = 2 \text{ m/s} \\ v_{BA} = v_B - v_A = 5 \text{ m/s} - 7 \text{ m/s} = -2 \text{ m/s} \end{cases}$$

b)



$$\begin{cases} v_{AB} = v_A - v_B = (+2 \text{ m/s}) - (-3 \text{ m/s}) = +5 \text{ m/s} \\ v_{BA} = v_B - v_A = (-3 \text{ m/s}) - (+2 \text{ m/s}) = -5 \text{ m/s} \end{cases}$$

Quando calculamos a velocidade relativa desse modo, precisamos fazer uma pequena alteração na fórmula do coeficiente de restituição.

Em primeiro lugar devemos observar que o coeficiente de restituição é, por definição, positivo. Em segundo lugar devemos observar que antes do choque as partículas se aproximam e após o choque as partículas se afastam; desse modo, a diferença $v_A - v_B$ terá sinais diferentes antes e depois do choque. Sendo v_A e v_B as velocidades escalares das partículas antes do choque e v'_A e v'_B as velocidades escalares após o choque. Para que o coeficiente de restituição resulte positivo devemos ter:

$$e = -\frac{v'_A - v'_B}{v_A - v_B} \quad \text{ou} \quad e = -\frac{v'_B - v'_A}{v_B - v_A}$$

Coeficiente de restituição no choque unidimensional elástico

Consideremos então o choque unidimensional e elástico, de duas partículas *A* e *B*, cujas velocidades escalares antes do choque são v_A e v_B e cujas velocidades escalares após o choque são v'_A e v'_B. Sendo m_A e m_B as massas das partículas temos:

Conservação da quantidade de movimento:

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$$

$$m_A v_A - m_A v'_A = m_B v'_B - m_B v_B$$

$$m_A(v_A - v'_A) = m_B(v'_B - v_B) \qquad \text{(I)}$$

Conservação da energia cinética:

$$\frac{m_A \cdot (v_A)^2}{2} + \frac{m_B \cdot (v_B)^2}{2} = \frac{m_A \cdot (v'_A)^2}{2} + \frac{m_B \cdot (v'_B)^2}{2}$$

$$m_A(v_A)^2 - m_A(v'_A)^2 = m_B(v'_B)^2 - m_B(v_B)^2$$

$$m_A[(v_A)^2 - (v'_A)^2] = m_B[(v'_B)^2 - (v_B)^2] \qquad \text{(II)}$$

Vamos dividir, membro a membro, a equação (II) pela equação (I):

$$\frac{\cancel{m_A}[(v_A)^2 - (v'_A)^2]}{\cancel{m_A}(v_A - v'_A)} = \frac{\cancel{m_B}[(v'_B)^2 - (v_B)^2]}{\cancel{m_B}(v'_B - v_B)}$$

Lembrando que:

$$(v_A)^2 - (v'_A)^2 = (v_A + v'_A)(v_A - v'_A)$$

$$(v'_B)^2 - (v_B)^2 = (v'_B + v_B)(v'_B - v_B)$$

teremos:

$$\frac{(v_A + v'_A)(v_A - v'_A)}{(v_A - v'_A)} = \frac{(v'_B + v_B)(v'_B - v_B)}{(v'_B - v_B)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow v_A + v'_A = v'_B + v_B \Rightarrow v_A - v_B = -(v'_A - v'_B) \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{v'_A - v'_B}{v_A - v_B} = 1 \qquad \text{(III)}$

Pela equação (III) vemos que o coeficiente de restituição é igual a 1.

Choque elástico unidimensional entre partículas de massas iguais

Pela conservação da quantidade de movimento temos:

$mv_A + mv_B = mv'_A + mv'_B$

ou: $\quad v_A + v_B = v'_A + v'_B \qquad \text{(I)}$

Por outro lado, como o choque é elástico, temos:

$e = -\dfrac{v'_A - v'_B}{v_A - v_B} = 1 \quad \text{ou} \quad v_A - v_B = -v'_A + v'_B \qquad \text{(II)}$

Somemos, membro a membro, as equações (I) e (II):

$$\oplus \begin{cases} v_A + v_B = v'_A + v'_B \\ v_A - v_B = -v'_A + v'_B \end{cases}$$

$$2v_A = 2v'_B \Rightarrow \boxed{v'_B = v_A} \qquad \text{(III)}$$

Substituindo (III) em (I):

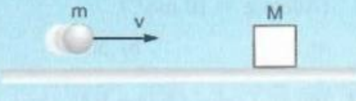
$$v_A + v_B = v'_A + v_A \Rightarrow \boxed{v'_A = v_B} \qquad \text{(IV)}$$

As equações (III) e (IV) nos dizem que:

— a velocidade final de *B* é igual à velocidade inicial de *A*;
— a velocidade final de *A* é igual à velocidade inicial de *B*, isto é, durante o choque as partículas permutam suas velocidades.

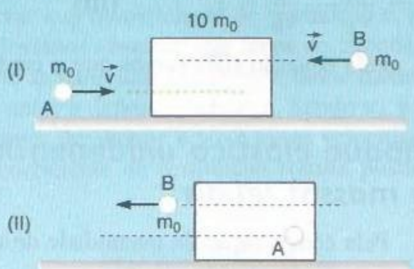
EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

89. (CESESP-PE) Um bloco de madeira de massa *M*, inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal perfeitamente lisa, é atingido por um projétil de massa *m* disparado na direção horizontal com velocidade *v*. Se o projétil ficar retido no bloco, a parcela de sua energia cinética dissipada será:



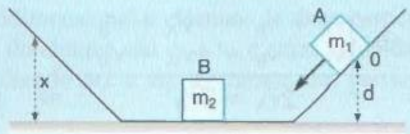
a) $1/2\,(M - m)\,v^2$
b) $1/2\,mMv^2/(m + M)$
c) zero
d) $1/2\,Mv^2$
e) $1/2\,(m + M)\,v^2$

90. (ITA-SP) Dois projéteis de igual massa m_0 e velocidades de módulos iguais a v movem-se em sentidos opostos e colidem simultaneamente com um bloco de massa 10 m_0 como mostra a Fig. I. O bloco, inicialmente em repouso, pode deslizar sem atrito sobre a superfície em que se apóia. O projétil A, que se desloca para a direita, fica aprisionado no bloco (Fig. II), enquanto o projétil B, que se move para a esquerda, atravessa o bloco e mantém a sua direção original.
A velocidade do projétil B, após atravessar o bloco de madeira, é 100 ms^{-1}. Podemos afirmar que a velocidade final do bloco de madeira será da ordem de:



a) $-8{,}2\ ms^{-1}$
b) $+8{,}2\ ms^{-1}$
c) $9{,}1\ ms^{-1}$
d) $110\ ms^{-1}$
e) indeterminada, pois não são conhecidas as posições e a velocidade iniciais dos projéteis.

91. (ITA-SP) Um corpo A de massa igual a m_1 é abandonado no ponto O e escorrega por uma rampa. No plano horizontal, choca-se com outro corpo B de massa igual a m_2 que estava em repouso. Os dois ficam grudados e continuam o movimento na mesma direção até atingir uma outra rampa na qual o conjunto pode subir. Considere o esquema da figura e despreze o atrito. Qual a altura x que os corpos atingirão na rampa?



a) $x = \left(\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \cdot gd$

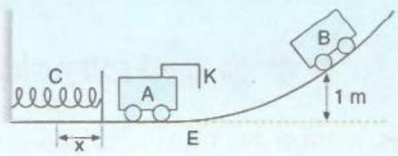
b) $x = \left(\dfrac{m_1 + m_2}{m_1}\right)^2 \cdot d$

c) $x = \left(\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \cdot d$

d) $x = \left(\dfrac{m_1 + m_2}{m_1}\right) \cdot d$

e) $x = \left(\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\right) \cdot d$

92. (UEPG-PR) Dois carros, A e B, têm massas respectivamente iguais a $m_A = 400$ g e $m_B = 600$ g. A constante elástica de força da mola helicoidal C mede 80 N/m. O carro B parte do repouso da posição indicada. Devido ao impacto, o carro B prende-se ao carro A pela trava K, e o conjunto comprime a mola C de uma distância x. Desprezando os atritos, a distância x mede, em centímetros: (Adote $g = 10\ m/s^2$.)

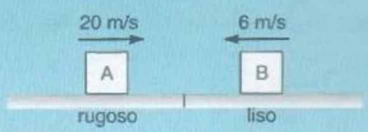


a) 30 b) 50 c) 40 d) 20 e) 10

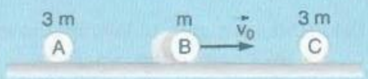
93. (Fund. Carlos Chagas-BA) Duas partículas M e N de massas 1,0 kg e 2,0 kg, respectivamente, colidem frontalmente entre si. A velocidade de M era de 24 m/s e passou a ser de -24 m/s após a colisão, que foi perfeitamente elástica. As velocidades de N antes e depois da colisão foram respectivamente, em m/s, iguais a:

a) -24 e 24 b) -18 e 18 c) -12 e 12 d) -8 e 16 e) -6 e 6

94. (Mackenzie-SP) A figura mostra dois blocos, A e B, de mesma massa igual a 5 kg e com velocidades iniciais 20 m/s e 6 m/s, respectivamente. O bloco A se movimenta durante 4 segundos para atingir o plano perfeitamente liso. Uma vez no plano liso, A colide centralmente com B. Supondo que o coeficiente de restituição é 0,2 e que o coeficiente de atrito entre o bloco A e o plano rugoso é 0,2, pede-se determinar as velocidades dos blocos após a colisão. (Adote $g = 10\ m/s^2$.)



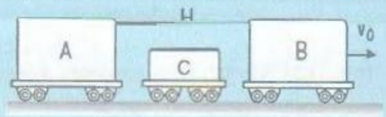
95. A figura ao lado mostra a situação inicial de três esferas A, B e C, de mesmo raio e massas respectivamente iguais a $3m$, m e $3m$, as quais estão sobre uma superfície horizontal plana e sem atrito. As esferas A e C estão em repouso e a esfera B tem velocidade inicial $\vec{v}_0$. Supondo que as colisões entre as esferas sejam elásticas, determine:



a) o número de colisões que ocorrem;
b) as velocidades das esferas após a última colisão.

(Fund. Carlos Chagas-SP) *Enunciado para as questões de números 96 a 99:*

Dois carros, A e B, de massas iguais a 1,0 kg são rigidamente ligados por uma haste H de massa desprezível. O carro C tem massa igual a 0,50 kg. No instante $t = 0$ o carro C tem velocidade nula e os carros A e B têm velocidade cujo módulo é $v_0 = 4{,}0$ m/s, como ilustra a figura. Despreze as forças de atrito entre os carros e a superfície horizontal.



96. Supondo que a colisão entre A e C seja perfeitamente inelástica, a velocidade do sistema após a colisão terá módulo igual a:

a) 0,31 m/s
b) 3,2 m/s
c) 2,5 m/s
d) 3,0 m/s
e) zero

97. Se a colisão entre A e C fosse perfeitamente elástica, mas a ulterior colisão entre C e B fosse perfeitamente inelástica, a velocidade final do sistema teria módulo igual a:

a) 0,31 m/s
b) 3,2 m/s
c) 2,5 m/s
d) 3,0 m/s
e) zero

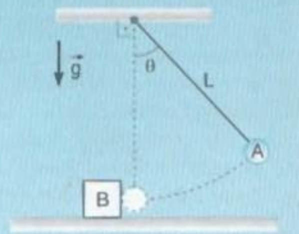
98. Na questão anterior, entre a colisão de A com C e a colisão de C com B, as velocidades de A e C foram, respectivamente, em m/s:

a) 2,4 e 4,8
b) 6,4 e 2,4
c) 4,8 e 2,4
d) 6,4 e 4,8
e) 2,4 e 6,4

99. Se as colisões entre A e C e entre C e B fossem perfeitamente elásticas, após a segunda colisão (C com B), a velocidade de C seria:

a) 2,4 m/s
b) 2,0 m/s
c) −1,6 m/s
d) 1,4 m/s
e) zero

100. (Mackenzie-SP) Observe o esquema ao lado. Suponha que a esfera A seja abandonada na posição em que $\theta = 90°$. São dados:

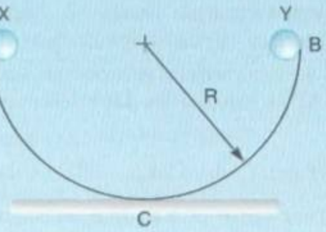


- massa de A = 4,0 kg
- massa de B = 2,0 kg
- L = 1,8 m; g = 10 m/s²
- coeficiente de atrito entre B e o plano horizontal = 0,20
- coeficiente de restituição do choque entre A e B = 0,50

Após a colisão, o bloco B percorre no plano horizontal uma distância igual a:

a) 3 m b) 6 m c) 9 m d) 5 m e) 4 m

101. (IME) A figura ao lado mostra um hemisfério oco e liso, cujo plano equatorial é mantido fixo na horizontal. Duas partículas, X e Y, de massas m_x e m_y, são largadas no mesmo instante, de dois pontos diametralmente opostos, A e B, situados na borda do hemisfério. As partículas colidem no ponto C e, após a colisão, a partícula X atinge uma altura máxima R/2 enquanto Y atinge uma altura máxima R/3, onde R é o raio do hemisfério. Determine o coeficiente de restituição do choque.



102. (EPUSP-SP) Uma partícula A, de massa $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, vem se movendo no plano Oxy (Fig. I) com velocidade cujo módulo é $v_0 = 25 \cdot 10^6$ m/s. Em repouso e situada sobre o eixo Ox encontra-se uma outra partícula, B. Ocorre uma colisão entre as duas partículas e após a colisão verifica-se que a partícula A tem velocidade $\vec{v}_A$ paralela ao eixo Oy e a partícula B move-se sobre o eixo Ox com velocidade $\vec{v}_B$ (Fig. II).

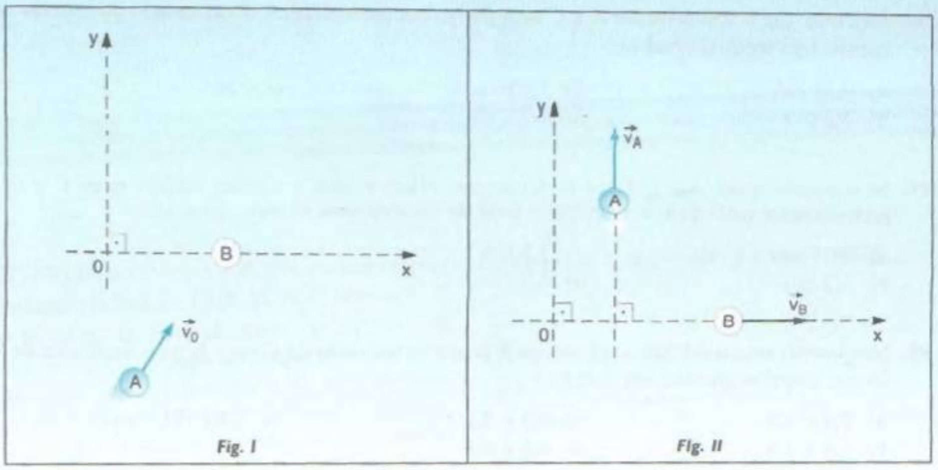


Fig. I Fig. II

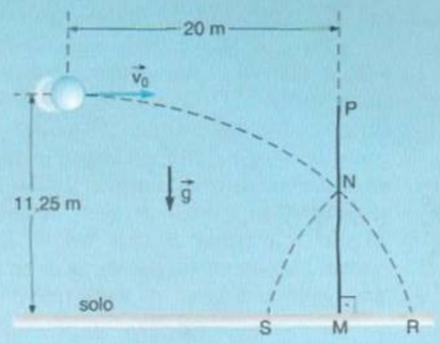
São dados: $v_A = 20 \cdot 10^6$ m/s e $v_B = 7{,}5 \cdot 10^6$ m/s

Calcule a massa da partícula B.

103. Uma partícula é lançada horizontalmente, com velocidade horizontal $\vec{v}_0$ cujo módulo é 20 m/s, num local em que g = 10 m/s², como a figura ilustra. Nessa figura, PM representa uma parede vertical e lisa. Se não houvesse a parede, a partícula atingiria o solo (suposto plano e horizontal) no ponto R. No entanto, o que ocorre é que a partícula colide (não inelasticamente) com a parede no ponto N, indo atingir o solo no ponto S. Desprezando a resistência do ar e supondo que o choque seja elástico, determine:

a) as distâncias $\overline{MR}$ e $\overline{NM}$.

b) a distância $\overline{SM}$; compare esse valor com o obtido no item a) para $\overline{MR}$.

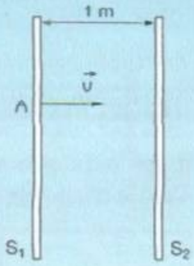


104. Retome a situação do problema anterior. Supondo que a colisão da partícula com a parede tenha coeficiente de restituição e = 0,80, determine a distância $\overline{SM}$.

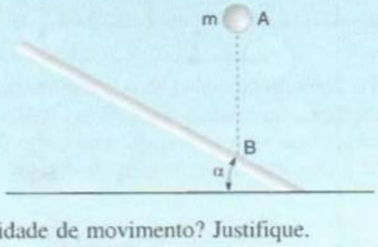
105. (FUVEST-SP) A figura ilustra dois anteparos paralelos, colocados perpendicularmente com relação ao solo. Uma esfera é lançada do ponto A, com velocidade inicial $\vec{v}$ de 20 m/s perpendicular a S_1. A esfera colide sucessivamente com S_1 e S_2, através de choques elásticos. Pedem-se:

a) o tempo que leva a esfera para atingir novamente o anteparo S_1.

b) a que altura h, relativamente ao ponto inicial A, a esfera se encontra, após 0,5 s do lançamento.



106. (EPUSP-SP) Abandona-se uma pequena esfera de massa m = 0,200 kg no ponto A. Após cair 4,0 m ela atinge um ponto B de um plano inclinado de um ângulo α em relação ao horizonte. O choque é perfeitamente elástico. Adote para a aceleração da gravidade o valor numérico g = 10 m/s^2.



a) Calcule o impulso da força peso até o instante do choque.

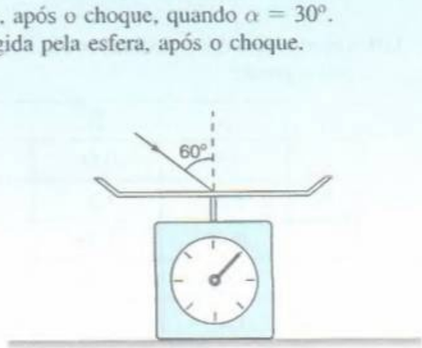
b) No choque há conservação de energia? E da quantidade de movimento? Justifique.

c) Qual o valor do ângulo α para que a esfera inicie seu movimento, após o choque, na direção horizontal?

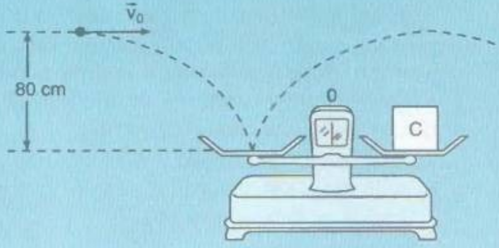
d) Calcule a menor velocidade adquirida pela esfera, após o choque, quando $\alpha = 30°$.

e) Ainda para $\alpha = 30°$, calcule a máxima cota atingida pela esfera, após o choque.

107. Uma metralhadora dispara projéteis à razão de 4 projéteis por segundo, os quais atingem o prato de uma balança com velocidade 1 000 m/s, formando ângulo de 60° com a vertical. A balança antes de receber os tiros marcava zero. Supondo o choque entre os projéteis e o prato da balança, perfeitamente elástico, determinar a leitura da balança quando está recebendo os tiros (a massa de cada projétil é m = 20 g).



108. Um dispositivo dispara pequenas bolas de aço à razão de 50 bolas por segundo. As bolas abandonam o dispositivo com velocidade inicial $\vec{v}_0$, cuja direção é horizontal, chocam-se elasticamente com um dos pratos de uma balança de braços iguais, sendo refletidas, como ilustra a figura. A aceleração da gravidade tem módulo 10 m/s^2 e a massa de cada bola é 2,0 gramas. Desprezando a resistência do ar, determine a massa do corpo *C* que deve ser colocado no outro prato da balança, de modo que ela fique em equilíbrio.



109. (EPUSP-SP) Uma bola de bilhar *A*, movendo-se com velocidade v = 5 m/s, choca-se contra uma bola *B*, parada e de mesma massa que *A*. O choque é elástico e, no instante em que ocorre, a linha dos centros das bolas forma um ângulo de 45° com a direção da velocidade inicial da bola *A*. Tomando essa direção da velocidade inicial de *A* como referência, qual a direção do movimento da bola *B* após o choque? Nesta colisão existe conservação de quantidade de movimento e de energia? Justifique.

Enunciado para as questões 110 e 111:

(ITA-SP) Três bolas idênticas *A*, *B* e *C*, tendo cada uma massa igual a 0,20 kg estão sobre uma mesa sem atrito. Inicialmente as bolas *B* e *C* estão paradas (Fig. I) e a bola *A* tem velocidade $\vec{v}_0$, de modo que as retas *x* e *y* são perpendiculares. A Fig. II ilustra o momento da colisão das bolas. Sabe-se que a colisão é elástica e que v_0 = 2,0 m/s.

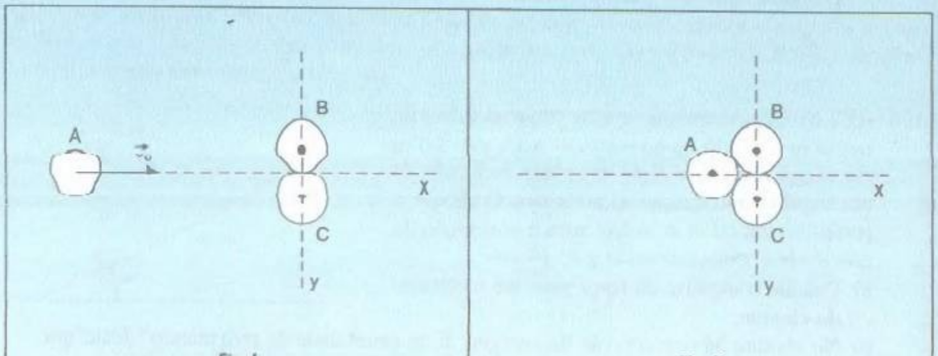
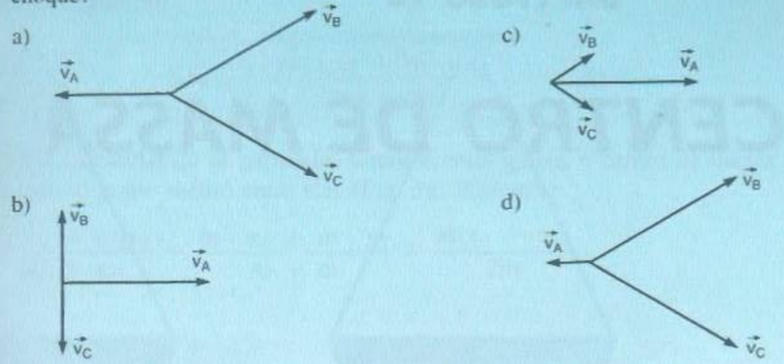


Fig. I Fig. II

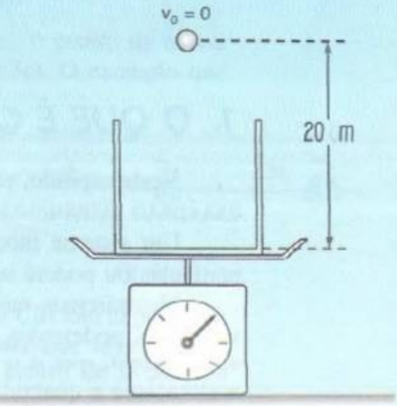
110. Os módulos das velocidades das bolas *A*, *B* e *C* após o choque são, respectivamente, em metros por segundo:

	A	B	C
a)	0,66	0,66	0,66
b)	2,0	1,0	1,0
c)	0,40	1,38	1,38
d)	1,38	0,40	0,40
e)	1,0	2,0	1,0

111. Da configuração de velocidades abaixo, qual deve representar o que ocorre com as bolas após o choque?



112. Põe-se uma caixa no prato de uma balança de modo que a leitura é nula quando a caixa está vazia. Deixam-se cair então na caixa pequenas bolas, de uma altura de 20 metros, à razão de 4 bolas por segundo, tendo cada bola massa de 10 gramas. Sabendo que os choques entre as bolas e a caixa são perfeitamente inelásticos, determine a leitura da balança, 10 segundos após o instante em que as bolas começam a chegar na caixa. (Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.)



113. (ITA-SP) Um martelo de bate-estacas funciona levantando um corpo de pequenas dimensões e de massa 70,0 kg acima do topo de uma estaca de massa 30,0 kg. Quando a altura do corpo acima do topo da estaca é de 2,00 m, ela afunda de 0,500 m no solo. Supondo uma aceleração da gravidade de $10{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e considerando o choque inelástico, podemos concluir que a força média de resistência à penetração da estaca é de:

a) $1{,}96 \cdot 10^3$ N
b) $2{,}96 \cdot 10^3$ N
c) $29{,}0 \cdot 10^3$ N
d) $29{,}7 \cdot 10^3$ N
e) $2{,}90 \cdot 10^3$ N

CAPÍTULO 10

CENTRO DE MASSA

1. O QUE É CENTRO DE MASSA

Neste capítulo, vamos estudar um importante ponto geométrico dos sistemas mecânicos denominado *centro de massa*.

Um sistema mecânico pode ser constituído por um conjunto de diversas partículas ou poderá ser ainda um único corpo extenso.

Mostraremos neste capítulo que, ao estudarmos o movimento do sistema mecânico, poderemos admitir, por hipótese, toda a sua massa concentrada num único ponto, que é o seu centro de massa. Com essa hipótese, estudaremos a aceleração e a quantidade de movimento do sistema.

Apenas para ilustrar, nas figuras abaixo (Fig. 1) indicamos os respectivos centros de massa de três sistemas mecânicos.

Fig. 1

a) Duas esferas idênticas interligadas por uma haste rígida homogênea têm o centro de massa no meio da haste.

b) Uma chapa homogênea de forma quadrada tem o centro de massa no centro geométrico do quadrado.

c) Uma chave inglesa não é um corpo homogêneo e simétrico e tem o centro de massa próximo da "cabeça".

2. LOCALIZAÇÃO DO CENTRO DE MASSA

Consideremos, inicialmente, um sistema simples com apenas duas partículas de massas m_1 e m_2. Adotemos um eixo de referência, com origem arbitrária, que passa pelas duas partículas (Fig. 2).

Fig. 2 Sistema de duas partículas; CM é o centro de massa.

Por definição, o centro de massa desse sistema é o ponto CM, cuja abscissa x_{CM} obedece à equação:

$$\boxed{x_{CM} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2}} \qquad \text{(I)}$$

No caso particular de as partículas terem massas iguais, o centro de massa coincidirá com o ponto médio entre elas (Fig. 3a). Vejamos:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m \cdot x_1 + m \cdot x_2}{m + m} = \frac{m(x_1 + x_2)}{2m}$$

$$\boxed{x_{CM} = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

Quando as massas das duas partículas forem diferentes, o centro de massa estará mais próximo da partícula de maior massa (Fig. 3b; 3c). O exemplo que segue verificará essa propriedade.

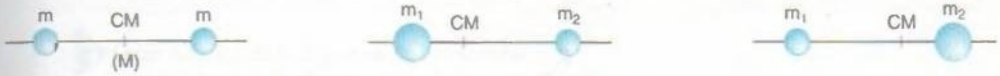


Fig. 3a massas iguais *Fig. 3b $m_1 > m_2$* *Fig. 3c $m_1 <$*

É importante ressaltar que a posição do centro de massa CM não depende da particular escolha da origem do eixo de referência. Qualquer que seja o ponto escolhido como origem, não se modificará a posição do centro de massa em relação às duas partículas do sistema.

Para verificarmos essa propriedade, tomemos um exemplo onde o sistema é constituído de duas partículas de massas $m_1 = 1{,}0$ kg e $m_2 = 3{,}0$ kg, sendo $d = 1{,}0$ m a distância entre elas. Encontraremos o centro de massa de dois modos diferentes. Vamos mostrar que a posição relativa é a mesma.

a) Tomemos a origem sobre a primeira partícula (Fig. 4a).

$$x_{CM} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2} = \frac{(1{,}0) \cdot (0) + 3{,}0 \cdot (1{,}0)}{1{,}0 + 3{,}0}$$

$$x_{CM} = \frac{3{,}0}{4{,}0} \Rightarrow \boxed{x_{CM} = 0{,}75 \text{ m}}$$

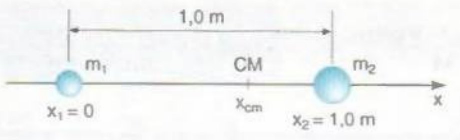


Fig. 4a Adotou-se a origem sobre a partícula 1.

O centro de massa está a 75 cm da primeira partícula e a 25 cm da segunda.

b) Tomemos, agora, a origem à esquerda da primeira, e a 1,0 m dela (Fig. 4b).

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = \frac{1,0 \cdot (1,0) + 3,0 \cdot (2,0)}{1,0 + 3,0}$$

$$x_{CM} = \frac{7,0}{4,0} \qquad \boxed{x_{CM} = 1,75 \text{ m}}$$

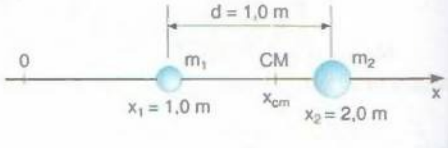


Fig. 4b *Origem à esquerda da partícula 1.*

Novamente obtivemos o centro de massa a 75 cm da primeira partícula e a 25 cm da segunda.

3. VELOCIDADE DO CENTRO DE MASSA

Consideremos ainda um sistema constituído de apenas duas partículas de massas m_1 e m_2 que se movem com velocidades $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ de direções coincidentes com o eixo x. Esse sistema é chamado de unidimensional (Fig. 5).

Fig. 5 *Sistema unidimensional de duas partículas.*

Seja $M = m_1 + m_2$ a massa total do sistema. O centro de massa CM tem abscissa:

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M \cdot x_{CM} = m_1x_1 + m_2x_2$$

Derivando-se essa equação, obteremos a velocidade do centro de massa em relação às velocidades v_1 e v_2 (escalares):

$$M \frac{dx_{CM}}{dt} = m_1 \frac{dx_1}{dt} + m_2 \frac{dx_2}{dt}$$

Lembrando que $\frac{dx}{dt} = v$ (velocidade escalar):

$$M \cdot v_{CM} = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 \qquad (2.1)$$

$$v_{CM} = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{M} \Rightarrow \boxed{v_{CM} = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}} \qquad (2.2)$$

A velocidade do centro de massa é dada pela média ponderada entre as velocidades das partículas, tendo como "peso aritmético" as respectivas massas.

4. QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Como o sistema é unidimensional, isto é, as partículas movem-se na direção da reta que as une, podemos reescrever a equação (2.1) sob a forma vetorial:

$$M \cdot \vec{v}_{CM} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

$$M \cdot \vec{v}_{CM} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = \vec{Q}_{sist}$$

ou ainda: $\boxed{\vec{Q}_{sist} = M \cdot \vec{v}_{CM}}$

Para obtermos a quantidade de movimento do sistema poderemos supor que, hipoteticamente, sua massa esteja concentrada no centro de massa.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

10

1. Determine o centro de massa de um sistema constituído por duas partículas de massas $m_A = 3{,}0$ g e $m_B = 1{,}0$ g interligadas por uma haste rígida de massa desprezível e de comprimento 4,0 cm.

Resolução:

Adotemos um eixo que passa pela haste e escolhamos sua origem na partícula *A*. Como vimos, a escolha da origem não altera a posição do centro de massa:

$$x_{CM} = \frac{m_A \cdot x_A + m_B \cdot x_B}{m_A + m_B}$$

$$x_{CM} = \frac{3{,}0 \cdot (0) + 1{,}0 \cdot (4{,}0)}{3{,}0 + 1{,}0} = 1{,}0 \text{ cm}$$

Conclusão: o CM está a 1,0 cm de *A* e a 3,0 cm de *B*.

2. Considere os sistemas abaixo onde as hastes rígidas que unem as duas partículas têm massa desprezível. Determine a posição do centro de massa de cada um deles.

Fig. a

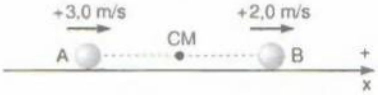
Fig. b

Fig. c

3 O sistema ao lado é constituído por duas partículas, *A* e *B*, de massas 2,0 kg e 3,0 kg, respectivamente. Elas se movem com a velocidade que se indica na figura. Determine a velocidade do centro de massa.

Resolução:

Adotemos um eixo de referência para o sinal das velocidades:



A velocidade do centro de massa é dada por:

$$v_{CM} = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B} = \frac{2,0 \cdot 3,0 + 3,0 \cdot 2,0}{2,0 + 3,0} \Rightarrow \boxed{v_{CM} = 2,4 \text{ m/s}}$$

Observação: Como $v_A > v_{CM}$, então *A* se aproxima do CM do sistema. Como $v_{CM} < v_B$, então *B* se afasta dele.

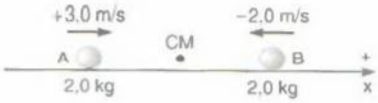
4 As partículas ao lado têm massas 2,0 kg cada uma e suas velocidades se indicam na figura. Determine a velocidade do centro de massa.

Resolução:

Adotemos um eixo para referência dos sinais das velocidades.
A velocidade do centro de massa é dada por:

$$v_{CM} = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B} = \frac{2,0 \cdot (+3,0) + 2,0 \cdot (-2,0)}{2,0 + 2,0} = \frac{6,0 - 4,0}{4,0}$$

$\boxed{v_{CM} = +0,50 \text{ m/s}}$



Observação: o centro de massa CM move-se para a direita.

5. Determine a velocidade do centro de massa de cada um dos sistemas abaixo.

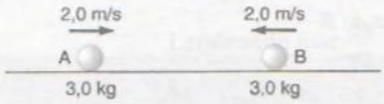


Fig. a

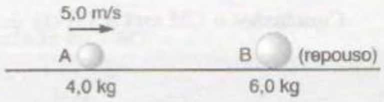
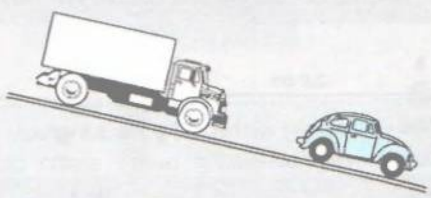


Fig. b

6. Um caminhão de massa 5 t, dotado de velocidade escalar 100 km/h, vem atrás de um fusquinha de massa 1 t, dotado de velocidade 40 km/h, numa ladeira. Determine a velocidade escalar do centro de massa do sistema.



EXERCÍCIOS DE REFORÇO

7. Uma partícula A, movendo-se com velocidade de módulo $v_A = 30$ m/s e cuja massa é $m_A = 2,0$ kg, aproxima-se de uma outra partícula B de massa $m_B = 3,0$ kg, que se movimenta com velocidade de módulo $v_B = 20$ m/s sobre a mesma reta sobre a qual se move A, como mostra o desenho. Qual o módulo da velocidade do centro de massa das duas partículas antes do choque?

8. Numa estrada retilínea e horizontal trafegam, em sentidos opostos, um automóvel de massa $5,0 \cdot 10^2$ kg e velocidade escalar 144 km/h e um caminhão de massa 1,0 tonelada e velocidade escalar -72 km/h. Determine a velocidade do centro de massa do sistema formado pelos dois veículos.

9. (UF-PA) Um corpo esférico de massa 6 m rola sobre um plano horizontal sem atrito em direção a outro corpo esférico em repouso e de massa m, com velocidade v constante. Quando os dois corpos estão separados por uma distância d, o centro de massa do sistema estará situado a uma distância da esfera maior dada por:

a) $\frac{d}{11}$ b) $\frac{d}{9}$ c) $\frac{6d}{7}$ d) $\frac{d}{7}$ e) $\frac{d}{5}$

10. (UF-PA) Na questão anterior a velocidade do centro de massa é:

a) $\frac{6v}{7}$ b) v c) $\frac{v}{6}$ d) $\frac{v}{7}$ e) $\frac{7v}{6}$

10

5. ACELERAÇÃO DO CENTRO DE MASSA

A aceleração do centro de massa de um sistema unidimensional, constituído por duas partículas, é obtido pela derivada da equação da velocidade. Ou seja:

$$M \cdot \vec{v}_{CM} = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2$$

$$M \cdot \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt}$$

$$M \cdot \vec{a}_{CM} = m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2 \qquad (4.1)$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{M}$$

ou ainda:

$$\boxed{\vec{a}_{CM} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{m_1 + m_2}} \qquad (4.2)$$

A aceleração do centro de massa é a média ponderada entre as acelerações das partículas que constituem o sistema, tendo como "peso aritmético" as respectivas massas.

6. FORÇAS EXTERNAS E FORÇAS INTERNAS AO SISTEMA

Inicialmente, retomemos a equação (4.1), da aceleração do centro de massa:

$$M \cdot \vec{a}_{CM} = m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2$$

Nessa equação temos, no segundo membro, os produtos $(m_1 \cdot \vec{a}_1)$ e $(m_2 \cdot \vec{a}_2)$, que representam as resultantes das forças sobre cada partícula. Façamos:

$$m_1 \cdot \vec{a}_1 = \vec{F}_1 \quad \text{e} \quad m_2 \cdot \vec{a}_2 = \vec{F}_2$$

$$M \cdot \vec{a}_{CM} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_{res} \qquad (5)$$

Qual é a força resultante F_{res}?

Sobre um sistema podem atuar duas categorias de forças: externas ou internas. No caso particular do nosso sistema, constituído apenas de duas partículas, fica mais simples essa diferenciação.

As forças *internas* são aquelas que resultam da ação da partícula 1 sobre a partícula 2 e da conseqüente reação desta sobre a primeira. Constituem um par "ação e reação" e têm, portanto, módulos iguais e sentidos opostos. É importante observar que se considerarmos o somatório das *forças internas* do sistema, ele é nulo.

As forças externas ao sistema são decorrentes de ações externas sobre cada partícula independentemente. São causadas por agentes externos ao sistema.

Concluindo, a força resultante que atua no sistema é a *resultante externa*.

$$M \cdot \vec{a}_{CM} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_{res} \text{ (externa)}$$

> A aceleração do centro de massa independe das forças internas ao sistema.

> O centro de massa se move como se fosse uma partícula de massa igual à massa total do sistema e sob a ação da força externa resultante que atua no sistema.

> Para se obter a aceleração do centro de massa do sistema, podemos supor que toda sua massa esteja concentrada nesse ponto e aí esteja aplicada a resultante das forças externas que atuam no sistema.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

11 Um sistema é constituído por duas partículas, P_1 e P_2, que se movimentam sobre o eixo x com acelerações constantes. As massas de P_1 e P_2 valem, respectivamente, 2,0 kg e 5,0 kg e as acelerações estão indicadas na figura. Determine a aceleração do centro de massa (módulo e sentido).

Resolução:

A aceleração do centro de massa é dada por:

$$a_{CM} = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} = \frac{2{,}0 \cdot (10) + 5{,}0 \cdot (-1{,}2)}{2{,}0 + 5{,}0}$$

$$a_{CM} = +2{,}0 \text{ m/s}^2$$

A aceleração do CM tem módulo 2,0 m/s² e sentido igual ao positivo do eixo (x).

12. Determine a aceleração do centro de massa dos sistemas constituídos pelas partículas A e B das figuras abaixo. Suas massas são iguais a 2,0 kg cada uma.

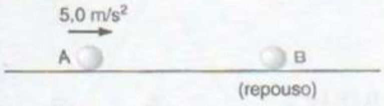


Fig. a

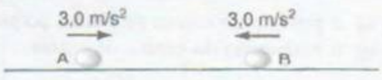


Fig. b

13 Na figura, as esferas têm massa m = 2,0 kg. Inicialmente, distendemos a mola separando as esferas. A seguir, ainda com a mola esticada, abandonamos o sistema e aplicamos na esfera A uma força $\vec{F}$ de intensidade 24 N. Determine o módulo da aceleração do centro de massa do sistema (A + B) no instante da aplicação da força $\vec{F}$. Despreze a massa da mola.

Resolução:

A mola aplica uma força elástica em cada uma das partículas, bem como cada uma delas reage e aplica na mola força oposta. Nenhuma dessas forças interessa no problema, pois são forças internas; opostas duas a duas, se anulam. Assim, só interessa a resultante externa $\vec{F}$.

$$\vec{F} = (m_A + m_B) \cdot \vec{a}_{CM}$$

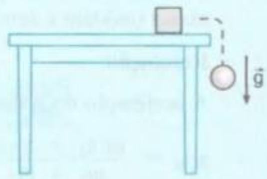
$$24 = (2{,}0 + 2{,}0) \cdot a_{CM} \Rightarrow \quad a_{CM} = 6{,}0 \text{ m/s}^2$$

É importante ressaltar que $\vec{a}_{CM}$ tem o sentido de $\vec{F}$.

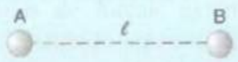
14. Na figura, a mola é ideal. As esferas *A* e *B* têm massa 2,0 kg e 3,0 kg, respectivamente. Estando a mola não distendida, aplicamos em *A* uma força $\vec{F}$ de intensidade 25 N. Calcule a aceleração do centro de massa (módulo e sentido).

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

15. Sobre uma mesa horizontal estavam apoiados um cubo de massa 2,0 kg e uma esfera de massa 3,0 kg. Num dado instante, a esfera rolou e caiu da mesa. Determine a aceleração do centro de massa (módulo, direção e sentido) do sistema cubo + esfera durante a queda dela. (Dado: g = 10 m/s^2.)

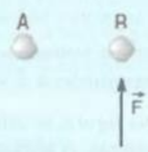


16. Duas pequenas esferas, *A* e *B*, de massas $m_A = 100$ g e $m_B = 300$ g, estão no instante t = 0, separadas pela distância $\ell = 0{,}80$ m, como mostra a figura. Nesse instante, uma força de intensidade F = 30 N, perpendicular à reta que une os centros das esferas, passa a atuar na esfera *B*. Determine, no instante inicial:



a) a posição do centro de massa do sistema;
b) a aceleração do centro de massa.

17. (FEI-SP) Duas esferas, *A* e *B*, de massas $M_A = 0{,}10$ kg e $M_B = 0{,}20$ kg constituem um sistema físico e não interagem entre si. Na esfera *B* atua uma força externa $\vec{F}$ constante e de intensidade 30 N.



Calcule:

a) Os módulos das acelerações das esferas *A* e *B*;
b) O módulo da aceleração do centro de massa do sistema (AB).

7. SISTEMA CONSTITUÍDO POR DIVERSAS PARTÍCULAS

Os resultados obtidos para um sistema unidimensional de duas partículas podem ser facilmente generalizados para um sistema com várias partículas em três dimensões (Fig. 6).

Seja *n* a quantidade de partículas do nosso sistema cuja massa total é *M*:

$$M = m_1 + m_2 + ... + m_n = \Sigma m_i$$

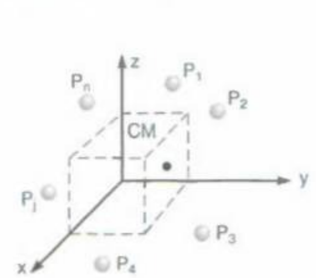


Fig. 6 Sistema tridimensional com n partículas.

Coordenadas do centro de massa

A abscissa x_{CM} do centro de massa é definida por:

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_nx_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} \Rightarrow x_{CM} = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i} \quad (6.1)$$

Analogamente, as outras coordenadas são dadas por:

$$y_{CM} = \frac{\Sigma m_i \cdot y_i}{M} \quad (6.2) \qquad z_{CM} = \frac{\Sigma m_i \cdot z_i}{M} \quad (6.3)$$

Figuras simétricas. Propriedades

1ª) Se um sistema for constituído por partículas de massas iguais distribuídas nos vértices de uma figura geométrica regular, o centro de massa coincidirá com o centro geométrico da figura. É o caso de uma distribuição nos vértices de um triângulo eqüilátero, onde o centro de massa estará no seu baricentro (geométrico), também de um quadrado, onde o centro de massa estará no seu centro geométrico. (Figs. 7 e 8).

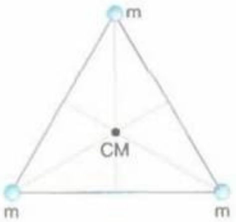


Fig. 7

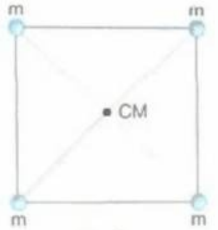


Fig. 8

2ª) Se um sistema de *n* partículas de massas iguais admitir um ponto de simetria, então o seu centro de massa coincidirá com esse ponto. É o caso de uma distribuição nos quatro vértices de um retângulo, onde o centro de massa coincide com o centro do retângulo (Fig. 9).

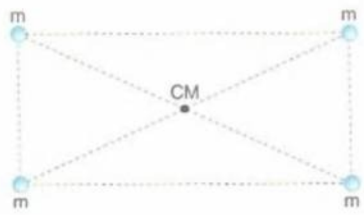
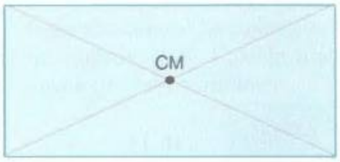


Fig. 9

3ª) Um corpo homogêneo que admite um ponto de simetria tem o seu centro de massa coincidindo com o seu centro geométrico.

- O centro de massa de uma esfera está no centro geométrico da esfera (Fig. 10).

Fig. 10 Esfera homogênea. O centro de massa está no centro da esfera.



- O centro de massa de uma chapa homogênea de forma retangular está no centro geométrico dessa chapa (Fig. 11).

Fig. 11 O centro de massa da chapa homogênea está no encontro das diagonais.

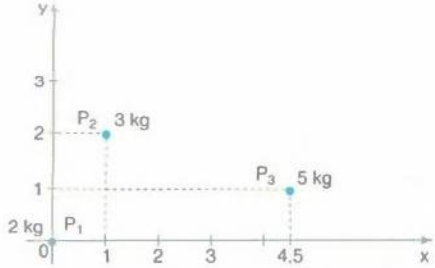
- O centro de massa de um cubo homogêno está no seu centro geométrico (Fig. 12).

Fig. 12 O centro de massa de um cubo homogêneo está no encontro das diagonais internas.

10

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

18 Determine as coordenadas do centro de massa do sistema de partículas indicado ao lado.



Resolução:

As coordenadas das partículas são:

$m_1 \rightarrow x_1 = 0;\ y_1 = 0$

$m_2 \rightarrow x_2 = 1{,}0\ \text{cm};\ y_2 = 2{,}0\ \text{cm}$

$m_3 \rightarrow x_3 = 4{,}0\ \text{cm};\ y_3 = 1{,}0\ \text{cm}$

Desse modo, as coordenadas do centro de massa são:

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3},\quad x_{CM} = \frac{2{,}0 \cdot 0 + 3{,}0 \cdot 1{,}0 + 5{,}0 \cdot 4{,}0}{2{,}0 + 3{,}0 + 5{,}0}$$

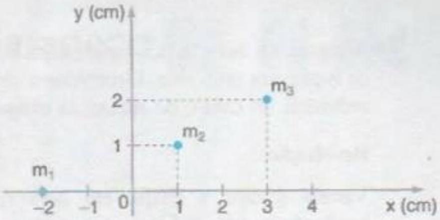
$\boxed{x_{CM} = 2{,}3\ \text{cm}}$

$$y_{CM} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3},\quad y_{CM} = \frac{2{,}0 \cdot 0 + 3{,}0 \cdot 1{,}0 + 5{,}0 \cdot 1{,}0}{2{,}0 + 3{,}0 + 5{,}0}$$

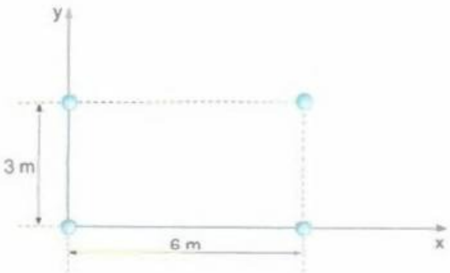
$\boxed{y_{CM} = 1{,}1\ \text{cm}}$

19. Determine as coordenadas do centro de massa do sistema de partículas indicado ao lado.

$m_1 = 1{,}0$ kg
$m_2 = 2{,}0$ kg
$m_3 = 2{,}0$ kg

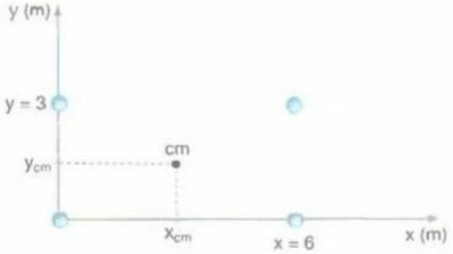


20 Determine as coordenadas do centro de massa (baricentro) do sistema de quatro partículas idênticas da figura ao lado.



Resolução:

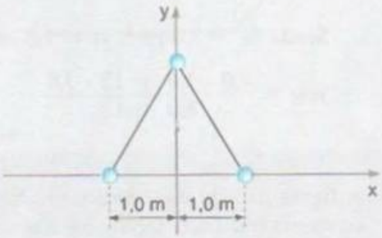
Basta lembrar a propriedade do centro de massa para um sistema simétrico. Ele coincide com o centro geométrico do retângulo.



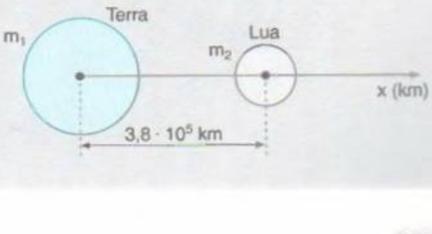
Da figura concluímos que:

$$\boxed{x_{CM} = 3{,}0 \text{ m}} \quad \text{e} \quad \boxed{y_{CM} = 1{,}5 \text{ m}}$$

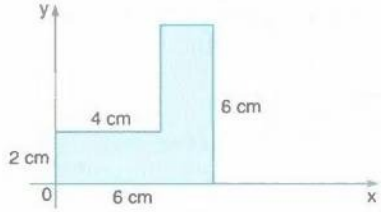
21. Três partículas idênticas estão nos vértices de um triângulo eqüilátero. Determine as coordenadas de seu centro de massa.



22. A distância entre o centro da Terra e o centro da Lua mede $3{,}8 \cdot 10^5$ km. A massa da Terra é 82 vezes maior que a massa da Lua. A que distância do centro da Terra encontra-se o centro de massa do sistema Terra–Lua.

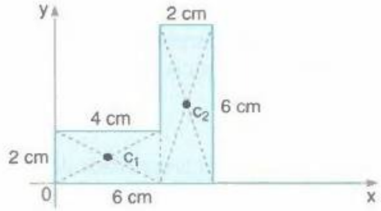


23 A figura ao lado indica uma chapa homogênea de espessura uniforme. Determine a abscissa e a ordenada do centro de massa da chapa.



Resolução:

Vamos dividir a chapa em dois retângulos, conforme mostra a figura. Os centros de massa C_1 e C_2 desses retângulos têm coordenadas:



$C_1 \rightarrow x_1 = 2{,}0$ cm; $y_1 = 1{,}0$ cm

$C_2 \rightarrow x_2 = 5{,}0$ cm; $y_2 = 3{,}0$ cm

As áreas desses retângulos valem, respectivamente:

$S_1 = 4{,}0 \text{ cm} \cdot 2{,}0 \text{ cm} = 8{,}0 \text{ cm}^2$

$S_2 = 2{,}0 \text{ cm} \cdot 6{,}0 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2$

Como a chapa é homogênea e de espessura uniforme, sua densidade superficial μ é constante, isto é:

$$\mu = \frac{m_1}{S_1} = \frac{m_2}{S_2}$$

Assim, vem: $m_1 = \mu \cdot S_1$ e $m_2 = \mu \cdot S_2$

De $x_{CM} = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$, temos $x_{CM} = \dfrac{\mu S_1x_1 + \mu S_2x_2}{\mu S_1 + \mu S_2}$

$$\boxed{x_{CM} = \frac{S_1x_1 + S_2x_2}{S_1 + S_2}}$$

Como $S_1 = 8{,}0 \text{ cm}^2$, $x_1 = 2{,}0$ cm, $S_2 = 12 \text{ cm}^2$ e $x_2 = 5{,}0$ cm, resulta:

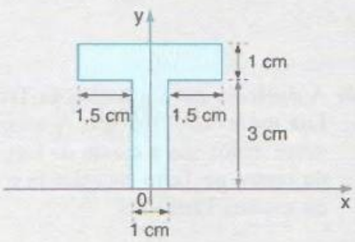
$$x_{CM} = \frac{8{,}0 \cdot 2{,}0 + 12 \cdot 5{,}0}{8{,}0 + 12} \qquad \boxed{x_{CM} = 3{,}8 \text{ cm}}$$

Analogamente, podemos escrever: $\boxed{y_{CM} = \dfrac{S_1y_1 + S_2y_2}{S_1 + S_2}}$

Sendo $S_1 = 8{,}0 \text{ cm}^2$, $y_1 = 1{,}0$ cm, $S_2 = 12 \text{ cm}^2$ e $y_2 = 3{,}0$ cm, vem:

$$y_{CM} = \frac{8{,}0 \cdot 1{,}0 + 12 \cdot 3{,}0}{8{,}0 + 12} \qquad \boxed{y_{CM} = 2{,}2 \text{ cm}}$$

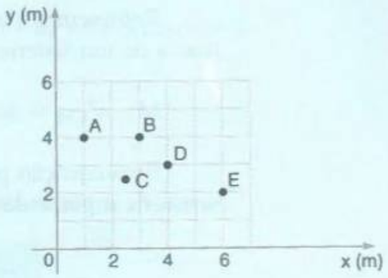
24. A figura ao lado representa uma chapa homogênea de espessura constante. Determine a abscissa e a ordenada do centro de massa da chapa.



EXERCÍCIOS DE REFORÇO

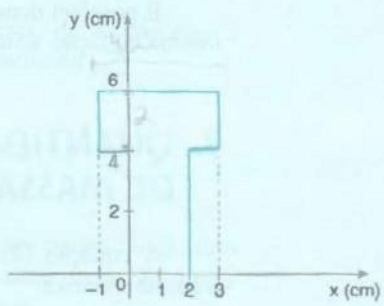
25. (ITA-SP) Dadas 3 partículas e suas respectivas posições, m(x; y), em que m é a massa em quilogramas, x e y as posições em metros, tais que 2(3; 6), 4(4; 4), 2(1; 2), indique qual dos pontos do gráfico representa o centro de massa do sistema.

a) A
b) B
c) C
d) D
e) E

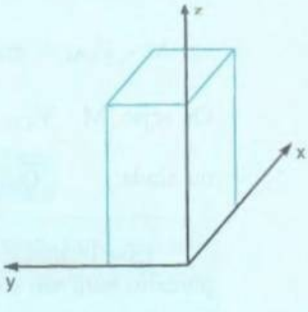


26. O centro de massa do "T" homogêneo e de espessura uniforme da figura tem coordenadas, em centímetros:

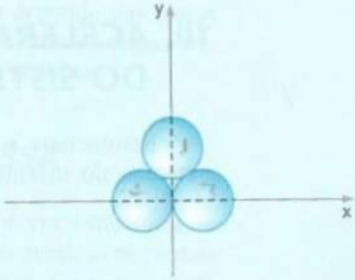
a) (1; 2)
b) (1; 4)
c) (1; 3)
d) (1; 3,5)
e) (1; 4,5)



27. A figura representa um prisma homogêneo, regular de base quadrada. Suas arestas laterais têm 4,0 m de comprimento e as arestas da base 2,0 m de comprimento. Determine as coordenadas do seu centro de massa.



28. A figura mostra a secção transversal de três cilindros idênticos, homogêneos. Determine as coordenadas do centro de massa (x_{CM}; y_{CM}). Os cilindros apresentam secções circulares de raio 1,0 m cada uma.



8. VELOCIDADE DO CENTRO DE MASSA DO SISTEMA

Retomemos a equação (3.1) que nos deu a velocidade vetorial do centro de massa de um sistema unidimensional de duas partículas:

$$M \cdot \vec{v}_{CM} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_{CM} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Essa equação pode perfeitamente ser estendida para um sistema unidimensional de n partículas:

$$\boxed{\vec{v}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + ... + m_n \vec{v}_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}} \qquad (7)$$

É possível demonstrar que para um sistema tridimensional de n partículas a mesma equação acima também poderá ser usada.

10

9. QUANTIDADE DE MOVIMENTO DO CENTRO DE MASSA DO SISTEMA

A equação (7) da velocidade do centro de massa pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + ... + m_n \vec{v}_n}{M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M \cdot \vec{v}_{CM} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + ... + m_n \cdot \vec{v}_n$$

Ou seja: $M \cdot \vec{v}_{CM} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + ... + \vec{Q}_n = \vec{Q}_{sist}$

ou ainda: $\boxed{\vec{Q}_{sist} = M \cdot \vec{v}_{CM}}$

Esse resultado representa uma generalização do que vimos no item 4. Vale portanto para um sistema tridimensional.

10. ACELERAÇÃO DO CENTRO DE MASSA DO SISTEMA

Retomemos a equação (4.2) da aceleração do centro de massa de duas partículas do sistema unidimensional:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2}{m_1 + m_2}$$

Do mesmo modo que fizemos com a velocidade, vamos estender a equação anterior para um sistema unidimensional de n partículas:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2 + ... + m_n \cdot \vec{a}_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} \quad (10)$$

É possível demonstrar que a equação obtida também vale para o caso de o sistema ser tridimensional.

11. FORÇA EXTERNA RESULTANTE

A equação anterior da aceleração pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2 + ... + m_n \cdot \vec{a}_n}{M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M \cdot \vec{a}_{CM} = m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2 + ... + m_n \cdot \vec{a}_n \quad (11)$$

Cada parcela ($m_i \cdot \vec{a}_i$) do segundo membro representa, de acordo com a Segunda Lei de Newton, a força resultante na respectiva partícula:

$$m_i \cdot a_i = \vec{F}_i$$

Então, a equação (11) fica:

$$M \cdot \vec{a}_{CM} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \Sigma \vec{F}_i$$

Já vimos que as forças internas ao sistema aparecem aos pares, são do tipo ação e reação entre cada par de partículas. Quando somamos todas as forças atuantes no sistema, as forças internas anulam-se duas a duas.

Novamente, concluímos que $\Sigma \vec{F}_i$ representa apenas a resultante das forças externas ao sistema.

$$\Sigma \vec{F}_i = \vec{F}_{res} \qquad \vec{F}_{res} = M \cdot \vec{a}_{CM} \quad (12)$$

Teorema do Centro de Massa

O centro de massa de um sistema de *n* partículas move-se como se fosse uma única partícula de massa $M = \Sigma m_i$, sob a ação da força resultante externa $\vec{F}_{res}$ e obedecendo à Segunda Lei de Newton.

O movimento do centro de massa de *n* partículas não depende das forças internas ao sistema. Destaque-se também que a aceleração do centro de massa tem a direção e o sentido da força externa resultante que atua no sistema.

12. TRAJETÓRIA DO CENTRO DE MASSA

Com base no Teorema do Centro de Massa é possível prever a trajetória do centro de massa de um sistema de diversas partículas. De modo geral, as partículas do sistema têm movimentos de trajetórias complicadas, porém o seu centro de massa se comporta como se fosse uma única partícula sujeita à força externa resultante no sistema.

10

Exemplo:

Um projétil é lançado obliquamente ao espaço (Fig. 13) num local onde o campo de gravidade é uniforme e a resistência do ar é desprezível. Em relação à Terra, a sua trajetória é, inicialmente, parabólica. Ao atingir o pico da trajetória, ele explode em dois fragmentos idênticos. Embora seja difícil determinar a trajetória de cada fragmento, o centro de massa do sistema continuará a descrever a trajetória parabólica, até que um dos fragmentos atinja o solo. A explosão da granada produz forças internas ao sistema que não podem alterar a trajetória do centro de massa.

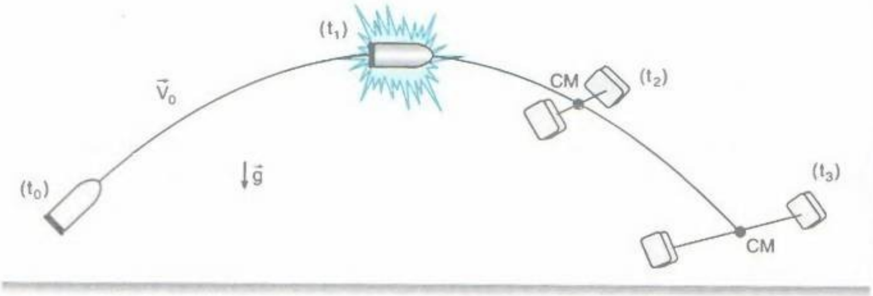


Fig. 13 Após a explosão, o centro de massa continua a trajetória parabólica.

10

13. SISTEMA ISOLADO DE FORÇAS EXTERNAS

Quando a força resultante externa atuante no sistema é nula, dizemos que o sistema está isolado de forças externas.

Como conseqüência teremos:

a) a aceleração do centro de massa é nula e a sua velocidade vetorial se mantém constante;

b) o centro de massa poderá estar em repouso ou em movimento retilíneo uniforme;

c) a quantidade de movimento total do sistema se mantém constante.

14. TEOREMA DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

A terceira propriedade enunciada anteriormente constitui um dos mais importantes teoremas da Física: o Teorema da Conservação da Quantidade de Movimento, visto no capítulo 8.

Quando o sistema estiver isolado, a sua quantidade de movimento total não varia com o tempo.

Exemplo 1:

Consideramos uma granada em repouso (Fig. 14a) sobre um plano horizontal liso. Num determinado instante t_1, ela explode em 6 fragmentos que se distanciam do centro de massa CM em diferentes direções. Apesar das forças internas geradas pela explosão, o centro de massa do sistema permanece em repouso onde se encontrava originalmente.

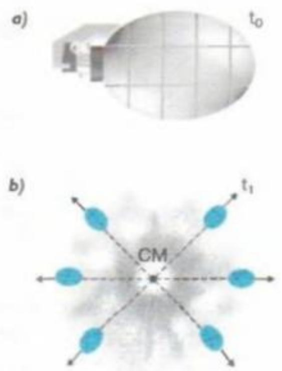


Fig. 14 a) No instante t_0 a granada estava em repouso.
b) No instante t_1 ela explode e os 6 fragmentos se distanciam do CM, que fica em repouso.

Exemplo 2:

Um pacote de brinquedo é lançado sobre um plano horizontal liso e adquire movimento retilíneo uniforme (Fig. 15). Num dado instante t_0, devido à existência de uma pequena quantidade de pólvora no seu interior, ele explode e se subdivide em quatro pedaços.

O plano de apoio, sendo horizontal e liso, não gera forças externas. A explosão gera forças internas que não interferem no movimento do centro de massa. Assim, imediatamente após a explosão, os pedaços se afastam em trajetórias diferentes e o seu centro de massa CM continua em movimento retilíneo e uniforme, com a mesma velocidade vetorial v que o pacote possuía antes da explosão.

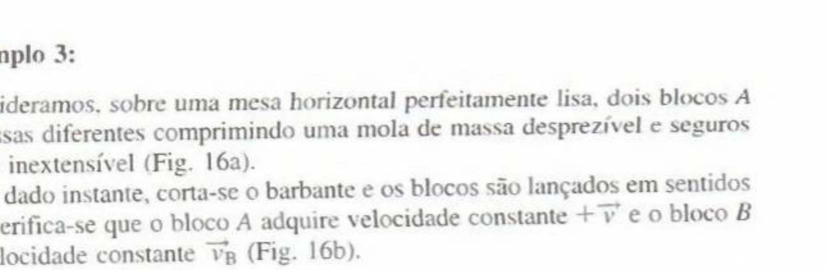
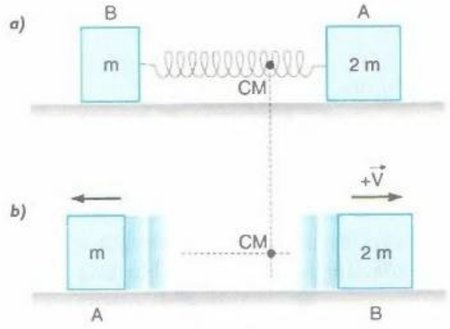


Fig. 15 O centro de massa CM continua em MRU com velocidade $\vec{v}$.

Exemplo 3:

Consideramos, sobre uma mesa horizontal perfeitamente lisa, dois blocos A e B de massas diferentes comprimindo uma mola de massa desprezível e seguros por um fio inextensível (Fig. 16a).

Num dado instante, corta-se o barbante e os blocos são lançados em sentidos opostos. Verifica-se que o bloco A adquire velocidade constante $+\vec{v}$ e o bloco B adquire velocidade constante $\vec{v}_B$ (Fig. 16b).



Procuraremos relacionar a velocidade $\vec{v}_B$ com a velocidade $+\vec{v}$ do bloco *A*.

Fig. 16 ***a)*** *Os blocos comprimem a mola.* ***b)*** *Cortado o fio, os blocos são impulsionados e o CM continua em repouso.*

Analisemos:

Como dois blocos estavam inicialmente em repouso, era nula a quantidade de movimento inicial. Ao cortarmos o fio, não houve intervenção de nenhuma força externa. Pelo Teorema da Conservação da Quantidade de Movimento, concluímos que a soma de $\vec{Q}_A$ e $\vec{Q}_B$ deverá continuar nula e o centro de massa não se moverá. Matematicamente, teremos:

$$M \cdot \vec{v}_{CM} = \vec{Q}_A + \vec{Q}_B = m_A \cdot \vec{v}_A + m_B \cdot \vec{v}_B$$

Após cortarmos o fio: $\vec{v}_{CM} = \vec{0}$ (o CM continua em repouso)

$$m_A \cdot \vec{v}_A + m_B \cdot \vec{v}_B = \vec{0}$$

$$2m \cdot (+\vec{v}) + m \cdot \vec{v}_B = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{v}_B = -2\vec{v}}$$

Conclusão:

O bloco *B*, que possui massa igual à metade da massa do bloco *A*, se moverá em sentido oposto, com o dobro de sua velocidade.

15. BARICENTRO OU CENTRO DE GRAVIDADE

Centro de gravidade (CG) ou baricentro (*G*) é o ponto de aplicação da resultante das forças de gravidade que atuam em cada partícula do sistema (Fig. 17).

Se um sistema estiver imerso num campo de gravidade uniforme, então o seu centro de massa CM coincidirá com o seu centro de gravidade CG e com o respectivo baricentro *G*.

Para determinarmos o centro de gravidade de um corpo, homogêneo ou não, usamos o seguinte método experimental: suspendemos o corpo por dois pontos diferentes em duas situações distintas. Primeiro, o corpo é suspenso por um ponto *A* e traçamos uma reta vertical AX (Fig. 18a). Depois, o corpo é suspenso por um ponto *B* e traçamos a vertical BY (Fig. 18b).

O centro de gravidade CG é a interseção das retas AX e BY (Fig. 18c).

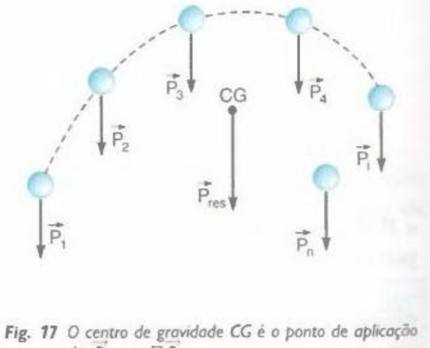


Fig. 17 *O centro de gravidade CG é o ponto de aplicação de* $\vec{P}_{res} = \Sigma \vec{P}_i$.

O centro de gravidade de um corpo sólido corresponde ao ponto pelo qual podemos suspender o corpo de maneira que ele permaneça em equilíbrio indiferente.

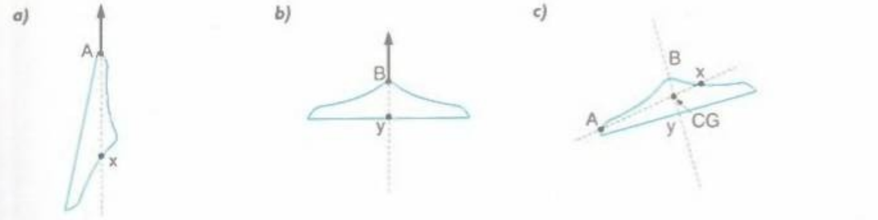
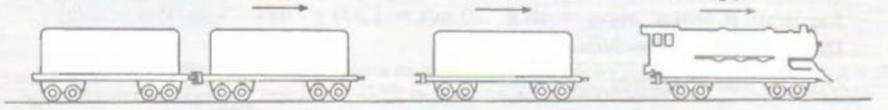


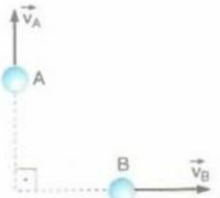
Fig. 18 Um corpo de formato irregular, como um cabide, é suspenso duas vezes: a primeira por A (fig 18a) e a segunda por B (fig 18b). Em (fig 18c) determina-se o CG do cabide.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

29. Um trem se descarrilou, dividindo-se em três partes, conforme indica a figura. A máquina tem massa 2M, enquanto cada vagão tem massa M. Determine o módulo da velocidade do centro de massa da composição no instante abaixo mostrado.



30 Duas partículas, A e B, de massas iguais a 3,0 kg e 4,0 kg, respectivamente, possuem velocidades de mesmo módulo, 1,0 m/s, e direções perpendiculares. Determine o módulo da velocidade do centro de massa.

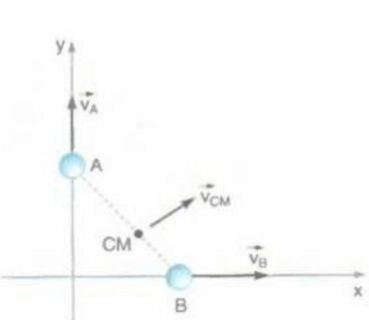


Resolução:

Adotemos os eixos (x) e (y) para referência, conforme a figura.

Na direção (x) a velocidade do centro de massa é:

$$V_x = \frac{m_B \cdot v_B}{m_A + m_B} = \frac{4{,}0 \cdot 1{,}0}{3{,}0 + 4{,}0} = \frac{4{,}0}{7{,}0}\ \text{m/s}$$

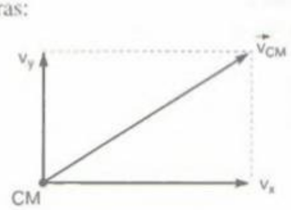


Na direção y, a velocidade do centro de massa fica:

$$v_y = \frac{m_A \cdot v_A}{m_A + m_B} = \frac{3{,}0 \cdot 1{,}0}{3{,}0 + 4{,}0} = \frac{3{,}0}{7{,}0}\ \text{m/s}$$

A resultante entre v_x e v_y é dada pelo Teorema de Pitágoras:

$$v_{CM}^2 = v_x^2 + v_y^2$$

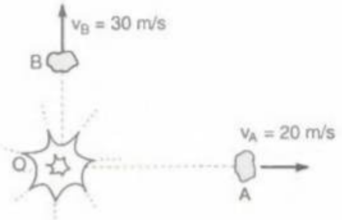


$$v_{CM}^2 = \frac{16}{49} + \frac{9,0}{49} = \frac{25}{49}$$

$$v_{CM} = \frac{5,0}{7,0}\ \text{m/s} \quad \text{ou} \quad v_{CM} \cong 0,71\ \text{m/s}$$

Observação: O exercício poderia ter sido resolvido pelas quantidades de movimento, conforme se propõe no exercício a seguir.

31 Um corpo, ao explodir no ponto *O*, divide-se em dois fragmentos *A* e *B*, de massas $m_A = 60$ g e $m_B = 40$ g. Os fragmentos encontram-se em um mesmo plano horizontal perfeitamente liso, e suas velocidades são perpendiculares entre si e estão indicadas na figura ao lado. Qual o módulo da velocidade do centro de massa do sistema constituído pelos dois fragmentos?

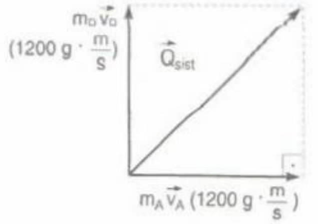


Resolução:

Calculemos, inicialmente, a quantidade de movimento do sistema. O fragmento *A* tem quantidade de movimento cujo módulo é $m_A v_A = 60\ g \cdot 20\ m/s = 1\,200\ g \cdot m/s$ e, para o fragmento *B*, temos: $m_B v_B = 40\ g \cdot 30\ m/s = 1\,200\ g \cdot m/s$.
Da figura ao lado concluímos que:

$$Q_{sist} = 1\,200\sqrt{2}\ g \cdot m/s$$

Sendo $(m_A + m_B) \cdot \vec{v}_{CM} = \vec{Q}_{sist}$ e considerando os módulos, vem:



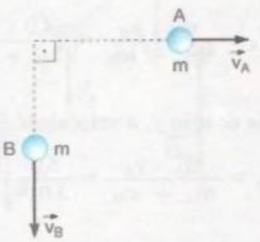
$$(m_A + m_B) \cdot v_{CM} = Q_{sist}$$

$$(60 + 40) \cdot v_{CM} = 1\,200\sqrt{2}$$

$$v_{CM} = 12\sqrt{2}\ \text{m/s}$$

$$v_{CM} \cong 17\ \text{m/s}$$

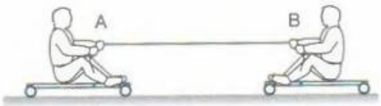
32. Duas partículas *A* e *B* de massas iguais possuem, em certo instante, velocidades $v_A = 6,0$ m/s e $v_B = 8,0$ m/s, respectivamente, conforme a figura. Determine, no instante considerado, a velocidade do centro de massa.



33 No esquema, nota-se um indivíduo *A*, sentado em um carro de rolimã (massa total 40 kg), e outro *B*, sentado em outro carro (massa total 60 kg). Inicialmente, ambos estão parados e distanciados de 1,0 m. Tracionando uma corda leve, *A* e *B* se aproximam mutuamente. Desprezar a dissipação.

a) O que acontece com o centro de massa do sistema?

b) Quais as distâncias que *A* e *B* percorrem até se encontrarem?



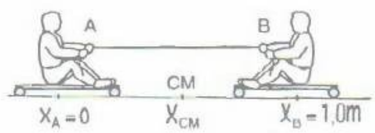
Resolução:

a) O sistema constituído pelos indivíduos *A* e *B*, pelos carrinhos e pela corda está isolado de forças externas. Isso significa que a velocidade vetorial do centro de massa é constante. Como o centro de massa está inicialmente em repouso, concluímos que ele *permanece em repouso*, mesmo quando os indivíduos *A* e *B* se aproximam.

b) O encontro entre *A* e *B* ocorre justamente no centro de massa do sistema:

$$x_{CM} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}$$

Sendo $m_A = 40$ kg, $m_B = 60$ kg, $x_A = 0$ e $x_B = 1,0$ m, vem:

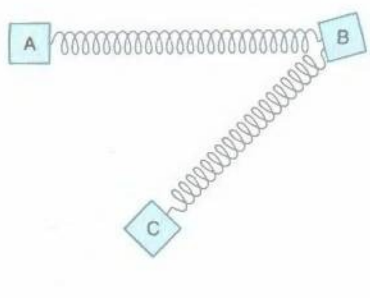


$$x_{CM} = \frac{40 \cdot 0 + 60 \cdot 1,0}{40 + 60}$$

$$\boxed{x_{CM} = 0,60 \text{ m}}$$

Assim, o centro de massa encontra-se a 0,60 m da posição inicial de *A*. Portanto, *A* e *B* percorrem, até se encontrarem, 0,60 m 0,40 m, respectivamente.

34 Três corpos *A*, *B* e *C*, com massas respectivamente iguais a 4,0 kg, 6,0 kg e 8,0 kg, acham-se apoiados sobre uma superfície horizontal, sem atrito. Esses corpos estão ligados por intermédio de molas de massas desprezíveis e são abandonados a partir da posição indicada na figura, quando as trações nas molas AB e BC forem respectivamente 10 N e 15 N. Determine, nesse instante, os módulos das acelerações dos centros de massa dos sistemas.



a) *A* e *B*; b) *A*, *B* e *C*.

Resolução:

a) As forças que agem nos corpos *A* e *B* estão indicadas na figura. As forças de intensidade 10 N são internas ao sistema *A* e *B* e, portanto, o centro de massa do sistema é acelerado pela força externa de intensidade 15 N.

Pelo Teorema do Centro de Massa, temos:

$$(m_A + m_B) \cdot \vec{a}_{CM} = \vec{F}_{ext}$$

Considerando os módulos, podemos escrever:

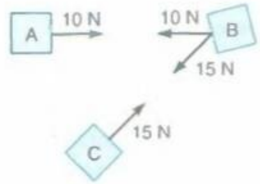
$$(m_A + m_B) \cdot a_{CM} = F_{ext}$$

Sendo $m_A = 4{,}0$ kg, $m_B = 6{,}0$ kg e $F_{ext} = 15$ N, vem:

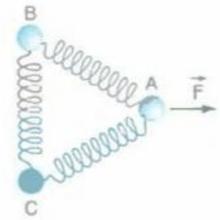
$(4{,}0 + 6{,}0) \cdot a_{CM} = 15$

$a_{CM} = 1{,}5\ m/s^2$

b) A resultante das forças externas que agem no sistema *A*, *B* e *C* é nula. Desse modo, pelo Teorema do Centro de Massa, concluímos que a aceleração do centro de massa desse sistema é *nula*.



35. Na figura, as três molas estão tracionadas e as trações têm o mesmo módulo, igual a 12 N. Os três corpos, *A*, *B* e *C*, são iguais e suas massas valem 1,0 kg. Uma força $\vec{F}$ é então aplicada ao corpo *A*, e o centro de massa do sistema adquire uma aceleração de módulo igual a 2,0 m/s². Determine a intensidade de $\vec{F}$.

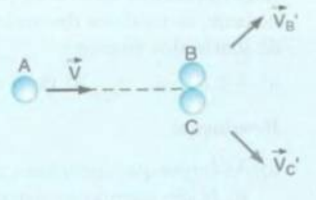


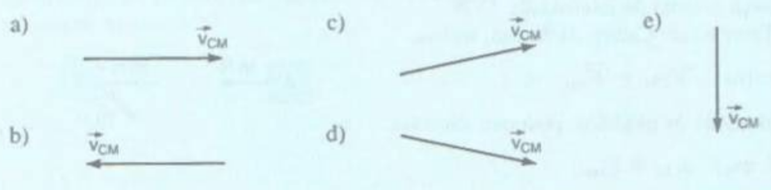
EXERCÍCIOS DE REFORÇO

36. Uma granada está em repouso e, num dado instante, explode em 50 fragmentos.

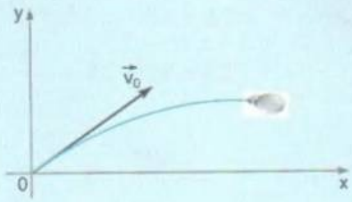
a) O centro de massa do sistema permanecerá em repouso imediatamente após a explosão.
b) O centro de massa do sistema, após a explosão, desaparecerá.
c) O centro de massa do sistema, após a explosão, estará em lugar indefinido.
d) A explosão é força externa ao sistema e acelera o centro de massa.

37. Uma bola de bilhar A vai colidir com as bolas *B* e *C*, que estão juntas na mesa. Após a colisão, *B* e *C* seguem trajetórias distintas e suas velocidades serão $\vec{v}'_B$ e $\vec{v}'_C$. Um pouco depois da colisão, a trajetória do centro de massa do sistema terá o sentido dado por:



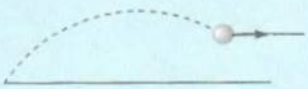


38. (F. M. Itajubá-MG) Uma granada é lançada com uma velocidade inicial $\vec{v}_0$ formando ângulo θ com a vertical, e, após descrever a trajetória da figura, ela explode.

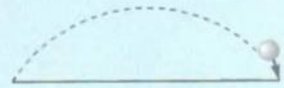


Após a explosão, o centro de massa dos fragmentos da granada descreverá a trajetória:

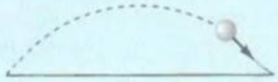
a)



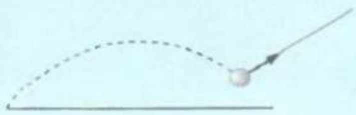
d)



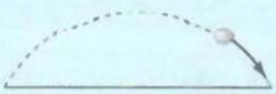
b)



e)



c)



39. (F. M. Taubaté-SP) Um objeto de massa M, inicialmente em repouso, explode em duas partes A e B, com massas de $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$, respectivamente, da massa do objeto inicial. Sabendo que a distância entre elas em um instante t é de 30 m, então a distância do corpo B ao ponto de explosão será:

a) 10 m b) 20 m c) 15 m d) 18 m e) n.d.a.

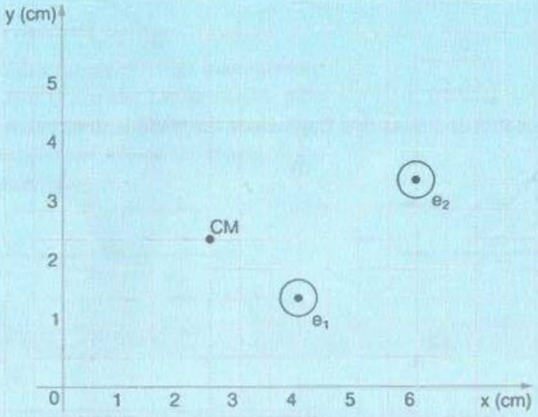
40. Uma pedra está em repouso sobre uma superfície horizontal perfeitamente lisa. Em seu interior há uma pequena bomba, que, ao explodir, estilhaça a pedra em três pedaços de massas diferentes, que passam a deslizar sobre a superfície horizontal. Nessas condições, após a explosão, o que acontece com o centro de massa da pedra?

a) Desaparece.
b) Movimenta-se com velocidade do pedaço de maior massa.
c) Permanece em repouso.
d) Movimenta-se com velocidade igual à soma das velocidades escalares dos três pedaços.
e) Realiza MRU.

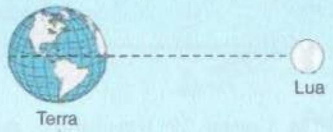
EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

41. (FCMSC-SP) Na figura a seguir, CM é o centro de massa de um sistema constituído por três esferas (e_1, e_2 e e_3) de mesma massa. A terceira esfera não aparece na figura. X e Y são eixos de um sistema de referência. Quais são as coordenadas Xc e Yc do centro da esfera e_3?
(Os centros de massa das três esferas estão contidos no plano XY.)

a) $X_c = -5{,}0$ e $Y_c = -2{,}5$
b) $X_c = 5{,}0$ e $Y_c = 2{,}5$
c) $X_c = -2{,}5$ e $Y_c = 2{,}5$
d) $X_c = 2{,}5$ e $Y_c = -2{,}5$
e) $X_c = 2{,}5$ e $Y_c = 2{,}5$

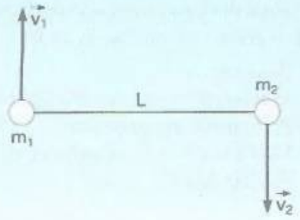


42. A massa da Terra é aproximadamente 80 vezes maior que a da Lua. A distância entre os centros de massa da Terra e da Lua é 30 vezes o diâmetro da Terra. Relativamente à posição do centro de massa do sistema Terra–Lua, pode-se afirmar que ele:



a) é o ponto médio do segmento que une os dois centros Terra–Lua;
b) está mais próximo da Lua do que da Terra;
c) é um ponto da superfície do nosso planeta;
d) é um ponto no interior do nosso planeta;
e) é um ponto externo muito próximo da Terra.

43. (ITA-SP) Nas extremidades de uma haste homogênea, de massa desprezível e comprimento L, acham-se presas as massas m_1 e m_2. Num dado instante, as velocidades dessas massas são, respectivamente, $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$, ortogonais à haste (ver figura). Seja v_{CM} a velocidade do centro da massa, em relação ao laboratório, e seja ω o módulo da velocidade angular com que a haste se acha girando em torno de um eixo que passa pelo centro de massa. Pode-se mostrar que:



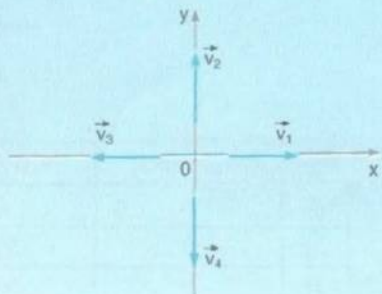
	$\vec{v}_{CM}$	ω
a)	$\dfrac{m_1\vec{v}_1 - m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$	$\dfrac{\lvert v_1 - v_2\rvert}{L}$
b)	$\dfrac{m_2\vec{v}_2 - m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}$	$\dfrac{\lvert v_2 - v_1\rvert}{L}$

c) $\dfrac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$ $\qquad \dfrac{|v_1 - v_2|}{L}$

d) $\dfrac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$ $\qquad \dfrac{(v_1 + v_2)}{L}$

e) $\dfrac{m_1 \vec{v}_1 - m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$ $\qquad \dfrac{(v_1 + v_2)}{L}$

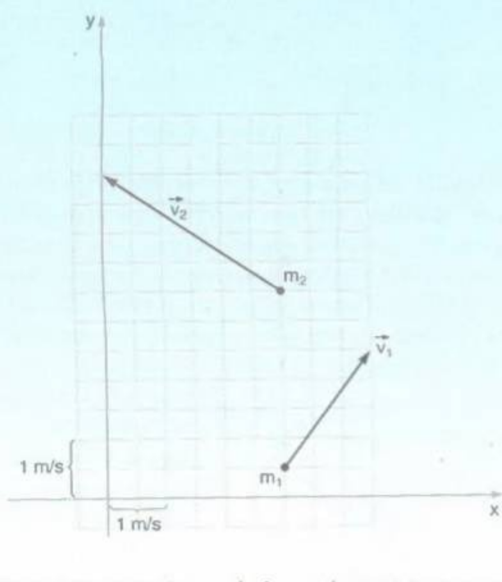
44. (PUCC-SP) Quatro partículas de mesma massa têm velocidade $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ e $\vec{v}_4$ segundo as orientações indicadas na figura e módulos dados por $v_1 = 6{,}0$ m/s; $v_2 = 3{,}0\ t$ (SI); $v_3 = 3{,}0$ m/s; $v_4 = 2{,}0$ m/s.



No instante $t = 0$ as quatro partículas distam $d = 1{,}0$ m da origem de coordenadas.
Para o instante $t = 2{,}0$ s determine, do centro de massa do sistema:

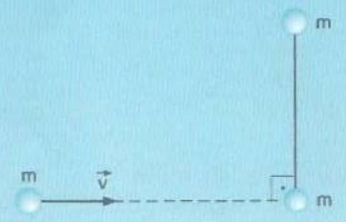
a) suas coordenadas
b) o módulo de sua velocidade
c) o módulo de sua aceleração

45. Na figura estão representadas as velocidades vetoriais $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ de duas partículas de massas $m_1 = 1{,}0$ kg e $m_2 = 2{,}0$ kg. O sistema é isolado. Determine o módulo da velocidade vetorial do centro de massa das duas partículas, bem como das duas componentes nas direções *x* e *y*.



46. (ITA-SP) Uma haste rígida e de massa desprezível possui presas em suas extremidades duas massas idênticas *m*. Este conjunto acha-se sobre uma superfície horizontal perfeitamente lisa (sem atrito). Uma terceira partícula também de massa *m* e velocidade $\vec{V}$ desliza sobre esta superfície numa direção perpendicular à haste e colide com uma das massas da haste, ficando colada à mesma após a colisão.

Podemos afirmar que a velocidade do centro de massa V_{CM} (antes e após a colisão) bem como o movimento dos sistema após a colisão serão:

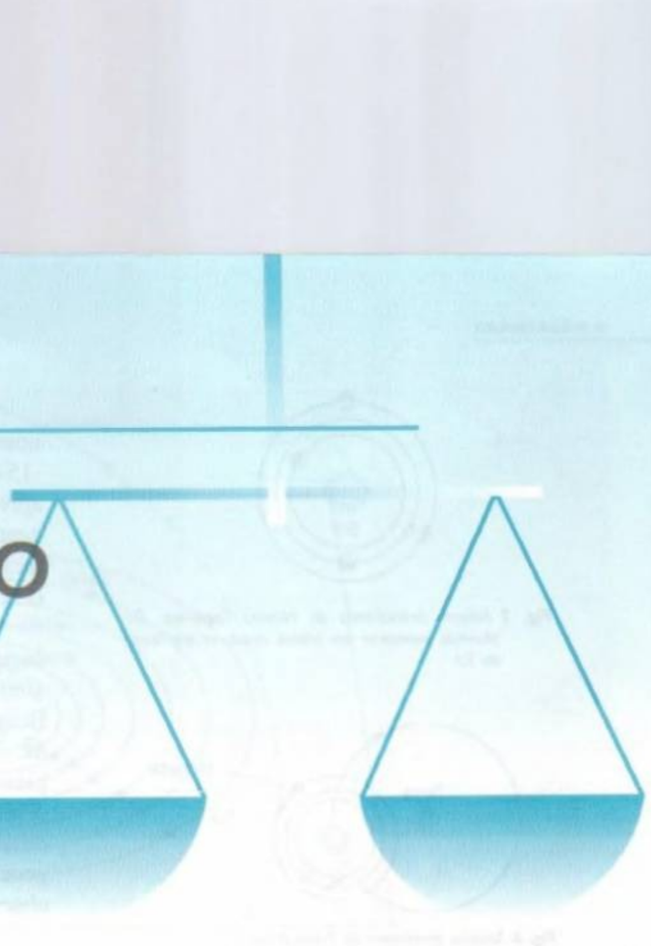


	V_{CM} (antes)	V_{CM} (após)	Movimento do sistema após a colisão
a)	0	0	circular e uniforme
b)	0	V/3	translacional e rotacional
c)	0	V/3	só translacional
d)	V/3	V/3	translacional e rotacional
e)	V/3	0	só rotacional

10

CAPÍTULO 11

GRAVITAÇÃO



1. HISTÓRICO

Os planetas e as estrelas sempre fascinaram a humanidade. Muitas teorias surgiram a respeito do movimento desses corpos, mas na realidade foram os gregos os primeiros a apresentar teorias que realmente procuravam explicar os movimentos observados, abandonando as idéias místicas de outros povos.

Aristarco de Samos (310 a.C.-230 a.C.) foi o primeiro a adotar o sistema heliocêntrico*, isto é, o Sol no centro do Universo. No entanto, por não ter sido bem aceito, esse sistema foi logo esquecido. Havia uma preferência pelos sistemas geocêntricos** (a Terra no centro do Universo e os planetas girando ao seu redor). Desses, o mais bem aceito foi o de Cláudio Ptolomeu (90(?)-170). Suas idéias prevaleceram até o Renascimento. Seu sistema era relativamente confuso, pois afirmava que cada planeta descrevia uma órbita circular em torno de um centro e este, por sua vez, descrevia uma órbita circular em torno da Terra (Fig. 1).

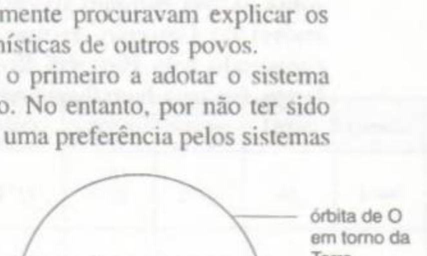


Fig. 1 Sistema geocêntrico de Cláudio Ptolomeu. Cada planeta tem uma órbita circular em torno de um ponto imaginário O.

* *hélios* em grego significa "Sol".
** *geo* em grego significa "Terra".

Fig. 2 Sistema heliocêntrico de Nicolau Copérnico. Os planetas movem-se em órbitas circulares em torno do Sol.

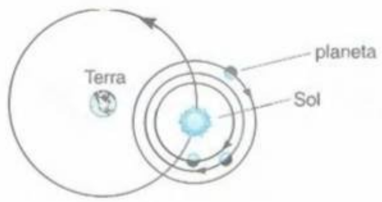


Fig. 3 Sistema geocêntrico de Tycho Brahe.

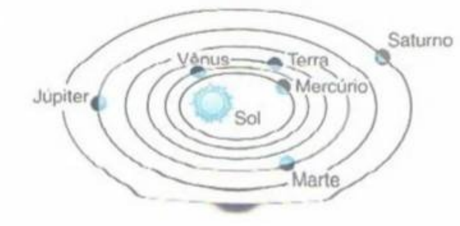


Fig. 4 Sistema heliocêntrico de Kepler. As trajetórias dos planetas são elipses.

Somente no século XVI, com o astrônomo polonês Nicolau Copérnico (1473-1543), o sistema heliocêntrico voltou a ser apresentado. Para Copérnico, o Sol era o centro do Universo e todos os planetas, inclusive a Terra, giravam em torno dele (Fig. 2).

Quase no final do século XVI surge uma segunda teoria de *geocentrismo*, agora de autoria do conceituado astrônomo Tycho Brahe. Segundo ela, o Sol giraria em torno da Terra e carregaria consigo os demais planetas, os quais giravam em torno dele em órbitas circulares (Fig. 3). A controvérsia criada pelas duas teorias (heliocentrismo e geocentrismo) levou os astrônomos a fazerem observações mais precisas.

Johannes Kepler é dessa época. Ele foi aluno e assistente de Tycho Brahe. Embora combatesse as órbitas circulares de Nicolau Copérnico, acabou concluindo que os planetas realmente giravam em torno do Sol, porém suas órbitas eram elípticas (Fig. 4). Nessa época, os astrônomos já conheciam seis planetas: Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter, Saturno e a própria Terra, lógico.

Apesar de toda essa evolução científica, até o século XVII era uma heresia religiosa afirmar que os planetas giravam em torno do Sol e não da Terra.

Giordano Bruno foi julgado pela Inquisição e queimado numa fogueira por defender o heliocentrismo. Galileu Galilei, por volta de 1630, publicou *Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo*, onde escreveu que o Sol era o centro imóvel do Universo, enquanto a Terra girava à sua volta. Imediatamente foi convocado pelo Papa em Roma e, temendo também ser queimado pela Santa Igreja, fez uma humilhante retratação diante da corte do Santo Ofício.

2. O SISTEMA SOLAR

Nosso Sistema Solar, até onde sabemos hoje, é constituído pelo Sol, por 9 planetas, 33 satélites e cerca de 2 500 asteróides. Os planetas movem-se todos no mesmo sentido em torno do Sol, descrevendo órbitas elípticas. A distância média de cada planeta ao Sol varia de um para outro. Colocando-se os planetas em ordem crescente de distância ao Sol, teremos: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Netuno e Plutão. As oito órbitas iniciais são aproximadamente coplanares, enquanto a de Plutão está fora do grande plano (Fig. 5).

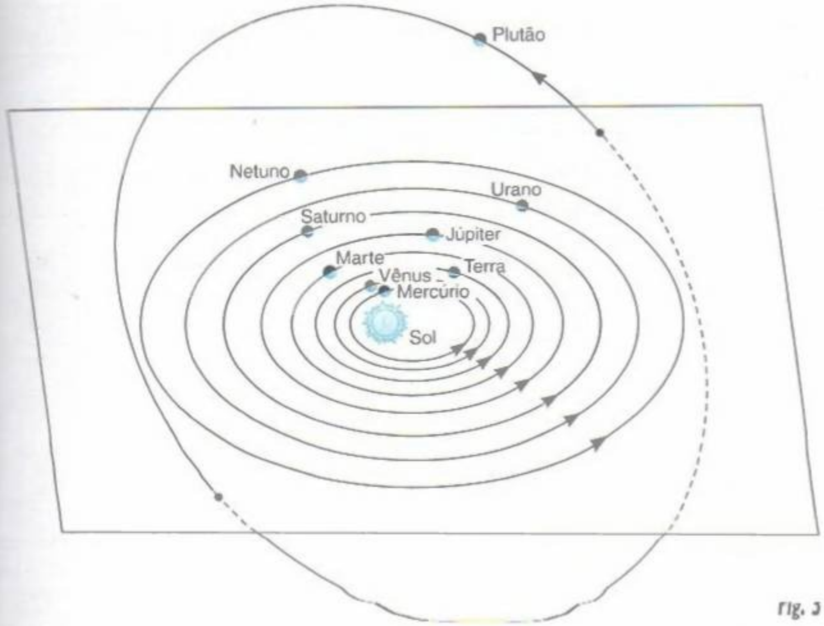


Fig. 3

O plano no qual está contida a órbita da Terra é chamado de *eclíptica*. Na tabela I, onde são apresentadas algumas informações sobre os planetas, aparece o ângulo de inclinação formado pelo plano da órbita de cada planeta com a eclíptica.

Observação

Tomando como base o raio médio da órbita da Terra, os astrônomos definiram uma unidade de comprimento denominada *unidade astronômica* (UA). Por definição temos:

$$1 \text{ UA} = 149\,600 \cdot 10^6 \text{ m}$$

TABELA I – Informações sobre os planetas

	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Netuno	Plutão
Inclinação da órbita em relação à eclíptica	7°	3°24′	0°	1°51′	1°18′	2°30′	46′	1°46′	17°10′
Distância máxima ao Sol (10^6 km)	69,9	109	152,1	249,1	815,7	1 507	3 004	4 537	7 375
Distância mínima ao Sol (10^6 km)	45,9	107,4	147,1	206,7	740,9	1 347	2 735	4 456	4 425
Distância média ao Sol (10^6 km)	57,9	108,2	149,6	227,9	778,3	1 427	2 870	4 497	5 900
Período de translação (a = ano; d = dia)	88d	224,7d	365,25d	687d	11,86a	29,46a	84a	164,8a	247,7a

	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Netuno	Plutão
Velocidade orbital (km/s)	47,9	35	29,8	24,1	13,1	9,6	6,8	5,4	4,7
Diâmetro equatorial (km)	4 880	12 200	12 756	6 787	142 800	120 000	51 000	49 000	2 300
Massa em relação à Terra	0,055	0,815	1	0,108	318	95,2	14,6	17,2	0,017
Satélites conhecidos	0	0	1	2	16	18	15	8	1

3. AS LEIS DE KEPLER

No começo do século XVII, Johannes Kepler descobriu que o movimento complicado dos planetas do Sistema Solar poderia ser descrito por três leis simples.

Kepler baseou-se fundamentalmente nos resultados experimentais e informações de seu mestre: o astrônomo Tycho Brahe. No início de seus estudos, sua intenção era provar que a Terra e Marte giravam em torno do Sol. Inicialmente, procurou uma órbita simples para Marte, que iria concordar com uma série de medidas já feitas sobre o planeta. Depois de muitos anos de pesquisa e trabalho, acabou concluindo três leis muito simples que descrevem o movimento dos planetas em torno do Sol. Essas leis aplicam-se também ao movimento dos satélites em torno dos planetas.

A Primeira Lei de Kepler

> Tomando-se como referencial o Sol, cada planeta percorre uma órbita elíptica onde o Sol ocupa um dos focos da elipse (Fig. 6).

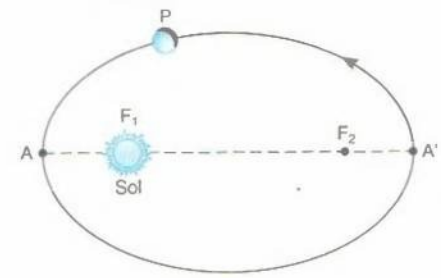


Fig. 6 Em relação ao Sol, a órbita do planeta é uma elipse. O Sol ocupa um dos focos.

A Primeira Lei de Kepler não exclui a possibilidade de a órbita ser circular, pois a circunferência é uma elipse particular de excentricidade nula. Na realidade, as órbitas dos planetas são elipses de pequena excentricidade, isto é, bem próximas de circunferências. Não se comete erro muito grande quando se admite a órbita circular e o Sol como centro.

O ponto da órbita do planeta mais próximo do Sol (*A*) é denominado *periélio* e o ponto mais afastado (*A'*), *afélio*.

A Segunda Lei de Kepler

> A área varrida pelo raio vetor de um planeta é proporcional ao intervalo de tempo gasto para varrê-la.

Na Fig. 7a representa-se o raio vetor de um planeta, que tem origem no centro de massa do Sol e extremidade no centro de massa do planeta.

A Fig. 7b representa um planeta que se desloca da posição P_1 para P_2, num intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$. Sendo A a área varrida pelo raio vetor do planeta nesse intervalo de tempo, a expressão matemática da Segunda Lei de Kepler é:

$$\boxed{A = K \cdot \Delta t} \qquad \text{ou, então:} \qquad K = \frac{A}{\Delta t} \quad \text{(constante)}$$

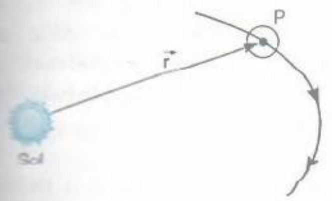


Fig. 7a Representação do raio vetor $\vec{r}$ do planeta P.

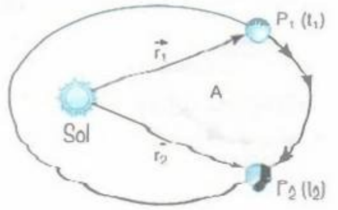


Fig. 7b A região sombreada de área A foi varrida pelo raio vetor entre duas posições P_1 e P_2 do planeta.

A constante K é denominada *velocidade areolar do planeta*. Decorre daí uma segunda maneira de se enunciar a Segunda Lei de Kepler:

> A velocidade areolar de um planeta é constante.

Na Fig. 8, sendo A_1, A_2, A_3, ..., A_n as áreas varridas em intervalos de tempo respectivamente iguais a Δt_1, Δt_2, Δt_3, ..., Δt_n, podemos relacioná-las por:

$$K = \frac{A_1}{\Delta t_1} = \frac{A_2}{\Delta t_2} = \ldots = \frac{A_n}{\Delta t_n}$$

K = velocidade areolar

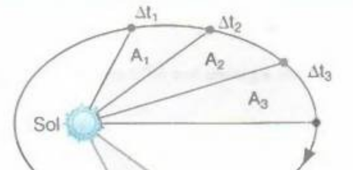


Fig. 8 O planeta percorre sua trajetória com velocidade areolar constante.

Se considerarmos, agora, intervalos de tempo iguais, as áreas varridas serão iguais (Fig. 9).

A velocidade areolar de um planeta é constante, mas varia de um planeta para outro, aumentando com a distância do planeta ao Sol. Assim, Mercúrio tem a menor velocidade areolar e Plutão, a maior.

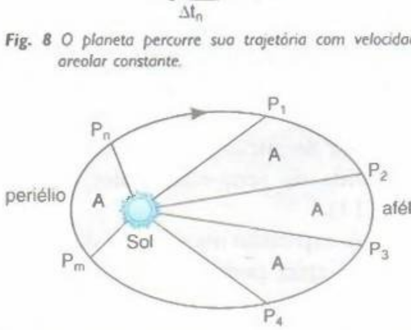


Fig. 9 Em intervalos de tempo iguais, o raio vetor do planeta varre áreas iguais.

onde C é uma constante de proporcionalidade. Veremos, nos próximos itens, uma expressão matemática relacionando a constante C com a massa do Sol. Ela é independente da massa do planeta. Assim, para todos os planetas em órbita do Sol, a constante C é a mesma. Entre Marte e a Terra, por exemplo, temos:

$$\frac{R_T^3}{T_T^2} = \frac{R_M^3}{T_M^2} = C \quad \left\{ \begin{array}{l} R_T \text{ – raio médio da órbita da Terra} \\ R_M \text{ – raio médio da órbita de Marte} \\ T_T \text{ – período de translação da Terra ao redor do Sol} \\ T_M \text{ – período de translação de Marte ao redor do Sol} \end{array} \right.$$

Notas sobre a Terceira Lei de Kepler

1ª) Se considerarmos o planeta em órbita circular, o raio médio R será o próprio raio da circunferência e T será o período do seu movimento circular uniforme. Na resolução de problemas, esse recurso tem muita utilidade.

2ª) Quanto mais afastado do Sol estiver o planeta, maior será o seu período de translação (Fig. 14).
Enquanto Mercúrio tem o menor período (88 dias), Plutão, o mais distante dos nove planetas, tem o maior período (cerca de 248 anos).

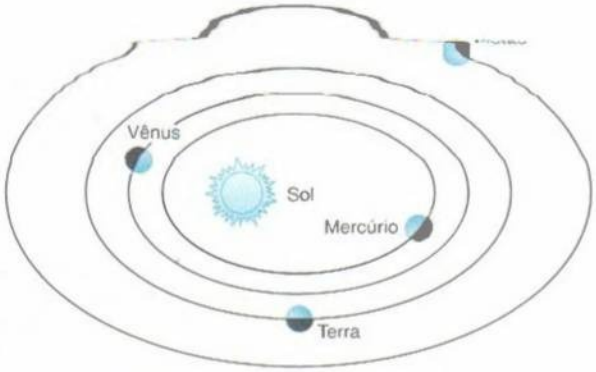


Fig. 14 Representação esquemática das órbitas dos planetas de menor período (Mercúrio, Vênus e Terra) e do de maior período (Plutão).

3ª) A Terceira Lei de Kepler pode também ser aplicada a um planeta e seus satélites. Nesse caso, o planeta fará o papel do Sol, e a constante C será dependente da massa do planeta. Por exemplo, para o movimento de translação da Lua e satélites artificiais ao redor da Terra pode-se aplicar a terceira lei:

$$\frac{r_L^3}{T_L^2} = \frac{r_s^3}{T_s^2} = C$$

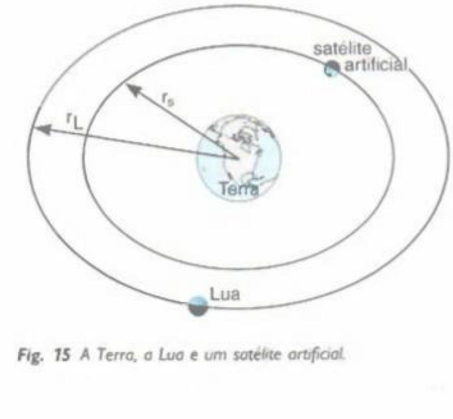


Fig. 15 A Terra, a Lua e um satélite artificial.

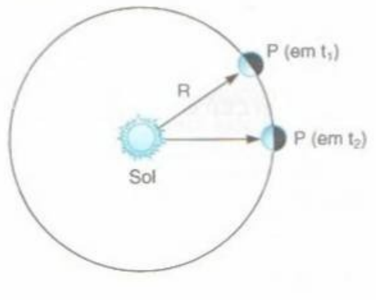
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Calcule a velocidade areolar de um planeta que descreve, em torno do Sol, uma órbita praticamente circular, de raio *R*, num período *T*.

Resolução:

Chamando de *K* a velocidade areolar, sua definição é:

$$K = \frac{\text{área varrida pelo raio vetor}}{\text{intervalo de tempo}} = \frac{A}{\Delta t}$$



Em uma revolução completa do planeta em torno do Sol, teremos:

$A = \pi R^2$ e $\Delta t = T$

Portanto:

$$\boxed{K = \frac{\pi R^2}{T}}$$

2. Demonstre que a velocidade areolar da Terra é menor que a de Marte. Admita seus movimentos circulares e uniformes e use os dados da tabela abaixo:

	Raio de órbita	Período
Terra	R	T
Marte	1,5 R	2 T

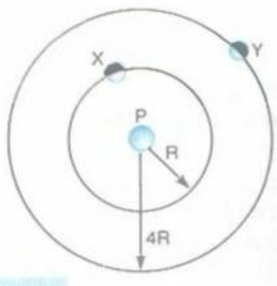
Observação: esses dados são aproximados.

3. Um satélite *X* está em órbita circular em torno de um planeta *P*. O seu período de translação é de 32 dias e o seu raio de órbita é *R*. Um segundo satélite *Y*, também em órbita circular em torno do planeta *P*, tem período de translação *T* e raio de órbita igual a 4 R. Determine o período de translação *T* do satélite *Y*.

Resolução:

De acordo com a Terceira Lei de Kepler podemos escrever:

$$\frac{R^3}{T_X^2} = \frac{(4R)^3}{T_Y^2}$$



Sendo $T_X = 32$ dias, vem:

$$\frac{R^3}{(32)^2} = \frac{4^3 \cdot R^3}{T_Y^2} \qquad \frac{1}{(32)^2} = \frac{4^3}{T_Y^2}$$

$$T_Y^2 = (32)^2 \cdot 4^3 = (32)^2 \cdot (2^3)^2 \qquad T_Y^2 = (32)^2 \cdot (8)^2$$

Extraindo-se a raiz quadrada: $T_Y = (32) \cdot (8)$ $\boxed{T_Y = 256 \text{ dias}}$

Observação: devemos fatorar os valores dados antes de procurar extrair as raízes quadradas ou cúbicas desses valores numéricos.

4. Um satélite artificial *A* gira em torno da Terra em órbita circular de raio 2 R e período de translação de 2 horas. Um segundo satélite artificial, *B*, também tem órbita circular em torno da Terra e o seu período de translação é de 16 horas. Determine, em função de *R*, o raio de sua órbita.

5. Considere dois satélites artificiais da Terra em órbitas circulares. O satélite *X* tem período de 1 dia e raio de órbita aproximadamente 7 R, onde *R* é o raio da Terra. O satélite *Y* tem período de 8 dias. Qual o raio de órbita do satélite *Y*?

6. Um satélite *S* está em órbita circular em torno da Terra e o raio de sua órbita é $\frac{R}{3}$, onde *R* é o raio médio da órbita da Lua. Determine o valor aproximado de seu período.

Resolução:

Pela Terceira Lei de Kepler, vem:

$$\frac{R_{Lua}^3}{T_{Lua}^2} = \frac{R_{Sat}^3}{T_{Sat}^2}$$

Sendo $R_{Lua} = R$, $R_{Sat} = \frac{R}{3}$

e admitindo-se que o período da Lua seja de aproximadamente 27 dias,

$T_{Lua} \cong 27$ dias $= 3^3$ dias, vem:

$$\frac{R^3}{(3^3)^2} = \frac{\left(\frac{R}{3}\right)^3}{T_{Sat}^2} \qquad \frac{1}{3^6} = \frac{\frac{1}{(3)^3}}{T_{Sat}^2}$$

$$T_{Sat}^2 = 3^6 \cdot \frac{1}{(3)^3} = 3^3$$

$$T_{Sat} = 3\sqrt{3} \text{ dias} \cong 5{,}2 \text{ dias}$$

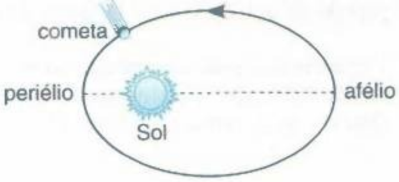
7. Um satélite gira em torno da Terra em uma órbita circular, cujo raio é igual a 1/4 do raio da órbita da Lua. Adote o período da Lua igual a 28 dias.
   a) Qual é o valor aproximado do período do satélite? Admita que a Lua esteja em movimento circular em torno da Terra.
   b) Qual a razão entre o módulo da velocidade do satélite e o módulo da velocidade da Lua $\left(\frac{v_{Sat}}{v_{Lua}}\right)$?

8. Sendo a distância da Terra ao Sol equivalente a 1 UA (unidade astronômica), e sabendo que o período de revolução de Saturno em torno do Sol é de aproximadamente 27 anos, determine a distância máxima que pode existir entre a Terra e Saturno.

9. Um cometa em torno do Sol tem uma órbita elíptica tal que a distância mínima ao Sol (periélio) é de $3{,}0 \cdot 10^8$ km e a máxima (afélio) de $9{,}0 \cdot 10^8$ km. Sabendo que a Terra tem distância média do Sol de $1{,}5 \cdot 10^8$ km, determine o período (*T*) do cometa.

Resolução:

Calculemos, inicialmente, o raio médio da elipse, trajetória do cometa:



$$R = \frac{d_{mín} + d_{máx}}{2}$$

$$R = \frac{3{,}0 \cdot 10^8 + 9{,}0 \cdot 10^8}{2}$$

$$R = 6{,}0 \cdot 10^8 \text{ km}$$

Comparemos com a Terra, usando a Terceira Lei de Kepler:

$\frac{R^3}{T^2} = \frac{R_T{}^3}{T_T{}^2}$, onde $R_T = 1{,}5 \cdot 10^8$ km e $T_T = 1$ ano.

$$\frac{(6{,}0 \cdot 10^8)^3}{T^2} = \frac{(1{,}5 \cdot 10^8)^3}{1^2} \qquad T^2 = \frac{(6{,}0 \cdot 10^8)^3}{(1{,}5 \cdot 10^8)^3} = (4{,}0)^3 \qquad \boxed{T = 8 \text{ anos}}$$

10. Calcule o período de um cometa que tem órbita elíptica em torno do Sol. Sabe-se que no afélio ele dista $37 \cdot 10^8$ km do Sol, e no periélio, $11 \cdot 10^8$ km. É dada a distância média da Terra ao Sol: $1{,}5 \cdot 10^8$ km.

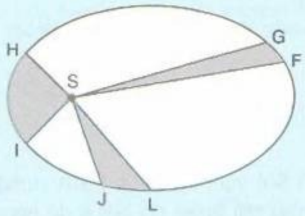
11

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

11. (PUC-RJ) Um certo cometa se desloca ao redor do Sol. Levando-se em conta as Leis de Kepler, pode-se com certeza afirmar que:

a) a trajetória do cometa é uma circunferência, cujo centro o Sol ocupa.
b) num mesmo intervalo de tempo Δt, o cometa descreve a maior área entre duas posições e o Sol, quando está mais próximo do Sol.
c) a razão entre o cubo do seu período e o cubo do raio médio da sua trajetória é uma constante.
d) o cometa, por ter uma massa bem menor do que a do Sol, não é atraído pelo mesmo.
e) o raio vetor que liga o cometa ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.

12. (ACAFE-SC) A figura abaixo mostra a trajetória elíptica de um planeta em torno do Sol (*S*).

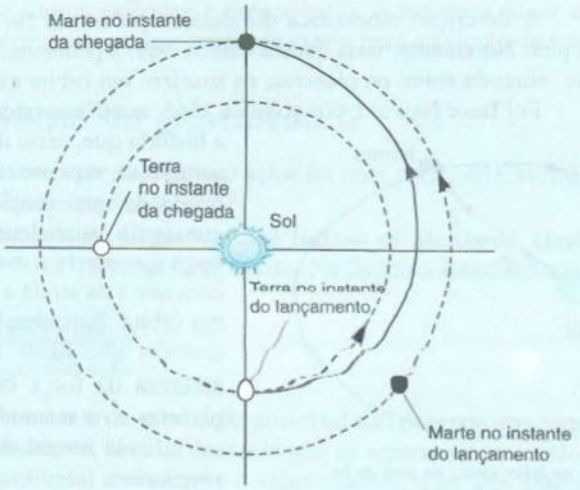


Sabendo-se que o planeta gasta tempos iguais para percorrer as trajetórias FG, HI e JL, é verdadeiro afirmar que:

a) área FGS > área HIS = área JLS.
b) área FGS = área HIS = área JLS.
c) área FGS = área JLS > área HIS.
d) área FGS < área JLS < área HIS.
e) área FGS < área HIS < área JLS.

13. (UNISA-SP) A segunda Lei de Kepler (lei das áreas) permite concluir que um planeta possui
   a) maior velocidade quando se encontra mais longe do Sol.
   b) maior velocidade quando se encontra mais perto do Sol.
   c) menor velocidade quando se encontra mais perto do Sol.
   d) velocidade constante em toda sua trajetória.

14. (UF-RJ) Um foguete foi lançado da Terra com destino a Marte. Na figura abaixo estão indicadas as posições da Terra e de Marte, tanto no instante do lançamento do foguete da Terra, quanto no instante de sua chegada a Marte. Observe que, a contar do lançamento, o foguete chega a Marte no instante em que a Terra completa 3/4 de uma volta em torno do Sol.



Calcule quantos meses durou a viagem deste foguete da Terra até Marte.

15. (FCMSC-SP) A terceira Lei de Kepler afirma que "os quadrados dos tempos de revolução dos planetas são proporcionais aos cubos de suas distâncias médias ao Sol". De acordo com esta lei, é correto dizer que:
   a) planetas mais afastados do Sol são mais velozes.
   b) dependendo de suas massas, planetas diferentemente afastados podem ter mesma velocidade.
   c) todos os planetas do sistema solar têm a mesma velocidade angular.
   d) as velocidades dos planetas são inversamente proporcionais aos quadrados das distâncias ao Sol.
   e) o "ano" de Mercúrio é menor que o da Terra.

16. (Mackenzie-SP) Dois satélites de um planeta têm períodos de revolução de 32 dias e 256 dias, respectivamente. Se o raio da órbita do primeiro satélite vale 1 unidade, então o raio da órbita do segundo será:
   a) 4 unidades
   b) 8 unidades
   c) 16 unidades
   d) 64 unidades
   e) 128 unidades

17. (CESUPA-PA) Dois satélites artificiais, A e B, descrevem órbitas circulares, com o satélite A distando R do centro da Terra. Se o período de revolução do satélite B vale 8 T, onde T é o período de revolução do satélite A, então podemos afirmar que a distância do satélite B ao centro da Terra, expressada em R, é:
   a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

18. (EFOA-MG) Segundo Kepler, o quadrado do tempo de revolução (*T*) de um planeta é proporcional ao cubo de sua distância média (*R*) ao Sol. Usando os valores do período de revolução da Terra e da distância média Terra-Sol, chega-se ao quociente $T^2/R^3 = 3{,}0 \cdot 10^{-19}\ s^2/m^3$.

a) Para Marte, que fica mais longe do Sol que a Terra, esse quociente é menor, igual ou maior que $3{,}0 \cdot 10^{-19}\ s^2/m^3$?

b) Justifique sua resposta, a partir da Lei de Kepler enunciada acima.

4. LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

A descrição cinemática do sistema planetário foi dada pelas três Leis de Kepler. No entanto, uma questão ainda estava pendente: qual a natureza da força que, atuando sobre os planetas, os mantém em órbita elíptica em torno do Sol?

Foi Isaac Newton, por volta de 1665, quem respondeu a essa pergunta. Conta a história que, certo dia, Newton descansava à sombra de uma macieira, quando observou a queda de uma maçã do galho. A partir daí, conseguiu estabelecer uma analogia entre a força que atraiu a maçã para a Terra e a força com que esta atraía a Lua e, assim, a mantinha em órbita. Estendendo sua analogia, concluiu também que essas forças tinham a mesma natureza da força com que o Sol atraía os planetas e os mantinha em órbita.

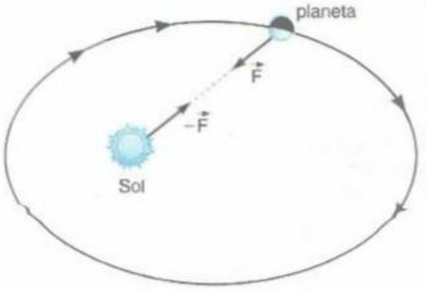


Fig. 16 O planeta em órbita elíptica em torno do Sol.

Essas forças, denominou-as *forças gravitacionais*.

Utilizando as leis de Kepler, Newton descobriu que a força gravitacional entre o Sol e um planeta (Fig. 16) tinha intensidade diretamente proporcional à massa do planeta e à massa do Sol, bem como inversamente proporcional ao quadrado da distância entre seus centros.

Analogamente, entre a Terra e a Lua, a intensidade da força gravitacional é diretamente proporcional às massas de ambas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa.

Essas conclusões de Newton podem ser estendidas a dois corpos materiais quaisquer, constituindo-se na Lei de Gravitação Universal.

Dois pontos materiais quaisquer, de massas m_1 e m_2, separados pela distância d, atraem-se gravitacionalmente com força que atua na direção da reta que por eles passa e cuja intensidade é:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

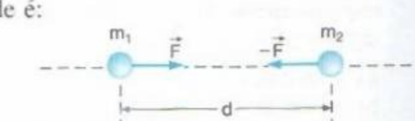


Fig. 17 Força gravitacional entre dois pontos materiais.

sendo G uma constante universal, que tem o mesmo valor para qualquer par de pontos materiais.

Observe que as forças de gravitação constituem um par de ação e reação. Têm, portanto, a mesma intensidade.

Se quisermos determinar a força entre dois corpos esféricos e homogêneos, poderemos considerar as massas concentradas nos respectivos centros e medir a distância entre esses centros (Fig. 18).

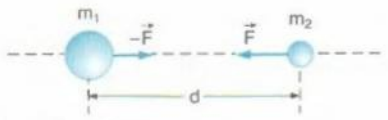


Fig. 18

Adota-se esse procedimento quando se pretende determinar a força entre dois planetas, por exemplo. Evidentemente, devemos sempre supô-los esféricos e homogêneos.

Não se tratando de corpos esféricos e homogêneos, é incorreto supor que toda sua massa esteja concentrada no seu centro de massa para o cálculo da força.

A constante universal de gravitação G

A primeira medição com precisão de seu valor foi feita por Lord Cavendish em 1798, usando uma balança de torção.

Em 1942, dois cientistas do U. S. National Bureau of Standards, Heyl e Chizanowski, obtiveram o seu valor até hoje aceito. No Sistema Internacional é:

$$G = 6{,}673 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

Ressaltemos que a constante de gravitação universal não depende dos corpos materiais, nem do meio ambiente, nem da distância que os separa. Assim sendo, a constante de gravitação universal terá sempre o valor anterior, quer seja aplicada para planetas, satélites, quer para quaisquer outros corpos materiais.

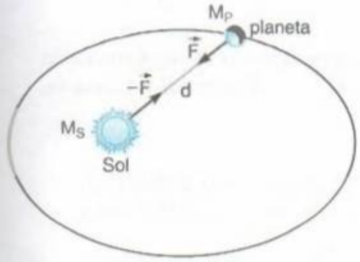


Fig. 19 Entre o Sol e um planeta a força gravitacional tem intensidade

$$F = G\frac{M_S \cdot M_P}{d^2}$$

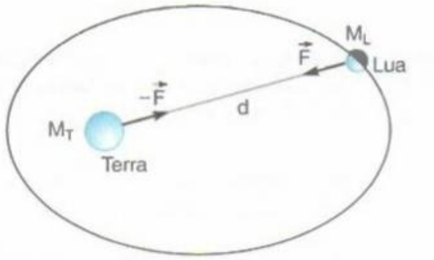


Fig. 20 Entre a Terra e a Lua a força gravitacional tem intensidade

$$F = G\frac{M_T \cdot M_L}{d^2}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

19 Determine a intensidade da força de atração gravitacional entre as duas esferas homogêneas da figura ao lado. Considere

$$G = 6{,}7 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

Resolução:

A força gravitacional é dada por:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \qquad F = 6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6{,}0 \cdot 10^3 \cdot 2{,}4 \cdot 10^3}{(12)^2}$$

$$\boxed{F = 6{,}7 \cdot 10^{-6}\ N}$$

20. Duas partículas idênticas têm massa de 200 kg e estão separadas pela distância de 1,0 m. Determine a força de atração gravitacional entre elas. Considere $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$.

21. Considerando a massa da Terra aproximadamente $6{,}4 \cdot 10^{24}$ kg e seu raio aproximadamente $6{,}4 \cdot 10^6$ m, determine a intensidade da força gravitacional que ela aplica sobre um corpo de massa 1,0 kg, que repousa na sua superfície. Considere $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$.

22. Duas partículas idênticas de massa *m*, separadas pela distância *d*, atraem-se gravitacionalmente com força de intensidade *F*. Sendo *G* a constante gravitacional local, determine *m* em função de *F*, *d* e *G*.

Resolução:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot m}{d^2} \qquad F = G \cdot \frac{m^2}{d^2} \qquad d^2F = Gm^2 \qquad m^2 = \frac{d^2F}{G} \qquad m = \sqrt{\frac{d^2F}{G}}$$

$$\boxed{m = d\sqrt{\frac{F}{G}}}$$

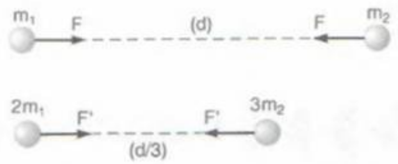
11

23. Duas partículas idênticas, de massa *m*, atraem-se gravitacionalmente com força de intensidade $F = 6{,}7 \cdot 10^5$ N, quando situadas a uma distância de 10 m uma da outra. Determine a massa *m*. Adote $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ N\ m^2/kg^2$.

24. A força gravitacional entre duas partículas de massa m_1 e m_2, separadas pela distância *d*, tem intensidade *F*. Duplicando-se uma das massas, triplicando-se a outra e reduzindo-se a distância a $\frac{d}{3}$, qual é a nova intensidade da força gravitacional? Dê sua resposta apenas em função de *F*.

Resolução:

Inicialmente, temos a situação abaixo:



$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \qquad (I)$$

A seguir, temos a seguinte situação:

$$F' = G \cdot \frac{(2m_1)(3m_2)}{\left(\frac{d}{3}\right)^2} \qquad F' = G \cdot \frac{6m_1 \cdot m_2}{\frac{d^2}{9}} \qquad F' = 54\left(G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}\right) \qquad (II)$$

Comparando-se (II) com (I), concluímos: $\boxed{F' = 54\ F}$

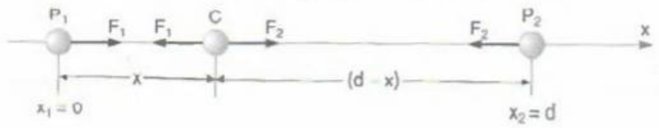
25. Dois pontos materiais de massas m_1 e m_2 atraem-se mutuamente com força de intensidade F quando separados pela distância d. Determine, em função de F, a intensidade da nova força de atração, quando triplicarmos ambas as massas e triplicarmos também a distância.

26. Dois pontos materiais de mesma massa m, separados pela distância d, atraem-se mutuamente com força de intensidade F. Dobrou-se uma das massas e alterou-se a distância. Verificou-se assim que a força passou a ter intensidade igual a 8 F. Determine, em função de d, qual o valor da nova distância.

27 Dois pontos materiais P_1 e P_2, de massas M_1 e M_2, são tais que $M_2 = 4\ M_1$, e estão sobre um eixo x tal que suas abscissas são, respectivamente: $x_1 = 0$ e $x_2 = d > 0$. Determine a abscissa x de um ponto material C de massa m que, ao ser colocado entre os dois primeiros, permaneceu em equilíbrio sobre o eixo x, sob a ação exclusiva das forças gravitacionais.

Resolução:

Os pontos materiais P_1 e C atraem-se mutuamente com força de intensidade F_1. Também assim o fazem P_2 e C com força de intensidade F_2.



$$F_1 = G\,\frac{M_1 \cdot m}{x^2} \qquad F_2 = G\,\frac{M_2 \cdot m}{(d - x)^2}$$

Para que haja o equilíbrio do corpo C, as forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ devem ter a mesma intensidade.

$$F_1 = F_2$$

$$G\,\frac{M_1 \cdot m}{x^2} = G\,\frac{M_2 \cdot m}{(d - x)^2} \qquad \frac{M_1}{x^2} = \frac{M_2}{(d - x)^2}$$

Sendo $M_2 = 4\ M_1$, vem:

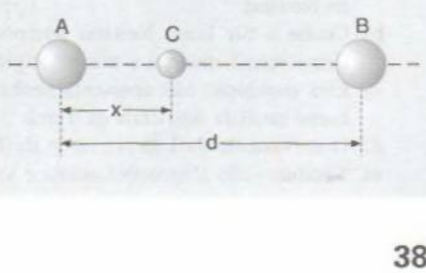
$$\frac{M_1}{x^2} = \frac{4M_1}{(d - x)^2} \qquad \frac{1}{x^2} = \frac{4}{(d - x)^2} \qquad 4x^2 = (d - x)^2$$

Levando-se em conta que $x > 0$ e $(d - x) > 0$, pois são duas distâncias, podemos extrair as raízes quadradas de ambos os membros da equação.

$$2x = d - x \qquad 3x = d \qquad \boxed{x = \frac{d}{3}}$$

28. A massa da Terra é cerca de 81 vezes a massa da Lua e a distância entre os seus centros é igual a d. Uma nave interplanetária tem por trajetória a reta que une os seus centros. Determine a que distância do centro da Terra a força resultante sobre a nave é nula. Dê a resposta em função de d. Não considere os efeitos gravitacionais de outros corpos sobre a nave.

29. Duas eferas homogêneas A e B têm massas m_A e m_B tais que $m_A = 9m_B$ e a distância entre seus centros é igual a d. Determine o valor de x em função de d, sabendo que o corpo C de massa m, sob a ação exclusiva das forças gravitacionais de A e B, permanece em repouso nessa posição.



EXERCÍCIOS DE REFORÇO

30. (VUNESP-SP)

(Folha de S. Paulo, 25/7/91, p. 5-4)

Em 1992-3, comemoraram-se os 350 anos do nascimento de Isaac Newton, autor de marcantes contribuições à ciência moderna. Uma delas foi a Lei da Gravitação Universal. Há quem diga que, para isso, Newton se inspirou na queda de uma maçã. Suponha que F_1 seja a intensidade da força exercida pela Terra sobre a maçã e F_2 a intensidade da força exercida pela maçã sobre a Terra. Então,

a) F_1 será muito maior que F_2.
b) F_1 será um pouco maior que F_2.
c) F_1 será igual a F_2.
d) F_1 será um pouco menor que F_2.
e) F_1 será muito menor que F_2.

31. (EXPCEX) A força gravitacional com que a Terra atrai a Lua:

a) é menor que a força com que a Lua atrai a Terra.
b) é da mesma intensidade para todos os planetas.
c) é pouco maior do que a força com que a Lua atrai a Terra.
d) é de mesma natureza da força que faz uma fruta cair de uma árvore.
e) não tem nenhuma influência sobre as marés.

32. (UF-ES) Considere dois pequenos corpos esféricos, com massas iguais a 1 kg, situados na superfície da Terra, cujos centros estão distanciados de 1 m. Sejam G a constante de gravitação universal e g o módulo da aceleração local da gravidade. Podemos afirmar que a força de atração gravitacional entre os dois corpos é numericamente igual a:

a) g b) $\frac{1}{g}$ c) $\frac{1}{G}$ d) G e) zero

33. (UNEB-BA) O planeta Netuno tem massa aproximadamente 18 vezes maior que a da Terra, e sua distância ao Sol é de aproximadamente 30 vezes maior que a da Terra ao Sol. Se o valor da força de atração gravitacional entre o Sol e a Terra é F, a força de atração gravitacional entre o Sol e Netuno é:

a) 0,02 F b) 0,60 F c) 1,67 F d) 18 F e) 30 F

34. (ITA-SP) Uma das conclusões expressas nas famosas leis de Kepler foi sobre o movimento dos planetas em órbitas elípticas das quais o Sol ocupa um dos focos.

a) Esta conclusão foi uma conseqüência, e portanto posterior, do enunciado das leis da Mecânica de Newton.
b) Coube a Sir Isaac Newton interpretar teoricamente estas conclusões com base na Lei da Gravitação Universal e nos princípios da Mecânica Clássica que ele próprio havia proposto.
c) Esta conclusão não apresenta nenhuma relação com o movimento dos engenhos conhecidos como satélites artificiais da Terra.
d) O movimento da Lua em torno da Terra é de natureza diferente daquele descrito por Kepler.
e) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

35. (FCMSC-SP) Três esferas (*X*, *Y* e *Z*) estão fixas em uma haste, como se representa na figura ao lado. A esfera *Y* é eqüidistante de *X* e *Z*. O módulo da força de atração gravitacional entre *X* e *Y* é igual a *F*. Qual é o módulo da resultante das forças de atração gravitacional que *X* e *Y* exercem sobre *Z*? (As massas das três esferas são iguais.)

a) $\left(\frac{5}{4}\right)$ F b) $\left(\frac{4}{5}\right)$ F c) 2F d) $\frac{F}{2}$ e) $\left(\frac{3}{2}\right)$ F

5. SATÉLITES EM ÓRBITAS CIRCULARES

Consideremos um planeta de massa *M* em torno do qual há um satélite de massa *m* em órbita circular de raio *R* (Fig. 21).

Como vimos, durante o estudo da Segunda Lei de Kepler, o seu movimento é circular e uniforme. Assim, a força resultante que mantém o satélite em órbita, isto é, a força gravitacional $\vec{F}$, é centrípeta.

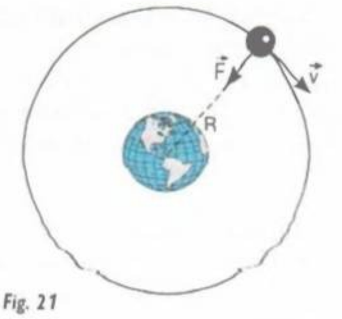


Fig. 21

Podemos assim escrever:

$$F = G\,\frac{m \cdot M}{R^2} \quad \text{(I)} \qquad \text{e} \qquad F = m \cdot a_{cp} = \frac{m \cdot v^2}{R} \quad \text{(II)}$$

Velocidade de translação

De (I) e (II) segue:

$$\frac{m \cdot v^2}{R} = G\,\frac{m \cdot M}{R^2} \qquad v^2 = G \cdot \frac{M}{R} \qquad \boxed{v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{R}}} \quad \text{(III)}$$

A velocidade de translação do satélite não depende de sua massa, mas é diretamente proporcional à raiz quadrada da massa do planeta e inversamente proporcional à raiz quadrada do raio de órbita.

A Terceira Lei de Kepler

A partir da relação anterior vamos deduzir a Terceira Lei de Kepler. Para tanto, basta lembrar que:

$$v = \omega R = \frac{2\pi}{T}\,R \qquad v^2 = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} \quad \text{(IV)}$$

Comparando a equação (IV) com a (III):

$$\frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = G \cdot \frac{M}{R} \qquad \boxed{\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}} \quad \text{(V)}$$

A expressão do segundo membro é constante e a equação acima traduz, então, a Terceira Lei de Kepler, agora aplicada para satélites.

Observemos que a constante da Terceira Lei depende da massa M do planeta, mas não depende da massa do satélite que gravita.

No caso de aplicarmos a Terceira Lei de Kepler aos planetas do Sistema Solar, M será a massa do Sol.

Satélite estacionário

Denomina-se *satélite estacionário* aquele que permanece em repouso (isto é, *estacionário*) em relação a um observador fixo na superfície da Terra.

Sua órbita, em relação a um referencial no centro de massa da Terra, deve ser circular e estar contida no plano equatorial. Seu período é igual ao de rotação da Terra, ou seja, de 24 h. Dessa maneira, seu raio de órbita está univocamente determinado e vale, aproximadamente, 42 240 km.

Levando-se em conta que o raio da Terra é de aproximadamente 6 400 km, o satélite deverá estar a uma altura aproximada de 35 840 km da superfície da Terra.

Os satélites estacionários são de muita utilidade nas transmissões de TV de um país para outro e na telefonia internacional.

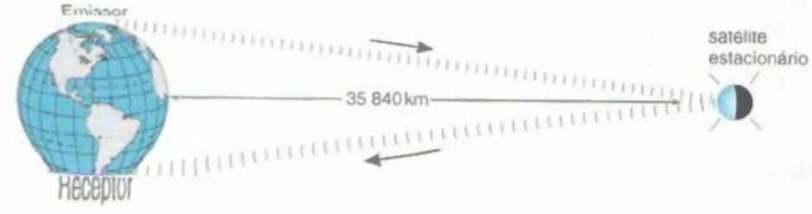


Fig. 22 Satélite estacionário.

Atualmente, a órbita geoestacionária é ocupada por uma grande quantidade de satélites de telecomunicações, dos mais diferentes países. O Brasil, através da Embratel, mantém satélites da série Brasilsat em órbita, renovando-os periodicamente, para acompanhar os avanços tecnológicos e substituir os que eventualmente tenham vencido seu período normal de utilização.

Imponderabilidade no interior de uma nave em órbita circular em torno da Terra

Consideremos uma nave espacial em órbita circular em torno da Terra. Seus astronautas terão a sensação de ausência de peso (a imponderabilidade). Isso não significa que inexista a força gravitacional, mas apenas que ela está sendo usada como a resultante centrípeta, necessária para mantê-los em órbita circular.

Em cada instante, a nave e seus astronautas, bem como outros objetos no seu interior, possuem a mesma velocidade vetorial e a mesma aceleração. Assim, todos caem em direção à Terra, ao longo de suas órbitas. O astronauta não troca força com o chão da nave. É usual dizer-se que o peso aparente dos astronautas e dos objetos internos na nave é nulo.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

36. Considere os seguintes valores aproximados: massa da Lua, $m = 7 \cdot 10^{22}$ kg; massa da Terra, $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg; distância média da Lua à Terra, $r = 4 \cdot 10^{8}$ m; constante de gravitação universal, $G = 6 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$.
Admita que a Lua tenha órbita circular em torno da Terra. Determine:

a) o módulo da força resultante sobre a Lua, desprezando as ações dos outros planetas e do Sol sobre ela;

b) o módulo da velocidade de translação da Lua.

Resolução:

a) A força resultante sobre a Lua é a força gravitacional com que a Terra a atrai.

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

Substituindo-se os valores dados:

$$F = 6 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{(7 \cdot 10^{22}) \cdot (6 \cdot 10^{24})}{(4 \cdot 10^{8})^2} \qquad \boxed{F \cong 16 \cdot 10^{19}\ N}$$

b) Comparando-se as expressões da força gravitacional e da resultante centrípeta sobre a Lua:

$$F = F_{cp} = \frac{m \cdot v^2}{r} \qquad F = F_{gr} = G\,\frac{m \cdot M}{r^2}$$

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = G\,\frac{m \cdot M}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Substituindo os valores numéricos dados:

$$v = \sqrt{\frac{(6 \cdot 10^{-11}) \cdot (6 \cdot 10^{24})}{4 \cdot 10^{8}}} \qquad \boxed{v \cong 9{,}5 \cdot 10^{2}\ m/s}$$

37. Considere um satélite em órbita circular de raio *r* em torno da Terra. Usando os valores aproximados abaixo, determine a velocidade de translação do satélite.

Massa da Terra	$M = 6 \cdot 10^{24}$ kg
Constante universal	$G = 6 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$
Raio de órbita	$r = 1 \cdot 10^{7}$ m

38. A Nasa, pretendendo lançar um satélite artificial que iria descrever uma órbita circular em torno da Terra com uma velocidade de translação de aproximadamente $7{,}1 \cdot 10^{3}$ m/s, nos forneceu a tabela de dados abaixo para que calculássemos o raio de sua órbita.

Massa da Terra	$M = 6 \cdot 10^{24}$ kg
Constante de gravitação	$G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$
Massa do satélite	$m = 1{,}0 \cdot 10^{3}$ kg

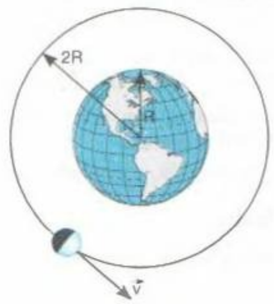
Vamos ajudar o computador da Nasa?

39. O computador da Nasa gostou do seu desempenho no cálculo do raio de órbita do satélite anterior e pede-lhe mais alguns cálculos:

a) período do satélite;
b) intensidade da força resultante sobre o satélite.

40 Um satélite artificial de massa m tem órbita circular em torno da Terra, de raio 2R. Considerando que a Terra tenha massa M e raio R e que a constante de gravitação universal vale G, determine:

a) o módulo da força resultante sobre o satélite;
b) o módulo da velocidade de translação;
c) o período de translação.



Resolução:

a) A força resultante sobre o satélite é a força de atração gravitacional da Terra sobre ele.

$$F = G\,\frac{m \cdot M}{d^2} \text{ mas } d = 2R \text{ e então: } F = G\,\frac{m \cdot M}{(2R)^2} \qquad \boxed{F = G\,\frac{m \cdot M}{4R^2}}$$

b) A força resultante sobre o satélite é centrípeta.

$$F = \frac{m \cdot v^2}{r} \text{ mas } r = 2R \text{ e então: } F = \frac{m \cdot v^2}{2R}$$

Comparando-se com a expressão do item anterior:

$$\frac{m \cdot v^2}{2R} = G\,\frac{m \cdot M}{(2R)^2} \qquad \frac{v^2}{1} = \frac{GM}{2R} \qquad \boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{2R}}}$$

c) Para obter o período, basta fazermos:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad v = \frac{2\pi r}{T} \qquad T = \frac{2\pi r}{v}$$

Sendo $r = 2R$ e $v = \sqrt{\frac{GM}{2R}}$, vem:

$$T = \frac{2\pi \cdot 2R}{\sqrt{\frac{GM}{2R}}} \qquad \boxed{T = 4\pi R\,\sqrt{\frac{2R}{GM}}}$$

41. Um satélite artificial gira em torno da Terra em órbita circular a uma altura de 1 700 km. São dados:

R = raio da Terra = $6{,}3 \cdot 10^3$ km
M = massa da Terra = $6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg
G = $6{,}7 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2

Calcule:

a) a velocidade escalar do satélite;
b) a velocidade angular;
c) o período;
d) quantas voltas dá por dia.

42. Um satélite artificial de massa 800 kg gira em torno da Terra em órbita circular, a uma altura de 1 600 km. Supondo que a Terra seja uma esfera homogênea de raio R = 6 400 km, calcule a força com que a Terra atrai o satélite. Calcule, também, a velocidade escalar do satélite. São dados: massa da Terra = $6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg, G = $6{,}7 \cdot 10^{-11}$ (SI).

43. Se a massa da Terra fosse duas vezes maior do que seu valor atual, porém ela fosse mantida na mesma órbita e a massa do Sol inalterável, qual seria o ano terrestre em comparação com o atual? Justifique.

44. Considere um satélite estacionário sobre o Brasil.

a) Quanto vale o seu período de translação?
b) Qual é o valor aproximado de sua altura em relação ao solo?

É dada a tabela abaixo:

Lua	raio de órbita	$4{,}0 \cdot 10^8$ m
	período	27 dias
Terra	diâmetro	$12 \cdot 10^6$ m

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

45. (FUVEST-SP) Podemos admitir, numa primeira aproximação, que a Terra descreve um movimento circular uniforme em torno do Sol.

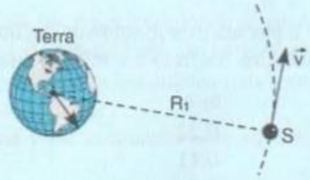
a) Faça uma figura da trajetória da Terra em torno do Sol, mostrando, num determinado ponto da trajetória, os vetores velocidade e aceleração centrípeta da Terra.
b) Indicando por F_G o módulo da força gravitacional que o Sol exerce sobre a Terra e por F_C o módulo da força centrípeta que atua sobre a Terra, quanto vale $\frac{F_G}{F_C}$?

46. (PUCC-SP) Em relação a um referencial com origem no centro da Terra e eixos dirigidos para estrelas fixas, um satélite S descreve em torno da Terra uma órbita circular de raio R_1. Considere as afirmações:

I – A força gravitacional que atua no satélite é inversamente proporcional a R_1.
II – A força resultante sobre o satélite é nula.
III – O satélite possui aceleração.

Podemos afirmar que:

a) só a I é correta.
b) só a II é correta.
c) só a III é correta.
d) I, II e III são falsas.
e) I e II são corretas.



47. (UF-PA) Um corpo de massa m é lançado com velocidade horizontal $\vec{v}_0$ de um ponto situado a uma distância r do centro da Terra. Sabendo que M_T é a massa da Terra e G é a constante da gravitação universal, qual deve ser o valor de v_0 para que o corpo descreva órbita circular em torno da Terra?

a) $\left(\frac{GM_T}{r}\right)^{1/2}$
b) $\left(\frac{GM_T}{r^2}\right)^{1/2}$
c) $\left(\frac{GM_T}{r^3}\right)^{1/2}$
d) $\left(\frac{GM_T}{r}\right)^{2}$
e) $\left(\frac{GM_T}{r^2}\right)$

48. (VUNESP-SP) Um satélite artificial descreve uma órbita circular em torno da Terra com velocidade escalar constante v, graças à ação da força gravitacional (Lei da Gravitação Universal) dada por $(GmM)/r^2$, onde G é constante, m e M são as massas do satélite e da Terra, respectivamente, e r é a distância entre seus centros. Essa força é a responsável pela aceleração centrípeta v^2/r do movimento circular e uniforme do satélite. A partir destas informações, é possível mostrar que o período de revolução do satélite em torno da Terra é dado por:

a) $2\pi \sqrt{\dfrac{GM}{r}}$.

b) $2\pi \sqrt{\dfrac{GM}{r^2}}$.

c) $2\pi \sqrt{\dfrac{r^2}{GM}}$.

d) $2\pi \sqrt{\dfrac{GM}{r^3}}$.

e) $2\pi \sqrt{\dfrac{r^3}{GM}}$.

11

49. (ITA-SP) Na Terceira Lei de Kepler, a constante de proporcionalidade entre o cubo do semi-eixo maior da elipse (a) descrita por um planeta e o quadrado do período (P) de translação do planeta, pode ser deduzida do caso particular do movimento circular. Sendo G a constante da gravitação universal, M a massa do Sol, R o raio do Sol temos:

a) $\dfrac{a^3}{P^2} = \dfrac{GMR}{4\pi^2}$

b) $\dfrac{a^3}{P^2} = \dfrac{GR}{4\pi^2}$

c) $\dfrac{a^3}{P^2} = \dfrac{GM}{2\pi^2}$

d) $\dfrac{a^3}{P^2} = \dfrac{GM^2}{R}$

e) $\dfrac{a^3}{P^2} = \dfrac{GM}{4\pi^2}$

50. (VUNESP-SP) Um planeta de massa m_p tem dois satélites de massas m_1 e m_2, em órbitas circulares de raios r_1 e $r_2 = 3r_1$.
Se as forças que o planeta exerce sobre os satélites estão na razão $F_1 = 2F_2$, obtenha a relação entre as massas dos satélites (m_2/m_1) e a relação entre suas acelerações centrípetas (a_2/a_1):

	m_2/m_1	a_2/a_1
a)	9,0	0,22
b)	0,22	0,11
c)	9,0	1,1
d)	0,22	9,0
e)	4,5	0,11

51. A Terra gira em torno do Sol numa órbita que pode ser considerada circular, com a velocidade angular aproximadamente constante. Mantendo fixo o raio dessa órbita, mas imaginando que a massa do Sol fosse quatro vezes maior do que realmente é, a velocidade angular do movimento de translação da Terra seria:

a) duas vezes maior.
b) quatro vezes maior.
c) a mesma.
d) a metade.
e) nenhuma das anteriores.

52. (F. E. Itajubá-MG) Um satélite de massa m descreve uma órbita circular de raio R_1, em torno de um planeta de massa M. A constante de gravitação universal vale G. Se este satélite passar a girar em outra órbita circular de raio $R_2 = \frac{R_1}{3}$ em torno do mesmo planeta, a relação $\frac{v_1}{v_2}$, entre os módulos de suas velocidades tangenciais ao longo das órbitas de raios R_1 e R_2, respectivamente, será:

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) 3 e) $\sqrt{3}$

53. (FUVEST-SP) Se fosse possível colocar um satélite em órbita rasante em torno da Terra, o seu período seria T. Sendo G a constante de gravitação universal, expresse a massa específica média (densidade média) da Terra em função de T e G.

54. (ITA-SP) Deseja-se colocar em órbitas circulares um satélite S_T ao redor da Terra e um satélite S_L ao redor da Lua, de modo que ambos tenham o mesmo período. São dados:

R_T = raio da Terra = $6{,}37 \cdot 10^6$ m; R_L = raio da Lua = $1{,}74 \cdot 10^6$ m;

M_T = massa da Terra = $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; M_L = massa da Lua = $7{,}34 \cdot 10^{22}$ kg.

Sendo r_T a distância de S_T ao centro da Terra e r_L a distância de S_L ao centro da Lua. Determine o menor valor possível para r_T.

55. (FEI/Mauá-SP) Pretende-se lançar um satélite artificial que irá descrever uma órbita circular, a 1 040 km de altura. Sabendo que G (constante gravitacional = $6{,}7 \cdot 10^{-11}$ (SI)) e o raio e a massa da Terra são $R_T = 6\,400$ km e $M_T = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg, determine a velocidade tangencial que deve ser imprimida ao satélite, naquela altura, para se obter a órbita desejada.

56. (UnB-DF) Um satélite artificial é visto cruzando o céu, poucas horas após o pôr-do-sol, em órbita polar circular. Observando o tempo que o satélite gasta para ir do horizonte norte ao sul, um estudante estimou que o período orbital é de 2h e 20 min. Calcule a que altura acima da superfície da Terra está o satélite. Considere $2\pi \times 1\,350$ s como valor aproximado de 2h e 20 min e os dados: o produto $GM_T = 4 \times 10^5\ \text{km}^3/\text{s}^2$, em que G é a constante gravitacional da Terra e M_T refere-se à sua massa, e o raio da Terra $R_T = 6 \times 10^3$ km.

57. (FUVEST-SP) Um satélite artificial move-se em órbita circular ao redor da Terra, ficando permanentemente sobre a cidade de Macapá.

a) Qual o período do satélite?
b) Por que o satélite não cai sobre a cidade?

58. (E. E. Mauá-SP) Um satélite artificial da Terra tem sua trajetória contida no plano do equador e está constantemente na vertical que passa próximo a Belém do Pará, de latitude zero.

a) Relacione as grandezas físicas, do satélite, da Terra e constantes universais, que intervêm na equação que rege o fenômeno. Deduza essa equação.
b) É possível colocar em órbita um satélite que fique constantemente na vertical do pólo norte? Justifique a resposta.

59. (FUVEST-SP) Dentro de um satélite em órbita em torno da Terra, a tão falada "ausência de peso", responsável pela flutuação de um objeto dentro do satélite, é devida ao fato de que:

a) a órbita do satélite se encontra no vácuo e a gravidade não se propaga no vácuo.
b) a órbita do satélite se encontra fora da atmosfera, não sofrendo assim os efeitos da pressão atmosférica.
c) a atração lunar equilibra a atração terrestre e, conseqüentemente, o peso de qualquer objeto é nulo.
d) a força de atração terrestre, centrípeta, é muito menor que a força centrífuga dentro do satélite.
e) o satélite e o objeto que flutua têm a mesma aceleração, produzida unicamente por forças gravitacionais.

11

6. CAMPO GRAVITACIONAL E CAMPO DE GRAVIDADE

Na região que envolve a Terra, bem como qualquer outro planeta, dizemos que há um campo gravitacional, pois esses planetas têm a capacidade de atrair outros corpos colocados em suas proximidades. Num ponto da região onde existe um campo gravitacional, um corpo de massa *m*, nele colocado, fica sob a ação de uma força resultante de natureza gravitacional.

Na verdade, além da força de atração gravitacional, outras forças aparecem, devido à presença do Sol, da Lua, dos outros planetas. Particularmente, em pontos da superfície da Terra há a influência da rotação de nosso planeta. Então dizemos que existe um campo de força particular para a Terra: o *campo de gravidade*. A ação desse campo, resultante de todas as forças citadas, sobre um corpo de massa *m* é o seu peso $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$, cuja linha de ação, exceto nos pólos e no equador, não passa pelo centro da Terra.

Se desprezarmos a ação do Sol e de outros astros e, para pontos na superfície, não levarmos em conta a rotação da Terra, os campos de gravidade e gravitacional coincidem.

A seguir, vamos determinar a intensidade do campo de gravidade (aceleração da gravidade) em vários pontos.

Pontos externos à Terra

Nesta análise preliminar, faremos as seguintes suposições para a Terra:

1º) Que ela seja esférica e homogênea.

2º) Que toda sua massa possa ser concentrada no seu centro geométrico (centro de massa).

3º) Que ela esteja isolada no Universo (portanto, o campo de gravidade se reduz ao campo gravitacional).

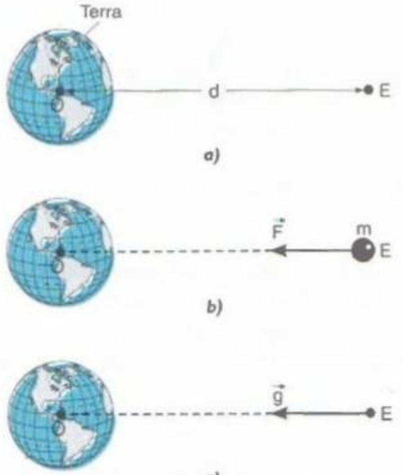


Fig. 23

Consideremos um ponto *E*, externo a sua superfície e situado a uma distância *d* do seu centro de massa (Fig. 23a). Consideremos também um ponto material de massa *m* colocado em *E*. Ele será atraído pela Terra com uma força gravitacional $\vec{F}$ (Fig. 23b).

A força gravitacional $\vec{F}$ é, por definição, o próprio peso do ponto material. Assim:

$$F = P = m \cdot g$$

$$F = G \frac{m \cdot M}{d^2}$$

$$mg = G \frac{m \cdot M}{d^2} \qquad \boxed{g = G \frac{M}{d^2}}$$

Nesse caso, g representa a intensidade do campo gravitacional no ponto externo E (Fig. 23c). Sua expressão mostra que essa intensidade decresce com o quadrado da distância ao centro da Terra, ou seja, à medida que dele nos afastamos a intensidade do campo gravitacional cai sensivelmente (consulte a tabela II).

TABELA II – Variações de g com a altitude. Latitude 45°.

Altitude (m)	g(m/s²)
0	9,806
1 000	9,803
4 000	9,794
16 000	9,757
32 000	9,708
100 000	9,598

Observações

1ª) O campo gravitacional é um campo de forças.

2ª) O campo gravitacional é um campo vetorial. A cada um de seus pontos associamos o vetor $\vec{g}$ (Fig. 23c).

3ª) O campo gravitacional é um campo estacionário. Em cada um de seus pontos ele não varia com o decurso do tempo.

4ª) A expressão obtida pode ser generalizada para outros planetas. Basta fazer M igual à massa do respectivo planeta.

Pontos na superfície da Terra

Mantidas as três suposições do item anterior e ainda supondo que a Terra não tenha rotação, para pontos situados na superfície da Terra, ou bem próximos dela, obtemos a intensidade do campo g_0, fazendo d = R (raio da Terra), na fórmula anterior:

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}$$

Se considerarmos agora uma região nas proximidades da superfície da Terra, de pequena área, o campo poderá ser admitido uniforme. Sua direção será vertical, e a intensidade, constante (Fig. 24).

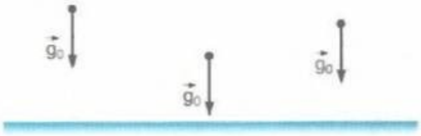


Fig. 24 Nas proximidades da Terra o campo de gravidade é uniforme.

Sendo: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$, $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg e $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m. Teremos:

$$g_0 = (6{,}67 \cdot 10^{-11})\ \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{(6{,}37 \cdot 10^6)^2} \qquad g_0 = 9{,}83\ m/s^2$$

A tabela III estabelece uma comparação entre a aceleração da gravidade na superfície dos planetas do Sistema Solar e a aceleração da gravidade g_0 na superfície da Terra.

TABELA III – Gravidade na superfície dos planetas do Sistema Solar.

	Massa	Raio médio	Aceleração da gravidade na superfície
Mercúrio	0,055 M	0,38 R	0,37 g_0
Vênus	0,815 M	0,96 R	0,88 g_0
Terra	M	R	g_0
Marte	0,108 M	0,53 R	0,38 g_0
Júpiter	318 M	12 R	2,64 g_0
Saturno	95,2 M	9,4 R	1,15 g_0
Urano	14,6 M	4,0 R	1,17 g_0
Netuno	17,2 M	3,9 R	1,18 g_0
Plutão	0,017 M	0,18 R	0,05 g_0

Levando-se, agora, em conta o movimento de rotação da Terra, vamos estudar suas possíveis conseqüências sobre a aceleração da gravidade: nos pólos, no equador e num ponto de latitude φ.

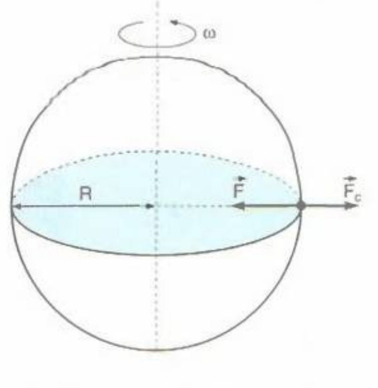


Fig. 25 Corpo na linha do equador.

Consideremos inicialmente um corpo em um ponto do equador terrestre (Fig. 25). Como foi visto no capítulo 5, se adotarmos um referencial na Terra (referencial não inercial), age no corpo uma *força centrífuga* F_c, cuja intensidade é dada por:

$$F_c = m\omega^2 R$$

A intensidade da força gravitacional é:

$$F = G\,\frac{m \cdot M}{R^2}$$

O peso do corpo nessa posição terá intensidade dada por:

$$P_e = F - F_c$$

Sendo $P_e = mg_e$, onde g_e é a aceleração da gravidade no equador, teremos:

$$mg_e = G\,\frac{m \cdot M}{R^2} - m\omega^2 R$$

$$g_e = G\frac{M}{R^2} - \omega^2 R$$

O termo $G\frac{M}{R^2} = g_0$ corresponde ao valor da aceleração da gravidade, sem considerar a rotação, isto é, em decorrência apenas da atração gravitacional. Então:

$$g_e = g_0 - \omega^2 R$$

Nos pólos da Terra não há influência da rotação e, portanto, a parcela $\omega^2 R$ não comparece na expressão da gravidade g_p:

$$g_p = g_0 \Rightarrow \quad g_p = G\frac{M}{R^2}$$

Concluímos, então, que a aceleração da gravidade é máxima nos pólos e mínima no equador.

Para pontos da superfície da Terra, situados a uma latitude φ, ela terá valores intermediários a g_p e g_e, conforme mostra a tabela IV. Sua direção não passa pelo centro da Terra (Fig. 26).

TABELA IV – Variação de g com a latitude, medida ao nível do mar.

Latitude φ	g (m/s²)
0°	9,78039
10°	9,78195
20°	9,78641
30°	9,79329
40°	9,80171
45°	9,80665
50°	9,81071
60°	9,81918
70°	9,82608
80°	9,83059
90°	9,83217

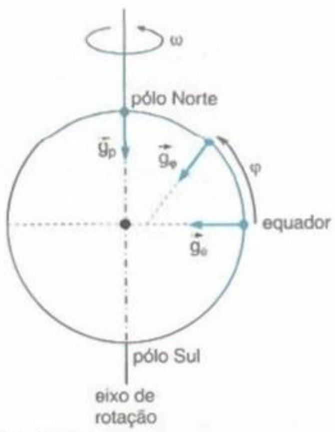


Fig. 26

Pontos internos à Terra

Ainda considerando as três hipóteses iniciais, determinemos uma expressão para a intensidade do campo gravitacional no ponto I, interno à esfera (Fig. 27), a uma distância r do seu centro O. Verifica-se que o campo de gravidade em I é devido exclusivamente à massa ΔM, da esfera imaginária de raio r, centro O e a envolvente passando pelo ponto I.

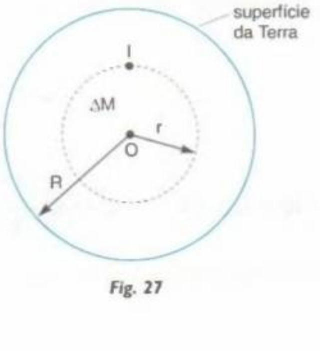


Fig. 27

Seja μ a densidade da Terra:

$\mu = \frac{\Delta M}{\Delta V}$, onde ΔV é o volume da esfera imaginária e vale $\left(\frac{4}{3}\right) \pi r^3$.

$$\mu = \frac{\Delta M}{\left(\frac{4}{3}\right) \pi r^3} \qquad \Delta M = \frac{4}{3} \pi r^3 \mu \qquad (I)$$

$$g_I = G \frac{\Delta M}{r^2} \qquad (II)$$

De (I) em (II), vem:

$$g_I = G \frac{\left(\frac{4}{3}\right) \pi r^3 \mu}{r^2} \qquad g_I = \left(\frac{4}{3} G \pi \mu\right) r$$

Sendo $\frac{4}{3} G\pi\mu = k$ (constante), temos:

$$\boxed{g_I = k \cdot r}$$

Ou seja, para pontos internos, a intensidade do campo é diretamente proporcional à distância r até o centro da Terra.

Se representarmos as variações de g em função da distância d num diagrama cartesiano, obteremos a Fig. 28.

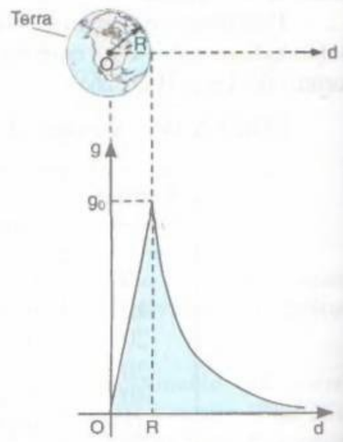


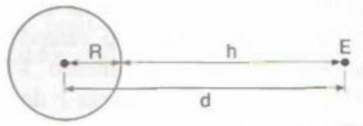
Fig. 28 Curvas características de g em função da distância d ao centro da Terra.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

60 Não se considerando a rotação da Terra e supondo-a esférica, de massa M e raio R, determine a intensidade do campo gravitacional num ponto E situado a uma altura h da sua superfície. É dada a constante de gravitação universal.

Resolução:

Conforme se deduziu na teoria, a expressão de g é:



$$g = G \frac{M}{d^2}$$

Fazendo $d = R + h$, vem: $\boxed{g = G \frac{M}{(R + h)^2}}$

61 Considere ainda as condições da questão anterior. Seja g_0 a aceleração da gravidade ao nível do mar. Determine, em *E*, a expressão de *g* em função de g_0, de *h* e de *R*.

Resolução:

Sendo $g_0 = G\,\dfrac{M}{R^2}$, tiramos: $GM = g_0 \cdot R^2$

Substituindo na expressão obtida do problema anterior, ou seja:

$g = G\,\dfrac{M}{(R+h)^2}$, vem:

$$g = \frac{g_0 R^2}{(R+h)^2} \qquad \boxed{g = g_0\left(\frac{R}{R+h}\right)^2}$$

62. Determine a intensidade do campo gravitacional a:

a) $2{,}0 \cdot 10^4$ km do centro da Terra;
b) $5{,}6 \cdot 10^3$ km da sua superfície.

Dados:
massa da Terra, $M = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg
raio da Terra, $R = 6{,}4 \cdot 10^3$ km
constante de gravitação universal, $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ unidades do SI

Não considere a rotação da Terra.

63. A que altura, acima da superfície terrestre, a aceleração da gravidade seria $g_0/2$? Admita que a Terra não tenha rotação e que g_0 é aceleração da gravidade na superfície. Dê sua resposta em função do raio *R* da Terra.

64 Seja g_0 a aceleração da gravidade na superfície de um planeta. Qual é a aceleração da gravidade na superfície de outro planeta que possui metade da massa e raio igual a $\dfrac{1}{3}$ do primeiro?

Resolução:

Seja, para o primeiro planeta:

M, sua massa; *R*, seu raio; $g_0 = G\,\dfrac{M}{R^2}$.

Para o segundo planeta, teremos:

$M' = \dfrac{M}{2}$, sua massa; $R' = \dfrac{R}{3}$, seu raio; g_0' a aceleração da gravidade na sua superfície.

$g_0' = G\,\dfrac{M'}{(R')^2}$, então:

$$g_0' = G\,\frac{\left(\frac{M}{2}\right)}{\left(\frac{R}{3}\right)^2} \qquad g_0' = G\,\frac{M}{R^2}\cdot\frac{9}{2}$$

Logo: $\boxed{g_0' = \dfrac{9}{2}\cdot g_0}$

11

65. Imagine um planeta cuja massa seja 4 vezes a da Terra e cujo raio seja o dobro do da Terra. Sendo g_0 a aceleração da gravidade na superfície da Terra, calcule a aceleração da gravidade na superfície desse planeta.

66. O que ocorreria com o nosso peso se a massa da Terra sofresse um decréscimo de 10%, e o raio, um acréscimo de 20% em relação aos valores atuais?

67. Calcule a aceleração da gravidade em Júpiter, sabendo que sua massa é cerca de 300 vezes maior que a da Terra e seu diâmetro 10 vezes maior que o da Terra. Adote $g_T = 9{,}8\ m/s^2$ para a Terra.

68. Considere um planeta hipotético *X* de mesma densidade média que a Terra, porém com massa 27 vezes maior. Sabe-se que na Terra a aceleração da gravidade vale, aproximadamente, $10\ m/s^2$. Não se consideram os efeitos da rotação. Determine:

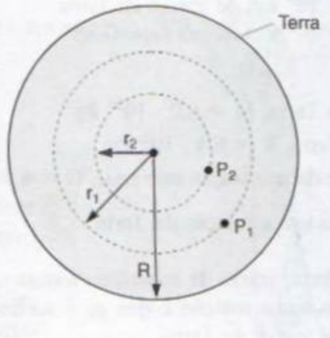
a) o raio desse planeta, em função de *R*, raio da Terra;
b) a aceleração da gravidade na superfície do planeta.

69 Suponha que a Terra seja um planeta esférico, homogêneo e desprovido de rotação. Sendo g_0 a aceleração da gravidade na sua superfície, determine o valor da aceleração da gravidade, em função de g_0, nos pontos da figura, indicados por:

a) P_1, tal que $r_1 = \frac{R}{2}$;

b) P_2, tal que $r_2 = \frac{R}{4}$.

Sendo *R* o raio da Terra.



Resolução:

Como sabemos, a aceleração da gravidade no interior do planeta é diretamente proporcional à distância do ponto interno ao centro do planeta, isto é:

$g_i = k \cdot r$, onde *k* é uma constante.

Por extensão da propriedade, concluímos que, na superfície, ela vale:

$g_0 = k \cdot R$, onde *k* é a mesma constante anterior.

a) Para o ponto P_1, tal que $r_1 = \frac{R}{2}$, vem $g_1 = k \cdot r_1$, $g_1 = k \cdot \frac{R}{2}$, ou seja, metade de g_0:

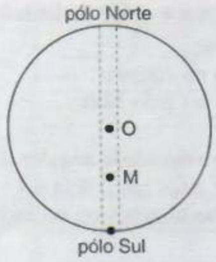
$$\boxed{g_1 = \frac{g_0}{2}}$$

b) Para o ponto P_2, tal que $r_2 = \frac{R}{4}$, vem $g_2 = k \cdot r_2$, $g_2 = k \cdot \frac{R}{4}$, ou seja, um quarto de g_0:

$$\boxed{g_2 = \frac{g_0}{4}}$$

70. Considere a Terra como um corpo homogêneo e esférico de raio R = 6 400 km. Imagine que fosse construído um túnel hipotético, ligando o pólo Norte ao pólo Sul e passando pelo centro da Terra. Um objeto, no pólo Sul, tem peso 50 kgf. Determine o seu peso:

a) no pólo Norte;
b) no centro da Terra;
c) no ponto *M*, médio entre o centro da Terra e o pólo Sul.



71 Uma pessoa de massa *m* apresenta peso P_E no equador, peso P_N no pólo Norte e peso P_S no pólo Sul. Sendo *R* o raio da Terra e *T* o período de rotação, determine:

a) $\frac{P_S}{P_N}$ b) $P_S - P_E$

Resolução:

O peso da pessoa é $P = m \cdot g$.
A aceleração da gravidade, levando em conta a rotação da Terra, é menor no equador; nos pólos, a rotação da Terra em nada afeta.

a) Do exposto, concluímos que: $g_S = g_N$, isto é, no pólo Sul, no pólo Norte temos a mesma aceleração da gravidade.
Logo:

$P_S = P_N$ e, portanto: $\boxed{\frac{P_S}{P_N} = 1}$

b) Sendo: $g_E = g_S - \omega^2 \cdot R$ e levando em conta que: $\omega = \frac{2\pi}{T}$, vem:

$$g_E = g_S - \frac{4\pi^2}{T^2} R$$

Ora: $P_E = m \cdot g_E$ e $P_S = m \cdot g_S$

Assim: $P_E = m \cdot g_E = m \left(g_S - \frac{4\pi^2}{T^2} R\right)$

$$P_E = m \cdot g_S - \frac{4\pi^2 m \cdot R}{T^2} \qquad P_E = P_S - \frac{4\pi^2 m \cdot R}{T^2} \qquad \boxed{P_S - P_E = \frac{4\pi^2 m \cdot R}{T^2}}$$

72. Considere os valores de *g*, em função da latitude, medidos ao nível do mar, da tabela abaixo:

latitude φ	g (m/s²)
0°	9,78
45°	9,80
60°	9,82
90°	9,83

Ao nível do mar e a 45° de latitude, uma pessoa tem peso de 980 N. Determine:

a) sua massa;
b) seu peso no equador;
c) seu peso no pólo Norte.

73. A Terra tem velocidade angular de rotação igual a ω_0. Nos pólos, a aceleração da gravidade é $g_0 \cong 10$ m/s² e seu raio é $R \cong 6{,}4 \cdot 10^6$ m. Que valor deveria ter a velocidade angular de rotação da Terra para que uma pessoa no equador deixasse de ter peso? Dê sua resposta em função de ω_0.

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

74. (UNEB-BA) Considere um planeta com massa igual ao dobro da massa da Terra e raio três vezes menor que o raio da Terra. Se a aceleração da gravidade na superfície da Terra é g, na superfície do planeta em questão, a aceleração da gravidade é:

a) 9 g b) 18 g c) 1,5 g d) 6 g e) 0,6 g

75. (PUC-RJ) Medidas astronômicas revelam que a massa de Marte é aproximadamente um décimo da massa da Terra e que o raio da Terra é cerca de duas vezes maior do que o raio de Marte. Pode-se então concluir que a razão entre as intensidades do campo gravitacional (isto é, as acelerações da gravidade) nas superfícies de Marte (g_M) e da Terra (g_T) vale:

a) $\frac{g_M}{g_T} = 0{,}05$ c) $\frac{g_M}{g_T} = 0{,}2$ e) $\frac{g_M}{g_T} = 0{,}8$

b) $\frac{g_M}{g_T} = 0{,}1$ d) $\frac{g_M}{g_T} = 0{,}4$

76. (Mackenzie-SP) Que alteração sofreria o módulo da aceleração da gravidade, se a massa da Terra fosse reduzida à metade e o seu raio diminuído de $\frac{1}{4}$ de seu valor real? Despreza-se o seu movimento de rotação.

77. (U. E. Londrina-PR) Considere um corpo celeste esférico M, cuja densidade média e diâmetro são iguais à metade dos da Terra. Sendo g o módulo da aceleração da gravidade na superfície da Terra e g^* o correspondente na superfície de M, pode-se afirmar que é correta a relação:

a) $4g = g^*$
b) $2g = g^*$
c) $g = g^*$
d) $g = 2g^*$
e) $g = 4g^*$

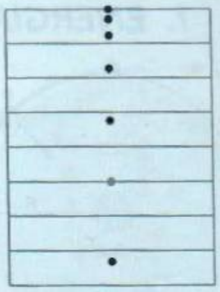
78. (Mackenzie-SP) Se um planeta tem massa igual ao dobro da massa da Terra e tem raio igual ao triplo do da Terra, então na sua superfície um corpo de massa 10 kg terá peso aproximadamente igual a:

a) 2,2 N b) 4,4 N c) 6,7 N d) 13,3 N e) 22,2 N

79. (FUVEST-SP) A aceleração da gravidade na superfície da Lua é $g_L = 2$ m/s² e na superfície da Terra é $g_T = 10$ m/s².

a) Na Lua, de que altura uma pessoa deve cair para atingir o solo com a mesma velocidade com que ela chegaria ao chão, na Terra, se caísse de 1 m de altura?
b) A razão entre os raios da Lua (R_L) e da Terra (R_T) é $R_L/R_T = 1/4$. Calcule a razão entre as massas da Lua (M_L) e da Terra (M_T).

80. (FAAP-SP) Em um planeta, um astronauta faz a seguinte experiência: abandona uma bola na frente de uma tela vertical que possui marcadas linhas horizontais, separadas por 50 cm; simultaneamente, é acionada uma máquina fotográfica de *flash* múltiplo, onde o intervalo entre os *flashs* é de 0,1 s. A partir da fotografia da queda da bola, indicada na figura, o astronauta calcula a razão entre a massa do planeta e a da Terra, pois ele sabe que o raio do planeta é o triplo do terrestre. Qual é o valor encontrado?



81. (F. M. ABC-SP) Admita que o raio da Terra é R = 6 400 km. Um astronauta terá seu peso reduzido a 4/9 do peso que tem na superfície da Terra, quando estiver a uma altitude de:

a) 6 400 km
b) 12 800 km
c) 3 200 km
d) 1 600 km
e) 5 000 km

82. (E. E. MAUÁ-SP) A massa da Terra é 81 vezes a da Lua. A distância da Terra à Lua mede 380 000 km. A que distância do centro da Terra se situa o ponto onde o campo gravitacional é nulo?

83. (FEI-SP) Admita que a Terra seja uma esfera homogênea de raio *R*, girando com velocidade angular ω. Exprima a diferença entre as acelerações da gravidade no pólo Sul e no equador.

84. (PUC-SP) O peso de um corpo:

a) medido ao longo de um meridiano e ao nível do mar permanece constante.
b) medido ao longo de um paralelo e ao nível do mar varia sensivelmente.
c) não varia com a altitude.
d) é maior no equador que nos pólos.
e) varia com a latitude.

85. (FCMSC-SP) A constante de gravitação universal é *G*. O período de rotação de um planeta *X* é *T*. Sabe-se que no equador de *X*, mesmo um dinamômetro de alta sensibilidade mantém suspenso na vertical qualquer corpo de massa 1 t acusando força zero. A densidade média do planeta *X* é:

a) $\frac{\pi}{GT}$
b) $\frac{4\pi}{GT}$
c) $\frac{4\pi}{3GT^2}$
d) $\frac{3\pi}{GT^2}$
e) $\frac{3\pi}{GT}$

86. Suponha que a Terra seja esférica, homogênea, e que a aceleração da gravidade na sua superfície seria $g = 10\ m/s^2$ se não houvesse movimento de rotação. São dados:
ω = velocidade angular de rotação da Terra $\cong 7 \cdot 10^{-5}$ rad/s
R = raio da Terra $\cong$ 6 400 km
Quantas vezes mais rápido, aproximadamente, teria que girar a Terra, para que uma pessoa, situada ao longo da linha do equador, tivesse seu peso reduzido a zero?

a) 2 vezes
b) 18 vezes
c) 100 vezes
d) 1 000 vezes
e) depende da massa da pessoa

87. (UNIP-SP) Um módulo lunar pousa na superfície da Lua. O raio da Lua é $\frac{1}{4}$ do raio da Terra. A massa da Lua é $\frac{1}{80}$ da massa da Terra. O peso do módulo na Lua é:

a) $\frac{1}{20}$ do seu peso na Terra.
b) $\frac{1}{80}$ do seu peso na Terra.
c) $\frac{1}{5}$ do seu peso na Terra.
d) 5 vezes o seu peso na Terra.
e) 20 vezes o seu peso na Terra.

7. ENERGIA NO CAMPO GRAVITACIONAL

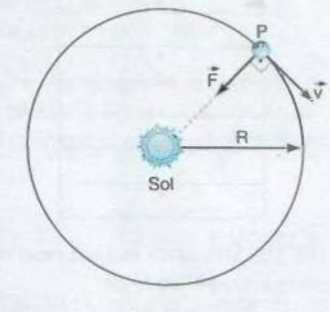


Fig. 29

Consideremos um planeta *P* movendo-se numa órbita circular de raio *R* em torno do Sol, com velocidade de translação igual a *v* (Fig. 29).

Sejam *m* a massa do planeta e *M* a massa do Sol.

O planeta *P* tem energia cinética dada por:

$$E_c = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Vimos no capítulo 7 que a energia potencial gravitacional de um ponto material em campo de gravidade uniforme é dada por $E_p = mgh$. No caso agora em questão, o campo de gravidade do Sol é variável. Demonstra-se que a energia potencial gravitacional assume aspectos mais simples quando se adota o referencial no infinito. Sua expressão é:

$$E_p = -G\frac{m \cdot M}{R}$$

A energia mecânica do planeta é a soma das energias cinética e gravitacional.

$$E_m = E_c + E_p$$

$$E_m = \frac{m \cdot v^2}{2} - G\frac{m \cdot M}{R}$$

Notas:

1ª) A energia cinética do planeta em órbita é sempre positiva. Essa diminui à medida que o raio da órbita do mesmo planeta aumenta, tendendo a zero quando o raio tende a infinito.

2ª) A energia potencial gravitacional do planeta em órbita é negativa em relação a um referencial no infinito. Isso quer dizer que, se o planeta fosse levado para o infinito, sua energia potencial se anularia.

3ª) A energia mecânica total do planeta é *constante*, pois o sistema é conservativo.

4ª) Para os planetas em órbitas elípticas, haverá variação de *R* e *v*, mas mesmo assim a energia mecânica será constante (Fig. 30).

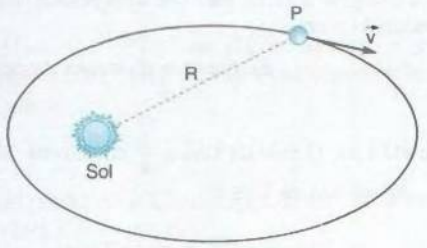


Fig. 30 Planeta em órbita elíptica em torno do Sol. Os valores de R e v são variáveis.

Velocidade cósmica primeira

Denominamos velocidade cósmica primeira a velocidade com que devemos lançar, horizontalmente, um corpo próximo à superfície da Terra, para que ele se torne um satélite artificial da Terra (Fig. 31).

Como vimos anteriormente, em órbita circular o movimento é uniforme e o módulo da velocidade do satélite vale:

$$v_1 = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R}}$$

Fig. 31 Lançado com a velocidade cósmica primeira $\vec{v}_1$, o satélite entrou em órbita circular próximo à superfície da Terra.

onde *M* é a massa da Terra e *R* é praticamente o raio.

Considerando que: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$, $R = 6{,}38 \cdot 10^6\ m$, $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg$, vem:

$$v_1 = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}38 \cdot 10^6}} \qquad v_1 = 7{,}91 \cdot 10^3\ m/s$$

$$v_1 = 7{,}91\ km/s \quad \text{ou} \quad v_1 \cong 8\ km/s$$

Velocidade de escape

Denominamos velocidade de escape a *menor velocidade* com que devemos lançar um corpo da superfície terrestre para que ele se livre do campo gravitacional e vá para o infinito, nunca mais retornando à Terra. Para calculá-la, basta impor a condição de ser nula a sua energia cinética no infinito.

$$E_{c_{Terra}} + E_{p_{Terra}} = E_{c_{inf}} + E_{p_{inf}}$$

$$\frac{m \cdot v_e^2}{2} + \left(-\frac{G \cdot m \cdot M}{R}\right) = 0 + 0$$

$$\frac{m \cdot v_e^2}{2} = -\left(-\frac{G \cdot M \cdot m}{R}\right)$$

onde *M* é a massa da Terra e *R* o seu raio.

$$\frac{m \cdot v_e^2}{2} = G\frac{M}{R} \cdot m \qquad \frac{v_e^2}{2} = G\frac{M}{R} \qquad v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Considerando que: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$, $R = 6{,}38 \cdot 10^6\ m$ (raio equatorial da Terra), $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg$, vem:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}38 \cdot 10^6}}$$

$$v_e = 11{,}2 \cdot 10^3\ m/s = 11{,}2\ km/s$$

11

Notas:

1ª) No cálculo da velocidade de escape não se consideraram os possíveis efeitos da rotação da Terra.

2ª) Analogamente poder-se-ia estender a definição da velocidade de escape para outros planetas e até mesmo para a Lua.

3ª) A velocidade de escape é também conhecida como velocidade cósmica segunda.

4ª) Vale a relação: $v_e = \sqrt{2} \cdot v_1$

5ª) Se um corpo for lançado horizontalmente com velocidade v_0 e:

a) $v_0 < 8$ km/s, ele retorna à Terra.

b) $v_0 \geqslant 11{,}2$ km/s, ele não retorna à Terra.

c) 8 km/s $< v_0 < 11{,}2$ km/s, ele entra em órbita elíptica da Terra.

6ª) As moléculas dos gases têm em geral altas velocidades, as quais dependem da temperatura e da massa da molécula. No caso dos gases que compõem a atmosfera terrestre, as velocidades *médias* (considerando temperatura média) são:

oxigênio	0,5 km/s
nitrogênio	0,6 km/s
hélio	1,5 km/s
hidrogênio	2,0 km/s

No entanto, essas velocidades são *médias*. Verifica-se que *algumas* moléculas atingem velocidades superiores à *velocidade de escape* e assim "escapam" da Terra. Observando os valores dados, percebemos que esse escape deve ser mais fácil para o hélio e o hidrogênio; isso explica, em parte, a razão pela qual na nossa atmosfera há mais oxigênio e nitrogênio do que hélio e hidrogênio. Calculou-se que, por esse processo, a cada ano a nossa atmosfera perde aproximadamente 500 kg de hidrogênio. Alguns planetas e satélites têm velocidade de escape menor que a da Terra. Isso pode explicar, pelo menos em parte, o fato de esses corpos terem pouca ou nenhuma atmosfera.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

88 Sendo $m = 1{,}0 \cdot 10^3$ kg a massa de um satélite em órbita circular da Terra a uma altitude de $3{,}6 \cdot 10^6$ m da sua superfície, determine:

a) o módulo da resultante centrípeta no satélite;

b) a sua energia cinética;

c) a sua energia potencial;

d) a energia mecânica total.

Dados: $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; raio da Terra, $R \cong 6{,}4 \cdot 10^6$ m; massa da Terra, $M \cong 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg.

Despreze outras forças sobre o satélite, que não sejam a gravitacional da Terra.

Resolução:

a) Como a única força sobre o satélite é a gravitacional da Terra, ela é a resultante centrípeta.

$F_{cp} = F_G = G\dfrac{m \cdot M}{r^2}$, onde $r = h + R = 3{,}6 \cdot 10^6 + 6{,}4 \cdot 10^6$

$r = 10 \cdot 10^6\ m = 1{,}0 \cdot 10^7\ m$

$F_{cp} = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\dfrac{(1{,}0 \cdot 10^3) \cdot (6{,}0 \cdot 10^{24})}{(1{,}0 \cdot 10^7)^2}$ $\boxed{F_{cp} \cong 4{,}0 \cdot 10^3\ N}$

b) A energia cinética do satélite e o módulo da resultante centrípeta se relacionam por:

$E_c = \dfrac{m \cdot v^2}{2}$ $F_{cp} = \dfrac{m \cdot v^2}{r}$

$2E_c = m \cdot v^2$ $r \cdot F_{cp} = m \cdot v^2$

$2E_c = r \cdot F_{cp}$

$E_c = \dfrac{r \cdot F_{cp}}{2}$

Sendo $r = 1{,}0 \cdot 10^7\ m$, $F_{cp} \cong 4{,}0 \cdot 10^3\ N$, vem:

$E_c \cong \dfrac{(1{,}0 \cdot 10^7) \cdot (4{,}0 \cdot 10^3)}{2}$ $\boxed{E_c \cong 2{,}0 \cdot 10^{10}\ J}$

c) A energia potencial do satélite é dada por:

$E_{pot} = -G\dfrac{M \cdot m}{r}$

Sendo $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$;
$m = 1{,}0 \cdot 10^3\ kg$; $M \cong 6{,}0 \cdot 10^{24}\ kg$;
$r = 1{,}0 \cdot 10^7\ m$, vem:

$E_{pot} = -6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot \dfrac{(6{,}0 \cdot 10^{24}) \cdot (1{,}0 \cdot 10^3)}{1{,}0 \cdot 10^7}$

$\boxed{E_{pot} = -4{,}0 \cdot 10^{10}\ J}$

d) $E_m = E_{pot} + E_c$

$E_m = -4{,}0 \cdot 10^{10} + 2{,}0 \cdot 10^{10}$

$\boxed{E_m = -2{,}0 \cdot 10^{10}\ J}$

Observações:

1ª) O módulo da energia potencial é o dobro da energia cinética.
2ª) A energia mecânica resultou negativa.

89. Um satélite em órbita circular da Terra de raio *r* executa um movimento uniforme, de acordo com a Segunda Lei de Kepler. Sendo *m* a massa do satélite, *M* a da Terra, bem como *R* o seu raio, determine:

a) a expressão da força resultante centrípeta no satélite;
b) a expressão da energia cinética.

É dada a constante de gravitação universal *G*.

90. Dois satélites da Terra, de mesma massa, são postos em órbitas circulares ao redor do seu centro. O satélite *A* tem órbita de raio 2r e o *B* de raio *r*. Determine a relação entre:

a) a energia potencial de *A* e de *B*;
b) a energia cinética de *A* e de *B*;
c) a energia mecânica de *A* e de *B*.

91. Demonstre que, para escapar da atmosfera de um planeta, uma partícula, situada a uma distância *r* de seu centro, deve ter velocidade *v*, tal que $v \geqslant \sqrt{\dfrac{2GM}{r}}$, onde *M* é a massa do planeta.

92. A velocidade de escape da Terra é $v_{e_T} \cong 11{,}2\ km/s$. Determine a velocidade de escape de Marte.

Dados:

	Terra	Marte
massa	10M	M
raio	2R	R

Resolução:

As velocidades de escape são dadas por:

$$v_{e_M} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \text{ e } v_{e_T} = \sqrt{\frac{2G(10M)}{(2R)}} = \sqrt{\frac{10GM}{R}}$$

$$\frac{v_{e_M}}{v_{e_T}} = \frac{\sqrt{\dfrac{2GM}{R}}}{\sqrt{\dfrac{10GM}{R}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$v_{e_M} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot v_{e_T} = \text{e} \quad V_{e_M} = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot v_{e_T}$$

Sendo $v_{e_T} \cong 11{,}2\ km/s$, vem:

$$v_{e_M} = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot 11{,}2 = 2{,}24\sqrt{5} \qquad v_{e_M} \cong 5{,}01\ km/s$$

EXERCÍCIOS DE REFORÇO

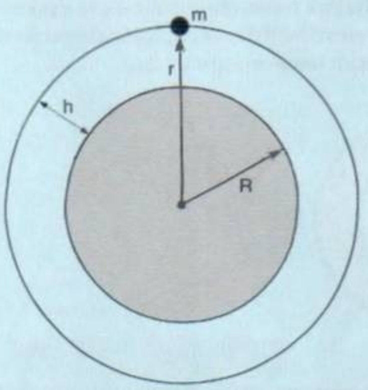
93. (ITA-SP) Um projétil lançado verticalmente da superfície da Terra atinge uma altitude máxima igual a três vezes o raio *R* da Terra. Sendo *G* a constante de gravitação universal e *M* a massa da Terra, podemos afirmar que a velocidade inicial do projétil foi (despreze a resistência do ar):

a) $\sqrt{\dfrac{3GM}{2R}}$ b) $\sqrt{\dfrac{4GM}{3R}}$ c) $\sqrt{\dfrac{2GM}{3R}}$ d) $\sqrt{\dfrac{3GM}{4R}}$ e) $\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$

94. (FAAP-SP) Sabendo que a velocidade de escape de um corpo lançado de um dos pólos da Terra (desprezando a resistência do ar) é 11,2 km/s e que a aceleração da gravidade ao nível do mar, no mesmo local, vale aproximadamente $9{,}83 m/s^2$, determine:

a) a velocidade de escape no planeta Marte, cuja massa e raio valem, respectivamente, 0,11 M e 0,55 R, onde *M* e *R* são, respectivamente, a massa e o raio da Terra;
b) a aceleração da gravidade nos pólos do planeta Marte.
Dados: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$; $M = 6{,}0 \cdot 10^{24}\ kg$ e $R = 6{,}4 \cdot 10^3\ km$.

95. (UF-GO) Um satélite de massa 450 kg orbita, em torno da Terra, numa trajetória circular de raio r conforme a figura:



a) determine a altura, h, da órbita do satélite sabendo-se que, nesta órbita, $g' = \frac{4}{9}g$, sendo g a gravidade na superfície da Terra;
b) determine a energia cinética do satélite nesta órbita;
c) determine a energia mecânica total do satélite, adotando-se referencial no infinito.

EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

96. (ITA-SP) Numa certa data, a posição relativa dos corpos celestes do Sistema Solar era, para um observador fora do Sistema, a seguinte:

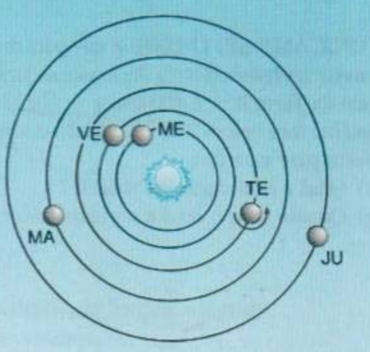
ME = Mercúrio

VE = Vênus

TE = Terra

MA = Marte

JU = Júpiter



O sentido de rotação da Terra está indicado na figura. A figura não está em escala. Do diagrama apresentado, para um observador terrestre não muito distante do equador, pode-se afirmar que:

I. Marte e Júpiter eram visíveis à meia-noite.
II. Mercúrio e Vênus eram visíveis à meia-noite.
III. Marte era visível a oeste ao entardecer.
IV. Júpiter era visível à meia noite.

a) somente a IV é verdadeira
b) III e IV são verdadeiras
c) todas são verdadeiras
d) I e IV são verdadeiras
e) nada se pode afirmar com os dados fornecidos

97. (UNICAMP-SP) A atração gravitacional da Lua e a força centrífuga do movimento conjunto de rotação da Lua e da Terra são as principais causas do fenômeno das marés. Essas forças fazem com que a água dos oceanos adquira a forma esquematizada (e exagerada) na figura abaixo. A influência do Sol no fenômeno das marés é bem menor, mas não desprezível, porque quando a atração do Sol e da Lua se conjugam a maré torna-se mais intensa.

a) Quantas marés altas ocorrem em um dia em um mesmo local?
b) Como estará a maré no Brasil quando a Lua estiver bem acima do Japão?
c) Faça um desenho mostrando a Terra, a Lua e o Sol na situação em que a maré é mais intensa. Qual a fase da Lua?

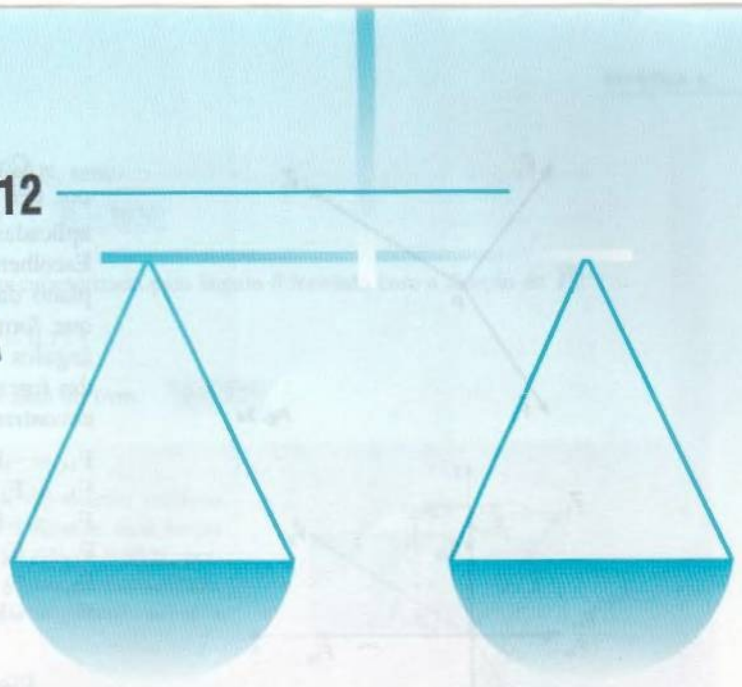
11

98. (UNICAMP-SP) Satélites de comunicações são retransmissores de ondas eletromagnéticas. Eles são operados normalmente em órbitas cuja velocidade angular ω_T é igual à da Terra, de modo a permanecerem imóveis em relação às antenas transmissoras e receptoras. Essas órbitas são chamadas de *órbitas geoestacionárias*.
a) Dados ω_T e a distância R entre o centro da Terra e o satélite, determine a expressão da sua velocidade em órbita geoestacionária.
b) Dados ω_T, o raio da Terra R_T e a aceleração da gravidade na superfície da Terra g, determine a distância R entre o satélite e o centro da Terra para que ele se mantenha em *órbita geoestacionária*.

99. (UNICAMP-SP) O Japão é um país diametralmente oposto ao Brasil, no globo terrestre. Quer-se enviar correspondência do Japão ao Brasil por um satélite em órbita rasante sobre a Terra. Adote o raio da Terra R = 6 400 km, $g = 10\ m/s^2$, $\pi = 3{,}14$ e despreze a resistência do ar. Considere que o satélite tem velocidade de módulo constante e que é razoável desprezar o movimento de rotação da Terra para este fim.
a) Qual a aceleração do satélite?
b) Quanto tempo leva a correspondência para chegar ao Brasil?

CAPÍTULO 12

ESTÁTICA



A Estática é a parte da Mecânica que estuda as condições de equilíbrio do ponto material e do corpo extenso.

1. SISTEMA DE FORÇAS APLICADAS AO PONTO MATERIAL

Consideremos três forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ aplicadas a um ponto material P (Fig. 1). Chamamos resultante $\vec{R}$ desse sistema de forças a força que, aplicada ao ponto P, determina o mesmo efeito que o sistema de forças:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

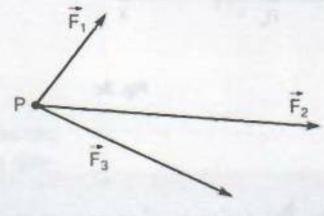


Fig. 1

Há vários modos de se determinar a resultante do sistema de forças, valendo as mesmas regras já vistas quando estudamos a soma de vetores.

Comumente, em Estática, usamos a regra do paralelogramo que vale para duas forças de cada vez (Fig. 2) ou o método das projeções que expomos a seguir.

Fig. 2

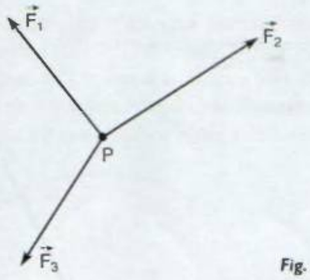


Fig. 3a

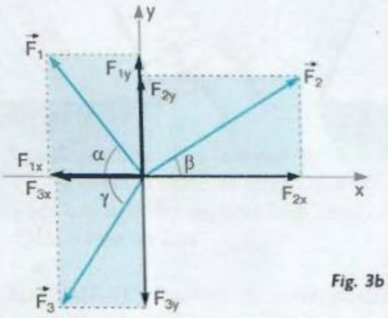


Fig. 3b

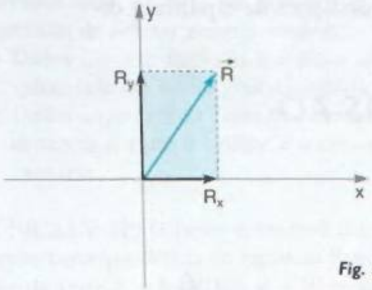


Fig. 3c

Consideremos o sistema constituído por três forças coplanares, $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ e $\vec{F_3}$, aplicadas a um ponto material *P* (Fig. 3a). Escolhem-se dois eixos ortogonais *x* e *y* no plano das forças aplicadas ao ponto *P* e que formam com as direções das forças ângulos conhecidos (Fig. 3b). Cada uma das forças é projetada sobre os dois eixos, encontrando-se as projeções:

$$F_{1x} = -F_1 \cdot \cos\alpha$$
$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos\beta$$
$$F_{3x} = -F_3 \cdot \cos\gamma$$
$$F_{1y} = F_1 \cdot \text{sen}\,\alpha$$
$$F_{2y} = F_2 \cdot \text{sen}\,\beta$$
$$F_{3y} = -F_3 \cdot \text{sen}\,\gamma$$

Efetua-se a seguir a soma algébrica das projeções em cada eixo, obtendo-se a resultante das projeções.

Assim:

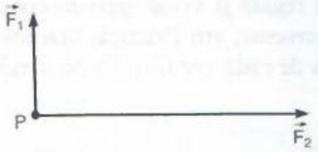
$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$

A intensidade da resultante $\vec{R}$ (Fig. 3c) será dada por:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

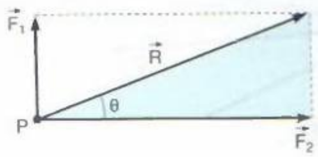
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1 Um ponto material está sujeito a duas forças perpendiculares de intensidades iguais a 30 N e 40 N, conforme a figura. Determine a direção, o sentido e a intensidade da resultante.



Resolução:

Aplicando a regra do paralelogramo, obtemos a direção e o sentido da resultante $\vec{R}$. A intensidade pode ser obtida aplicando o Teorema de Pitágoras: $R^2 = F_1^2 + F_2^2$.



Como $F_1 = 30\,N$ e $F_2 = 40\,N$, vem:

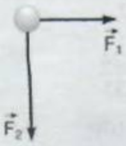
$R^2 = 30^2 + 40^2 = 2\,500$ $\boxed{R = 50\,N}$

A direção de $\vec{R}$ pode ser caracterizada pelo ângulo θ formado com a direção de $\vec{F_2}$:

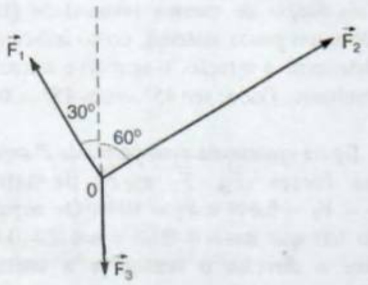
$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{30}{40}$ $\operatorname{tg}\theta = 0{,}75$

Consultando a tabela no final do livro: $\boxed{\theta \cong 37°}$

2. Uma partícula descreve um movimento retilíneo uniformemente variado sob a ação de duas forças de intensidades $F_1 = 0{,}60\,N$ e $F_2 = 0{,}80\,N$, perpendiculares, conforme a figura esquematizada. Determine a intensidade da resultante sobre a partícula.



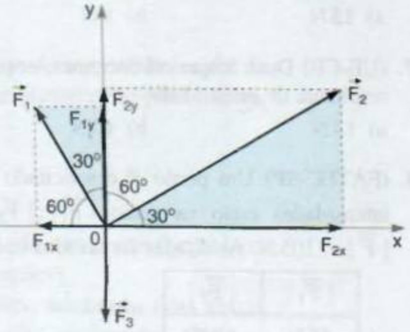
3. Determine a direção, o sentido e a intensidade da resultante do sistema de forças que age sobre o ponto material O. São dados:
sen 30° = cos 60° = 0,50;
sen 60° = cos 30° = 0,87;
$F_1 = 2{,}0\,N$;
$F_2 = 5{,}0\,N$;
$F_3 = 4{,}0\,N$.
Use o método das projeções.



Resolução:

Adotemos os eixos x e y, respectivamente, perpendiculares à direção de $\vec{F_3}$ e na direção de $\vec{F_3}$. As projeções valem:

$F_{1x} = -F_1 \cdot \cos 60° = -2{,}0 \cdot 0{,}50 = -1{,}0\,N$
$F_{2x} = F_2 \cdot \cos 30° = 5{,}0 \cdot 0{,}87 = 4{,}35\,N$
$F_{3x} = 0$
$F_{1y} = F_1 \cdot \cos 30° = 2{,}0 \cdot 0{,}87 = 1{,}74\,N$
$F_{2y} = F_2 \cdot \cos 60° = 5{,}0 \cdot 0{,}50 = 2{,}5\,N$
$F_{3y} = -F_3 = -4{,}0\,N$



A resultante das projeções no eixo x vale:

$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = -1{,}0 + 4{,}35 + 0$

$\boxed{R_x = 3{,}35\,N}$

No eixo y, a resultante vale:

$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 1{,}74 + 2{,}5 - 4{,}0$

$\boxed{R_y = 0{,}24\,N}$

O esquema indica a direção e o sentido da resultante.

A intensidade é obtida aplicando-se o Teorema de Pitágoras:

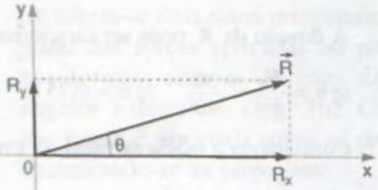
$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$

$R = \sqrt{3{,}35^2 + 0{,}24^2}$

$R = \sqrt{11{,}22 + 0{,}06}$

$R = \sqrt{11{,}28}$

$\boxed{R = 3{,}36\,N}$



A direção de $\vec{R}$ é dada pelo ângulo θ:

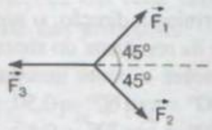
$\text{tg}\,\theta = \dfrac{R_y}{R_x}$

$\text{tg}\,\theta = \dfrac{0{,}24}{3{,}35}$

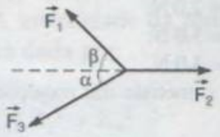
$\boxed{\text{tg}\,\theta \cong 0{,}070}$

Consultando a tabela no final do livro: $\boxed{\theta \cong 4^\circ}$

4. Três forças de mesma intensidade (10 N) agem sobre um ponto material, como indica o esquema. Determine a direção, o sentido e a intensidade da resultante. Dado: sen 45° = cos 45° = 0,70.



5. A figura representa uma partícula *P* sujeita à ação das forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ de intensidades $F_1 = F_2 = 5{,}0\,N$ e $F_3 = 10\,N$. Os ângulos α e β são tais que sen $\alpha = 0{,}60$ e sen $\beta = 0{,}80$. Determine a direção, o sentido e a intensidade da resultante.



EXERCÍCIOS DE REFORÇO

6. (UE-CE) Duas forças concorrentes, de módulos 10 N e 5 N, atuam sobre um ponto material. O módulo da resultante *não* pode ser:

a) 15 N b) 8 N c) 5 N d) 4 N

7. (UE-CE) Duas forças concorrentes, ortogonais, de módulos 6 N e 8 N, respectivamente, admitem resultante de intensidade:

a) 14 N b) 10 N c) 7 N d) 2 N

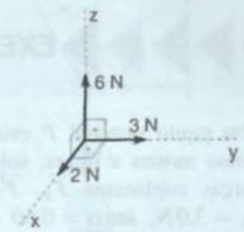
8. (FATEC-SP) Um ponto *P* é solicitado por duas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ formando ângulo reto, cujas intensidades estão na razão $|\vec{F}_1| : |\vec{F}_2| = 3:4$. A resultante $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ tem intensidade $|\vec{F}| = 105\,N$. As citadas forças têm intensidades:

	$\lvert\vec{F}_1\rvert$	$\lvert\vec{F}_2\rvert$
a)	45 N	60 N
b)	63 N	84 N
c)	60 N	45 N
d)	84 N	63 N

e) nenhuma das anteriores.

9. (Mackenzie-SP) A resultante das três forças indicadas na figura vale:

a) 5 N
b) 7 N
c) 8 N
d) 9 N
e) 11 N

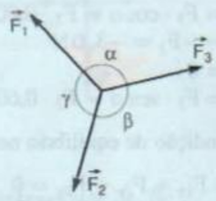


10. (Mackenzie-SP) Um sistema é constituído por duas forças de direções normais entre si e de intensidades 60 N e 80 N. A força resultante dessas duas forças forma com a força de intensidade 80 N um ângulo cujo seno vale:

a) 0,50 b) 0,60 c) 0,75 d) 0,80 e) 1,00

11. (Mackenzie-SP) A resultante das três forças, de módulos $F_1 = F$, $F_2 = 2F$ e $F_3 = F\sqrt{3}$, indicadas na figura ao lado, é zero.
Os ângulos α, β e γ valem respectivamente:

a) 150° ; 150° e 60°
b) 135° ; 135° e 90°
c) 90° ; 135° e 135°
d) 90° ; 150° e 120°
e) 120° ; 120° e 120°



Dados:

ângulo	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°
cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	−1/2	$-\sqrt{3}/2$	−1

2. EQUILÍBRIO DO PONTO MATERIAL

Um ponto material está em equilíbrio quando é nula a resultante das forças que sobre ele atuam, isto é:

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + ... = \vec{0}$$

Utilizando o método das projeções, essa condição pode ser estabelecida de modo a ser nula a soma algébrica das projeções das forças atuantes no ponto sobre dois eixos ortogonais x e y:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + ... = 0$$
$$R_y = F_{1y} +_{2y} + F_{3y} + ... = 0$$

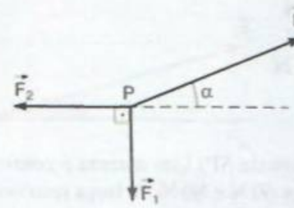
Desse modo, transformamos uma equação vetorial (da soma das forças) em duas equações escalares (das somas algébricas das projeções).

Obviamente, ao utilizarmos o método das projeções, adotando dois eixos, estamos admitindo que as forças que agem no ponto são coplanares. Caso as forças não sejam coplanares, a resolução é efetuada com a utilização de um terceiro eixo ortogonal z, devendo também ser nula a soma algébrica das projeções sobre esse eixo:

$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + ... = 0$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

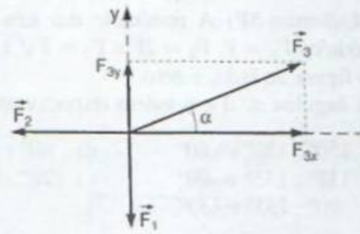
12. Um ponto material P está em equilíbrio, como mostra a figura, sob a ação de três forças coplanares $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ e $\vec{F_3}$. Sendo $F_1 = 3{,}0\,N$, $\text{sen}\,\alpha = 0{,}60$ e $\cos\alpha = 0{,}80$, determine a intensidade das forças $\vec{F_2}$ e $\vec{F_3}$.



Resolução:

Calculemos as projeções:

$F_{1x} = 0$
$F_{2x} = -F_2$
$F_{3x} = F_3 \cdot \cos\alpha = F_3 \cdot 0{,}80$
$F_{1y} = -F_1 = -3{,}0\,N$
$F_{2y} = 0$
$F_{3y} = F_3 \cdot \text{sen}\,\alpha = F_3 \cdot 0{,}60$



A condição de equilíbrio no eixo y fornece:

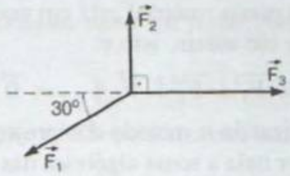
$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0$
$-3{,}0 + 0 + F_3 \cdot 0{,}60 = 0$
$F_3 \cdot 0{,}60 = 3{,}0$ $\quad F_3 = 5{,}0\,N$

A condição de equilíbrio no eixo x fornece:

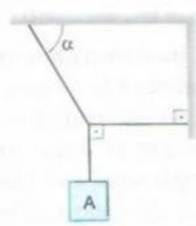
$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0$
$0 - F_2 + F_3 \cdot 0{,}80 = 0$
$F_3 \cdot 0{,}80 = F_2$
$F_2 = 5{,}0 \cdot 0{,}80$

$F_2 = 4{,}0\,N$

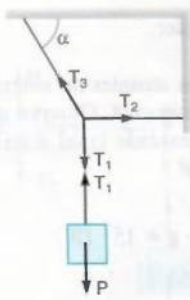
13. As forças indicadas agem sobre um ponto material que se encontra em equilíbrio. Dado que $F_1 = 10\,N$, $\text{sen}\,30^\circ = 0{,}50$ e $\cos 30^\circ = 0{,}87$, determine a intensidade das forças $\vec{F_2}$ e $\vec{F_3}$.



14. Na figura, o sistema está em equilíbrio. Os fios são ideais e o corpo A tem peso 100 N. Dado que o ângulo α vale 50°, determine a intensidade das trações nos três fios.



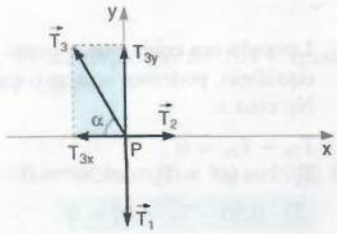
Resolução:



Chamamos as trações de $\vec{T_1}$, $\vec{T_2}$ e $\vec{T_3}$, conforme a figura. Isolando o corpo A, verifica-se que a intensidade da tração $\vec{T_1}$ é igual à do peso do corpo A:

$T_1 = P$

$T_1 = 100\,N$



Para a determinação das outras trações usamos o método das projeções, isolando o ponto P, comum aos três fios, que está em equilíbrio:

$T_{1x} = 0$ $\qquad$ $T_{1y} = -T_1 = -100\,N$
$T_{2x} = T_2$ $\qquad$ $T_{2y} = 0$
$T_{3x} = -T_3 \cdot \cos\alpha$ $\qquad$ $T_{3y} = T_3 \cdot \operatorname{sen}\alpha$

Da tabela de senos e cossenos tiramos:
$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}50^\circ = 0{,}77$ e $\cos\alpha = \cos 50^\circ = 0{,}64$.

Aplicando a condição de equilíbrio no eixo y, tiramos a intensidade de T_3:

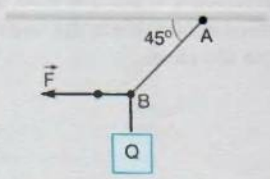
$T_{1y} + T_{2y} + T_{3y} = 0$
$-100 + 0 + T_3 \cdot \operatorname{sen}\alpha = 0$
$T_3 \cdot \operatorname{sen}\alpha = 100$

$$T_3 = \frac{100}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{100}{0{,}77} \qquad T_3 \cong 130\,N$$

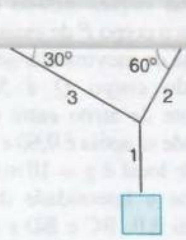
Aplicando agora a condição de equilíbrio no eixo x, obtemos a intensidade de F_2:

$T_{1x} + T_{2x} + T_{3x} = 0$
$0 + T_2 - T_3 \cdot \cos\alpha = 0$
$T_2 = T_3 \cdot \cos\alpha$
$T_2 = 130 \cdot 0{,}64$ $\qquad$ $T_2 \cong 83{,}2\,N$

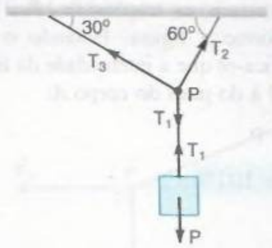
15. Na figura, os fios são ideais, o corpo Q tem peso $70\,N$ e $\operatorname{sen}45^\circ = \cos 45^\circ = 0{,}70$. Determine a intensidade da tração no fio AB e a intensidade da força $\vec{F}$ que mantém o sistema em equilíbrio.



16 O sistema esquematizado está em equilíbrio. Determine a intensidade da tração nos fios 1, 2 e 3. São dados $\operatorname{sen}30^\circ = \cos 60^\circ = 0{,}50$ e $\operatorname{sen}60^\circ = \cos 30^\circ = 0{,}87$. O corpo suspenso tem massa 15 kg. É dada a aceleração da gravidade local $g = 10\,m/s^2$.



Resolução:



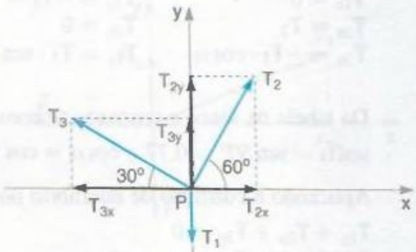
As forças atuantes no sistema estão indicadas no esquema. Observe que a tração T_1 tem intensidade igual à do peso do corpo suspenso:

$T_1 = P$
$T_1 = m \cdot g = 15 \cdot 10$

$\boxed{T_1 = 150\,N}$

Levando em conta que o ponto P, onde estão aplicadas as forças $\vec{T_1}$, $\vec{T_2}$ e $\vec{T_3}$, está em equilíbrio, podemos aplicar o método das projeções.

No eixo x:



$T_{2x} + T_{3x} = 0$
$T_2 \cdot \cos 60° - T_3 \cdot \cos 30° = 0$

$\boxed{T_2 \cdot 0{,}50 - T_3 \cdot 0{,}87 = 0}$ (I)

No eixo y:

$T_{1y} + T_{2y} + T_{3y} = 0$
$-T_1 + T_2 \cdot \text{sen}\,60° + T_3 \cdot \text{sen}\,30° = 0$
$-150 + T_2 \cdot 0{,}87 + T_3 \cdot 0{,}50 = 0$

$\boxed{T_2 \cdot 0{,}87 + T_3 \cdot 0{,}50 = 150}$ (II)

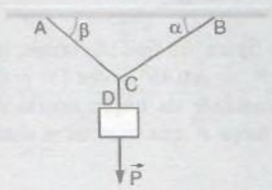
Isolando T_2 da equação (I) e substituindo em (II), vem:

$T_2 = \dfrac{T_3 \cdot 0{,}87}{0{,}50}$ $\quad T_2 = 1{,}74T_3$

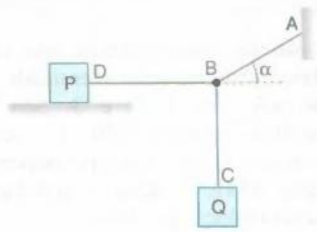
$1{,}74 \cdot T_3 \cdot 0{,}87 + 0{,}50 \cdot T_3 = 150$ $\quad 2T_3 \cong 150$ $\quad \boxed{T_3 \cong 75\,N}$

$T_2 = 1{,}74T_3 \cong 1{,}74 \cdot 75$ $\quad \boxed{T_2 \cong 130{,}5\,N}$

17. Na figura, que representa um sistema em equilíbrio, $P = 50\,N$, $\text{sen}\,\alpha = \cos\beta = 0{,}60$, $\text{sen}\,\beta = \cos\alpha = 0{,}80$. Determine a intensidade das trações nos fios AC, BC e CD, que são ideais.

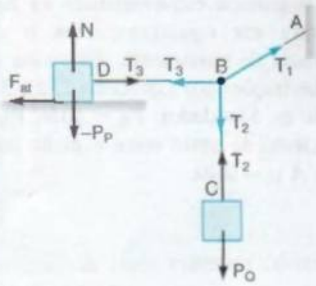


18 O sistema esquematizado está em equilíbrio, mas o corpo P de massa 10 kg está na iminência de movimentar-se. Sabe-se que a massa do corpo Q é 5,0 kg, que o coeficiente de atrito entre o corpo P e o plano onde se apóia é 0,60 e a aceleração da gravidade local é $g = 10\,m/s^2$.
Determine a intensidade das trações nos fios ideais AB, BC e BD e o ângulo α.



Resolução:

O esquema de forças que atuam no ponto *B* e nos corpos *P* e *Q*, que estão em equilíbrio, está representado ao lado.



Isolando o corpo *Q*, observa-se que a tração no fio BC tem intensidade igual à do peso do corpo *Q*:

$T_2 = P_Q = m_Q \cdot g = 5{,}0 \cdot 10$

$T_2 = 50\,N$

Isolando o corpo *P*, verificamos que a intensidade T_3 da tração no fio BD é igual à intensidade da força de atrito que atua sobre o corpo *P*. Assim:

$T_3 = F_{at}$

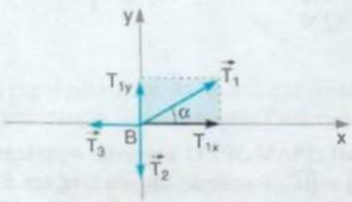
Mas $F_{at} = \mu \cdot P_p = \mu \cdot m_p \cdot g$, onde $\mu = 0{,}60$ é o coeficiente de atrito e $m_p = 10\,kg$ é a massa do corpo *P*.

Portanto:

$T_3 = F_{at} = 0{,}60 \cdot 10 \cdot 10$

$T_3 = 60\,N$

Isolando o ponto *B* no qual concorrem os três fios, aplicamos o método das projeções e obtemos a intensidade da tração $\vec{T_1}$ no fio AB e o ângulo α:



No eixo *x*:

$T_{3x} + T_{1x} = 0$

$-T_3 + T_{1x} = 0$

$-60 + T_1 \cdot \cos\alpha = 0 \qquad T_1 \cdot \cos\alpha = 60 \qquad \text{(I)}$

No eixo *y*:

$T_{2y} + T_{1y} = 0$

$-T_2 + T_{1y} = 0$

$-50 + T_1 \cdot \operatorname{sen}\alpha = 0 \qquad T_1 \cdot \operatorname{sen}\alpha = 50 \qquad \text{(II)}$

Dividindo as expressões (II) e (I), obtemos:

$\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{50}{60} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{50}{60} \qquad \operatorname{tg}\alpha = 0{,}83$

Consultando a tabela: $\alpha = 40°$

Ainda da tabela, obtemos: $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}64$

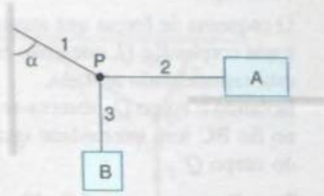
Substituindo em (II), vem:

$T_1 \cdot 0{,}64 = 50$

$T_1 = \dfrac{50}{0{,}64} \qquad T_1 \cong 78\,N$

12

19. Para o sistema esquematizado na figura, que se encontra em equilíbrio, com o corpo A na iminência de movimento, determine as intensidades das trações nos fios ideais 1, 2 e 3 e o valor do ângulo α. São dados: $P_B = 10\,N$, $P_A = 25\,N$ e o coeficiente de atrito entre o plano horizontal e o corpo A $\mu = 0{,}40$.

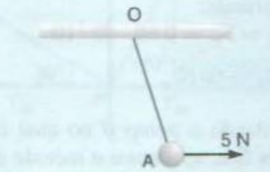


EXERCÍCIOS DE REFORÇO

20. (PUC-SP) Na figura, a esfera A, de peso 12 N, está presa ao fio OA e é solicitada por uma força horizontal de intensidade 5 N.

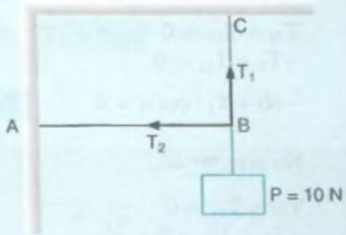
Estando o sistema em equilíbrio, a tração em OA tem valor:

a) 5 N
b) 7 N
c) 12 N
d) 13 N
e) 17 N



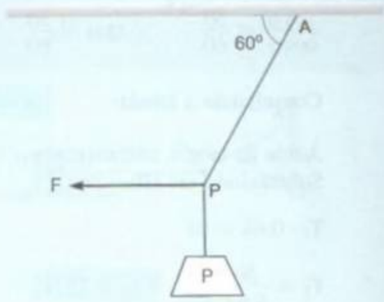
21. (FMU/FIAM-SP) O esquema representa 2 cordas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, formando ângulo reto em B, onde está suspenso um corpo de peso $P = 10\,N$. Nestas condições, as trações T_1 e T_2 nas cordas serão:

a) $T_1 = T_2 = 5\,N$
b) $T_1 = 10\,N$ e $T_2 = 10\,N$
c) $T_1 = 10\,N$ e $T_2 = 0\,N$
d) $T_1 = T_2 = (10 \cdot \sqrt{2})\,N$
e) $T_1 = 10\,N$ e $T_2 = (10\sqrt{2})\,N$

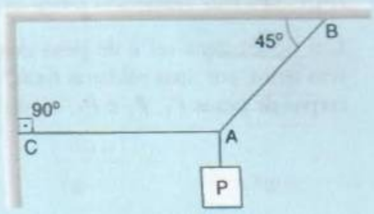


22. (PUC-RS) Um fio de peso desprezível está preso a um ponto A e, preso à sua extremidade, temos um peso P. O fio é deslocado da vertical, quando da atuação de uma força F no ponto P. Qual deverá ser o valor de F, a fim de manter o sistema em equilíbrio?

a) P
b) $\frac{P}{2}$
c) 2P
d) $\frac{P}{\sqrt{3}}$
e) $P\sqrt{3}$

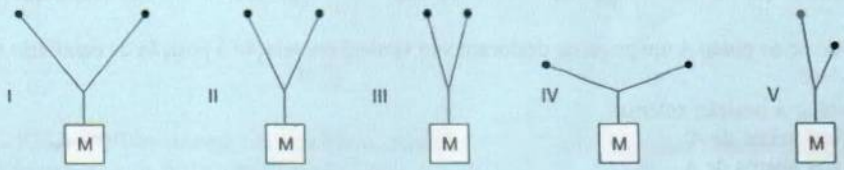


23. (PUC-RS) O sistema ao lado encontra-se em equilíbrio. Determinar as trações T_1 e T_2 nos fios AB e AC, respectivamente. O peso do corpo P é 200 N.



a) $T_1 = 200\,N$ e $T_2 = 120\,N$
b) $T_1 = 185\,N$ e $T_2 = 283\,N$
c) $T_1 = 215\,N$ e $T_2 = 325\,N$
d) $T_1 = 283\,N$ e $T_2 = 200\,N$
e) $T_1 = 300\,N$ e $T_2 = 200\,N$

24. (Fund. Carlos Chagas-SP) Um corpo de massa M é pendurado de cinco maneiras diferentes numa corda que tem extremidades fixas, como mostram as figuras abaixo:



A maior intensidade da força na corda ocorre em:

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

25. (ITA-SP) Uma luminária cujo peso é P está suspensa por duas cordas AC e BC que (conforme a figura) formam com a horizontal ângulos iguais a θ. Determine a força de tensão T em cada corda.

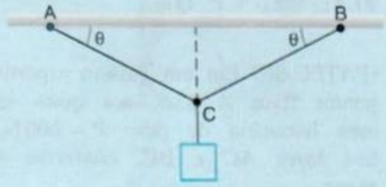
a) $T = \dfrac{P}{2\cos\theta}$

b) $T = \dfrac{P}{2\,\text{sen}\,\theta}$

c) $T = \dfrac{P}{2\,\text{tg}\,\theta}$

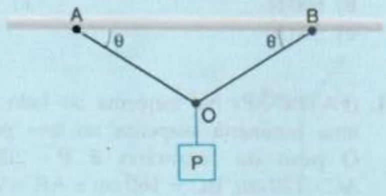
d) $T = \dfrac{P\cos\theta}{2}$

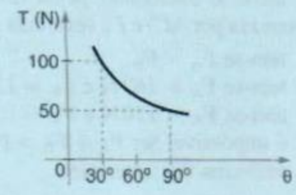
e) nenhuma das anteriores



26. (Mackenzie-SP) No sistema ao lado, o peso P está preso ao fio AB por uma argola. Despreze os atritos. Levando a extremidade A do fio ao encontro da extremidade B, a intensidade da tração no fio OA é sempre igual à do fio OB e varia com o ângulo θ conforme o gráfico dado. O peso P vale:

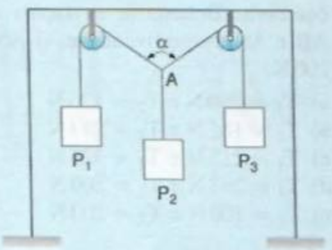
a) 150 N
b) 100 N
c) 80 N
d) 50 N
e) 10 N





(PUC-SP) Este enunciado refere-se às questões 27 e 28.

Um fio inextensível e de peso desprezível passa, sem atrito, por duas roldanas fixas, sustentando os corpos de pesos P_1, P_2 e P_3, sendo $P_1 = P_2 = P_3$.



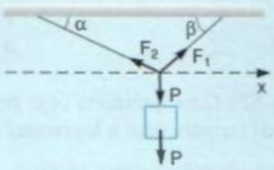
27. O ângulo α, na condição de equilíbrio do sistema, tem valor:

a) menor que 90° b) 180° c) 120° d) 150° e) maior que 150°

28. Dando-se ao ponto A um pequeno deslocamento vertical em relação à posição de equilíbrio inicial, ele deve:

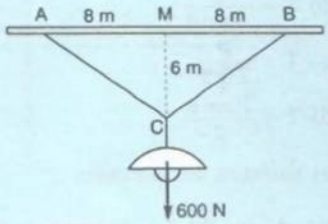
a) voltar à posição anterior.
b) ficar acima de A.
c) ficar abaixo de A.
d) permanecer em qualquer nova posição.
e) ficar na nova posição desde que α seja um ângulo agudo.

29. (UC-MG) Para as forças indicadas, o equilíbrio na direção x estará estabelecido se:



a) $F_1 \cdot \cos\beta = F_2 \cdot \cos\alpha$
b) $F_1 \cdot \cos\beta = P$
c) $F_1 \cdot \text{sen}\,\beta = F_2 \cdot \text{sen}\,\alpha$
d) $F_1 \cdot \text{sen}\,\beta = F_2 \cdot \text{sen}\,\alpha = 0$
e) $F_1 \cdot \text{sen}\,\beta = P \cdot \text{tg}\,\alpha$

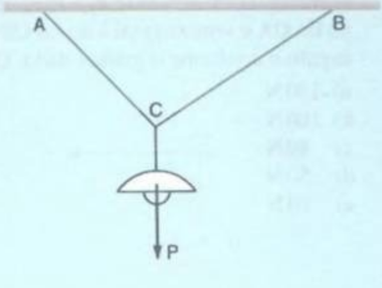
30. (FATEC-SP) Em um ginásio esportivo há dois pontos fixos A e B, aos quais se suspende uma luminária de peso $P = 600\,N$, mediante fios leves AC e BC, conforme o esquema anexo.



A força de tração em cada fio tem intensidade:

a) 300 N
b) 600 N
c) 500 N
d) 450 N
e) 400 N

31. (FATEC-SP) No esquema ao lado representa-se uma luminária suspensa ao teto por dois fios. O peso da luminária é $P = 200\,N$. Dão-se $AC = 120\,cm$, $BC = 160\,cm$ e $AB = 200\,cm$. O nó C é tracionado pelos fios com forças F_A (exercida por AC) e F_B (exercida por BC):



a) tem-se $F_A = F_B$.
b) tem-se $F_A = 160\,N$ e $F_B = 120\,N$.
c) tem-se $F_A = 120\,N$ e $F_B = 160\,N$.
d) é impossível ser $F_A + F_B > P$.
e) nenhuma das anteriores.

12

32. (FAAP-SP) Um corpo de peso 100 N é suspenso por dois fios iguais e ideais, que resistem a uma tração máxima de 75 N cada um. Entre os pontos médios dos fios é introduzida uma barra AB de peso desprezível, como mostra a figura *b*. Nestas condições, verifique se os fios se romperão ou não.

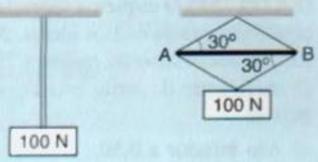


Fig. a *Fig. b*

33. (UF-PA) Um equilibrista de peso *P* caminha sobre uma corda esticada de peso desprezível e comprimento *L*. Após caminhar um terço do percurso ele pára e, neste ponto, verifica-se ter a corda sofrido um pequeno deslocamento vertical y, muito pequeno comparado com *L* (y << L). A tração na corda tem intensidade aproximadamente igual a:

a) $\frac{PL}{y}$

b) $\frac{PL}{6y}$

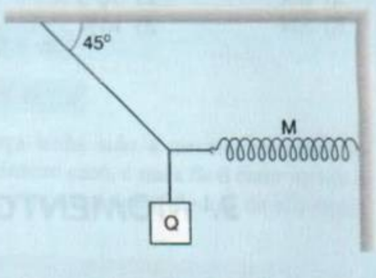
c) $\frac{2PL}{9y}$

d) $\frac{Py}{3L}$

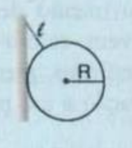
e) $\frac{Py}{L}$

34. (UNISA-SP) No sistema em equilíbrio, representado na figura, os fios e a mola *M* são ideais, o peso de *Q* é 200 N e a mola está alongada de 0,50 cm. Podemos então afirmar que a constante elástica da mola é igual a:

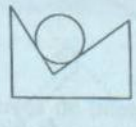
a) $4{,}0 \cdot 10^3$ N/m
b) $4{,}0 \cdot 10^4$ N/m
c) $2{,}0 \cdot 10^2$ N/m
d) $3{,}0 \cdot 10^3$ N/m
e) $1{,}4 \cdot 10^2$ N/m



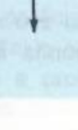
35. (FEI-SP) Uma esfera, de peso $P = 10\sqrt{3}$ N e raio *R*, está suspensa por meio de um fio inextensível, de comprimento $\ell = R$, e apóia-se em uma parede vertical sem atrito. Determine a força de tração no fio e a força que a parede aplica na esfera.

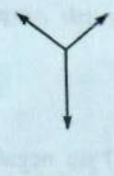


36. (CESGRANRIO-RJ) Na figura, uma esfera encontra-se em equilíbrio, apoiada numa calha horizontal. Os atritos são desprezíveis. Assinale a opção que melhor representa as forças que atuam sobre a esfera.



a) 

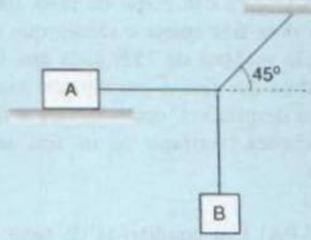
b) 

c) 

d) 

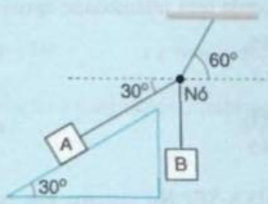
e) 

37. (FATEC-SP) O esquema representa um sistema em equilíbrio, sendo os fios ideais. As massas de A e B são, respectivamente, iguais a 200 kg e 100 kg. O coeficiente de atrito estático entre A e a superfície é:



a) não inferior a 0,50.
b) igual a 0,50.
c) menor ou igual a 0,50.
d) igual a 0,67.
e) nenhuma das anteriores.

38. (Mackenzie-SP) Considere o sistema em equilíbrio indicado na figura. Os pesos dos corpos A e B são, respectivamente, 20 N e 10 N. Os fios são ideais e o coeficiente de atrito estático entre o corpo A e o plano inclinado vale 0,5. A força de atrito no corpo A tem intensidade:



a) 0 N
b) 5 N
c) $5\sqrt{3}$ N
d) 10 N
e) 20 N

3. MOMENTO DE UMA FORÇA

Quando um corpo extenso está sujeito à ação de forças, ele pode adquirir movimento de translação ou de rotação. Por isso, as condições de equilíbrio devem referir-se aos dois movimentos. No entanto, para estabelecer tais condições, precisamos definir uma nova grandeza: o *momento* de uma força em relação a um ponto, também chamado *torque* dessa força em relação ao ponto.

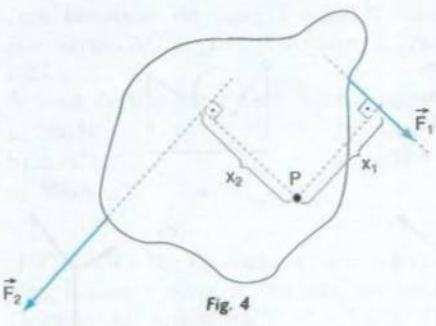


Fig. 4

Consideremos o corpo da Fig. 4 sujeito à ação de duas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$. Seja P um ponto arbitrariamente escolhido que chamaremos de *pólo*. A linha de ação de $\vec{F}_1$ está à distância x_1 do pólo e a linha de ação de $\vec{F}_2$ à distância x_2. Definem-se os momentos M_1 e M_2 das forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, respectivamente, em relação ao pólo P pelas equações:

$$M_1 = +F_1 \cdot x_1 \qquad M_2 = -F_2 \cdot x_2$$

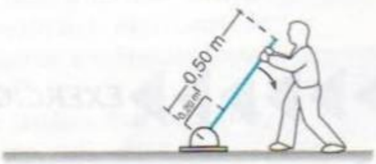
O sinal positivo (+) ou negativo (−) é adotado conforme o sentido da rotação que a força tende a produzir no corpo em torno do pólo P. Convencionalmente, o sentido anti-horário é considerado positivo.

As distâncias x_1 e x_2 das linhas de ação das forças ao pólo adotado constituem os braços de alavanca das forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$.

No Sistema Internacional (SI), a unidade de momento é o *newton metro* (símbolo: N · m), que, embora dimensionalmente corresponda à unidade de trabalho e de energia, *não pode ser denominada joule*.

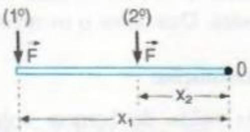
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

39. Ao girar uma barra, como mostra a figura, um homem aplica uma força de intensidade 2,0 N a 0,50 m do ponto de rotação, numa primeira situação e a 0,20 m do mesmo eixo numa segunda oportunidade. Determine o momento da força em relação ao ponto de rotação nos dois casos.



Resolução:

São dados: a intensidade da força (F = 2,0 N) e o braço de alavanca da força em relação a *O* ($x_1 = 0,50\,m$; $x_2 = 0,20\,m$).
Da definição de momento:

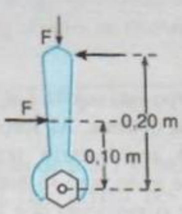


$M_1 = F \cdot x_1$ $\quad M_1 = 2,0 \cdot 0,50 \quad$ $\boxed{M_1 = 1,0\,N \cdot m}$

$M_2 = F \cdot x_2$ $\quad M_2 = 2,0 \cdot 0,20 \quad$ $\boxed{M_2 = 0,40\,N \cdot m}$

Nota-se que, embora nas duas oportunidades a força tenha sido a mesma, no primeiro instante o momento foi maior que no segundo. No primeiro caso, é mais fácil fazer mover a barra do que no segundo. Assim, pode-se considerar o momento uma medida da eficiência de uma força em produzir a rotação de um corpo.

40. Em experimentos sucessivos, uma mesma força $\vec{F}$ de intensidade F = 5,0 N é aplicada em pontos diferentes e em direções diferentes numa chave de rosca, para a extração de uma rosca. Determine o momento da força em relação ao eixo de rotação (centro da rosca) nos três casos indicados na figura.



12

4. BINÁRIO

Binário ou conjugado é um sistema constituído por duas forças de intensidades iguais, de mesma direção e de sentidos opostos, mas cujas linhas de ação estão separadas por uma distância *x* não nula, denominada braço do binário (Fig. 5).

Denomina-se momento do binário a soma algébrica dos momentos das forças constituintes, sendo obtido sempre, qualquer que seja o pólo adotado, pela fórmula:

$$\boxed{M = \pm F \cdot x}$$

O sinal é positivo quando o binário tende a produzir rotação no sentido anti-horário e negativo quando o binário tende a produzir rotação no sentido horário.

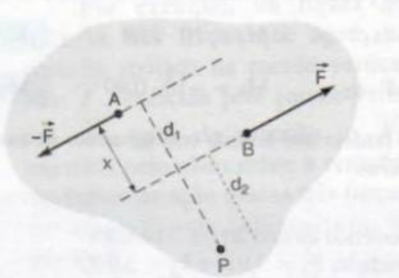


Fig. 5 O momento do binário não depende do pólo escolhido.

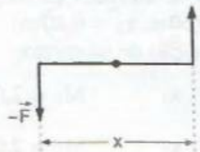
Como a resultante do binário é nula (forças de mesma intensidade, mesma direção e sentidos opostos), um corpo rígido, inicialmente em repouso, não sofrerá translação quando submetido à ação de um binário, mas apenas movimento de rotação não uniforme.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

41. Ao extrair uma porca que prende a roda de um carro, um homem aplica forças de intensidade 4,0 N com as duas mãos numa chave de roda, mantendo as mãos a 50 cm uma da outra. Determine o momento do binário aplicado pelo homem.

Resolução:

As mãos do homem aplicam forças de mesma intensidade (F = 4,0 N) às extremidades da chave, sendo o braço do binário x = 50 cm = 0,50 m. O momento do binário aplicado vale:

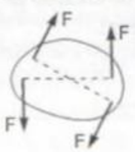


$M = F \cdot x$ $\quad M = 4{,}0 \cdot 0{,}50$ $\quad \boxed{M = 2{,}0\,N \cdot m}$

12

42. Ao girar no sentido anti-horário o volante de raio 15 cm do seu carro, um motorista aplica em pontos diametralmente opostos do volante forças de intensidade 6,0 N. Determine o momento do binário aplicado ao volante pelo motorista.

43. Um corpo está sujeito à ação simultânea de dois binários, que tendem a produzir rotação em sentidos opostos. As forças de ambos os binários têm intensidade 10 N, mas o braço do binário anti-horário tem comprimento 50 cm e o do binário horário, 40 cm. Determine o momento dos dois binários e o sentido em que o corpo deverá girar.



Resolução:

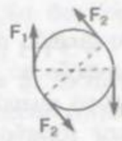
Os dois binários têm forças de intensidade F = 10 N e braços x_1 = 50 cm = 0,50 m (o anti-horário) e x_2 = 40 cm = 0,40 m (o horário). Por convenção, o binário anti-horário tem momento positivo e o binário horário momento negativo:

$M_1 = F \cdot x_1$ $\quad M_1 = 10 \cdot 0{,}50$ $\quad \boxed{M_1 = 5{,}0\,N \cdot m}$

$M_2 = -F \cdot x_2$ $\quad M_2 = -10 \cdot 0{,}40$ $\quad \boxed{M_2 = -4{,}0\,N \cdot m}$

Como o binário anti-horário tem momento de maior módulo, o corpo vai girar no *sentido anti-horário*.

44. Num corpo esférico de raio 20 cm, atuam forças de intensidades F_1 = 3,0 N e F_2 = 5,0 N, de modo a constituírem dois binários. Determine o momento de cada um desses binários e o sentido em que deverá girar o corpo.



5. EQUILÍBRIO DO CORPO EXTENSO

Para que um corpo extenso esteja em equilíbrio, não é suficiente que a resultante das forças que sobre ele agem seja nula, uma vez que um binário (cuja resultante é nula) pode produzir movimento de rotação não uniforme.

Assim, um corpo extenso está em equilíbrio, em relação a um dado referencial, quando estiver em repouso (equilíbrio estático) ou realizando movimento de translação uniforme ou de rotação uniforme ou, ainda, ambos combinados (equilíbrio dinâmico).

Dessa maneira, o equilíbrio de um corpo extenso implica duas condições, sendo cada uma necessária individualmente e, no conjunto, suficientes:

1ª) A soma de todas as forças atuantes no corpo deve ser nula, isto é, deve ser nula a resultante das forças que agem no corpo:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... = \vec{0}$$

2ª) A soma algébrica dos momentos das forças que agem sobre o corpo deve ser nula, em relação a qualquer ponto:

$$M_1 + M_2 + M_3 + ... = 0$$

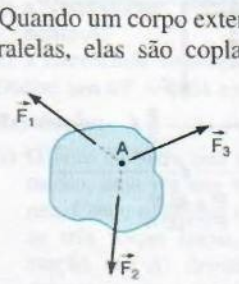
Observe que a primeira condição é análoga à estabelecida para o ponto material, permitindo obterem-se duas equações escalares pela aplicação do método das projeções:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + ... = 0 \qquad R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + ... = 0$$

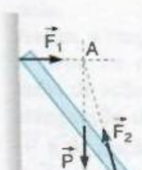
A segunda condição permite obter uma terceira equação.

TEOREMA DAS TRÊS FORÇAS

"Quando um corpo extenso está em equilíbrio sob a ação de três forças não paralelas, elas são coplanares e suas linhas de ação concorrem necessariamente num mesmo ponto."



A figura mostra a situação de um corpo em equilíbrio sob a ação das forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$, que são coplanares e cujas linhas de ação concorrem no ponto *A*.

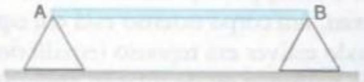


Por exemplo, na figura ao lado, as três forças que agem na prancha apoiada na parede vertical são: $\vec{F}_1$, exercida pela parede vertical, $\vec{P}$, peso da prancha, e $\vec{F}_2$, exercida pelo chão sobre a prancha. As linhas de ação dessas três forças, necessariamente, concorrem no ponto *A*.

Observe que, se soubermos quais as direções de duas das forças atuantes, esse teorema nos permite determinar a direção da terceira.

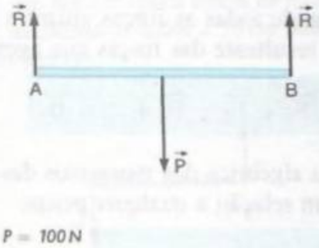
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

45 A figura representa uma prancha homogênea de madeira, cujo peso é 100 N, apoiada sobre dois suportes, *A* e *B*. Determine a intensidade das reações nos pontos de apoio.



Resolução:

Como a prancha é homogênea, seu peso está aplicado no ponto médio (centro de massa). Por simetria, as reações nos dois apoios devem ser iguais ($\vec{R}$) e, tendo em vista o equilíbrio de translação:



$R + R = P$

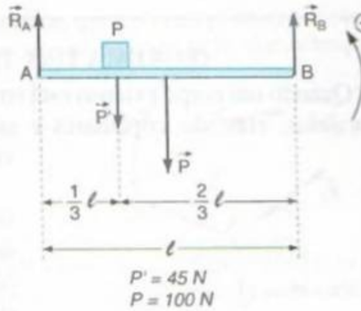
$2R = P \qquad R = \frac{P}{2} = \frac{100}{2} \qquad \boxed{R = 50\,N}$

46 Consideremos que sobre a prancha do exercício anterior seja colocado um corpo *P* de dimensões desprezíveis e peso 45 N, de modo que sua distância à extremidade *B* seja o dobro da sua distância à extremidade *A*. Determine a intensidade das reações nos pontos de apoio.

Resolução:

Nesse caso, as reações nos apoios $\vec{R}_A$ e $\vec{R}_B$ não serão iguais. Como temos duas incógnitas, devemos obter duas equações.

Primeiramente, vamos escolher o ponto *A* como pólo e estabelecer a nulidade da soma dos momentos em relação a esse ponto:



$M_{R_A} + M_{P'} + M_P + M_{R_B} = 0$

O momento M_{R_A} é nulo. Sendo ℓ o comprimento da prancha, o braço de alavanca da força $\vec{P'}$ é $\frac{1}{3}\ell$ (pois $\overline{PB} = 2\overline{AB}$ e $\overline{PB} + \overline{AB} = \ell$).

Assim: $M_{R_A} = 0$

$$M_{P'} = -P' \cdot \frac{1}{3}\ell = -45 \cdot \frac{1}{3}\ell = -15\ell$$

$$M_P = -P \cdot \frac{\ell}{2} = -100 \cdot \frac{\ell}{2} = -50\ell$$

$$M_{R_B} = R_B \ell$$

12

Substituindo:

$0 - 15\ell - 50\ell + R_B\ell = 0$

$R_B\ell = 15\ell + 50\ell$ $\quad\boxed{R_B = 65\,N}$

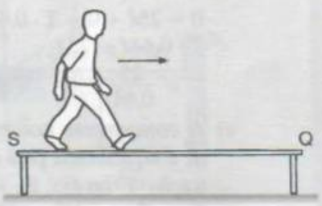
Para calcular a intensidade da reação em A ($\vec{R}_A$), apliquemos o equilíbrio de translação (resultante nula):

$R_A + R_B = P + P'$

$R_A + 65 = 100 + 45$

$R_A = 145 - 65$ $\quad\boxed{R_A = 80\,N}$

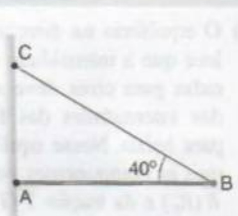
47. Uma pessoa de massa 60 kg caminha sobre uma prancha homogênea de madeira de comprimento 6,0 m e massa 200 kg, simplesmente apoiada em seus extremos, como indica a figura. Determine a intensidade da reação nos pontos de apoio:



a) quando a pessoa está no ponto médio da prancha;
b) quando a pessoa está a 2,0 m da extremidade Q;
c) quando a pessoa está exatamente sobre a extremidade Q.

Adote $g = 10\,m/s^2$

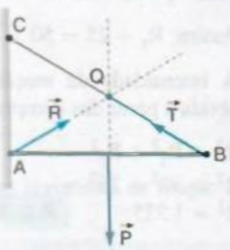
48. Uma barra homogênea AB de peso 50 N é mantida em equilíbrio na horizontal pelo fio ideal BC. Determine:



a) a direção e o sentido da reação no ponto de articulação A;
b) a intensidade da tração no fio BC;
c) a componente horizontal da reação no ponto A;
d) a componente vertical da reação no ponto A;
e) a intensidade da reação no ponto A.

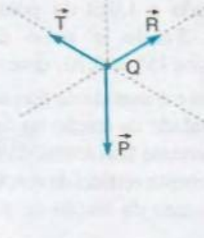
Dados: $sen\,40^\circ = 0,64$ e $\cos 40^\circ = 0,77$.

Resolução:



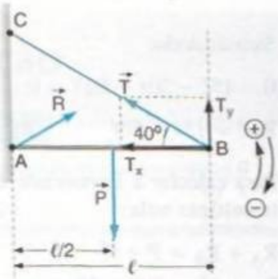
a) O peso da barra está aplicado no ponto médio, uma vez que a barra é homogênea. Como o sistema está em equilíbrio, as três forças (peso, tração no fio e reação em A) devem concorrer num mesmo ponto e a resultante deve ser nula.

Assim, a reação no ponto de articulação A deve ter origem nesse ponto e sua linha de ação deve passar pelo ponto Q, intersecção das linhas de ação do peso $\vec{P}$ e da tração $\vec{T}$.



A figura indica as forças transmitidas ao ponto Q e mostra a direção e o sentido que deve ter a reação $\vec{R}$ no ponto de articulação A.

b) Para a determinação da tração $\vec{T}$ no fio, projetemos essa força nas direções vertical e horizontal. Vamos escolher o ponto *A* como pólo e aplicar a nulidade da soma dos momentos em relação a esse ponto.



$M_R + M_P + M_{T_x} + M_{T_y} = 0$

Calculemos cada momento, com o respectivo sinal:

$M_R = 0$ (o ponto de aplicação de $\vec{R}$ é o pólo)

$M_P = -P \cdot \frac{\ell}{2} = -50 \cdot \frac{\ell}{2} = -25 \cdot \ell$ (ℓ = comprimento da barra)

$M_{T_x} = 0$ (a linha de ação de T_x passa pelo pólo *A*)

$M_{T_y} = T_y \cdot \ell = T \cdot \text{sen}\,40° \cdot \ell = T \cdot 0{,}64 \cdot \ell$

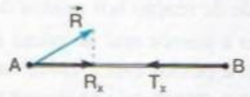
Assim:

$0 - 25\ell + 0 + T \cdot 0{,}64\ell = 0$

$T \cdot 0{,}64\ell = 25\ell$

$T = \frac{25}{0{,}64}$ $\boxed{T \cong 39\,N}$

c) A componente horizontal R_x da reação $\vec{R}$ é equilibrada pela componente T_x da tração $\vec{T}$ no fio: $R_x = T_x$.

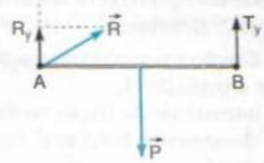


$T_x = T \cdot \cos 40° = 39 \cdot 0{,}77$

$T_x \cong 30\,N$

Portanto: $\boxed{R_x \cong 30\,N}$

d) O equilíbrio na direção vertical estabelece que a intensidade das forças orientadas para cima deve ser igual à soma das intensidades das forças orientadas para baixo. Nesse equilíbrio, consideramos as componentes verticais da reação $\vec{R}\,(R_y)$ e da tração $\vec{T}\,(T_y)$:



$$R_y + T_y = P$$

Mas $T_y = T \cdot \text{sen}\,40° = 39 \cdot 0{,}64 \cong 25\,N$

Assim: $R_y + 25 = 50$ $\boxed{R_y = 25\,N}$

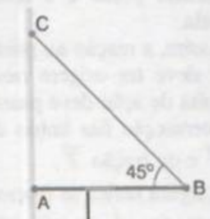
e) A intensidade da reação $\vec{R}$ pode ser obtida a partir das componentes R_x e R_y:

$R^2 = R_x^2 + R_y^2$

$R^2 = 30^2 + 25^2$

$R^2 = 1\,525$ $\boxed{R \cong 39\,N}$

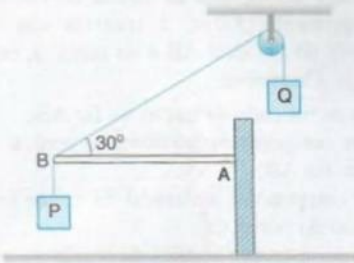
49. A barra AB da figura, articulada no ponto *A*, não é homogênea, estando o seu peso $\vec{P}$ aplicado num ponto situado a 1,0 m do ponto *A* e a 2,0 m do ponto *B*. Sendo o peso da barra 60 N e $\text{sen}\,45° = \cos 45° = 0{,}70$, determine:



a) a direção e o sentido da reação no ponto *A*;
b) a intensidade da tração no fio BC;
c) a componente horizontal da reação no ponto *A*;
d) a componente vertical da reação no ponto *A*;
e) a intensidade da reação no ponto *A*.

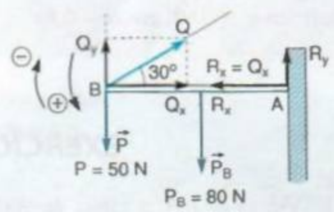
50 O sistema da figura está em equilíbrio. A barra AB é homogênea, está articulada em A e pesa 80 N. O corpo P pesa 50 N. Determine o peso do corpo Q e as componentes horizontal e vertical da reação na articulação A.

Dados: $\text{sen } 30° = 0{,}50$ e $\cos 30° = 0{,}87$.



Resolução:

A figura representa as forças atuantes na barra. Observa-se que a tração no fio inclinado é igual ao peso do corpo Q e a reação em A está representada por suas componentes R_x e R_y.



Escolhendo o pólo no ponto A, adotando a convenção de sinais indicada no esquema e chamando de ℓ o comprimento da barra, os momentos valem:

$M_{Q_y} = -Q_y \cdot \ell = -Q \cdot \text{sen } 30° \cdot \ell = -Q \cdot 0{,}50 \cdot \ell$

$M_{Q_x} = 0$ (a linha de ação de Q_x passa pelo pólo A)

$M_P = P \cdot \ell = 50 \cdot \ell$

$M_{P_B} = P_B \cdot \dfrac{\ell}{2} = 80 \cdot \dfrac{\ell}{2} = 40\ell$

$M_{R_x} = M_{R_y} = 0$ (ponto de aplicação no pólo A)

Tendo em vista a nulidade da soma dos momentos:

$M_{Q_y} + M_{Q_x} + M_P + M_{P_B} + M_{R_x} + M_{R_y} = 0$

$-Q \cdot 0{,}50\ell + 0 + 50\ell + 40\ell + 0 + 0 = 0$

$Q \cdot 0{,}50\ell = 90\ell$

$Q = \dfrac{90}{0{,}50}$ $\boxed{Q = 180\,\text{N}}$

O equilíbrio na direção horizontal exige que a componente horizontal da reação R_x tenha módulo igual à componente horizontal de $Q(Q_x)$:

$R_x = Q_x$

Mas $Q_x = Q \cdot \cos 30° = 180 \cdot 0{,}87$ $\boxed{Q_x = 156{,}6\,\text{N}}$

Portanto: $R_x = 156{,}6\,\text{N}$

Na direção vertical, a resultante deve ser nula, isto é:

$Q_y + R_y = P + P_B$

Como $Q_y = Q \cdot \text{sen } 30° = 180 \cdot 0{,}50 = 90\,\text{N}$, vem:

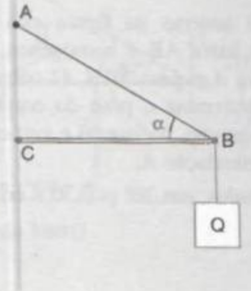
$90 + R_y = 50 + 80$ $R_y = 130 - 90$ $\boxed{R_y = 40\,\text{N}}$

12

51. A barra homogênea da figura, de massa 20 kg e comprimento 5,0 m, é mantida em equilíbrio através do fio ideal AB e da carga Q, cujo peso é 140 N. Determine:

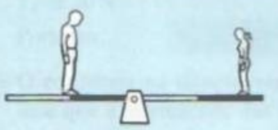
a) a intensidade da tração no fio AB;
b) as componentes horizontal e vertical da tração no fio AB;
c) a componente horizontal da reação na articulação do ponto C;
d) a componente vertical da reação na articulação do ponto C.

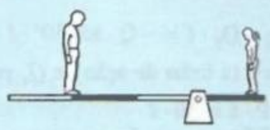
Adote $g = 10\ m/s^2$
Dados: $\text{sen}\,\alpha = 0{,}60$; $\cos\alpha = 0{,}80$

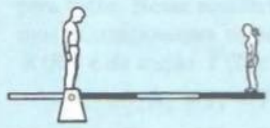


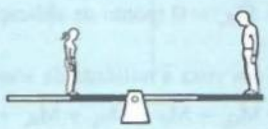
EXERCÍCIOS DE REFORÇO

52. (U. F. Viçosa-MG) Um rapaz de 900 N e uma garota de 450 N estão em uma gangorra. Das ilustrações abaixo, a que representa uma situação de equilíbrio é:

a)


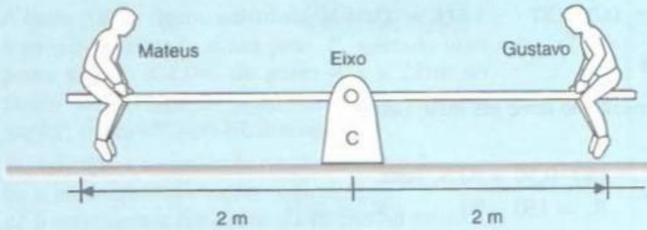
d)


b)


e)


c)

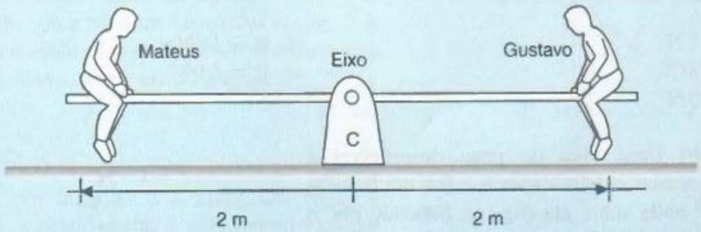

53. (UF-GO) Dois garotos montam numa gangorra, constituída por uma tábua de massa desprezível, apoiada sobre um suporte C. A posição indicada na figura é de equilíbrio.



Se o garoto que está em A tem massa de 30 kg, a massa do outro garoto é:

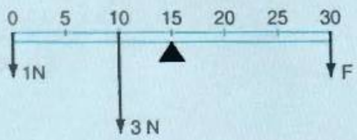
a) 30 kg b) 25 kg c) 20 kg d) 15 kg e) 10 kg

54. (UNAMA-AM) Mateus, de 40 kg, e Gustavo, de 30 kg, estão brincando numa gangorra. Suas posições iniciais distam 2 m do eixo, conforme a figura abaixo. Em qual das situações a gangorra estaria equilibrada?
(considere $g = 10\,m/s^2$)



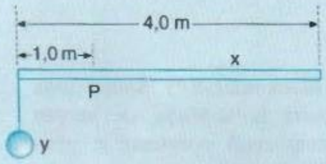
a) Se Mateus se posicionasse a 1,5 m do eixo.
b) Se Mateus se posicionasse a 0,5 m do eixo.
c) Se Gustavo se posicionasse a 1,5 m do eixo.
d) Se Mateus e Gustavo não se movessem das posições iniciais.
e) Se Mateus e Gustavo se posicionassem a 0,5 m do centro.

55. (UF-RS) A figura mostra uma régua homogênea em equilíbrio estático, sob a ação de várias forças. Quanto vale a intensidade de *F*, em *N*?



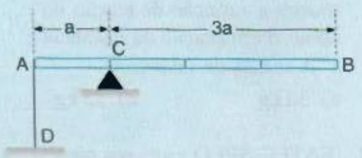
a) 1
b) 2
c) 2,5
d) 3
e) 5

56. (FCMSC-SP) Na figura ao lado está representado um sistema mecânico em equilíbrio estático. *X* é uma barra rígida, cilíndrica e homogênea; *P* é um apoio fixo; *Y* é uma esfera de massa igual a 2,0 kg, pendurada na barra por um fio de massa desprezível. Qual é, em quilogramas, a massa da barra?



a) 1,0
b) 2,0
c) 3,0
d) 4,0
e) 5,0

57. (FATEC-SP) Uma barra prismática e homogênea AB tem peso *P*. Ela apóia-se em um cutelo em *C* e é mantida em equilíbrio na horizontal graças ao fio AD. A força de tração no fio tem intensidade:

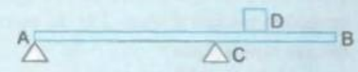


a) 3P
b) 2P
c) P
d) $\frac{P}{2}$
e) $\frac{P}{3}$

58. (UC-BA) Um homem e um rapaz transportam uma carga de 100 kg, usando para isso uma vara rígida de 3 m de comprimento. Cada um deles sustenta uma das extremidades da vara, que se mantém em posição horizontal durante o movimento. Se nesse transporte o homem sustenta um peso três vezes maior do que o sustentado pelo rapaz, a quantos centímetros do homem a carga deve estar pendurada?
(Observação: despreze o peso da vara.)

a) 33
b) 75
c) 100
d) 150
e) 225

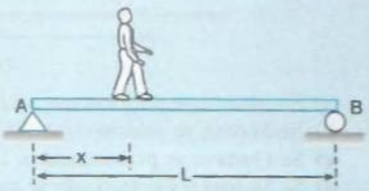
59. (ITA-SP) A barra AB é uniforme, pesa 50 N e tem 10 m de comprimento. O bloco *D* pesa 30 N e dista 8,0 m de *A*. A distância entre os pontos de apoio da barra é AC = 7,0 m. Calcular a reação na extremidade *A*.

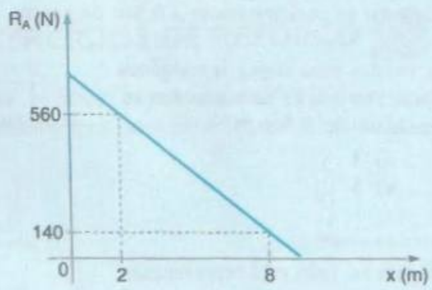


a) R = 14 N
b) R = 7,0 N
c) R = 20 N
d) R = 10 N
e) R = 8,0 N

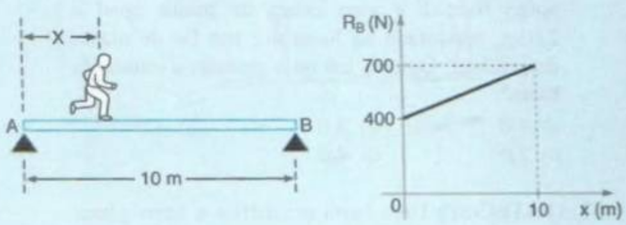
60. (FAAP-SP) Uma viga de peso desprezível é apoiada por suas extremidades *A* e *B* e um homem de peso *P* anda sobre ela (fig. a). Sabendo que a reação R_A do apoio *A* é dada pelo gráfico da fig. b, onde *x* é a distância de *A* ao homem, calcule:

a) o peso *P* do homem;
b) o comprimento *L* da viga.





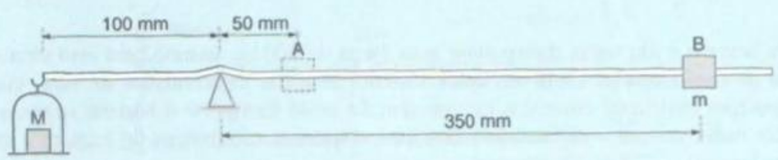
61. (Mackenzie-SP) Sobre uma barra homogênea, de secção transversal constante e peso 800 N, uma criança caminha de *A* para *B*. A barra tem 10 m de comprimento e está apoiada em *A* e *B*. O gráfico ao lado mostra a variação da reação no apoio *B* em função da distância *x*. A massa da criança é:



Adote $g = 10\ m/s^2$

a) 30 kg b) 35 kg c) 40 kg d) 45 kg e) 50 kg

62. (FATEC-SP) O esquema representa uma balança romana. Em vazio, cursor em *A*, ela se equilibra na horizontal. A massa do cursor é m = 100 g. Com massa adicional *M* no prato, a balança se equilibra com cursor levado a *B*.

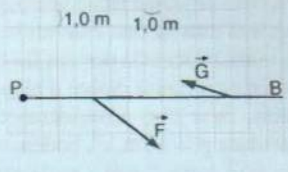


A massa *M* da carga é:

a) 350 g b) 300 g c) 100 g d) 400 g e) 200 g

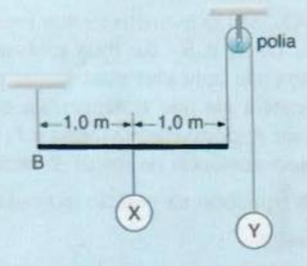
12

63. (FCMSC-SP) Na figura está representada uma barra PB rígida, de massa desprezível e livre para girar em torno do ponto P fixo. No instante em que a situação é a representada na figura, a barra está em equilíbrio sob a ação exclusiva das forças $\vec{F}$ e $\vec{G}$, além da exercida em P. O módulo da força que é exercida sobre a barra, em P, é igual a:



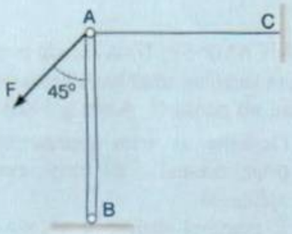
a) $\sqrt{7}$ N b) $\sqrt{5}$ N c) 3,0 N d) 2,0 N e) 1,0 N

64. (FCMSC-SP) O sistema representado na figura é constituído por uma barra B cilíndrica, rígida e homogênea, e pelas esferas X e Y, interligadas por fios inextensíveis e de massas desprezíveis. P_b, P_x e P_y são, respectivamente, os pesos dos corpos do sistema, que está em equilíbrio. Quaisquer que sejam P_b, P_x e P_y, sempre vale a relação:



a) $P_b + P_x = 2P_y$
b) $P_b + P_y = 2P_x$
c) $P_x + P_y = 2P_b$
d) $P_b + P_x = P_y$
e) $P_x + P_y = P_b$

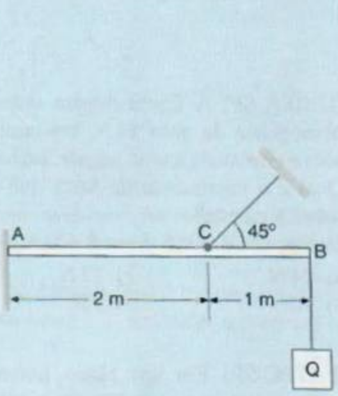
65. (FATEC-SP) O esquema anexo representa um sistema plano em equilíbrio. Dá-se $F = 2{,}8$ N. No nó A, a barra AB exerce força $\vec{F}_{AB}$ e o fio AC exerce força $\vec{F}_{AC}$.



	$\vec{F}_{AC}$ (N)	$\vec{F}_{AB}$ (N)
a)	2,0 ←	2,0 ↑
b)	2,0 →	2,0 ↑
c)	2,0 →	2,0 ↓
d)	2,0 ←	2,0 ↓

e) nenhuma das anteriores.

66. (UF-PA) É dada uma barra $\overline{AB}$ prismática e homogênea de peso desprezível, articulada em A e sustentada no ponto C por um fio leve (ver figura). Na extremidade livre da barra está preso um corpo de peso Q. A reação horizontal (R_H) e a reação vertical (R_V) exercida no ponto de articulação da barra estão na proporção de:

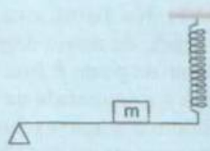


a) $\frac{R_H}{R_V} = \frac{1}{4}$ c) $\frac{R_H}{R_V} = \frac{1}{1}$ e) $\frac{R_H}{R_V} = \frac{3}{1}$

b) $\frac{R_H}{R_V} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{R_H}{R_V} = \frac{2}{1}$

12

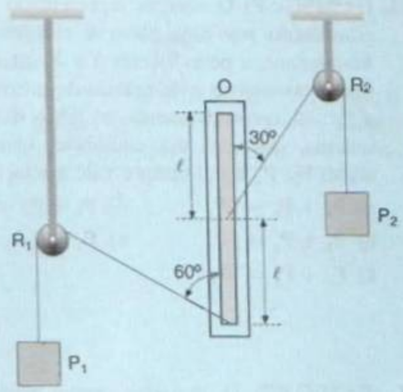
67. (FATEC-SP) Uma tábua homogênea e uniforme de 3 kg tem uma de suas extremidades sobre um apoio e a outra sustentada por um fio ligado a uma mola, conforme a figura. Sobre a tábua encontra-se uma massa, $m = 2\,kg$. Considerando a aceleração da gravidade $g = 10\,m/s^2$, podemos afirmar que, com relação à força F que a mola exerce:



a) $F = 50\,N$ b) $F = 25\,N$ c) $F > 25\,N$ d) $F < 25\,N$ e) $F \to \infty$

68. (PUC-SP) O esquema mostra uma barra articulada em O. R_1 e R_2 são duas roldanas fixas. Sobre a barra são aplicadas duas forças por meio de fios presos a ela que sustentam na outra extremidade pesos respectivamente iguais a P_1 e P_2. Admitindo a não-existência de forças de atrito, o sistema fica em equilíbrio na posição indicada, quando $\frac{P_1}{P_2}$ for igual a:

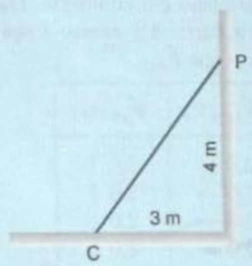
a) 2
b) $\sqrt{3}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{6}$



12

69. (UNICAMP-SP) Uma escada homogênea de 40 kg apóia-se sobre uma parede, no ponto P, e sobre o chão, no ponto C. Adote $g = 10\,m/s^2$.

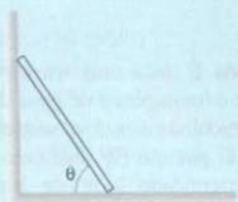
a) Desenhe as setas representativas das forças peso, normal e de atrito em seus pontos de aplicação.
b) É possível manter a escada estacionária não havendo atrito em P? Neste caso, quais os valores das forças normal e de atrito em C?



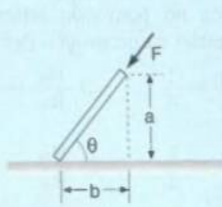
70. (UNISA-SP) A figura mostra uma barra rígida e homogênea de peso 24 N, em equilíbrio, sobre o solo e encostada a uma parede. Só há atrito no solo. Qual é a intensidade da força que a barra exerce sobre a parede?

Dados: $\cos\theta = 0{,}6$ e $\operatorname{sen}\theta = 0{,}8$.

a) 24 N
b) 16 N
c) 12 N
d) 9 N
e) nula



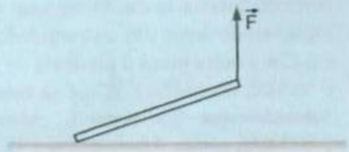
71. (FATEC-SP) Em um plano horizontal apóia-se verticalmente uma bengala em equilíbrio. Comprime-se a bengala axialmente com força F e inclina-se a bengala mais e mais, lentamente. O peso da bengala é desprezível em face de F. A bengala fica na iminência de deslizar quando seu ângulo com o piso é θ.



Nesse estado:

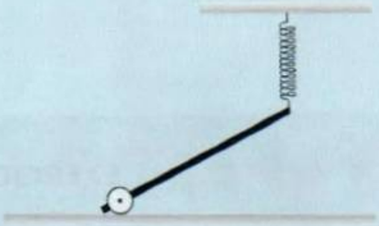
a) a reação normal do peso é $N = F \cdot \cos\theta$.
b) a reação tangencial do piso é $F_{at} = F \cdot \text{sen}\,\theta$.
c) quanto mais intensa for F, maior é θ na iminência do destaque.
d) o coeficiente de atrito estático é $\mu_0 = \text{cotg}\,\theta$.

72. (UF-ES) Um poste de concreto, cilíndrico e homogêneo, tem peso P. A intensidade da força vertical necessária para sustentá-lo por uma de suas extremidades, enquanto a outra se mantém apoiada no solo, é:



a) menor que $P/2$
b) igual a $P/2$
c) igual a P
d) igual a 2P
e) maior que 2P

73. (FUVEST-SP) Uma barra rígida e homogênea de 2 kg está ligada, numa das extremidades, a um suporte, através de uma mola de constante elástica $k = 200\,N/m$. Na outra extremidade, articula-se a um rolete que pode girar livremente. Nesta situação, a mola está deformada de 5 cm.



a) Indique as forças externas que atuam sobre a barra.
b) Qual é a intensidade da força que a superfície exerce sobre o rolete?

74. (Mackenzie-SP) Uma pessoa de peso P sobe uma prancha homogênea AB, articulada em A e presa em B por uma corda ideal BC. A prancha tem peso Q e comprimento L. A tração T na corda, em função da distância x, é:

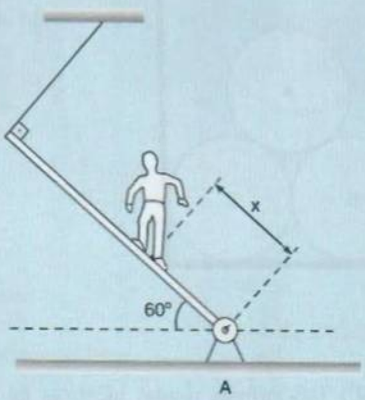
a) $T = 2PL + 4Qx$

b) $T = \dfrac{\left(P \cdot \dfrac{L}{x} + Q\right)}{4}$

c) $T = \dfrac{\left(P \cdot \dfrac{L}{x} + Q\right)}{2}$

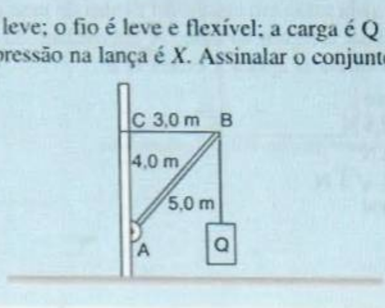
d) $T = 4\left(Q \cdot \dfrac{x}{L} + P\right)$

e) $T = \dfrac{\left(2 \cdot P \cdot \dfrac{x}{L} + Q\right)}{4}$

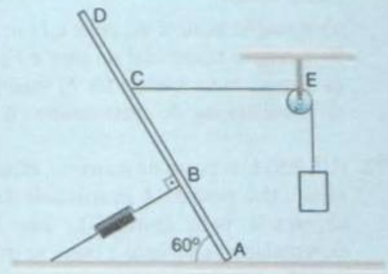


75. (FATEC-SP) No sistema figurado, a lança AB é leve; o fio é leve e flexível; a carga é $Q = 200\,N$. A força de tração no fio CB é T, a força de compressão na lança é X. Assinalar o conjunto correto.

	T(N)	X(N)
a)	150	150
b)	150	200
c)	200	250
d)	250	250
e)	150	250



76. (FAAP-SP) O sistema esquematizado está no plano vertical e em equilíbrio na posição indicada. A barra AD é homogênea e uniforme e o seu extremo *A* está apoiado no plano horizontal liso. A mola presa ao ponto *B* da barra está disposta de modo que o seu eixo se mantém na direção da perpendicular à barra. O fio que passa pela polia ideal, tendo uma das extremidades presa à barra em *C* e a outra presa à partícula de peso $200\sqrt{3}$ N, é ideal e, no trecho CE, ele se mantém horizontal. Sabendo que a constante elástica da mola é 2 000 N/m e que AB = BC = CD, determine:

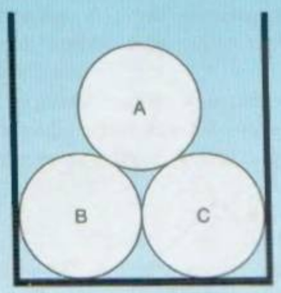


a) o comprimento correspondente ao alongamento da mola;
b) o peso da barra.

EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

12

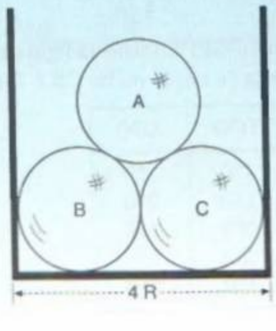
77. (FUVEST-SP) Três cilindros iguais, *A*, *B* e *C*, cada um com massa *M* e raio *R*, são mantidos empilhados, com seus eixos horizontais, por meio de muretas laterais verticais, como mostra a figura. Desprezando qualquer efeito de atrito, determine, em função de *M* e *g*:



a) o módulo da força $\vec{F}_{AB}$ que o cilindro *A* exerce sobre o cilindro *B*;
b) o módulo da força $\vec{F}_{PB}$ que o piso exerce sobre o cilindro *B*;
c) o módulo da força $\vec{F}_{MC}$ que a mureta exerce sobre o cilindro *C*.

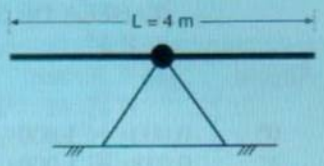
78. (Mackenzie-SP) Três esferas rígidas idênticas de 50 N cada estão em equilíbrio dentro de uma caixa, conforme a figura ao lado. A intensidade da força que a esfera *B* aplica à esfera *C* é:

a) zero
b) 12,5 N
c) 25 N
d) $25\sqrt{3}$ N
e) 50 N

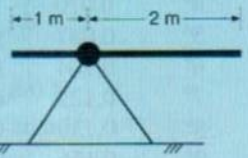


79. (FUVEST-SP) Uma gangorra consistia de uma tábua homogênea de madeira de massa $M = 40\,kg$ e comprimento $L = 4\,m$, fixada pelo meio em um eixo horizontal em torno do qual podia se mover livremente. A tábua quebrou e perdeu-se um pedaço de um metro de comprimento de uma de suas extremidades. O marceneiro chamado para consertá-la dispõe de uma tábua do mesmo tipo, mas com apenas dois metros de comprimento. Ele pretende pregá-la, sem serrá-la, com pregos de massa desprezível sobre a tábua quebrada, ao longo da mesma, de modo que a gangorra consertada possa ficar em equilíbrio na horizontal. O marceneiro não pretende serrar a tábua quebrada, nem tirá-la da sua posição. O comprimento da gangorra assim consertada será:

a) 3,00 m
b) 3,50 m
c) 3,75 m
d) 4,00 m
e) 4,25 m



gangorra antes de quebrar



gangorra quebrada

80. (F. M. ABC-SP) Na figura anexa, uma esfera *A*, de dimensões desprezíveis e peso *P*, está presa a um fio ideal, de comprimento *L*. A pequena esfera está em equilíbrio apoiada numa esfera maior de raio *R*. A distância entre o ponto *O* e o ponto *C* figurados é *a*. A tração no fio e a reação da esfera maior sobre a menor valem, respectivamente:

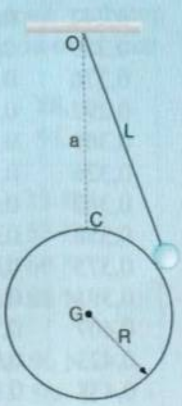
a) $T = \dfrac{a}{L+R} \cdot P$ e $N = \dfrac{R}{a+R} \cdot P$

b) $T = \dfrac{R}{L+R} \cdot P$ e $N = \dfrac{a}{2a+R} \cdot P$

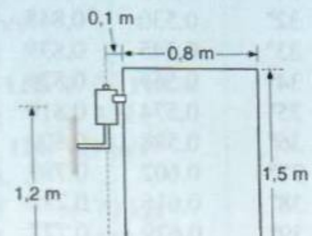
c) $T = \dfrac{L}{a+R} \cdot P$ e $N = \dfrac{R}{a+R} \cdot P$

d) $T = \dfrac{2R}{L+R} \cdot P$ e $N = \dfrac{2a}{R+a} \cdot P$

e) $T = \dfrac{R}{a+R} \cdot P$ e $N = \dfrac{L}{a+R} \cdot P$



81. (FEI-SP) Um portão homogêneo, de espessura constante e peso $P = 600\,N$, está montado conforme indica a figura, sendo desprezíveis os atritos em seus apoios.
Determinar a intensidade das reações nos apoios.



12

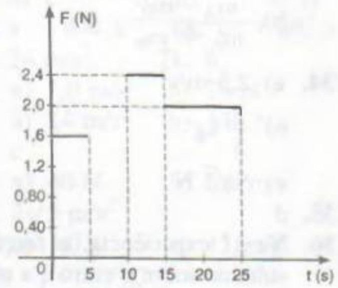
TABELA DE SENOS, COSSENOS E TANGENTES

Ângulo	sen	cos	tg	Ângulo	sen	cos	tg
0°	0,000	1,000	0,000	46°	0,719	0,695	1,036
1°	0,018	1,000	0,018	47°	0,731	0,682	1,072
2°	0,035	0,999	0,035	48°	0,743	0,669	1,111
3°	0,052	0,999	0,052	49°	0,755	0,656	1,150
4°	0,070	0,998	0,070	50°	0,766	0,643	1,192
5°	0,087	0,996	0,088	51°	0,777	0,629	1,235
6°	0,104	0,994	0,105	52°	0,788	0,616	1,280
7°	0,122	0,992	0,123	53°	0,799	0,602	1,327
8°	0,139	0,990	0,140	54°	0,809	0,588	1,376
9°	0,156	0,988	0,158	55°	0,819	0,574	1,428
10°	0,174	0,985	0,176	56°	0,829	0,559	1,483
11°	0,191	0,982	0,194	57°	0,839	0,545	1,540
12°	0,208	0,978	0,213	58°	0,848	0,530	1,600
13°	0,225	0,974	0,231	59°	0,857	0,515	1,664
14°	0,242	0,970	0,249	60°	0,866	0,500	1,732
15°	0,259	0,966	0,268	61°	0,875	0,485	1,804
16°	0,276	0,961	0,287	62°	0,883	0,470	1,881
17°	0,292	0,956	0,306	63°	0,891	0,454	1,963
18°	0,309	0,951	0,325	64°	0,899	0,438	2,050
19°	0,326	0,946	0,344	65°	0,906	0,423	2,144
20°	0,342	0,940	0,364	66°	0,914	0,407	2,246
21°	0,358	0,934	0,384	67°	0,920	0,391	2,356
22°	0,375	0,927	0,404	68°	0,927	0,375	2,475
23°	0,391	0,920	0,424	69°	0,934	0,358	2,605
24°	0,407	0,914	0,445	70°	0,940	0,342	2,748
25°	0,423	0,906	0,466	71°	0,946	0,326	2,904
26°	0,438	0,899	0,488	72°	0,951	0,309	3,078
27°	0,454	0,891	0,510	73°	0,956	0,292	3,271
28°	0,470	0,883	0,532	74°	0,961	0,276	3,487
29°	0,485	0,875	0,554	75°	0,966	0,259	3,732
30°	0,500	0,866	0,577	76°	0,970	0,242	4,011
31°	0,515	0,857	0,601	77°	0,974	0,225	4,33
32°	0,530	0,848	0,625	78°	0,978	0,208	4,70
33°	0,545	0,839	0,649	79°	0,982	0,191	5,14
34°	0,559	0,829	0,674	80°	0,985	0,174	5,67
35°	0,574	0,819	0,700	81°	0,988	0,156	6,31
36°	0,588	0,809	0,726	82°	0,990	0,139	7,16
37°	0,602	0,799	0,754	83°	0,992	0,122	8,14
38°	0,616	0,788	0,781	84°	0,994	0,104	9,51
39°	0,629	0,777	0,810	85°	0,996	0,087	11,4
40°	0,643	0,766	0,839	86°	0,998	0,070	14,3
41°	0,656	0,755	0,869	87°	0,999	0,052	19,1
42°	0,669	0,743	0,900	88°	0,999	0,035	28,6
43°	0,682	0,731	0,932	89°	1,000	0,018	57,3
44°	0,695	0,719	0,966	90°	1,000	0,000	
45°	0,707	0,707	1,000				

CAPÍTULO 1

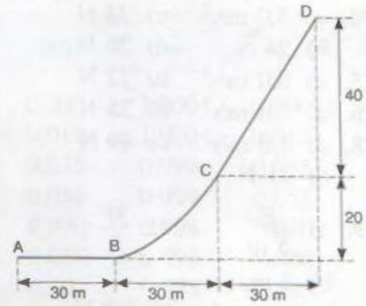
2. 14 N
3. 12 m/s²
5. a) 4,0 m/s²
b) 19 m/s
c) 69 m
7. a) 5,0 s b) 75 m
9. 4,0 m/s² **11.** 3,0 m/s²
12. 2,5 m/s² **15.** 3,5 m/s²
17. a) 10 m/s²
b) $\sim$ 5 m/s²
c) 25 m/s²
18. zero **20.** 90 N
22. 32 N **24.** 24 N
27. a **28.** a
29. e **30.** a
31. b **32.** 5,0 m/s²
33. 3,0 m/s²

34.



35. d **36.** b
37. 1,8 N **38.** a
39. b **40.** a
41. 30 N **42.** b
43. e **44.** d
45. 150 N **46.** $2\sqrt{3}$ m/s²
47. 20 N **48.** e
49. c **50.** c
51. a) V b) V c) F d) F
53. 48 N **55.** 3,0 m/s²
56. a) 60 N c) 35 N
b) 40 N d) 50 N
57. c **58.** a
59. d **60.** e
61. e **62.** d
63. e **64.** 16,0 m/s²
65. b **66.** b
68. a) 70 N b) 45 N
69. a) 60 N b) 80 N
71. a) 40 N b) 6,0 m/s²
72. a) 13 N b) 8,0 m/s²
74. a) 3,0 m/s² c) 24 N
b) 24 N d) 36 N
75. a) 6,0 m/s² b) 72 N
76. a) 2,0 m/s² b) 25 N
78. a) 7,0 m/s² c) 49 N
b) 21 N
79. a) $\frac{F}{5\,m}$ c) $\frac{3F}{5}$
b) 3 ma
81. a) 12 m/s² b) 8,0 N
82. a) 10 m/s² b) zero
83. a
84. As forças de ação e reação não atuam no mesmo corpo.
85. Não. Ao caminhar sobre o barco para alcançar a árvore, o pescador empurrará o barco para trás, afastando-o da margem.
86. e **87.** d **88.** c
89. b **90.** e **91.** a
92. d
94. a) 2,0 m/s² b) 12 N
95. a) 4,0 m/s² b) 52 N
96. a) 2,5 m/s² b) 60 N
97. a) 8,0 m/s² c) 88 N
b) 48 N
99. a) 2,0 m/s² b) 96 N
100. a) 800 N c) 560 N
b) 840 N
101. c **102.** b **103.** e
104. a) 0,5 m/h b) 0,03 N
105. c **106.** b **107.** a
108. 72 N; 48 N
109. a) 1,00 m/s²
b) 220 N
111. 24 N **112.** c **113.** c
114. a) 0,9 kg b) 3 N
115. d **116.** 4,9 m/s²
117. a **118.** c
119. a) 80 kgf b) 70 kgf
120. e **121.** d **122.** c
123. a **124.** d **125.** c
126. a) $1{,}0 \cdot 10^2$ m/s²
b) $5{,}0 \cdot 10^3$ N
127. c **128.** a **129.** c
130. d **131.** b **132.** b
133. c

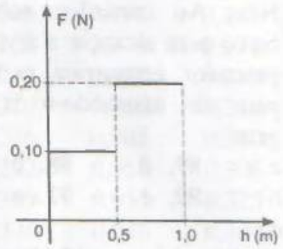
134. a)



b) 5,0 m/s

135. b

136.



CAPÍTULO 2

2. a) 500 N d) 300 N
b) 500 N e) 350 N
c) 600 N f) 800 N

3. 250 N

4. a) 2,0 m/s^2
b) É acelerado para cima ou retardado para baixo.

6. a) $7{,}0 \cdot 10^3$ N
b) $9{,}8 \cdot 10^2$ N

7. e **8.** b **9.** e

11. a) 2,0 m/s^2
b) 96 N
c) 192 N

12. a) zero
b) 60 N
c) 120 N

13. 25 N

15. a) 4,0 m/s^2
b) 48 N
c) $48\sqrt{2}$ N

16. a) 4,0 m/s^2 b) 6,0 kg

18. a) 3,0 m/s^2
b) 140 N
c) 104 N

19. 8,0 m/s^2

20. 2,0 m/s^2

21. a) 3,0 s b) 6,0 m/s

22. 4,0 s

23. 0,50 m/s^2

24. No mesmo nível.

25. a) 2,0 m/s^2
b) 72 N
c) 144 N

26. b **27.** c **28.** a **29.** b

30. a) $3{,}0 \cdot 10^2$ N
b) $4{,}0 \cdot 10^2$ N

31. d

32. a) 50 N b) 2,0 m/s^2

33. a) $\dfrac{m_B}{m_A + m_B} \cdot g$

b) $\dfrac{m_A \cdot m_B}{m_A + m_B} \cdot g$

34. a) 2,5 m/s^2
b) $\dfrac{2}{3}$ kg
c) $5\sqrt{2}$ N

35. d

36. Na 1ª experiência, a força resultante sobre o carro é a tração no fio cuja intensidade é menor que o peso.

37. b **38.** a **39.** e

40. a) $5{,}0 \cdot 10^3$ N
b) $6{,}05 \cdot 10^3$ N

42. 50 kg

44. a) 1,0 m/s^2
b) 2,0 m/s^2
c) 36 N

45. a) 12 m/s^2; 6,0 m/s^2
b) 24 N

46. a) 40 N
b) 20 N
c) 2,0 kg

47. a) $\dfrac{a_A}{a_B} = 4$
b) 8,0 m/s^2; 2,0 m
c) 6,0 N

48. a) 250 N b) 0,5 m

49. 2 **50.** a **51.** c

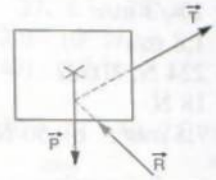
52. a) $F > 600$ N
b) Não com o indivíduo mantendo contato com o solo; seria possível se o indivíduo subisse pelo fio em movimento acelerado de aceleração $a > 2{,}0$ m/s^2.
53. 300 N
54. $F_x = 42$ N; $F_y = 56$ N
56. a) 140 N b) 4,0 m/s^2
57. a) 140 N b) 30 m/s^2
59. a) 80 N
b) $10\sqrt{3}$ m/s^2
60. a) 1,8 m/s^2
b) 224 N; 100 N
c) 18 N
62. a) 7,5 m/s^2 b) 50 N
63. 39°
65. a) I c) II e) III
b) I d) III f) II
66. a **67.** a **68.** c **69.** e
70. 24 m/s^2 **71.** b
72. a) 2,0 m/s^2 b) 78 N
73. a) 24 m/s^2 b) 130 N
74. c
76. a) 40 N b) 6,0 m/s^2
78. $2\sqrt{5}$ m/s^2
79. a) 3,0 s b) 12 m/s
80. $\frac{1}{\text{sen}\,\theta}\sqrt{\frac{2h}{g}}$
81. a) 3,0 m/s^2
b) 4,0 s
c) 24 m
83. a) 135 N c) 75 N
b) 15 N d) 75 N
85. a) 1,0 m/s^2
b) 36 N
c) $36\sqrt{3}$ N
86. a) $\frac{g(1 - \text{sen}\,\theta)}{2}$
b) $\frac{mg(1 + \text{sen}\,\theta)}{2}$
87. 6,0 kg
88. a) $g \cdot \text{sen}\,\theta$
b) zero
89. a) 2,4 m/s^2
b) 72 N
c) $\frac{72\sqrt{10}}{5}$
90. a) 1,7 m/s^2 b) 23,1 N
91. c **92.** c **93.** c
94. b **95.** e **96.** 6,0 s
97. a) 310 N b) 190 N
98. b **99.** d **100.** a
101. a) 2,0 m/s^2
b) 12 N
c) 32 N
102. c
103. zero
104. a) 2
b) $\frac{10}{3}$ m/s^2; $\frac{5}{3}$ m/s^2
105. a) Não. Sendo $T > P$, o elevador poderia estar subindo acelerado ou descendo retardado.
b) 1,96 m/s^2
106. a) $2{,}0 \cdot 10^{-4}$ N
b) 100
107. 1,2 cm^3
108. d **109.** d
110. a) 7,0 m/s^2
b) 21 N
c) 15 N
111. a) 6,5 m/s^2
b) 45,5 N
c) 19,5 N
113. 1 020 N; 180 N
115. a) 7,5 m/s^2
b) 300 N
c) 45 N
116. a) $a_C = \frac{a_A + a_B}{2}$
b) 4,0 m/s^2; 6,0 m/s^2; 5,0 m/s^2
c) 60 N
117. $\sim 2{,}3 \cdot 10^2$ N
118. a) $a_A = a_B =$ zero
b) $a_A =$ zero; $a_B = 5{,}0$ m/s^2
c) $a_A = 5$ m/s^2;
$a_B = 15$ m/s^2
119. a) 4,0 m/s^2
b) 100 N
c) 140 N; 460 N
120. a) 7,5 m/s^2
b) $\theta = \text{arc tg}\,\frac{3}{4} \cong 37°$
c) 25 N
121. a) 7,5 m/s^2; 150 N
b) 750 N

123. a) 3,75 m/s^2 b) 138 N
125. a) 24 m/s^2 b) 240 N
126. 40 m
127. a) 3,0 m/s^2 b) 45 N

CAPÍTULO 3

2. a) 30 N b) 50 N
3. 20 N
5. a) 4,0 m/s^2 b) 12 N
6. a) 8,0 m/s^2 b) 16 N
8. a) 2,0 m/s^2 b) 22 N
10. a) 4,0 m/s^2 b) 28 N
11. a) 5,0 m/s^2 c) 10 N
b) 30 N d) $10\sqrt{5}$ N
12. a) I c) II
b) III d) IV
13. c **14.** a **15.** d
16. 7,5 s **17.** d
19. a) 40 N c) 50 N
b) 30 N d) 5,0 m/s^2
20. 5,0 m/s^2 **21.** 0,50 m/s^2
22. a) $\mu_d \cdot g$ b) $\dfrac{v_0^2}{2\mu_d g}$
24. a) 12 N c) 6,0 m/s^2
b) 8,0 N d) 50 N
25. a) 1,0 m/s^2 b) 36 N
26. 2,5 N
27. a **28.** c **29.** d
30. a) Não. b) 26 m/s
31. c **32.** e **33.** b
34. a **35.** b **36.** d
37. 3 m/s^2 **38.** a
39. $P(\mu \cos \alpha - \text{sen}\, \alpha)$
40. C **42.** 90 N **44.** 30 N
45. a) 60 N; zero
b) 84 N; zero
c) 48 N; 3,5 m/s^2
46. a) zero; 15 N
b) 5,0 m/s^2; 10 N
c) 2,5 m/s^2; 10 N
48. a) $m_B \leqslant 6{,}0$ kg
b) $\mu_e \geqslant 0{,}40$
50. 40 N **51.** 2,0 m/s^2
52. 12 N **53.** b **54.** e
55. c **56.** c **57.** c
58. e **59.** b **60.** e
61. c **62.** c **63.** a

65. Permanece em repouso.
66. Escorrega.
67. b **68.** c **69.** c
71. 6,0 m/s **72.** 5,0 m/s
74. a) Os dois chegam juntos.
b) Objeto *A*.
76. $5{,}0 \cdot 10^{-5}$ kg
77. 20 m/s
78. a) 0,40 m/s b) 3,0 m/s^2
79. a **80.** e **81.** d **82.** d
83. a) zero b) mg
84. a)



$\vec{T}$: força de tração
$\vec{P}$: força peso
$\vec{R}$: força aplicada pelo solo
$\vec{R}$ tem duas componentes: $\vec{F}_{at}$ e $\vec{N}$.
b) 16 N
85. a) $1{,}25 \cdot 10^5$ N
b) $2{,}75 \cdot 10^5$ N
86. a) 10 m/s^2 c) 45 m
b) 3,0 s d) 36 m
87. a) $g(\text{sen}\,\theta - \mu \cos\theta)$
b) $\sqrt{\dfrac{2h}{g\,\text{sen}\,\theta\,(\text{sen}\,\theta - \mu\cos\theta)}}$
88. a) 0,5 b) $\dfrac{2\sqrt{2}}{15}$ m
89. a) $\dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$
b) $\dfrac{3}{4}\,\text{tg}\,\alpha$
90. a) 2,8 m/s^2 b) 4,8 N
91. zero **93.** 0,50 s
94. a) 56 N b) 116 N
96. a) $8{,}0 \text{ kg} \leqslant m_B \leqslant 16$ kg
b) 12 kg
97. a) $16{,}3 \text{ N} \leqslant Q \leqslant 33{,}7$ N
b) 25 N
98. d
99. a) $F \geqslant 200$ N
b) $\mu_e \geqslant 0{,}20$

100. a) $a \geqslant 25\ m/s^2$
b) $F \geqslant 250$ N
c) $\mu \geqslant 0{,}50$

102. a) 150 N
b) $50\sqrt{3}$ N
c) $100\sqrt{3}$ N

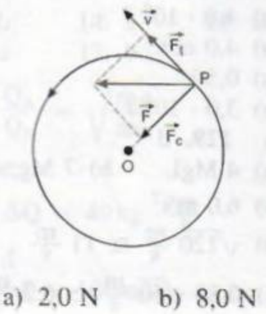
103. 480 N

CAPÍTULO 4

2. 60 N/m
3. $1{,}0 \cdot 10^2$ N/m
4. 0,25 m 5. 3,0 cm
7. 0,20 cm 8. 1,5 m
9. 0,40 m 10. a
11. 9,5 kg 12. 2 N
13. d 14. a 15. e 16. b
17. a 18. c 19. c
21. a) 10 N/m b) 0,70 m
22. 40 N/m 23. $\frac{k}{3}$
25. 400 N/m 26. 150 N/m
27. 120 N/m 28. 20 N/m
29. 4,2 N/m 30. 240 N/m
31. c 32. a 33. b
34. a) 5 N b) 0,5 kg
35. a) 15 N b) 8 cm
36. $2 \cdot 10^4$ N/m
37. 6,0 N
38. a) 5,0 m/s^2 b) 30 N
39. a) $\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1}$ b) zero
40. a 41. a 42. a

CAPÍTULO 5

2.



4. a) 2,0 N b) 8,0 N
6. 50 N 7. 6,4 N 8. 80 N
9. c 10. e 11. e
12. d 13. d 14. 18 N
16. 7,0 m/s 18. $\frac{3}{2}$
21. 6,0 N
22. 8,25 N; 0,25 N
23. a) 25 m/s^2 b) 5,0 m/s
24. c 25. a 26. d
28. $2{,}6 \cdot 10^4$ N
30. 50 N/m
31. 1,2 m
32. b 33. d 34. b
36. $5{,}7 \cdot 10^4$ N; $3{,}0 \cdot 10^3$ N
38. 2,0 m/s
39. a 40. c 41. d
42. 2,0 m/s 44. 10 m/s
46. $\cong$ 16 m/s 47. 15 m/s
48. c 49. b
51. 5,0 N; 8,7 m/s^2
68,7 N; 5,0 m/s^2
53. a) 5,0 N
b) $\cong 2{,}6\ \frac{rad}{s}$
55. $5{,}0 \cdot 10^{-2}$ 58. 45°
59. d 60. a 61. e
62. c 63. b 64. b
65. a) $\frac{v_A}{2}$ b) 2 c) $\frac{3mv_A^2}{4L}$
66. b 67. a
68. $\frac{(m - M)\omega^2 \cdot d}{2\,mg}$

CAPÍTULO 6

6. 4,0 J e zero
7. −200 J
8. 20 J; −20 J
9. a 10. c
12. 6,0 J 14. 20 J
16. −6,0 J 17. 60 J
18. a 19. b
20. c
23. a) 40 J b) 60 J
24. a) 87,5 J c) 7,5 J
b) −80 J
25. b 26. e
28. a) 40 J c) zero
b) −40 J

29. a) 5,0 J c) zero
b) −5,0 J
30. a) 40 N/m c) −60 J
b) −20 J
32. 100 kWh; $3,6 \cdot 10^8$ J
34. $2,5 \cdot 10^4$ W
36. 100 W **37.** 50 W
39. 20 m^3/s
41. a) 500 J b) 1 500 J
42. e **43.** b
44. $1,6 \cdot 10^4$ W
45. 600 J; −300 J; −200 J; zero
46. c **47.** e
48. a) $v = 2 \cdot \sqrt{2\mu g \pi R}$
b) $t = 2 \cdot \sqrt{\dfrac{\pi R}{\mu g}}$
c) $\mathcal{T}_{F_{at}} = -\mu mg \cdot 2\pi R$
49. c **50.** b **51.** c **52.** c

CAPÍTULO 7

3. 25 J e zero
4. $\frac{1}{4}$ **6.** 40 N **9.** 16 J
10. 55 N **12.** 100 N
14. a) 49 J b) 9,0 m/s
15. 6,0 m/s
17. a) −50 J
b) $\sqrt{50}$ m/s ≅ 7,1 m/s
19. $-2,4 \cdot 10^3$ J
21. 2,4 N **23.** 1,0 m **25.** 52 s
26. c **27.** b **28.** 65 J
29. c
30. a) 5,0 N
b) $6,0 \cdot 10^3$ J
31. b **32.** b
33. 9,0 m/s
34. b **35.** c **36.** d
37. c **38.** d
39. 75 J e $\sqrt{35}\ \frac{m}{s} \cong 5,9\ \frac{m}{s}$
40. c **41.** b
43. 40 J e zero
44. zero; 80 J; 20 J
45. b **46.** e **47.** e
49. a) $2,0 \cdot 10^2$ N/m
b) 25 J
50. c **51.** e
52. a) 2,0 N
b) $1,0 \cdot 10^{-2}$ J
53. d
54. a) 0,80 J b) zero
58. a) $4,0 \cdot 10^3$ J
b) $3,0 \cdot 10^3$ J
c) 20 m/s
59. 2,0 J **60.** 3,0 m/s
63. a) 10 m/s
b) $3,0 \cdot 10^3$ J
64. $h_{máx} = \dfrac{v_0^2}{2g}$
66. 3 mg **68.** 10 N
73. 30 J **74.** 10 m/s
76. $d_2 < d_1$ **78.** $\dfrac{5R}{3}$
80. 4,0 m/s **82.** 2,5 m
84. a) 6,0 m/s b) 1,6 m
86. 0,20 m **88.** 2,0 m/s
91. a) zero e 100 J
b) 10 m/s e 5,0 m/s
92. d **93.** e **94.** c **95.** d
96. d **97.** a **98.** d **99.** e
100. e **101.** d **102.** d **103.** d
104. b **105.** e **106.** a
107. a) 60 N b) 4,0 J
108. a) $\sqrt{\ell \cdot g}$ b) 6 P
109. e **110.** 2 m/s
111. 36 J **112.** 20 m/s
113. d
114. a) 2 J b) 2 m/s
115. a) ≅ 10,2 m/s
b) 20 J
c) 17,5 J
116. a) $6,0 \cdot 10^{-2}$ J
b) zero
117. 70 cm
118. c **119.** b **120.** c **121.** e
122. e **123.** d **124.** c **125.** d
126. a) $4,0 \cdot 10^4$ J
b) 4,0 m/s
127. a) 0,50
b) $3,0 \cdot 10^4$ J
128. a **129.** d
130. a) 4 MgL b) 7 Mg; sim
131. a) 6,0 m/s^2
b) $\sqrt{120}\ \frac{m}{s} \cong 11\ \frac{m}{s}$
c) $0,80\ \sqrt{60}\ \frac{m}{s} \cong 6,2\ \frac{m}{s}$

132. c

133. a) $5,0\sqrt{3}$ m/s; 5,0 m/s
b) $5,0\sqrt{3}$ m/s
c) 5,0 m/s

134. 470 km

135. a) 5,0 m/s
b) $1,6 \cdot 10^6$ J

136. a) 0,75 J b) 0,0375

137. d

CAPÍTULO 8

2. a) $Q_A = 1,6 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \frac{m}{s}$
$Q_P = 2,4 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \frac{m}{s}$
b) Ambos têm a direção do segmento $\overline{AB}$; o vetor $\vec{Q}_A$ tem o sentido de A para B e $\vec{Q}_B$ o oposto.

4. $\Delta Q = 4,8 \text{ kg} \cdot \frac{m}{s}$

5. a) $|\vec{Q}_0| = 4,0 \text{ kg} \cdot \frac{m}{s}$;
$Q_1 = 0$;
$|\vec{Q}_2| = 4,0 \text{ kg} \cdot \frac{m}{s}$
b) $|\Delta\vec{Q}| = 8,0 \text{ kg} \cdot \frac{m}{s}$

7. a) 25 J b) 2,0 kg

8. a) 2,0 kg
b) $8,0 \text{ kg} \cdot \frac{m}{s}$
c) 9,0 J

9. $\frac{Q_1}{Q_2} = 2$

11. a) $2,0 \text{ kg} \cdot \frac{m}{s}$
b) zero

12. a) $1,0 \frac{m}{s}$
b) $2,0 \text{ kg} \frac{m}{s}$

13. b **14.** a **15.** d

16. a **17.** b

18. $\frac{Q_A}{Q_B} = \sqrt{\frac{m_A}{m_B}}$

19. e

20. $\Delta Q = 40 \text{ kg} \cdot \frac{m}{s}$

21. d

23. $6,0 \times 10^5$ m/s

24. 40 N

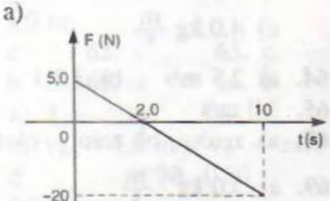
26. a) $32 \text{ N} \cdot \text{s}$ b) 24 m/s

28. a) $-3,0 \text{ N} \cdot \text{s}$
b) $-1,0 \text{ N} \cdot \text{s}$
c) $-4,0$ m/s
d) $v_f = 0$

30. a) 2,0 s b) 100 J

31. a) 40 N b) 10 m

33. a)



b) $I = -75 \text{ N} \cdot \text{s}$
c) $|\vec{v}_1| = 75$ m/s

35. $Q_x = 12 \text{ kg} \cdot \frac{m}{s}$

36. a) $20 \text{ kg} \cdot \frac{m}{s}$
b) 4,0 kg

37. a) $\mu = 0,125$
b) $20 \text{ N} \cdot \text{s}$

38. d

39. a) 50 N
b) $100 \text{ kg} \cdot \frac{m}{s}$

40. d **41.** b

42. $15 \text{ N} \cdot \text{s}$

43. a) $20 \text{ kg} \cdot \frac{m}{s}$
b) 20 m/s
c) 200 J

44. d

45. (01) correta (02) errada
(04) correta (08) errada

46. a

47. 4,00 m/s

48. d

49. a) $24 \text{ N} \cdot \text{s}$ c) 18 m/s
b) 4,0 N

51. a) $240 \text{ N} \cdot \text{s}$
b) 12 m/s

53. 50 N

54. a) $F_m = 50$ N
b) $V_f = 25$ m/s

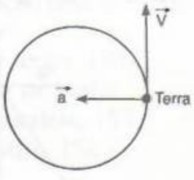
55. c **56.** e **57.** e

42. $f \cong 5{,}0 \cdot 10^3$ N
$V \cong 7{,}1 \cdot 10^3$ m/s

43. O período não depende da massa da Terra e sim da massa do Sol e do raio de órbita. Logo, o ano terrestre permaneceria o mesmo $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM}}$

44. a) 24 h b) $3{,}6 \cdot 10^7$ m

45. a)



b) 1

46. c **47.** a **48.** e **49.** e
50. e **51.** a **52.** c

53. $\mu = \dfrac{3\pi}{GT^2}$

54. $r_1 \cong 7{,}54 \cdot 10^6$ m

55. $v \cong 7{,}3$

56. 3 000 km

57. a) 24 h
b) Porque a força gravitacional atua como força centrípeta.

58. a) $R = \sqrt[3]{\dfrac{GM_T}{\omega^2}}$
b) Não; a órbita teria de ser coplanar ao Equador.

59. e

62. a) 1,0 m/s² b) 2,8 m/s²

63. $h = (\sqrt{2} - 1)R$

65. g_0

66. reduzido de 37,5%

67. 29 m/s²

68. a) 3R b) 30 m/s²

70. a) 50 kgf c) 25 kgf
b) 0

72. a) 100 kg c) 983 N
b) 978 N

73. $\omega \cong 17\,\omega_0$

74. b **75.** d

76. Diminui de $\dfrac{2}{18}$ do valor inicial.

77. e **78.** e

79. a) 5 m
b) $\dfrac{M_L}{M_T} = \dfrac{1}{80}$

80. $\dfrac{M_P}{M_T} = \dfrac{18}{1}$

81. c

82. 342 000 km

83. $\omega^2 R$ **84.** e **85.** d

86. b **87.** c

89. a) $F = G\dfrac{mM}{r^2}$
b) $E_c = G\dfrac{mM}{2r}$

90. a) $E_{pot_A} = \dfrac{1}{2} \cdot E_{pot_B}$
b) $E_{CA} = \dfrac{1}{2} E_{CB}$
c) $E_{m_A} = \dfrac{1}{2} E_{m_B}$

91. ver pág. 409 (velocidade de escape)

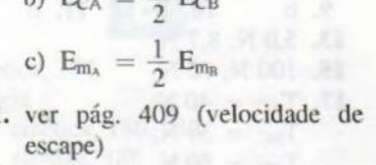
93. a

94. a) $5{,}0 \cdot 10^3$ m/s
b) $g = 3{,}6$ m/s²

95. a) $\dfrac{R}{2}$
b) $E_c = 150\,G\,\dfrac{M_T}{R}$
c) $E_m = -300\,G\,\dfrac{M_T}{R}$

96. b

97. a) Duas; a cada 12 horas há uma maré cheia.
b) Como o Japão é antípoda do Brasil: maré cheia no Brasil e no Japão.
c)



98. a) $v = \omega_T R$
b) $R = \sqrt[3]{\dfrac{gR_T^2}{\omega_T^2}}$

99. a) 10 m/s² b) 41,8 min

Q

R

S

T

U

V

W