Estratégia
Militares

Aula 01 – Trigonometria II

EsPCEx 2021

Professor Victor So

Sumário

Introdução

Olá!

Vamos continuar o estudo de trigonometria. Nessa aula, veremos como resolver equações e inequações trigonométricas. Também estudaremos o valor de algumas razões trigonométricas não triviais que podem ser cobradas na prova.

Se você já possui um bom conhecimento de trigonometria, vá direto para a lista de questões e treine!

Sempre que você tiver dúvidas, críticas ou sugestões nos procure no fórum de dúvidas ou entre em contato comigo:

FALE COMIGO

/victorso /profvictorso /profvictorso

1. Lei dos senos e cossenos

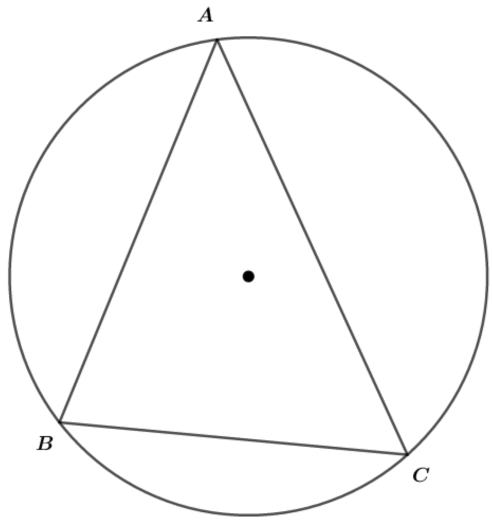
1.1. Lei dos senos

$$\boxed{\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R}$$

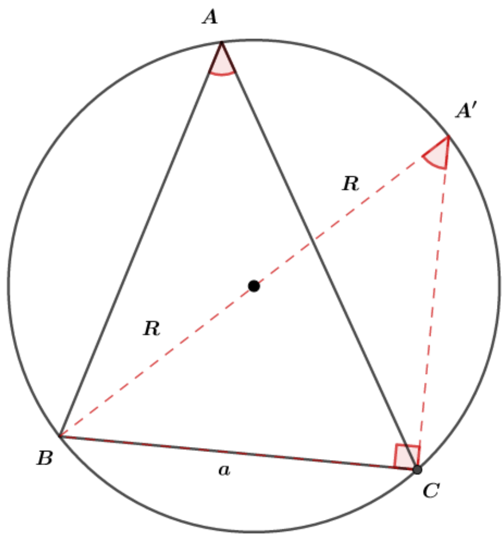
A lei dos senos afirma que a razão entre cada lado do triângulo e o seno do ângulo oposto é igual à $2R$, sendo R o raio da circunferência que a circunscreve.

Demonstração:

Seja ABC um triângulo qualquer representado pela seguinte figura:



Podemos traçar um triângulo $A'BC$ tal que A' seja a o ponto da intersecção da reta que passa pelo centro da circunferência:



Perceba que o triângulo $A'BC$ é retângulo em C, essa é uma propriedade do triângulo inscrito em uma semicircunferência. Ainda pela figura, como os ângulos A e A' enxergam a mesma corda BC, podemos afirmar que elas são iguais $A = A'$. Aplicando o seno no triângulo $A'BC$, encontramos:

$$senA' = \frac{a}{2R}$$

$$A' = A \Rightarrow \frac{a}{senA} = 2R$$

Analogamente para os outros lados.

1.2. Lei dos cossenos

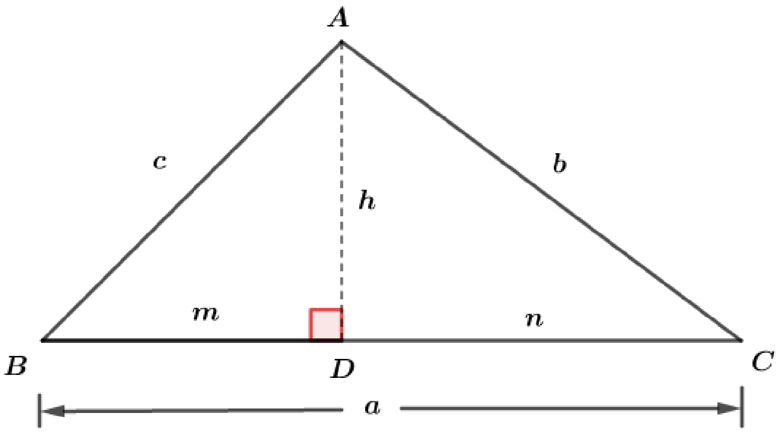
Seja ABC um triângulo qualquer e a, b, c são seus lados. A lei dos cossenos afirma que:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\, cosA} \\ \boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\, cosB} \\ \boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\, cosC} \end{aligned}}$$

Demonstração:

Devemos dividir em dois casos, um para o triângulo com ângulo agudo e outro para o triângulo com ângulo obtuso.

1) Considere o triângulo ABC dado pela figura abaixo:



Podemos ver que o triângulo ADC é retângulo, então podemos aplicar o Teorema de Pitágoras:

$$b^2 = h^2 + n^2 \quad (I)$$

Analogamente para o triângulo ADB:

$$c^2 = m^2 + h^2 \quad (II)$$

Também, de acordo com a figura, temos:

$$n = a - m \quad (III)$$

De (II), temos $h^2 = c^2 - m^2$. Substituindo (II) e (III) em (I), obtemos:

$$b^2 = c^2 - m^2 + (a - m)^2$$

$$b^2 = c^2 - m^2 + a^2 - 2am + m^2$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2am \quad (IV)$$

Observando o triângulo ADB, podemos escrever a seguinte relação:

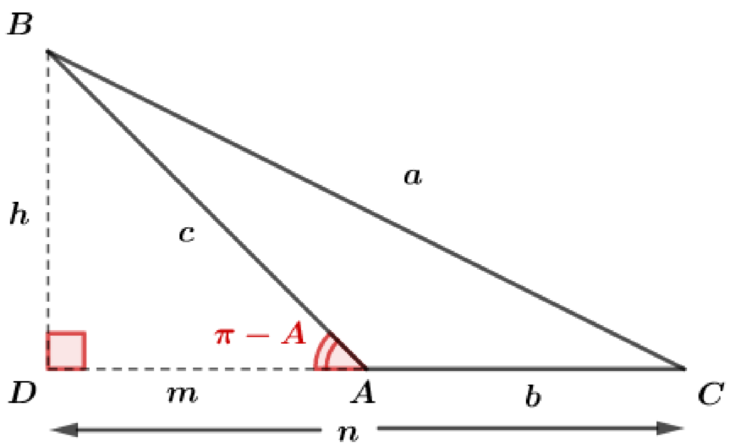
$$m = c\ cosB$$

Substituindo em (IV), obtemos a lei dos cossenos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosB$$

Os outros lados podem ser provados usando a mesma ideia.

2) Seja ABC um triângulo dado pela figura abaixo:



Os triângulos BAD e BCD são retângulos, desse modo, podemos escrever:

$$c^2 = m^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - m^2 \quad (I)$$

$$a^2 = n^2 + h^2 \quad (II)$$

Observando o triângulo BCD, temos a seguinte relação:

$$n = m + b \quad (III)$$

Substituindo (III) e (I) em (II), obtemos:

$$a^2 = (m + b)^2 + c^2 - m^2$$

$$a^2 = m^2 + 2bm + b^2 + c^2 - m^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm \quad (IV)$$

No triângulo BAD, temos:

$$m = c\cos(\pi - A) = -c\cos A$$

Substituindo essa identidade em (IV):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Os outros lados podem ser provados usando a mesma ideia.

2. Equações Trigonométricas

2.1. Equações Fundamentais

Vamos aprender a resolver equações trigonométricas. A maioria das equações trigonométricas podem ser resolvidas se conhecermos as equações fundamentais. Vamos apresentá-las:

Equações Fundamentais	
(I)	$sen\alpha = sen\beta$
(II)	$cos\alpha = cos\beta$
(III)	$tg\alpha = tg\beta$

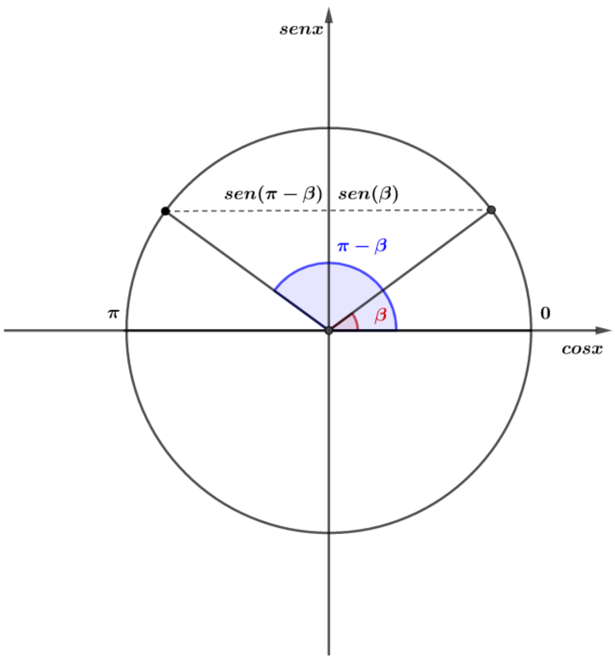
$(I)\ sen\alpha = sen\beta$

Para resolver essa equação, temos que considerar dois casos:

1) α e β são congruentes, então $\alpha = \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Perceba que temos que somar o termo $2k\pi$ para encontrar todos os ângulos que tornam essa igualdade verdadeira. $2k\pi$ é o termo que representa k voltas completas na circunferência trigonométrica.

2) α e β são suplementares, então $\alpha = \pi - \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Nesse caso, devemos lembrar que a função seno repete seu valor no primeiro e segundo quadrantes e, por isso, temos que considerar o caso desses ângulos serem suplementares um do outro.

Vamos usar o ciclo trigonométrico para melhor visualização:



$(II)\ cos\alpha = cos\beta$

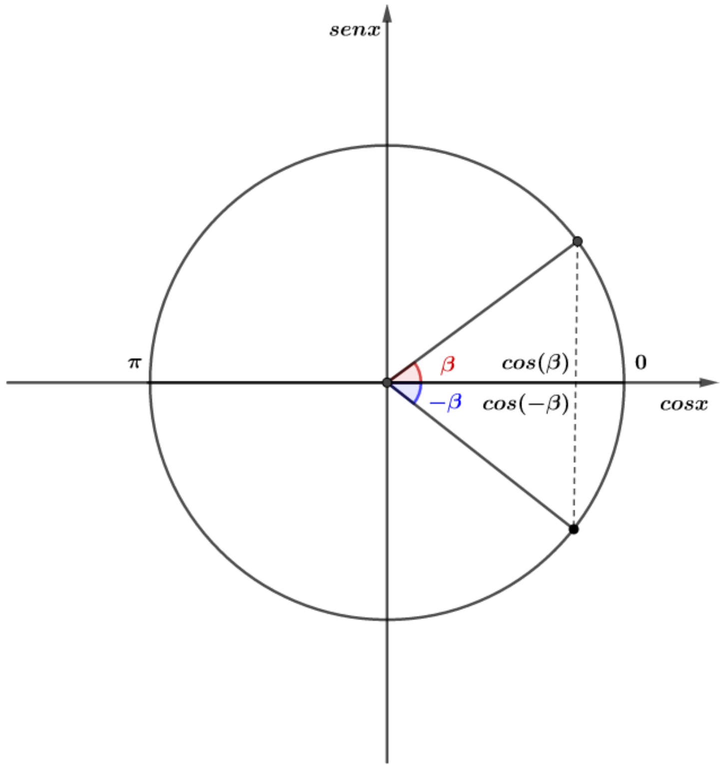
Nesse caso, também temos duas possibilidades:

1) α e β são congruentes, então $\alpha = \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2) α e β são replementares (replementares são ângulos que a relação $\alpha = 2\pi - \beta$). Assim, temos $\alpha = 2\pi - \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Perceba que podemos incluir o termo 2π em $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Dessa forma:

$$\alpha = -\beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ciclo trigonométrico dos casos:



$(III)\ tg\alpha = tg\beta$

A função tangente repete seu valor para dois casos:

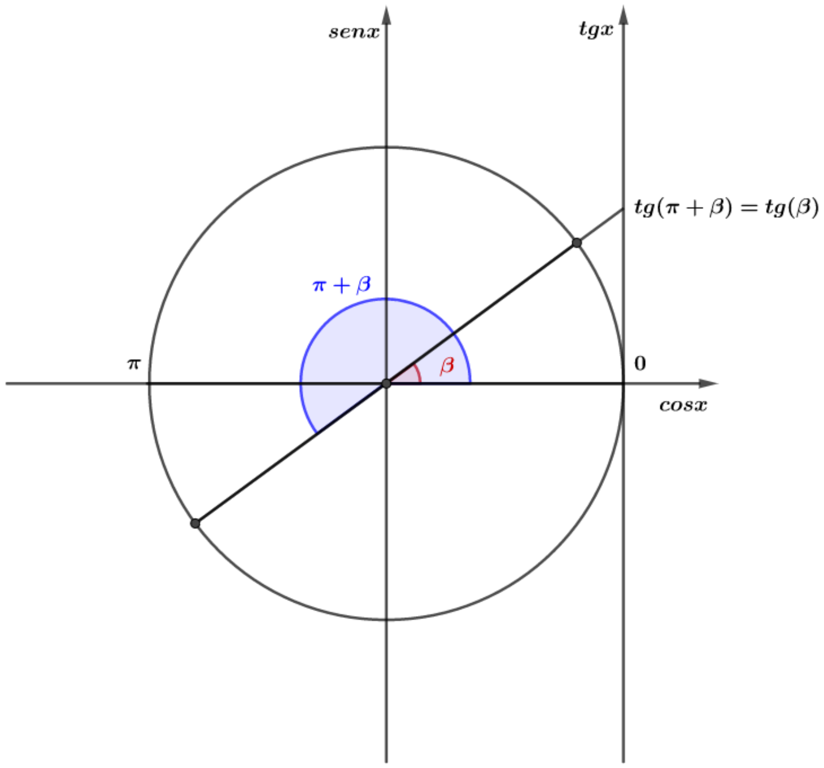
1) α e β são congruentes, então, $\alpha = \beta + 2k\pi$

2) α e β têm imagens simétricas em relação ao centro do ciclo, então, $\alpha = \pi + \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Essas duas soluções podem ser escritas em uma só:

$$x = \beta + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ciclo trigonométrico dos casos:



RESUMINDO

Equações Fundamentais	Solução
$sen\alpha = sen\beta$	$\alpha = \beta + 2k\pi$ ou $\alpha = \pi - \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$cos\alpha = cos\beta$	$\alpha = \pm\beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$tg\alpha = tg\beta$	$\alpha = \beta + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2.2. Equações Clássicas

Além das equações fundamentais, temos as equações clássicas. Vamos aprender a resolvê-las.

Equações Clássicas	
(I)	$asenx + bcosx = c\ (a, b, c \in \mathbb{R}^*)$
(II)	$a(senx + cosx) + bsenxcosx = c\ (a, b, c \in \mathbb{R}^*)$

(III)	$sen^4x + \cos^4 x = a\ (a \in \mathbb{R})$
(IV)	$sen^6x + \cos^6 x = a\ (a \in \mathbb{R})$

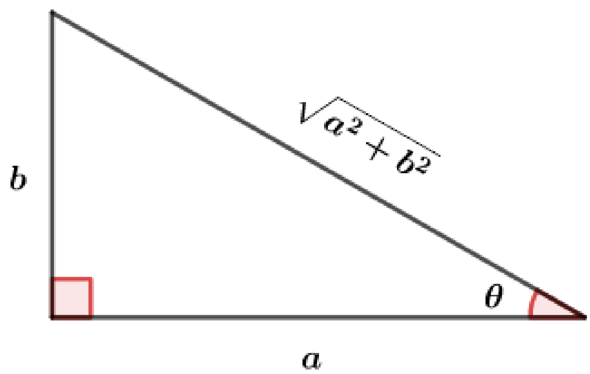
$(I)\ asenx + bcosx = c$

Método 1:

Se $\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$, podemos dividir essa equação por $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\frac{asenx}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{bcosx}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Essa divisão se baseia no seguinte triângulo retângulo:



Assim, podemos escrever:

$$sen\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Substituindo na equação, obtemos:

$$cos\theta senx + sen\theta cosx = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

A expressão à esquerda é a fórmula da soma do seno, assim, temos:

$$sen(x+\theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Com essa equação, basta encontrar o valor dos ângulos que satisfazem essa equação.

A solução é dada por:

$$x + \theta = arcsen\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$x + \theta = \pi - arcsen\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para usar esse método, devemos nos atentar à condição de existência:

$$\left|\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \leq 1$$

Que é o mesmo que dizer:

$$-1 \leq \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1$$

Método 2:

Podemos usar as seguintes identidades:

$$senx = \frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$cosx = \frac{\left(1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Fazendo $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$senx = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$cosx = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Substituindo na equação:

$$a\left(\frac{2t}{1 + t^2}\right) + b\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) = c$$

$$2at + b - bt^2 = c + ct^2$$

$$(b + c)t^2 - 2at + c - b = 0$$

Para encontrar as soluções, basta resolver a equação do segundo grau acima.

$(II)\ a(senx + cosx) + bsenxcosx = c$

Podemos fazer $z = senx + cosx$ e, assim, obtermos:

$$z = senx + cosx$$

Elevando ao quadrado:

$$z^2 = sen^2x + 2senxcosx + \cos^2 x \Rightarrow z^2 = 1 + 2senxcosx \Rightarrow senxcosx = \frac{z^2 - 1}{2}$$

Substituindo na equação:

$$az + \frac{b(z^2 - 1)}{2} = c$$

$$bz^2 + 2az - b - 2c = 0$$

Dessa forma, a solução é dada pelas raízes da equação do segundo grau acima.

Para encontrar a solução em x, devemos resolver $sen(2x) = z^2 - 1$.

A solução é dada por:

$$2x = arcsen(z^2 - 1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$2x = \pi - arcsen(z^2 - 1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$(III)\ sen^4x + cos^4x = a$

Podemos fatorar essa equação:

$$\left(\underbrace{sen^2x + \cos^2 x}_{1}\right)^2 - 2sen^2xcos^2x = a$$

$$1 - 2(senxcosx)^2 = a$$

$$\left[\frac{sen(2x)}{2}\right]^2 = \frac{1 - a}{2}$$

$$|sen(2x)| = \sqrt{2(1 - a)}$$

$$sen(2x) = \pm\sqrt{2(1 - a)}$$

Devemos analisar a condição de existência:

Condição do radical:

$$1 - a \geq 0 \Rightarrow a \leq 1$$

Condição do seno:

$$0 \leq \sqrt{2(1 - a)} \leq 1 \Rightarrow a \geq \frac{1}{2}$$

Intersecção das condições:

$$\frac{1}{2} \leq a \leq 1$$

A solução é dada por:

$$2x = arcsen\left(\pm\sqrt{2(1 - a)}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$2x = \pi - arcsen\left(\pm\sqrt{2(1-a)}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$(IV)\ sen^6 x + \cos^6 x = a$

Podemos usar a seguinte identidade:

$$sen^6 x + \cos^6 x = \left(\underbrace{sen^2 x + \cos^2 x}_{1}\right)(sen^4 x - sen^2 x cos^2 x + \cos^4 x)$$

$$sen^6 x + \cos^6 x = \underbrace{sen^4 x + \cos^4 x}_{1-2sen^2 x cos^2 x} - sen^2 x cos^2 x$$

$$sen^6 x + \cos^6 x = 1 - 3sen^2 x cos^2 x$$

Assim, substituindo na equação, obtemos:

$$1 - 3sen^2 x cos^2 x = a$$

$$1 - a = 3\left(\frac{sen(2x)}{2}\right)^2$$

$$sen^2(2x) = \frac{4(1-a)}{3}$$

$$|sen(2x)| = \sqrt{\frac{4(1-a)}{3}}$$

$$sen(2x) = \pm\sqrt{\frac{4(1-a)}{3}}$$

Devemos analisar a condição de existência:

$$1 - a \geq 0 \Rightarrow a \leq 1$$

$$0 \leq \sqrt{\frac{4(1-a)}{3}} \leq 1$$

$$4(1-a) \leq 3 \Rightarrow 1 - a \leq \frac{3}{4} \Rightarrow a \geq \frac{1}{4}$$

Intersecção das condições:

$$\frac{1}{4} \leq a \leq 1$$

A solução é dada por:

$$2x = arcsen\left(\pm\sqrt{\frac{4(1-a)}{3}}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$2x = \pi - arcsen\left(\pm\sqrt{\frac{4(1-a)}{3}}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

HORA DE PRATICAR!

1. Resolva as seguintes equações:

a) $senx = \frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $cosx = 1$
c) $tgx = \sqrt{3}$
d) $cossecx = 2$
e) $tg(5x) = tg\left(\frac{\pi}{5}\right)$
f) $sen^2x = 1 + cosx$
g) $4cosx + 3secx = 8$
h) $2 - 2cosx = senx \cdot tgx$
i) $1 + 3tg^2x = 5secx$
j) $cos3x - cosx = 0$
l) $sen3x + cos3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolução:

a) $\boldsymbol{senx = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

Sabemos que $sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, então a solução é dada por:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ ou\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ ou\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) $\boldsymbol{cosx = 1}$

Sabemos que $\cos(0) = 1$, então:

$$x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

c) $\boldsymbol{tgx = \sqrt{3}}$

Sabemos que $tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$, desse modo:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

d) $\boldsymbol{cossecx = 2}$

$$cossecx = 2 \Rightarrow \frac{1}{senx} = 2 \Rightarrow senx = \frac{1}{2}$$
$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ou\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

e) $\boldsymbol{tg(5x) = tg\left(\frac{\pi}{5}\right)}$

$$5x = \frac{\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{25} + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

f) $\boldsymbol{sen^2 x = 1 + cosx}$

$$1 - \cos^2 x = 1 + cosx$$
$$\cos^2 x + cosx = 0$$
$$cosx(cosx + 1) = 0$$
$$cosx = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
Ou
$$cosx = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$$

g) $\boldsymbol{4cosx + 3secx = 8}$

Condição de existência: $cosx \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$4cosx + \frac{3}{cosx} = 8$$
$$4\cos^2 x - 8cosx + 3 = 0$$
$$cosx = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{3}{2}\ ou \frac{1}{2}$$

Sabemos que $-1 \leq cosx \leq 1$, então:

$$cosx = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

h) $\boldsymbol{2 - 2cosx = senx \cdot tgx}$

Condição de existência: $cosx \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$2 - 2cosx = senx \cdot \frac{senx}{cosx}$$
$$2 - 2cosx = \frac{sen^2 x}{cosx}$$
$$(2 - 2cosx)cosx = 1 - \cos^2 x$$
$$2cosx - 2\cos^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$$
$$-\cos^2 x + 2cosx - 1 = 0$$
$$\cos^2 x - 2cosx + 1 = 0$$
$$(cosx - 1)^2 = 0$$
$$cosx = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

i) $\boldsymbol{1 + 3tg^2 x = 5secx}$

Podemos usar a identidade:

$$\sec^2 x = 1 + tg^2 x$$
$$1 + 3(\sec^2 x - 1) = 5secx$$
$$3\sec^2 x - 5secx - 2 = 0$$
$$secx = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = 2\ ou -\frac{1}{3}$$

Como $secx \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, temos:

$$secx = 2 \Rightarrow cosx = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

j) $\boldsymbol{cos3x - cosx = 0}$

Usando a fórmula do arco triplo do cosseno, temos:

$$cos3x = 4\cos^3 x - 3cosx$$
$$4\cos^3 x - 3cosx - cosx = 0$$
$$4\cos^3 x - 4cosx = 0$$
$$cosx(\cos^2 x - 1) = 0$$
$$cosx = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
Ou

$$\cos^2 x = 1 \Rightarrow cosx = \pm 1 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

l) $\boldsymbol{sen3x + cos3x = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

Essa é uma equação clássica. Vamos multiplicá-la por $\sqrt{2}/2$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} sen3x + \frac{\sqrt{2}}{2} cos3x = \frac{1}{2}$$

$$sen3xcos\left(\frac{\pi}{4}\right) + sen\left(\frac{\pi}{4}\right) cos3x = \frac{1}{2}$$

$$sen\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow 3x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$3x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow 3x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Gabarito:

a) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ ou \ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

b) $\boldsymbol{x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

c) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

d) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ou \ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

e) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{25} + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}}$

f) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ ou \ x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

g) $\boldsymbol{x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

h) $\boldsymbol{x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

i) $\boldsymbol{x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

j) $\boldsymbol{x = k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

l) $\boldsymbol{x = -\frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \ ou \ x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}}$

3. Inequações Trigonométricas

Para resolver inequações trigonométricas, devemos aprender a resolver os 6 tipos diferentes de inequações.

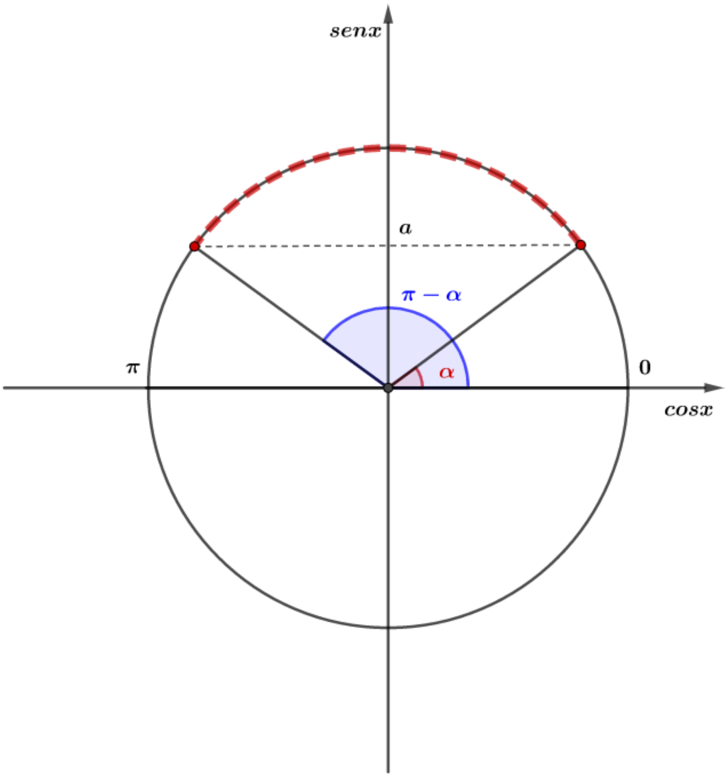
Seja a um número real dado:

Inequações Fundamentais	
(I)	$senx \geq a$
(II)	$senx \leq a$
(III)	$cosx \geq a$

(IV)	$cosx \leq a$
(V)	$tgx \geq a$
(VI)	$tgx \leq a$

$(I)\ senx \geq a$

Sempre que resolvemos inequações, podemos usar o gráfico para nos ajudar a ver o resultado. Vamos usar o ciclo trigonométrico e inserir $sen\alpha = a$:

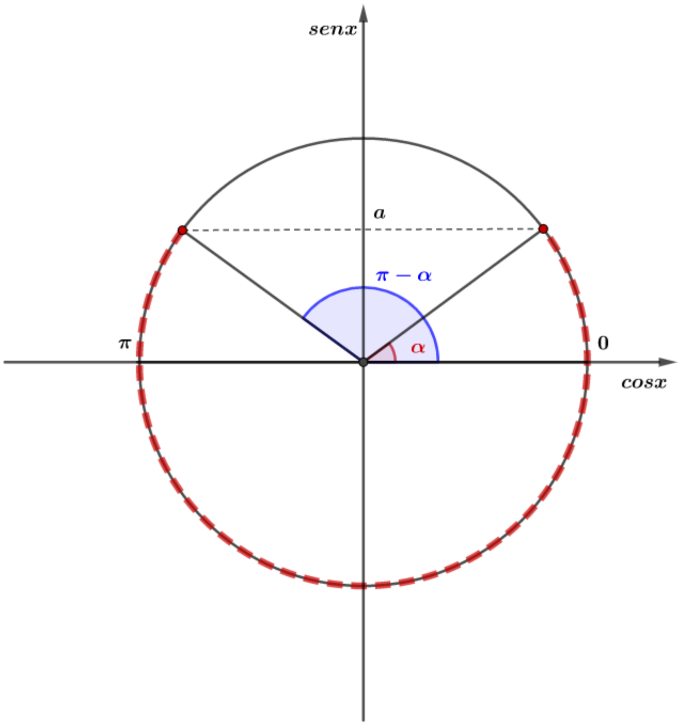


Observando o ciclo, podemos afirmar que os valores do seno que são maiores ou iguais a a devem pertencer ao intervalo:

$$\boldsymbol{arcsen(a) + 2k\pi \leq x \leq \pi - arcsen(a) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

$(II)\ senx \leq a$

Sendo $sen\alpha = a$, podemos usar o ciclo trigonométrico:



Observando a figura, podemos afirmar que os valores de x que satisfazem a inequação são dados por:

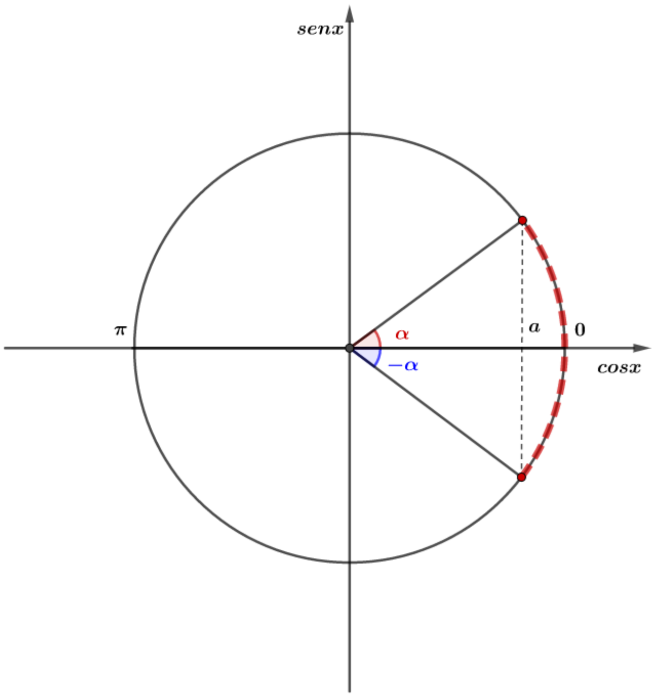
$$\mathbf{0 + 2k\pi \leq x \leq arcsen(a) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

Ou

$$\mathbf{\pi - arcsen(a) + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

$(III)\ cosx \geq a$

Usando o ciclo trigonométrico e considerando $cos\alpha = a$, temos:

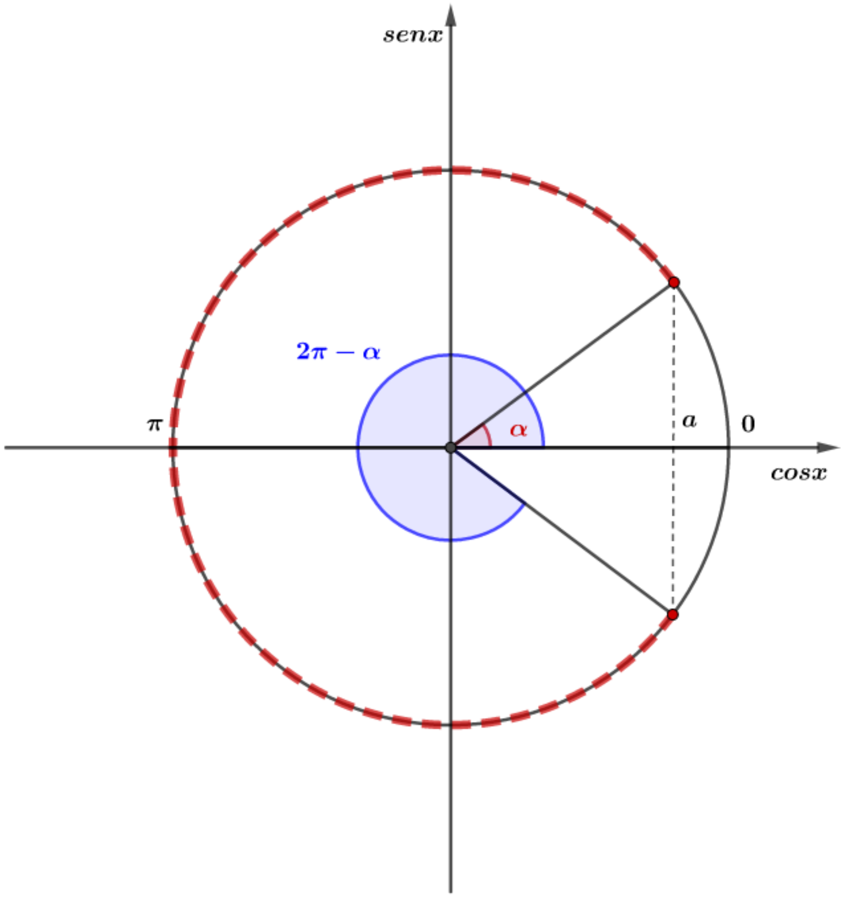


Pela figura, podemos ver que as soluções em x são dadas por:

$$-\boldsymbol{arccos(a) + 2k\pi \leq x \leq arccos(a) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

$(IV)\ cosx \leq a$

Usando o ciclo trigonométrico e considerando $cos\alpha = a$:

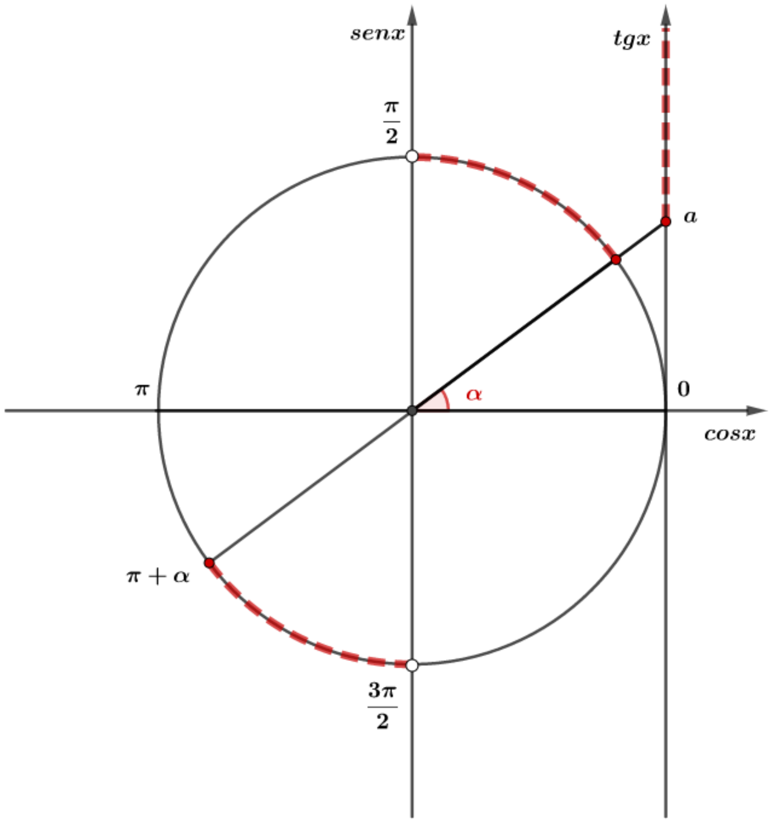


Podemos ver que a solução é dada por:

$$\boldsymbol{arccos(a) + 2k\pi \leq x \leq 2\pi - arccos(a) + 2k\pi}$$

$(V)\ tgx \geq a$

Fazendo $tg\alpha = a$ e usando o ciclo trigonométrico, temos:



Analisando a figura, podemos ver que as soluções são dadas por:

$$arctg(a) + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

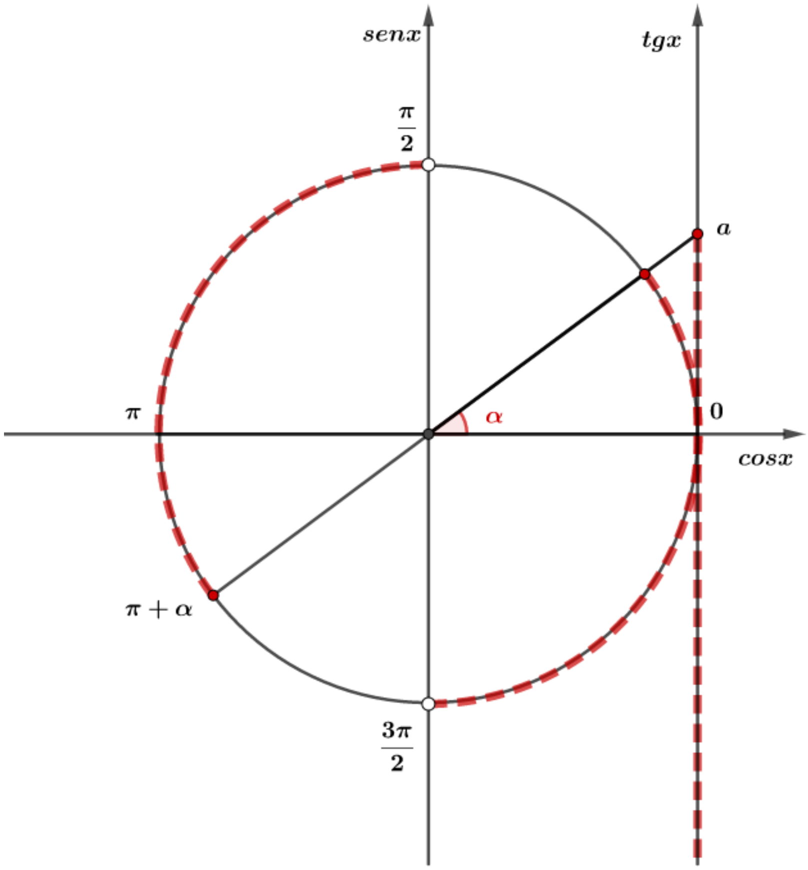
$$\pi + arctg(a) + 2k\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

Podemos resumir essas duas soluções:

$$\boldsymbol{arctg(a) + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

$(VI)\ tgx \leq a$

Fazendo $tg\alpha = a$ e usando o ciclo trigonométrico:



Pela figura, podemos ver que a solução é dada por:

$$\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \pi + arctg(a) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

2. Resolva as seguintes inequações:

a) $|senx| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $senx + cosx \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos^2 x \geq \frac{1}{2}$

d) $tg^3x + 3 > 3tgx + tg^2x$

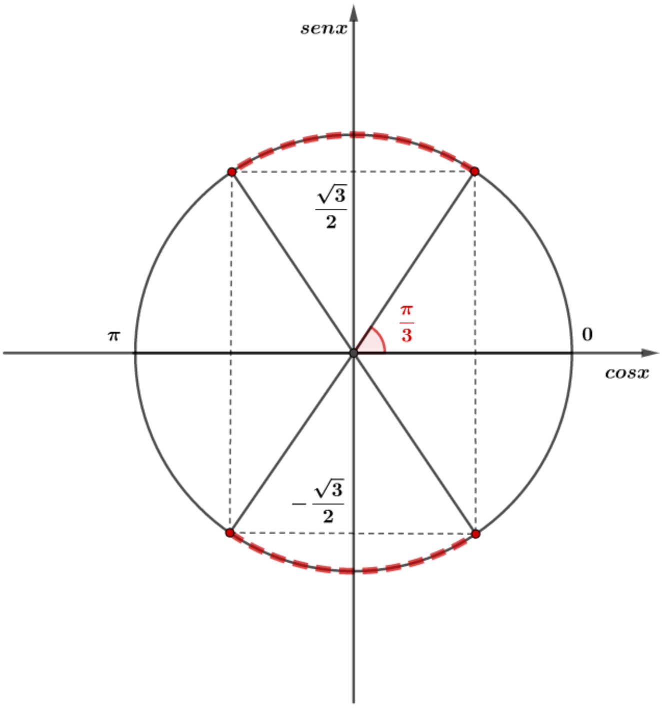
e) $sen^6x + \cos^6 x < \frac{7}{16}$

Resolução:

a) $|senx| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vamos usar o círculo trigonométrico para nos auxiliar:

Sabemos que $sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, então, temos:



Podemos ver que os valores de x que satisfazem essa inequação é:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) $\boldsymbol{senx + cosx \geq \frac{\sqrt{2}}{2}}$

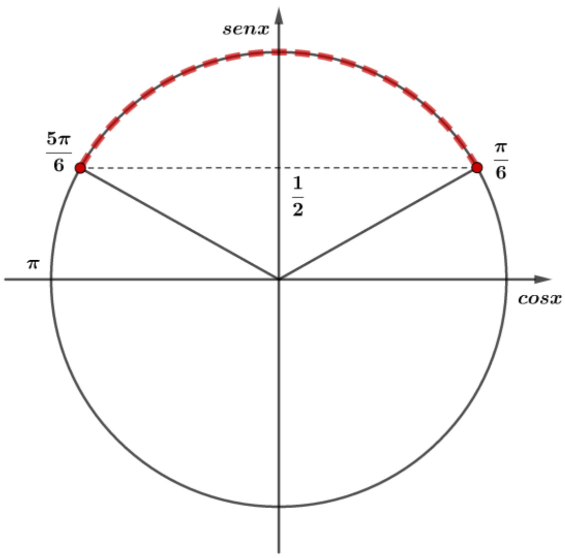
Vamos multiplicar a inequação por $\sqrt{2}/2$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} senx + \frac{\sqrt{2}}{2} cosx \geq \frac{1}{2}$$

$$senxcos\left(\frac{\pi}{4}\right) + sen\left(\frac{\pi}{4}\right) cosx \geq \frac{1}{2}$$

$$sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{2}$$

Usando o ciclo trigonométrico:



Assim, a solução é dada por:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{\pi}{12}+2k\pi \le x \le \frac{7\pi}{12}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

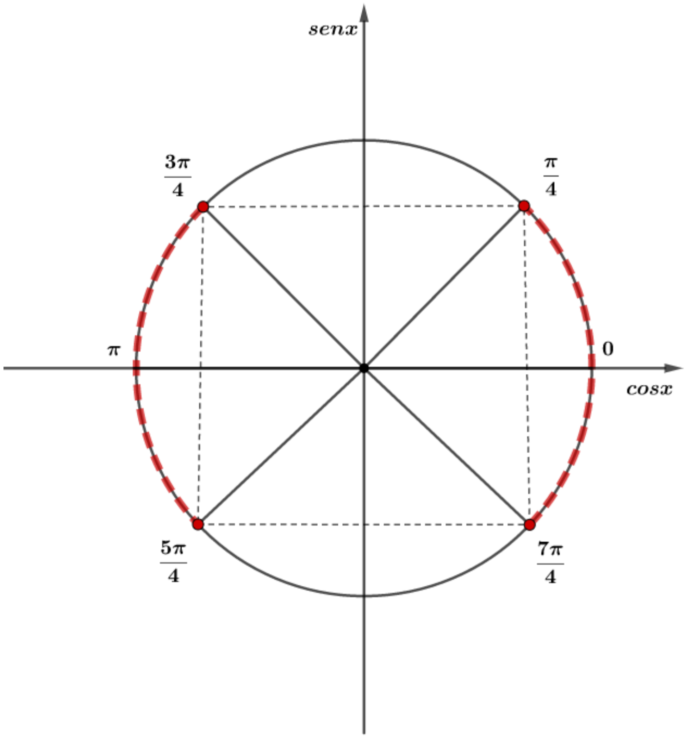
c) $\boldsymbol{\cos^2 x \ge \frac{1}{2}}$

Como ambos os lados são positivos, podemos escrever:

$$\sqrt{\cos^2 x} \ge \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$cosx \ge \frac{\sqrt{2}}{2} \ ou \ cosx \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Esboçando o ciclo trigonométrico:



A solução é dada por:

$$-\frac{\pi}{4}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{4}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$\frac{3\pi}{4}+2k\pi \le x \le \frac{5\pi}{4}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Podemos resumir essa solução em uma única:

$$-\frac{\pi}{4}+k\pi \le x \le \frac{\pi}{4}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

d) $\boldsymbol{tg^3 x + 3 > 3tgx + tg^2 x}$

Vamos fatorar as expressões:

$$tg^3x - tg^2x + 3 - 3tgx > 0$$
$$tg^2x(tgx-1) + 3(1-tgx) > 0$$
$$(tgx-1)(tg^2x-3) > 0$$

Possibilidades:

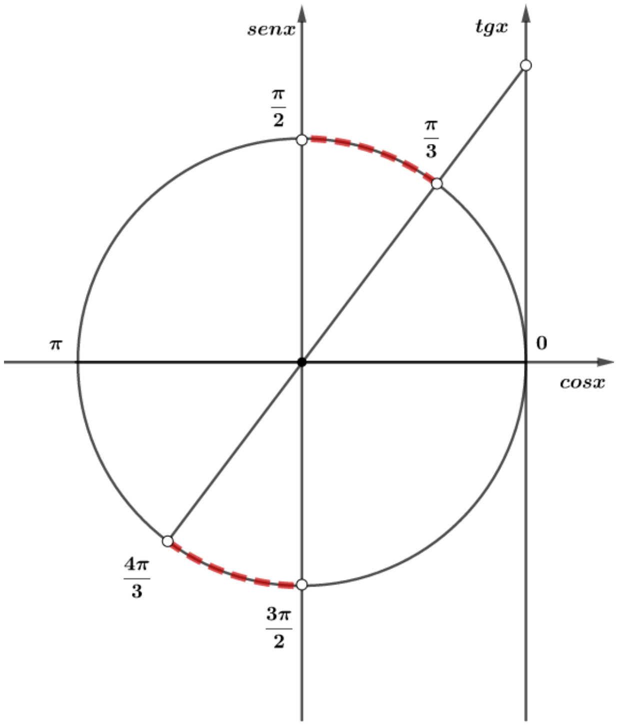
$$\begin{cases} tgx - 1 > 0 \\ tg^2x - 3 > 0 \end{cases} ou \begin{cases} tgx - 1 < 0 \\ tg^2x - 3 < 0 \end{cases}$$

Para o primeiro caso:

$$tgx - 1 > 0 \Rightarrow tgx > 1$$
$$tg^2x - 3 > 0 \Rightarrow tgx > \sqrt{3} \ ou \ tgx < -\sqrt{3}$$

Fazendo a intersecção das condições, temos:

$$tgx > \sqrt{3}$$



A solução é dada por:

$$\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para o segundo caso:

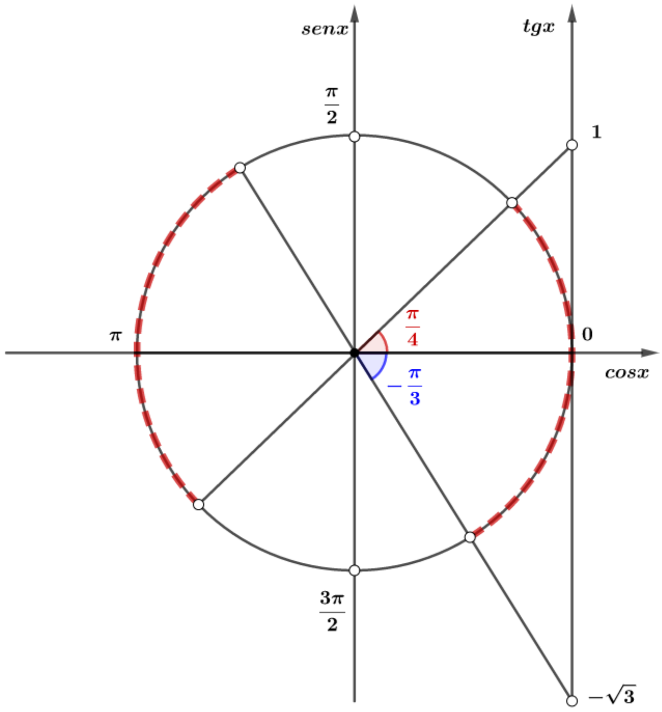
$$tgx < 1$$

E

$$-\sqrt{3} < tgx < \sqrt{3}$$

Fazendo a intersecção:

$$-\sqrt{3} < tgx < 1$$



A solução é dada por:

$$-\frac{\pi}{3}+k\pi < x < \frac{\pi}{4}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, a solução completa é:

$$\frac{\pi}{3}+k\pi < x < \frac{\pi}{2}+k\pi \ ou \ -\frac{\pi}{3}+k\pi < x < \frac{\pi}{4}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

e) $\boldsymbol{sen^6 x + \cos^6 x < \frac{7}{16}}$

Vamos usar a identidade:

$$sen^6 x + \cos^6 x = 1 - 3sen^2 x cos^2 x$$

$$1 - 3sen^2 x cos^2 x < \frac{7}{16}$$

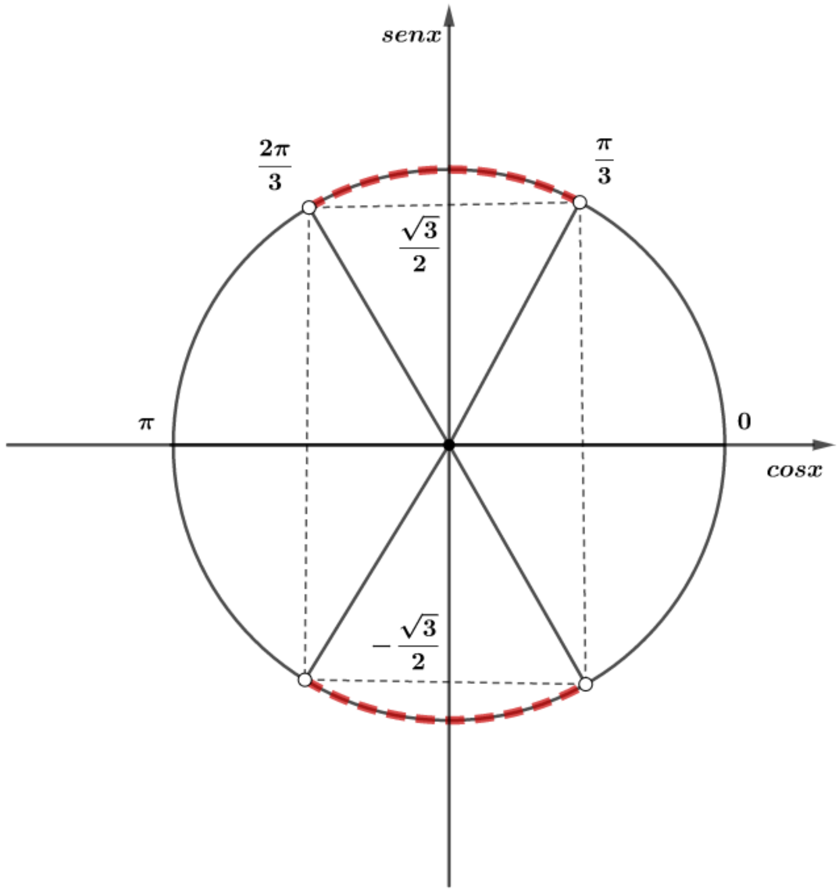
$$\frac{9}{16} < 3\left(\frac{sen(2x)}{2}\right)^2$$

$$\frac{3}{16} < \frac{sen^2(2x)}{4}$$

$$sen^2(2x) > \frac{3}{4}$$

$$sen(2x) > \frac{\sqrt{3}}{2} \ ou \ sen(2x) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Usando o ciclo trigonométrico para visualizar a solução:



Assim, podemos concluir:

$$\frac{\pi}{3} + k\pi < 2x < \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Gabarito:

a) $\boldsymbol{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ ou \ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

b) $\boldsymbol{-\frac{\pi}{12} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

c) $\boldsymbol{-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

d) $\boldsymbol{\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \ ou \ -\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

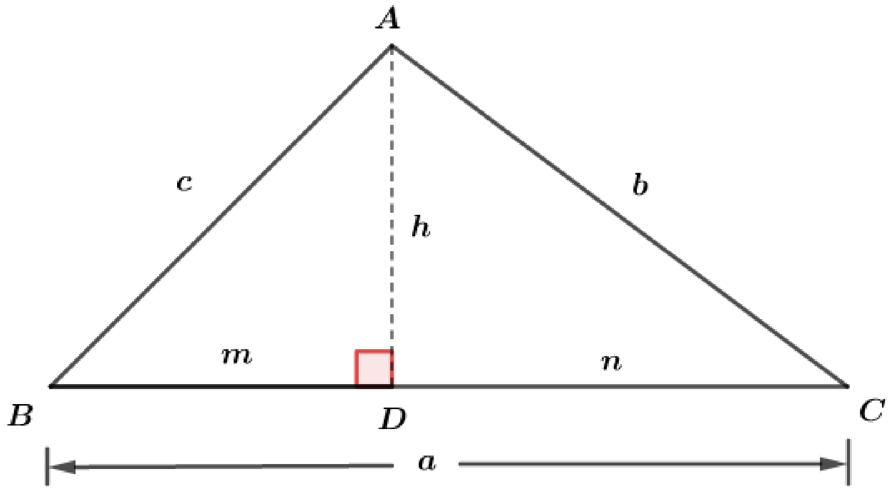
e) $\boldsymbol{\frac{\pi}{3} + k\pi < 2x < \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}}$

4. Resumo

4.1. Tabela de Ângulos Trigonométricos

Graus	Radianos	sen	cos	tg
$0°$	0	0	1	0
$15°$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
$18°$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$
$36°$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$22{,}5°$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	*Não existe*
$180°$	π	0	-1	0
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	*Não existe*

4.2. Lei dos senos e cossenos



4.2.1. Lei dos Senos

$$\boxed{\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R}$$

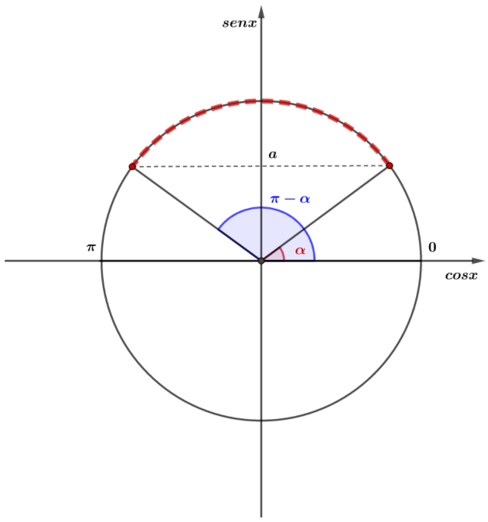
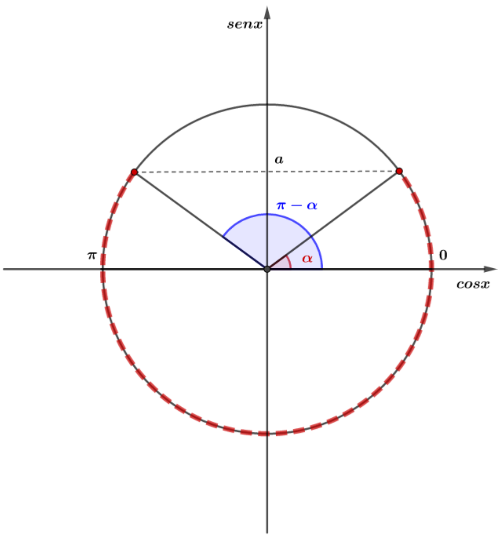
4.2.2. Lei dos Cossenos

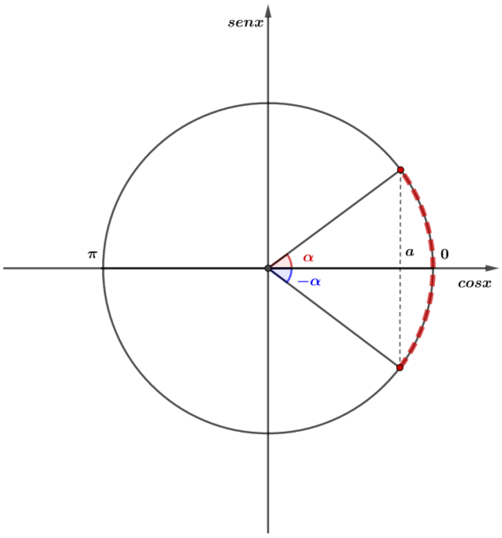
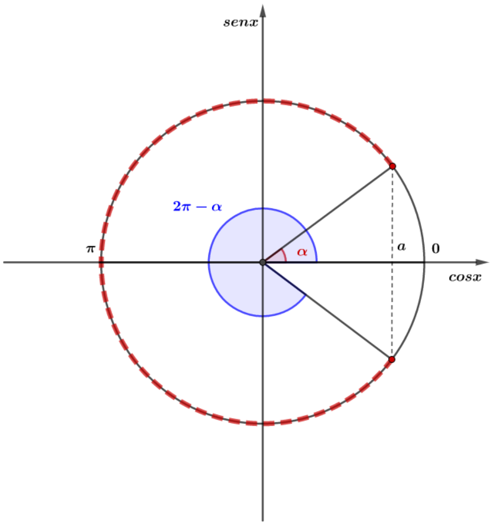
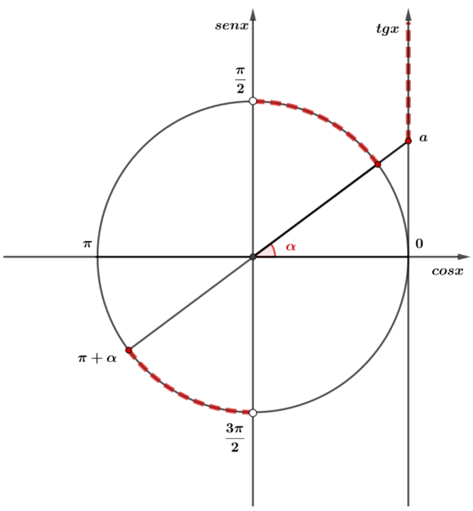
$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cosA \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosB \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cosC \end{array}}$$

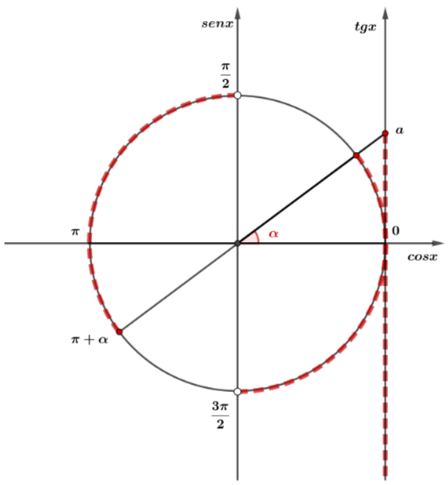
4.3. Equações Trigonométricas

Equações Fundamentais	Solução
$sen\alpha = sen\beta$	$\alpha = \beta + 2k\pi$ ou $\alpha = \pi - \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$cos\alpha = cos\beta$	$\alpha = \pm\beta + 2k\pi$
$tg\alpha = tg\beta$	$\alpha = \beta + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

4.4. Inequações Trigonométricas

Inequações Fundamentais	Ciclo Trigonométrico	Solução
$senx \geq a$		$arcsen(a) + 2k\pi \leq x$ e $x \leq \pi - arcsen(a) + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
$senx \leq a$		$0 + 2k\pi \leq x \leq arcsen(a) + 2k\pi$ Ou $\pi - arcsen(a) + 2k\pi \leq x$ $x \leq 2\pi + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

$cosx \geq a$		$-\arccos(a) + 2k\pi \leq x$ e $x \leq \arccos(a) + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
$cosx \leq a$		$x \geq \arccos(a) + 2k\pi$ e $x \leq 2\pi - \arccos(a) + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
$tgx \geq a$		$arctg(a) + k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$tgx \leq a$		$\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \pi + arctg(a) + k\pi$

5. Lista de Questões

Lista de Questões Sem Comentários

3. (Espcex/2019)

O número de raízes da equação $2\cos^2 x + 3cosx + 1 = 0$ no intervalo $]0, 2\pi[$ é

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

4. (Espcex/2018)

O conjunto solução da inequação $2sen^2x - cosx - 1 \geq 0$, no intervalo $]0, 2\pi]$ é

a) $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$

b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$

c) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

d) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

e) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}\right]$

5. (Espcex/2017)

A soma das soluções da equação $\cos(2x) - \cos(x) = 0$, com $x \in [0, 2\pi)$, é igual a

a) $\frac{5\pi}{3}$

b) 2π

c) $\frac{7\pi}{3}$

d) π

e) $\frac{8\pi}{3}$

6. (Espcex/2015)

Seja $\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 3 - \log_{10} 7}$. O conjunto solução da desigualdade $3^{\cos(x)} \leq \left(\frac{3}{7}\right)^{\beta}$ no intervalo $[0, 2\pi)$, é igual a

a) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$

b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

c) $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right]$

d) $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right]$

e) $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

7. (Espcex/2015)

A soma de todas as soluções da equação $2\cos^3(x) - \cos^2(x) - 2\cos(x) + 1 = 0$, que estão contidas no intervalo $[0, 2\pi]$, é igual a

a) 2π

b) 3π

c) 4π

d) 5π

e) 6π

8. Exercício de Fixação

Resolver a equação na variável x

$$x^2 sen\alpha - 2x cos\alpha - sen\alpha = 0, \text{com } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

9. Exercício de Fixação

Determine o conjunto dos números reais x tais que $sen\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

10. Exercício de Fixação

Resolver em $\mathbb{R}$:

a) $sen^2 x = 1$

b) $sen\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

c) $\frac{1}{sen^2 x} = 1 - \frac{cosx}{senx}$

d) $sen(4x) - \cos x = 0$

e) $senx + sen(3x) + sen(4x) + sen(6x) = 0$

f) $\sqrt{3}cosx + senx = 1$

g) $sen(5x) + senx = 2sen(3x)$

h) $senx + cosx = sen(2x) + \cos(2x)$

11. Exercício de Fixação

Resolver em $[0, 2\pi[$:

$$sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

12. Exercício de Fixação

Para que valores de $m, m \in \mathbb{R}$, a equação $m \cdot senx + cosx = m$ tem solução?

13. Exercício de Fixação

Resolver em $[0, 2\pi[$:

$$sen^3 x \cdot cosx - senxcos^3 x = \frac{1}{4}$$

14. Exercício de Fixação

Resolva as seguintes equações:

a) $\sec^2 x = 2tgx$

b) $(1 + cosx)tg\left(\frac{x}{2}\right) = 0$

c) $\frac{1+senx}{1+cosx} = \frac{1}{2}$

15. Exercício de Fixação

Resolva as seguintes inequações:

a) $|tgx| > \sqrt{3}$

b) $\frac{cosx}{1+cos2x} < 0$

c) $2cosx\left(cosx - \sqrt{8}tgx\right) < 5$

d) $cotgx + \frac{senx}{cosx-2} \geq 0$

e) $\frac{\cos^2(2x)}{\cos^2 x} \geq 3tgx$

16. Exercício de Fixação

Calcular $sen\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Gabarito

4. d
5. c
6. b
7. b
8. d
9. $\boldsymbol{S = \{cotg\alpha - cossec\alpha; cotg\alpha + cossec\alpha\}}$
10. $\boldsymbol{S = \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}}$
11. a) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

    b) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}}$

    c) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

    d) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{10} - \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = \frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}}$

    e) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3} - \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}}$

    f) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$ ou $\boldsymbol{x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

    g) $\boldsymbol{x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

h) $\boldsymbol{x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}}$

12. $\boldsymbol{S = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}}$
13. $\boldsymbol{\forall m \in \mathbb{R}}$
14. $\boldsymbol{S = \left\{\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}; \frac{11\pi}{4}; \frac{15\pi}{8}\right\}}$
15. $\boldsymbol{x = 2k\pi\ ou\ x = -2\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ e\ \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$
16. a) $\boldsymbol{\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

b) $\boldsymbol{\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi}$

c) $\boldsymbol{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

d) $\boldsymbol{\pi + 2k\pi < x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ ou\ 2k\pi < x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

e) $\boldsymbol{k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\ ou\ \frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

17. Demonstração

Lista de Questões Comentadas

4. (Espcex/2019)

O número de raízes da equação $2\cos^2 x + 3cosx + 1 = 0$ no intervalo $]0, 2\pi[$ é

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

Comentários

Vamos encontrar as raízes da equação:

$$cosx = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{4} = -1\ ou - \frac{1}{2}$$

Para $cosx = -1$ e $x \in]0, 2\pi[$:

$$cosx = -1 \Rightarrow x = \pi$$

Para $cosx = -1/2$:

$$cosx = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}\ ou\ x = \frac{4\pi}{3}$$

Portanto, temos 3 raízes distintas.

Gabarito: "d".

---

5. (Espcex/2018)

O conjunto solução da inequação $2sen^2x - cosx - 1 \geq 0$, no intervalo $]0, 2\pi]$ é

a) $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$

b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$

c) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

d) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

e) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}\right]$

Comentários

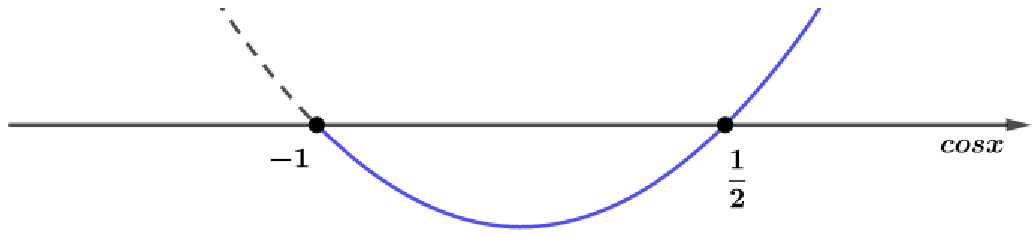
Reescrevendo a inequação, obtemos:

$$2(1 - \cos^2 x) - cosx - 1 \geq 0$$
$$-2\cos^2 x - cosx + 1 \geq 0$$
$$2\cos^2 x + cosx - 1 \leq 0$$

Encontrando as raízes:

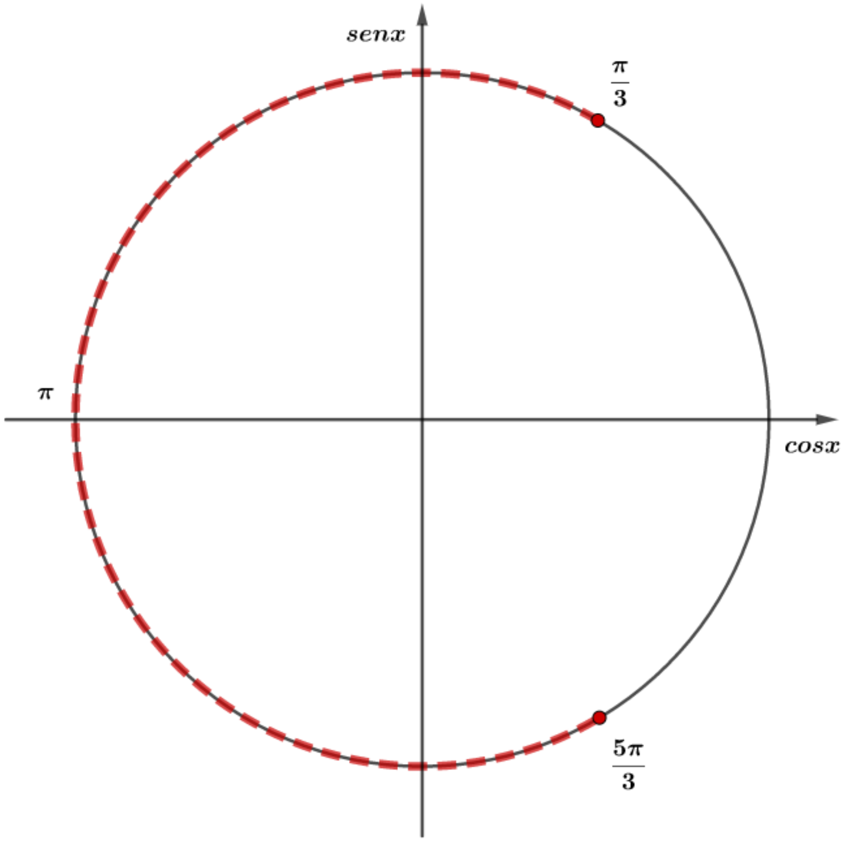
$$cosx = \frac{(-1 \pm \sqrt{9})}{4} = -1\ ou\ \frac{1}{2}$$
$$2(cosx + 1)\left(cosx - \frac{1}{2}\right) \leq 0$$

Estudando o sinal dessa função, temos:



$$-1 \leq cosx \leq \frac{1}{2}$$

Usando o ciclo trigonométrico:



Assim, podemos ver que:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Queremos as soluções no intervalo $]0,2\pi]$, assim, temos:

$$x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$$

Gabarito: "c".

---

6. (Espcex/2017)

A soma das soluções da equação $\cos(2x) - \cos(x) = 0$, com $x \in [0, 2\pi)$, é igual a

a) $\frac{5\pi}{3}$

b) 2π

c) $\frac{7\pi}{3}$

d) π

e) $\frac{8\pi}{3}$

Comentários

Desenvolvendo a equação, obtemos:

$$2\cos^2 x - 1 - \cos x = 0$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

Encontrando as raízes dessa equação:

$$cosx = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = 1 \; ou - \frac{1}{2}$$

Para $x \in [0, 2\pi)$:

$$cosx = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$cosx = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \; ou \; x = \frac{4\pi}{3}$$

Somando as raízes:

$$S = 0 + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 2\pi$$

Gabarito: “b”.

---

7. (Espcex/2015)

Seja $\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 3 - \log_{10} 7}$. O conjunto solução da desigualdade $3^{\cos(x)} \leq \left(\frac{3}{7}\right)^{\beta}$ no intervalo $[0, 2\pi)$, é igual a

a) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$

b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

c) $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right]$

d) $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right]$

e) $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

Comentários

Simplificando β usando as propriedades do logaritmo, temos:

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} \frac{3}{7}}$$

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \log_{\frac{3}{7}} 3$$

$$\beta = \log_{\frac{3}{7}} 3^{\frac{1}{2}}$$

$$3^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{7}\right)^{\beta}$$

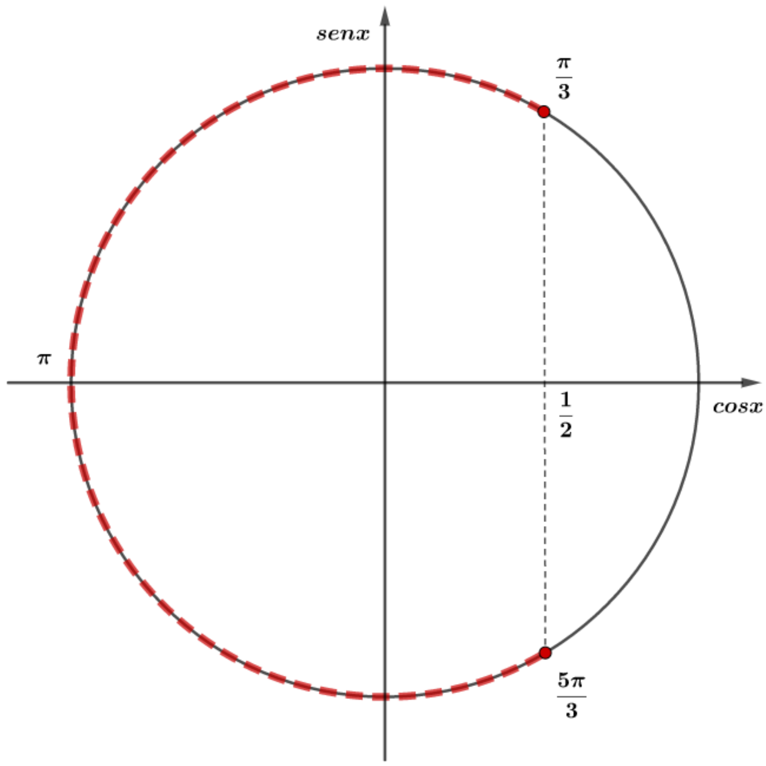
Substituindo na inequação:

$$3^{cosx} \leq 3^{\frac{1}{2}}$$

Como a função exponencial é injetora, temos:

$$cosx \leq \frac{1}{2}$$

Usando o ciclo trigonométrico:



Para $x \in [0,2\pi)$:

$$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$$

Gabarito: "b".

---

8. (Espcex/2015)

A soma de todas as soluções da equação $2\cos^3(x) - \cos^2(x) - 2\cos(x) + 1 = 0$, que estão contidas no intervalo $[0, 2\pi]$, é igual a

a) 2π

b) 3π

c) 4π

d) 5π

e) 6π

Comentários

Vamos fatorar a expressão:

$$2\cos(x)\,(\cos^2(x) - 1) - (\cos^2(x) - 1) = 0$$
$$(2\cos x - 1)(\cos^2 x - 1) = 0$$

As raízes são dadas por:

$$cosx = \frac{1}{2}\ ou \cos x = \pm 1$$

Para $x \in [0, 2\pi]$:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}\ ou\ x = \frac{5\pi}{3}$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0\ ou\ x = 2\pi$$

$$cosx = -1 \Rightarrow x = \pi$$

Somando as raízes, temos:

$$S = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} + 2\pi + \pi = 5\pi$$

Gabarito: "d".

---

9. Exercício de Fixação

Resolver a equação na variável x

$$x^2 sen\alpha - 2xcos\alpha - sen\alpha = 0, \text{com } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Comentários

Encontrando as raízes:

$$x = \frac{cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha + sen^2\alpha}}{sen\alpha} = \frac{cos\alpha \pm 1}{sen\alpha} = cotg\alpha \pm cossec\alpha$$

Portanto, as raízes são dadas por:

$$S = \{cotg\alpha - cossec\alpha; cotg\alpha + cossec\alpha\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \{cotg\alpha - cossec\alpha; cotg\alpha + cossec\alpha\}}$

---

10. Exercício de Fixação

Determine o conjunto dos números reais x tais que $sen\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Comentários

Sabemos que $sen(k\pi) = 0, k \in \mathbb{Z}$. Então:

$$2x - \frac{\pi}{3} = k\pi$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

Portanto, a solução é dada por:

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}}$

---

11. Exercício de Fixação

Resolver em $\mathbb{R}$:

a) $sen^2x = 1$

b) $sen\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

c) $\frac{1}{sen^2x} = 1 - \frac{cosx}{senx}$

d) $sen(4x) - \cos x = 0$

e) $senx + sen(3x) + sen(4x) + sen(6x) = 0$

f) $\sqrt{3}cosx + senx = 1$

g) $sen(5x) + senx = 2sen(3x)$

h) $senx + cosx = sen(2x) + \cos(2x)$

Comentários

a) $sen^2x = 1$

$$senx = \pm 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) $sen\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$3x - \frac{\pi}{2} = k\pi \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

c) $\frac{1}{sen^2x} = 1 - \frac{cosx}{senx}$

$$cossec^2x = 1 - cotgx$$

Usando a relação fundamental:

$$1 + cotg^2x = 1 - cotgx$$
$$cotg^2 + cotgx = 0$$
$$cotgx(cotgx + 1) = 0$$

Raízes:

$$cotgx = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$cotgx = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

d) $sen(4x) - cosx = 0$

$$sen(4x) = cosx$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = cosx$$

$$\frac{\pi}{2} - 4x = \pm x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$4x \pm x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi$$

$$5x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{10} - \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

e) $senx + sen(3x) + sen(4x) + sen(6x) = 0$

Vamos transformar as somas dos senos em produto:

$$senx + sen(6x) + sen(3x) + sen(4x) = 0$$

$$2sen\left(\frac{7x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x}{2}\right) + 2sen\left(\frac{7x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$sen\left(\frac{7x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{5x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 0$$

Temos as seguintes raízes:

$$\begin{cases} sen\left(\frac{7x}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{5x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$sen\left(\frac{7x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{7x}{2} = k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos\left(\frac{5x}{2}\right) = -\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{5x}{2}\right) = \cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right)$$

$$\pi - \frac{x}{2} = \pm\frac{5x}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{2} \pm \frac{5x}{2} = \pi - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \pi - 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} - \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$-2x = \pi - 2k\pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

f) $\sqrt{3}cosx + senx = 1$

Vamos dividir a equação por 2:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}cosx + \frac{1}{2}senx = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)cosx + sen\left(\frac{\pi}{6}\right)senx = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

g) $sen(5x) + senx = 2sen(3x)$

Fazendo a transformação de soma em produto, temos:

$$2sen\left(\frac{6x}{2}\right)\cos\left(\frac{4x}{2}\right) = 2sen(3x)$$

$$sen(3x)(\cos(2x) - 1) = 0$$

$$sen(3x) = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$\cos(2x) = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

h) $senx + cosx = sen(2x) + \cos(2x)$

Isolando seno e cosseno:

$$senx - sen(2x) = \cos(2x) - cosx$$

Usando a fórmula de Prostaférese:

$$\underbrace{2\,sen\left(\frac{-x}{2}\right)}_{-sen\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{3x}{2}\right) = -2sen\left(\frac{3x}{2}\right)sen\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$sen\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{3x}{2}\right) - sen\left(\frac{3x}{2}\right)\right) = 0$$

Raízes:

$$sen\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$\cos\left(\frac{3x}{2}\right) - sen\left(\frac{3x}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{3x}{2}\right) = sen\left(\frac{3x}{2}\right)$$

$$tg\left(\frac{3x}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

b) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}}$

c) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

d) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{10} - \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = \frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}}$

e) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3} - \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}}$

f) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$ **ou** $\boldsymbol{x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

g) $\boldsymbol{x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

h) $\boldsymbol{x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}}$

---

12. Exercício de Fixação

Resolver em $[0, 2\pi[$:

$$sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Comentários

Transformando a soma em produto, temos:

$$2sen\left(\frac{2x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2senxcos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{2senx\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$senx = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ou \ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para $x \in [0, 2\pi[$:

$$x = \frac{\pi}{6} \ ou \ x = \frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore S = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}}$

---

13. Exercício de Fixação

Para que valores de $m, m \in \mathbb{R}$, a equação $m \cdot senx + cosx = m$ tem solução?

Comentários

Vamos isolar m:

$$m(1 - senx) = cosx$$

$$m = \frac{cosx}{1 - senx}$$

Usando as seguintes identidades:

$$\boxed{senA = \frac{2tg\left(\frac{A}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

$$\boxed{\cos(A) = \frac{1 - tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

$$m = \frac{1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)}$$

$$m = \frac{\left(1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2tg\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$m=\frac{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(1-tg\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}$$

$$m=\frac{\left(1-tg\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(1+tg\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\left(1-tg\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}$$

$$m=\frac{1+tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1-tg\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Isolando a tangente:

$$m-mtg\left(\frac{x}{2}\right)=1+tg\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$tg\left(\frac{x}{2}\right)(1+m)=m-1$$

$$tg\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{m-1}{1+m}$$

Como a função tangente possui imagem no conjunto dos reais, temos que a única restrição é $1+m\neq 0$:

$$1+m\neq 0\Rightarrow m\neq -1$$

Para $m=-1$, temos:

$$-senx+cosx=-1$$

Esse caso possui solução para:

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

Portanto, $\forall m\in\mathbb{R}$, a equação possui solução.

Gabarito: $\forall \boldsymbol{m}\in\mathbb{R}$

---

14. Exercício de Fixação

Resolver em $[0,2\pi[$:

$$sen^3x\cdot cosx-senxcos^3x=\frac{1}{4}$$

Comentários

Vamos fatorar a expressão:

$$\underbrace{senx\cdot cosx}_{\frac{sen(2x)}{2}}\left(\underbrace{sen^2x-\cos^2x}_{-\cos(2x)}\right)=\frac{1}{4}$$

$$-\frac{sen(2x)\cos(2x)}{2} = \frac{1}{4}$$
$$2sen(2x)\cos(2x) = -1$$
$$sen(4x) = -1$$

As raízes são dadas por:

$$4x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Para o intervalo determinado:

$$x = \frac{3\pi}{8}\ ou\ x = \frac{7\pi}{8}\ ou\ x = \frac{11\pi}{8}\ ou\ x = \frac{15\pi}{8}$$
$$\therefore S = \left\{\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}; \frac{11\pi}{4}; \frac{15\pi}{8}\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left\{\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}; \frac{11\pi}{4}; \frac{15\pi}{8}\right\}}$

---

15. Exercício de Fixação

Resolva as seguintes equações:

a) $\sec^2 x = 2tgx$

b) $(1 + cosx)tg\left(\frac{x}{2}\right) = 0$

c) $\frac{1+senx}{1+cosx} = \frac{1}{2}$

Comentários

a) Vamos usar a relação fundamental $\sec^2 x = 1 + tg^2x$:

$$1 + tg^2x = 2tgx$$
$$tg^2x - 2tgx + 1 = 0$$
$$(tgx - 1)^2 = 0$$
$$tgx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) Escrevendo $cosx$ em função de $tg\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$cosx = \frac{1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$
$$\left(1 + \frac{1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)tg\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\underbrace{\frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}}_{senx} = 0$$

$$senx = 0$$

$$\Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

c) Desenvolvendo a equação:

$$2 + 2senx = 1 + cosx$$

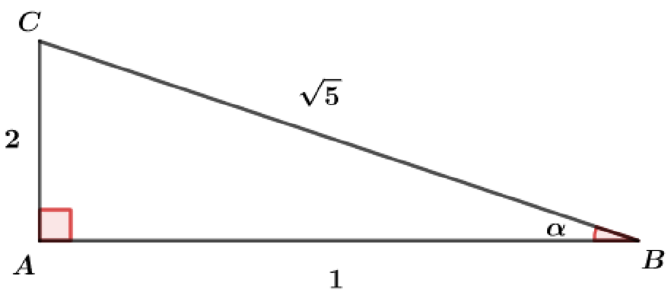
$$2senx - cosx = -1$$

$$cosx - 2senx = 1$$

Dividindo a equação por $\sqrt{5}$:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}cosx - \frac{2}{\sqrt{5}}senx = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Vamos usar o seguinte triângulo retângulo:



Assim, podemos escrever:

$$cos\alpha cosx - sen\alpha senx = cos\alpha$$

$$\cos(\alpha + x) = cos\alpha$$

As raízes são dadas por:

$$\alpha + x = \pm\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\alpha \pm \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$x = -2\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ e\ \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Gabarito: $\boldsymbol{x = 2k\pi\ ou\ x = -2\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ e\ \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$

---

16. Exercício de Fixação

Resolva as seguintes inequações:

a) $|tgx| > \sqrt{3}$

b) $\frac{cosx}{1+cos2x} < 0$

c) $2cosx\left(cosx - \sqrt{8}tgx\right) < 5$

d) $cotgx + \frac{senx}{cosx-2} \geq 0$

e) $\frac{\cos^2(2x)}{\cos^2 x} \geq 3tgx$

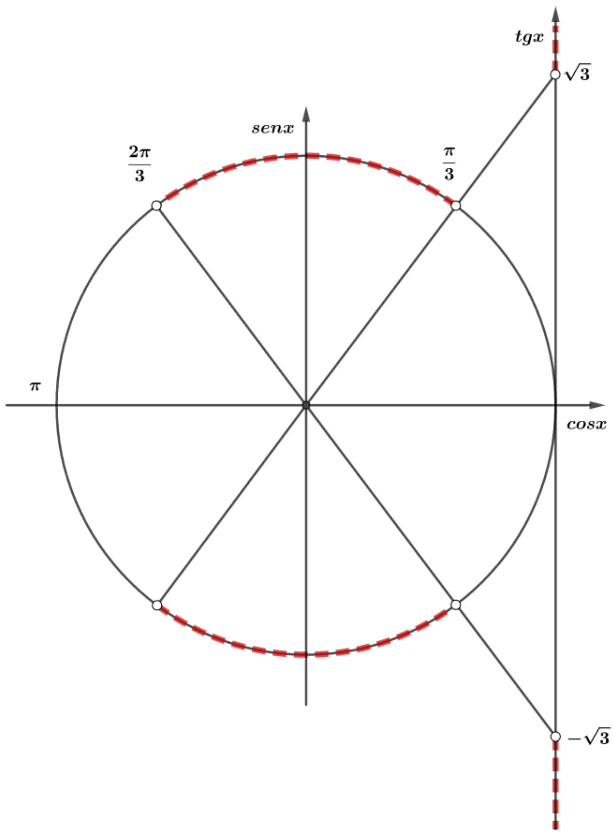
Comentários

a) Sempre que resolver uma inequação trigonométrica, recomendo usar o ciclo trigonométrico para visualizar as raízes do problema:

$$|tgx| > \sqrt{3}$$

$$tgx > \sqrt{3}\ ou\ tgx < -\sqrt{3}$$

Ciclo trigonométrico:



Assim, as raízes são dadas por:

$$\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) Vamos escrever $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$:

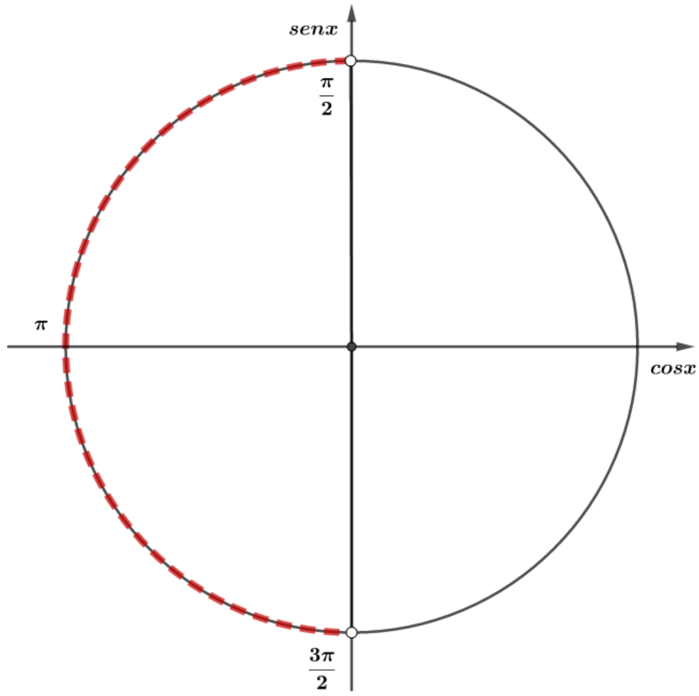
$$\frac{cosx}{1 + 2\cos^2 x - 1} < 0$$

$$\frac{cosx}{2\cos^2 x} < 0$$

Para $cosx \neq 0$:

$$\frac{1}{2cosx} < 0$$
$$cosx < 0$$

Os valores que pertencem ao terceiro e quarto quadrante satisfazem essa inequação:



$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

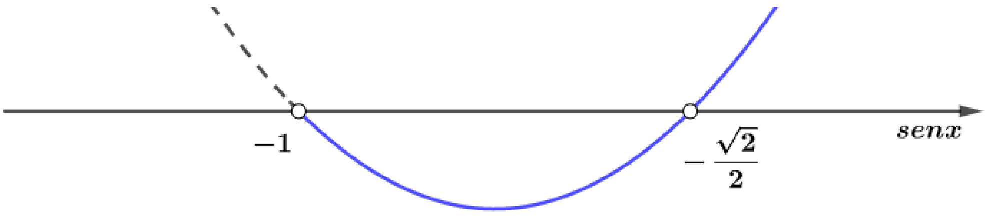
c) $2cosx\left(cosx - \sqrt{8}tgx\right) < 5$

$$2\cos^2 x - 2\sqrt{8}senx < 5$$
$$2(1 - sen^2x) - 4\sqrt{2}senx - 5 < 0$$
$$-2sen^2x - 4\sqrt{2}senx - 3 < 0$$
$$2sen^2x + 4\sqrt{2}senx + 3 > 0$$

Encontrando as raízes da inequação:

$$senx = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \; ou \; \underbrace{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}_{<-1}$$

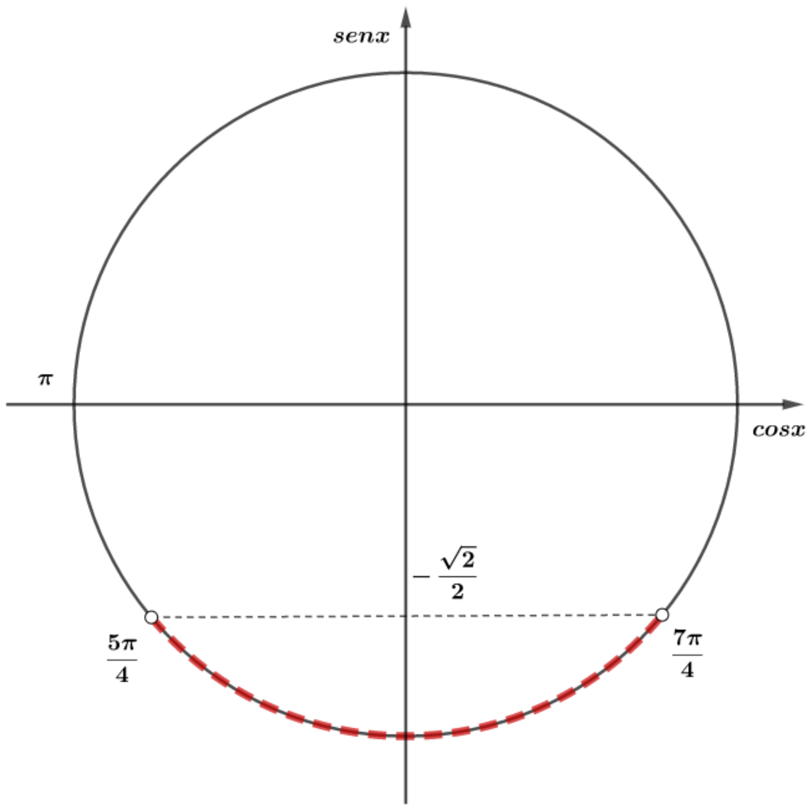
Como $-1 \leq senx \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, temos:



Assim, devemos ter:

$$-1 < senx < -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Usando o ciclo trigonométrico:



Portanto, as raízes são dadas por:

$$\frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

d) Desenvolvendo a inequação, obtemos:

$$cotgx + \frac{senx}{cosx - 2} \geq 0$$

$$\frac{cosx}{senx} + \frac{senx}{cosx - 2} \geq 0$$

$$\frac{cosx(cosx - 2) + sen^2x}{senx(cosx - 2)} \geq 0$$

$$\frac{\cos^2 x - 2cosx + sen^2x}{senx(cosx - 2)} \geq 0$$

$$\frac{1 - 2cosx}{senx(cosx - 2)} \geq 0$$

Como $-1 \leq cosx \leq 2$, temos:

$$-3 \leq cosx - 2 \leq 0$$

Assim, o termo $(cosx - 2)$ é sempre negativo.

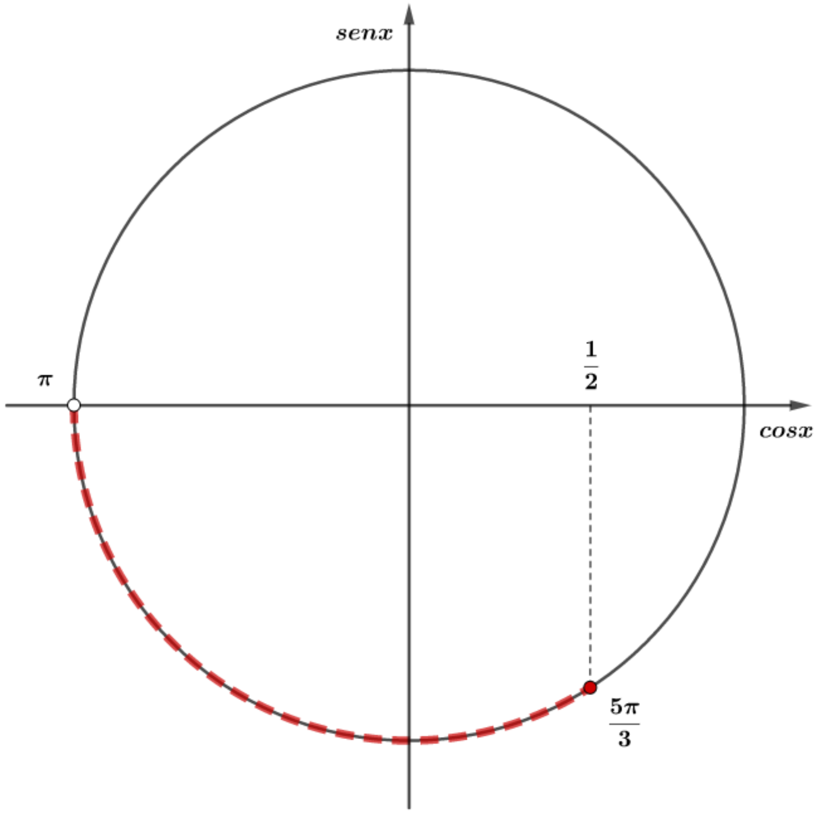
Então, temos as seguintes possibilidades:

$$\begin{cases} senx < 0 \\ 1 - 2cosx \geq 0 \end{cases} ou \begin{cases} senx > 0 \\ 1 - 2cosx \leq 0 \end{cases}$$

Para cada um dos casos:

$$\begin{cases} senx < 0 \\ 1 - 2cosx \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} senx < 0 \\ cosx \leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Usando o ciclo trigonométrico:



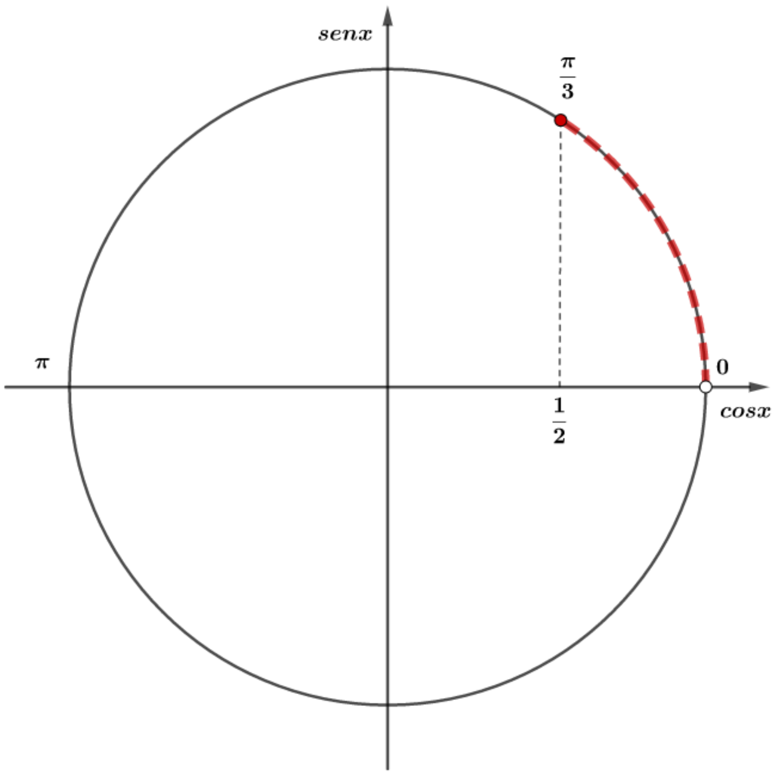
Para esse caso, temos:

$$\pi + 2k\pi < x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para o outro caso:

$$\begin{cases} senx > 0 \\ 1 - 2cosx \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} senx > 0 \\ cosx \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Usando o ciclo trigonométrico:



$$2k\pi < x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

e) $\frac{\cos^2(2x)}{\cos^2 x} \geq 3tgx$

Da condição de existência, temos:

$$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $\cos^2 x \geq 0$, temos:

$$\cos^2(2x) \geq \frac{3senx}{cosx}\cos^2 x$$

$$1 - sen^2(2x) \geq 3senxcosx$$

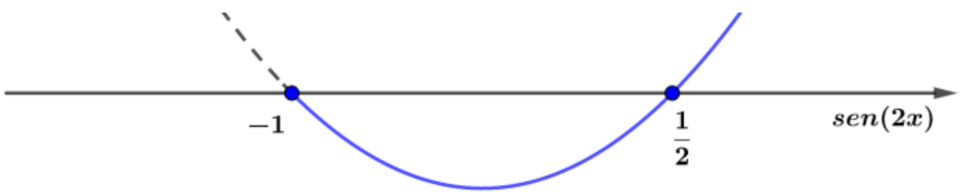
$$1 - sen^2(2x) - \frac{3}{2}sen(2x) \geq 0$$

$$2sen^2(2x) + 3sen(2x) - 2 \leq 0$$

Encontrando as raízes:

$$sen(2x) = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = -2 \; ou \; \frac{1}{2}$$

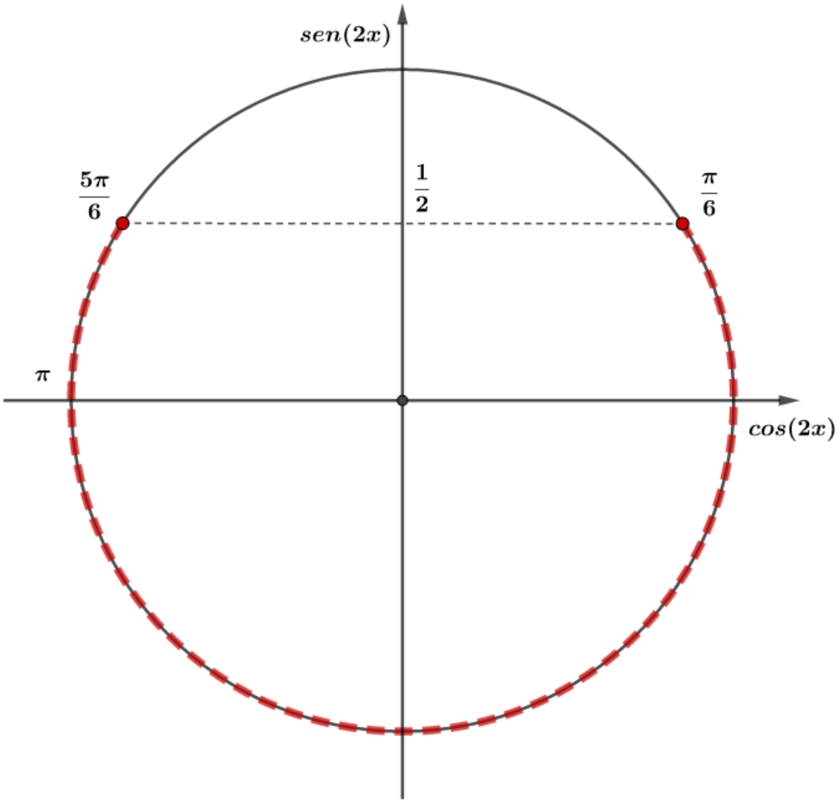
Estudando o sinal:



Assim, temos:

$$-1 \leq sen(2x) \leq \frac{1}{2}$$

Usando o ciclo trigonométrico:



Portanto, as raízes são dadas por:

$$2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq 2x \leq 2\pi + 2k\pi \Rightarrow \frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Fazendo a intersecção com a condição de existência, temos:

$$k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Gabarito:

a) $\boldsymbol{\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

b) $\boldsymbol{\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi}$

c) $\frac{5\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{7\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

d) $\pi+2k\pi<x\le\frac{5\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ **ou** $2k\pi<x\le\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

e) $k\pi\le x\le\frac{\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ **ou** $\frac{5\pi}{12}+k\pi\le x<\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ **ou** $\frac{\pi}{2}+k\pi<x\le\pi+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

17. Exercício de Fixação

Calcular $sen\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Comentários

$$2\cdot 18°+3\cdot 18°=90°$$

Usando a propriedade de arco complementar, podemos escrever:

$$sen\left(2\cdot\frac{\pi}{10}\right)=sen\left(\frac{\pi}{2}-3\cdot\frac{\pi}{10}\right)=\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{10}\right)$$

Aplicando as fórmulas de arco duplo e triplo:

$$2sen\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=4\cos^3\left(\frac{\pi}{10}\right)-3\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

$$2sen\left(\frac{\pi}{10}\right)=4\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)-3$$

$$2sen\left(\frac{\pi}{10}\right)=4\left(1-sen^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)-3$$

$$4sen^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+2sen\left(\frac{\pi}{10}\right)-1=0$$

Encontrando as raízes da equação de segundo grau:

$$sen\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

Como 18° pertence ao primeiro quadrante, podemos afirmar:

$$sen\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Gabarito: Demonstração

6. Questões de Vestibulares Anteriores

18. (EsPCEx/2017)
O conjunto solução da inequação $2sen^2x - \cos x - 1 \geq 0$, no intervalo $]0, 2\pi]$ é
a) $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$.
b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$.
c) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.
d) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.
e) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}\right]$.

19. (EsPCEx/2016)
A soma das soluções da equação $\cos(2x) - \cos(x) = 0$, com $x \in [0, 2\pi)$, é igual a
a) $\frac{5\pi}{3}$
b) 2π
c) $\frac{7\pi}{3}$
d) π
e) $\frac{8\pi}{3}$

20. (EsPCEx/2014)
A soma de todas as soluções da equação $2\cos^3(x) - \cos^2(x) - 2\cos(x) + 1 = 0$, que estão contidas no intervalo $[0, 2\pi]$, é igual a
a) 2π
b) 3π
c) 4π
d) 5π
e) 6π

21. (EsPCEx/2014)
Seja $\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 3 - \log_{10} 7}$. O conjunto solução da desigualdade $3^{\cos x} \leq \left(\frac{3}{7}\right)^{\beta}$ no intervalo $[0, 2\pi)$, é igual a:
a) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$.
b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.
c) $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right]$.

d) $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right)$.
e) $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

22. (EsPCEx/2009)
O número de arcos no intervalo $\left[0, \frac{19\pi}{6}\right]$ cujo valor do cosseno é igual a $\frac{1}{2}$ é
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

23. (EsPCEx/2004)
A quantidade de valores inteiros que a pode assumir para que a equação $\cos x = (a-1)^2$ tenha solução é:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

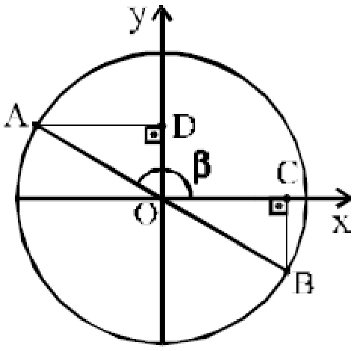
24. (EsPCEx/2004)
Dadas as funções reais $f(x) = \text{sen}\, 2x$ e $g(x) = \frac{1}{2}$ tal que $x \in [0, 2\pi]$. Então, o número de interseções entre os gráficos de f e g é:
a) 6
b) 2
c) 1
d) 4
e) 8

25. (EsPCEx/2002)
O produto $\text{cotg}\, x \cdot \cos x$ é postivo, portanto, x pertence ao
a) $1°$ ou $2°$ quadrantes.
b) $1°$ ou $4°$ quadrantes.
c) $2°$ ou $3°$ quadrantes.
d) $2°$ ou $4°$ quadrantes.
e) $3°$ ou $4°$ quadrantes.

26. (EsPCEx/2002)
O valor de $\cos x + \text{sen}\, x$, sabendo que $3 \cdot \text{sen}\, x + 4 \cdot \cos x = 5$, é
a) $\frac{3}{5}$
b) $\frac{4}{5}$
c) 1

d) $\frac{6}{5}$
e) $\frac{7}{5}$

27. (EsPCEx/2001)
No círculo trigonométrico (raio $= 1$), representado na figura, a medida de β é $150°$ e $\overline{AB}$ representa um diâmetro. O valor do produto das medidas dos segmentos $\overline{OC}$ e $\overline{OD}$ é



a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

28. (EsPCEx/2000)
Sendo $\operatorname{sen} \alpha = 3 \cos \alpha$ e $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, o valor de cossec α é
a) $-\frac{\sqrt{10}}{3}$
b) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$
c) $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$
d) $\sqrt{10}$
e) $\frac{\sqrt{10}}{3}$

29. (EsPCEx/2000)
O número de soluções da equação $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1$, satisfazendo a condição $0 \leq x < 2\pi$, é
a) infinito
b) 4
c) 2
d) 1
e) 0

30. (EsPCEx/2000)

Pode-se afirmar que o sistema $\begin{cases} 2x - 1 = 3\text{sen}\,\theta \\ x - 2 = \cos\theta \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \theta < 2\pi$,

a) possui apenas um par ordenado (x, θ) como solução.
b) possui dois pares ordenados (x, θ) como solução.
c) possui três pares ordenados (x, θ) como solução.
d) possui infinitas soluções.
e) não possui solução.

7. Gabarito

18. c
19. b
20. d
21. b
22. c
23. c
24. d
25. a
26. e
27. c
28. a
29. b
30. b

8. Questões de Vestibulares Anteriores Resolvidas e Comentadas

18. (EsPCEx/2017)
O conjunto solução da inequação $2sen^2x - \cos x - 1 \geq 0$, no intervalo $]0, 2\pi]$ é

a) $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$.
b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$.
c) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.
d) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.
e) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}\right]$.

Comentários

Usando a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$2sen^2x - \cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 \leq 0$$

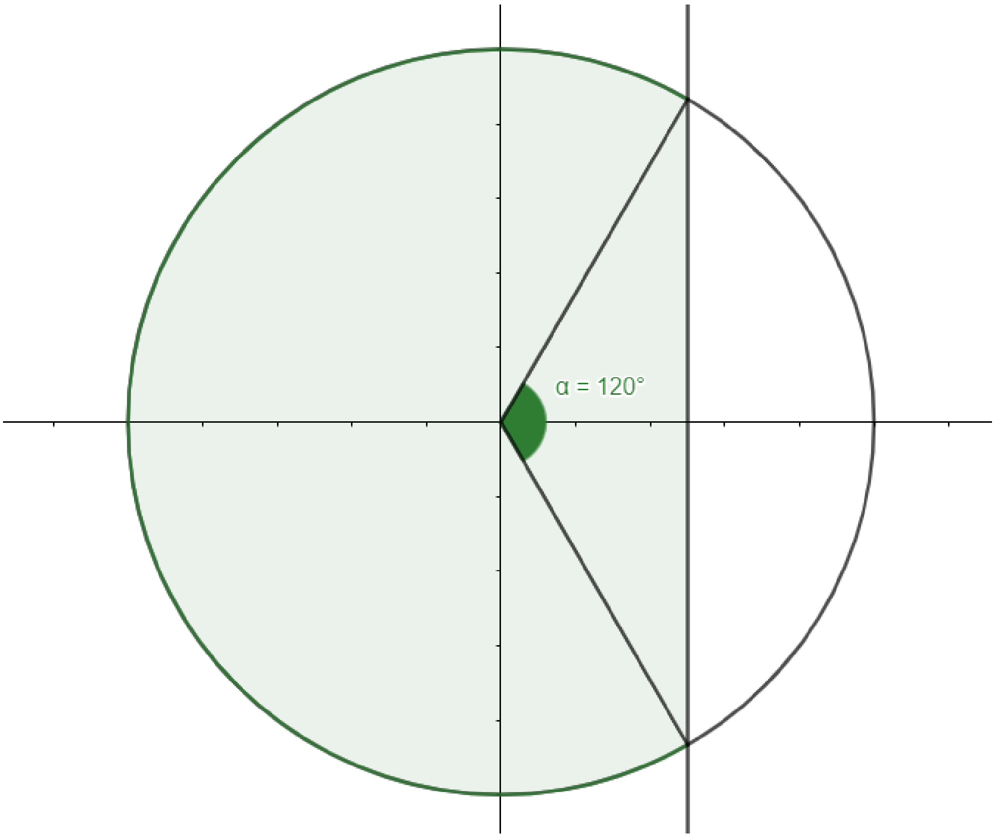
Olhando a expressão no membro direito da última desigualdade como uma quadrática em $\cos x$, calculamos o determinante Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9.$$

As raízes do polinômio $p(y) = 2y^2 + y - 1$ são:

$$y_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } y_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow y_1 = \frac{-1-3}{2\cdot 2} = -1 \text{ e } y_2 = \frac{-1+3}{2\cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

Como $a = 2 > 0$, o gráfico de $p(y)$ é uma parábola de concavidade para cima, em forma de U, com raízes -1 e $\frac{1}{2}$. Assim, $2\cos^2 x + \cos x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \cos x$ está entre -1 e $\frac{1}{2}$, isto é, $\cos x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$. Na figura abaixo vemos que os valores permitidos são, considerando $x \in]0, 2\pi]$, $S = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.



Gabarito: "c".

19. (EsPCEx/2016)

A soma das soluções da equação $\cos(2x) - \cos(x) = 0$, com $x \in [0, 2\pi)$, é igual a

a) $\frac{5\pi}{3}$

b) 2π

c) $\frac{7\pi}{3}$

d) π

e) $\frac{8\pi}{3}$

Comentários

$$\cos(2x) = \cos(x) \Leftrightarrow 2x = x + 2k\pi \text{ ou } 2x = -x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Conjunto-solução:

$$S = \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\} \Rightarrow \text{ soma } = 0 + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 2\pi$$

Gabarito: "b".

---

20. (EsPCEx/2014)

A soma de todas as soluções da equação $2\cos^3(x) - \cos^2(x) - 2\cos(x) + 1 = 0$, que estão contidas no intervalo $[0, 2\pi]$, é igual a

a) 2π

b) 3π

c) 4π

d) 5π

e) 6π

Comentários

Antes de tentar resolver a equação cúbica, vamos fazer a transformação $y = \cos(x)$. Ficamos com:

$$P(y) = 2y^3 - y^2 - 2y + 1 = 0$$

O teorema das raízes racionais diz que, se houver raiz racional num polinômio de coeficientes inteiros, e se a fração da raiz estiver em sua forma irredutível, então o denominador divide o coeficiente do termo líder e o numerador divide o termo independente. Assim, suponhamos que exista $\frac{p}{q}$ raiz racional do polinômio acima, $q > 0$, de modo que $\text{mmc}(p, q) = 1$. Então, $p \in \{1, -1\}$ e $q \in \{1,2\}$. Por inspeção, verifica-se que $r = \frac{1}{2}$ é raiz do polinômio (poderíamos ter verificado outra).

Após a divisão polinomial de $P(y)$ por $(y - r) = \left(y - \frac{1}{2}\right)$, ficamos com um fator quadrático, mas que facilmente se fatora usando produtos notáveis:

$$P(y) = \left(y - \frac{1}{2}\right) \cdot (2y^2 - 2) = (2y - 1) \cdot (y^2 - 1) = (2y - 1) \cdot (y - 1) \cdot (y + 1)$$

Dessa maneira, as raízes de P são $y = \frac{1}{2}, y = 1$ e $y = -1$. Lembrando que $y = \cos x$, temos, no intervalo $[0, 2\pi]$:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0 \ \vee x = 2\pi$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$$

Logo, a soma das raízes é $\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} + 0 + 2\pi + \pi = 5\pi$.

Gabarito: "d".

---

21. (EsPCEx/2014)

Seja $\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 3 - \log_{10} 7}$. O conjunto solução da desigualdade $3^{\cos x} \leq \left(\frac{3}{7}\right)^{\beta}$ no intervalo $[0, 2\pi)$, é igual a:

a) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$.

b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.

c) $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right]$.

d) $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right)$.

e) $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

Comentários

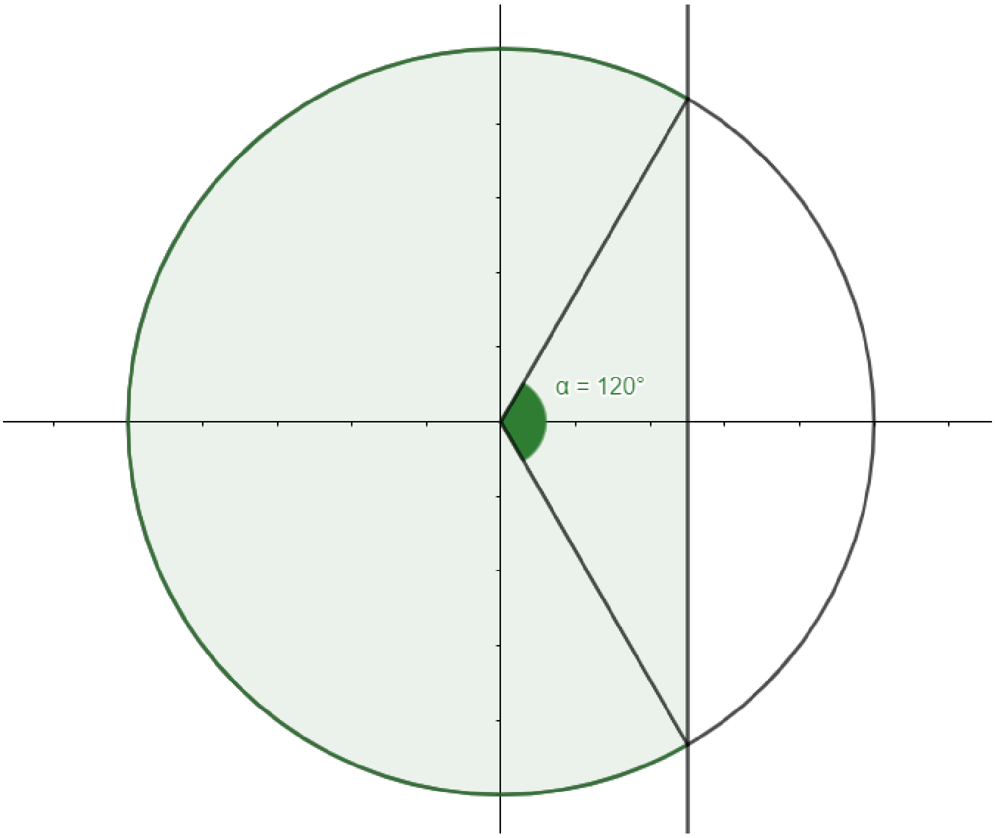
$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 3 - \log_{10} 7} \Rightarrow 2\beta = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 3 - \log_{10} 7} = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10}\left(\frac{3}{7}\right)} = \log_{\frac{3}{7}} 3 \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{2\beta} = 3$$

Dessa forma, temos que:

$$3^{\cos x} \leq \left(\frac{3}{7}\right)^{\beta} \Leftrightarrow 3^{2\cos x} \leq \left(\frac{3}{7}\right)^{2\beta} = 3^1 \Leftrightarrow 2\cos x \leq 1 \text{ (pois a função } f(y) = 3^y \text{ é crescente)}$$

$$\Leftrightarrow \cos x \leq \frac{1}{2}$$

Na figura a seguir, podemos ver que o conjunto solução desejado é $[60°, 300°] = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.



Gabarito: "b".

---

22. (EsPCEx/2009)

O número de arcos no intervalo $\left[0, \frac{19\pi}{6}\right]$ cujo valor do cosseno é igual a $\frac{1}{2}$ é

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Comentários

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Como $\frac{19\pi}{6} = 2\pi + \frac{7\pi}{6}$, as soluções válidas são $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right\}$.

Gabarito: "c".

---

23. (EsPCEx/2004)

A quantidade de valores inteiros que a pode assumir para que a equação $\cos x = (a-1)^2$ tenha solução é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Comentários

Como $\cos x \in [-1,1]$, a equação tem solução se, e somente se, $-1 \leq (a-1)^2 \leq 1$. A primeira desigualdade é verdadeira para todo $a \in \mathbb{R}$. Vamos nos atentar à segunda desigualdade.

$$(a-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow |a-1| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq a-1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 2$$

Os valores inteiros de a são $a=0, a=1$ e $a=2$.

Gabarito: “c”.

---

24. (EsPCEx/2004)

Dadas as funções reais $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ e $g(x) = \frac{1}{2}$ tal que $x \in [0, 2\pi]$. Então, o número de interseções entre os gráficos de f e g é:

a) 6
b) 2
c) 1
d) 4
e) 8

Comentários

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}.$$

Temos duas opções: $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Logo, o conjunto solução da equação $f(x) = g(x)$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é $S = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right\}$, o que implica que há 4 interseções entre os gráficos de f e g tal que $x \in [0,2\pi]$.

Gabarito: “d”.

---

25. (EsPCEx/2002)

O produto $\operatorname{cotg} x \cdot \cos x$ é postivo, portanto, x pertence ao

a) 1° ou 2° quadrantes.
b) 1° ou 4° quadrantes.
c) 2° ou 3° quadrantes.
d) 2° ou 4° quadrantes.
e) 3° ou 4° quadrantes.

Comentários

$$\operatorname{cotg} x \cdot \cos x = \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) \cdot \cos x = \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}$$

Logo, como $\cos^2 x \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, o produto é positivo se, e somente se, $\operatorname{sen} x > 0$, o que ocorre nos quadrantes 1 e 2.

Gabarito: “a”.

---

26. (EsPCEx/2002)

O valor de $\cos x + \operatorname{sen} x$, sabendo que $3 \cdot \operatorname{sen} x + 4 \cdot \cos x = 5$, é

a) $\frac{3}{5}$
b) $\frac{4}{5}$

c) 1
d) $\frac{6}{5}$
e) $\frac{7}{5}$

Comentários

$$3 \cdot \operatorname{sen} x + 4 \cdot \cos x = 5$$
$$\Leftrightarrow 4 \cdot \cos x = 5 - 3 \cdot \operatorname{sen} x$$
$$\Rightarrow 16 \cdot \cos^2 x = (5 - 3 \cdot \operatorname{sen} x)^2$$
$$\Leftrightarrow 16 - 16 \cdot \operatorname{sen}^2 x = 25 - 30 \cdot \operatorname{sen} x + 9 \cdot \operatorname{sen}^2 x$$
$$\Leftrightarrow 0 = 25 \cdot \operatorname{sen}^2 x - 30 \cdot \operatorname{sen} x + 9 = (5 \cdot \operatorname{sen} x - 3)^2$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$$

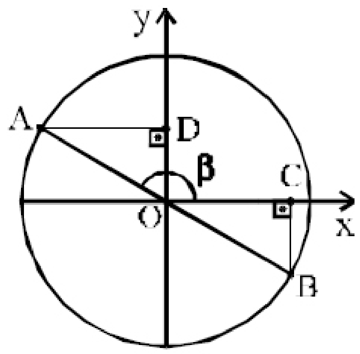
Logo, usando a equação, $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$ $e \cos x = \frac{4}{5}$ é a única solução. Então, $\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{7}{5}$.

Gabarito: "e".

---

27. (EsPCEx/2001)

No círculo trigonométrico (raio $=$ 1), representado na figura, a medida de β é $150°$ e $\overline{AB}$ representa um diâmetro. O valor do produto das medidas dos segmentos $\overline{OC}$ e $\overline{OD}$ é



a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Comentários

$$\beta = 150° \Rightarrow B\hat{O}C = 180° - \beta = 30° \Rightarrow \overline{OC} = \overline{OB} \cdot \cos 30° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
$$\beta = 150° \Rightarrow A\hat{O}D = \beta - 90° = 60° \Rightarrow \overline{OD} = \overline{OA} \cdot \cos 60° = \cos 60° = \frac{1}{2}.$$

Logo, $\overline{OC} \cdot \overline{OD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Gabarito: "c".

28. (EsPCEx/2000)

Sendo $\operatorname{sen}\alpha = 3\cos\alpha$ e $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, o valor de $\operatorname{cossec}\alpha$ é

a) $-\frac{\sqrt{10}}{3}$

b) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

c) $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

d) $\sqrt{10}$

e) $\frac{\sqrt{10}}{3}$

Comentários

Se tivéssemos $\cos\alpha = 0$, teríamos, pela equação, que $\operatorname{sen}\alpha = 0$, e então $1 = \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 0^2 + 0^2 = 0$, absurdo. Logo, como $\cos\alpha \neq 0$, podemos dividir a equação por $\cos\alpha$:

$$\operatorname{sen}\alpha = 3\cos\alpha \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = 3 \Leftrightarrow \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{3}$$

Usando que $\operatorname{cossec}^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha$, temos:

$$\operatorname{cossec}^2\alpha = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}.$$

No intervalo $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\operatorname{sen}\alpha < 0$ e, portanto, $\operatorname{cossec}\alpha < 0$. Logo,$\operatorname{cossec}\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Gabarito: "a".

29. (EsPCEx/2000)

O número de soluções da equação $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1$, satisfazendo a condição $0 \leq x < 2\pi$, é

a) infinito

b) 4

c) 2

d) 1

e) 0

Comentários

$$1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow 1^2 = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 = [\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x] + 2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x.$$

Usando o dado do enunciado na subexpressão entre colchetes, além da fórmula para o seno do arco duplo, temos:

$$1 = 1 + \frac{1}{2}\cdot(4\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x) \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}\cdot(\operatorname{sen} 2x)^2 \Leftrightarrow \operatorname{sen} 2x = 0$$

Logo, $\operatorname{sen} 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Para $0 \leq x < 2\pi$, temos $S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$ como conjunto solução.

Gabarito: "b"

30. (EsPCEx/2000)

Pode-se afirmar que o sistema $\begin{cases} 2x - 1 = 3\text{sen}\,\theta \\ x - 2 = \cos\theta \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \theta < 2\pi$,

a) possui apenas um par ordenado (x, θ) como solução.
b) possui dois pares ordenados (x, θ) como solução.
c) possui três pares ordenados (x, θ) como solução.
d) possui infinitas soluções.
e) não possui solução.

Comentários

Por inspeção, verifica-se que o sistema admite pelo menos uma solução, com $\theta = 90°$ e $x = 2$, por exemplo. Poder-se ia verificar tal fato também da seguinte forma: isolam-se as funções $sen\ \theta$ e $\cos\theta$ e utiliza-se a relação fundamental da trigonometria:

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2x-1}{3}\right)^2 + (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow 13(x-2)\left(x - \frac{14}{13}\right) = 0$$

$x = 2 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = 1$ e $\cos\theta = 0 \Rightarrow (x, \theta) = (2{,}90°)$ é um par válido como solução.

$x = \frac{14}{13} \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{5}{13}$ e $\cos\theta = -\frac{12}{13} \Rightarrow (x, \theta) = \left(\frac{14}{13}, \pi - \text{arcsen}\frac{5}{13}\right)$ é um par válido como solução.

Logo, há dois pares ordenados como solução do sistema, considerando $x \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \theta < 2\pi$.

Gabarito: "b".

---

9. Considerações Finais da Aula

Vimos tudo que precisamos saber para resolver as questões de trigonometria das provas.

Continue se esforçando! Tente resolver todos os exercícios dessa aula. Caso você encontre alguma dificuldade ou fique com alguma dúvida não hesite em me procurar!

A próxima aula será uma introdução à geometria plana, outro assunto que cai bastante nessas provas. Então, prepare-se!

FALE COMIGO

/victorso /profvictorso /profvictorso

10. Referências Bibliográficas

[1] Iezzi, Gelson. Fundamentos de matemática elementar, 3: trigonometria. 9. ed. Atual, 2013. 311p.

[2] Antar Neto, Aref. Sampaio, José Luiz Pereira. Lapa, Nilton. Cavallantte, Sidney Luiz. Noções de Matemática, v.3. 2 ed. Vestseller, 2009. 324p.

[3] Morgado, Augusto Cezar de Oliveira. Wagner, Eduardo. Perdigão do Carmo, Manfredo. Trigonometria Números Complexos. 3 ed. SBM, 2005. 164p.

[4] Rufino, Marcelo. Elementos da Matemática volume 5 – Trigonometria e Geometria Espacial. 1 ed. Vestseller, 2017. 552p.

68