b) Passando inicialmente os números para a forma retangular,

$$z_3 = 2\cos 30^\circ + \boldsymbol{j}2\,\text{sen}\,30^\circ = 1{,}732 + \boldsymbol{j}1{,}000$$
$$z_4 = 5\cos 70^\circ + \boldsymbol{j}5\,\text{sen}\,70^\circ = 1{,}710 + \boldsymbol{j}4{,}698$$
$$z_3 + z_4 = (1{,}732 + 1{,}710) + \boldsymbol{j}(1{,}000 + 4{,}698) =$$
$$= 3{,}442 + \boldsymbol{j}5{,}698$$

Temos também que:

$$|z_3 + z_4| = \sqrt{(3{,}442)^2 + (5{,}698)^2} = 6{,}657$$
$$\theta = \text{arc tg}\left(\frac{5{,}698}{3{,}442}\right) = 58{,}9^\circ$$

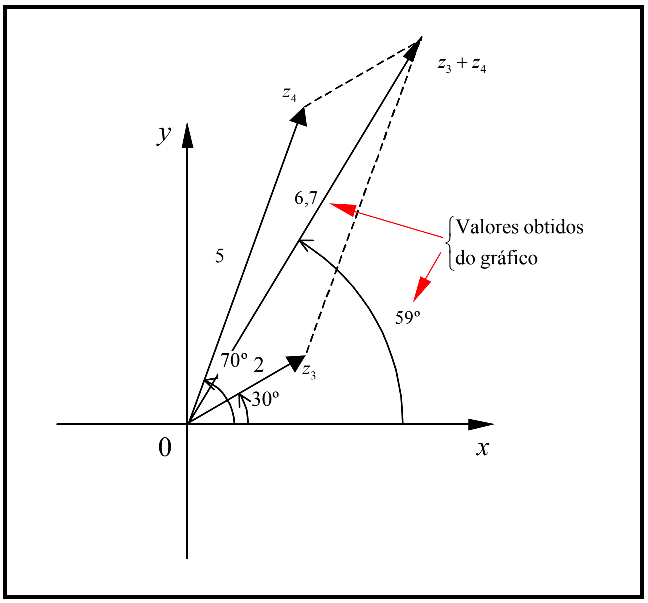

Fig. 1.23

Exemplo 1.18

Resolva a equação $\left|e^{j\theta} - 1\right| = 2$ para $-\pi < \theta \leq \pi$ e verifique a solução geometricamente[3]

Solução:

Temos que:

$$\left|e^{j\theta} - 1\right| = 2 \quad (*)$$

onde $z_1 = e^{j\theta} = \cos\theta + \boldsymbol{j}\,\text{sen}\,\theta$ e $z_2 = 1$

---

[3] A verificação geométrica da solução talvez seja melhor apreciada após o estudo da subseção **1.14.6**.

donde,

$$\left|\cos\theta + \boldsymbol{j}\,\text{sen}\,\theta - 1\right| = 2 \therefore \left|(\cos\theta - 1) + \boldsymbol{j}\,\text{sen}\,\theta\right| = 2 \therefore$$

$$\sqrt{(\cos\theta - 1)^2 + \text{sen}^2\,\theta} = 2$$

$$(\cos\theta - 1)^2 + \text{sen}^2\,\theta = 2 \therefore$$

$$\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 + \text{sen}^2\,\theta = 2 \therefore$$

$$=1$$

$$2 - 2\cos\theta = 2 \therefore$$

$$-2\cos\theta = 0 \therefore$$

$$\cos\theta = 0 \quad \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \pi\ \text{rad} \end{cases}$$

Substituindo na equação (*), verificamos que somente o valor $\theta = \pi\ \text{rad}$ é compatível.

A verificação gráfica é imediata, visto que $|z_1 - z_2|$ é a distância entre os pontos definidos pelos complexos z_1 e z_2.

Sendo $z_1 = e^{j\theta}$, temos que $|z_1| = 1$, e o lugar geométrico representado por z_1, quando θ varia ao longo do intervalo $-\pi < \theta \le \pi$, é uma circunferência de raio unitário centrada na origem.

Sendo $z_2 = 1$, a situação é a representada na figura a seguir:

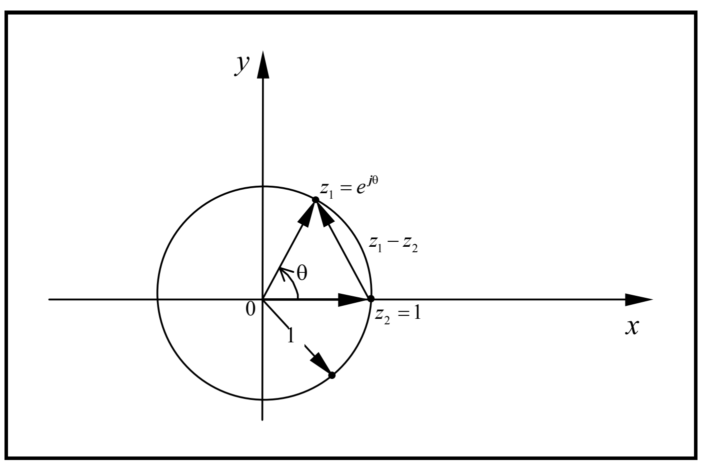

Fig. 1.24

É fácil verificar que teremos $|z_1 - z_2| = 2$ quando θ assumir o valor $\pi\ \text{rad}$.

c) Multiplicação

A multiplicação de grandezas na forma retangular é dada por:

$$z_1.z_2 = (x_1 + \boldsymbol{j}y_1).(x_2 + \boldsymbol{j}y_2) = \left(x_1x_2 + \boldsymbol{j}^2 y_1y_2\right) + \boldsymbol{j}(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Lembramos que $\boldsymbol{j}^2 = -1$ segue-se que:

$$\boxed{z_1.z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + \boldsymbol{j}(x_1y_2 + x_2y_1)} \quad \textbf{(62)}$$

Já na forma exponencial,

$$z_1.z_2 = |z_1|e^{\boldsymbol{j}\theta_1}.|z_2|e^{\boldsymbol{j}\theta_2} = |z_1||z_2|e^{\boldsymbol{j}(\theta_1+\theta_2)}$$

o que nos permite então escrever:

$$\boxed{z_1.z_2 = |z_1||z_2|e^{\boldsymbol{j}(\theta_1+\theta_2)} = |z_1||z_2| \underline{/\theta_1 + \theta_2}} \quad \textbf{(63)}$$

Conclusões:

1.ª) Da equação **(63)** temos que:

$$\boxed{|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|} \quad \textbf{(64)}$$

e

$$\boxed{\theta_{z_1.z_2} = \theta_1 + \theta_2} \quad \textbf{(65)}$$

2.ª) Para $z = x + \boldsymbol{j}y = |z|e^{\boldsymbol{j}\theta}$ e $z^* = x - \boldsymbol{j}y = |z|e^{-\boldsymbol{j}\theta}$ vale então estabelecer a seguinte equação:

$$z.z^* = |z|e^{\boldsymbol{j}\theta}.|z|e^{-\boldsymbol{j}\theta}$$

ou seja,

$$\boxed{z.z^* = |z|^2} \quad \textbf{(66)}$$

3.ª) Também não é difícil mostrar que

$$\boxed{(z_1z_2)^* = z_1^*z_2^*} \quad \textbf{(67)}$$

Exemplo 1.19

Multiplicar os seguintes números complexos:

a) $z_1 = 2 + \boldsymbol{j}3$ e $z_2 = -1 - \boldsymbol{j}3$

b) $z_3 = 5e^{\boldsymbol{j}\pi/3}$ e $z_4 = 2e^{-\boldsymbol{j}\pi/6}$

c) $z_5 = 2\,\underline{/30^\circ}$ e $z_6 = 5\,\underline{/-45^\circ}$

Solução:

a) $z_1 . z_2 = (2 + \boldsymbol{j}3)(-1 - \boldsymbol{j}3) = 7 - \boldsymbol{j}9$

b) $z_3 . z_4 = \left(5e^{\boldsymbol{j}\pi/3}\right)\left(2e^{-\boldsymbol{j}\pi/6}\right) = 10e^{\boldsymbol{j}\pi/6}$

c) $z_5 . z_6 = \left(2\,\underline{/30^\circ}\right)\left(5\,\underline{/-45^\circ}\right) = 10\,\underline{/-15^\circ}$

Exemplo 1.20

Passar o número complexo $-2e^{\boldsymbol{j}5\pi/6}$ para as formas polar e cartesiana.

Solução:

Este é uma excelente exemplo, pois, lembrando a forma exponencial de um complexo, $z = |z|e^{\boldsymbol{j}\theta}$, parece que estamos diante de um absurdo, qual seja um numero com módulo negativo. Acontece que aí não existe módulo negativo, mas sim uma "multiplicação implícita", conforme veremos a seguir:

$$-2e^{\boldsymbol{j}5\pi/6} = -2\,\underline{/5\pi/6} = -2\,\underline{/150^\circ} = (-1)(2)\,\underline{/150^\circ}$$

$$= \left(1\,\underline{/180^\circ}\right)\left(2\,\underline{/150^\circ}\right) = \underbrace{2\,\underline{/330^\circ}}_{\left(\substack{\text{não é usual}\\ \text{pois devemos}\\ \text{ter } -180^\circ < \theta \leq 180^\circ}\right)} = 2\,\underline{/-30^\circ}$$

que é a forma polar.

A forma cartesiana é facilmente obtida à partir da forma polar, ou seja:

$$z = 2\,\underline{/-30^\circ} = 2\cos(-30^\circ) + \boldsymbol{j}2\,\text{sen}(-30^\circ) =$$

$$= 1{,}732 - \boldsymbol{j}1{,}000$$

Observação: As calculadoras eletrônicas estão em um estágio de desenvolvimento tão elevado que, aquelas que tem as rotinas RET → POL e POL → RET, assimilariam a transformação $-2\,\underline{/150^\circ}$ diretamente para a forma cartesiana, pois, quando se entra com $|z| = -2$, o software da calculadora entende que isto não é simplesmente módulo, e que existe uma multiplicação implícita. Está duvidando? Pois então pegue uma e execute a operação!

d) Divisão

A divisão de duas grandezas complexas, $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$, é definida como $z_1 = z_2.z_3$ se $z_2 \neq 0$.

Em coordenadas retangulares temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \boldsymbol{j}y_1}{x_2 + \boldsymbol{j}y_2} = \left(\frac{x_1 + \boldsymbol{j}y_1}{x_2 + \boldsymbol{j}y_2}\right)\left(\frac{x_2 - \boldsymbol{j}y_2}{x_2 - \boldsymbol{j}y_2}\right)$$

onde o processo de racionalização foi efetuado utilizando-se o complexo conjugado do denominador.

Finalmente,

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)} \quad \textbf{(68)}$$

e na forma exponencial,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{j\theta_1}}{|z_2|e^{j\theta_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

o que nos conduz a

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{j(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,\underline{/\theta_1 - \theta_2}} \quad \textbf{(69)}$$

Conclusões:

1ª) Da equação **(69)** concluímos que:

$$\boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}} \quad \textbf{(70)}$$

e

$$\boxed{\theta_{z_1/z_2} = \theta_1 - \theta_2}. \quad \textbf{(71)}$$

2ª) Não é difícil mostrar que

$$\boxed{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}, \text{ sendo } z_2 \neq 0} \qquad \textbf{(72)}$$

3ª) Fica então evidente que a multiplicação e a divisão de grandezas complexas são mais facilmente efetuadas na forma polar, a menos que, conforme já dito anteriormente, se tenha uma calculadora eletrônica mais sofisticada.

4ª) É importante notar que multiplicar uma grandeza complexa por $\boldsymbol{j} = e^{j\pi/2} = 1\angle 90°$ não altera o seu módulo, mas soma 90º ao seu ângulo de fase. Raciocinando em termos da representação por meio de segmento orientado no plano complexo, a multiplicação por $\boldsymbol{j}$ gira o segmento orientado de 90º no sentido anti-horário. De modo análogo, a multiplicação por $-\boldsymbol{j} = e^{-j\pi/2} = 1\angle -90°$ também não altera o módulo da grandeza mas, neste caso, há uma subtração de 90º na fase, ou seja, o segmento orientado é agora girado de 90º no sentido horário.

5ª) Similarmente, se multiplicarmos um número complexo por $e^{j\alpha} = 1\angle\alpha$, não alteramos o seu módulo; apenas acrescentamos α ao seu ângulo de fase ou, em outras palavras: giramos o segmento orientado que representa o complexo de um ângulo α no sentido anti-horário. Se a multiplicação for por $e^{-j\alpha} = 1\angle -\alpha$ o giro será no sentido horário.

6ª) Das propriedades e definições vistas até então resultam as leis comutativa, associativa e distributiva usuais:

$$\boxed{z_1 z_2 = z_2 z_1} \qquad \textbf{(73)}$$

$$\boxed{z_1 + z_2 = z_2 + z_1} \qquad \textbf{(74)}$$

$$\boxed{z_1.(z_2.z_3) = (z_1.z_2).z_3} \qquad \textbf{(75)}$$

$$\boxed{z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3} \qquad \textbf{(76)}$$

$$\boxed{z_1.(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3} \qquad \textbf{(77)}$$

$$\boxed{(z_1 + z_2).z_3 = z_1.z_3 + z_2.z_3} \qquad \textbf{(78)}$$

Exemplo 1.21

Dividir os seguintes números complexos:

a) $z_1 = 4 - \boldsymbol{j}5$ e $z_2 = 1 + \boldsymbol{j}2$

b) $z_3 = 4e^{j\pi/3}$ e $z_4 = 2e^{j\pi/6}$

c) $z_5 = 8\angle -30º$ e $z_6 = 2\angle -60º$

Solução:

a) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{4 - \boldsymbol{j}5}{1 + \boldsymbol{j}2} = \left(\dfrac{4 - \boldsymbol{j}5}{1 + \boldsymbol{j}2}\right)\left(\dfrac{1 - \boldsymbol{j}2}{1 - \boldsymbol{j}2}\right) = \dfrac{-6 - \boldsymbol{j}13}{5} = -\dfrac{6}{5} - \boldsymbol{j}\dfrac{13}{5}$

b) $\dfrac{z_3}{z_4} = \dfrac{4e^{j\pi/3}}{2e^{j\pi/6}} = 2e^{j\pi/6}$

c) $\dfrac{z_5}{z_6} = \dfrac{8\angle{-30^\circ}}{2\angle{-60^\circ}} = 4\angle{30^\circ}$

Exemplo 1.22

Determinar o resultado da expressão

$$z = \frac{(500)(2000\angle{-30^\circ})}{500 + 2000\angle{-30^\circ}} + \frac{(250\angle{30^\circ})(1000)}{250\angle{30^\circ} + 1000}$$

Solução:

Temos então:

$$z = \frac{1\,000\,000\angle{-30^\circ}}{500 + 1\,732 - \boldsymbol{j}1\,000} + \frac{250\,000\angle{30^\circ}}{216{,}5 + \boldsymbol{j}125 + 1\,000} =$$

$$= \frac{1\,000\,000\angle{-30^\circ}}{2\,232 - \boldsymbol{j}1\,000} + \frac{250\,000\angle{30^\circ}}{1\,216{,}5 + \boldsymbol{j}125} =$$

$$= \frac{1\,000\,000\angle{-30^\circ}}{2\,445{,}8\angle{-24{,}1^\circ}} + \frac{250\,000\angle{30^\circ}}{1\,222{,}9\angle{5{,}9^\circ}} =$$

$$= 408{,}9\angle{-5{,}9^\circ} + 204{,}4\angle{24{,}1^\circ} =$$

$$= 406{,}7 - \boldsymbol{j}42 + 186{,}6 + \boldsymbol{j}83{,}5 =$$

$$= 593{,}3 + \boldsymbol{j}41{,}5 = 594{,}8\angle{4^\circ}$$

e) Potenciação

Consideremos, inicialmente, um número complexo genérico

$$z = |z|e^{j\theta} = |z|(\cos\theta + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Procedamos agora a potenciação deste número, ou seja,

$$z^n.$$

Temos então:

$$z^n = \left[|z|e^{j\theta}\right]^n = \left[|z|(\cos\theta + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}\,\theta)\right]^n$$

Assim sendo vem que:

$$z^n = |z|^n e^{jn\theta} = |z|^n (\cos\theta + \boldsymbol{j}\operatorname{sen}\theta)^n$$

porém, da identidade de Euler,

$$e^{jn\theta} = \cos n\theta + \boldsymbol{j}\operatorname{sen} n\theta$$

o que nos permite escrever

$$\boxed{z^n = |z|^n e^{jn\theta} = \underbrace{|z|^n (\cos n\theta + \boldsymbol{j}\operatorname{sen} n\theta) = |z|^n (\cos\theta + \boldsymbol{j}\operatorname{sen}\theta)^n}_{(*)}} \qquad \textbf{(79)}$$

Daí concluímos que se

$$z = |z|e^{j\theta} = |z| \underline{/\theta} = |z|(\cos\theta + \boldsymbol{j}\operatorname{sen}\theta)$$

podemos exprimir a potência nas seguintes formas:

$$\boxed{z^n = |z|^n e^{jn\theta}} \qquad \textbf{(80)}$$

$$\boxed{z^n = |z|^n \underline{/n\theta}} \qquad \textbf{(81)}$$

$\boxed{z^n = |z|^n (\cos n\theta + \boldsymbol{j}\operatorname{sen} n\theta)}$ **(82)**, também conhecida como 1.ª fórmula de De Moivre.

Considerando a parte assinalada com asterisco na equação **(79)**, concluímos também que:

$\boxed{(\cos\theta + \boldsymbol{j}\operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + \boldsymbol{j}\operatorname{sen} n\theta}$ **(83)**, que é reconhecida como sendo a identidade de De Moivre.

Exemplo 1.23

Calcular $\left(\sqrt{3} + \boldsymbol{j}\right)^7$ utilizando (a) a forma exponencial e (b) a 1.ª fórmula de De Moivre.

Solução:

a) Temos que:

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1} = 2 \\ \theta = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ = \dfrac{\pi}{6}\,\text{rad} \end{cases}$$

Logo,

$$\left(\sqrt{3} + \boldsymbol{j}\right) = 2e^{j\frac{\pi}{6}}.$$

Assim sendo,

$$\left(\sqrt{3}+\boldsymbol{j}\right)^7 = 2^{7j\frac{7\pi}{6}} = \left(2^7 e^{j\pi}\right)\left(e^{j\frac{\pi}{6}}\right) =$$

$$= 128(\cos\pi + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}\,\pi)\left(\cos\frac{\pi}{6} + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= -128\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \boldsymbol{j}\frac{1}{2}\right) = -64\left(\sqrt{3}+\boldsymbol{j}\right)$$

b) $\begin{cases} |z| = 2 \\ \theta = \dfrac{\pi}{6}\,\text{rad} \end{cases}$

$$\left(\sqrt{3}+\boldsymbol{j}\right)^7 = 2^7\left[\cos\frac{7\pi}{6} + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right] = 128\left[\cos\left(2\pi - \frac{5\pi}{6}\right) + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}\left(2\pi - \frac{5\pi}{6}\right)\right] =$$

$$= 128\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right] = 128\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \boldsymbol{j}\frac{1}{2}\right) =$$

$$= -64\left(\sqrt{3}+\boldsymbol{j}\right)$$

Exemplo 1.24

Calcular $\left(\sqrt{2}+\boldsymbol{j}\sqrt{2}\right)^{10}$ utilizando (a) a forma exponencial e (b) a 1.ª fórmula de De Moivre.

Solução:

a) Temos que:

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = 2 \\ \theta = \text{arc tg}\,1 = 45^\circ = \dfrac{\pi}{4}\,\text{rad} \end{cases}$$

Logo,

$$\sqrt{2} + \boldsymbol{j}\sqrt{2} = 2e^{j\frac{\pi}{4}}$$

Assim sendo,

$$\left(\sqrt{2}+\boldsymbol{j}\sqrt{2}\right)^{10} = 2^{10}e^{j\frac{10\pi}{4}} = 2^{10}e^{j\frac{5\pi}{2}} = \left(2^{10}e^{j2\pi}\right)\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$= 1024(\cos 2\pi + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}\,2\pi)\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= 1024\,\boldsymbol{j}$$

b) $\begin{cases} |z| = 2 \\ \theta = \dfrac{\pi}{4}\,\text{rad} \end{cases}$

$$\left(\sqrt{2}+j\sqrt{2}\right)^{10}=2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4}+j\,\text{sen}\,\frac{10\pi}{4}\right)=$$

$$=1024\left[\cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{4}\right)+j\,\text{sen}\left(2\pi+\frac{2\pi}{4}\right)\right]=$$

$$=1024\left(\cos\frac{\pi}{2}+j\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)=1024\boldsymbol{j}$$

Exemplo 1.25

Determinar o resultado da expressão $z=\dfrac{\boldsymbol{j}100(1-\boldsymbol{j}2)^2}{(-3+\boldsymbol{j}4)(-1-\boldsymbol{j})}$ tanto na forma polar quanto na retangular.

Solução:

Inicialmente vamos passar cada um dos fatores para a forma polar:

$$z=\frac{\left(100\underline{/90^\circ}\right)\left(\sqrt{5}\,\underline{/-63{,}4^\circ}\right)^2}{\left(5\,\underline{/126{,}9^\circ}\right)\left(\sqrt{2}\underline{/-135^\circ}\right)}=\frac{\left(100\underline{/90^\circ}\right)\left(5\underline{/-126{,}8^\circ}\right)}{\left(5\underline{/126{,}9^\circ}\right)\left(\sqrt{2}\underline{/-135^\circ}\right)}=$$
$$=70{,}9\underline{/-28{,}7^\circ}=62-\boldsymbol{j}34$$

Solução Alternativa:

Vamos manter os fatores na forma retangular e racionalizar a fração resultante:

$$z=\frac{\boldsymbol{j}100\left[(1)^2-2(1)(\boldsymbol{j}2)+(\boldsymbol{j}2)^2\right]}{\left[(-3)(-1)+(-3)(-\boldsymbol{j})+(\boldsymbol{j}4)(-1)+(\boldsymbol{j}4)(-\boldsymbol{j})\right]}=$$
$$=\frac{\boldsymbol{j}100[1-\boldsymbol{j}4-4]}{[3+\boldsymbol{j}3-\boldsymbol{j}4+4]}=\frac{\boldsymbol{j}100[-3-\boldsymbol{j}4]}{7-\boldsymbol{j}}=$$
$$=\frac{100[4-\boldsymbol{j}3]}{7-\boldsymbol{j}}=\left[\frac{100(4-\boldsymbol{j}3)}{7-\boldsymbol{j}}\right]\left(\frac{7+\boldsymbol{j}}{7+\boldsymbol{j}}\right)=$$
$$=\frac{100(31-\boldsymbol{j}17)}{49+1}=62-\boldsymbol{j}34$$

f) Radiciação:

Diz-se que um número w é a raiz n-ésima de um número complexo z se

$$w=\sqrt[n]{z}=z^{1/n}$$

que é equivalente a

$$w^n=z\,.$$

Para determinar as n raízes distintas do número z vamos considerá-lo em sua forma trigonométrica

$$z = |z|(\cos\theta + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

e representemos, também em forma trigonométrica, a raiz que desejamos encontrar:

$$w = |w|(\cos\varphi + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}\,\varphi).$$

Utilizando a 1.ª fórmula de De Moivre, a equação $z^n = n$ assume a seguinte forma:

$$|w|^n(\cos n\varphi + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}\,n\varphi) = |z|(\cos\theta + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

Uma vez que a igualdade dos números complexos requer a igualdade das partes reais e das partes imaginárias, separadamente, devemos ter:

$$|w|^n \cos n\varphi = |z|\cos\theta$$

e

$$|w|^n\,\mathrm{sen}\,n\varphi = |z|\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Tais equações, por sua vez, são equivalentes a

$$|w|^n = |z|$$

e

$$n\varphi = \theta + 2k\pi \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

ou seja,

$$|w| = \sqrt[n]{z} \text{ e } \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Seque-se então a expressão conhecida como 2ª fórmula de De Moivre:

$$\boxed{w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right] = \sqrt[n]{|z|}e^{j\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{|z|}\ \angle\frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad \text{sendo } k = 0, 1, 2, ..., n-1.} \tag{84a}$$

Que também pode ser expressa para o argumento em graus,

$$\boxed{w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta^\circ + k360^\circ}{n}\right) + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta^\circ + k360^\circ}{n}\right)\right] = \sqrt[n]{|z|}\ \angle\frac{\theta^\circ + k360^\circ}{n} \quad \text{sendo } k=0, 1, 2, ..., n-1.} \tag{84b}$$

Esta fórmula produz n raízes distintas $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$, todas com o mesmo módulo e com argumentos

$$\varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta^0 + k360^{\circ}}{n}, \text{ k = 0, 1, 2, ..., } n - 1,$$

que estão situadas sobre a circunferência centrada na origem e com raio $\sqrt[n]{|z|}$, sendo os vértices de um polígono regular de n lados, conforme ilustrado a seguir:

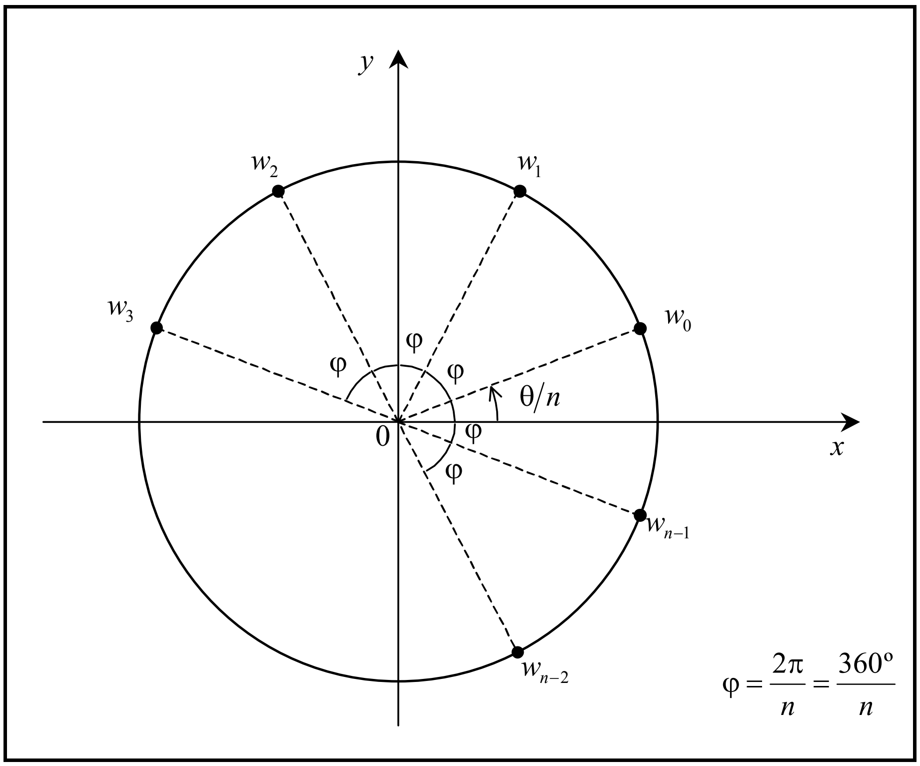

Fig. 1.25

Casos particulares:

1º) Raízes da unidade:

Quando $z = 1$, o ângulo θ assume o valor zero e a fórmula (84) reduz-se a :

$$w = \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \boldsymbol{j}\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n}\right) = e^{j\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} = 1 \angle \frac{2k\pi}{n} = 1 \angle \frac{k360^{\circ}}{n} \qquad \textbf{(85)}$$

sendo k= 0, 1, 2... n-1

Considerando

$$\Omega = \cos\frac{2\pi}{n} + \boldsymbol{j}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{n} = e^{j\frac{2\pi}{n}},$$

e utilizando a identidade de De Moivre, vemos que as *n*-ésimas raízes da unidade são dadas por:

$$1, \Omega, \Omega^2, \ldots, \Omega^{n-1}$$

A figura 1.26 ilustra as raízes no caso n = 6, onde

$$\Omega = \cos\frac{2\pi}{6} + \boldsymbol{j}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} + \boldsymbol{j}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = 0{,}5 + \boldsymbol{j}0{,}866 = e^{j\pi/3}$$

$$\Omega^2 = e^{j2\pi/3} = -0{,}5 + \boldsymbol{j}0{,}866 = \Omega^*$$

$$\Omega^3 = e^{j\pi} = -1$$

$$\Omega^4 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = -0{,}5 - \boldsymbol{j}0{,}866 = -\Omega$$

$$\Omega^5 = e^{j\frac{5\pi}{3}} = 0{,}5 - \boldsymbol{j}0{,}866 = \Omega^*$$

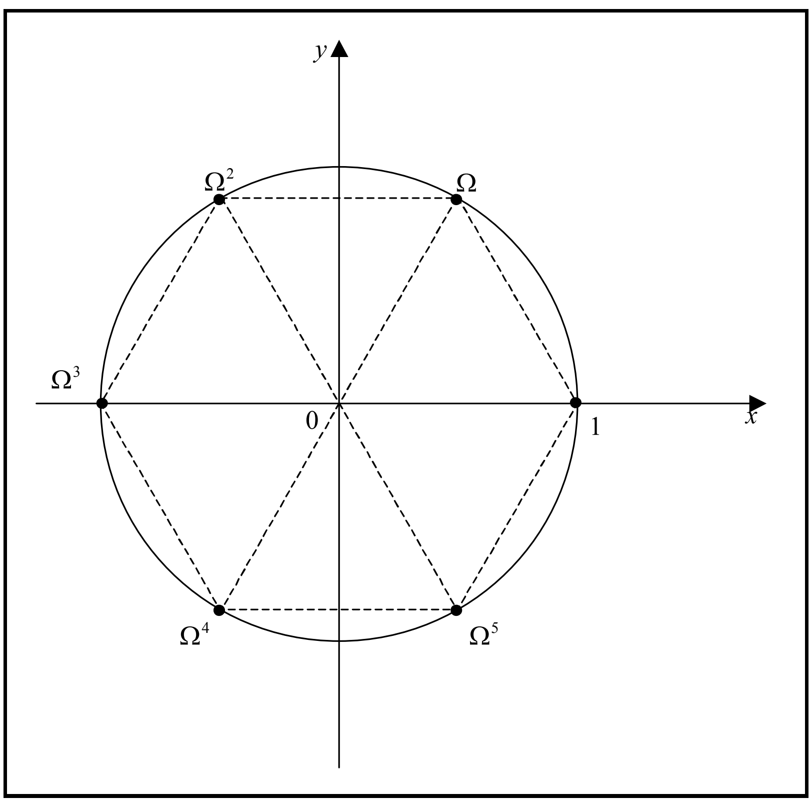

Fig. 1.26

2º) Raízes quadradas:

$$\sqrt{z} = \begin{cases} w_0 = \sqrt{|z|}\; e^{j\theta/2} = \sqrt{|z|}\;\underline{/\theta/2} = \sqrt{|z|}\;\underline{/\theta^\circ/2} \\ w_1 = \sqrt{|z|}\; e^{j(\pi+\theta/2)} = \sqrt{|z|}\;\underline{/\pi+\theta/2} = \sqrt{|z|}\;\underline{/180^\circ+\theta^\circ/2} \end{cases} \qquad \textbf{(86)}$$

3º) Raízes cúbicas:

$$\sqrt[3]{z} = \begin{cases} w_0 = \sqrt[3]{|z|} e^{j\theta/3} = \sqrt[3]{|z|}\;\underline{/\theta/3} = \sqrt[3]{|z|}\;\underline{/\theta^\circ/3} \\ w_1 = \sqrt[3]{|z|} e^{j(\theta+2\pi)/3} = \sqrt[3]{|z|}\;\underline{/(\theta+2\pi)/3} = \sqrt[3]{|z|}\;\underline{/(\theta^\circ+360^\circ)/3} \\ w_2 = \sqrt[3]{|z|} e^{j(\theta+4\pi)/3} = \sqrt[3]{|z|}\;\underline{/(\theta+4\pi)/3} = \sqrt[3]{|z|}\;\underline{/(\theta^\circ+720^\circ)/3} \end{cases} \qquad \textbf{(87)}$$

Exemplo 1.26

Determine os valores das seguintes raízes:

a) $\sqrt{\boldsymbol{j}}$; b) $\sqrt[3]{-8\boldsymbol{j}}$; c) $\sqrt[8]{1}$ d) $\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\boldsymbol{j}\sqrt{3}\right)}$

e represente-as no plano complexo.

Solução:

a) $\sqrt{\boldsymbol{j}}$

Temos que $z = \boldsymbol{j} = e^{j\pi/2} \Rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ e \\ \theta = \pi/2 = 90^\circ \end{cases}$

Pela expressão **(86)**:

$$w_0 = \sqrt{1}\;\underline{/45^\circ} = 1\;\underline{/45^\circ} = \cos 45^\circ + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}\,45^\circ = 0{,}707 + \boldsymbol{j}0{,}707$$

$$w_1 = \sqrt{1}\;\underline{/180^\circ + 45^\circ} = 1\;\underline{/225^\circ} = 1\;\underline{/-135^\circ} = \cos(-135^\circ) + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}(135^\circ) = -0{,}707 - \boldsymbol{j}0{,}707$$

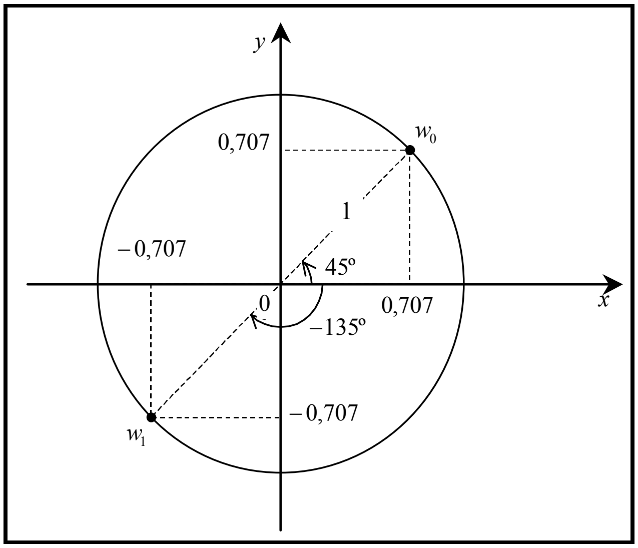

Fig. 1.27

b) $\sqrt[3]{-8\boldsymbol{j}}$

Temos que $z = -8\boldsymbol{j} = 8\ e^{-j\pi/2} \Rightarrow \begin{cases} |z| = 8 \\ \text{e} \\ \theta = -\pi/2 = -90º \end{cases}$

Pela expressão **(87)**,

$$w_0 = \sqrt[3]{8}\ \underline{/-30°} = 2[\cos(-30°) + \boldsymbol{j}\,\text{sen}(-30°)] = 2(0{,}866 - \boldsymbol{j}0{,}5) = 1{,}732 - \boldsymbol{j}$$

$$w_1 = \sqrt[3]{8}\ \underline{/(-90° + 360°)/3} = 2\ \underline{/90°} = 2(\cos 90º + \boldsymbol{j}\,\text{sen}\,90°) = 2\boldsymbol{j}$$

$$w_2 = \sqrt[3]{8}\ \underline{/(-90° + 720°)/3} = 2\ \underline{/\ 210°} = 2\ \underline{/-150°}$$

$$= 2[\cos(-150°) + \boldsymbol{j}\,\text{sen}(-150°)] = 2(-0{,}866 - \boldsymbol{j}0{,}5) = -1{,}732 - \boldsymbol{j}$$

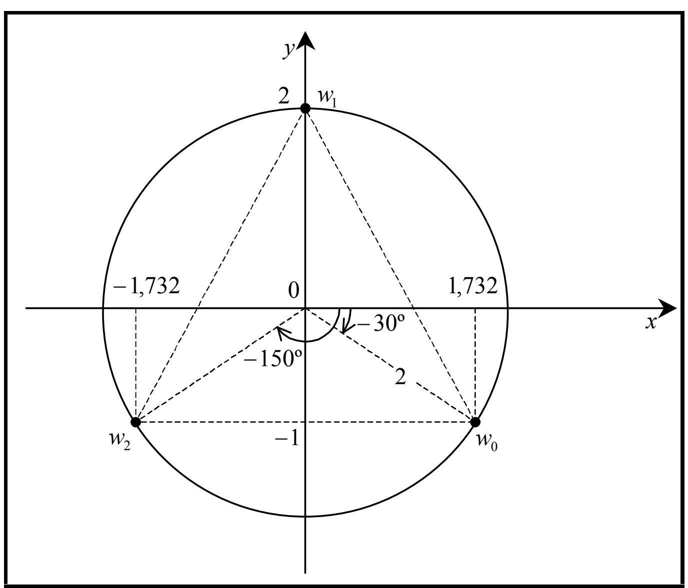

Fig. 1.28

c) $\sqrt[8]{1}$:

Temos que $z = 1$ e, pela expressão **(85)**, com $n = 8$, $w = 1\ \underline{/\frac{k360°}{8}} =$

$= 1\ \underline{/k45°}$ sendo $k = 0, 1, 2, ... , 7$ no presente caso.

Assim sendo,

$w_0 = 1\ \underline{/0°} = \cos 0° + \boldsymbol{j} \operatorname{sen} 0° = 1$

$w_1 = 1\ \underline{/45°} = \cos 45° + \boldsymbol{j} \operatorname{sen} 45° = 0{,}707 + \boldsymbol{j}0{,}707$

$w_2 = 1\ \underline{/90°} = \cos 90° + \boldsymbol{j} \operatorname{sen} 90° = \boldsymbol{j}$

$w_3 = 1\ \underline{/135°} = \cos 135° + \boldsymbol{j} \operatorname{sen} 135° = -0{,}707 + \boldsymbol{j}0{,}707$

$w_4 = 1\ \underline{/180°} = \cos 180° + \boldsymbol{j} \operatorname{sen} 180° = -1$

$w_5 = 1\ \underline{/255°} = 1\ \underline{/-135°} = \cos(-135°) + \boldsymbol{j} \operatorname{sen}(-135°) = -0{,}707 - \boldsymbol{j}0{,}707$

$w_6 = 1\ \underline{/270°} = 1\ \underline{/-90°} = \cos(-90°) + \boldsymbol{j} \operatorname{sen}(-90°) = -\boldsymbol{j}$

$w_7 = 1\ \underline{/315°} = 1\ \underline{/-45°} = \cos(-45°) + \boldsymbol{j} \operatorname{sen}(-45°) = 0{,}707 - \boldsymbol{j}0{,}707$

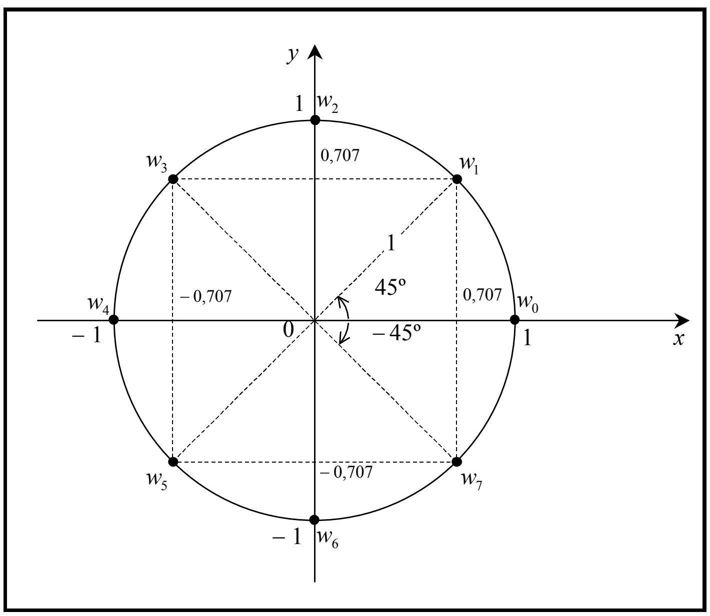

Fig. 1.29

d) $\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \boldsymbol{j}\sqrt{3}\right)}$:

Temos que $z = \frac{1}{2} + \boldsymbol{j}\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1 \\ \theta = \pi/3 = 60° \end{cases}$

Pela expressão **(86)**,

$$w_0 = \sqrt{1}\ \underline{/30^\circ} = \cos 30^\circ + \boldsymbol{j}\operatorname{sen} 30^\circ = 0{,}866 + \boldsymbol{j}\,0{,}5$$

$$w_1 = \sqrt{1}\ \underline{/180^\circ + 30^\circ} = 1\,\underline{/210^\circ} = 1\,\underline{/-150^\circ} = \cos(-150^\circ) + \boldsymbol{j}\operatorname{sen}(-150^\circ) = -0{,}866 - \boldsymbol{j}\,0{,}5$$

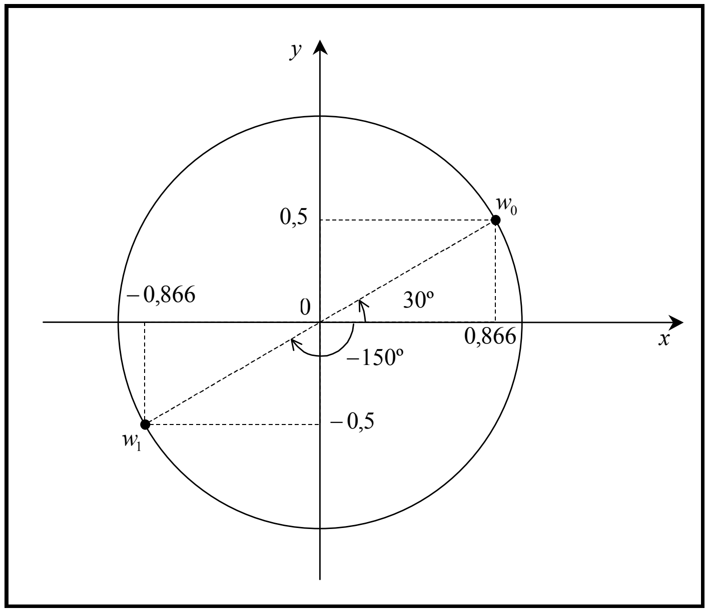

Fig. 1.30

Exemplo 1.27

Determinar o conjunto-solução em ℂ da equação $w^4 + 4 = 0$.

Solução:

Temos:

$$w^4 + 4 = 0 \Leftrightarrow w^4 = -4 \Leftrightarrow w = \sqrt[4]{-4}$$

isto significa que devemos calcular as raízes quartas de $z = -4$. Temos então:

$$z = -4 = 4e^{j\pi} \Rightarrow \begin{cases} |z| = 4 \\ \theta = \pi = 180^\circ \end{cases}$$

Utilizando a expressão **(84)**, com $n = 4$, $w = \sqrt[4]{|z|}\left[\cos\left(\dfrac{180^\circ + k360^\circ}{4}\right) + \boldsymbol{j}\operatorname{sen}\left(\dfrac{180^\circ + k360^\circ}{4}\right)\right]$,

sendo $k = 0, 1, 2, 3$ no presente caso. Assim sendo,

$$w_0 = \sqrt{2}\ \underline{/45^\circ} = \sqrt{2}\left[\cos 45^\circ + \boldsymbol{j}\,\text{sen}\,45^\circ\right] = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \boldsymbol{j}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \boldsymbol{j}$$

$$w_1 = \sqrt{2}\ \underline{/135^\circ} = \sqrt{2}\left[\cos 135^\circ + \boldsymbol{j}\,\text{sen}\,135^\circ\right] = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \boldsymbol{j}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + \boldsymbol{j}$$

$$w_2 = \sqrt{2}\ \underline{/255^\circ} = \sqrt{2}\ \underline{/-135^\circ} =$$
$$= \sqrt{2}\left[\cos(-135^\circ) + \boldsymbol{j}\,\text{sen}(-135^\circ)\right] = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \boldsymbol{j}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 - \boldsymbol{j}$$

$$w_3 = \sqrt{2}\ \underline{/315^\circ} = \sqrt{2}\ \underline{/-45^\circ} = \sqrt{2}\left[\cos(-45^\circ) + \boldsymbol{j}\,\text{sen}(-45^\circ)\right] = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \boldsymbol{j}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \boldsymbol{j}$$

Logo o conjunto solução é:

$$S = \{1 + \boldsymbol{j},\ -1 + \boldsymbol{j},\ -1 - \boldsymbol{j}, 1 - \boldsymbol{j}\}$$

1.13.5 A Desigualdade do Triângulo

Em alguns trabalhos sobre números complexos, este é um item que aparece logo no começo, visto que, no mais das vezes, é apresentada uma demonstração para ela baseada puramente em uma propriedade geométrica dos triângulos. Nesta oportunidade, vamos também apresentar uma demonstração analítica , pelo que optamos por aguardar um maior amadurecimento do estudante com relação aos vários conceitos básicos.

Vamos então considerar dois pontos do plano complexo associados aos números z_1 e z_2, conforme apresentado na figura 1.20.

Temos então:

$$\boxed{|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|} \qquad \textbf{(88)}$$

A demonstração geométrica segue o fato de que os pontos $0, z_1$, e $z_1 + z_2$ são os vértices de um triângulo de lados $|z_1|$, $|z_2|$ e $|z_1 + z_2|$, e um lado não pode exceder a soma dos outros dois.

É também interessante notar que a desigualdade se torna uma igualdade quando os pontos $0, z_1$, e z_2 são colineares.

Para demonstrar a desigualdade algebricamente vamos escrever, baseados nas expressões que envolvem complexos conjugados, que

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(z_1 + z_2)^* = (z_1 + z_2)(z_1^* + z_2^*) = z_1 z_1^* + (z_1 z_2^* + z_2 z_1^*) + z_2 z_2^*$$

porém

$$z_2 z_1^* = z_1^* z_2 = (z_1 z_2^*)^*$$