Matemática 1995 - ITA

01) (ITA-95) Seja $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n!} + \operatorname{sen}\frac{n!.n}{6}; n \in N \right\}$

Qual conjunto abaixo é tal que sua intersecção com A dá o próprio A?

a) $(-\infty, -2) \cup [2, \infty)$ b) $(-\infty, -2)$ c) $[-2, 2]$
d) $[-2, 0]$ e) $[0, 2]$

02) (ITA-95) Seja a função f: $\Re \to \Re$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a(x + \eth/2) & se, x < \pi/2 \\ (\eth/2) - (a/x)\operatorname{sen}x & se, x \geq \pi/2 \end{cases}$$

onde a > 0 é uma constante. Considere K = { y $\in$ R; $f(y) = 0$}.
Qual o valor de a, sabendo-se que $f(\pi/2) \in$ K?

a) $\pi/4$ b) $\pi/2$ c) π d) $\pi^2/2$ e) π^2

03) (ITA-95) Uma vez, para todo $x \geq 1$ e $n \in N$, vale a desigualdade $x^n > n(x - 1)$. Temos como conseqüência que, para $0 < x < 1$ e $n \in N$, tem-se:

a) $x^{n-1} < [n(1 + x)]^{-1}$ b) $x^{n-1} < [(n + 1)(1 + x)]^{-1}$
c) $x^{n-1} < [n^2(1 - x)]^{-1}$ d) $x^{n-1} < [(n + 1)(1 - x)]^{-1}$
e) $x^{n-1} < [n(1 - x)]^{-1}$

04) (ITA-95) Considere todos os números de cinco algarismos formados pela justaposição de 1, 3, 5, 7 e 9 em qualquer ordem, sem repetição. A soma de todos esses números está entre:

a) 5.10^6 e 6.10^6. b) 6.10^6 e 7.10^6. c) 7.10^6 e 8.10^6.
d) 9.10^6 e 10.10^6. e) 10.10^6 e 11.10^6.

05) (ITA-95) Para cada $n \in N$, temos que:

$1 - \binom{4n}{2} + \binom{4n}{4} - ... - \binom{4n}{4n-2} + 1$ é igual a:

a) $(-1)^n 2^{2n}$. b) 2^{2n}. c) $(-1)^n 2^n$.
d) $(-1)^{n+1} 2^{2n}$. e) $(-1)^{n+1} 2^n$.

06) (ITA-95) Se a soma dos termos da progressão geométrica dada por 0,3 : 0,03 : 0,003 : ... é igual ao termo médio de uma progressão aritmética de três termos, então a soma dos termos da progressão aritmética vale:

a) 1/3 b) 2/3 c) 1 d) 2 e) ½

07) (ITA-95) Os dados experimentais da tabela abaixo correspondem às concentrações de uma substância química medida em intervalos de 1 segundo. Assumindo que a linha que passa pelos três pontos experimentais é uma parábola, tem-se que a concentração (em moles) após 2,5 segundo é:

Tempo(s)	Concentração(moles)
1	3,00
2	5,00
3	1,00

a) 3,60 b) 3,65 c) 3,70 d) 3,75 e) 3,80

08) (ITA-95) A divisão de um polinômio P(x) por $x^2 - x$ resulta no quociente $6x^2 + 5x + 3$ e resto $-7x$. O resto da divisão de P(x) por $2x + 1$ é igual a:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

09) (ITA-95) Sabendo que $4 + i\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ são raízes do polinômio $2x^5 - 22x^4 + 74x^3 + 2x^2 - 420x + 540$, então a soma dos quadrados de todas as raízes reais é:

a) 17 b) 19 c) 21 d) 23 e) 25

10) (ITA-95) Seja z um número complexo satisfazendo Re(z) > 0 e $(z + i)^2 + |\bar{z} + i|^2 = 6$. Se n é o menor natural para o qual z^n é um número imaginário puro, então n é igual a:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

11) (ITA-95) Sejam z_1 e z_2 números complexos com $|z_1| = |z_2| = 4$. Se 1 é uma raiz da equação $z_1 z^6 + z_2 z^3 - 8 = 0$ então a soma das raízes reais é igual a:

a) - 1 b) $-1 + 2^{1/2}$ c) $1 - 2^{1/3}$
d) $1 + 3^{1/2}$ e) $-1 + 3^{1/2}$

12) (ITA-95) Se S é o conjunto dos valores de a para os quais o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + (\log_3 a)^2 . y + z = 0 \\ 2x + 2y + (\log_3 \frac{27}{a}) z = 0 \end{cases}$$

em que há indeterminação, então:

a) $S \subset [-3, 3]$. b) S é vazio. c) $S \subset [2, 4]$.
d) $S \subset [1, 3]$. e) $S \subset [0, 1]$.

13) (ITA-95) Se x é um número real positivo com $x \neq 1$ e $x \neq 1/3$, satisfazendo $\frac{2 + \log_3 x}{\log_{(x+2)} x} - \frac{\log_x (x+2)}{1 + \log_3 x} = \log_x (x + 2)$ então x pertence ao intervalo I, onde:

a) I = (0, 1/9) b) I = (0, 1/3) c) I = (1/2, 1)
d) I = (1, 3/2) e) I = (3/2, 2)

14) (ITA-95) Dizemos que duas matrizes **nxn** A e B são semelhantes se existe uma matriz **nxn** inversível P tal que $B = P^{-1}AP$. Se A e B são matrizes semelhantes quaisquer, então:

a) B é sempre inversível.
b) Se A é simétrica, então B também é simétrica.
c) B^2 é semelhante a A.
d) Se C é semelhante a A, então BC é semelhante a A^2.
e) $\det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - A)$, onde λ é um real qualquer.

15) (ITA-95) Sejam A e B matrizes reais 3x3. Se tr(A) denota a soma dos elementos da diagonal principal de A, considere as afirmações:

I- $tr(A^t) = tr(A)$
II- Se A é inversível, então $tr(A) \neq 0$.
III- $tr(A + \lambda B) = tr(A) + \lambda tr(B)$, para todo $\lambda \in$ R.

Temos que:

a) Todas as afirmações são verdadeiras.
b) Todas as afirmações são falsas.
c) Apenas a afirmação I é verdadeira.
d) Apenas a afirmação II é falsa.
e) Apenas a afirmação III é falsa.

16) (ITA-95) Três pontos de coordenadas, respectivamente, (0, 0), (b, 2b) e (5b, 0), com b > 0, são vértices de um retângulo. As coordenadas do quarto vértice são dadas por:

a) (-b, -b) b) (-2b, -b) c) (4b, -2b)
d) (3b, -2b) e) (-2b, -2b)

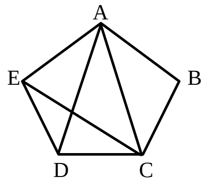
17) (ITA-95) Uma reta t do plano cartesiano xOy tem coeficiente angular 2a e tangência a parábola $y = x^2 - 1$ no ponto de coordenadas (a, b). Se (c, 0) e (0, c) e (0, d) são as coordenadas de dois pontos de t tais que c > 0 e c = -2d, então a/b é igual a :
a) -4/15 b) -5/16 c) -3/16 d) -6/15 e) -7/15

18) (ITA-95) Considere C uma circunferência centrada em O e raio 2r, e t a reta tangente a C num ponto T. Considere também A um ponto de C tal que AÔT = θ é um ângulo agudo. Sendo B o ponto de t tal que o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{OT}$, então a área do trapézio OABT é igual a:
a) $r^2(2 \cos \theta - \cos 2\theta)$ b) $2r^2(4 \cos \theta - \text{sen } 2\theta)$
c) $r^2(4 \text{ sen } \theta - \text{sen } 2\theta)$ d) $r^2(2 \text{ sen } \theta + \cos \theta)$
e) $2r^2(2 \text{ sen } 2\theta - \cos 2\theta)$

19) (ITA-95) A expressão $\frac{\text{sen}\,\theta}{1+\cos\theta}$, 0 < θ < π, idêntica a:
a) secθ/2 b) cosecθ/2 c) cotgθ/2 d) tgθ/2 e) cosθ/2

20) (ITA-95) Um dispositivo colocado no solo a uma distância d de uma torre dispara dois projéteis em trajetórias retilíneas. O primeiro, lançado sob um ângulo θ ∈(0, π/4), atinge a torre a uma altura H. Se o segundo, disparado sob um ângulo 2θ, a atinge a uma altura H, a relação entre as duas alturas será:
a) $H = 2hd^2/(d^2 - h^2)$ b) $H = 2hd^2/(d^2 + h)$
c) $H = 2hd^2/(d^2 - h)$ d) $H = 2hd^2/(d^2 + h^2)$
e) $H = hd^2/(d^2 + h^2)$

21) (ITA-95) O comprimento da diagonal de um pentágono regular de lado medindo 1 unidade é igual à raiz positiva de:
a) $x^2 + x - 2 = 0$.
b) $x^2 - x - 2 = 0$.
c) $x^2 - 2x + 1 = 0$.
d) $x^2 + x - 1 = 0$.
e) $x^2 - x - 1 = 0$.



22)(ITA-95) Um cone reto tem altura 12 cm e raio da base 5 cm. O raio da esfera inscrita neste cone mede, em cm:
a) 10/3 b) 4/4 c) 12/5 d) 3
e) 2

23) (ITA-95) O raio de um cilindro de revolução mede 1,5m. Sabe-se que a área da base do cilindro coincide com a área da secção determinada por um plano que contém o eixo do cilindro. Então, a área total do cilindro, em m², vale:
a) $\frac{3\pi^2}{4}$ b) $\frac{9\pi(\pi+2)}{4}$ c) $\pi(\pi+2)$
d) $\frac{\pi^2}{2}$ e) $\frac{3\pi(\pi+1)}{2}$

24) (ITA-95) Dado o prisma hexagonal regular, sabe-se que sua altura mede 3 cm e que sua área lateral é o dobro da área de sua base. O volume deste prisma, em cm³, é:
a) $27\sqrt{3}$ b) $13\sqrt{2}$ c) $12\sqrt{3}$ d) 54 e) $17\sqrt{5}$

25) (ITA-95) Dada uma pirâmide triangular, sabe-se que sua altura mede 3a cm, onde a é a medida da aresta de sua base. Então, a área total desta pirâmide, em cm², vale:
a) $\frac{a^2\sqrt{327}}{4}$ b) $\frac{a^2\sqrt{109}}{2}$ c) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{a^2\sqrt{3}(2+\sqrt{33})}{2}$ e) $\frac{a^2\sqrt{3}(1+\sqrt{109})}{4}$