Estratégia Militares

EXTENSIVO 2021.2

MATEMÁTICA PARA EEAR

GEOMETRIA ESPACIAL I

Prof. Victor So

AULA 08

07 DE NOVEMBRO DE 2020

Sumário

APRESENTAÇÃO

Olá!

Iniciaremos o último assunto de geometria, a espacial. Para aprender bem o conteúdo desta aula, o requisito básico é ter feito as aulas de geometria plana e ter bem consolidado os diversos conceitos abordados nelas. Nesta aula, estenderemos o conceito que aprendemos no plano ao espaço tridimensional. Veremos muitos exemplos e teoremas que nos ajudarão a resolver os exercícios dos vestibulares.

Se você for um aluno que já possui os conceitos de geometria espacial bem fundamentados, pule direto para a lista de exercícios e tente resolver todas questões. Caso você não consiga resolver alguma, consulte a resolução e, sempre que precisar, você poderá nos encontrar no fórum de dúvidas.

Então, vamos à aula.

Bons estudos.

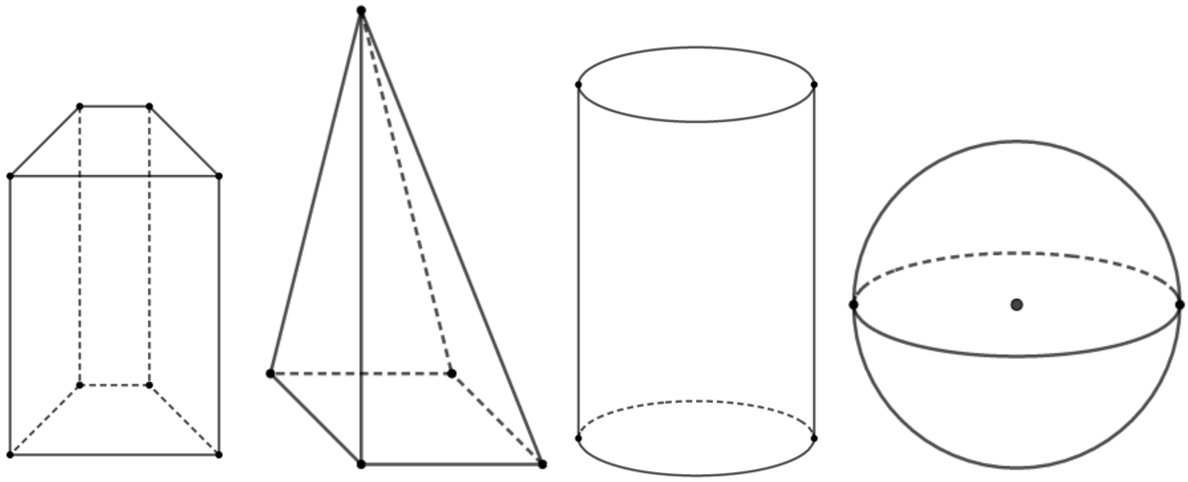
FALE COMIGO

/victorso /profvictorso /profvictorso

1. GEOMETRIA DE POSIÇÃO

No estudo da Geometria Plana, vimos diversos postulados sobre os elementos primitivos (ponto, reta e plano). Esses postulados foram apenas uma simplificação da geometria euclidiana. Podemos adaptar esses postulados para o espaço e usá-los para construir o nosso conhecimento na Geometria Espacial. Na verdade, tudo o que aprendemos lá será usado nesta aula, ou seja, os conceitos de áreas de figuras planas, propriedades de triângulos e círculos, polígonos etc. Tudo isso será aproveitado. A única diferença aqui é a inclusão de mais uma dimensão, surgindo, assim, as figuras de sólidos. Estudaremos todos os conceitos de sólidos que são passíveis de serem cobrados no vestibular.

Para o estudo da Geometria Espacial, usaremos uma noção intuitiva da percepção de espaço. Diferentemente da Geometria Plana, em que era mais fácil desenhar as figuras geométricas, na Geometria Espacial devemos representar uma figura tridimensional em um plano. Para isso, usaremos nossa imaginação para fazer uma representação ilusória das figuras tridimensionais. Usaremos a linha contínua para representar as partes dos sólidos que são visíveis de frente e a linha pontilhada para as partes que não são visíveis. Vejamos os exemplos abaixo:



Agora, vamos adaptar os postulados ao nosso estudo geométrico do espaço.

1.1. POSTULADOS OU AXIOMAS

Considerando que os postulados ou axiomas são proposições primitivas aceitas sem demonstração, vejamos os principais.

1.1.1. POSTULADO DA EXISTÊNCIA

a) Existe reta e numa reta, existem infinitos pontos dentro e fora dela.

b) Existe plano e num plano, existem infinitos pontos dentro e fora dele.

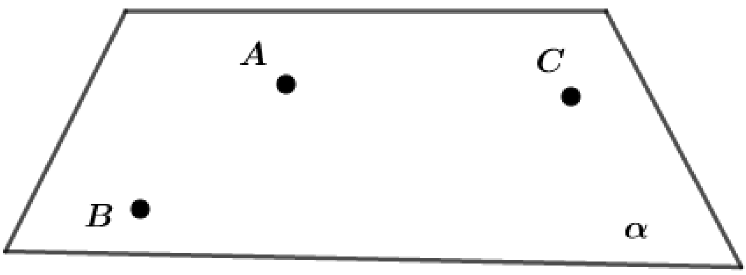
Aqui, temos a inclusão de diversos pontos fora do plano.

1.1.2. POSTULADO DA DETERMINAÇÃO

a) Dois pontos distintos no espaço determinam uma única reta que passa por eles.

b) Três pontos não colineares no espaço determinam um único plano que passa por eles.

$A \neq B$, $\exists r$ tal que $r = \overleftrightarrow{AB}$

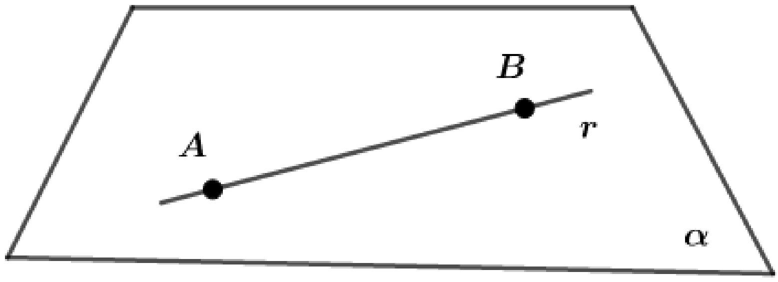


A, B, C são não colineares, então $\exists \alpha$ tal que $\alpha = (A; B; C)$

Podemos usar a notação $\alpha = (A; B; P)$ para dizer que α é determinado por esses três pontos.

1.1.3. POSTULADO DA INCLUSÃO

a) Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então ela está contida no plano.



Se $A \in \alpha$,$B \in \alpha$ e $A \neq B$, então $r = \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow r \subset \alpha$.

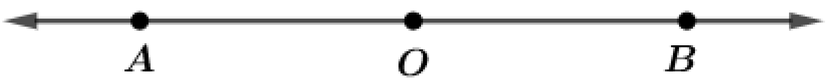
1.1.4. POSTULADOS DA SEPARAÇÃO

a) Um ponto $\boldsymbol{O}$ contido em uma reta $\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ separa-a em duas semirretas $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$, e a origem das semirretas é o ponto dado.

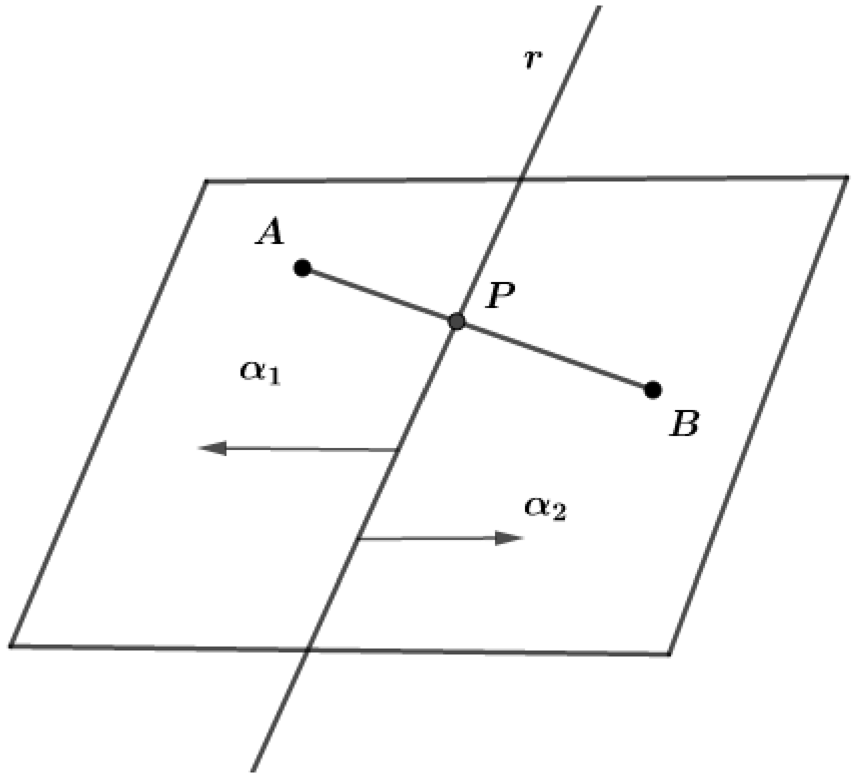
b) Uma reta $\boldsymbol{r}$ contida em um plano $\boldsymbol{\alpha}$ separa-o em dois semiplanos $\boldsymbol{\alpha_1}$ e $\boldsymbol{\alpha_2}$, e a origem dos semiplanos é a reta dada.

c) Um plano $\boldsymbol{\alpha}$ de um espaço $\boldsymbol{E}$ separa-o em dois semiespaços, $\boldsymbol{E_1}$ e $\boldsymbol{E_2}$, e a origem dos semiespaços é o plano dado.

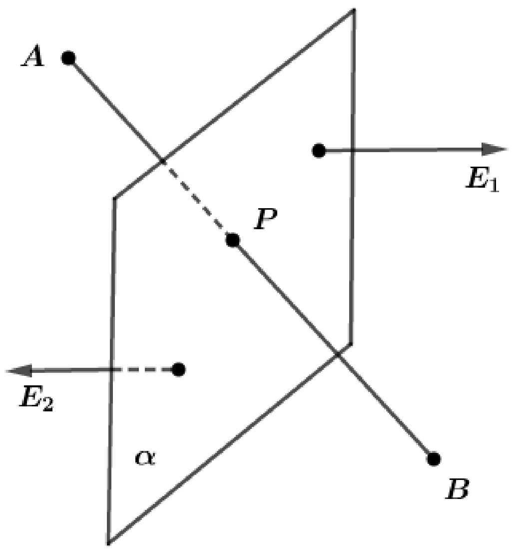
a) $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são semirretas opostas



b) $(A \in \alpha_1, A \notin r, B \in \alpha_2, B \notin r) \Rightarrow \overline{AB} \cap r = \{P\}$



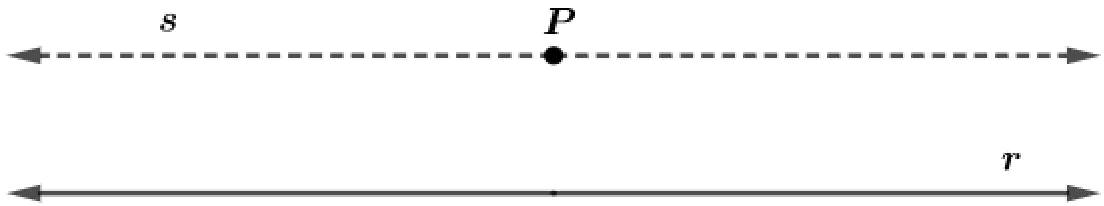
c) $(A \in E_2, A \notin \alpha, B \in E_1, B \notin \alpha) \Rightarrow \overline{AB} \cap \alpha = \{P\}$



O plano α divide o espaço E em dois semiespaços, E_1 e E_2.

1.1.5. POSTULADO DE EUCLIDES

Por um ponto $\boldsymbol{P}$, situado fora de uma reta $\boldsymbol{r}$, passa uma única reta paralela à $\boldsymbol{r}$ que passa por $\boldsymbol{P}$.



$\exists s$ tal que $P \in s$ e $r//s$

Esse postulado é conhecido como postulado das paralelas. Lembrando da definição de retas paralelas, se $r//s$, temos apenas duas possibilidades: ou r e s são retas coincidentes $(r \equiv s)$ ou r e s são distintas. Assim, poderíamos ter $P \in r$ e, mesmo assim, existiria uma reta s paralela à reta r (quando $r \equiv s$).

1.2. O ESPAÇO

Visto os postulados, vamos iniciar a construção da base do conhecimento de Geometria Espacial. Iniciemos pelas propriedades decorrentes dos axiomas vistos. Esses conceitos serão importantes na hora de resolver questões.

1.2.1. O PLANO

Pelo postulado da determinação, sabemos que três pontos não colineares determinarão um único plano. Assim, um triângulo cujos vértices são A, B, C determinarão um único plano no espaço.

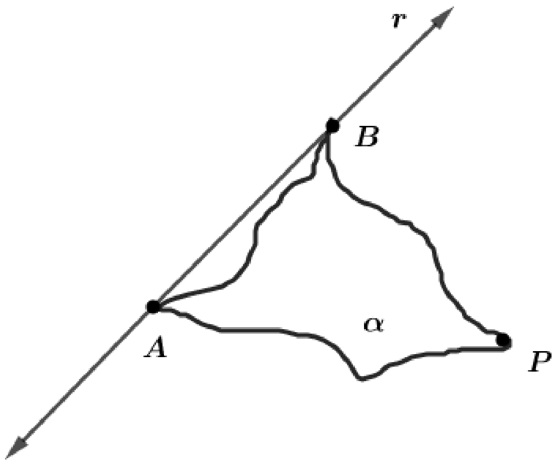
Vamos apresentar algumas propriedades provenientes dos postulados. Não veremos a demonstração de todas elas, pois este não é um assunto que será cobrado diretamente na prova.

Propriedade 1. Uma reta $\boldsymbol{r}$ e um ponto $\boldsymbol{P} \notin \boldsymbol{r}$ determinam um único plano.

Supondo que dois pontos A e B pertencem à reta r e sabendo que P não pertence à r, temos que A, B, P não são colineares e, assim, pelo postulado da determinação, esses pontos determinam um único plano. Essa não é a prova formal desse teorema, mas apenas uma forma de verificar sua veracidade. Para demonstrá-la, devemos mostrar que existe um plano α que contém P e r, e provar que o plano é único. Vejamos a demonstração:

I) Prova da existência do plano

Sabemos, pela suposição feita anteriormente, que os pontos distintos A e B de r determinam um único plano com P.



Assim, se o plano α é determinado pelos pontos A, B, P, temos:

$A \neq B$ e $A, B \in r \Rightarrow r \subset \alpha$

Portanto, existe um plano α que contém r e P, ou seja, $\alpha = (r; P)$. Vamos provar que ele é único.

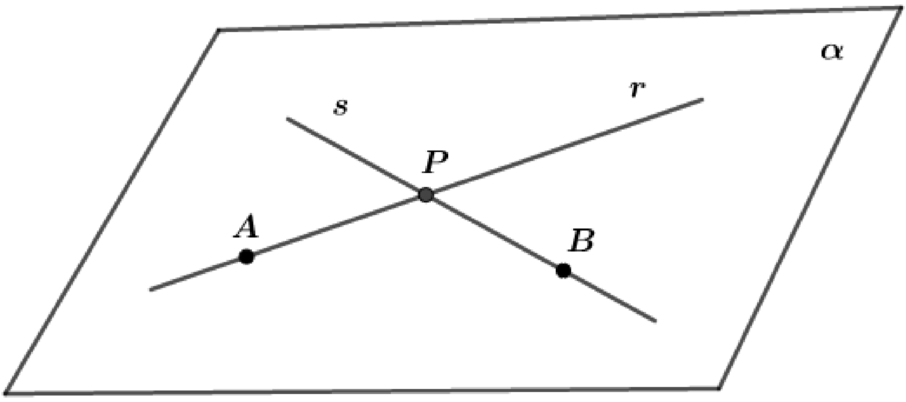
II) Prova da unicidade

Se β é um plano determinado pela reta r e pelo ponto P, temos $\beta = (r; P)$. Se A e B são pontos da reta r, então $\beta = (A; B; P)$. Mas $\alpha = (A; B; P)$, portanto, $\alpha = \beta$. Ou seja, o plano α é único.

Portanto, existe um único plano α tal que $P \in \alpha$ e $r \subset \alpha$.

Propriedade 2. Duas retas concorrentes determinam um único plano.

Sabendo que r e s são retas concorrentes num ponto P, tomando-se os pontos $A \in r$ e $B \in s$ tal que $A \neq P$ e $B \neq P$, temos que existe um plano α tal que $\alpha = (A; B; P)$.



Como $r = \overleftrightarrow{AP}$, temos que $r \subset \alpha$. Analogamente, $s = \overleftrightarrow{BP}$ implica que $s \subset \alpha$. Portanto, o plano α determinado pelos pontos A, B, P é o único plano que contém simultaneamente as retas r e s.

Propriedade 3. Duas retas paralelas e distintas determinam um único plano.

Nesse caso, temos a própria definição de retas paralelas. Se r e s são retas paralelas tais que $r \neq s$, então existe um plano α que contém r e s.

Para provar que esse plano é único, podemos tomar os pontos distintos A e B pertencentes à r e o ponto P pertencente à s. Assim, temos que se $\alpha = (r; s)$:

$$A, B \in r \text{ e } P \in s \Rightarrow \alpha = (r; s) = (A; B; P)$$

Se existir um outro plano β tal que $\beta = (r; s)$, então:

$$A, B \in r \text{ e } P \in s \Rightarrow \beta = (r; s) = (A; B; P) = \alpha$$

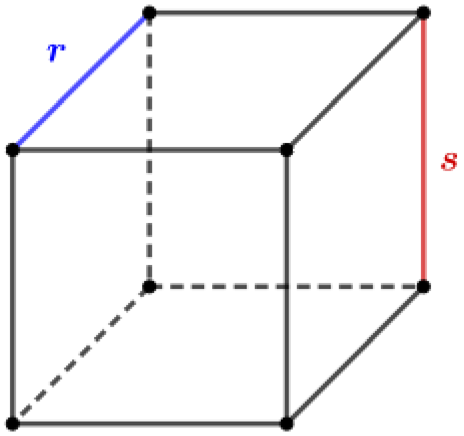
Portanto, os planos α e β são coincidentes, ou seja, há apenas um único plano que contém as retas paralelas r e s.

1.2.2. RETAS REVERSAS

Duas retas no espaço são reversas se não estão contidas em um mesmo plano.

$$\boxed{r \text{ e } s \text{ são retas reversas} \Leftrightarrow \nexists \alpha \text{ tal que } r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha}$$

Um exemplo de retas reversas pode ser visto na figura a seguir:

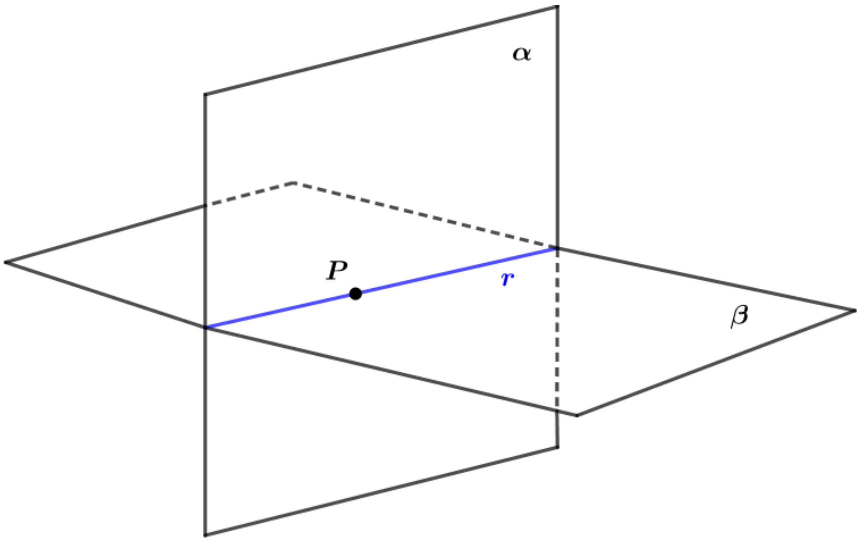


Note que os segmentos de reta r e os segmentos de reta s do cubo não podem pertencer a um mesmo plano, pois não conseguimos tomar um plano que contenha uma das retas sem que a outra o "fure".

1.2.3. TEOREMA DA INTERSECÇÃO

Se dois planos distintos possuem um ponto em comum, então a intersecção entre eles é uma única reta que passa por esse ponto.

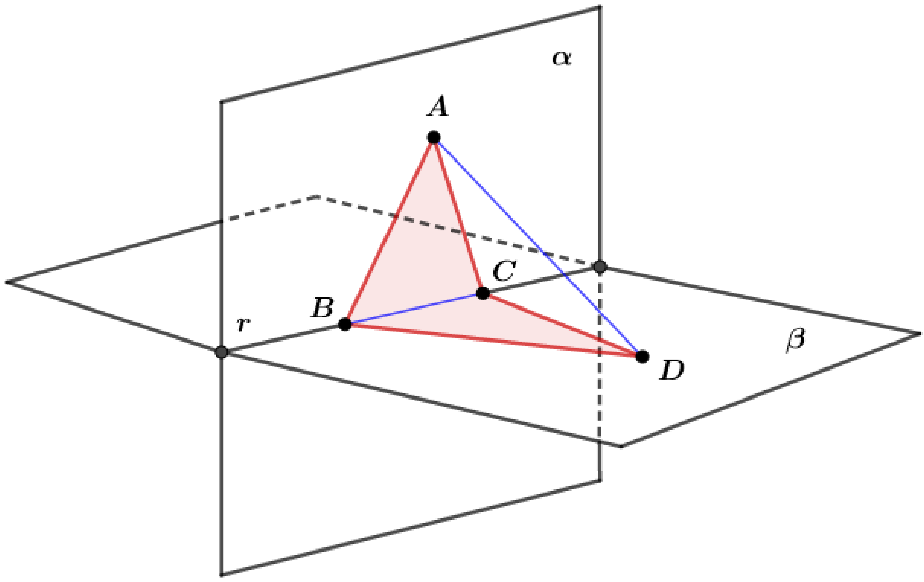
O que devemos extrair desse teorema é que a intersecção entre dois planos não paralelos e não coincidentes é uma reta, ou seja, dois planos secantes formam uma reta. Basta pensarmos no quarto da nossa residência: duas paredes adjacentes podem ser vistas como dois planos, e o que as separa é justamente uma reta. A figura abaixo exemplifica o teorema:



$$\alpha \cap \beta = r$$

1.2.4. QUADRILÁTERO REVERSO

Tomemos dois planos secantes, α e β, cuja intersecção é a reta r e os pontos A, B, C, D representados conforme a figura abaixo:



Chamamos de quadrilátero reverso à figura $ABCD$, pois as diagonais $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ são segmentos de retas reversos. Uma outra definição para quadrilátero reverso é que seus quatro vértices não podem pertencer a um mesmo plano.

1.3. PARALELISMO NO ESPAÇO

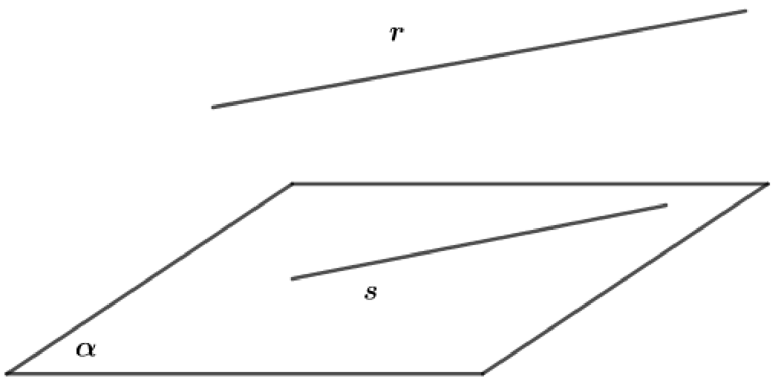
Relembremos a definição de retas paralelas e adaptemos ao espaço. Dizemos que duas retas r e s no espaço são paralelas se, e somente se, são coplanares e não possuam ponto em comum, ou seja, $r \parallel s \Leftrightarrow r \cap s = \emptyset$. Note que a definição é a mesma usada na Geometria Plana.

Conhecendo esse fato, vamos estudar o paralelismo entre retas e planos no espaço. Iniciando pelo teorema:

Uma reta não contida em um plano é paralela a este plano se, e somente se, for paralela a uma reta contida neste plano.

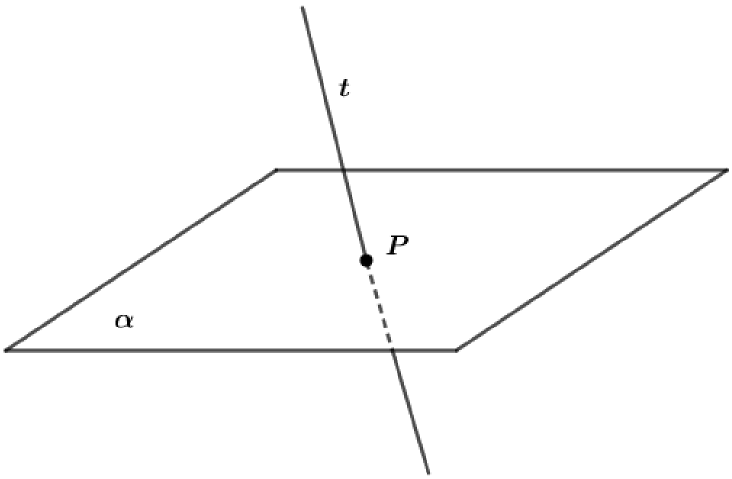
A questão é: como saber se uma reta é paralela a um plano?

Sabemos que, em um plano, há infinitas retas, e conhecemos a definição de retas paralelas. Assim, basta tomar uma reta do plano que seja paralela à reta dada. Intuitivamente, se pensarmos em uma reta que "não fura" o plano, podemos afirmar que, ou ela está contida no plano, ou ela é paralela ao plano. Vejamos as figuras a seguir:



$$s \subset \alpha \ e \ s \cap r = \emptyset \Rightarrow r \parallel \alpha$$

Neste caso, a reta r é paralela ao plano α, pois podemos tomar a reta s contida em α que é paralela à reta r.



Esse é um exemplo de reta que não é paralela ao plano, pois a reta t intercepta o plano no ponto P, ou seja, $r \cap \alpha = \{P\} \neq \emptyset$.

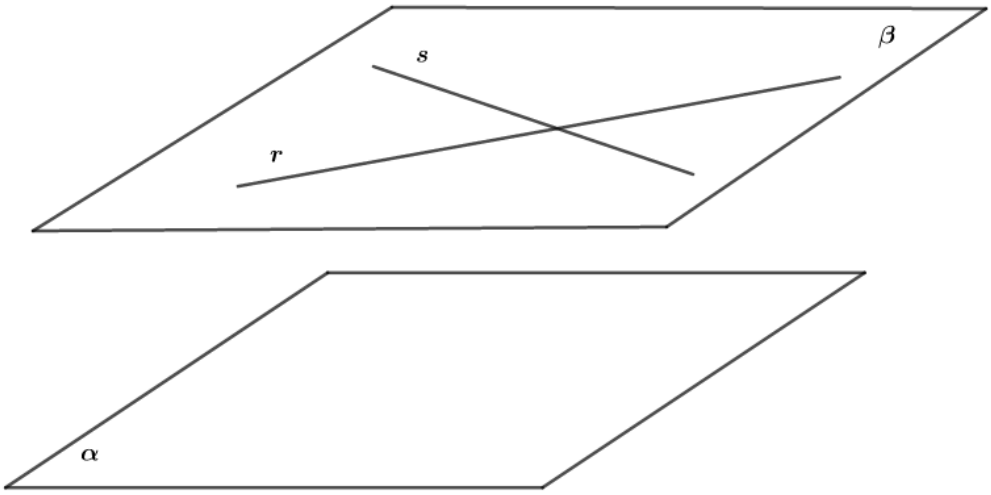
1.3.1. PLANOS PARALELOS

A definição de paralelismo entre planos é a mesma usada entre retas. Vejamos.

Os planos α e β são paralelos se, e somente se, eles não têm ponto comum ou são coincidentes.

Para saber se dois planos são paralelos, podemos tomar duas retas concorrentes a um plano e, se essas retas forem ambas paralelas a outro plano, então os planos são paralelos. Esse é o teorema para testar o paralelismo de planos.

$$\boxed{\text{Dois planos } \alpha \text{ e } \beta \text{ são paralelos entre si se, e somente se, existir em } \beta \text{ um par de retas concorrentes paralelas a } \alpha.}$$

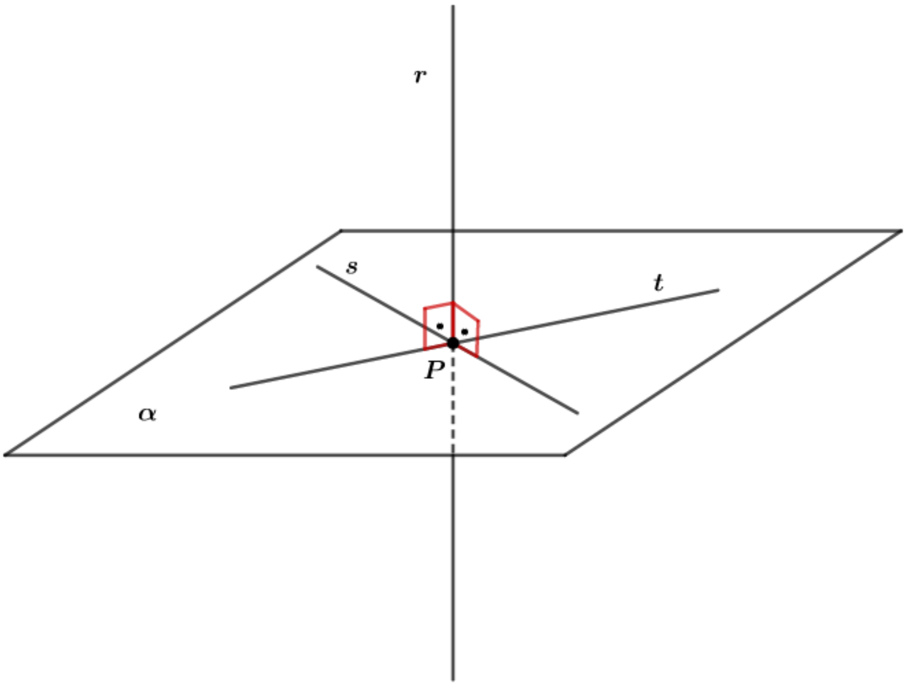


As retas r e s estão contidas no plano β e ambas são paralelas ao plano α, logo, α é paralelo a β.

1.4. PERPENDICULARISMO NO ESPAÇO

Como saber se uma reta é perpendicular a um plano?

Intuitivamente, se r é uma reta perpendicular a um plano α, então r deve interceptar o plano em um ponto P (esse ponto é chamado de pé da reta r, perpendicular ao plano). Para que seja perpendicular, todas as retas contidas em α que passam por P devem ser perpendiculares à reta r.



Pela figura, podemos ver que $r \perp s$ e $r \perp t$, como $r, s \subset \alpha$, temos que $r \perp \alpha$.

Assim, segue o teorema:

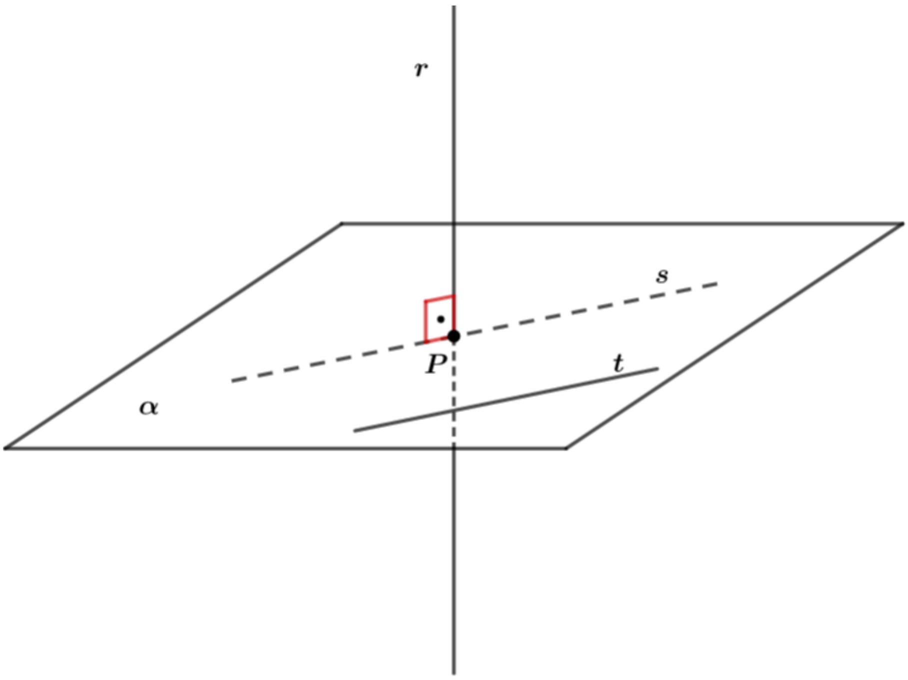
$$\boxed{\text{Uma reta é perpendicular a um plano se, e somente se, for perpendicular a duas retas concorrentes do plano.}}$$

Esse teorema garante que uma reta é perpendicular a um plano.

Para saber se dois planos são perpendiculares, basta tomar uma reta contida em um deles que seja perpendicular ao outro.

1.4.1. RETAS ORTOGONAIS

Dizemos que duas retas são ortogonais se elas são reversas e formam um ângulo reto, ou seja, se r é perpendicular a um plano α e t é uma reta do plano que não possui ponto comum com r, então r e t são ortogonais.

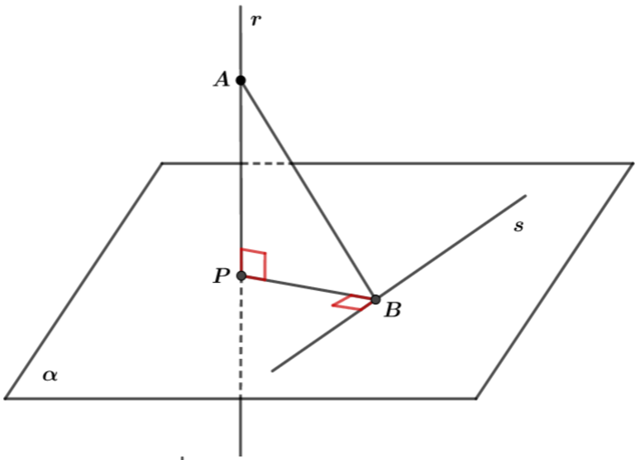


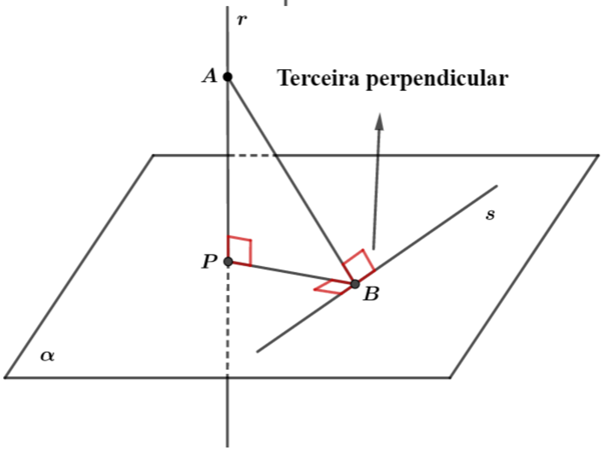
Na figura acima, r e t são retas ortogonais, pois r é perpendicular ao plano α e não intercepta a reta t contida em α, logo r e t são reversas e formam um ângulo reto. Note que $t \parallel s$.

1.4.2. TEOREMA DAS TRÊS PERPENDICULARES

Sejam r e s duas retas reversas e um plano α tais que r é perpendicular a α, $r \cap \alpha = \{P\}$ e $s \subset \alpha$. Se A é um ponto pertencente à r e B é um ponto pertencente à s, então $\overline{AB}$ é perpendicular à s se, e somente se, $\overline{PB}$ é perpendicular à s.

Essa propriedade é conhecida como o **teorema das três perpendiculares**. O que podemos afirmar dela é que, tomando-se A como um ponto qualquer da reta r, se $r \perp \alpha$ e $\overline{PB} \perp s$, então $\overline{AB} \perp s$.

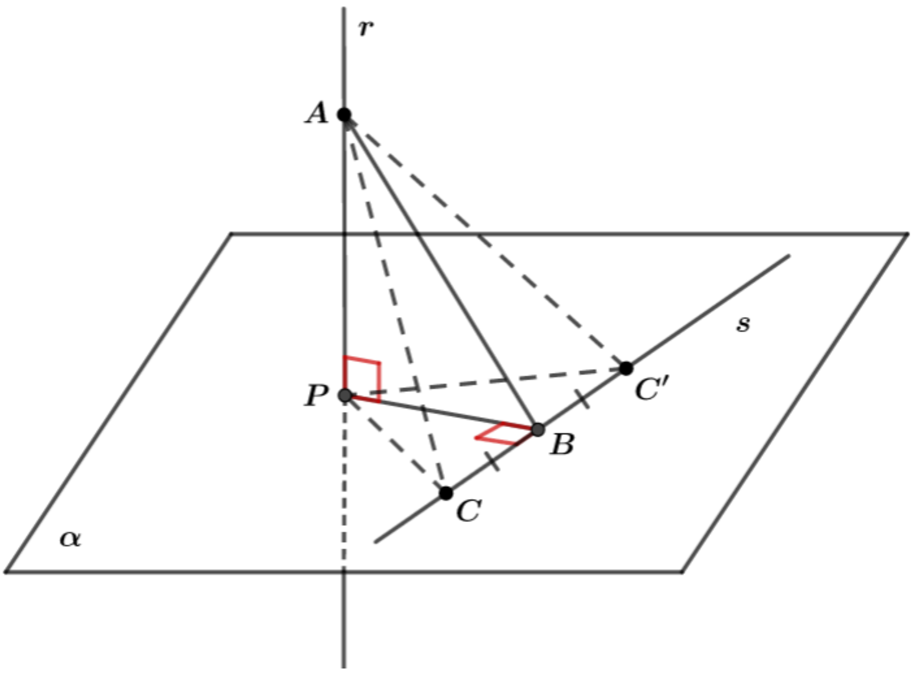




Vejamos sua demonstração.

Demonstração

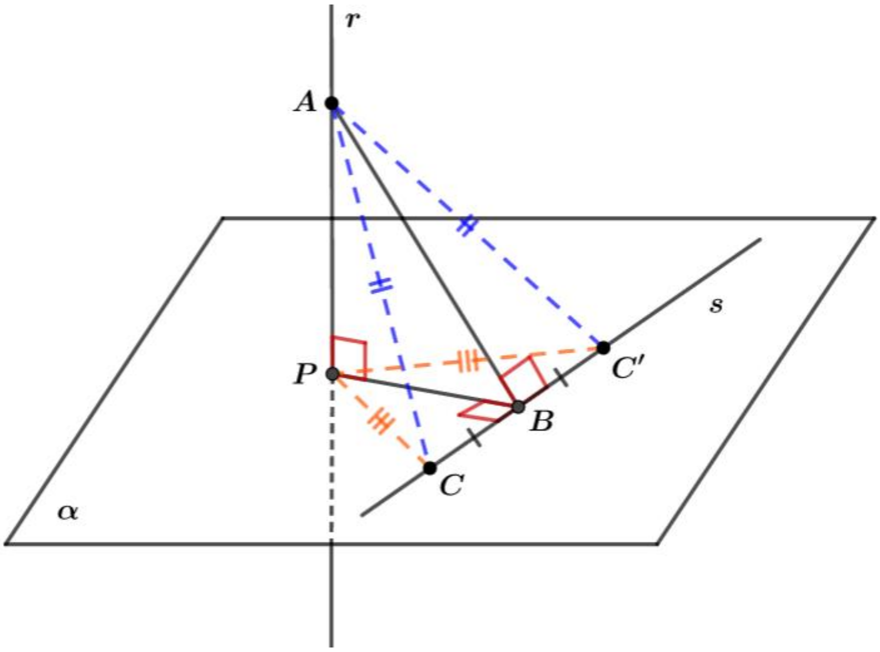
Considere a figura abaixo:



A reta r é perpendicular ao plano α e é ortogonal à reta s. C e C' são pontos pertencentes à s tais que $CB = C'B$, ou seja, B é ponto médio do segmento CC'. Pelo critério de congruência LAL, podemos ver que:

$$CB = C'B, P\hat{B}C = P\hat{B}C', PB = PB \Rightarrow \Delta PBC \equiv \Delta PBC' \therefore PC = PC'$$

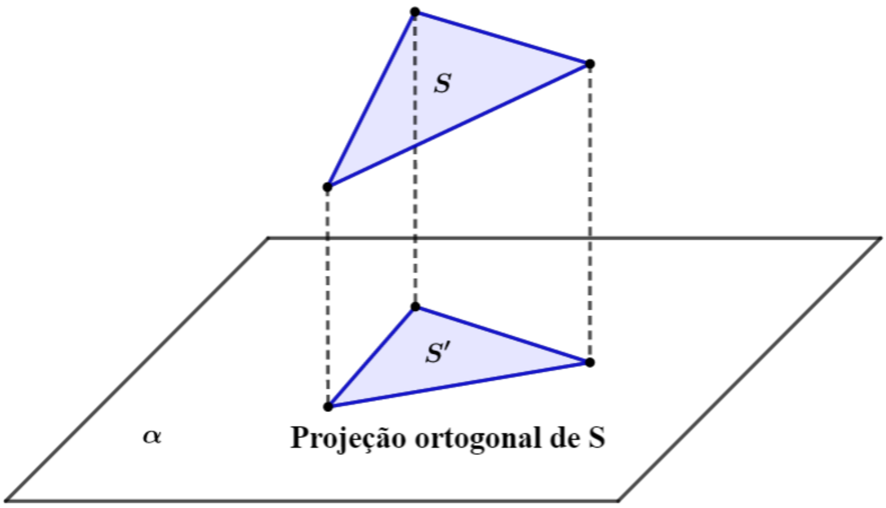
Como AP é segmento de reta comum dos triângulos ΔAPC e $\Delta APC'$, $PC = PC'$ e $APC = APC'$ (pois $r \perp \alpha$) , temos por LAL que $\Delta APC \equiv \Delta APC'$, logo, $AC = AC'$. Com isso, $\Delta ACC'$ é isósceles e, portanto, como $CB = CB'$, temos que AB é altura do triângulo, ou seja, AB forma ângulo reto com a reta s.



Esse teorema será muito útil para resolvermos algumas questões de Geometria Espacial.

1.5. PROJEÇÕES ORTOGONAIS

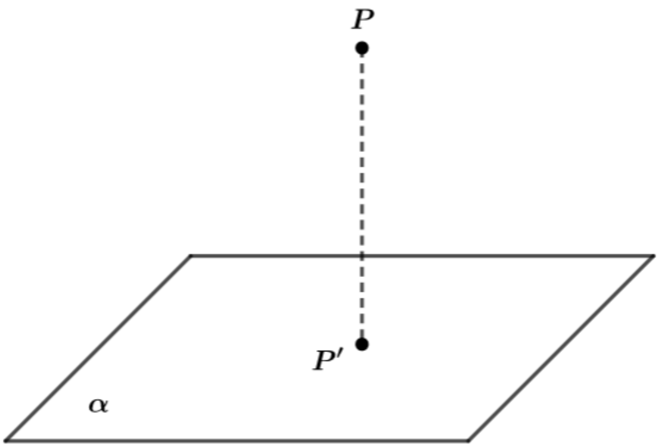
Projeção ortogonal é a imagem de uma figura geométrica projetada perpendicularmente em um plano. Podemos entender essa projeção como a sombra que a figura faz em um plano quando o sol está no seu ponto mais alto. Desse modo, a dimensão da figura projetada não seria alterada.



Estudaremos agora os tipos de projeções.

1.5.1. PROJEÇÃO DE UM PONTO

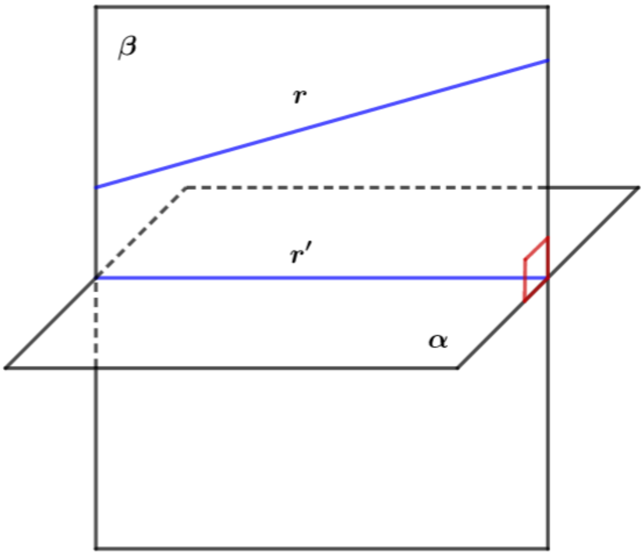
A projeção ortogonal de um ponto P sobre um plano α é o pé da reta perpendicular ao plano que contém P.



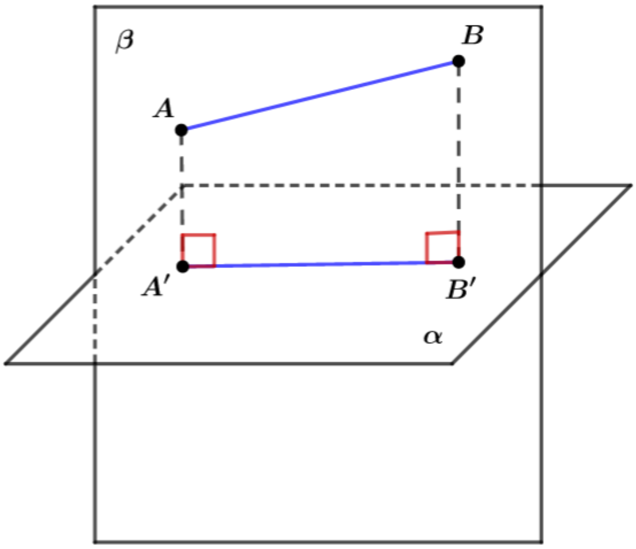
P' é a projeção ortogonal de P sobre o plano α.

1.5.2. PROJEÇÃO DE UMA RETA

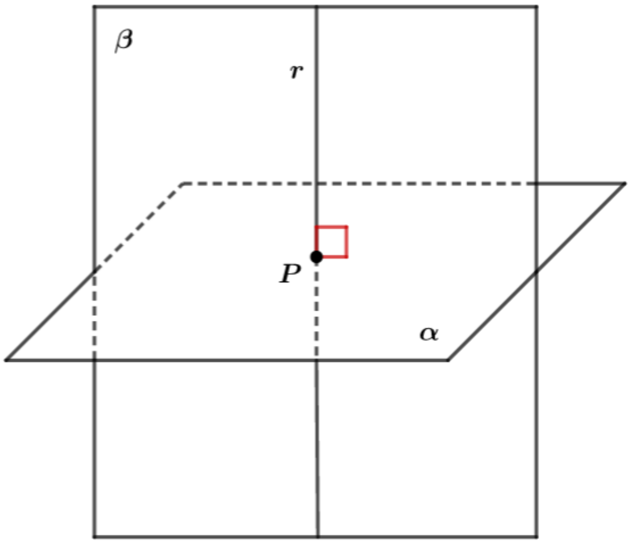
A projeção ortogonal de uma reta r oblíqua sobre um plano α é a reta formada pela intersecção de um plano β, perpendicular a α, que contém a reta r.



No caso de termos um segmento de reta não perpendicular ao plano cujas extremidades são os pontos A e B, a projeção ortogonal desse segmento em um plano α é o segmento de reta que liga a projeção ortogonal dos pontos A e B sobre α.

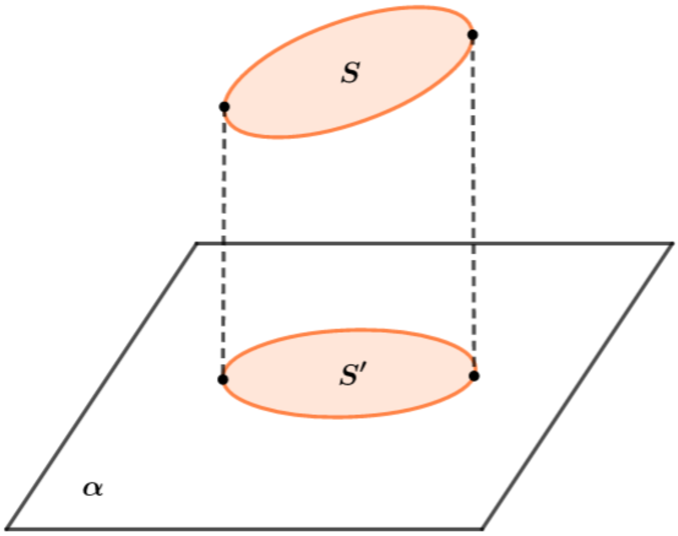


A projeção ortogonal de uma reta ou segmento de reta que é perpendicular a um plano é apenas um ponto.



1.5.3. PROJEÇÃO DE UMA FIGURA

Quando a projeção ortogonal é de uma figura geométrica, a projeção será a figura formada pelo conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos que formam a figura. Na prática, o que fazemos é desenhar a sombra da figura sobre um plano.

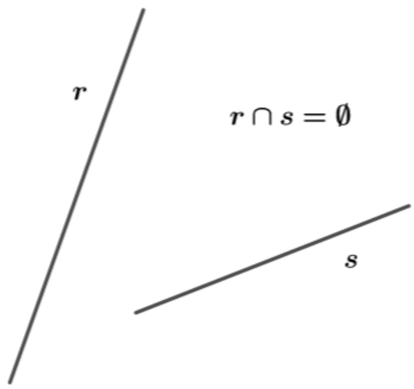


1.6. ÂNGULOS E DISTÂNCIAS NO ESPAÇO

Tudo que estudamos na Geometria Plana sobre os conceitos de ângulos e distâncias é válido na Geometria Espacial. A única diferença aqui é que os elementos primitivos, ponto, reta e plano, podem não pertencer a um mesmo plano. A questão é: como determinar o ângulo e distância entre elementos primitivos que não estão contidos no mesmo plano? Para responder a essa pergunta, veremos cada caso separadamente.

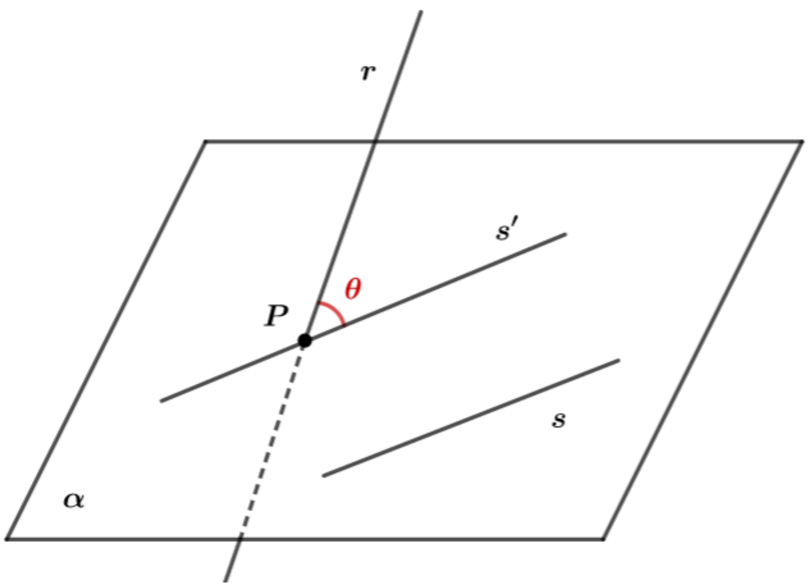
1.6.1. ÂNGULO ENTRE RETAS

Vamos estudar o ângulo entre retas reversas, pois o caso de retas coplanares já foi abordado na Geometria Plana. Consideremos, então, as retas reversas r e s:



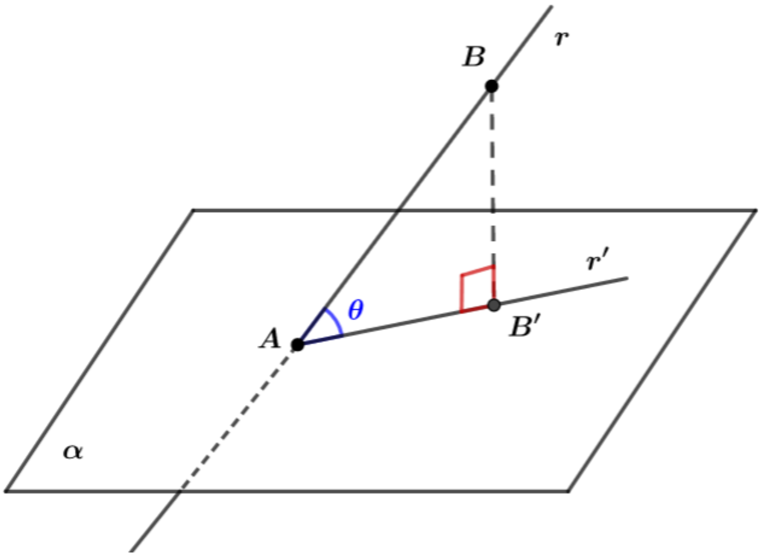
Para determinar o ângulo entre r e s, podemos proceder da seguinte forma:

Tomamos um plano α que contém a reta s. A reta r intercepta α em um ponto P. Traçamos a reta s' paralela à s, contida em α, que contém P. O ângulo entre as retas r e s será igual ao ângulo agudo entre r e s'.



1.6.2. ÂNGULO ENTRE RETA E PLANO

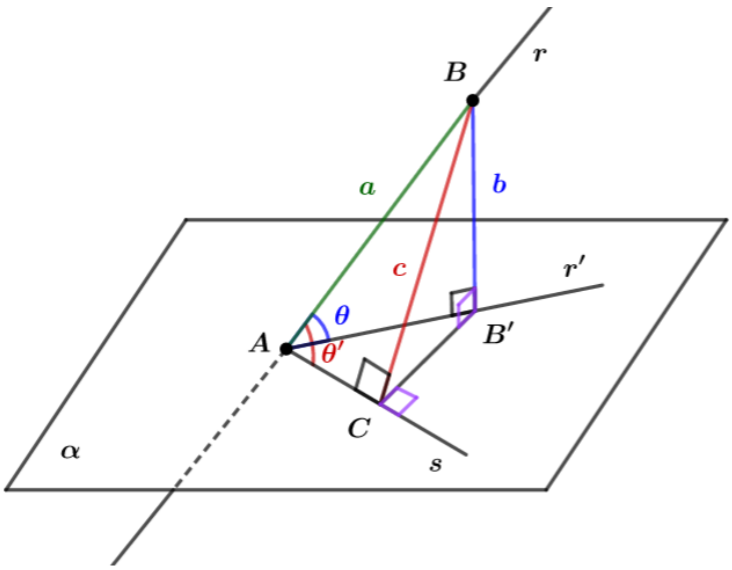
Estudaremos o caso em que a reta é oblíqua ao plano. Para determinarmos o ângulo formado entre uma reta r e um plano α, construímos a projeção ortogonal de r sobre α. O menor ângulo entre r e α será igual ao ângulo agudo entre r e sua projeção ortogonal r'.



B é um ponto da reta r e $r \cap \alpha = \{A\}$.

O ângulo θ pode ser denotado por $\widehat{r\alpha}$.

Para verificarmos essa propriedade, podemos usar a trigonometria. Considere a figura a seguir.



Construímos $B'C$ de modo que $B'C \perp s$. Pelo teorema das três perpendiculares, como $BB' \perp \alpha$ e $B'C \perp s$, temos que $BC \perp s$. Assim, temos:

$$\Delta ABB' \Rightarrow sen\ \theta = \frac{b}{a}$$

$$\Delta ABC \Rightarrow sen\ \theta' = \frac{c}{a}$$

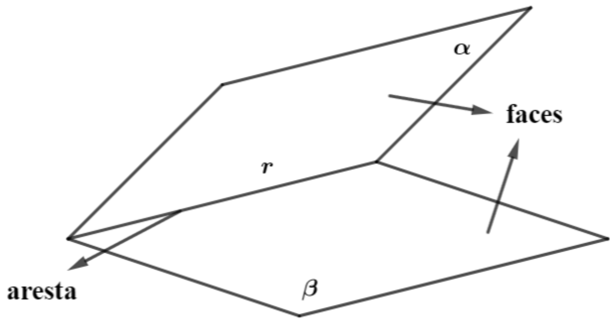
Como BC é hipotenusa do triângulo retângulo $BB'C$, temos que $c > b$. Logo,

$$\frac{c}{a} > \frac{b}{a} \therefore sen\ \theta' > sen\ \theta$$

Como θ e θ' pertencem ao intervalo $]0;\ \pi/2\ [$, temos $\theta < \theta'$, ou seja, θ é o menor ângulo agudo entre r e α.

1.6.3. ÂNGULO ENTRE DOIS PLANOS

Quando estudamos ângulos na Geometria Plana, vimos que ela é a figura formada por dois pares de semirretas com a mesma origem. Podemos estender esse conceito à Geometria Espacial. Nesse caso, o **ângulo entre planos** é chamado de **diedro**. Um diedro é a união de dois semiplanos com a mesma reta de origem. Os semiplanos que determinam o diedro são as faces do diedro e a origem comum dos semiplanos é sua aresta.



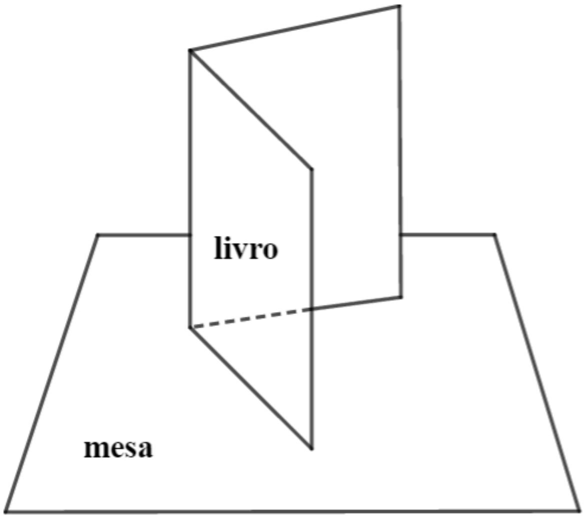
$$\alpha\,\hat{r}\,\beta = \alpha \cup \beta$$

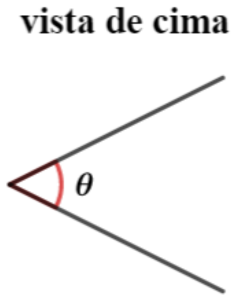
O diedro determinado pelos semiplanos α e β cuja origem comum é a reta r pode ser denotado por: $\alpha\,\hat{r}\,\beta$, $\widehat{\alpha\beta}$ ou $di(r)$. Há outras denotações para o diedro, mas vamos usar apenas essas.

Um bom exemplo de diedro é um livro aberto. As páginas opostas do livro são as faces do diedro, e a lombada do livro é a aresta do diedro.

Como saber a medida do diedro?

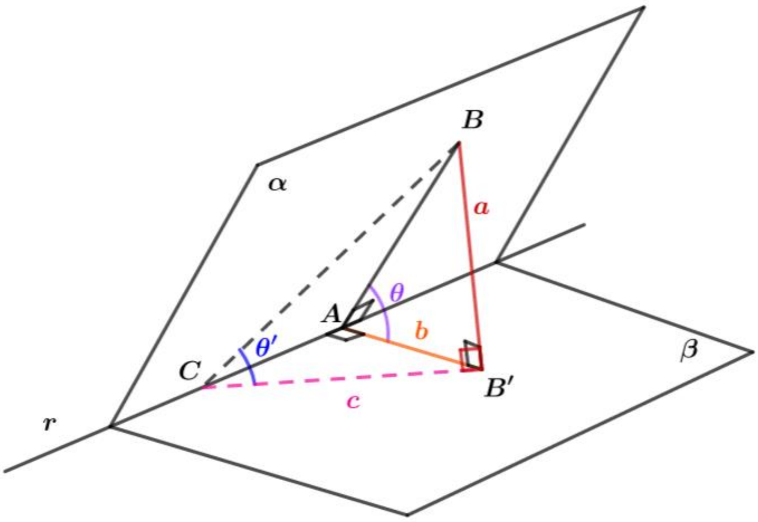
Vamos usar o exemplo do livro. Se colocarmos esse livro semiaberto em uma mesa de tal forma que ele fique em pé (apoiado pela parte de baixo do livro), podemos ver pela vista de cima o ângulo formado pelas páginas do livro. Esse ângulo é a medida do diedro.





Assim, para determinarmos a medida de um diedro formado pelos planos α e β, devemos seccionar os planos com um plano secante perpendicular à aresta do diedro. Esse plano determinará duas semirretas de mesma origem e o ângulo formado por essas semirretas será a medida do diedro.

É possível provar, por trigonometria, que esse ângulo é o maior ângulo agudo entre α e β. Para isso, consideremos dois planos secantes α e β com origem comum à reta r. Seja $B \in \alpha, B' \in \beta, A \in r$ e $C \in r$ conforme ilustra a figura abaixo:



AB' é a projeção ortogonal de AB sobre o plano β. Pela figura, podemos ver que:

$$\Delta ABB' \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{a}{b}$$

$$\Delta CBB' \Rightarrow \operatorname{tg}\theta' = \frac{a}{c}$$

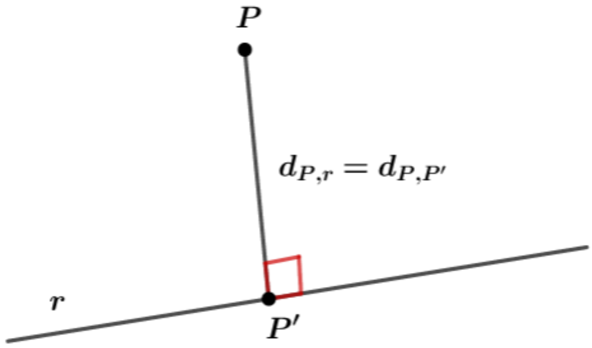
Como CB' é a hipotenusa do triângulo retângulo $\Delta AB'C$, temos $c > b$. Logo,

$$\frac{a}{b} > \frac{a}{c} \Rightarrow \operatorname{tg}\theta > \operatorname{tg}\theta'$$

Para θ e θ' pertencentes ao intervalo $]0;\ \pi/2[$, temos que $\theta > \theta'$, ou seja, θ é o maior ângulo entre α e β.

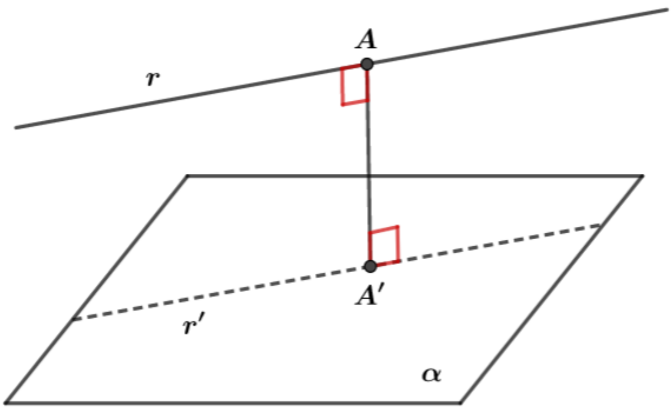
1.6.4. DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA

Para determinar a distância entre um ponto P e uma reta r no espaço, devemos tomar uma reta s perpendicular à r que passa por P. A intersecção de s com r é o ponto P'. Assim, a distância de P à r será igual à distância de P a P'.



1.6.5. DISTÂNCIA ENTRE RETA E PLANO PARALELOS

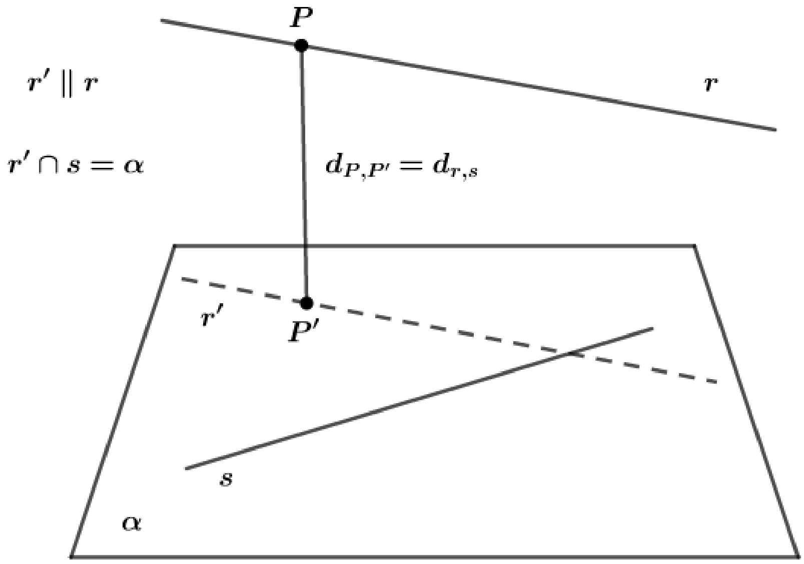
Se r é uma reta paralela ao plano α, então a distância de r a α será igual à distância de r à sua projeção ortogonal em α.



$$d_{r,\alpha} = d_{AA'}$$

1.6.6. DISTÂNCIA ENTRE DUAS RETAS REVERSAS

Por último, vamos aprender a calcular a distância entre duas retas reversas. Leve em consideração que r e s são duas retas reversas. Para determinar a distância entre essas retas, basta tomar um plano α que contém a reta s e que seja paralela à r. A distância entre as retas reversas será igual à distância entre a reta r e o plano paralelo α.



1. (ITA/1969)

Dizemos que um conjunto C de pontos do espaço é convexo se dados pontos A e B quaisquer pertencentes a C, o segmento de reta AB está contido em C. Há conjunto convexo numa das afirmações abaixo? Assinale a afirmação verdadeira.

a) o plano excluído um dos seus pontos.

b) o conjunto dos pontos situados sobre uma câmara de ar de automóvel.

c) a região plana limitada por um quadrilátero.

d) a superfície lateral de um prisma.

e) nenhum dos conjuntos acima.

Comentários

Vamos analisar cada uma das alterativas.

a) o plano excluído um dos seus pontos.

Se foi excluído um dos pontos do plano, há uma espécie de “vazio” dentro desse plano, um “buraco”, uma concavidade.

Dessa forma, é possível que um segmento de reta que contenha dois pontos desse plano passe exatamente em cima dessa concavidade, e isso descaracteriza a região como convexa.

b) o conjunto dos pontos situados sobre uma câmara de ar de automóvel.

A superfície da câmara de ar de um automóvel é um exemplo claro de concavidade. Como podemos traçar segmentos com extremidades que pertençam à câmara e pontos do segmento que não pertencem a ela, a região é côncava, não convexa.

d) a superfície lateral de um prisma.

Mesmo caso da câmara de ar. Se só a superfície for considerada, podemos ter segmentos de reta que contenham pontos da superfície do prisma e pontos fora dela. Assim, temos, novamente, uma região côncava.

e) nenhum dos conjuntos acima.

Como não encontramos região alguma nas alternativas anteriores que caracterizasse uma região convexa, essa é nosso gabarito.

Gabarito: “e”.

---

2. (ITA/1969)

Consideremos um plano α e uma reta r que encontra esse plano num ponto P, e que não é perpendicular a α. Assinale qual das afirmações é a verdadeira.

a) existem infinitas retas de α perpendiculares a r pelo ponto P.

b) existe uma e somente uma reta de α perpendicular a r por P.

c) não existe reta de α, perpendicular a r, por P.

d) existem duas retas de α perpendiculares a r passando por P.

e) nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

Comentários

Se a reta r fosse perpendicular ao plano α, todas as retas de α que passam por P seriam perpendiculares à reta r.

Como isso não é verdade, ou seja, r não é perpendicular a α, temos apenas uma reta do plano α que passa por P que é perpendicular à r.

Para explicitar o caso, imagine um plano perpendicular à r e que passe por P. A intersecção entre esse plano novo e o plano α delimita uma reta perpendicular à r e pertencente a α. Como esses dois planos não são coincidentes, a intersecção destes delimita uma única reta, portanto, essa reta, que é perpendicular à r e pertencente a α existe e é única.

Gabarito: “b”.

---

3. (ITA/1969)

Considere o plano de uma mesa e um ponto dado deste plano. Você dispõe de uma folha de papel que possui um só bordo reto. Dobrando esta folha de papel, conduza uma perpendicular ao plano da mesa, pelo ponto dado. A justificativa de tal construção está em um dos teoremas abaixo.

a) Se uma reta é perpendicular a um plano, todo plano que passa por ela é perpendicular ao primeiro.

b) Se dois planos são perpendiculares, toda reta de um deles que for perpendicular à intersecção será perpendicular ao outro.

c) Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes pelo seu ponto de intersecção, então a reta é perpendicular ao plano determinado por essas duas retas.

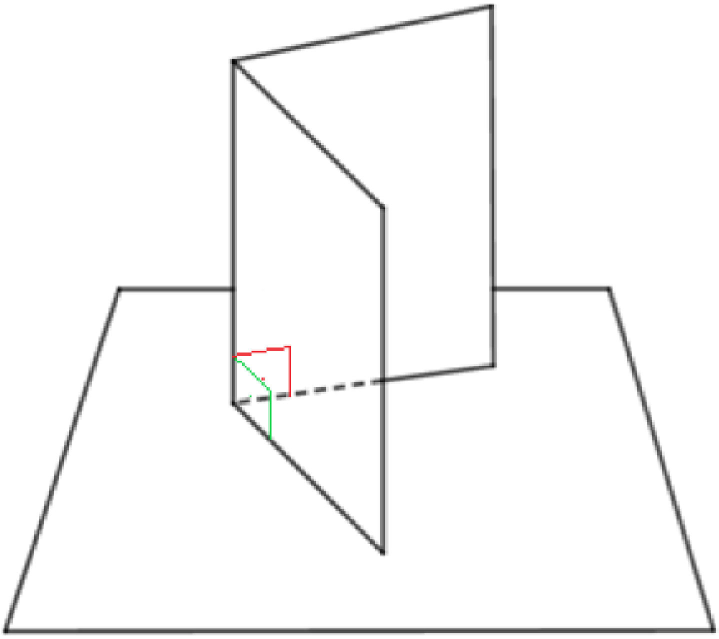
d) Por um ponto exterior a um plano passa uma reta perpendicular ao plano e somente uma.

e) Todas as perpendiculares a uma reta traçadas por um de seus pontos pertencem a um plano.

Comentários

Ao dobrar a folha de papel exatamente no meio do bordo reto, pode-se construir um vinco perpendicular a duas retas, definidas por cada segmento de reta gerado pela dobradura.

Ao colocar o bordo reto da folha no plano da mesa, geramos duas retas (pertencentes ao plano) perpendiculares ao vinco, o que está de acordo com o exposto na alternativa c).



Gabarito: “c”.

---

4. (ITA/1968)

Dadas duas retas concorrentes a e b e dado um ponto M, fora do plano determinado por a e b, consideremos os pontos E e F, simétricos de M em relação às retas a e b, respectivamente. A reta que une os pontos E e F é:

a) Perpendicular ao plano determinado por a e b.

b) Paralela ao plano determinado por a e b.

c) Oblíqua ao plano determinado por a e b.

d) Pertencente ao plano determinado por a e b.

e) Nenhuma das respostas anteriores.

Comentários

Se E é simétrico de M em relação à reta a, E está à mesma distância do plano formado por a e b que M.

O mesmo ocorre com o ponto F. Se F é simétrico de M em relação à reta b, F está à mesma distância do plano formado por a e b que M.

Dessa forma, como E e F têm a mesma distância do plano formado por a e b que M, a reta que os une é paralela ao plano.

Gabarito: “b”.

---

5. (Inédita)

Os pontos A e A' são simétricos com relação ao plano α e nenhum deles pertencem a α. A intersecção entre a reta r definida A e A' com o plano α define

a) uma reta pertencente a α e perpendicular a r.

b) uma reta pertencente a α e paralela a r.

c) um único ponto.

d) uma única reta, não pertencente a r.

e) um outro plano.

Comentários

Como os pontos A e A' não pertencem ao plano α, a reta definida por eles é secante ao plano, ou seja, só apresenta um ponto em comum com α.

Gabarito: "c".

2. LUGARES GEOMÉTRICOS

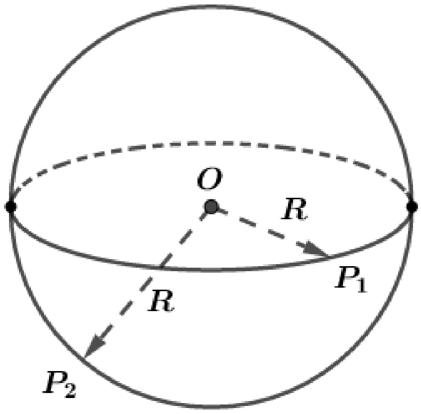
O conceito de **lugares geométricos**, na Geometria Espacial, não é muito diferente dos vistos na Geometria Plana. A diferença aqui é a inclusão de uma dimensão. Apresentaremos neste tópico alguns lugares geométricos no espaço.

Na Geometria Plana, vimos que o lugar geométrico dos pontos que equidistam de um dado ponto é chamado de circunferência, ou seja, dado um ponto O, chamado de centro, temos que a circunferência λ de raio r e centro O é definida por:

$$\lambda\{O,r\} = \left\{P \in \underbrace{\alpha}_{plano} \middle| d_{P,O} = \underbrace{r}_{raio\ da\ circunferência}\right\}$$

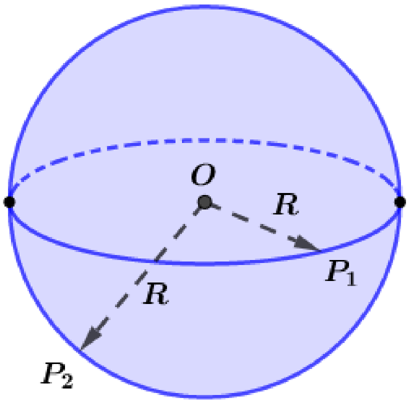
Quando usamos essa definição de pontos equidistantes de um dado ponto no espaço, o lugar geométrico que esse conjunto representa é uma **superfície esférica**. Todos os pontos dessa figura **equidistam do centro O**:

$$S\{O,R\} = \left\{P \in \underbrace{\epsilon}_{espaço} \middle| d_{P,O} = \underbrace{R}_{raio\ da\ esfera}\right\}$$



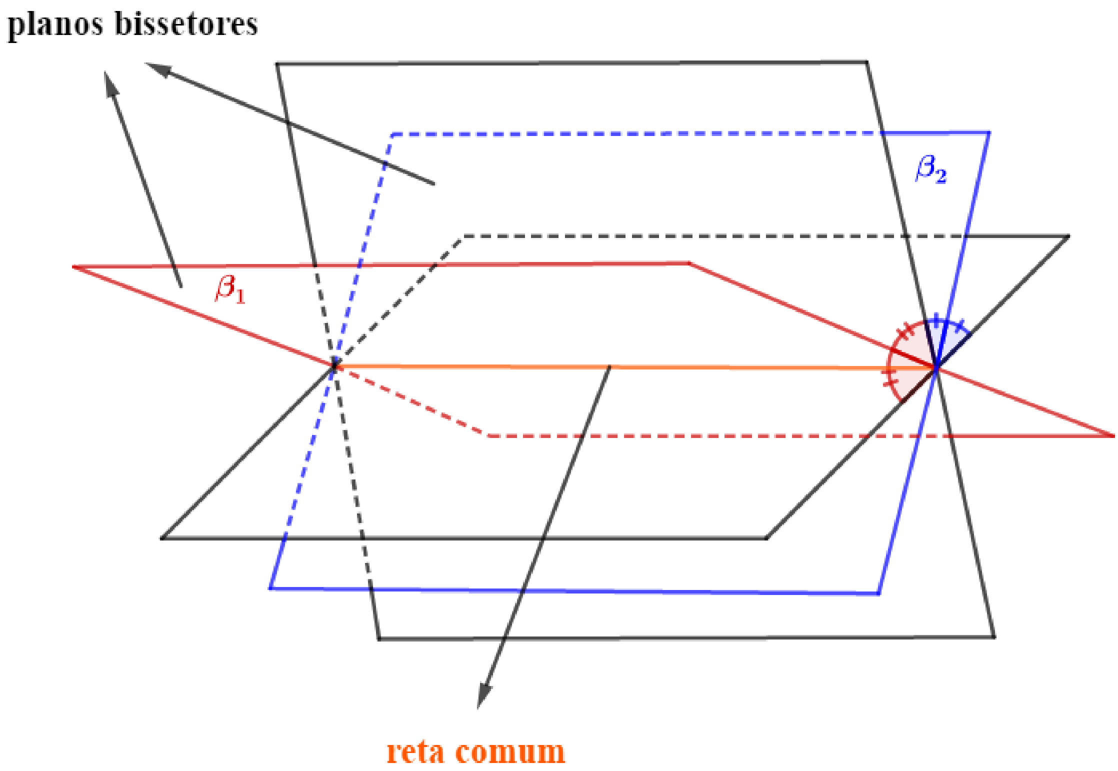
Se quisermos uma esfera maciça, basta trocar o sinal de igual pela desigualdade $\leq$:

$$S_1\{O, R\} = \{P \in \epsilon | d_{P,O} \leq R\}$$

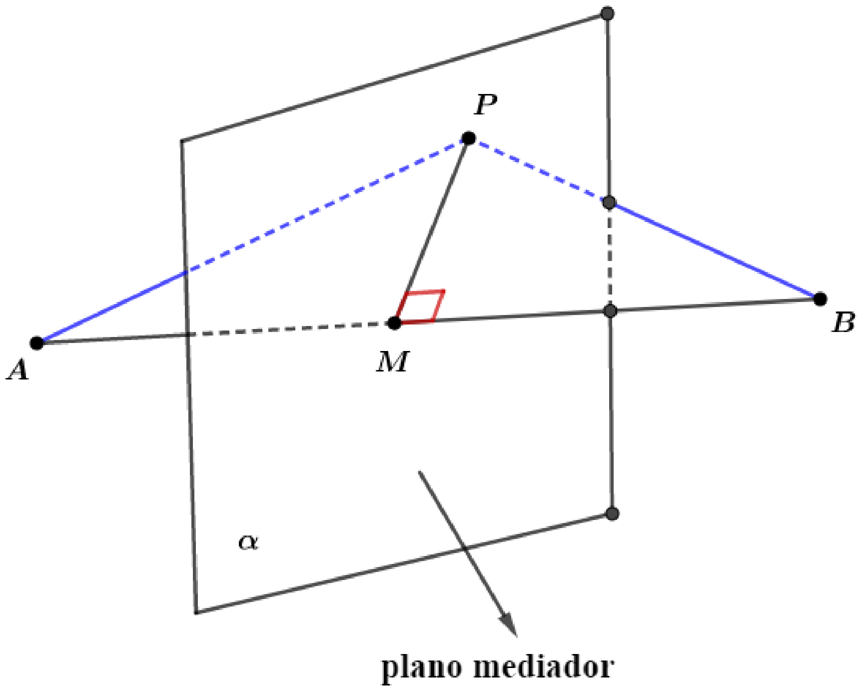


Nesse caso, todos os pontos da superfície esférica e do interior da esfera fazem parte do lugar geométrico.

Outro lugar geométrico no espaço é o plano bissetor. Na Geometria Plana, estudamos a reta bissetriz. Esse é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de duas retas concorrentes. Na Geometria Espacial, no lugar de reta, teremos um plano. Desse modo, o lugar geométrico dos pontos do espaço que **equidistam de dois planos secantes** é chamado de **plano bissetor**. E assim como no estudo plano, onde duas retas concorrentes geram duas retas bissetrizes, no estudo do espaço, temos que dois planos secantes gerarão dois planos bissetores.

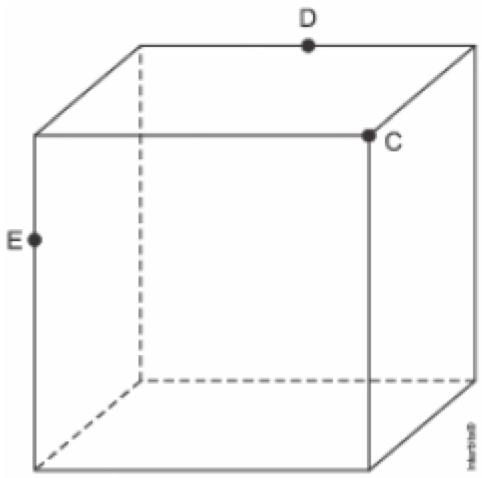


Temos também o lugar geométrico **plano mediador**. Ele é o conjunto dos **pontos equidistantes de dois pontos distintos**. Assim, dado um segmento de reta AB no espaço, ele será o plano perpendicular ao segmento e conterá o seu ponto médio. Na Geometria Plana, ele é conhecido como reta mediatriz.



6. (UPF/2019)

Na figura a abaixo, está representado um cubo.



A seção produzida no cubo pelo plano CDE tem a forma de

a) triângulo.

b) trapézio.

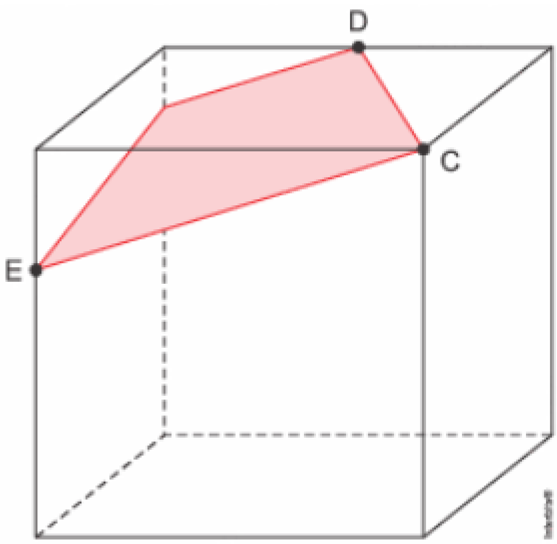
c) retângulo.

d) pentágono.

e) hexágono.

Comentários

Façamos o corte no plano CDE, conforme o enunciado orienta.

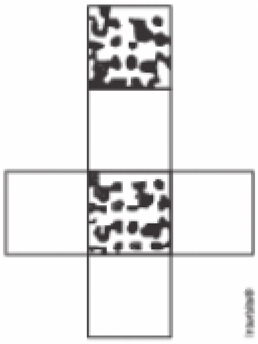


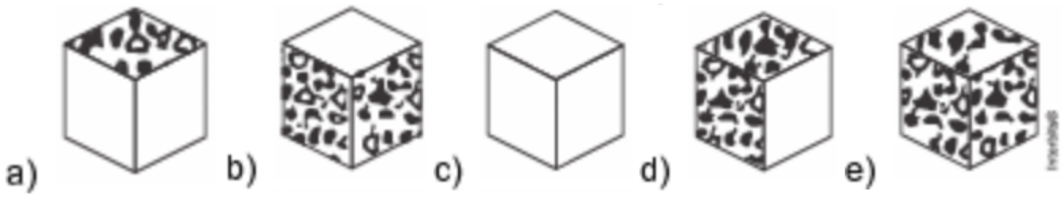
Como as faces opostas do cubo são sempre paralelas, temos um trapézio.

Gabarito: “b”.

7. (UFJF/2018)

Qual sólido geométrico representa a planificação abaixo?





Comentários

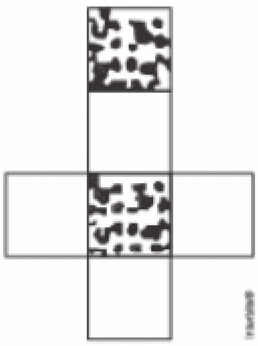
Como as alternativas apresentam apenas três faces perpendiculares entre si, podemos inferir que uma das faces pintadas será visível e outra não, já que são opostas na planificação.

A única alternativa que apresenta uma única face pintada é a alternativa a.

Gabarito: “a”.

8. (UFJF/2018)

Qual sólido geométrico representa a planificação abaixo?



Comentários

Como as alternativas apresentam apenas três faces perpendiculares entre si, podemos inferir que uma das faces pintadas será visível e outra não, já que são opostas na planificação.

A única alternativa que apresenta uma única face pintada é a alternativa a.

Gabarito: “a”.

---

9. (Inédita)

O lugar geométrico no espaço cujos pontos são todos equidistantes de 3 unidades da origem é chamado de

a) circunferência

b) hiperboloide

c) esfera

d) raio

e) círculo

Comentários

Como temos um lugar geométrico no espaço com todos os pontos equidistantes da origem, temos uma esfera. No caso, o raio da esfera é de 3 unidades, mas o lugar geométrico em si não é o raio e sim a esfera, os pontos que estão distantes 3 unidades da origem.

Gabarito: “c”.

---

10. (UFRGS/2016)

Em uma caixa, há sólidos geométricos, todos de mesma altura: cubos, cilindros, pirâmides quadrangulares regulares e cones. Sabe-se que as arestas da base dos cubos e das pirâmides e têm a mesma medida; que o raio da base dos cones e dos cilindros tem a mesma medida. Somando o volume de 2 cubos e de 2 cilindros, obtêm-se $180\,cm^3$. A soma dos volumes de 3 cubos e 1 cone resulta em $110\,cm3$, e a soma dos volumes de 2 cilindros e 3 pirâmides resulta em $150\,cm3$.

O valor da soma dos volumes, em cm^3, de um cubo, um cilindro, dois cones e duas pirâmides é

a) $150.$ **b) $160.$** **c) $190.$** **d) $210.$** **e) $240.$**

Comentários

Como todos os sólidos têm a mesma altura, vamos denominá-la x.

Assim, podemos dizer que:

$Volume\ do\ cubo = V_c = x^3$

$Volume\ da\ pirâmide = V_p = \frac{1}{3} \cdot Volume\ do\ cubo = \frac{1}{3} \cdot x^3$

Sendo r o raio da base dos cones e dos cilindros, todos de altura x, temos:

$Volume\ do\ cilindro = V_l = \pi \cdot r^2 \cdot x$

$Volume\ do\ cone = V_n = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot x$

Utilizando o dado do exercício de que "Somando o volume de 2 cubos e de 2 cilindros, obtêm-se 180 cm^3", temos:

$$2 \cdot V_c + 2 \cdot V_l = 180$$

$$2 \cdot x^3 + 2 \cdot (\pi \cdot r^2 \cdot x) = 180$$

$$2 \cdot [x^3 + \pi \cdot r^2 \cdot x] = 180$$

$$x^3 + \pi \cdot r^2 \cdot x = \frac{180}{2}$$

$$x^3 + \pi \cdot r^2 \cdot x = 90$$

Tudo bem, não sabemos os valores específicos de x e de r e talvez nem precisemos.

O exercício nos pediu o valor dos volumes de um cubo, um cilindro, dois cones e duas pirâmides somados, ou seja:

$$V_c + V_l + 2 \cdot V_n + 2 \cdot V_p$$

$$x^3 + \pi \cdot r^2 \cdot x + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot x + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3$$

$$x^3 + \pi \cdot r^2 \cdot x + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot [\pi \cdot r^2 \cdot x + x^3]$$

$$90 + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot [90]$$

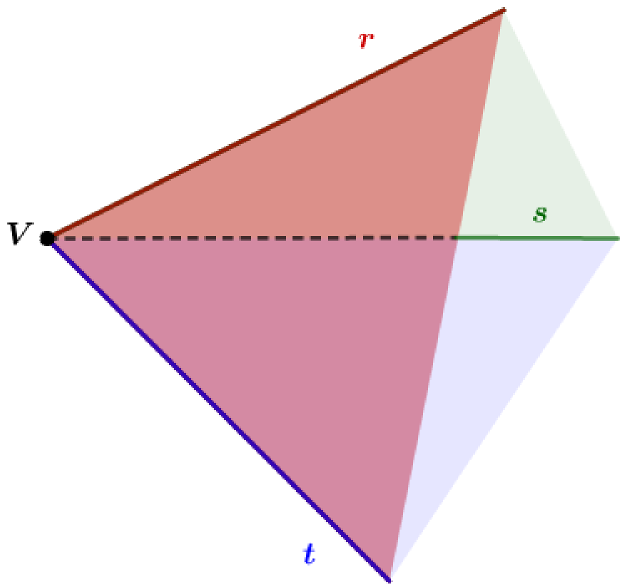
$$90 + 60$$

$$150$$

Gabarito: “a”.

3. TRIEDROS

Vimos que um diedro é uma figura formada por dois semiplanos com a mesma origem, sendo essa uma reta comum. Um **triedro** é a figura formada por **três semirretas não coplanares e de mesma origem**, sendo essa origem um ponto comum chamado de vértice. Se r, s e t são semirretas que formam um triedro, então podemos denotar o triedro formado por essas semirretas por $V(r; s; t)$.



Dizemos que $\boldsymbol{V}$ é o **vértice** do triedro, cada **semirreta** é a **aresta** do triedro e as **faces** são determinadas por cada **par de semirretas**. Assim, temos:

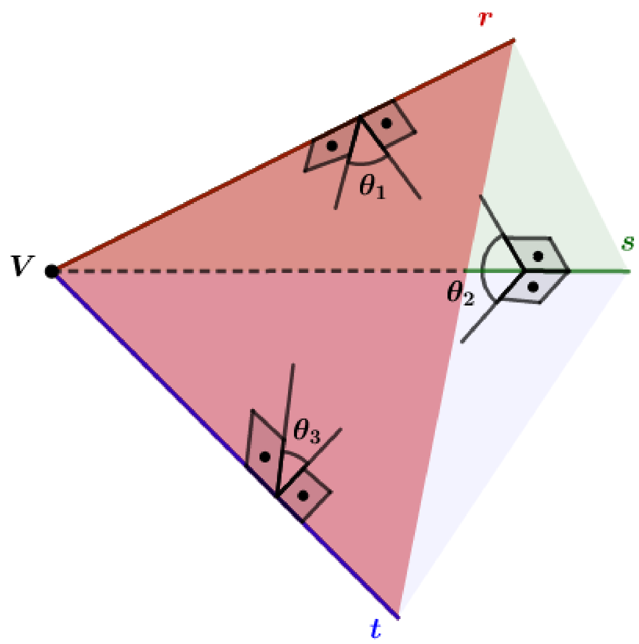
$$V - vértice$$

$$r, s, t - arestas$$

$$r\ \hat{V}\ s, r\ \hat{V}\ t, s\ \hat{V}\ t - \text{ângulos das faces ou faces}$$

As faces também podem ser denotadas por $\widehat{rs}, \widehat{rt}$ e $\widehat{st}$.

Note que no triedro, cada semirreta forma um diedro, ou seja, este é determinado por duas faces do triedro.



$$\theta_1, \theta_2, \theta_3 - \hat{a}ngulos\ diedros$$

3.1. PROPRIEDADES DO TRIEDRO

No estudo do triângulo, vimos a desigualdade triangular que diz que dado um triângulo de lados a, b e c, temos, para qualquer lado do triângulo:

$$|b - c| < a < b + c$$

No estudo do triedro, temos uma desigualdade parecida com essa. Enunciemos o teorema.

3.1.1. TEOREMA 1 – DESIGUALDADE DOS ÂNGULOS DAS FACES

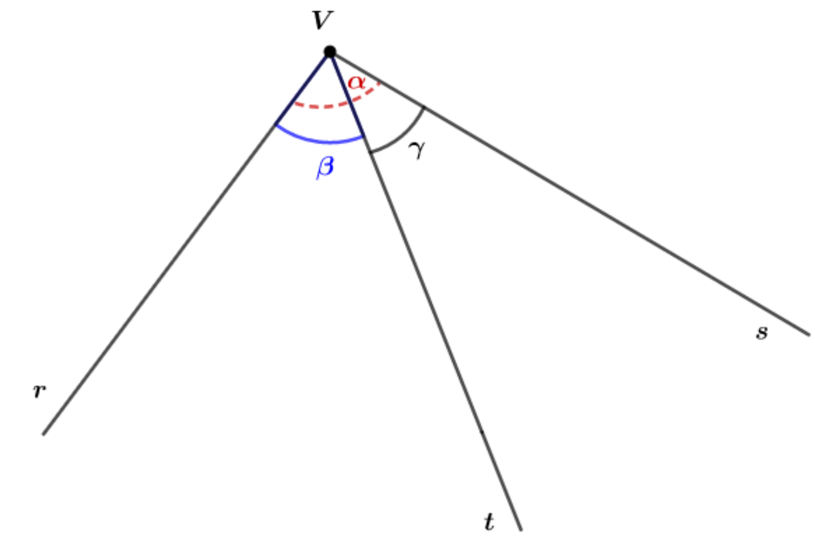
Em um triedro de faces α, β e γ, temos válida a seguinte desigualdade:

$$\boxed{|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma}$$

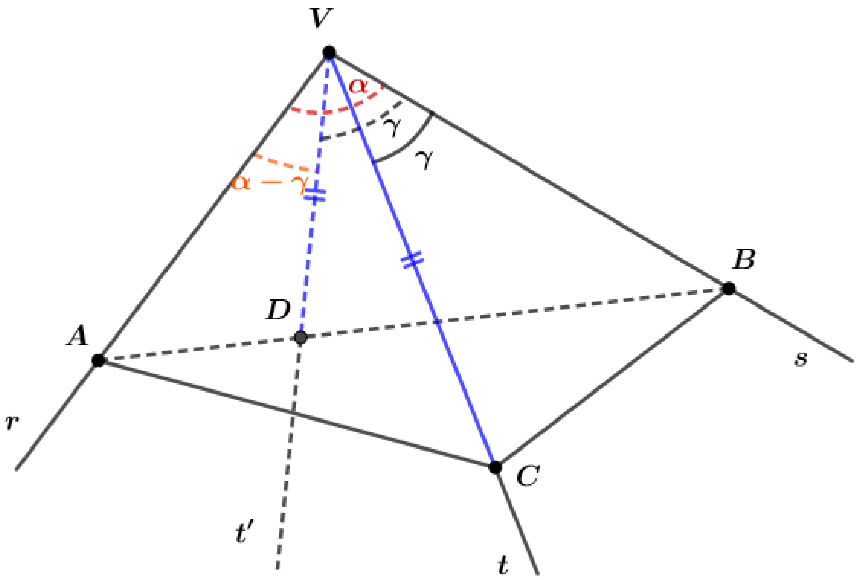
Essa desigualdade é válida tomando-se como referência qualquer face do triedro.

Demonstração

Seja um triedro cujas arestas são as semirretas r, s, t tais que $\widehat{rs} = \alpha, \widehat{rt} = \beta$ e $\widehat{st} = \gamma$. Suponha que α seja o maior ângulo do triedro $V(\alpha, \beta, \gamma)$.



Assim, tomando-se A, B, C pontos das semirretas r, s e t, respectivamente, podemos construir na face α a semirreta t' tal que $D \in t'$ e $VD = VC$.



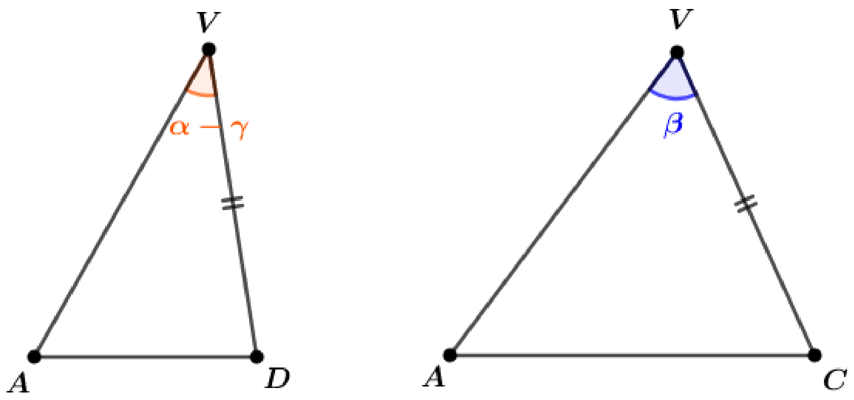
Pelo critério de congruência LAL, temos $\Delta DVB \equiv \Delta CVB$, logo, $DB = BC$. No triângulo ΔABC, temos pela desigualdade triangular:

$$AB < AC + BC$$

Como $AB = AD + DB$ e $DB = BC$, temos:

$$AD + DB < AC + BC \Rightarrow AD + \cancel{BC} < AC + \cancel{BC} \therefore AD < AC$$

Desse modo, temos os seguintes triângulos:



Como $AD < AC$, temos $\alpha - \gamma < \beta$, ou seja,

$$\alpha < \beta + \gamma$$

Sendo α a maior face do triedro, concluímos que qualquer uma de suas faces será menor que a soma das outras duas. Com isso, temos:

$$\begin{cases} \beta < \alpha + \gamma \\ \gamma < \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta - \gamma < \alpha \\ \gamma - \beta < \alpha \end{cases} \Rightarrow |\beta - \gamma| < \alpha$$

Portanto, para qualquer face do triedro, temos a seguinte desigualdade:

$$|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$$

Além desse teorema, temos um outro que se refere à soma dos ângulos das faces.

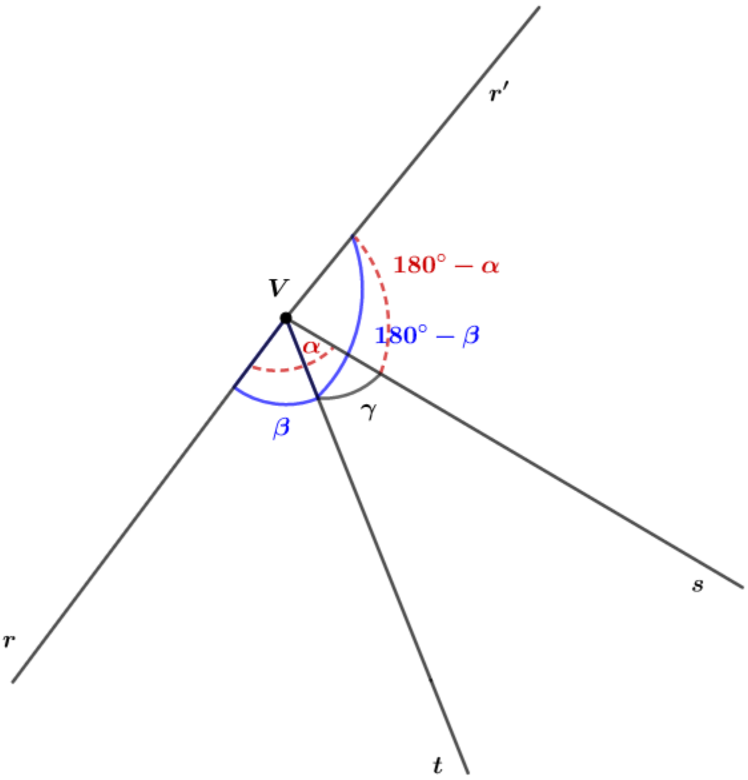
3.1.2. Teorema 2

A soma das faces em graus de um triedro qualquer é sempre menor que $360°$:

$$\alpha + \beta + \gamma < 360°$$

Demonstração

Consideremos Vr' a semirreta oposta da semirreta Vr do triedro $V(r, s, t)$. Desse modo, $\widehat{rs}$ e $\widehat{sr'}$ são ângulos adjacentes e suplementares, assim como os ângulos $\widehat{rt}$ e $\widehat{tr'}$, logo:



Usando a desigualdade das faces no triedro $V(r', s, t)$, obtemos:

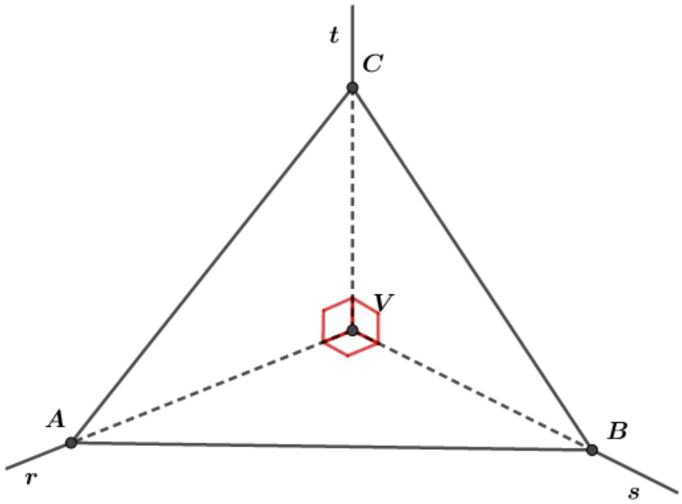
$$\gamma < 180° - \alpha + 180° - \beta$$

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma < 360°$$

3.2. TRIEDRO TRIRRETÂNGULO

Um triedro trirretângulo é aquele que possui todos os ângulos das faces iguais a 90°. Vamos estudar essa figura geométrica e extrair algumas propriedades dela.

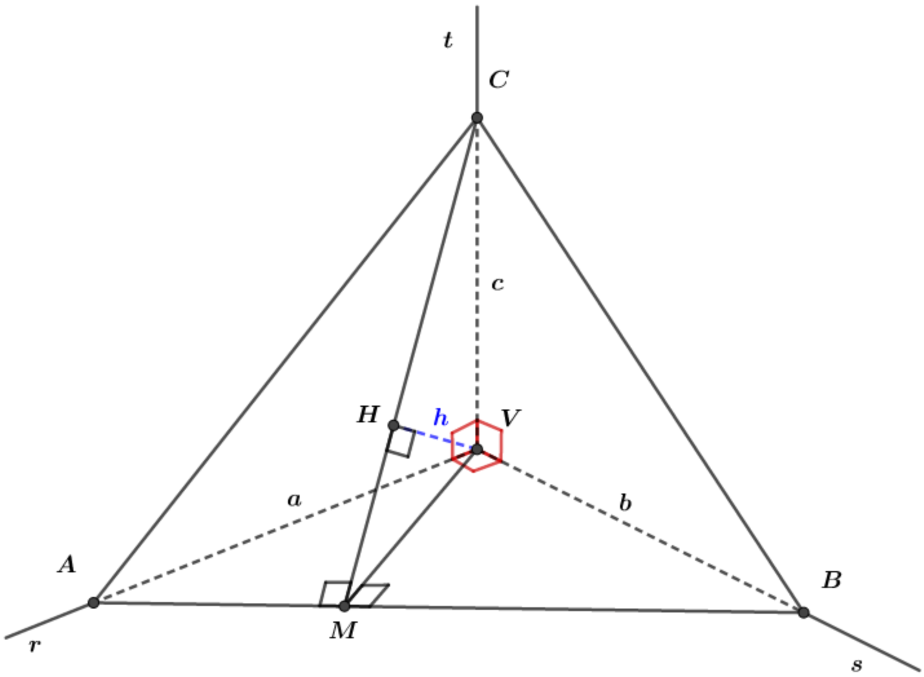
Considere um triedro trirretângulo no qual os pontos A, B, C sejam pontos de suas arestas, conforme representada na figura abaixo:



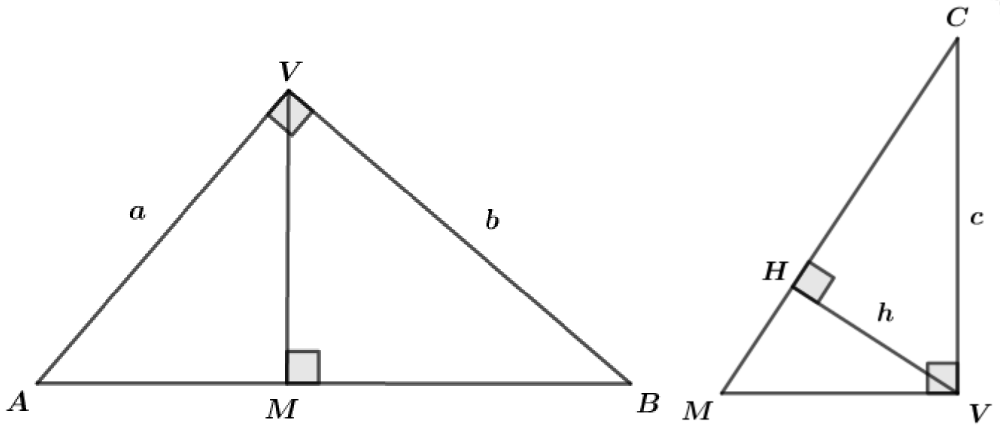
Os pontos A, B, C determinam um plano no espaço, ou seja, esse plano fecha o triedro na região aberta e, assim, obtemos a figura de uma pirâmide.

*Observação: muitas vezes, os pontos A, B, C podem não ser dados na questão e, ao invés disso, o problema pode dizer que um plano secciona (ou corta) o triedro a uma determinada distância do vértice. Isso "fechará" o triedro de modo a obter um sólido.

Vamos cortar a pirâmide perpendicularmente à aresta VC de modo a obter a seguinte figura:



VH é a distância do vértice à face ABC. Perceba, pelo desenho, que temos diversos triângulos retângulos no espaço. Analisemos esses triângulos.



Do triângulo ΔAVB, temos pelas relações métricas do triângulo retângulo:

$$\frac{1}{(MV)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \quad (I)$$

Do triângulo CVM:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{(MV)^2} \quad (II)$$

Portanto, substituindo (I) em (II):

$$\boxed{\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$$

Essa propriedade relaciona a altura da pirâmide $VABC$ com suas arestas a, b, c. Vamos calcular a área da face ABC.

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$\Delta AVB \Rightarrow (AB)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow AB = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Delta AVB \Rightarrow (AB)(MV) = ab \Rightarrow MV = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Delta CVM \Rightarrow MC^2 = c^2 + MV^2 \Rightarrow MC = \sqrt{c^2 + \left(\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow MC = \sqrt{\frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2 + b^2}}$$

A área do ΔABC é dada por:

$$\underbrace{[ABC]}_{área\ do\ \Delta ABC} = \frac{1}{2}(AB)(MC) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{a^2+b^2}}$$

$$[ABC] = \frac{1}{2}\cdot\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}{\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}} = \sqrt{\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{4}}$$

$$[ABC]^2 = \underbrace{\left(\frac{ab}{2}\right)^2}_{[AVB]} + \underbrace{\left(\frac{ac}{2}\right)^2}_{[AVC]} + \underbrace{\left(\frac{bc}{2}\right)^2}_{[BVC]}$$

$$\therefore \boxed{[ABC]^2 = [AVB]^2 + [AVC]^2 + [BVC]^2}$$

Portanto, a área da face ABC ao quadrado é igual à soma das áreas das outras faces ao quadrado.

11. (Inédita)

Um plano corta os eixos coordenados nos pontos $A(0,0,1)$, $B(0,2,0)$ e $C(0,0,3)$.

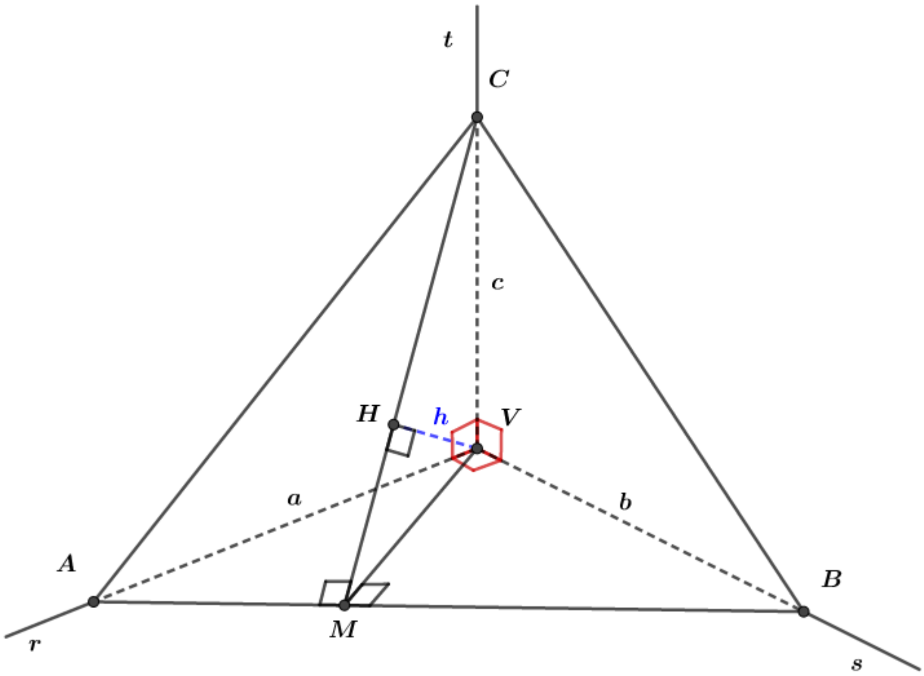
A figura formada pela origem O e pelos pontos A, B e C é um tetraedro $OABC$, cuja altura com relação à base ABC vale:

a) $\frac{6}{7}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{6}{5}$ **d)** $\frac{3}{7}$ **e)** $\frac{4}{9}$

Comentários

Como vimos, a origem O dos eixos coordenados faz papel de vértice do tetraedro $OABC$. Dessa forma, a, b e c são os interceptos do plano com os eixos.

Dessa forma, temos uma representação parecida com o que vimos no exemplo do triedro trirretângulo:



Assim, podemos calcular a altura com relação à base ABC com a fórmula

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{36 + 9 + 4}{36}$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{49}{36}$$

$$h^2 = \frac{36}{49}$$

$$\sqrt{h^2} = \sqrt{\frac{36}{49}}$$

$$|h| = \frac{6}{7}$$

$$h = \pm\frac{6}{7}$$

Como estamos lidando com uma medida de distância, podemos considerar apenas a opção positiva como resposta.

$$h = \frac{6}{7}$$

Gabarito: “a”.

---

12. (Inédita)

Em um triedro trirretângulo, as dimensões das arestas que passam pelo vértice são 12, 3 e 9.

A área da base desse triedro é igual a

a) 65,9 **b) 56,7** **c) 58,5** **d) 60** **e) 63,7**

Comentários

Aqui, temos uma aplicação direta da fórmula das áreas das faces do triedro trirretângulo. Como as faces são todas triângulos retângulos, podemos dizer que

$$[ABC]^2 = [AVB]^2 + [AVC]^2 + [BVC]^2$$

$$[ABC]^2 = \left[\frac{12 \cdot 3}{2}\right]^2 + \left[\frac{12 \cdot 9}{2}\right]^2 + \left[\frac{3 \cdot 9}{2}\right]^2$$

$$[ABC]^2 = \frac{144 \cdot 9}{4} + \frac{144 \cdot 81}{4} + \frac{9 \cdot 81}{4}$$

$$[ABC]^2 = \frac{1296 + 11664 + 729}{4}$$

$$[ABC]^2 = \frac{13689}{4}$$

$$\sqrt{[ABC]^2} = \sqrt{\frac{13689}{4}}$$

$$|ABC| = \frac{117}{2}$$

$$|ABC| = 58{,}5$$

Gabarito: “c”.

---

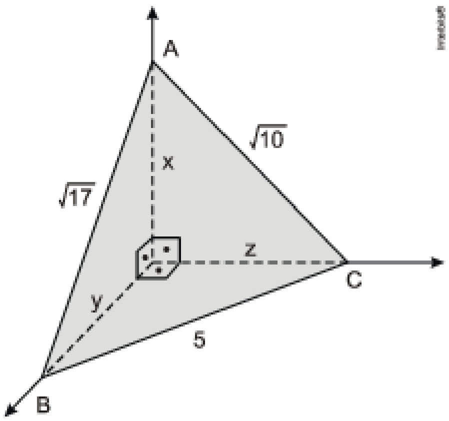
13. (ITA/2013)

Um plano intercepta as arestas de um triedro trirretângulo de vértice V, determinando um triângulo ABC cujos lados medem, respectivamente, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$ e 5 cm. O volume, em cm^3, do sólido $VABC$ é

a) 2 **b)** 4 **c)** $\sqrt{17}$ **d)** 6 **e)** $5\sqrt{10}$

Comentários

Vamos esquematizar nosso triedro.



Dessa forma, podemos, aplicando Pitágoras em cada face, estabelecer o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{17}^2 \\ x^2 + z^2 = \sqrt{10}^2 \\ y^2 + z^2 = 5^2 \end{cases}$$

Perceba que nosso sistema não é linear, pois há incógnitas (todas no caso) com potência diferente de um.

Sendo assim, uma maneira eficiente de resolvê-lo é a combinação linear entre as equações, aliada à boa e velha substituição.

Vamos escrever a equação equivalente à combinação $Linha\ 1 + Linha\ 2 - Linha\ 3$.

$$x^2 + y^2 + x^2 + z^2 - (y^2 + z^2) = \sqrt{17}^2 + \sqrt{10}^2 - 5^2$$

$$x^2 + \cancel{y^2} + x^2 + \cancel{z^2} - \cancel{y^2} - \cancel{z^2} = 17 + 10 - 25$$

$$2 \cdot x^2 = 2$$

$$x^2 = 1$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$$

$$|x| = 1$$

$$x = \pm 1$$

Como estamos lidando com distâncias, consideraremos apenas a opção positiva.

$$x = 1$$

Substituindo $x = 1$ nas outras equações, temos:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{17}^2$$

$$1^2 + y^2 = 17$$

$$y^2 = 16$$

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{16}$$

$$|y| = 4$$

$$y = \pm 4$$

Pelo mesmo motivo de x, podemos considerar apenas a opção positiva.

$$y = 4$$

Façamos a última substituição.

$$x^2 + z^2 = \sqrt{10}^2$$

$$1^2 + z^2 = 10$$

$$z^2 = 9$$

$$\sqrt{z^2} = \sqrt{9}$$

$$|z| = 3$$

$$z = \pm 3$$

$$z = 3$$

Dessa forma, podemos calcular o volume do tetraedro como um terço do prisma de base triangular de lados y, z e 5.

$$V = \frac{1}{3} \cdot área\ da\ base \cdot altura$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{y \cdot z}{2} \cdot x$$

$$V = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{{}^{2}\cancel{4} \cdot \cancel{3}}{\cancel{2}} \cdot 1$$

$$V = 1 \cdot 2$$

$$V = 2\ cm^3$$

Gabarito: "a".

---

14. (Fuvest/2014)

Três das arestas de um cubo, com um vértice em comum, são também arestas de um tetraedro. A razão entre o volume do tetraedro e o volume do cubo é

$\boldsymbol{a)}\ \frac{1}{8}$ $\boldsymbol{b)}\ \frac{1}{6}$ $\boldsymbol{c)}\ \frac{2}{9}$ $\boldsymbol{d)}\ \frac{1}{4}$ $\boldsymbol{e)}\ \frac{1}{3}$

Comentários

Se chamarmos as arestas do cubo de x, podemos calcular a razão diretamente.

$$\frac{V_{tetraedro}}{V_{cubo}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot área\ da\ base \cdot altura}{x^3} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot x}{x^3} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} = \frac{1}{6}$$

Gabarito: "b".

---

15. (UPE/2013)

Para a premiação dos melhores administradores de uma galeria comercial, um designer projetou um peso de papel com a forma de um tetraedro regular reto, de aresta $20\ cm$ que será entregue aos vencedores. Esse peso de papel será recoberto com placas de platina, nas faces laterais e com uma placa de prata na base. Se o preço da platina é de 30 reais por centímetro quadrado, e o da prata é de 50 reais por centímetro quadrado, assinale a alternativa que apresenta o valor mais próximo, em reais, do custo desse recobrimento.

Considere $\pi = 1,7$

a) $24\ 000$

b) $18\ 000$

c) $16\ 000$

d) $14\ 000$

e) $12\ 000$

Comentários

Um tetraedro regular é formado por triângulos equiláteros.

A fórmula para a área de um triângulo equilátero é:

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

Como temos três faces que serão recobertas com platina ao custo de R$30,00 o centímetro quadrado e uma face que será recoberta com prata ao custo de R$50,00 o centímetro quadrado, podemos calcular o custo por:

$$C = 3 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot custo\ platina + 1 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot custo\ prata$$

$$C = 3 \cdot \frac{20^2\sqrt{3}}{4} \cdot 30 + 1 \cdot \frac{20^2\sqrt{3}}{4} \cdot 50$$

$$C = 3 \cdot \frac{400 \cdot 1{,}7}{4} \cdot 30 + 1 \cdot \frac{400 \cdot 1{,}7}{4} \cdot 50$$

$$C = 15300 + 8500$$

$$C = 23800$$

Gabarito: “a”.

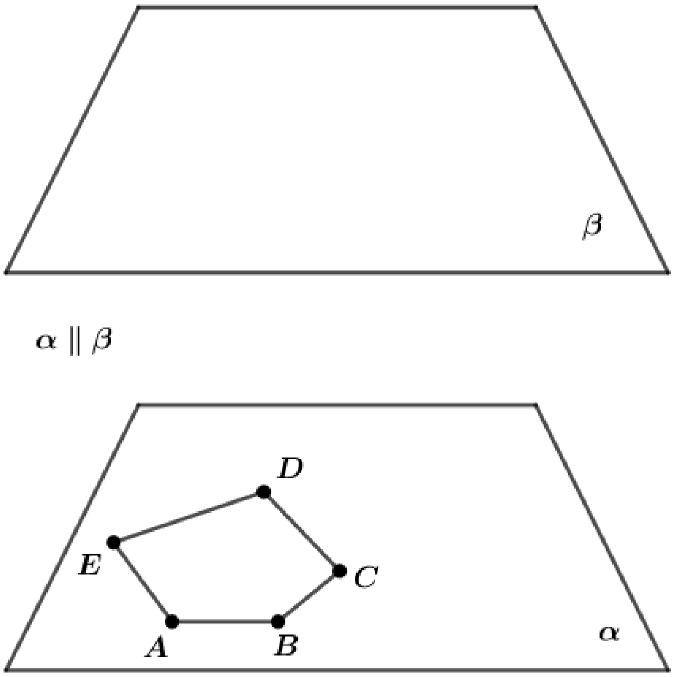
---

4. POLIEDROS

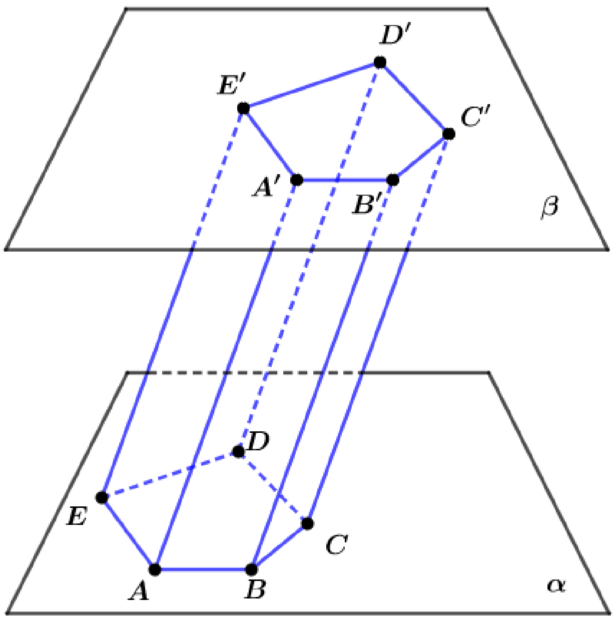
Neste capítulo, iniciaremos o estudo dos sólidos. Na Geometria Plana, estudamos diversos polígonos tais como o hexágono, o pentágono, o quadrado, entre outros... Na Geometria Espacial, os sólidos cujas faces são polígonos são chamados de poliedros. Diversos deles são figuras conhecidas, como o cubo, a pirâmide, o paralelepípedo, o prisma etc. Estudaremos cada um dos sólidos que podem ser cobrados no vestibular, então vamos iniciar pelo prisma.

4.1. PRISMAS

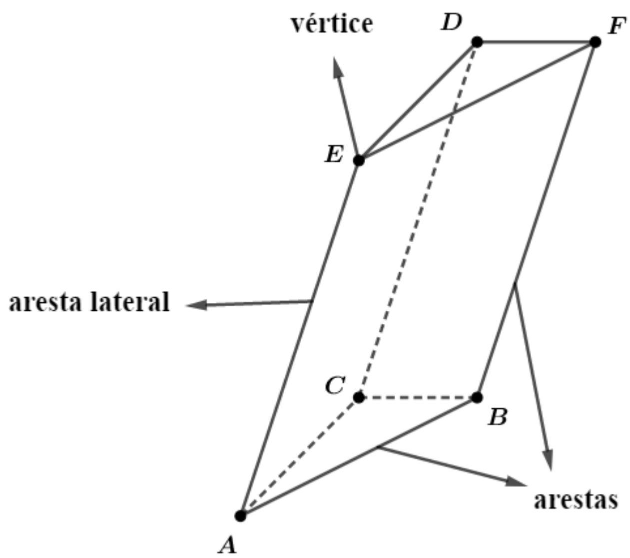
Consideremos dois planos paralelos α e β. Seja $ABCDE$ um polígono convexo determinado no plano α.

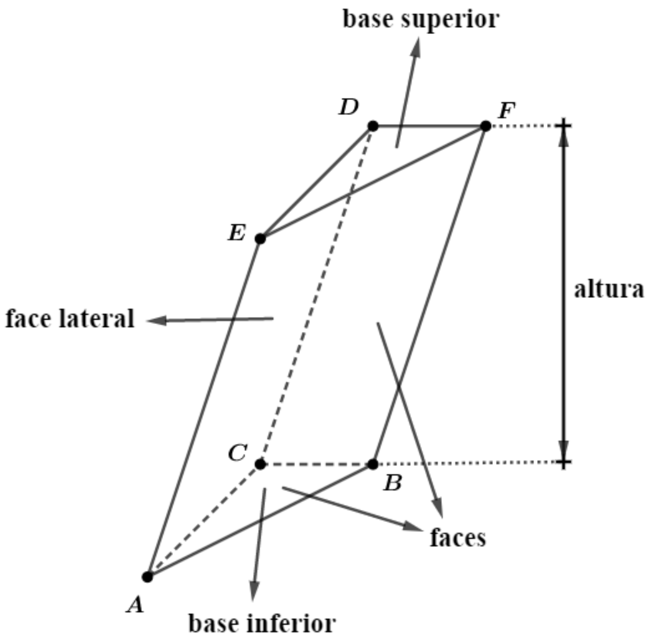


Tomando-se as retas paralelas que contém os vértices A, B, C, D, E do polígono em α, essas retas determinarão um polígono $A'B'C'D'E'$ em β. A figura formada pelos segmentos de retas e pelos polígonos convexos em α e β é chamada de prisma.



Perceba que $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ representam o mesmo polígono. Cada um dos segmentos $AA', \dots, EE'$ é chamado de **aresta lateral**. Os polígonos convexos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ são denominados de bases do prisma. Usualmente, definimos a base $\boldsymbol{ABCDE}$ como **base inferior** e a base $\boldsymbol{A'B'C'D'E'}$ como **base superior**. A medida da **altura** do prisma é igual à **distância entre os planos paralelos**. Note que $ABB'A'$ é um paralelogramo. Cada um dos **paralelogramos do prisma** é chamado de **face lateral**. Os pontos $A, B, C, \dots, D', E'$ são chamados de vértices do prisma. Cada segmento de reta do prisma é denominado de aresta. A figura abaixo apresenta os elementos presentes no prisma:





Se a base do prisma for um polígono de n lados, teremos:

- n faces laterais;
- n arestas laterais;
- $n + 2$ faces (faces laterais + duas bases);
- $3n$ arestas.

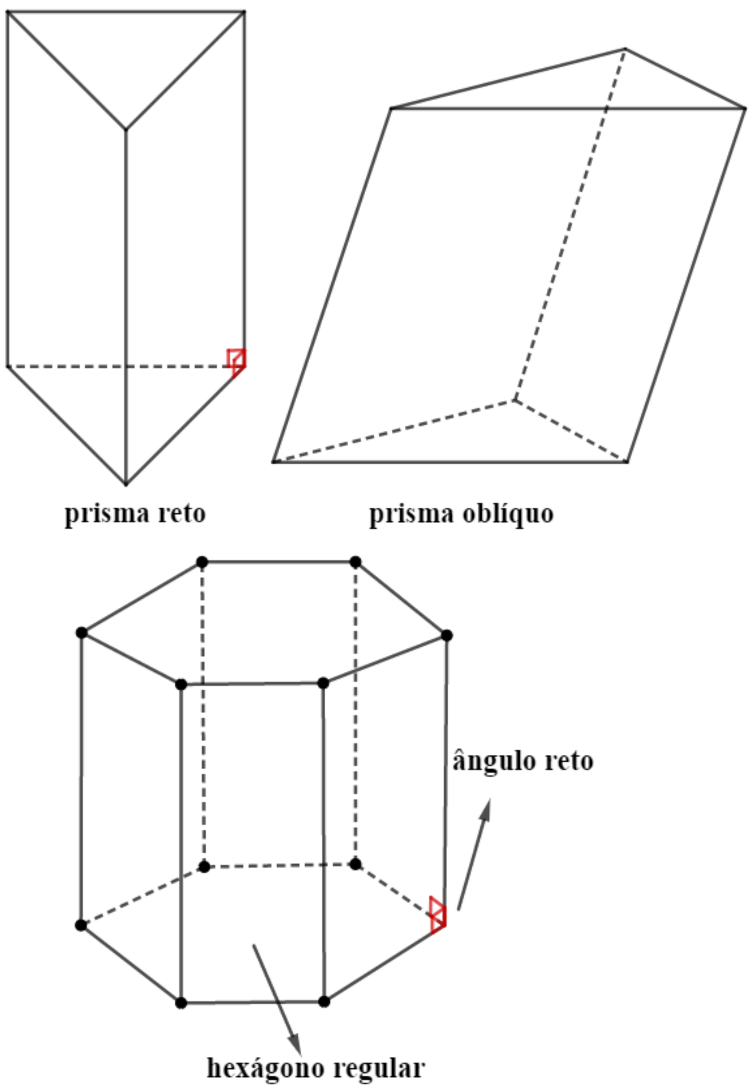
Note que a base do prisma pode ser qualquer polígono convexo. Se a base for um hexágono, por exemplo, teremos um prisma hexagonal. Se for um pentágono, teremos um prisma pentagonal.

Dependendo do ângulo que as arestas laterais formam com as bases, podemos ter dois tipos de prismas:

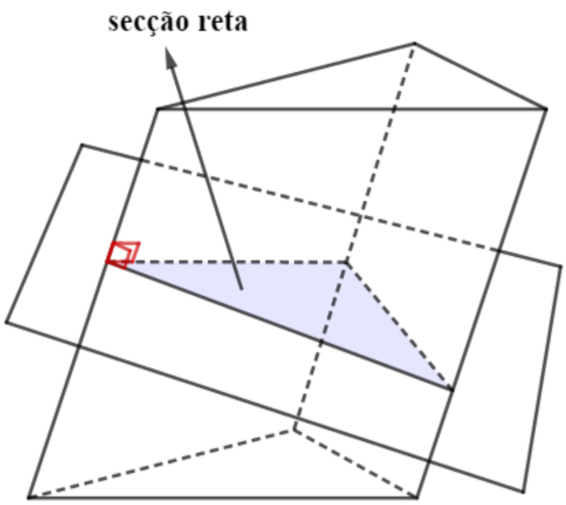
- Prisma oblíquo;
- Prisma reto.

Dizemos que um **prisma é regular** quando ele é **reto** e a **base é um polígono convexo regular**.

Vejamos alguns exemplos de prismas:



Quando cortamos o prisma com um plano perpendicular às arestas laterais, dizemos que a figura formada é uma **secção normal ou secção reta**.



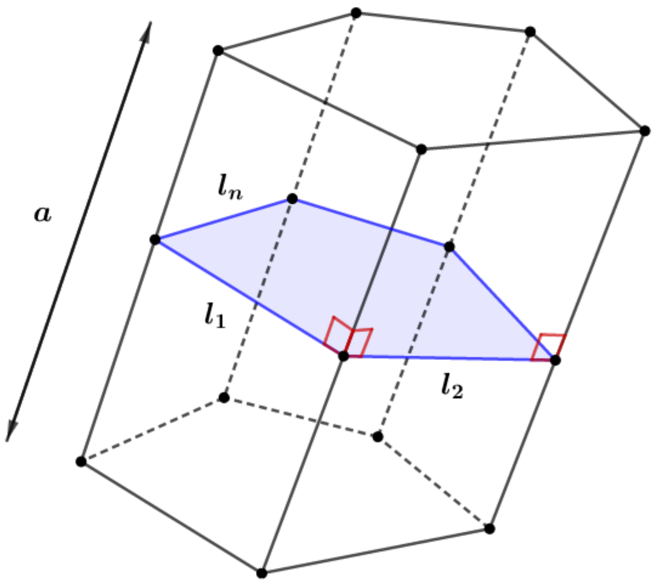
4.1.1. ÁREA DA SUPERFÍCIE DO PRISMA

Identificamos os elementos presentes no prisma. Na Geometria Plana, aprendemos a calcular a área de diversas figuras planas. Podemos usar esse conhecimento para calcular as áreas dos sólidos. A área total da superfície do prisma é dada por A_T, tal que:

$$A_T = A_L + 2A_B$$

Sendo que A_L é a área lateral do prisma e é igual à soma das áreas das faces laterais, e A_B é a área da base.

Tomando-se a secção normal de um prisma de lados medindo $l_1, l_2, \dots, l_n$, temos:



A medida da aresta lateral do prisma é a, desse modo, podemos calcular a área de cada face lateral do prisma:

$$A_i = a \cdot l_i, i = \{1,2, \dots, n\}$$

A área lateral do prisma é igual à soma das áreas das faces laterais, logo:

$$A_l = a \cdot l_1 + a \cdot l_2 + \dots + a \cdot l_n = a \cdot \underbrace{(l_1 + l_2 + \dots + l_n)}_{perímetro\ da\ secção\ normal}$$

Definindo como $2p$ o perímetro da secção normal, obtemos:

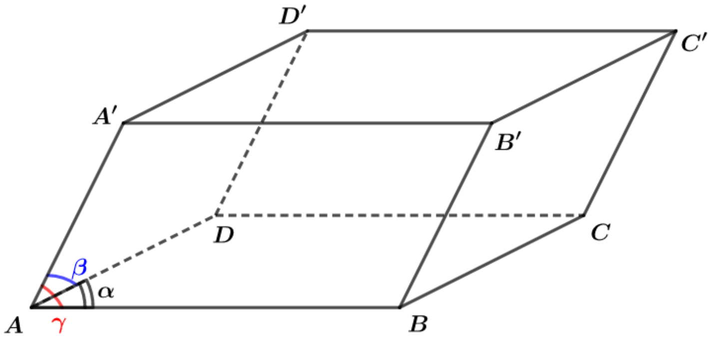
$$\boxed{A_l = 2p \cdot a}$$

4.1.2. PARALELEPÍPEDOS

Um paralelepípedo é um tipo específico de prisma cuja base é um paralelogramo. Todas as faces do paralelepípedo são paralelogramos. Vamos estudar os diferentes tipos desse sólido:

a) Oblíquo

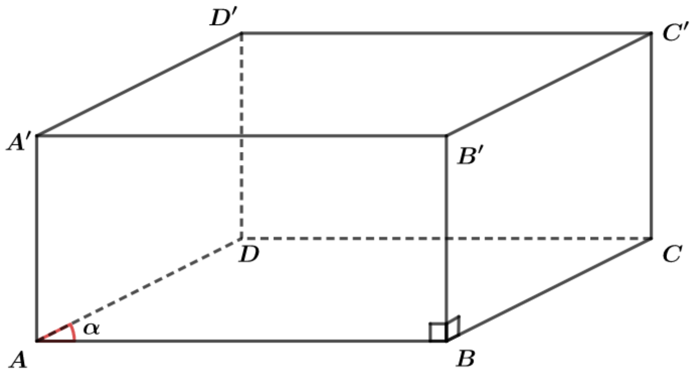
Um paralelepípedo é oblíquo quando sua aresta lateral não forma ângulo reto com o plano da base.



Paralelepípedo oblíquo

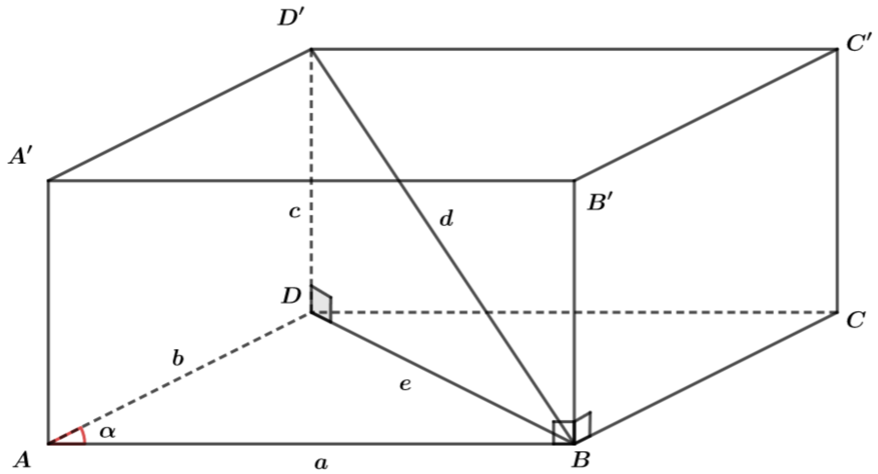
b) Reto

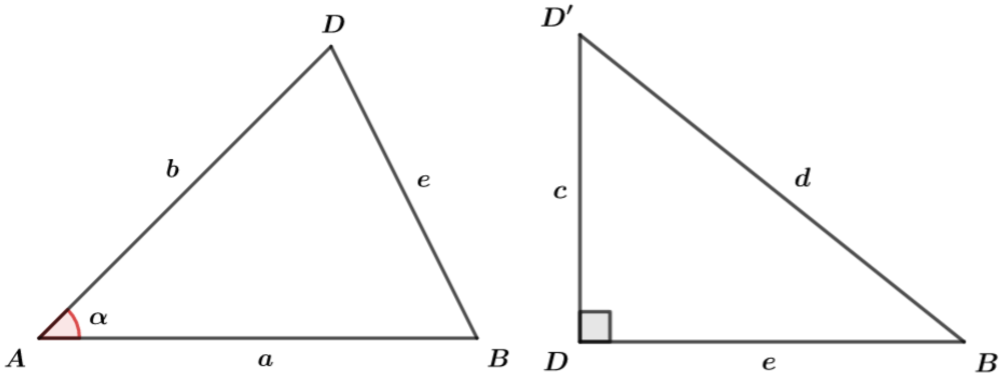
Um paralelepípedo é reto quando sua aresta lateral forma ângulo reto com a base.



Paralelepípedo reto

Vamos estudar algumas propriedades dessa figura. Consideremos o paralelepípedo de dimensões conforme a seguinte imagem:





e é a diagonal menor da base, e d é a diagonal menor do paralelepípedo. Observando as figuras, temos:

$$\Delta ABD \Rightarrow e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \ \ (lei\ dos\ cossenos)$$

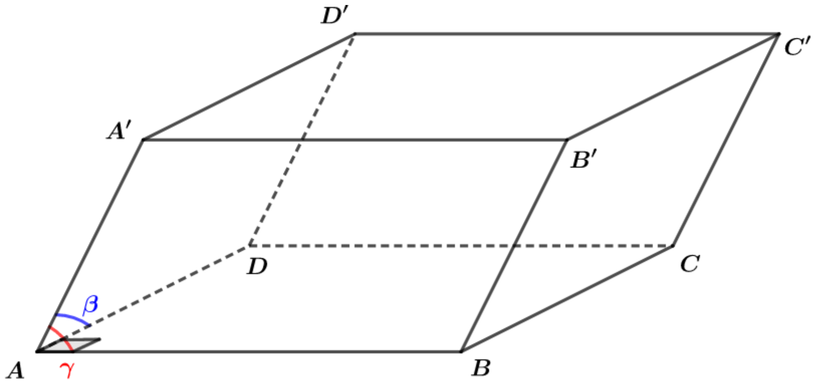
$$\Delta DBD' \Rightarrow d^2 = c^2 + e^2 \Rightarrow d^2 = c^2 + a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

$$\therefore \boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha}}$$

Podemos usar o mesmo raciocínio para encontrar a outra diagonal do paralelepípedo.

c) Retângulo

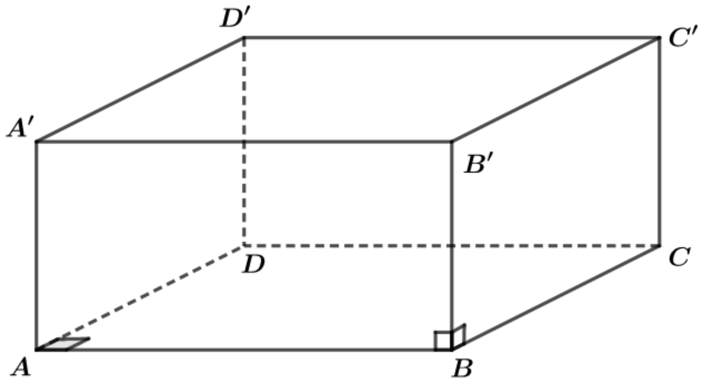
Um paralelepípedo é retângulo quando sua base é um retângulo.



Paralelepípedo retângulo

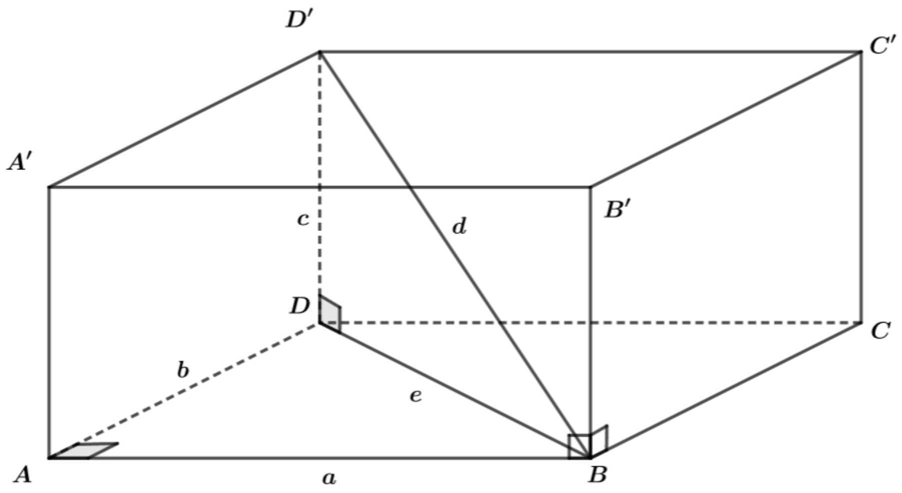
d) Reto-retângulo

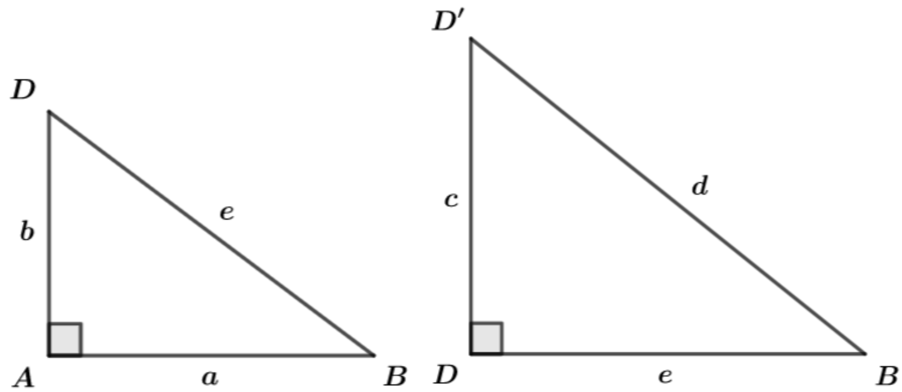
Um paralelepípedo é reto-retângulo quando sua aresta lateral forma ângulo reto com a base e esta é um retângulo.



Paralelepípedo reto-retângulo

Vejamos algumas propriedades desse sólido. Consideremos o paralelepípedo com as seguintes dimensões:





Pelas figuras, podemos ver que:

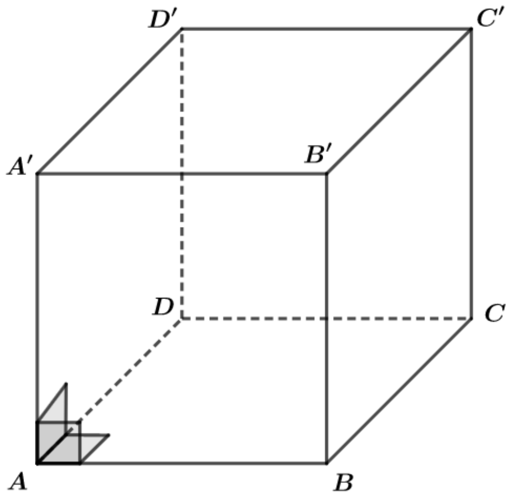
$$\Delta ABD \Rightarrow e^2 = a^2 + b^2$$

$$\Delta DBD' \Rightarrow d^2 = c^2 + e^2 = c^2 + a^2 + b^2 \Rightarrow \boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

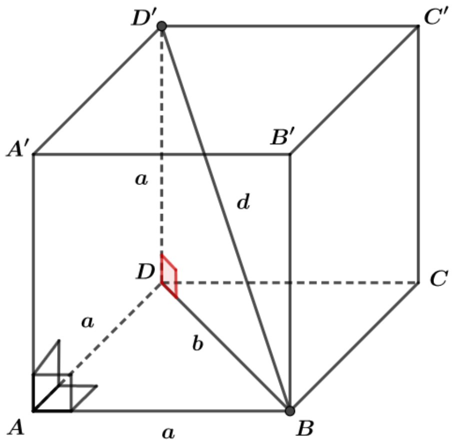
$$A_T = ab + ab + ac + ac + bc + bc \Rightarrow \boxed{A_T = 2(ab + ac + bc)}$$

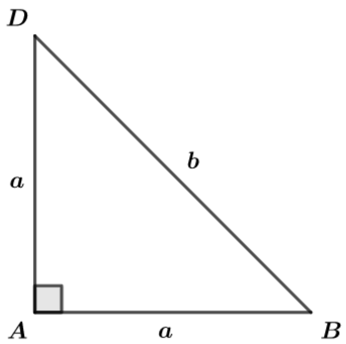
e) Cubo

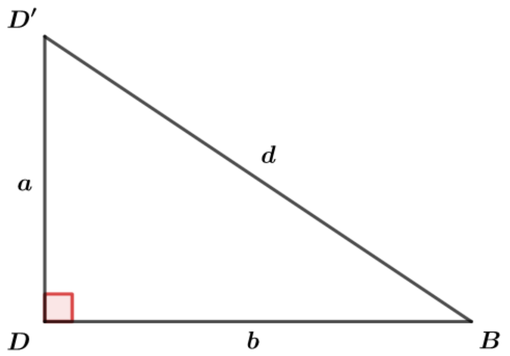
Esse sólido é um paralelepípedo cujas faces são todas quadrados.



Vamos estudar algumas propriedades dessa figura. Consideremos um cubo de aresta a e tracemos as diagonais conforme a imagem abaixo:







b é a diagonal da base, e d é a diagonal do cubo. Observando as faces, temos:

$$\Delta ABD \Rightarrow b^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow \boxed{b = a\sqrt{2}}$$

$$\Delta DBD' \Rightarrow d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d^2 = a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{d = a\sqrt{3}}$$

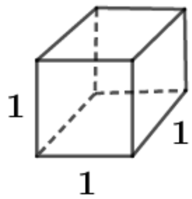
Além disso, como as faces são quadrados de lado a, para calcular a área total, basta somar seis vezes a área de cada face, ou seja:

$$\text{área total do cubo} \Rightarrow \boxed{A_T = 6a^2}$$

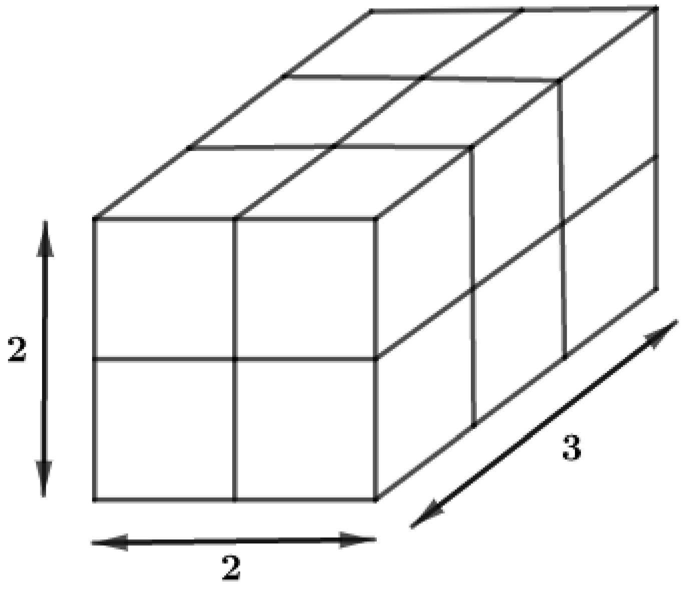
4.1.3. VOLUME DO PARALELEPÍPEDO

Introduziremos agora o conceito de volume. Imagine que você tenha uma caixa vazia e queira enchê-la de cubos. Antes de enchê-la, você se pergunta “quantos cubos será que cabem nessa caixa?”. Para responder a essa pergunta, devemos conhecer o volume da caixa para saber quanto de espaço temos disponível. Então, se a caixa tem 10 unidades de volume e supondo que cada cubo ocupe 1 unidade de volume, nele caberá 10 cubos. Assim, o **volume** é a medida usada para determinar a **quantidade de espaço ocupada por um corpo** e, por isso, ele permite, também, determinar quanto um corpo, vazio por dentro, possui de espaço disponível**.**

Na Geometria Plana, ao calcular a área de figuras planas, usamos um quadrado de lado 1 como referência. Para o volume, usaremos um cubo de lado 1, a ele denominaremos de cubo unitário.



Se o cubo tiver aresta medindo $1m$, o seu volume será $1m^3$. Se tiver aresta medindo $1cm$, o seu volume será $1cm^3$. Geralmente, o volume tem unidades de tamanho cúbicos. Para calcular o volume de um sólido, devemos pensar em quantos cubos unitários cabem no sólido. Vamos pensar no caso mais simples, um paralelepípedo reto-retângulo. Considere o exemplo abaixo:



Para saber qual é o volume desse sólido, precisamos contar quantos cubos unitários formam essa figura. Observando-a, podemos ver que ele é formado por $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ cubos.

O volume de um paralelepípedo reto-retângulo é dado pelo produto entre a área da sua base e a sua altura.

$$\boxed{V = (\acute{a}rea\ da\ base) \cdot (altura) = A_B \cdot h}$$

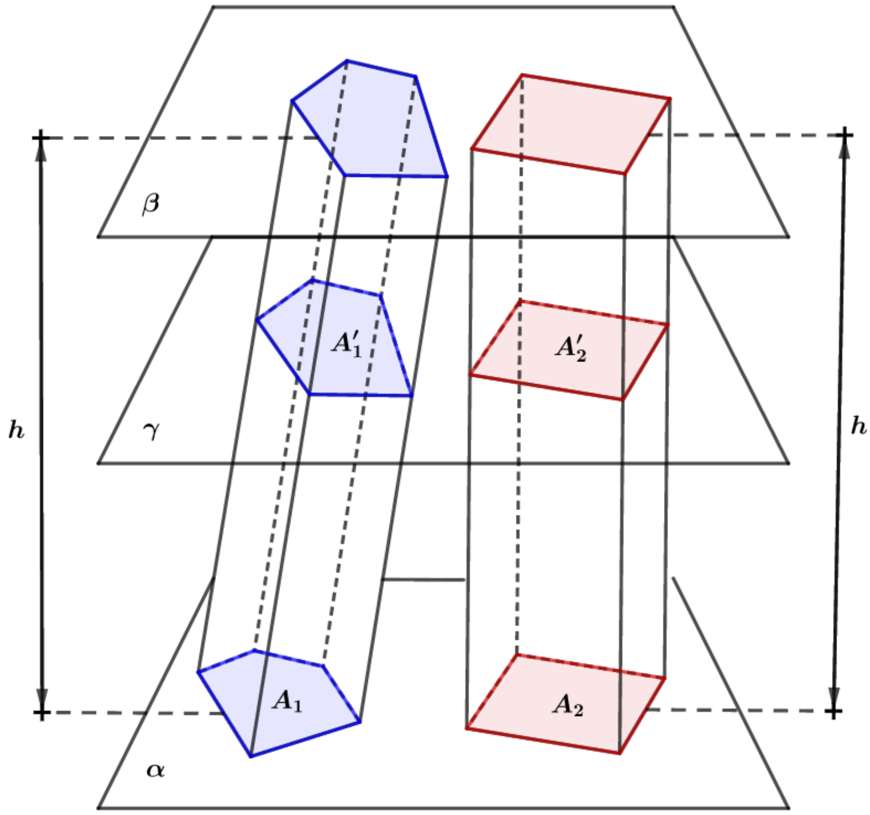
E se quisermos calcular o volume de um prisma qualquer? Para descobrir o volume desse sólido, estudaremos o **princípio de Cavalieri**.

4.1.4. PRINCÍPIO DE CAVALIERI

O princípio de Cavalieri diz que:

Dados dois sólidos cujas bases estão contidas num mesmo plano, se qualquer plano secante, paralelo ao plano da base, forma superfícies de áreas iguais nos sólidos, então os sólidos têm volumes iguais.

Na prática, se dois prismas possuem alturas iguais e bases de mesma área, podemos afirmar que os dois sólidos possuem o mesmo volume. Assim, vamos tomar dois prismas: um será um prisma oblíquo de base pentagonal (a base pode ser qualquer polígono), e o outro será um paralelepípedo reto-retângulo. As suas bases estarão no mesmo plano e ambos têm mesma área. Vejamos a figura abaixo.



Como as bases têm áreas iguais, temos $A_1 = A_2$. Pelo princípio de Cavalieri, temos:

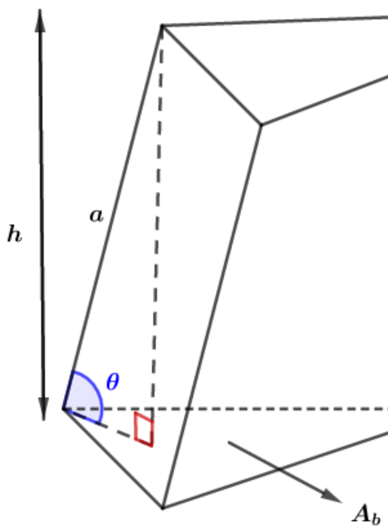
$$V_1 = V_2 = A_2 \cdot h = A_1 \cdot h$$

$$\therefore V_1 = A_1 \cdot h$$

Portanto, a área de um prisma qualquer é igual ao produto da área da base pela sua altura.

$$\boxed{V = A_B \cdot h}$$

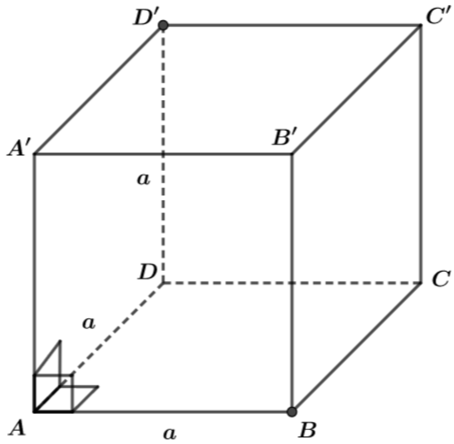
Se tivermos apenas a informação da aresta lateral ao invés da altura do prisma, podemos usar a trigonometria para encontrar a altura. Veja:

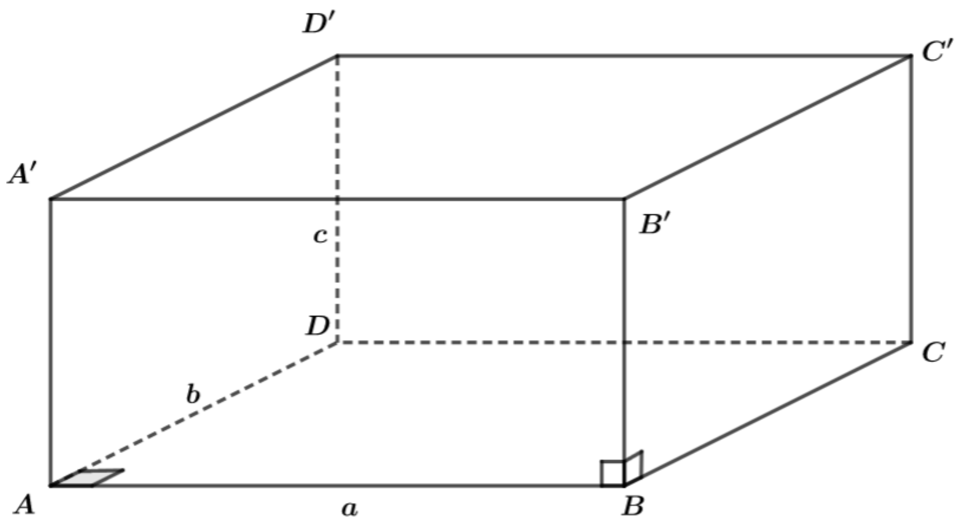
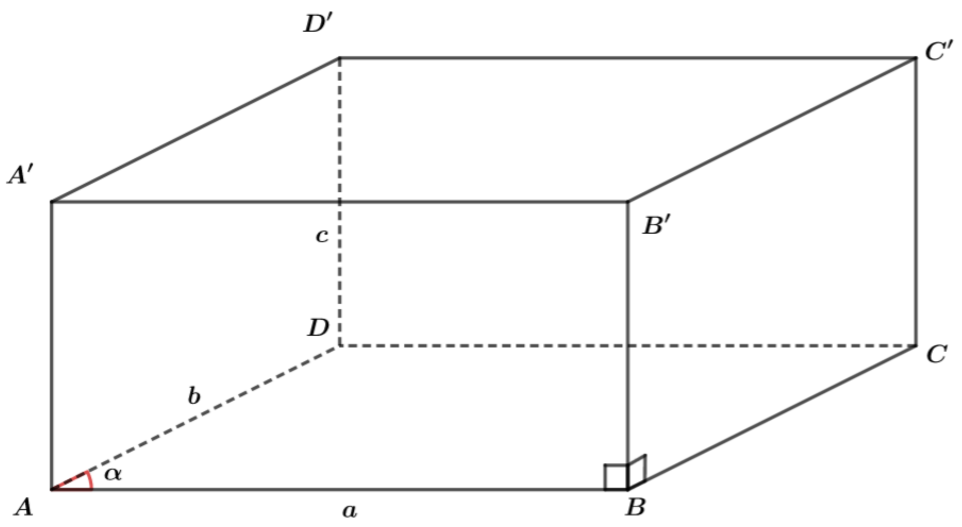


Podemos ver que:

$$sen\ \theta = \frac{h}{a} \Rightarrow \boxed{h = a \cdot sen\ \theta}$$

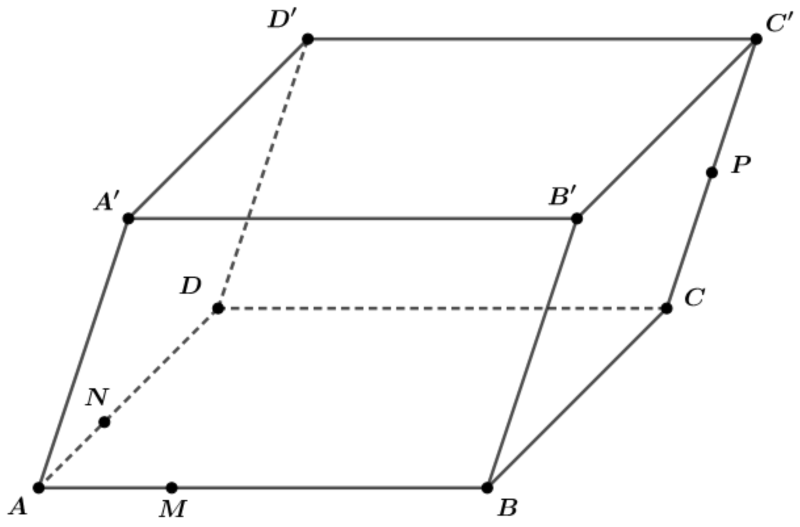
Vejamos o volume de alguns paralelepípedos:

	Cubo $V = A_B \cdot h = a \cdot a \cdot a$ $\boxed{V = a^3}$

	Reto-retângulo $V = \underbrace{A_B}_{ab} \cdot \underbrace{h}_{c}$ $\boxed{V = abc}$
	Reto $V = \underbrace{A_B}_{ab\, sen\alpha} \cdot \underbrace{h}_{c}$ $\boxed{V = abc\ sen\ \alpha}$

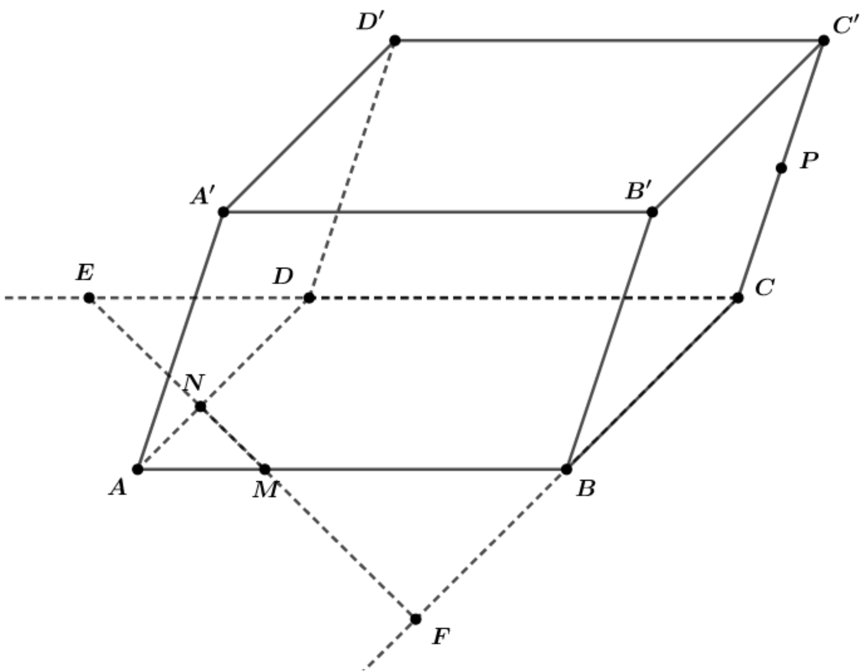
4.1.5. SECÇÃO PLANA DE UM PARALELEPÍPEDO

Vamos aprender a analisar a secção plana formada por um plano secante a um paralelepípedo qualquer. Consideremos o caso abaixo:

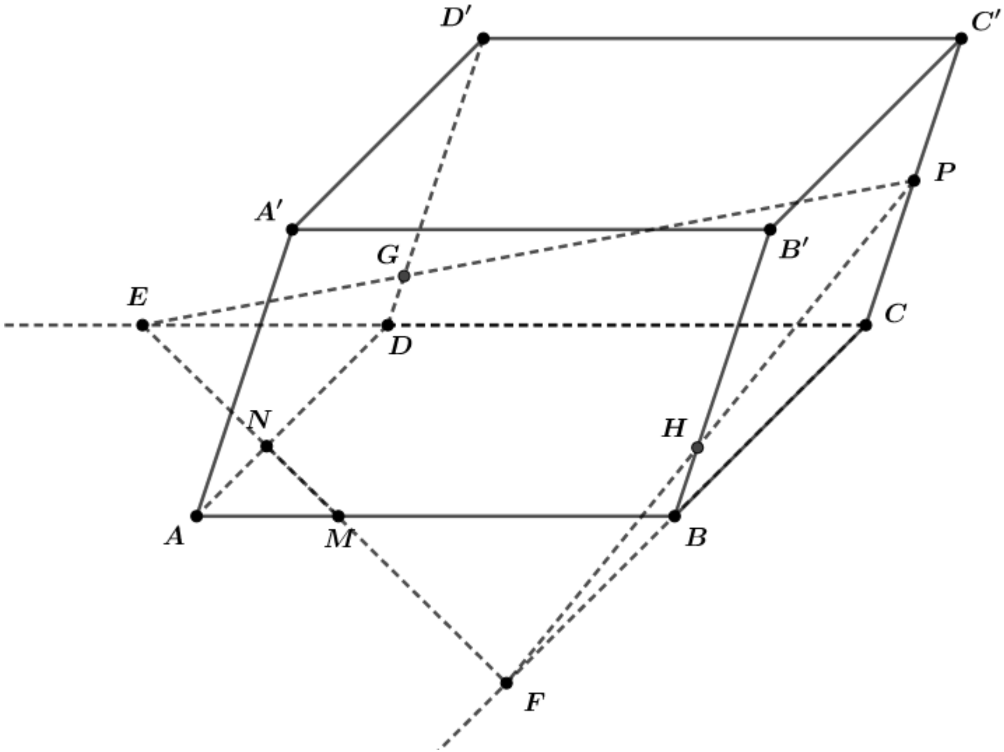


MNP determinam um plano, e este forma uma secção plana no paralelepípedo. Como podemos analisar a secção plana formada? Vejamos o passo a passo:

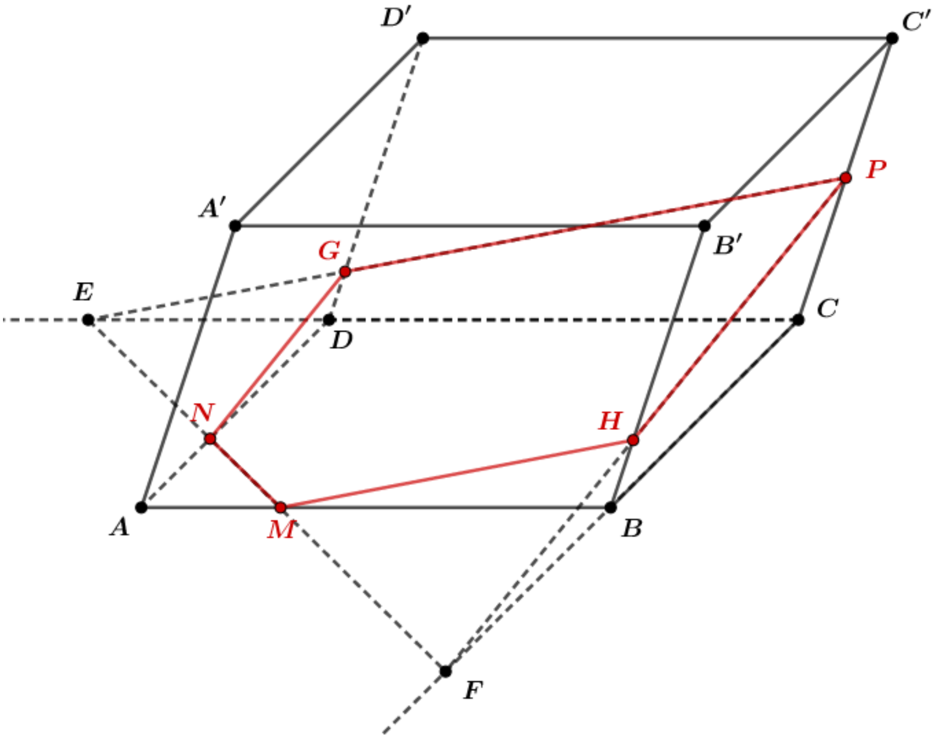
1) O primeiro passo é prolongar os segmentos de retas MN, CD e CB. Eles se interceptarão nos pontos E e F, conforme mostra a figura:



2) Agora, construímos os segmentos de retas PE e PF. Eles interceptarão as arestas DD' e BB' nos pontos G e H:



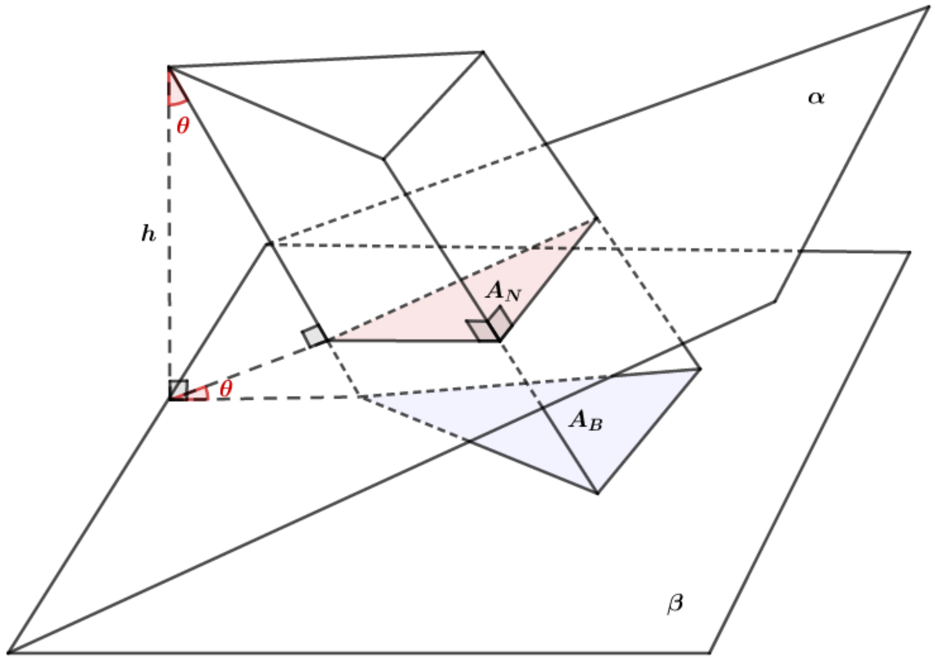
3) Por fim, basta ligar os segmentos de retas MH e NG. A secção plana formada é o polígono $MNGPH$:



Esse é um exemplo de um caso possível que pode ser cobrado na prova. O importante é você saber como construir a secção plana dadas as condições no enunciado da questão.

4.1.6. PROJEÇÃO ORTOGONAL NO PRISMA OBLÍQUO

Seja α um plano que corta, perpendicularmente, a aresta lateral de um prisma oblíquo, segundo a figura abaixo:



Consideremos a seguinte legenda:

A_B: *área da base*

h: *altura*

A_N: *área da secção normal*

θ: *medida do diedro formado entre α e o plano da base β*

A_N é a projeção ortogonal de A_B sobre o plano α, logo, podemos escrever:

$$\boxed{A_B \cdot \cos\theta = A_N}$$

Dessa relação, temos:

$$A_B = \frac{A_N}{\cos\theta}$$

Além disso, θ também é o ângulo formado entre a aresta lateral do prisma e sua altura:

$$a \cdot \cos\theta = h$$

Como o volume do prisma é

$$V = A_B \cdot h$$

Temos:

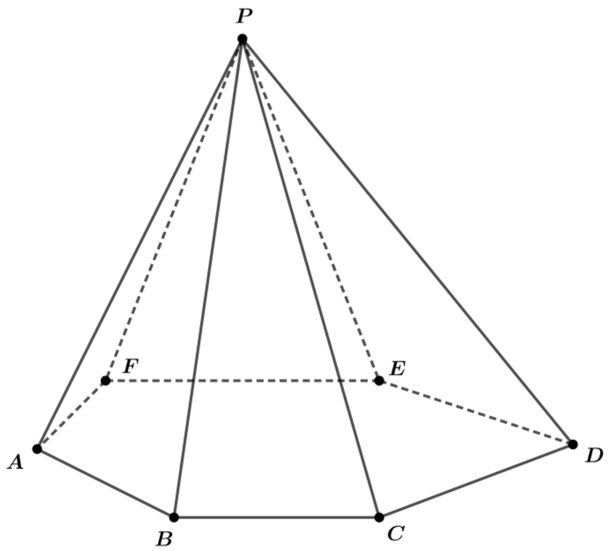
$$V = \frac{A_N}{\cos\theta} \cdot a \cdot \cos\theta$$

$$\therefore \boxed{V = A_N \cdot a}$$

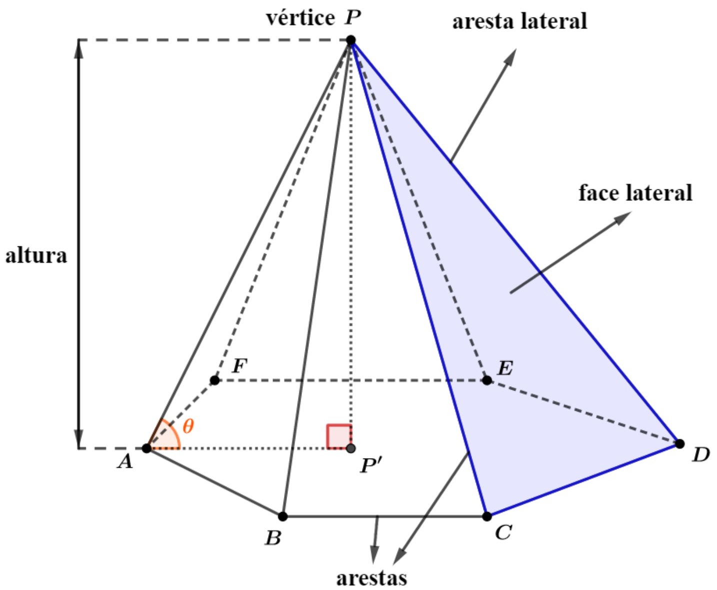
Portanto, o volume do prisma é igual ao produto entre a área da secção normal e sua aresta lateral.

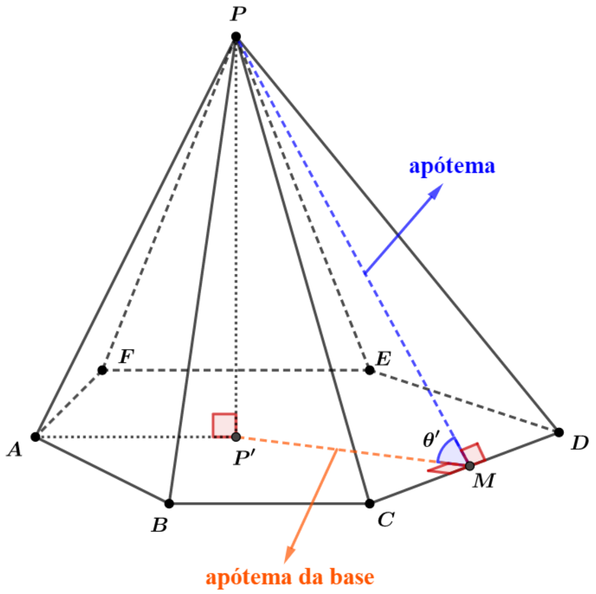
4.2. PIRÂMIDES

Consideremos um polígono convexo contido em um plano α e um ponto P fora de α. A figura formada pelos segmentos de reta que ligam P aos vértices do polígono é chamada de pirâmide convexa.



Vejamos os elementos presentes na pirâmide.





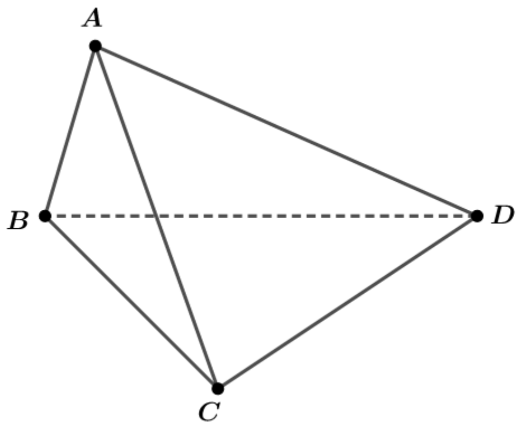
- θ é o ângulo formado pela aresta lateral AP e o plano da base;
- A altura da pirâmide é igual à distância entre o vértice P e o plano da base;
- Apótema é o termo usado para a altura de uma face lateral;
- θ' é o ângulo diédrico da aresta CD.

A natureza da pirâmide varia de acordo com o polígono da base. Se a base for um pentágono, teremos uma pirâmide pentagonal. Se a base for um hexágono, teremos uma pirâmide hexagonal, e assim por diante.

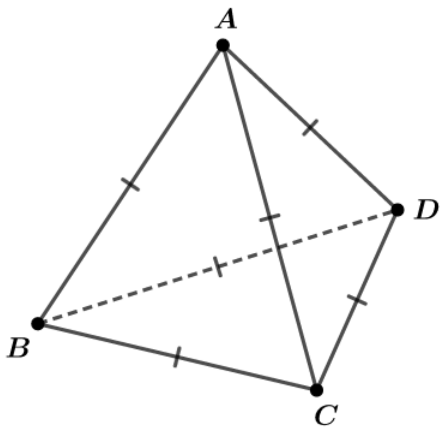
Dizemos que uma pirâmide é **regular** quando a sua **base é um polígono regular** e a **projeção ortogonal do vértice é o centro da base**. Nesse caso, as arestas laterais são todas congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles.

4.2.1. TETRAEDRO

Tetraedro é uma figura que costuma ser cobrada bastante nos vestibulares. Ele é uma pirâmide triangular.



Um tetraedro é regular quando todas as suas arestas são congruentes. Desse modo, as faces dessa pirâmide são triângulo equiláteros.



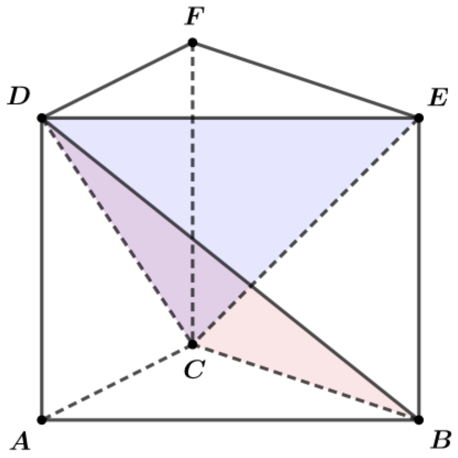
4.2.2. ÁREA DA SUPERFÍCIE DA PIRÂMIDE

A área lateral de uma pirâmide é igual à soma das áreas laterais das faces.

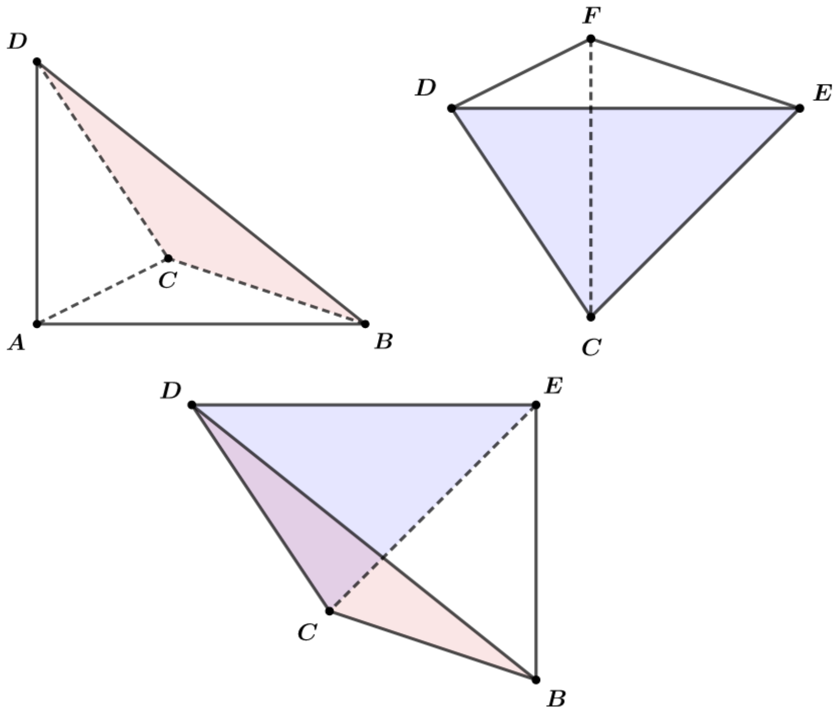
A área total é igual à soma da área lateral com a área com base.

4.2.3. VOLUME DA PIRÂMIDE

Vamos deduzir a fórmula do volume para pirâmides. Consideremos uma pirâmide $PABC$ de base triangular ABC e um prisma $ABCDEF$ de mesma base e mesma altura da pirâmide.



Note que esse prisma pode ser decomposto em três pirâmides triangulares.



As pirâmides $ABCD$ e $CEFD$ possuem bases de mesma área ($A_{\Delta\mathrm{ABC}} = A_{\Delta\mathrm{DEF}}$) e mesma altura, assim como as pirâmides $CEFD$ e $BCDE$, que possuem bases CEF e BCE congruentes e também possuem mesma altura. Logo, podemos afirmar:

$$V_{ABCD} = V_{CEFD} = V_{BCDE} = V_{pirâmide}$$

Como o prisma possui base ABC e altura igual à pirâmide $ABCD$, temos:

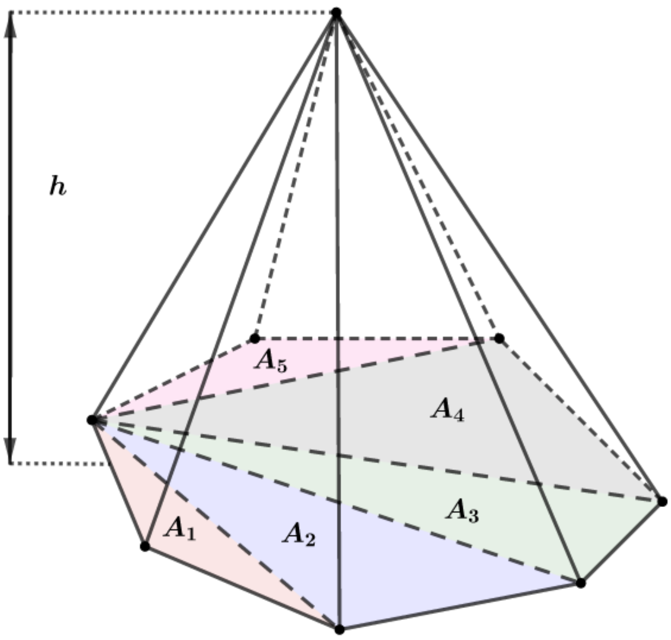
$$V_{prisma} = A_{base} \cdot h$$

Além disso, ele é formado pela união das três pirâmides:

$$V_{prisma} = V_{ABCD} + V_{CEFD} + V_{BCDE} = 3V_{pirâmide}$$

$$\therefore \boxed{V_{pirâmide} = \frac{1}{3}A_{base} \cdot h}$$

Essa fórmula é válida para qualquer tipo de pirâmide convexa, pois qualquer polígono convexo pode ser decomposto em diversos triângulos. Assim, basta somar o volume de cada pirâmide com base triangular.



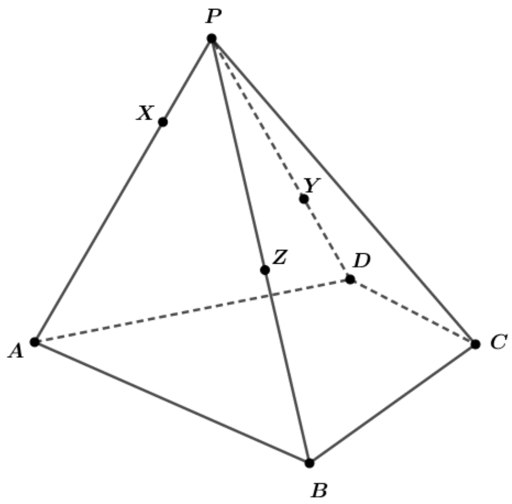
$$V = \frac{1}{3}A_1 \cdot h + \frac{1}{3}A_2 \cdot h + \frac{1}{3}A_3 \cdot h + \frac{1}{3}A_4 \cdot h + \frac{1}{3}A_5 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3}\underbrace{(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5)}_{área\ da\ base} \cdot h$$

$$\therefore \boxed{V = \frac{1}{3}A_B \cdot h}$$

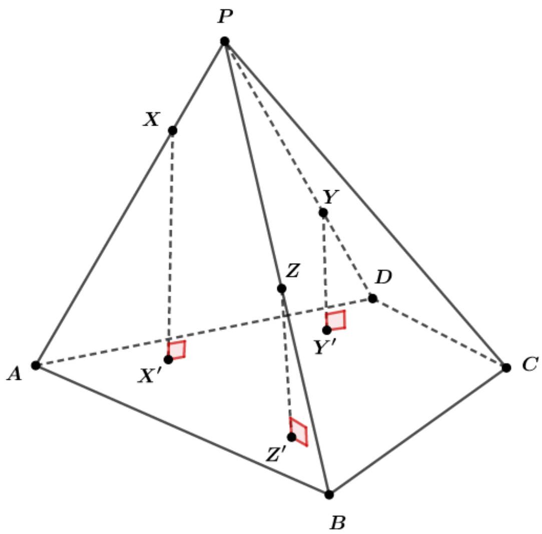
4.2.4. SECÇÃO PLANA DA PIRÂMIDE

Consideremos a pirâmide abaixo:

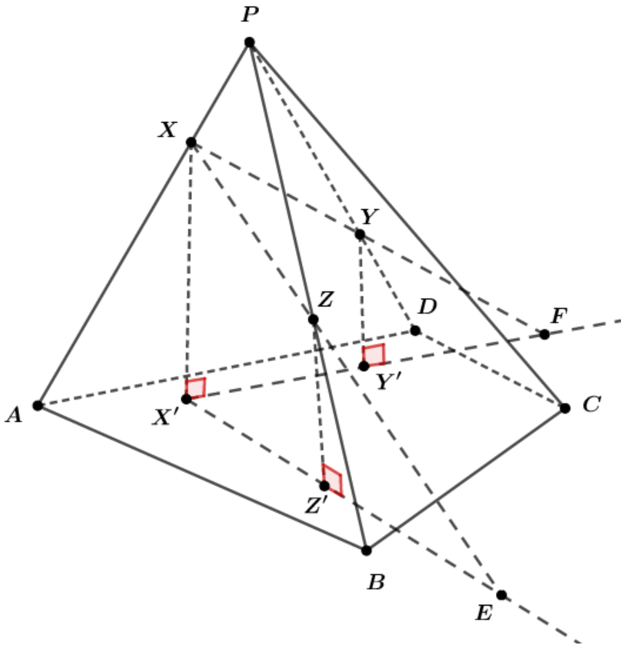


X, Y, Z determinam um plano secante à pirâmide. Vamos analisar como podemos construir a secção plana que esse plano forma na pirâmide. Para isso, devemos tentar encontrar a intersecção desse plano com o plano da base. Vejamos.

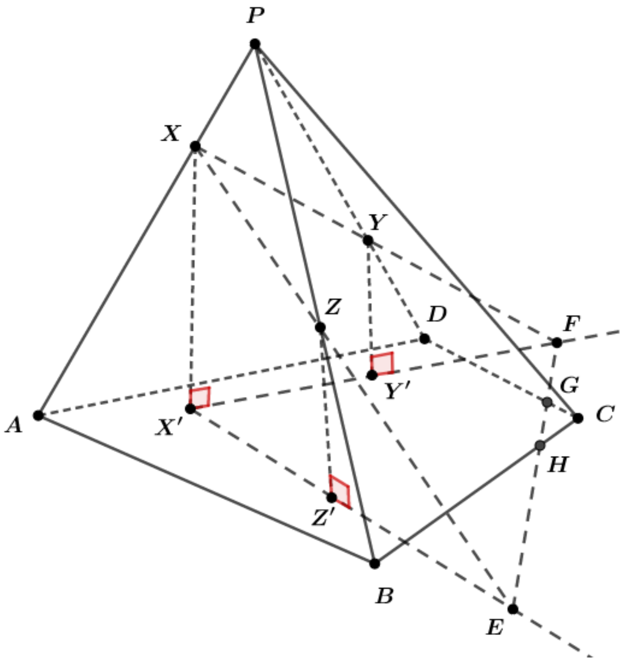
1) O primeiro passo é fazer a projeção ortogonal dos pontos X, Y, Z no plano da base:



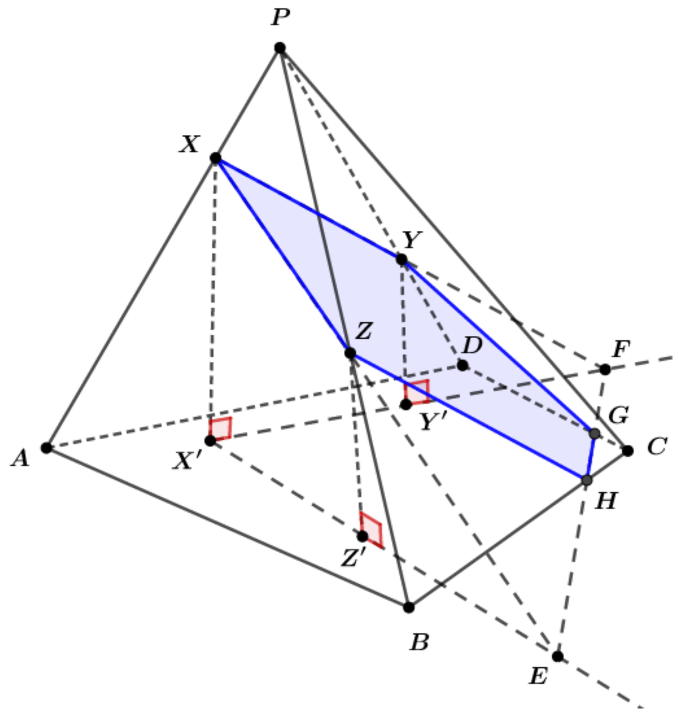
2) Prolongamos os segmentos de retas XZ e $X'Z'$. Eles se interceptarão em algum ponto do plano da base. Analogamente, prolongamos os segmentos XY e $X'Y'$.



3) Construímos o segmento de reta EF para verificar se eles interceptam algum ponto da base.

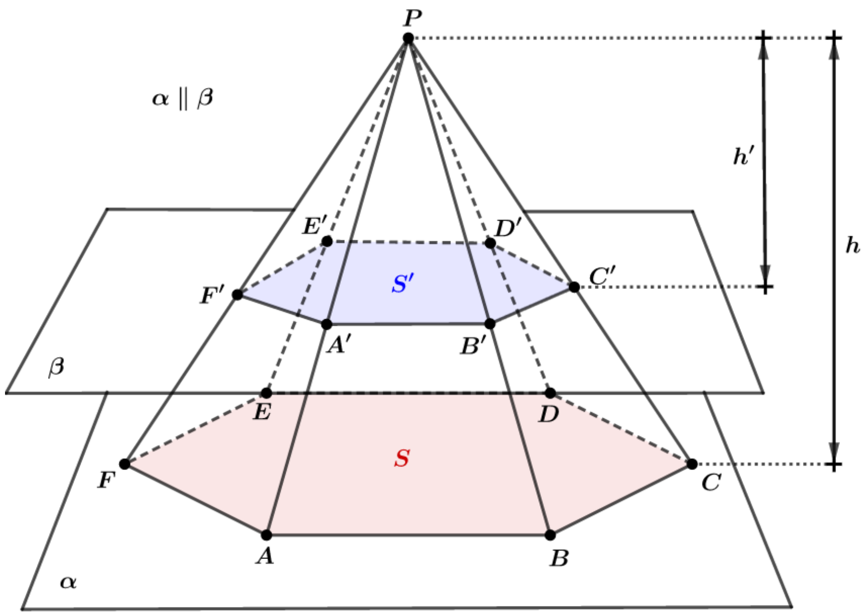


4) Note que EF é a aresta do diedro formado entre o plano da secção e o plano da base. A secção está determinada.



4.2.5. PLANO SECANTE PARALELO À BASE DA PIRÂMIDE

Quando seccionamos um plano paralelamente ao plano da base, obtemos duas pirâmides semelhantes.



A razão entre as áreas da pirâmide menor e a pirâmide maior é igual k^2, onde k é a razão de proporção entre os segmentos das pirâmides.

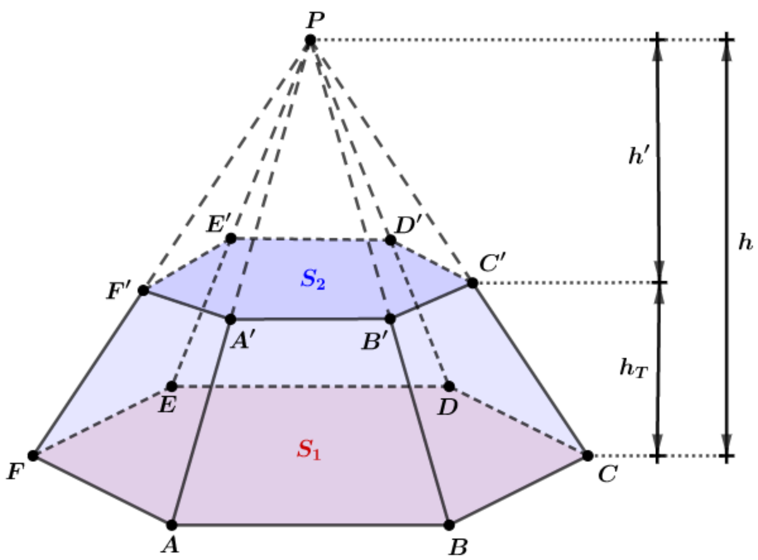
$$\frac{h}{h'} = \frac{PA}{PA'} = \frac{PB}{PB'} = \cdots = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \cdots = k$$

$$\boxed{\frac{S}{S'} = k^2}$$

A razão entre os volumes da pirâmide menor e a pirâmide maior é igual k^3:

$$\boxed{\frac{V}{V'} = k^3}$$

A figura formada pelos vértices $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ é chamada de **tronco de pirâmide de bases paralelas**. Vamos calcular o volume desse tronco.



Sejam V_1, V_2, V_T os volumes da pirâmide maior, da pirâmide menor e do tronco, respectivamente. Assim, temos:

$$V_T = V_1 - V_2 = \frac{1}{3} S_1 \underbrace{h}_{h' + h_T} - \frac{1}{3} S_2 h'$$

$$\Rightarrow V_T = \frac{1}{3} S_1 (h' + h_T) - \frac{1}{3} S_2 h'$$

$$\Rightarrow V_T = \frac{1}{3} [(S_1 - S_2) h' + S_1 h_T]$$

Como as pirâmides são semelhantes, podemos escrever:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{h}{h'}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \frac{(h' + h_T)}{h'} \Rightarrow \sqrt{S_1}h' = \sqrt{S_2}h' + \sqrt{S_2}h_T$$

$$\therefore h' = \frac{h_T\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}$$

Substituindo h' na expressão do volume:

$$V_T = \frac{1}{3}\left[(S_1 - S_2)\left(\frac{h_T\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}\right) + S_1 h_T\right]$$

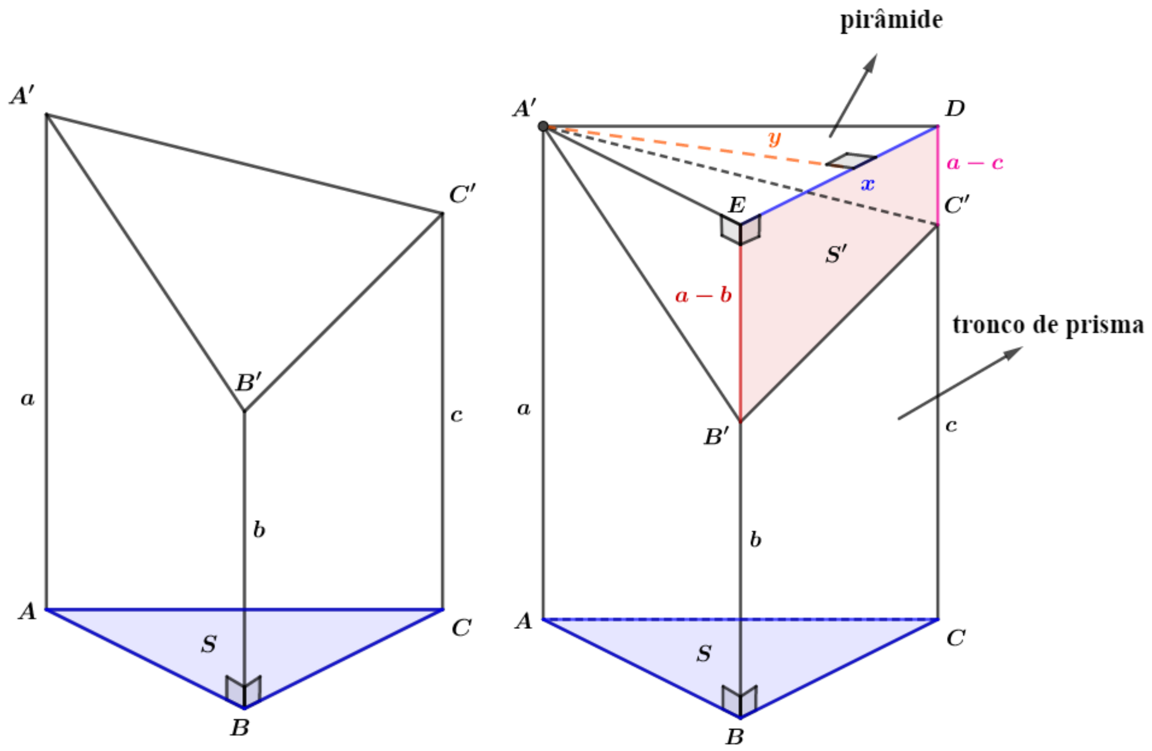
Note que $S_1 - S_2 = \sqrt{(S_1)^2} - \sqrt{(S_2)^2} = (\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})$, substituindo acima:

$$V_T = \frac{1}{3}[(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})\sqrt{S_2}h_T + S_1 h_T]$$

$$\boxed{V_T = \frac{h_T}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right)}$$

4.2.6. TRONCO DE PRISMA TRIANGULAR

Vamos estudar o volume de um tronco de prisma triangular. Consideremos um prisma triangular com uma base perpendicular às arestas laterais, conforme mostra a figura abaixo.



A área da base perpendicular é S. Podemos completar esse tronco de prisma com uma pirâmide de modo a formar um prisma reto. Desse modo, temos que o volume do tronco é dado por:

$$V_T = V_{prisma} - V_{pirâmide}$$

$$V_{prisma} = a \cdot S$$

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} S' y = \frac{1}{3} \frac{[(a-b+a-c)x]}{2} y = \frac{1}{3} \cdot (2a-b-c) \cdot \underbrace{\frac{xy}{2}}_{S} = \frac{1}{3}(2a-b-c) \cdot S$$

$$\Rightarrow V_T = a \cdot S - \frac{1}{3}(2a-b-c) \cdot S$$

$$\therefore \boxed{V_T = \frac{1}{3}(a+b+c) \cdot S}$$

Caso o prisma tenha ambas as bases não perpendiculares às arestas laterais, podemos dividir esse prisma por uma secção normal e, assim, teremos dois prismas cuja base forma um ângulo reto com as arestas laterais. Procedendo dessa forma, encontramos:

$$\boxed{V_T = \frac{1}{3}(a+b+c) \cdot S}$$

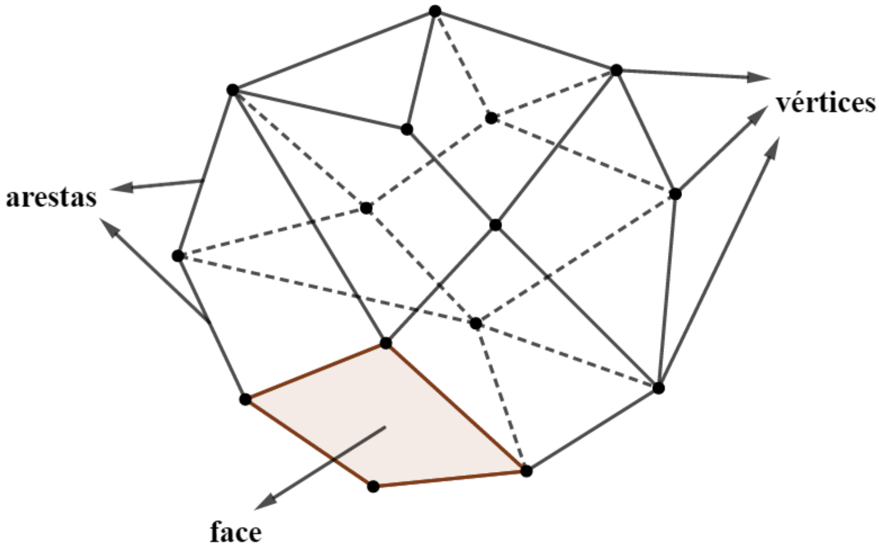
Onde a, b, c são as medidas das arestas laterais do tronco de prisma oblíquo e S é a área da secção normal.

4.3. Poliedros convexos

Dizemos que um sólido é um poliedro convexo quando a sua superfície é formada por n polígonos que satisfazem as seguintes condições:

- Dois polígonos quaisquer não estão no mesmo plano;
- Qualquer aresta de um polígono é comum a apenas dois polígonos;
- O plano de qualquer polígono deixa os demais no mesmo semiespaço.

As faces do polígono convexo são os polígonos convexos, as suas arestas são os lados dos polígonos e os seus vértices são os vértices dos polígonos.



4.3.1. RELAÇÃO DE EULER

A relação de Euler é uma propriedade que relaciona as arestas, vértices e faces de um poliedro convexo. Para todo poliedro convexo, vale a relação:

$$\boxed{V - A + F = 2}$$

Demonstração

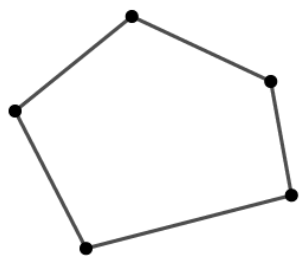
Para demonstrar essa relação, precisamos de um teorema preliminar. Vejamos:

Para toda superfície poliédrica convexa aberta, vale a relação:

$$V_A - A_A + F_A = 1$$

Provaremos essa propriedade por indução finita.

1) Veja que, para $F_A = 1$, a superfície poliédrica convexa aberta (SPCA) se torna um polígono convexo plano de n lados e assim:



superfície poliédrica convexa aberta de 1 face

$$V_A = n = A_A$$

Logo:

$$V_A - A_A + F_A = n - n + 1 = 1$$

2) Suponha que essa propriedade seja válida para uma SPCA de F' faces (possui V' vértices e A' arestas) tal que:

$$V' - A' + F' = 1$$

Devemos provar que ela é válida para $F' + 1$ faces.

Adicionando uma face com a arestas e b arestas compartilhadas para a SPCA inicial, temos para a nova superfície formada:

$$F = F' + 1$$

$$A = A' + a - b \text{ (} b \text{ arestas compartilhadas)}$$

$$V = V' + a - (b + 1) \text{ (} b \text{ arestas compartilhadas, temos } b + 1 \text{ vértices coincidindo)}$$

Verificando a relação, obtemos:

$$V - A + F = [V' + a - (b + 1)] - [A' + a - b] + F' + 1$$

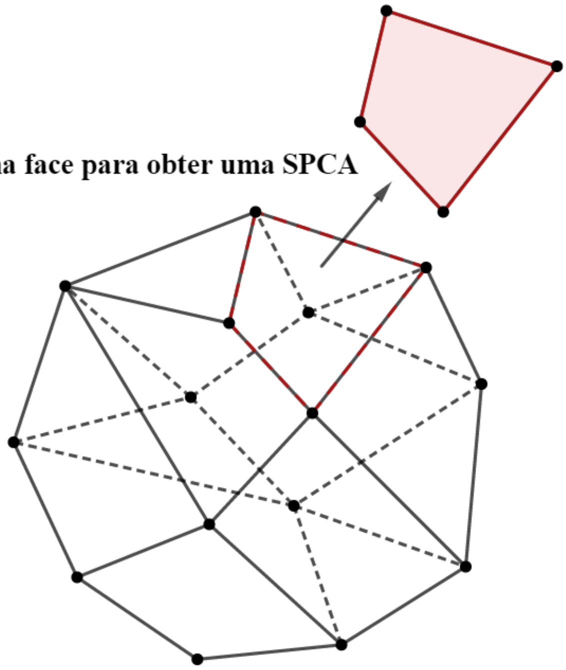
$$V - A + F = V' + a - b - 1 - A' - a + b + F' + 1$$

$$V - A + F = V' - A' + F'$$

Portanto, a relação não se altera adicionando-se ou removendo-se uma face na superfície, o que prova nossa hipótese de indução.

Agora, vamos proceder à demonstração da relação de Euler.

Tomemos um poliedro convexo fechado de F faces (possui V vértices e A arestas) e dele retiramos uma face. Obteremos uma SPCA e, assim, vale a relação:



$$V_A - A_A + F_A = 1$$

Como retiramos apenas uma face, temos para essa SPCA:

$$V_A = V; A_A = A; F_A = F - 1$$

Logo:

$$V_A - A_A + F_A = 1 \Rightarrow V - A + F - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{V - A + F = 2}$$

Os poliedros que admitem a relação de Euler são chamados de **poliedros eulerianos**. Atenção! Todo poliedro convexo é euleriano, mas nem todo poliedro euleriano é convexo!

4.3.2. SOMA DOS ÂNGULOS DAS FACES DE UM POLIEDRO CONVEXO

A soma dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo é igual à

$$S = (V - 2) \cdot 360°$$

Em que V é o número de vértices do poliedro convexo.

Demonstração

Consideremos um poliedro convexo de V vértices, A arestas e F faces. Sejam $n_1, n_2, n_3, \dots, n_f$ o número de lados das faces $1, 2, 3, \dots, F$. Como cada face é um polígono convexo, temos que a soma dos ângulos internos de cada face é:

$$S_i = (n_i - 2) \cdot 180°; i = \{1, 2, 3, \dots, F\}$$

Assim, somando-se todos os ângulos internos das faces, temos:

$$S = (n_1 - 2) \cdot 180° + (n_2 - 2) \cdot 180° + \cdots + (n_F - 2) \cdot 180°$$

$$S = (n_1 + n_2 + \cdots + n_F) \cdot 180° \underbrace{-2 \cdot 180° - 2 \cdot 180° - \cdots - 2 \cdot 180°}_{F\ vezes}$$

$$S = (n_1 + n_2 + \cdots + n_F) \cdot 180° - F \cdot 360°$$

Como cada lado do poliedro é compartilhado por duas faces, temos:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_F = 2A$$

Logo:

$$S = 2A \cdot 180° - F \cdot 360° \Rightarrow S = (A - F) \cdot 360°$$

Sendo um poliedro convexo, ele admite a relação de Euler:

$$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 2 = A - F$$

$$\therefore \boxed{S = (V - 2) \cdot 360°}$$

4.3.3. POLIEDROS DE PLATÃO

Um poliedro é classificado como poliedro de Platão quando satisfaz os seguintes requisitos:

- Todas as faces possuem o mesmo número de arestas;
- De cada vértice, parte um mesmo número de arestas;
- Admite a relação de Euler.

Existem apenas cinco tipos de poliedros de Platão, são eles:

1. Tetraedro;

2. Hexaedro;

3. Octaedro;

4. Dodecaedro;

5. Icosaedro.

Não veremos a prova disso, pois este não é um assunto que costuma cair em prova.

4.3.4. POLIEDROS REGULARES

Os poliedros convexos são classificados como regulares quando:

- Todas as faces possuem o mesmo número de arestas;
- De cada vértice, parte um mesmo número de arestas;
- Todas as faces são polígonos regulares.

Note que os poliedros regulares possuem uma definição parecida com os poliedros de Platão. A única ressalva é que as faces dos poliedros regulares são polígonos regulares.

Assim, temos apenas cinco tipos de poliedros regulares:

1. Tetraedro regular;

2. Hexaedro regular (cubo);

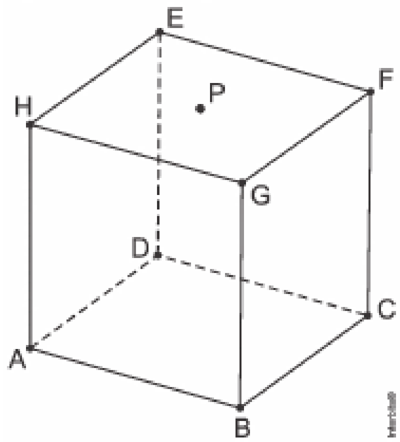
3. Octaedro regular;

4. Dodecaedro regular;

5. Icosaedro regular.

16. (UFRGS/2019)

Na figura a seguir, está representado um cubo cuja aresta tem 2 cm de medida. O ponto P está localizado no centro da face EFGH.

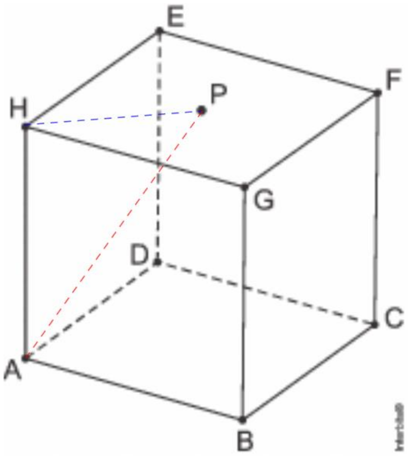


A medida do segmento AP é

a) $\sqrt{2}$ **b)** 2 **c)** $\sqrt{6}$ **d)** $2\sqrt{3}$ **e)** 3

Comentários

Podemos pensar em um triângulo retângulo AHP para encontrar o valor da hipotenusa AP.



Como FH é uma diagonal da face quadrada $EFGH$ cujo lado vale 2, temos que $FH = 2\sqrt{2}$, o que implica $HP = \sqrt{2}$.

Dessa forma, podemos aplicar o teorema de Pitágoras ao triângulo AHP.

$$AP^2 = AH^2 + HP^2$$

$$AP^2 = 2^2 + \sqrt{2}^2$$

$$AP^2 = 4 + 2$$

$$AP^2 = 6$$

$$\sqrt{AP^2} = \sqrt{6}$$

$$|AP| = \sqrt{6}$$

$$AP = \pm\sqrt{6}$$

Como AP é uma distância, $AP = \sqrt{6}$.

Gabarito: "c".

---

17. (UFRGS/2019)

Em um curso de dobraduras, a instrutora orientou que fosse construída uma pirâmide de base quadrada, de lado igual a $3\ cm$ e altura igual a $10\ cm$. O volume dessa pirâmide é igual a

a) 25 cm^3

b) 30 cm^3

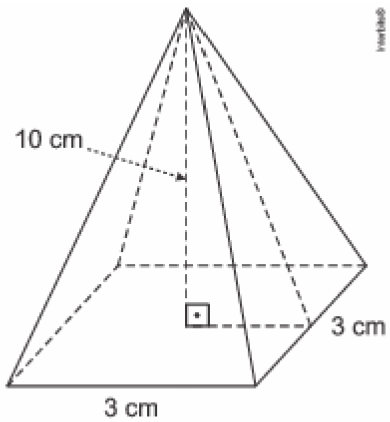
c) 15 cm^3

d) 9 cm^3

e) 12 cm^3

Comentários

Podemos representar a pirâmide do enunciado no esboço:



Dessa forma, o volume dessa pirâmide é dado por:

$$V_p = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

$$V_p = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 10$$

$$V_p = 30\ cm^3$$

Gabarito: "b".

---

18. (UDESC/2012)

Uma caixa de um perfume tem o formato de um tronco de pirâmide quadrangular regular fechado. Para embrulhá-la, Pedro tirou as seguintes medidas: aresta lateral 5 cm e arestas das bases 8 cm e 2 cm. A quantidade total de papel para embrulhar esta caixa, supondo que não haja desperdício e nem sobreposição de material, foi:

a) $88\ cm2$

b) $168\ cm2$

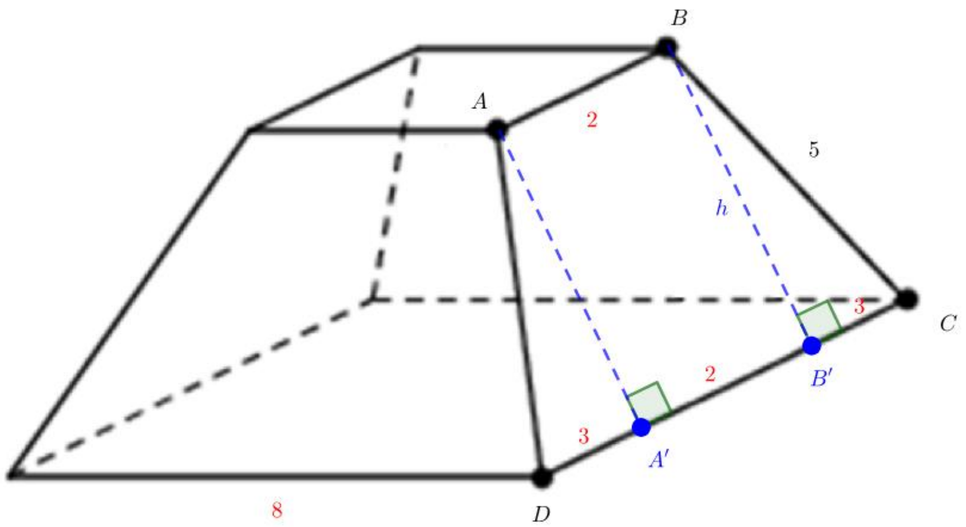
c) $80\ cm2$

d) $68\ cm2$

e) $148\ cm2$

Comentários

Esquematizando a caixa de perfume em voga, temos:



Perceba que o comprimento de $\overline{AA'}$ e de $\overline{BB'}$ representam a altura h do trapézio que forma a lateral do tronco de pirâmide.

Como $AB = A'B' = 2$, só podemos ter os comprimentos $\overline{A'D} + \overline{B'C} = 6$, ou seja, $\overline{A'D} = \overline{B'C} = 3$.

Assim, temos que o triângulo $BB'C$ é retângulo em B'. Podemos, então, descobrir o valor de h aplicando, a esse triângulo, o teorema de Pitágoras.

$$\overline{B'B}^2 + \overline{B'C}^2 = BC^2$$

$$h^2 + 3^2 = 5^2$$

$$h^2 = 25 - 9$$

$$h^2 = 16$$

$$\sqrt{h^2} = \sqrt{16}$$

$$|h| = 4$$

$$h = \pm 4$$

Como estamos falando sobre uma altura, consideremos apenas o sinal positivo para $h = 4$.

Com esses dados, podemos dizer que a área total do tronco de pirâmide que forma a caixa de perfume tem área total A_t igual à

$$A_t = \color{blue}{Area\ da\ base\ inferior} + \color{green}{Área\ da\ base\ superior} + 4 \cdot \color{red}{área\ das\ faces\ laterais}$$

$$A_t = \color{blue}{8^2} + \color{green}{2^2} + 4 \cdot \color{red}{\frac{(8+2) \cdot 4}{2}}$$

$$A_t = 64 + 4 + 80$$

$$A_t = 148\ cm^2$$

Gabarito: “e”.

---

19. (Inédita)

Um cubo e uma pirâmide de base quadrada têm o mesmo volume.

Se a área da base da pirâmide é igual a um terço da área da base do cubo, podemos dizer que

a) a altura da pirâmide é igual ao dobro da altura do cubo.

b) não é possível que uma pirâmide tenha o mesmo volume que um cubo.

c) a área total da pirâmide é igual à área total do cubo, uma vez que seus volumes são iguais.

d) a altura da pirâmide é igual à altura do cubo.

e) a altura do cubo é igual a um nono da altura da pirâmide.

Comentários

Como o enunciado nos informa que o volume do cubo V_c é igual ao volume da pirâmide de base quadrada V_p, e admitindo a aresta do cubo igual a x, temos:

$$\color{blue}{V_c} = \color{red}{V_p}$$

$$\color{blue}{base\ do\ cubo \cdot altura\ do\ cubo} = \color{red}{\frac{1}{3}} \cdot \color{green}{base\ da\ pirâmide} \cdot \color{red}{altura\ da\ pirâmide}$$

$$x^2 \cdot x = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot h$$

$$\cancel{x^2} \cdot x = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \cancel{x^2} \cdot h$$

$$x = \frac{1}{9} \cdot h$$

Gabarito: "e".

---

20. (UCPEL/2017)

A área de um quadrado de lado $x\ cm$ aumenta em $28\ cm^2$ se o seu lado for aumentado em $2\ cm$. Considerando que a medida da aresta de um tetraedro regular é igual ao lado x deste quadrado, então a altura h deste tetraedro vale

a) $2\sqrt{6}\ cm$ **b) $2\sqrt{3}\ cm$** **c) $2\sqrt{2}\ cm$** **d) $3\sqrt{2}\ cm$** **e) $4\sqrt{6}\ cm$**

Comentários

"A área de um quadrado de lado $x\ cm$ aumenta em $28\ cm^2$ se o seu lado for aumentado em $2\ cm$."

Reescrevendo a mesma informação na forma de equação e a resolvendo, temos:

$$(x+2)^2 = x^2 + 28$$

$$\cancel{x^2} + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = \cancel{x^2} + 28$$

$$4x + 4 = 28$$

$$4x = 28 - 4$$

$$4x = 24$$

$$x = \frac{24}{4}$$

$$x = 6$$

A altura do tetraedro regular pode ser calculada com a fórmula

$$h = \frac{x \cdot \sqrt{6}}{3}$$

$$h = \frac{6 \cdot \sqrt{6}}{3}$$

$$h = 2 \cdot \sqrt{6}$$

Gabarito: “a”.

5. LISTA DE QUESTÕES

21. (EEAR/2021)

Um poliedro convexo de 32 arestas tem apenas 8 faces triangulares e x faces quadrangulares. Dessa forma, o valor de x é

a) 8

b) 10

c) 12

d) 14

22. (EEAR/2021)

Em um prisma hexagonal regular de $4\sqrt{3}$ cm de altura, a aresta da base mede 4 cm. As bases desse sólido foram pintadas de branco e 4 faces laterais pintadas de preto. Se S_B e S_P são as medidas das áreas pintadas de branco e preto, respectivamente, então $S_P - S_B =$ _____ cm^2.

a) $8\sqrt{3}$

b) $16\sqrt{3}$

c) $24\sqrt{3}$

d) $32\sqrt{3}$

23. (EEAR/2019)

Um pedaço de queijo, em forma de prisma triangular regular, tem $6\ cm$ de altura e possui como base um triângulo de $10\ cm$ de lado. O volume desse pedaço de queijo é ______$\sqrt{3}\ cm^3$.

a) 150

b) 165

c) 185

d) 200

24. (EEAR/2018)

Sabendo que o dodecaedro regular possui 20 vértices, o número de arestas desse poliedro é:

a) 16

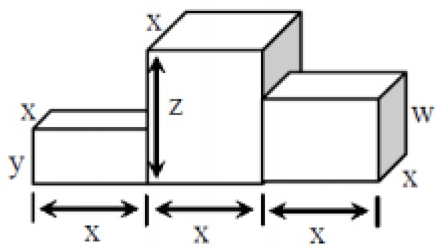
b) 28

c) 30

d) 32

25. (EEAR/2015)

Um pódio é composto por três paralelepípedos retângulos justapostos, conforme mostra a figura.



Ao considerar $x = 5\ dm$, $y = 2\ dm$, $z = 6\ dm$ e $w = 4\ dm$, o volume desse pódio, em dm^3, é

a) 150

b) 200

c) 250

d) 300

26. (EEAR/2015)

Uma embalagem de chocolate tem a forma de um prisma triangular regular cuja aresta da base mede $2\ cm$ e cuja altura mede $12\ cm$. Considerando $\sqrt{3} = 1,7$, o volume de chocolate contido nessa embalagem, em cm^3, é

a) 20,4

b) 23,4

c) 28,4

d) 30,4

27. (EEAR/2015)

Uma pirâmide tem base quadrada e suas faces laterais são triângulos equiláteros de lado $10\ cm$. A altura dessa pirâmide, em cm, é

a) $5\sqrt{3}$

b) $5\sqrt{2}$

c) $3\sqrt{3}$

d) $3\sqrt{2}$

28. (EEAR/2014)

Um prisma hexagonal regular tem aresta da base medindo l e altura igual a $3l$. A área lateral desse prisma é ______l^2.

a) 9

b) 12

c) 18

d) 24

29. (EEAR/2013)

Um prisma reto tem como base um triângulo equilátero de lado $3\ cm$, e como altura o dobro da medida de sua aresta da base. Então, a área lateral desse prisma, em cm^2, é

a) 36

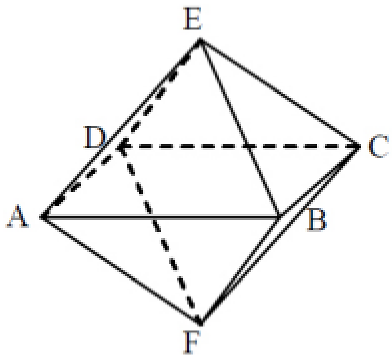
b) 48

c) 54

d) 60

30. (EEAR/2013)

A figura mostra duas pirâmides regulares iguais, unidas pela base $ABCD$, formando um octaedro.



Se $ABCD$ tem $4\ cm$ de lado e $\overline{EF} = 6\ cm$, o volume do sólido da figura, em cm^3, é

a) 26

b) 28

c) 32

d) 34

31. (EEAR/2013)

Considere $\sqrt{3} = 1,73$ e um cubo de aresta $a = 10\ cm$. A medida da diagonal desse cubo, em cm, é um número entre

a) 18 e 20

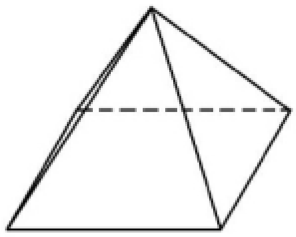
b) 16 e 18

c) 14 e 16

d) 12 e 14

32. (EEAR/2013)

Seja uma pirâmide quadrangular regular com todas as arestas medindo $2\ cm$.



A altura dessa pirâmide, em cm, é

a) $2\sqrt{3}$

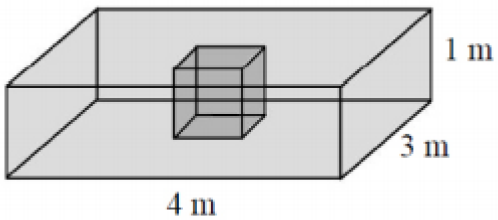
b) $3\sqrt{2}$

c) $\sqrt{3}$

d) $\sqrt{2}$

33. (EEAR/2013)

Uma piscina tem a forma de um paralelepípedo retângulo e tem, no seu centro, um cubo de concreto de $1\ m$ de aresta, como mostra a figura.



O volume de água necessário para encher a piscina, em m^3, é

a) 12

b) 11

c) 10

d) 9

34. (EEAR/2012)

O poliedro regular cujas faces são pentágonos é o

a) octaedro.

b) tetraedro.

c) icosaedro.

d) dodecaedro.

35. (EEAR/2011)

O perímetro da base de um prisma quadrangular regular é $8\ cm$. Se a altura desse prisma é $3\ cm$, então sua área total, em cm^2, é:

a) 32

b) 34

c) 36

d) 38

36. (EEAR/2011)

Um cubo tem $3\ cm$ de altura, e um paralelepípedo retângulo tem dimensões $1\ cm$, $2\ cm$ e $3\ cm$. A razão entre os volumes do cubo e do paralelepípedo é:

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{4}{3}$

c) $\frac{9}{2}$

d) $\frac{8}{3}$

37. (EEAR/2011)

Uma pirâmide triangular regular tem $2\sqrt{3}\ cm$ de aresta da base e $3\sqrt{3}\ cm$ de apótema. A área lateral dessa pirâmide, em cm^2, é:

a) 18

b) 21

c) 24

d) 27

38. (EEAR/2010)

Uma pirâmide quadrangular regular tem $6\ cm$ de altura e base de $8\ cm$ de perímetro. O volume dessa pirâmide, em cm^3, é:

a) 4

b) 6

c) 8

d) 10

39. (EEAR/2010)

A diagonal de um cubo de aresta a_1 mede $3\ cm$, e a diagonal da face de um cubo de aresta a_2 mede $2\ cm$. Assim $a_1 \cdot a_2$, em cm^2, é igual a:

a) $2\sqrt{6}$

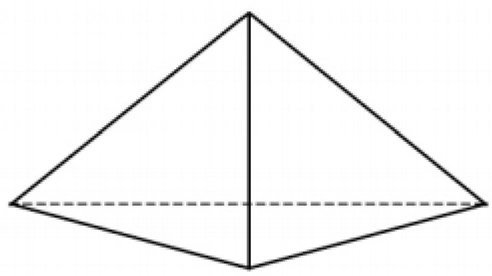
b) $2\sqrt{3}$

c) $\sqrt{6}$

d) $\sqrt{3}$

40. (EEAR/2010)

A aresta lateral de uma pirâmide triangular regular mede $5\ m$, e a aresta da base, $6\ m$.



A área lateral dessa pirâmide, em m^2, é

a) 30

b) 32

c) 34

d) 36

41. (EEAR/2009)

A aresta da base de um prisma quadrangular regular mede $2\ cm$. Se a diagonal desse prisma mede $2\sqrt{11}\ cm$, sua altura, em cm, mede

a) 8

b) 6

c) 4

d) 2

42. (EEAR/2009)

“Existem somente ______ poliedros regulares.” A palavra que completa corretamente a asserção anterior é

a) quatro

b) cinco

c) seis

d) três

43. (EEAR/2009)

A base de um prisma reto é um triângulo retângulo, cujos catetos medem $3\ cm$ e $4\ cm$. Se esse prisma tem altura igual a $3,5\ cm$, então seu volume, em cm^3, é:

a) 21

b) 18

c) 15

d) 12

44. (EEAR/2008)

A diagonal de um paralelepípedo retângulo, de dimensões $4\ cm$, $6\ cm$ e $8\ cm$, mede, em cm,

a) $7\sqrt{5}$

b) $3\sqrt{3}$

c) $5\sqrt{31}$

d) $2\sqrt{29}$

45. (EEAR/2008)

O número de poliedros regulares que têm faces triangulares é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

46. (EEAR/2008)

Um prisma reto é regular quando suas bases:

a) $\boldsymbol{são\ paralelas.}$

b) $\boldsymbol{têm\ a\ mesma\ área.}$

c) $\boldsymbol{têm\ arestas\ congruentes.}$

d) $\boldsymbol{são\ polígonos\ regulares}$

47. (EEAR/2008)

O perímetro da base de uma pirâmide quadrangular regular é 80cm. Se a altura dessa pirâmide é 15cm, seu volume, em cm^3, é:

a) $\mathbf{2300}$

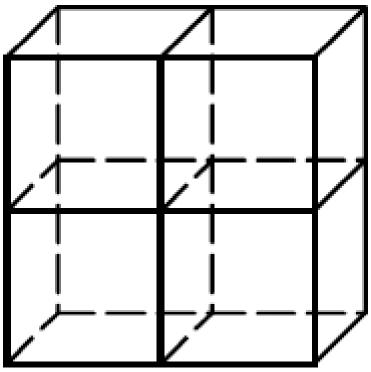
b) $\mathbf{2000}$

c) $\mathbf{1200}$

d) $\mathbf{1000}$

48. (EEAR/2008)

Quatro cubos idênticos são dispostos como na figura a seguir, formando um único sólido.



Considerando que a diagonal de cada cubo mede $\mathbf{10\sqrt{3}}$ cm, a diagonal desse sólido é, em cm, igual a:

a) $\mathbf{30\sqrt{3}}$

b) $\mathbf{20\sqrt{3}}$

c) $\mathbf{20}$

d) $\mathbf{30}$

49. (EEAR/2007)

Uma piscina, com a forma de paralelepípedo retângulo, tem $8m$ de comprimento, $4m$ de largura e $2m$ de profundidade. Não estando completamente cheia, um grupo de 8 pessoas "pula" em seu interior, sem haver perda de água, fazendo com que o nível da água varie em $0,5m$. O volume correspondente às 8 pessoas na piscina, em litros, é igual a:

a) 32000

b) 16000

c) 8000

d) 4000

50. (EEAR/2007)

Uma pirâmide regular de base hexagonal tem 20cm de altura e 10cm de aresta da base. O apótema dessa pirâmide mede, em cm:

a) $5\sqrt{3}$

b) $5\sqrt{17}$

c) $5\sqrt{19}$

d) $5\sqrt{23}$

51. (EEAR/2007)

A medida da altura de um prisma triangular regular é igual à medida da aresta de sua base. Se a área lateral desse prisma é $10m^2$, então sua altura mede, em m:

a) $\sqrt{15}$

b) $\sqrt{30}$

c) $\frac{\sqrt{15}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{30}}{3}$

52. (EEAR/2007)

O perímetro da base de um tetraedro regular é 9m. A medida da altura desse tetraedro, em m é:

a) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

b) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

c) $3\sqrt{6}$

d) $\sqrt{6}$

53. (EEAR/2006)

Um cubo tem $216cm^2$ de área total. A medida, em cm, de sua diagonal é:

a) $6\sqrt{2}$

b) $6\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{6}$

d) $2\sqrt{2}$

54. (EEAR/2006)

Se a aresta da base de um tetraedro regular mede 3cm, então sua altura, em cm, é:

a) $\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{6}$

d) $\sqrt{6}$

55. (EEAR/2006)

Se uma pirâmide tem 9 faces, então essa pirâmide é:

a) eneagonal.

b) octogonal.

c) heptagonal.

d) hexagonal.

56. (EEAR/2006)

Se as dimensões de um paralelepípedo retângulo medem, em cm, $a, a+3\ e\ a+5$, então a soma das medidas de todas as arestas desse paralelepípedo é maior que $48cm$, se a for maior que ____ cm.

a) $\frac{4}{3}$

b) $\frac{5}{4}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{4}{5}$

57. (EEAR/2005)

O número de vértices de um poliedro convexo que tem 3 faces quadrangulares, 2 faces triangulares e 4 faces pentagonais é:

a) 10

b) 14

c) 12

d) 16

58. (EEAR/2005)

O perímetro da base de um tetraedro regular mede 9cm. A área total desse tetraedro, em cm^2, é:

a) $9\sqrt{3}$

b) $18\sqrt{3}$

c) 18

d) 9

59. (EEAR/2005)

Considere as denominações a seguir:

I. tetraedro regular

II. hexaedro regular

III. prisma quadrangular regular

IV. prisma quadrangular reto

Das quatro denominações acima, completam corretamente a assertiva "O cubo é um _____ ."

a) apenas uma.

b) apenas duas.

c) apenas três.

d) todas

60. (EEAR/2005)

Considere: I- No prisma reto, II- No prisma oblíquo, III- No prisma regular,

A- as arestas laterais não são perpendiculares ao plano da base.

B- as bases são polígonos regulares.

C- as faces laterais são quadriláteros cujos ângulos são retos.

D- as arestas laterais são perpendiculares ao plano da base.

E- as faces laterais são losangos ou paralelogramos propriamente ditos.

F- as bases são polígonos regulares ou não.

O número de afirmações corretas que se pode fazer, iniciando-se com I, II ou III e completando-se com A, B, C, D, E, ou F, é:

a) 9

b) 8

c) 7

d) 6

61. (EEAR/2005)

Sejam duas pirâmides quadrangulares regulares de bases congruentes, cujas alturas são 4cm e 3cm, e cujo apótema da base mede 4cm. Unindo-se essas pirâmides pelas bases, de forma que suas arestas coincidam, obtém-se um octaedro cuja área total, em cm^2**, é igual a:**

a) $8(5+\sqrt{2})$

b) $8(5+4\sqrt{2})$

c) $16(5+2\sqrt{2})$

d) $16(5+4\sqrt{2})$

62. (EEAR/2004)

Um prisma regular de base triangular tem altura igual ao lado da base e volume igual $a\ 16\sqrt{3}cm^3$**. A área lateral desse prisma, em** cm^2**, é:**

a) 24

b) 8

c) 4

d) 48

63. (EEAR/2004)

Um prisma reto, cuja base é um triângulo equilátero de lado k, tem volume igual ao de um cubo de aresta k. A altura do prisma é igual a:

a) $\frac{4k\sqrt{3}}{3}$

b) $k\sqrt{3}$

c) $3k\sqrt{3}$

d) $4k\sqrt{3}$

64. (EEAR/2004)

Numa pirâmide hexagonal regular, a aresta da base mede 3cm. Se a área lateral dessa pirâmide é $36cm^2$, então o volume da pirâmide, em cm^3, é igual a

a) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{9\sqrt{111}}{4}$

c) $\frac{9\sqrt{111}}{2}$

d) $9\sqrt{2}$

65. (EEAR/2003)

Se uma das dimensões de um paralelepípedo reto retângulo é 6cm, a soma das outras duas dimensões é 25cm e a área total é $600cm^2$, então a razão entre as duas dimensões desconhecidas é:

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{5}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{2}{5}$

66. (EEAR/2003)

Seja V o volume de um cubo de aresta a. Constrói-se um prisma quadrangular de volume V_0 e de vértices nos pontos médios das arestas das bases do cubo. O volume V_0 desse prisma é igual a:

a) $\frac{V}{2}$

b) V

c) $\frac{V}{3}$

d) $\frac{V}{4}$

67. (EEAR/2003)

Um prisma reto tem base hexagonal regular e as faces laterais quadradas. Sabendo-se que a área do círculo inscrito em sua base é igual a $25\pi cm^2$, a área total, em cm^2, desse prisma é:

a) 400

b) $100(6+\sqrt{3})$

c) $100(2+\sqrt{3})$

d) 600

68. (EEAR/2003)

Se o apótema de um tetraedro regular mede $5\sqrt{3}cm$, então, a altura desse tetraedro, em cm, é:

a) $5\sqrt{3}$

b) $10\sqrt{2}$

c) $\frac{10\sqrt{6}}{3}$

d) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$

69. (EEAR/2003)

Se em uma pirâmide quadrangular regular a diagonal da base mede 4m e a aresta lateral mede $2,5m$, então o volume da pirâmide, em m^3, é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

70. (EEAR/2003)

O volume, em cm^3, de um prisma hexagonal regular com altura igual a 5cm e com área lateral $60cm^2$ é:

a) $5\sqrt{3}$

b) $45\sqrt{3}$

c) $30\sqrt{3}$

d) $270\sqrt{3}$

71. (EEAR/2002)

A aresta de um cubo e a aresta da base de um prisma triangular regular medem $4\sqrt{3}cm$. Se o cubo e o prisma são equivalentes, então a área total do prisma, em cm^2, é:

a) $210\sqrt{3}$

b) $212\sqrt{3}$

c) $214\sqrt{3}$

d) $216\sqrt{3}$

72. (EEAR/2002)

O volume, em cm^3, de uma pirâmide quadrangular regular cujas faces laterais são triângulos equiláteros de lado 4cm, vale:

a) $16\sqrt{2}$

b) $32\sqrt{2}$

c) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$

d) $\frac{32\sqrt{2}}{3}$

73. (EEAR/2002)

A área lateral de um prisma hexagonal regular de 25cm de altura e de apótema da base igual $2\sqrt{3}cm$, em cm^2, é:

a) 1200

b) $600\sqrt{2}$

c) $600\sqrt{3}$

d) 600

74. (EEAR/2002)

A base de um prisma regular é um hexágono inscrito num círculo de raio R. Se o prisma é equivalente ao cubo, cuja base está inscrita no mesmo círculo, então a altura do prisma hexagonal, em cm, é:

a) $2R$

b) $\frac{2R\sqrt{6}}{3}$

c) $\frac{4R\sqrt{6}}{3}$

d) $\frac{4R\sqrt{6}}{9}$

75. (EEAR/2002)

Assinale V (verdadeiro) ou F (falso), considerando a geometria de posição espacial e plana.

( ) A condição $r \cap s = \emptyset$ é necessário para que as retas r e s sejam paralelas distintas.

( ) Duas retas que formam um ângulo reto são necessariamente perpendiculares.

( ) Se duas retas têm um único ponto em comum, então elas são concorrentes.

( ) A condição $r \cap s = \emptyset$ é suficiente para que as retas r e s sejam reversas.

A sequência correta é:

a) $V - V - V - V$

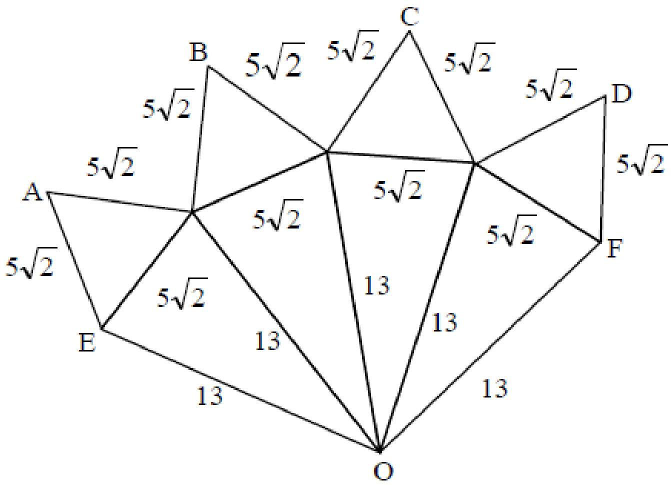
b) $V - F - V - F$

c) $F - V - F - V$

d) $F - F - F - F$

76. (EEAR/2002)

A figura abaixo é a planificação de um poliedro convexo $(A \equiv B \equiv C \equiv D ; E \equiv F)$.



O volume desse poliedro, em unidades de volume, é

a) $\frac{425}{2}$

b) $\frac{425}{3}$

c) $\frac{850}{3}$

d) $\frac{850}{2}$

77. (EEAR/2001)

As bases de uma pirâmide hexagonal regular e de um prisma quadrangular regular acham-se inscritas num mesmo círculo. Sendo H a altura da pirâmide e sabendo-se que os dois poliedros são equivalentes, então a altura do prisma é:

a) $\frac{H\sqrt{3}}{4}$

b) $\frac{3H\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{H\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{H\sqrt{3}}{3}$

78. (EEAR/2001)

A altura de uma pirâmide quadrangular regular é igual à aresta de sua base. Sendo B a área da base da pirâmide, então sua área lateral, em cm^2, é:

a) $B\sqrt{5}$

b) $\frac{B\sqrt{5}}{3}$

c) $B\sqrt{3}$

d) $\sqrt{5B}$

79. (EEAR/2001)

A base de um prisma quadrangular regular está inscrita numa circunferência cujo círculo tem $100\pi cm^2$ de área. Se a altura do prisma mede $1,5cm$, então o volume desse prisma, em cm^3, é de:

a) 200

b) 300

c) 400

d) 800

80. (EEAR/2001)

Assinale a afirmativa VERDADEIRA:

a) Dois planos paralelos a uma reta são paralelos entre si.

b) Dois planos perpendiculares a uma reta são perpendiculares entre si.

c) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas entre si.

d) Duas retas paralelas a um plano são paralelas entre si.

81. (EEAR/2000)

Seja P_1 uma pirâmide quadrangular regular. Cortamos P_1 por um plano paralelo à base e que dista da base a metade da altura de P_1. Sejam P_2 a pirâmide menor resultante desse corte, V_1 o volume de P_1 e V_2 o volume de P_2. Então:

a) não dá para comparar V1 e V2

b) $\frac{V_1}{9} < V_2 < \frac{V_1}{8}$

c) $\frac{V_1}{8} < V_2 < \frac{V_1}{7}$

d) $V_1 = 8V_2$

82. (ESA/2015)

A palavra "icosaedro", de origem grega, significa "20 faces". Sabendo que o icosaedro regular é formado por 20 triângulos regulares, determine o número de vértices.

a) 12

b) 42

c) 52

d) 8

e)48

83. (ESA/2013)

O volume de um tronco de pirâmide de $4dm$ **de altura e cujas áreas das bases são iguais a** $36\ dm^2$ **e** $144\ dm^2$ **vale:**

a) $330cm^3$

b) $720dm^3$

c) $330dm^3$

d) $360m^3$

e) $336dm^3$

84. (ESA/2009)

A altura de um prisma hexagonal regular é de 5m. Sabe-se também que sua área lateral é o dobro da área de sua base. O volume desse prisma, em m^3**, é:**

a) $270\sqrt{3}$

b) $220\sqrt{3}$

c) $200\sqrt{3}$

d) $285\sqrt{3}$

e) $250\sqrt{3}$

85. (ESA/2008)

A pirâmide de Quéops, em Gizé, no Egito, tem aproximadamente $90\sqrt{2}\ metros$ **de altura, possui uma base quadrada e suas faces laterais são triângulos equiláteros. Nessas condições, pode-se afirmar que, em metros, cada uma de suas arestas mede:**

a) 90

b) 120

c) 160

d) 180

e) 200

86. (EsPCEx/2017)

Considere dois planos α e β perpendiculares e três retas distintas r, s e t tais que r ⊂ α, s ⊂ β e t = α ∩ β. Sobre essas retas e os planos é correto afirmar que

a) as retas r e s somente definirão um plano se forem concorrentes com t em um único ponto.

b) as retas r e s podem definir um plano paralelo à reta t.

c) as retas r e s são necessariamente concorrentes.

d) se r e s forem paralelas, então elas definem um plano perpendicular a α e β.

e) o plano definido por r e t é necessariamente paralelo a s.

87. (EsPCEx/2016)

Determine o volume (em cm^3) de uma pirâmide retangular de altura a e lados da base b e c (a, b e c em centímetros), sabendo que $a + b + c = 36$ e a, b e c são, respectivamente, números diretamente proporcionais a 6, 4 e 2.

a) 16

b) 36

c) 108

d) 432

e) 648

88. (EsPCEx/2015)

As medidas das arestas de um paralelepípedo retângulo são diretamente proporcionais a $3, 4$ e 5 e a soma dessas medidas é igual a $48\ cm$. Então a medida da sua área total, em cm^2, é

a) 752

b) 820

c) 1024

d) 1302

e) 1504

89. (EsPCEx/2013)

Considere um prisma regular reto de base hexagonal tal que a razão entre a aresta da base e a aresta lateral é $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Aumentando-se a aresta da base em 2 cm e mantendo-se a aresta lateral, o volume do prisma ficará aumentado de $108\ cm^3$. O volume do prisma original é

a) $18\ cm^3$

b) $36\ cm^3$

c) $18\sqrt{3}\ cm^3$

d) $36\sqrt{3}\ cm^3$

e) $40\ cm^3$

90. (EsPCEx/2012)

Considere as seguintes afirmações:

I. Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então todas as retas de α são perpendiculares ou ortogonais a r;

II. Se a medida da projeção ortogonal de um segmento $\overline{AB}$ sobre um plano α é a metade da medida do segmento $\overline{AB}$, então a reta $\overleftrightarrow{AB}$ faz com α um ângulo de $60°$;

III. Dados dois planos paralelos α e β, se um terceiro plano γ intercepta α e β, as interseções entre esses planos serão retas reversas;

IV. Se α e β são dois planos secantes, todas as retas de α também interceptam β.

Estão corretas as afirmações

a) Apenas I e II

b) Apenas II e III

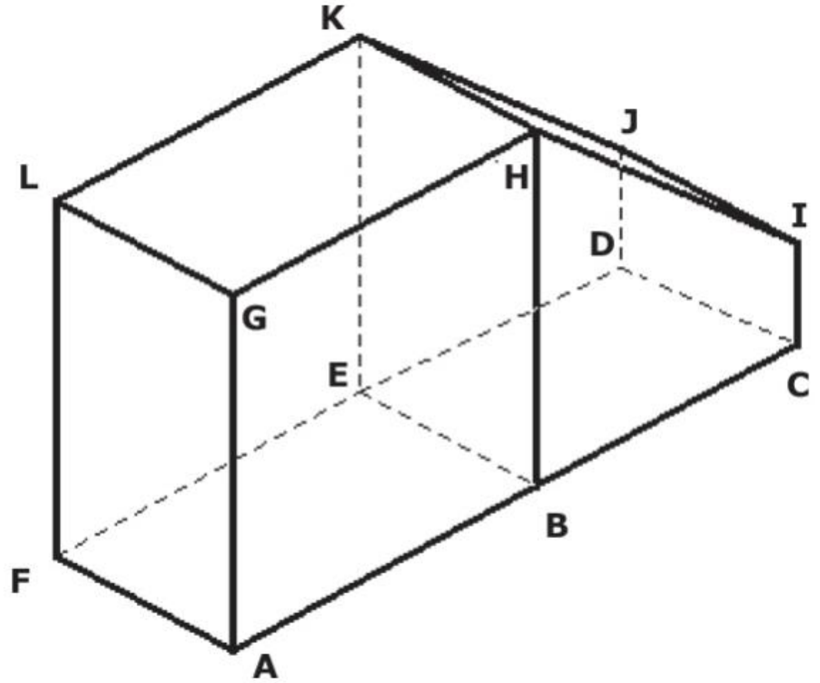
c) I, II e III

d) I, II e IV

e) II, III e IV

91. (EsPCEx/2012)

O sólido geométrico abaixo é formado pela justaposição de um bloco retangular e um prisma reto, com uma face em comum. Na figura estão indicados os vértices, tanto do bloco quanto do prisma. Considere os seguintes pares de retas definidas por pontos dessa figura: as retas $\overline{LB}$ e $\overline{GE}$; as retas $\overline{AG}$ e $\overline{HI}$ e as retas $\overline{AD}$ e $\overline{GK}$. As posições relativas desses pares de retas são, respectivamente,



a) concorrentes; reversas; reversas.

b) reversas; reversas; paralelas.

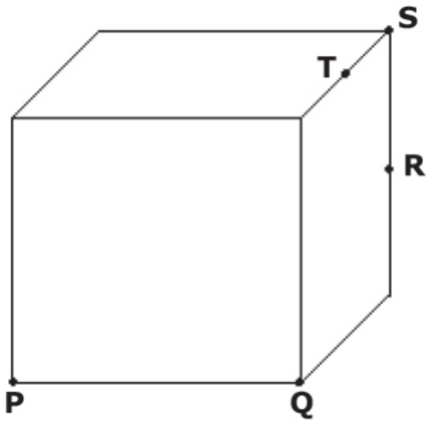
c) concorrentes, reversas; paralelas.

d) reversas; concorrentes; reversas.

e) concorrentes; concorrentes; reversas.

92. (EsPCEx/2011)

Na figura abaixo, está representado um cubo em que os pontos T e R são pontos médios de duas de suas arestas.



Sabe-se que a aresta desse cubo mede $2\ cm$. Assim, o volume do sólido geométrico definido pelos pontos $PQRST$, em cm^3, é

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{4}{3}$

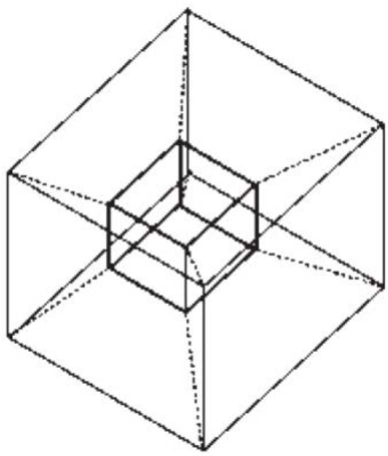
c) $\frac{5}{3}$

d) $\frac{16}{3}$

e) $\frac{32}{3}$

93. (EsPCEx/2011)

A figura espacial representada abaixo, construída com hastes de plástico, é formada por dois cubos em que, cada vértice do cubo maior é unido a um vértice correspondente do cubo menor por uma aresta e todas as arestas desse tipo têm a mesma medida.



Se as arestas dos cubos maior e menor medem, respectivamente, $8\ cm$ e $4\ cm$, a medida de cada uma das arestas que ligam os dois cubos é

a) $6\sqrt{2}\ cm$

b) $3\sqrt{2}\ cm$

c) $2\sqrt{3}\ cm$

d) $4\sqrt{3}\ cm$

e) $6\sqrt{3}\ cm$

94. (EsPCEx/2011)

Considere as seguintes afirmações:

I. Se dois planos α e β são paralelos distintos, então as retas $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \beta$ são sempre paralelas.

II. Se α e β são planos não paralelos distintos, existem as retas $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \beta$ tal que r_1 e r_2 são paralelas.

III. Se uma reta r é perpendicular a um plano α no ponto P, então qualquer reta de α que passa por P é perpendicular a r.

Dentre as afirmações acima, é (são) verdadeira(s)

a) Somente II

b) I e II

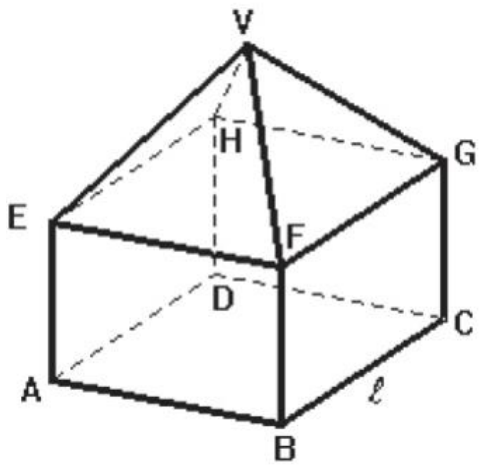
c) I e III

d) II e III

e) I, II e III

95. (EsPCEx/2010)

Na figura abaixo, está representado um sólido geométrico de 9 faces, obtido a partir de um cubo e uma pirâmide.



Sabendo que todas as arestas desse sólido têm medida l, então as medidas da altura (distância do ponto V à face $ABCD$) e da superfície total desse sólido são, respectivamente,

a) $l\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)\ e\ l^2(\sqrt{3}+4)$

b) $l\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)\ e\ l^2(\sqrt{3}+5)$

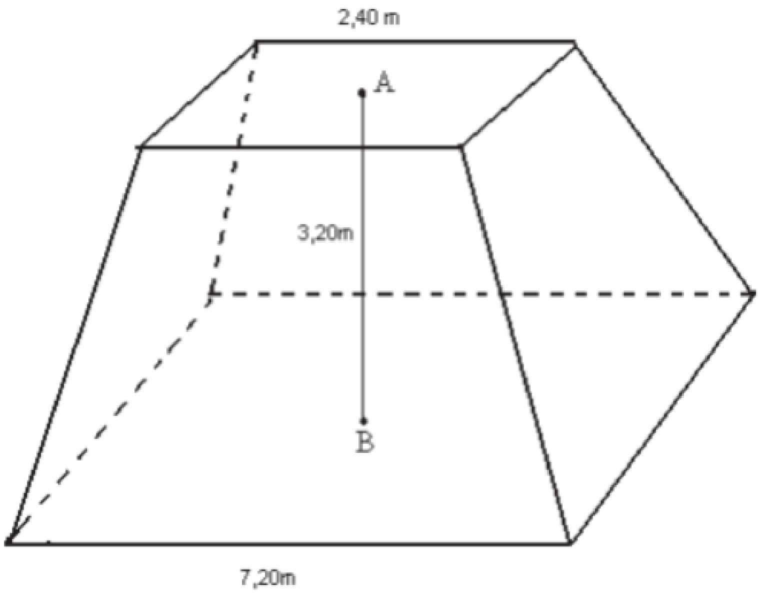
c) $l\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)\ e\ l^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+5\right)$

d) $l\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ e\ l^2(\sqrt{3}+5)$

e) $l\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ e\ l^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+4\right)$

96. (EsPCEx/2009)

Um reservatório em forma de tronco de pirâmide regular de base quadrada e dimensões indicadas na figura deverá ter suas paredes laterais externas cobertas por uma tinta impermeável, cujo rendimento é de $11\ m^2$ por galão.



Desenho fora de escala
Os pontos A e B representam os centros das bases do tronco de pirâmide

O número mínimo de galões que devem ser adquiridos para tal operação é:

a) 6

b) 7

c) 9

d) 10

e) 11

97. (EsPCEx/2009)

Considere duas retas r e s no espaço e quatro pontos distintos, A, B, C e D, de modo que os pontos A e B pertencem à reta r e os pontos C e D pertencem à reta s.

Dentre as afirmações abaixo

I. Se as retas $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ são concorrentes, então r e s são necessariamente concorrentes.

II. Os triângulos ABC e ABD serão sempre coplanares.

III. Se $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ forem concorrentes, então as retas r e s são coplanares.

Pode-se concluir que

a) somente a I é verdadeira.

b) somente a II é verdadeira.

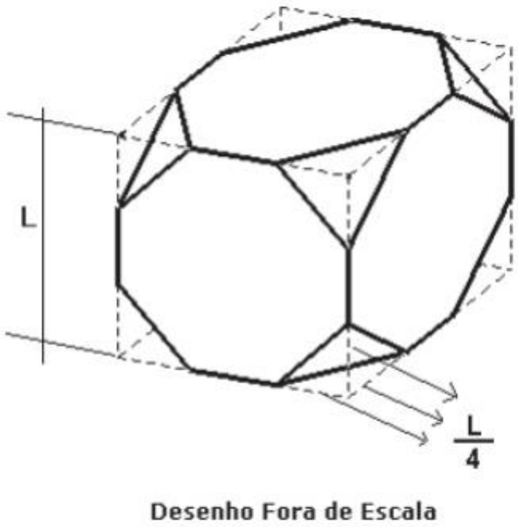
c) somente a III é verdadeira.

d) as afirmações II e III são verdadeiras.

e) as afirmações I e III são verdadeiras.

98. (EsPCEx/2008)

Para obter o sólido geométrico representado abaixo, partiu-se de um cubo de aresta L e retirou-se de cada um dos vértices desse cubo uma pirâmide de base triangular com as arestas laterais medindo $\frac{L}{4}$, conforme a figura.



Denominando-se V o volume do cubo a partir do qual foi obtido o sólido, pode-se concluir que o volume desse sólido é

a) $\frac{23}{24}V$

b) $\frac{47}{48}V$

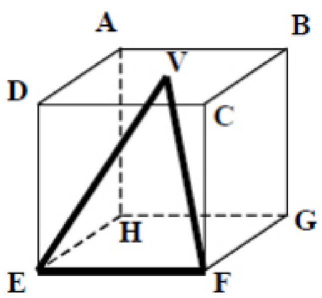
c) $\frac{71}{72}V$

d) $\frac{95}{96}V$

e) $\frac{143}{144}V$

99. (EsPCEx/2008)

Em um cubo de aresta medindo $4\ cm$, forma-se um triângulo VEF, conforme figura abaixo, em que V é o centro do quadrado $ABCD$. A área, em cm^2, do triângulo VEF é igual a



a) $4\sqrt{5}$

b) $4\sqrt{6}$

c) $5\sqrt{5}$

d) $5\sqrt{6}$

e) $6\sqrt{6}$

100. (EsPCEx/2006)

Dispondo de um recipiente em forma de paralelepípedo retângulo, com as dimensões da figura, preenchido com água até o nível indicado, um aluno fez o seguinte experimento:

- **mergulhou na água um cubo maciço, com $1\ cm^3$ de volume;**
- **mergulhou, sucessivamente, novos cubos, cada vez maiores, cujos volumes formam, a partir do cubo de $1\ cm^3$ de volume, uma progressão aritmética de razão $2\ cm^3$.**

Após mergulhar certo número de cubos, que ficaram completamente submersos, verificou que a altura do nível da água passou para $39\ cm$.

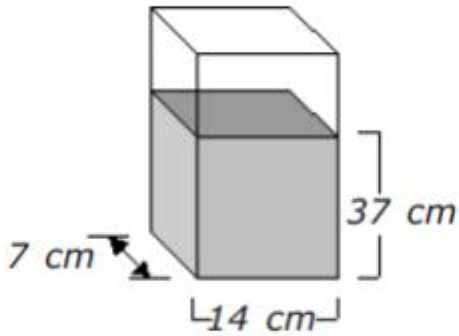


Figura fora de escala

Com base nessas informações, a área total do último cubo colocado é de

a) $54\ cm^2$

b) $42\ cm^2$

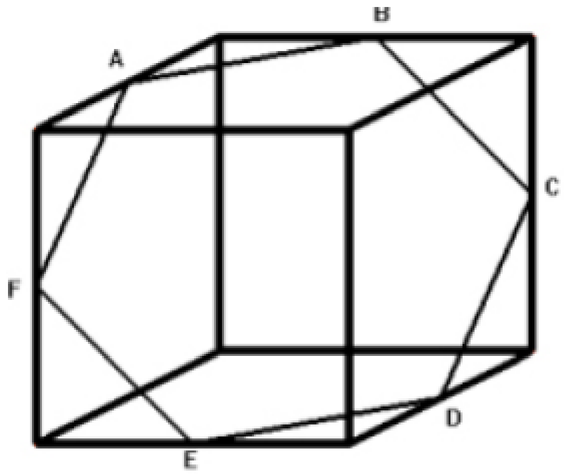
c) $24\ cm^2$

d) $150\ cm^2$

e) $216\ cm^2$

101. (EsPCEx/2005)

O hexágono regular $ABCDEF$ é uma secção plana de um cubo de aresta $2a\sqrt{3}$. Cada vértice do polígono divide ao meio a aresta na qual está apoiado.



A área do hexágono é

a) $9a^2\sqrt{3}$

b) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$

d) $4a^2\sqrt{3}$

e) $\frac{5a^2\sqrt{3}}{4}$

102. (EsPCEx/2004)

Um prisma reto com $5\ cm$ de altura e base retangular com dimensões de $4\ cm$ e $6\ cm$ contém água até uma altura de $3\ cm$. Um cubo maciço de aresta igual a $2\ cm$ é colocado dentro deste prisma, ficando totalmente submerso. A partir de então, a altura do nível da água, em cm, passa a ser de:

a) $\frac{13}{4}$

b) $\frac{10}{3}$

c) $\frac{15}{4}$

d) $\frac{13}{3}$

e) $\frac{14}{4}$

103. (EsPCEx/2002)

Pedro construiu um aquário em forma cúbica. Enquanto o enchia, notou que, colocando 64 litros de água, o nível subia $10\ cm$. O volume máximo, em litros, que comporta esse aquário é de:

a) 216

b) 343

c) 512

d) 729

e) 1024

104. (EsPCEx/2002)

Considere as afirmações abaixo:

I- Se um plano encontra outros dois planos paralelos, então as intersecções são retas paralelas.

II- Uma reta perpendicular a uma reta de um plano e ortogonal a outra reta desse plano é perpendicular ao plano.

III- Se a intersecção de uma reta r com um plano é o ponto P, reta essa não perpendicular ao plano, então existe uma única reta s contida nesse plano que é perpendicular à reta r passando por P.

Pode-se afirmar que

a) todas são verdadeiras.

b) apenas I e II são verdadeiras.

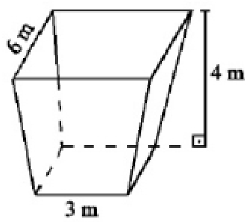
c) apenas I e III são verdadeiras.

d) apenas II e III são verdadeiras.

e) todas são falsas.

105. (EsPCEx/2001)

Um reservatório com forma de tronco de pirâmide regular, representado pela figura abaixo, com bases quadradas e paralelas, está repleto de água. Deseja-se esvaziá-lo com o auxílio de uma bomba de sucção que retira água com uma vazão constante.



A vazão, em litros/segundo, que esta bomba deve ter para que o reservatório seja esvaziado exatamente em 1 hora e 40 minutos é:

a) $12\ l/s$

b) $18\ l/s$

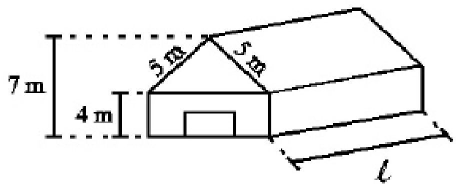
c) $16\ l/s$

d) $14\ l/s$

e) $20\ l/s$

106. (EsPCEx/2001)

Um galpão com as dimensões do desenho abaixo deverá ser construído para armazenar produtos que necessitam de controle de temperatura. Cada um dos condicionadores de ar disponíveis, que atendem às suas especificações, é capaz de climatizar um volume de até $220\ m^3$. Nessas condições, pode-se afirmar que o maior comprimento l que o galpão pode ter, em metros, para ser equipado com 3 (três) aparelhos de ar condicionado é:



(desprezar a espessura das paredes e considerar que o galpão é um prisma reto e não tem forro nem laje)

a) $13\ m$

b) $20\ m$

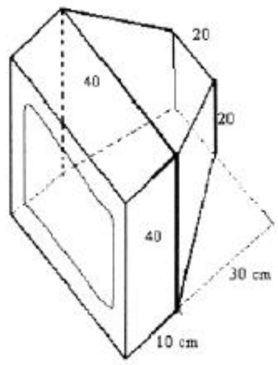
c) $5\ m$

d) $25\ m$

e) $15\ m$

107. (EsPCEx/2000)

Uma fábrica produz monitores para computador que têm a forma de um bloco retangular associado a um tronco de pirâmide, conforme o desenho e dimensões abaixo. Os monitores são acondicionados para venda em caixas cúbicas, com aresta $40\ cm$, medidos internamente. Os espaços vazios da caixa são preenchidos com isopor, para proteger o aparelho. Sabendo que a produção diária da fábrica é de 300 aparelhos, podemos dizer que o consumo diário de isopor em metros cúbicos é de:



(dados: volume da pirâmide $\rightarrow V = \frac{1}{3}S_b \cdot h, S_b \rightarrow \acute{a}rea\ da\ base, h \rightarrow altura$**)**

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

5.1. GABARITO

21. b	35. a	49. b
22. b	36. c	50. c
23. a	37. d	51. d
24. c	38. c	52. d
25. d	39. c	53. b
26. a	40. d	54. d
27. b	41. b	55. b
28. c	42. b	56. a
29. c	43. a	57. c
30. c	44. d	58. a
31. b	45. c	59. c
32. d	46. d	60. a
33. b	47. b	61. d
34. d	48. d	62. d

63. a
64. b
65. a
66. a
67. c
68. c
69. d
70. c
71. d
72. d
73. d
74. d
75. b
76. c
77. a
78. a
79. b
80. c
81. d
82. a
83. e
84. e
85. d
86. b
87. d
88. e
89. b
90. a
91. e
92. b
93. c
94. d
95. b
96. b
97. c
98. b
99. a
100. a
101. a
102. b
103. c
104. c
105. d
106. e
107. e

6. LISTA DE QUESTÕES RESOLVIDAS E COMENTADAS

21. (EEAR/2021)

Um poliedro convexo de 32 arestas tem apenas 8 faces triangulares e x faces quadrangulares. Dessa forma, o valor de x é

a) 8

b) 10

c) 12

d) 14

Comentários

Para calcular as arestas de um poliedro convexo, podemos usar a seguinte fórmula:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots$$

Do enunciado:

$$A = 32, F_3 = 8 \ e \ F_4 = x$$

$$2 \cdot 32 = 3 \cdot 8 + 4 \cdot x$$

$$64 = 24 + 4x$$

$$4x = 40$$

$$\therefore x = 10$$

Gabarito: B

---

22. (EEAR/2021)

Em um prisma hexagonal regular de $4\sqrt{3}$ cm de altura, a aresta da base mede 4 cm. As bases desse sólido foram pintadas de branco e 4 faces laterais pintadas de preto. Se S_B e S_P são as medidas das áreas pintadas de branco e preto, respectivamente, então $S_P - S_B =$ _____ cm^2.

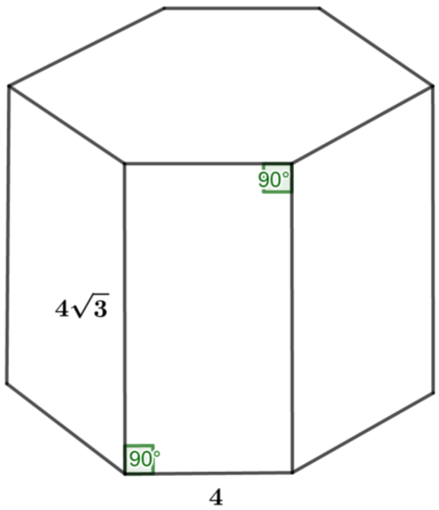
a) $8\sqrt{3}$

b) $16\sqrt{3}$

c) $24\sqrt{3}$

d) $32\sqrt{3}$

Comentários



S_B é igual a 2 vezes a área de um hexágono regular de lado 4 cm e S_P é igual a 4 vezes a área de um retângulo de lados 4 cm e $4\sqrt{3}$ cm, logo:

$$S_B = 2 \cdot \left(6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right) = 3\sqrt{3}l^2 = 3\sqrt{3} \cdot 4^2 = 48\sqrt{3}\, cm^2$$

$$S_P = 4 \cdot \left(4 \cdot 4\sqrt{3}\right) = 64\sqrt{3}\, cm^2$$

A diferença pedida é

$$S_P - S_B = 16\sqrt{3}\, cm^2$$

Gabarito: B

---

23. (EEAR/2019)

Um pedaço de queijo, em forma de prisma triangular regular, tem $6\ cm$ de altura e possui como base um triângulo de $10\ cm$ de lado. O volume desse pedaço de queijo é ______$\sqrt{3}\ cm^3$.

a) 150

b) 165

c) 185

d) 200

Comentários

O volume do prisma é dado por:

$$V = S_{base} \cdot h$$

Mas a base é formada por um triângulo equilátero de $10\ cm$ de lado, então:

$$S_{base} = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(10)^2 = 25\sqrt{3}\ cm^2$$

Logo,

$$V = \left(25\sqrt{3}\right) \cdot (6) = 150\sqrt{3}\ cm^3$$

Gabarito: “a”.

---

24. (EEAR/2018)

Sabendo que o dodecaedro regular possui 20 vértices, o número de arestas desse poliedro é:

a) 16

b) 28

c) 30

d) 32

Comentários

No dodecaedro existem 12 faces. Utilizando a relação de Euler, obtemos:

$$V - A + F = 2$$

$$(20) - A + (12) = 2$$

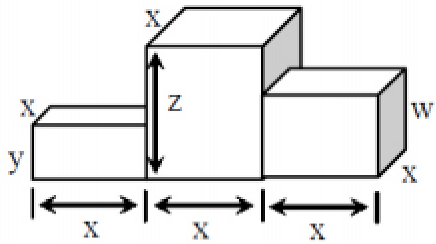
$$\Rightarrow \quad A = 30\ arestas$$

Gabarito: “c”.

---

25. (EEAR/2015)

Um pódio é composto por três paralelepípedos retângulos justapostos, conforme mostra a figura.



Ao considerar $x = 5\ dm$, $y = 2\ dm$, $z = 6\ dm$ e $w = 4\ dm$, o volume desse pódio, em dm^3, é

a) 150

b) 200

c) 250

d) 300

Comentários

Considere os paralelepípedos 1, 2 e 3, da esquerda para a direta, respectivamente. Sendo assim, calculamos $V_{pódio}$

$$V_{pódio} = V_1 + V_2 + V_3$$

$$V_{pódio} = (x \cdot y \cdot x) + (x \cdot z \cdot x) + (x \cdot w \cdot x) = x^2 \cdot (y + z + w)$$

$$V_{pódio} = (5)^2 \cdot \big((2) + (6) + (4)\big) = 25 \cdot 12 = 300$$

$$V_{pódio} = 300\ dm^3$$

Gabarito: "d".

---

26. (EEAR/2015)

Uma embalagem de chocolate tem a forma de um prisma triangular regular cuja aresta da base mede $2\ cm$ e cuja altura mede $12\ cm$. Considerando $\sqrt{3} = 1,7$, o volume de chocolate contido nessa embalagem, em cm^3, é

a) 20,4

b) 23,4

c) 28,4

d) 30,4

Comentários

O volume de chocolate corresponde ao volume do prisma $V_{chocolate} = V_{prisma}$. Lembrando que um prisma triangular regular possui um triângulo equilátero como base e a área de um triângulo equilátero de l é dado por:

$$S_{base} = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

Calculamos o volume do prisma conforme:

$$V_{prisma} = S_{base} \cdot h =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{4} l^2\right) \cdot h = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} (2)^2\right) \cdot (12) = 12\sqrt{3} = 12 \cdot (1{,}7) = 20{,}4$$

$$\Rightarrow \quad V_{chocolate} = 20{,}4\ cm^3$$

Gabarito: "a".

---

27. (EEAR/2015)

Uma pirâmide tem base quadrada e suas faces laterais são triângulos equiláteros de lado $10\ cm$. A altura dessa pirâmide, em cm, é

a) $5\sqrt{3}$

b) $5\sqrt{2}$

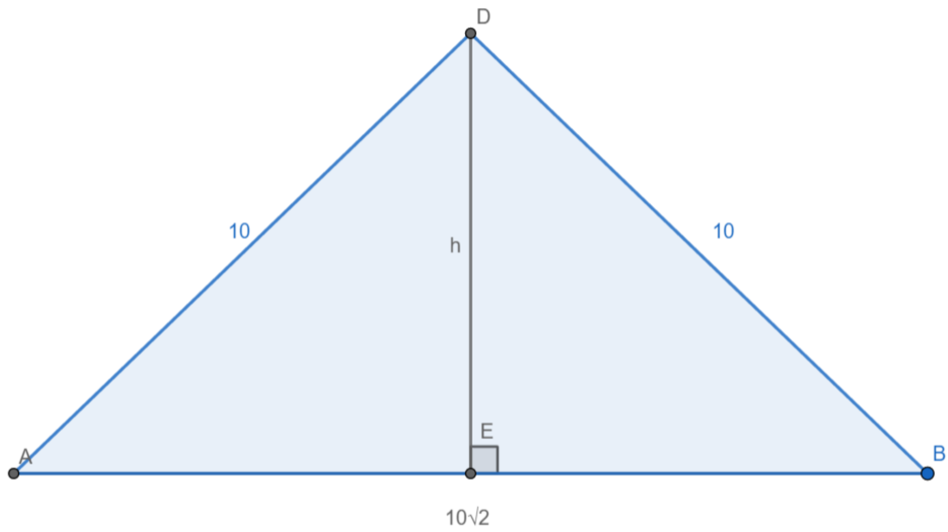
c) $3\sqrt{3}$

d) $3\sqrt{2}$

Comentários

Primeiramente perceba que a medida da aresta da base mede $l = 10\ cm$ e a diagonal da base mede, portanto, $D = l\sqrt{2} = 10\sqrt{2}\ cm$.

Façamos a seção meridiana da pirâmide com um plano que contém a diagonal da base:



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BDE, obtemos a altura da pirâmide:

$$h = \sqrt{(10)^2 - \left(\frac{10\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 5\sqrt{2}\ cm$$

Gabarito: "b".

---

28. (EEAR/2014)

Um prisma hexagonal regular tem aresta da base medindo l e altura igual a $3l$. A área lateral desse prisma é _______l^2.

a) 9

b) 12

c) 18

d) 24

Comentários

A área de cada face é o produto da aresta da base pela altura do prisma, conforme:

$$S_{face} = l \cdot 3l = 3l^2$$

Mas o prisma possui 6 faces iguais correspondentes a cada aresta da base hexagonal, logo

$$S_{lat} = 6 \cdot S_{face} = 6 \cdot (3l^2) = 18l^2$$

Gabarito: "c".

---

29. (EEAR/2013)

Um prisma reto tem como base um triângulo equilátero de lado $3\ cm$, e como altura o dobro da medida de sua aresta da base. Então, a área lateral desse prisma, em cm^2, é

a) 36

b) 48

c) 54

d) 60

Comentários

A área de cada face é o produto da aresta da base pela altura do prisma, conforme:

$$S_{face} = l \cdot h = l \cdot (2l) = (3) \cdot (2 \cdot 3) = 18\ cm^2$$

Mas o prisma possui 3 faces iguais correspondentes a cada aresta da base triangular, logo

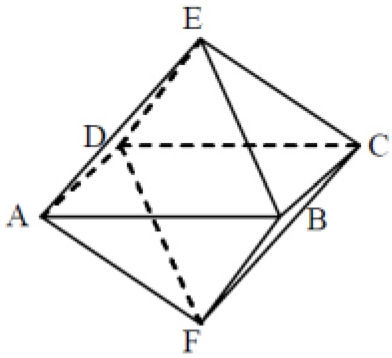
$$S_{lat} = 3 \cdot S_{face} = 3 \cdot (18) = 54\ cm^2$$

Gabarito: "c".

---

30. (EEAR/2013)

A figura mostra duas pirâmides regulares iguais, unidas pela base $ABCD$, formando um octaedro.



Se $ABCD$ tem $4\ cm$ de lado e $\overline{EF} = 6\ cm$, o volume do sólido da figura, em cm^3, é

a) 26

b) 28

c) 32

d) 34

Comentários

Podemos interpretar o octaedro como a junção de duas pirâmides de base quadrada de lado $l = 4\ cm$ e altura $h = \frac{6}{2} = 3\ cm$.

$$V_{oct} = 2 \cdot V_{pir} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} l^2 h\right) = \frac{2}{3}(4)^2 \cdot (3) = 32\ cm^3$$

Gabarito: “c”.

---

31. (EEAR/2013)

Considere $\sqrt{3} = 1,73$ e um cubo de aresta $a = 10\ cm$. A medida da diagonal desse cubo, em cm, é um número entre

a) 18 e 20

b) 16 e 18

c) 14 e 16

d) 12 e 14

Comentários

A diagonal de um cubo de lado $a = 10\ cm$ é dada por:

$$D = a\sqrt{3} = 10\sqrt{3} = 10 \cdot (1{,}73) = 17{,}3\ cm$$

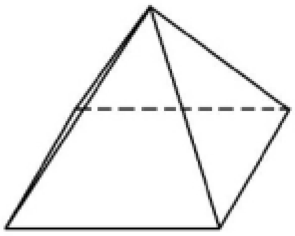
17,3 é um número entre $16\ e\ 18$

Gabarito: “b”.

---

32. (EEAR/2013)

Seja uma pirâmide quadrangular regular com todas as arestas medindo $2\ cm$.



A altura dessa pirâmide, em cm, é

a) $2\sqrt{3}$

b) $3\sqrt{2}$

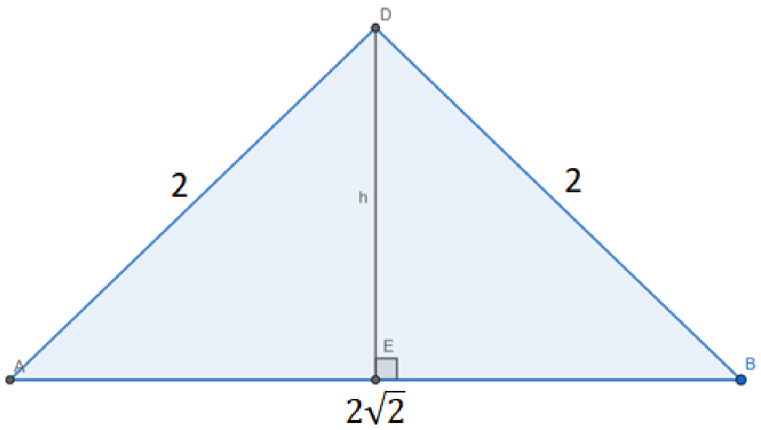
c) $\sqrt{3}$

d) $\sqrt{2}$

Comentários

Primeiramente perceba que a medida da aresta da base mede $l = 2\ cm$ e a diagonal da base mede, portanto, $D = l\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\ cm$.

Façamos a seção meridiana da pirâmide com um plano que contém a diagonal da base:



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BDE, obtemos a altura da pirâmide:

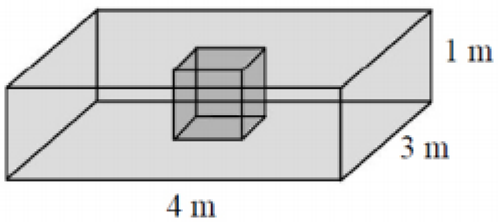
$$h = \sqrt{(2)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2}\ cm$$

Gabarito: "d".

---

33. (EEAR/2013)

Uma piscina tem a forma de um paralelepípedo retângulo e tem, no seu centro, um cubo de concreto de $1\ m$ de aresta, como mostra a figura.



O volume de água necessário para encher a piscina, em m^3, é

a) 12

b) 11

c) 10

d) 9

Comentários

O volume de água somado ao volume do cubo é igual ao volume da piscina.

$$V_{pis} = V_{cubo} + V_{agua}$$

$$V_{agua} = V_{pis} - V_{cubo}$$

$$V_{agua} = (4 \cdot 3 \cdot 1) - (1 \cdot 1 \cdot 1) = 12 - 1 = 11$$

$$V_{agua} = 11\ m^3$$

Gabarito: “b”.

---

34. (EEAR/2012)

O poliedro regular cujas faces são pentágonos é o

a) octaedro.

b) tetraedro.

c) icosaedro.

d) dodecaedro.

Comentários

Este tipo de questão não possui raciocínio ou método de resolução, ela requer apenas que o aluno tenha algumas formas regulares decoradas. O dodecaedro possui 12 faces pentagonais.

Gabarito: “d”.

---

35. (EEAR/2011)

O perímetro da base de um prisma quadrangular regular é $8\ cm$. Se a altura desse prisma é $3\ cm$, então sua área total, em cm^2, é:

a) 32

b) 34

c) 36

d) 38

Comentários

Por definição no prisma quadrangular regular, a base é um quadrado. Então se o perímetro do quadrado mede $8\ cm$ então o lado do quadrado mede $l = 2\ cm$.

A área lateral do prisma é composta de 4 faces retangulares de base $l = 2\ cm$ e altura $h = 3\ cm$. Portanto:

$$S_{lat} = 4 \cdot S_{face} = 4 \cdot (2 \cdot 3) = 24\ cm^2$$

A área total do prisma é a soma da área lateral com as áreas das bases inferior e superior do prisma:

$$S_{tot} = S_{lat} + 2 \cdot (l^2) = 24 + 2 \cdot (2)^2 = 32\ cm^2$$

$$S_{tot} = 32\ cm^2$$

Gabarito: "a".

---

36. (EEAR/2011)

Um cubo tem $3\ cm$ de altura, e um paralelepípedo retângulo tem dimensões $1\ cm$, $2\ cm$ e $3\ cm$. A razão entre os volumes do cubo e do paralelepípedo é:

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{4}{3}$

c) $\frac{9}{2}$

d) $\frac{8}{3}$

Comentários

A altura do cubo corresponde a medida de sua aresta. $h = 3\ cm \Rightarrow \quad l = 3\ cm$.

Portanto, podemos calcular a razão entre os volumes:

$$\frac{V_{cubo}}{V_{paral}} = \frac{3^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{9}{2}$$

Gabarito: "c".

---

37. (EEAR/2011)

Uma pirâmide triangular regular tem $2\sqrt{3}\ cm$ de aresta da base e $3\sqrt{3}\ cm$ de apótema. A área lateral dessa pirâmide, em cm^2, é:

a) 18

b) 21

c) 24

d) 27

Comentários

Primeiramente, lembre-se da definição de apótema de uma pirâmide. O apótema de uma pirâmide é a altura da face lateral.

A área de cada face lateral da pirâmide é dada por:

$$S_{face} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(2\sqrt{3}\right) \cdot \left(3\sqrt{3}\right) = 9\ cm^2$$

A pirâmide possui 3 faces laterais congruentes, portanto, a área lateral é dada por:

$$S_{lat} = 3 \cdot S_{face} = 3 \cdot (9) = 27\ cm^2$$

Gabarito: “d”.

---

38. (EEAR/2010)

Uma pirâmide quadrangular regular tem $6\ cm$ de altura e base de $8\ cm$ de perímetro. O volume dessa pirâmide, em cm^3, é:

a) 4

b) 6

c) 8

d) 10

Comentários

Por definição na pirâmide quadrangular regular, a base é um quadrado. Então se o perímetro do quadrado mede $8\ cm$ então o lado do quadrado mede $l = 2\ cm$.

Portando o volume da pirâmide é dado por:

$$V_{pir} = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (2)^2 \cdot (6) = 8\ cm^3$$

Gabarito: “c”.

---

39. (EEAR/2010)

A diagonal de um cubo de aresta a_1 mede $3\ cm$, e a diagonal da face de um cubo de aresta a_2 mede $2\ cm$. Assim $a_1 \cdot a_2$, em cm^2, é igual a:

a) $2\sqrt{6}$

b) $2\sqrt{3}$

c) $\sqrt{6}$

d) $\sqrt{3}$

Comentários

A diagonal de um cubo de lado a_1 mede $D = a_1\sqrt{3}$, logo,

$$a_1 = \frac{D}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\ cm$$

A diagonal de um quadrado de lado a_2 mede $d = a_2\sqrt{2}$, logo,

$$a_2 = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ cm$$

Portanto:

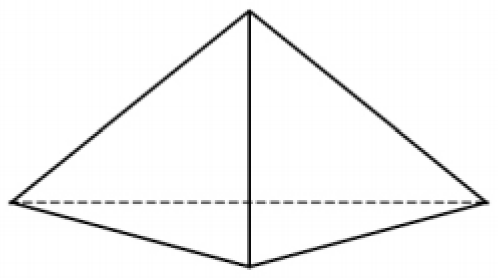
$$a_1 \cdot a_2 = (\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2}) = \sqrt{6}\ cm^2$$

Gabarito: “c”.

---

40. (EEAR/2010)

A aresta lateral de uma pirâmide triangular regular mede $5\ m$, e a aresta da base, $6\ m$.



A área lateral dessa pirâmide, em m^2, é

a) 30

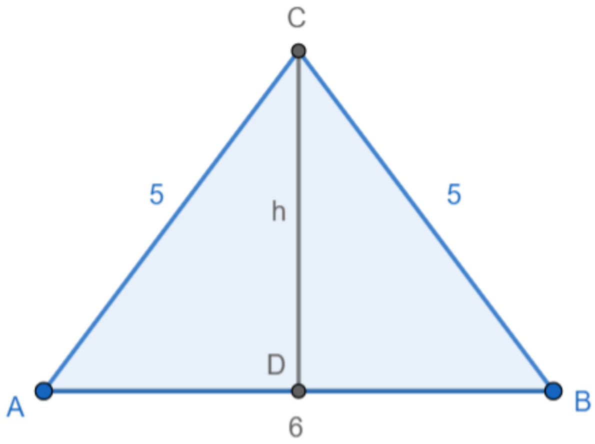
b) 32

c) 34

d) 36

Comentários

Vejamos a seguinte figura que representa a face lateral da pirâmide:



Aplicando Pitágoras no triângulo ACD, obtemos a altura da face:

$$h = \sqrt{(5)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2} = 4\ m$$

Então a área da face é dada por:

$$S_{face} = \frac{1}{2} \cdot (6) \cdot (4) = 12\ m^2$$

Portanto a área lateral a pirâmide vale:

$$S_{lat} = 3 \cdot S_{face} = 3 \cdot (12) = 36\ m^2$$

Gabarito: “d”.

---

41. (EEAR/2009)

A aresta da base de um prisma quadrangular regular mede $2\ cm$. Se a diagonal desse prisma mede $2\sqrt{11}\ cm$, sua altura, em cm, mede

a) 8

b) 6

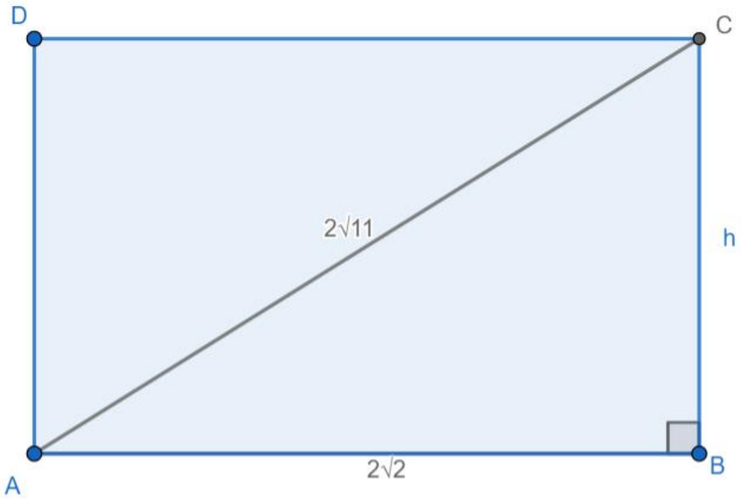
c) 4

d) 2

Comentários

Primeiramente perceba que a medida da aresta da base mede $l = 2\ cm$ e a diagonal da base mede, portanto, $D = l\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\ cm$.

Sendo assim, observe a seguinte imagem que representa a seção meridiana do prisma que contém a diagonal da base:



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, obtemos a medida de h:

$$h = \sqrt{\left(2\sqrt{11}\right)^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = 6\ cm$$

Gabarito: “b”.

42. (EEAR/2009)

“Existem somente ______ poliedros regulares.” A palavra que completa corretamente a asserção anterior é

a) quatro

b) cinco

c) seis

d) três

Comentários

Para o concurso as vezes é necessário que o candidato simplesmente decore alguns fatos relativos ao conteúdo da matéria. Recomenda-se saber características dos poliedros regulares e, sobretudo, saber que existem somente **5** poliedros regulares, sendo eles: Tetraedro, Hexaedro, Octaedro, Dodecaedro, Icosaedro.

Gabarito: “b”.

43. (EEAR/2009)

A base de um prisma reto é um triângulo retângulo, cujos catetos medem $3\ cm$ e $4\ cm$. Se esse prisma tem altura igual a $3,5\ cm$, então seu volume, em cm^3, é:

a) 21

b) 18

c) 15

d) 12

Comentários

O volume do prisma é dado por:

$$V_{prisma} = S_{base} \cdot h = \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\right) \cdot (3{,}5) = 21\ cm^3$$

Gabarito: "a".

---

44. (EEAR/2008)

A diagonal de um paralelepípedo retângulo, de dimensões $4\ cm$, $6\ cm$ e $8\ cm$, mede, em cm,

a) $7\sqrt{5}$

b) $3\sqrt{3}$

c) $5\sqrt{31}$

d) $2\sqrt{29}$

Comentários

A diagonal do paralelepípedo reto de dimensões x, y e z é dada por:

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(4)^2 + (6)^2 + (8)^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

$$D = 2\sqrt{29}\ cm$$

Gabarito: "d".

---

45. (EEAR/2008)

O número de poliedros regulares que têm faces triangulares é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

Comentários

Sabemos que só existem 5 poliedros regulares, em que 3 deles são formados por triângulos equiláteros, um é o quadrado e o outro é o dodecaedro formado por pentágonos regulares.

Logo existem 3 poliedros com faces triangulares

Gabarito: “c”.

---

46. (EEAR/2008)

Um prisma reto é regular quando suas bases:

a) $\boldsymbol{são\ paralelas.}$

b) $\boldsymbol{têm\ a\ mesma\ área.}$

c) $\boldsymbol{têm\ arestas\ congruentes.}$

d) $\boldsymbol{são\ polígonos\ regulares}$

Comentários

Um prisma é chamado regular se, e somente se:

- É convexo.

- <u>Todas as suas faces são formadas por polígonos regulares</u> e congruentes entre si.

- Todos os vértices formam ângulos congruentes.

Gabarito: “d”.

---

47. (EEAR/2008)

O perímetro da base de uma pirâmide quadrangular regular é 80cm. Se a altura dessa pirâmide é 15cm, seu volume, em $\boldsymbol{cm^3}$, é:

a) $\mathbf{2300}$

b) $\mathbf{2000}$

c) $\mathbf{1200}$

d) $\mathbf{1000}$

Comentários

O perímetro de um quadrado de lado l é $p = 4l$, portanto temos que:

$$p = 4l$$
$$80 = 4l$$
$$l = 20$$

Logo a área da base da pirâmide é $A_b = l^2 = 400$

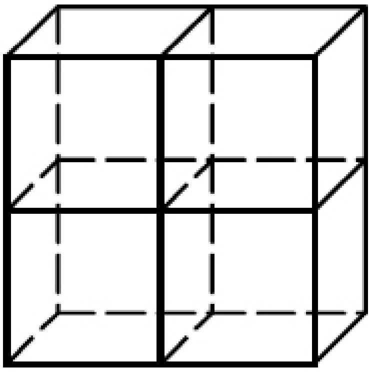
Assim o volume da pirâmide é $V = \frac{400 \cdot 15}{3} = 2000\ cm^3$

Gabarito: "b".

---

48. (EEAR/2008)

Quatro cubos idênticos são dispostos como na figura a seguir, formando um único sólido.



Considerando que a diagonal de cada cubo mede $10\sqrt{3}$ cm, a diagonal desse sólido é, em cm, igual a:

a) $30\sqrt{3}$

b) $20\sqrt{3}$

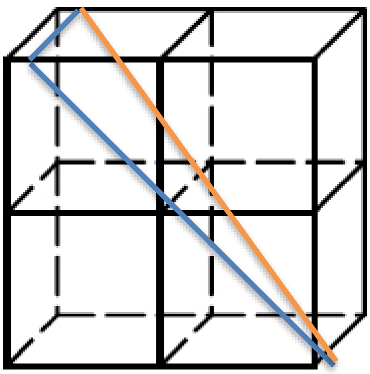
c) 20

d) 30

Comentários

Se a diagonal de cada cubo tem o valor de $d = l\sqrt{3}$, em que l e valor do lado do cubo, logo temos que $l\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \Longrightarrow l = 10$

Temos na seguinte figura a representação da diagonal do novo solido



Portanto por Pitágoras temos que:

$$d^2 = l^2 + \left(2l\sqrt{2}\right)^2$$
$$d^2 = 9l^2$$
$$d = 3l$$
$$d = 30\ cm$$

Gabarito: “d”.

---

49. (EEAR/2007)

Uma piscina, com a forma de paralelepípedo retângulo, tem $8m$ de comprimento, $4m$ de largura e $2m$ de profundidade. Não estando completamente cheia, um grupo de 8 pessoas “pula” em seu interior, sem haver perda de água, fazendo com que o nível da água varie em $0,5m$. O volume correspondente às 8 pessoas na piscina, em litros, é igual a:

a) 32000

b) 16000

c) 8000

d) 4000

Comentários

Se, ao pular na piscina, a altura do nível de água dela varia em $0{,}5\ m$, então esse corresponde ao volume das pessoas e, portanto, temos que o volume das pessoas é:

$$V_p = 4 \cdot 8 \cdot 0{,}5 = 16m^3$$
$$V_p = 16m^3 = 16000\ litros$$

Gabarito: “b”.

---

50. (EEAR/2007)

Uma pirâmide regular de base hexagonal tem 20cm de altura e 10cm de aresta da base. O apótema dessa pirâmide mede, em cm:

a) $5\sqrt{3}$

b) $5\sqrt{17}$

c) $5\sqrt{19}$

d) $5\sqrt{23}$

Comentários

Como a base é hexagonal, temos que a distância dos vértices da base ao centro da base são iguais as arestas da base, portanto podemos conseguir o valor da aresta lateral por Pitágoras:

$$a_l^2 = 10^2 + 20^2$$
$$a_l = 10\sqrt{5}$$

Sabendo a aresta latera podemos conseguir o apótema também por Pitágoras:

$$a_l^2 = a_p^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$
$$500 = a_p^2 + 25$$
$$a_p^2 = 475 = 25 \cdot 19$$
$$a_p = 5\sqrt{19}$$

Gabarito: "c".

---

51. (EEAR/2007)

A medida da altura de um prisma triangular regular é igual à medida da aresta de sua base. Se a área lateral desse prisma é $10m^2$, então sua altura mede, em m:

a) $\sqrt{15}$

b) $\sqrt{30}$

c) $\frac{\sqrt{15}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{30}}{3}$

Comentários

Para o prisma triangular regular os polígonos laterais são retângulos de lados $l\ e\ h$ portanto a área lateral é:

$$A_l = 3lh$$

Pelo enunciado, como $l = h$, temos:

$$A_l = 3h^2 = 10$$
$$h^2 = \frac{30}{9}$$
$$h = \frac{\sqrt{30}}{3}$$

Gabarito: "d".

---

52. (EEAR/2007)

O perímetro da base de um tetraedro regular é 9m. A medida da altura desse tetraedro, em m é:

a) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

b) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

c) $3\sqrt{6}$

d) $\sqrt{6}$

Comentários

A base de um tetraedro regular constitui-se por um triângulo equilátero de lado l cujo perímetro $p = 3l$, portanto

$$9 = 3l$$
$$l = 3$$

Para o tetraedro regular, temos que a altura é dada por

$$h = \frac{l\sqrt{6}}{3}$$
$$h = \sqrt{6}$$

Gabarito: "d".

---

53. (EEAR/2006)

Um cubo tem $216cm^2$ de área total. A medida, em cm, de sua diagonal é:

a) $6\sqrt{2}$

b) $6\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{6}$

d) $2\sqrt{2}$

Comentários

Um cubo é composto por 6 quadrados regulares cuja área corresponde á l^2, portanto

$$A_t = 6 \cdot l^2$$
$$216 = 6 \cdot l^2$$

$$l^2 = 36$$
$$l = 6\ cm$$

A diagonal de um cubo é dada por $d = l\sqrt{3}$

$$d = 6\sqrt{3}$$

Gabarito: "b".

---

54. (EEAR/2006)

Se a aresta da base de um tetraedro regular mede 3cm, então sua altura, em cm, é:

a) $\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{6}$

d) $\sqrt{6}$

Comentários

Para o tetraedro regular, temos que a altura é dada por:

$$h = \frac{l\sqrt{6}}{3}$$

$$h = \frac{3\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}$$

Gabarito: "d".

---

55. (EEAR/2006)

Se uma pirâmide tem 9 faces, então essa pirâmide é:

a) eneagonal.

b) octogonal.

c) heptagonal.

d) hexagonal.

Comentários

Sabendo que uma pirâmide sempre tem base como uma face, tem-se, portanto, 8 faces laterais, formando um octógono como base, portanto se trata de uma pirâmide octogonal.

Gabarito: "b".

---

56. (EEAR/2006)

Se as dimensões de um paralelepípedo retângulo medem, em cm, $a, a+3\ e\ a+5$**, então a soma das medidas de todas as arestas desse paralelepípedo é maior que** $48cm$**, se a for maior que ____ cm.**

a) $\frac{4}{3}$

b) $\frac{5}{4}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{4}{5}$

Comentários

A soma de todas as arestas do paralelepípedo é:

$$S = 4(a) + 4(a+3) + 4(a+5)$$
$$S = 12a + 32$$

Como a soma deve ser maior que $48\ cm$

$$12a + 32 > 48$$
$$12a > 16$$
$$a > \frac{4}{3}$$

Gabarito: "a".

---

57. (EEAR/2005)

O número de vértices de um poliedro convexo que tem 3 faces quadrangulares, 2 faces triangulares e 4 faces pentagonais é:

a) 10

b) 14

c) 12

d) 16

Comentários

Sabemos quando todos polígonos são ligados entre si todas as arestas se sobrepõem dois a dois, logo o número total de arestas cai pela metade, portanto temos que o número de arestas do poliedro é:

$$n_A = \frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5}{2} = 19$$

Pela relação de Euler para poliedros temos:

$$n_V - n_a + n_f = 2$$
$$n_V = 2 - n_f + n_a$$
$$n_V = 2 - 9 + 19$$
$$n_V = 12$$

Gabarito: “c”.

58. (EEAR/2005)

O perímetro da base de um tetraedro regular mede 9cm. A área total desse tetraedro, em cm^2, é:

a) $9\sqrt{3}$

b) $18\sqrt{3}$

c) 18

d) 9

Comentários

A base de um tetraedro regular constitui-se por um triângulo equilátero de lado l cujo perímetro $p = 3l$, portanto

$$9 = 3l$$
$$l = 3$$

Para o tetraedro regular, temos que a área das 4 faces triangulares é dada por:

$$A_f = 4 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = l^2\sqrt{3}$$
$$A_f = 9\sqrt{3}$$

Gabarito: “a”.

59. (EEAR/2005)

Considere as denominações a seguir:

I. tetraedro regular

II. hexaedro regular

III. prisma quadrangular regular

IV. prisma quadrangular reto

Das quatro denominações acima, completam corretamente a assertiva “O cubo é um _____ .”

a) apenas uma.

b) apenas duas.

c) apenas três.

d) todas

Comentários

Das afirmativas

I. (F)tetraedro regular é composto por faces triangulares equiláteras

II. (V)hexaedro regular é um solido regular com 6 faces, logo um cubo

III. (V)prisma quadrangular regular é um cubo

IV. (V)prisma quadrangular reto com arestas iguais

Gabarito: "c".

---

60. (EEAR/2005)

Considere: I- No prisma reto, II- No prisma oblíquo, III- No prisma regular,

A- as arestas laterais não são perpendiculares ao plano da base.

B- as bases são polígonos regulares.

C- as faces laterais são quadriláteros cujos ângulos são retos.

D- as arestas laterais são perpendiculares ao plano da base.

E- as faces laterais são losangos ou paralelogramos propriamente ditos.

F- as bases são polígonos regulares ou não.

O número de afirmações corretas que se pode fazer, iniciando-se com I, II ou III e completando-se com A, B, C, D, E, ou F, é:

a) 9

b) 8

c) 7

d) 6

Comentários

No caso I, temos que as proposições corretas são C, D, F.

No caso II, temos que as proposições corretas são A, E, F.

No caso III, temos que as proposições corretas são B, C, D.

Gabarito: "a".

---

61. (EEAR/2005)

Sejam duas pirâmides quadrangulares regulares de bases congruentes, cujas alturas são 4cm e 3cm, e cujo apótema da base mede 4cm. Unindo-se essas pirâmides pelas bases, de forma que suas arestas coincidam, obtém-se um octaedro cuja área total, em cm^2, é igual a:

a) $8(5+\sqrt{2})$

b) $8(5+4\sqrt{2})$

c) $16(5+2\sqrt{2})$

d) $16(5+4\sqrt{2})$

Comentários

Sabendo o apótema da base conseguimos descobrir o apótema das face laterais por Pitágoras, de modo que para a pirâmide de altura de 4 cm, temos:

$$a_p^2 = a_b^2 + h^2$$
$$a_p^2 = 4^2 + 4^2$$
$$a_p^2 = 2 \cdot 4^2$$
$$a_p = 4\sqrt{2}$$

No caso da pirâmide de altura de 3 cm, temos:

$$a_p^2 = a_b^2 + h^2$$
$$a_p^2 = 3^2 + 4^2$$
$$a_p^2 = 5^2$$
$$a_p = 5$$

Sabemos que o apótema da base quadrangular vale 4 cm, logo o lodo da base vale $2 \cdot 4 = 8\ cm$ .Assim calculamos a área lateral da união das pirâmides temos

$$A_l = 4 \cdot \left(\frac{5 \cdot 8}{2} + \frac{4\sqrt{2} \cdot 8}{2}\right)$$
$$A_l = 16(5+4\sqrt{2})$$

Gabarito: “d”.

---

62. (EEAR/2004)

Um prisma regular de base triangular tem altura igual ao lado da base e volume igual $a\ 16\sqrt{3}cm^3$. A área lateral desse prisma, em cm^2, é:

a) 24

b) 8

c) 4

d) 48

Comentários

Sabemos que o lado da base triangular do prisma tem a mesma medida da altura, sabendo que o volume do prisma é dado pela relação:

$$V = A_b \cdot h$$

Como a base é um triângulo regular

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \cdot h$$
$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l^3$$
$$16\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l^3$$
$$l^3 = 4^3$$
$$l = 4$$

A área lateral do prisma formado por quadrados de lado l

$$A_l = 3 \cdot l \cdot l = 3 \cdot 16 = 48$$

Gabarito: "d".

---

63. (EEAR/2004)

Um prisma reto, cuja base é um triângulo equilátero de lado k, tem volume igual ao de um cubo de aresta k. A altura do prisma é igual a:

a) $\frac{4k\sqrt{3}}{3}$

b) $k\sqrt{3}$

c) $3k\sqrt{3}$

d)$4k\sqrt{3}$

Comentários

O volume de um cubo com aresta k é

$$V = k^3$$

Sabemos que o volume de um prisma é a área da base multiplicada pela altura, portanto

$$V = h \cdot A_b$$

$$V = h \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} k^2$$

Segundo o enunciado temos:

$$k^3 = h \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} k^2$$
$$h = k \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}$$
$$h = k \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Gabarito: "a".

---

64. (EEAR/2004)

Numa pirâmide hexagonal regular, a aresta da base mede 3cm. Se a área lateral dessa pirâmide é $36cm^2$, então o volume da pirâmide, em cm^3, é igual a

a) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{9\sqrt{111}}{4}$

c) $\frac{9\sqrt{111}}{2}$

d) $9\sqrt{2}$

Comentários

Sabe-se que a lateral da pirâmide é composta por 6 triângulos isósceles de base $b = 3$ e altura a_l

Temos pela área lateral da pirâmide

$$A_l = 6 \cdot \frac{b \cdot a_l}{2}$$
$$36 = 3 \cdot 3 \cdot a_l$$
$$a_l = 4\ cm$$

Por Pitágoras entre a altura dos triângulos laterais a_l, a altura h da pirâmide e o apótema da base hexagonal $a_p = \frac{\sqrt{3}}{2} b$, temos:

$$a_l^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} b\right)^2 + h^2$$
$$4^2 = \frac{3}{4} \cdot 3^2 + h^2$$

$$h^2 = \frac{37}{4}$$
$$h = \frac{\sqrt{37}}{2}$$

Portanto o volume da pirâmide é:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$
$$V = \frac{3^2 \cdot 3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{37}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{9\sqrt{111}}{4}$$

Gabarito: “b”.

---

65. (EEAR/2003)

Se uma das dimensões de um paralelepípedo reto retângulo é 6cm, a soma das outras duas dimensões é 25cm e a área total é $600cm^2$, então a razão entre as duas dimensões desconhecidas é:

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{5}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{2}{5}$

Comentários

Supomos que as medidas desconhecidas sejam a e b, logo, temos:

$$a + b = 25$$

E pela área:

$$600 = 2 \cdot (ab + 6a + 6b)$$
$$300 = ab + 6(a + b)$$
$$300 = ab + 6 \cdot 25$$
$$ab = 150$$

A partir do sistema:

$$\begin{cases} a + b = 25 \\ a \cdot b = 150 \end{cases} \Longrightarrow a = 10\ e\ b = 15$$

Portanto, temos que a razão entre a e b é:

$$\frac{b}{a} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

Gabarito: “a”.

---

66. (EEAR/2003)

Seja V o volume de um cubo de aresta a. Constrói-se um prisma quadrangular de volume V_0 e de vértices nos pontos médios das arestas das bases do cubo. O volume V_0 desse prisma é igual a:

a) $\frac{V}{2}$

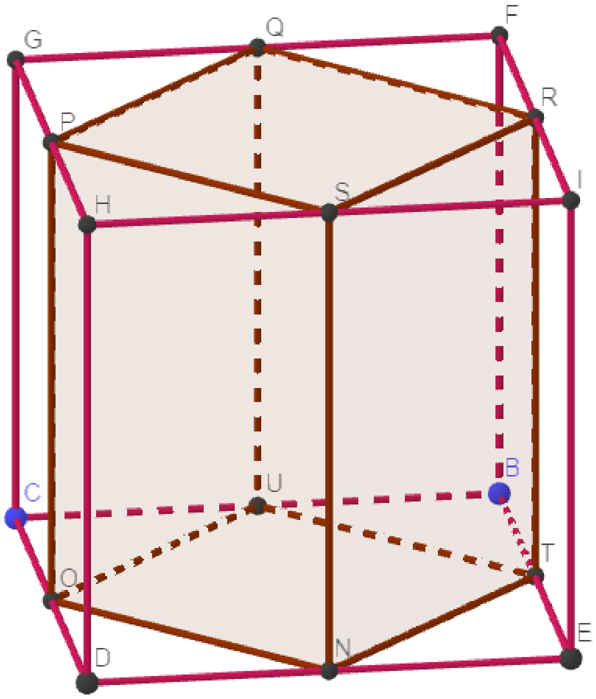
b) V

c) $\frac{V}{3}$

d) $\frac{V}{4}$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Observe que a o poliedro formado ocupa o interior do cubo com exceção das quinas do cubo, se observarmos a composição da base de cubo é possível notar que a área ocupada pelo prisma é metade da área da base do cubo, portanto o volume do prisma será a metade do prisma, $V_0 = \frac{V}{2}$

Gabarito: “a”.

---

67. (EEAR/2003)

Um prisma reto tem base hexagonal regular e as faces laterais quadradas. Sabendo-se que a área do círculo inscrito em sua base é igual a $25\pi cm^2$, a área total, em cm^2, desse prisma é:

a) 400

b) $\mathbf{100(6+\sqrt{3})}$

c) $\mathbf{100(2+\sqrt{3})}$

d) $\mathbf{600}$

Comentários

Com a área do círculo inscrito na base, é possível achar o raio desse círculo

$$25\pi = \pi r^2$$
$$r^2 = 25$$
$$r = 5\ cm$$

O círculo é inscrito à base, assim, sabemos que o apótema da base hexagonal é igual ao raio do círculo.

Como a base é hexagonal, temos que o apótema $a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ l$

$$a_6 = r = \frac{\sqrt{3}}{2}\ l$$
$$5 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ l$$
$$l = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

Conhecendo o valor do lado, calculamos a área total como soma da área de todas as faces

$$A_t = 2 \cdot A_b + 6 \cdot A_l$$
$$A_t = 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} l^2 + 6 \cdot l^2$$
$$A_t = l^2(3\sqrt{3} + 6)$$
$$A_t = \frac{100}{3}(3\sqrt{3} + 6)$$
$$A_t = 100(\sqrt{3} + 2)$$

Gabarito: "c".

---

68. (EEAR/2003)

Se o apótema de um tetraedro regular mede $5\sqrt{3}cm$, então, a altura desse tetraedro, em cm, é:

a) $\mathbf{5\sqrt{3}}$

b) $\mathbf{10\sqrt{2}}$

c) $\mathbf{\frac{10\sqrt{6}}{3}}$

d) $\mathbf{\frac{10\sqrt{3}}{3}}$

Comentários

Sabemos que o apótema de um triângulo equilátero é:

$$a_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$
$$5\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$
$$5 = \frac{l}{2}$$
$$l = 10$$

Por outro lado, a altura de um tetraedro de lado l é dada pela seguinte relação:

$$h = \frac{\sqrt{6}}{3}l$$
$$h = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot 10$$
$$h = \frac{10\sqrt{6}}{3}$$

Gabarito: "c".

---

69. (EEAR/2003)

Se em uma pirâmide quadrangular regular a diagonal da base mede 4m e a aresta lateral mede $2,5m$, então o volume da pirâmide, em m^3, é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

Comentários

Sabendo que a base é quadrangular realizamos um Pitágoras entre a aresta lateral como hipotenusa e o a altura e metade da diagonal como catetos, assim obtendo:

$$(2{,}5)^2 = 2^2 + h^2$$
$$\frac{25}{4} - 4 = h^2$$
$$h^2 = \frac{25 - 16}{4}$$
$$h^2 = \frac{9}{4}$$

$$h = \frac{3}{2}$$

Temos que o volume de uma pirâmide é dado por:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$
$$V = \frac{\frac{4^2}{2} \cdot \frac{3}{2}}{3} = \frac{16}{2} \cdot \frac{1}{2} = 4$$

Gabarito: “d”.

---

70. (EEAR/2003)

O volume, em cm^3, de um prisma hexagonal regular com altura igual a 5cm e com área lateral $60cm^2$ é:

a) $5\sqrt{3}$

b) $45\sqrt{3}$

c) $30\sqrt{3}$

d) $270\sqrt{3}$

Comentários

A lateral de um prisma hexagonal é composta de 6 retângulo de altura h e base l , portanto, temos que a área lateral desse prisma é prisma é:

$$A_l = 6 \cdot h \cdot l$$
$$60 = 6 \cdot 5 \cdot l$$
$$l = 2\ cm$$

Logo, a área da base hexagonal é:

$$A_b = \frac{3\sqrt{3}}{2} l^2$$
$$A_b = 6\sqrt{3}$$

O volume é $V = A_b \cdot h = 6\sqrt{3} \cdot 5 = 30\sqrt{3}$

Gabarito: “c”.

---

71. (EEAR/2002)

A aresta de um cubo e a aresta da base de um prisma triangular regular medem $4\sqrt{3}cm$. Se o cubo e o prisma são equivalentes, então a área total do prisma, em cm^2, é:

a) $\mathbf{210\sqrt{3}}$

b) $\mathbf{212\sqrt{3}}$

c) $\mathbf{214\sqrt{3}}$

d) $\mathbf{216\sqrt{3}}$

Comentários

Se o cubo e prisma são equivalentes, então os seus volumes são os mesmos:

$$V_c = V_p$$
$$\left(4\sqrt{3}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(4\sqrt{3}\right)^2 \cdot h$$
$$4\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot h$$
$$h = 16$$

Portanto, temos que a área total do prisma é:

$$A_t = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(4\sqrt{3}\right)^2\right) + 3 \cdot \left(16 \cdot 4\sqrt{3}\right)$$
$$A_t = 216\sqrt{3}$$

Gabarito: "d".

---

72. (EEAR/2002)

O volume, em cm^3, de uma pirâmide quadrangular regular cujas faces laterais são triângulos equiláteros de lado 4cm, vale:

a) $\mathbf{16\sqrt{2}}$

b) $\mathbf{32\sqrt{2}}$

c) $\mathbf{\frac{16\sqrt{2}}{3}}$

d) $\mathbf{\frac{32\sqrt{2}}{3}}$

Comentários

Se os lados da pirâmide são formados por triângulos equiláteros de lado igual a 4 cm, logo a base é um quadrilátero de lado igual a 4 cm, assim aplicando Pitágoras com a metade da diagonal da base e a altura, obtemos a hipotenusa como uma aresta lateral da pirâmide:

$$l^2 = \left(\frac{d_b}{2}\right)^2 + h^2$$
$$4^2 = \left(\frac{4\sqrt{2}}{2}\right)^2 + h^2$$

$$16 = 8 + h^2$$
$$h = 2\sqrt{2}$$

Portanto, temos que o volume de uma pirâmide é dado por:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$
$$V = \frac{4^2 \cdot 2\sqrt{2}}{3} = \frac{32\sqrt{2}}{3}$$

Gabarito: “d”.

---

73. (EEAR/2002)

A área lateral de um prisma hexagonal regular de 25cm de altura e de apótema da base igual $2\sqrt{3}cm$, em cm^2, é:

a) 1200

b) $600\sqrt{2}$

c) $600\sqrt{3}$

d) 600

Comentários

Como a base é hexagonal, temos que o apótema da base $a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} l$

$$a_6 = r = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$
$$2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$
$$l = 4$$

A área lateral de um prisma hexagonal regular é composta por 6 retângulo de altura h e de lado l , assim temos que:

$$A_l = 6 \cdot h \cdot l$$
$$A_l = 6 \cdot 25 \cdot 4$$
$$A_l = 600\ cm^2$$

Gabarito: “d”.

---

74. (EEAR/2002)

A base de um prisma regular é um hexágono inscrito num círculo de raio R. Se o prisma é equivalente ao cubo, cuja base está inscrita no mesmo círculo, então a altura do prisma hexagonal, em cm, é:

a) $2R$

b) $\frac{2R\sqrt{6}}{3}$

c) $\frac{4R\sqrt{6}}{3}$

d) $\frac{4R\sqrt{6}}{9}$

Comentários

Primeiramente, vamos encontrar a área da base do cubo. Sabemos que a base do cubo está inscrita numa circunferência de raio R, logo:

$$A_c = \frac{(2R)^2}{2} = 2R^2$$

Agora calcularemos a área da base do hexágono, também inscrito numa circunferência de raio R:

$$A_h = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot l^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot R^2$$

Se os sólidos são equivalentes, seus volumes são iguais, logo:

$$V_c = V_h$$

$$2R^2 \cdot R\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2 \cdot h$$

$$2\sqrt{2}R = \frac{3\sqrt{3}}{2} h$$

$$h = \frac{4\sqrt{6}}{9} R$$

Gabarito: "d".

---

75. (EEAR/2002)

Assinale V (verdadeiro) ou F (falso), considerando a geometria de posição espacial e plana.

( ) A condição $r \cap s = \emptyset$ é necessário para que as retas r e s sejam paralelas distintas.

( ) Duas retas que formam um ângulo reto são necessariamente perpendiculares.

( ) Se duas retas têm um único ponto em comum, então elas são concorrentes.

( ) A condição $r \cap s = \emptyset$ é suficiente para que as retas r e s sejam reversas.

A sequência correta é:

a) $V - V - V - V$

b) $V - F - V - F$

c) $F - V - F - V$

d) $F - F - F - F$

Comentários

(V) A condição $r \cap s = \emptyset$ é necessária para que as retas r e s sejam paralelas distintas.

A condição $r \cap s = \emptyset$ só é cumprida se não existirem pontos em comum entre duas retas, se houver pontos em comum, as retas serão necessariamente concorrentes ou coincidentes, portanto, não se pode ter pontos em comum em retas paralelas distintas.

(F) Duas retas que formam um ângulo reto são necessariamente perpendiculares.

As retas podem não se coincidir e ainda formarem entre si um ângulo reto, ou elas também podem ser retas reversas.

(V) Se duas retas têm um único ponto em comum, então elas são concorrentes.

Trata-se da definição de concorrência.

(F) A condição $r \cap s = \emptyset$ é suficiente para que as retas r e s sejam reversas.

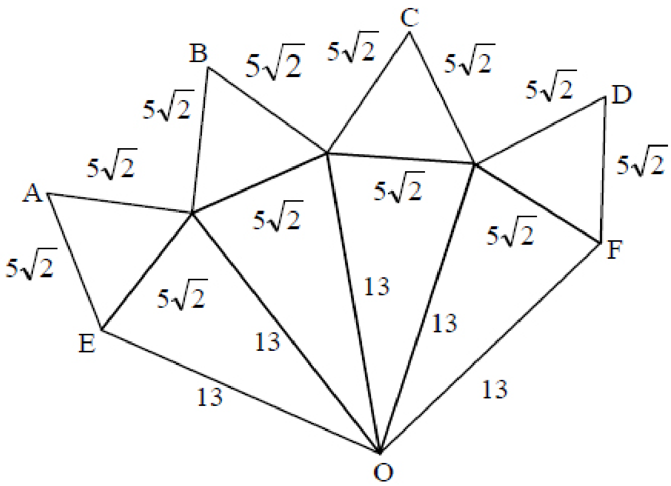
Elas podem ser paralelas não coincidentes, assim a condição é satisfeita sem elas serem reversas.

Gabarito: "b".

---

76. (EEAR/2002)

A figura abaixo é a planificação de um poliedro convexo $(A \equiv B \equiv C \equiv D ; E \equiv F)$.



O volume desse poliedro, em unidades de volume, é

a) $\frac{425}{2}$

b) $\frac{425}{3}$

c) $\frac{850}{3}$

d) $\frac{850}{2}$

Comentários

Pela figura do enunciado, temos que o solido é uma bipirâmide de base quadrangular de lado igual a $l = 5\sqrt{2}$

Aplicando Pitágoras nas arestas laterais da pirâmide, na diagonal da base e na altura, obtemos:

Na pirâmide de aresta de $13\ cm$:

$$a^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2$$
$$13^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 + h^2$$
$$13^2 - 5^2 = h^2$$
$$h^2 = 144$$
$$h = 12$$

Na pirâmide de aresta de $5\sqrt{2}\ cm$:

$$a^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2$$
$$\left(5\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 + h^2$$
$$\left(5\sqrt{2}\right)^2 - 5^2 = h^2$$
$$h^2 = 25$$
$$h = 5$$

Sabemos que o volume de uma bipirâmide é dado pela equação:

$$V = \frac{A_b \cdot (h_1 + h_2)}{3}$$

$$V = \frac{\left(5\sqrt{2}\right)^2 \cdot (12 + 5)}{3}$$

$$V = \frac{50 \cdot 17}{3} = \frac{850}{3}$$

Gabarito: “c”.

77. (EEAR/2001)

As bases de uma pirâmide hexagonal regular e de um prisma quadrangular regular acham-se inscritas num mesmo círculo. Sendo H a altura da pirâmide e sabendo-se que os dois poliedros são equivalentes, então a altura do prisma é:

a) $\frac{H\sqrt{3}}{4}$

b) $\frac{3H\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{H\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{H\sqrt{3}}{3}$

Comentários

Primeiramente, encontra-se a área da base do prisma quadrangular regular, sabemos que a base do prisma está inscrita numa circunferência de raio R, logo:

$$A_p = \frac{(2R)^2}{2} = 2R^2$$

Agora descobrir a área da base do hexágono que forma a pirâmide hexagonal, também inscrito numa circunferência de raio R:

$$A_h = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot l^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot R^2$$

Se os sólidos são equivalentes, seus volumes são iguais, logo:

$$V_p = V_h$$

$$A_p \cdot h_p = \frac{A_h \cdot h_h}{3}$$

$$2R^2 \cdot h_p = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} R^2 \cdot H}{3}$$

$$h_p = \frac{\sqrt{3}}{4} H$$

Gabarito: “a”.

---

78. (EEAR/2001)

A altura de uma pirâmide quadrangular regular é igual à aresta de sua base. Sendo B a área da base da pirâmide, então sua área lateral, em cm^2, é:

a) $B\sqrt{5}$

b) $\frac{B\sqrt{5}}{3}$

c) $B\sqrt{3}$

d) $\sqrt{5}B$

Comentários

Como se trata de uma base quadrangular, sabemos que o apótema da base é $a_b = \frac{l}{2}$, assim, por Pitágoras entre a altura da pirâmide e o apótema da base, descobrimos a altura do triângulo lateral:

$$h^2 = a_b^2 + l^2$$
$$h^2 = \frac{5}{4}l^2$$

$$h = \frac{\sqrt{5}}{2}l$$

Como a base da pirâmide é quadrada, temos que a área da base é:

$$A_b = B = l^2$$
$$l^2 = B$$

Temos que a área lateral da pirâmide é a soma das áreas dos quatro triângulos laterais, logo

$$A_l = 4 \cdot \frac{l \cdot h}{2}$$

$$A_l = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} l^2$$
$$A_l = \sqrt{5}B$$

Gabarito: “a”.

---

79. (EEAR/2001)

A base de um prisma quadrangular regular está inscrita numa circunferência cujo círculo tem $100\pi cm^2$ de área. Se a altura do prisma mede $1,5cm$, então o volume desse prisma, em cm^3, é de:

a) 200

b) 300

c) 400

d) 800

Comentários

Com a área do círculo inscrito à base, é possível achar o raio desse círculo:

$$100\pi = \pi r^2$$
$$r^2 = 100$$
$$r = 10\ cm$$

Sabendo que a base é um quadrado inscrito na circunferência, temos que a área da base é

$$A_b = 2r^2 = 2 \cdot 100 = 200$$

Como a altura do prisma é 1,5, temos que o volume do prisma é:

$$V = 200 \cdot 1{,}5 = 300$$

Gabarito: “b”.

---

80. (EEAR/2001)

Assinale a afirmativa VERDADEIRA:

a) Dois planos paralelos a uma reta são paralelos entre si.

b) Dois planos perpendiculares a uma reta são perpendiculares entre si.

c) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas entre si.

d) Duas retas paralelas a um plano são paralelas entre si

Comentários

a) (F) Os planos podem ser concorrentes e concomitantemente serem dois a dois paralelos a uma reta

b) (F) Dois planos perpendiculares a uma reta são paralelos entre si.

c) (V) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas entre si.

d) (F) Duas retas paralelas a um plano ainda podem ser concorrentes uma com a outra.

Gabarito: “c”.

---

81. (EEAR/2000)

Seja P_1 uma pirâmide quadrangular regular. Cortamos P_1 por um plano paralelo à base e que dista da base a metade da altura de P_1. Sejam P_2 a pirâmide menor resultante desse corte, V_1 o volume de P_1e V_2 o volume de P_2. Então:

a) não dá para comparar V1 e V2

b) $\frac{V_1}{9} < V_2 < \frac{V_1}{8}$

c) $\frac{V_1}{8} < V_2 < \frac{V_1}{7}$

d) $V_1 = 8V_2$

Comentários

Cortando a pirâmide P_1 na metade, formamos uma outra pirâmide menor P_2 e um tronco de pirâmide. Como o corte foi feito paralelo à base, as pirâmides são semelhantes.

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{h}{\frac{h}{2}}\right)^3$$
$$V_1 = 2^3 \cdot V_2$$
$$V_1 = 8V_2$$

Gabarito: "d".

82. (ESA/2015)

A palavra "icosaedro", de origem grega, significa "20 faces". Sabendo que o icosaedro regular é formado por 20 triângulos regulares, determine o número de vértices.

a) 12

b) 42

c) 52

d) 8

e)48

Comentários

Sabemos que cada triângulo tem 3 arestas, quando todos eles são ligados entre si todos os vértices se sobrepõem dois a dois, logo o número total de arestas cai pela metade e, portanto, temos que o número de arestas de um icosaedro é:

$$A = \frac{3 \cdot 20}{2} = 30$$

Pela relação de Euler, temos:

$$V - A + F = 2$$
$$V = 2 - F + A$$
$$V = 2 - 20 + 30$$
$$V = 12$$

Gabarito: "a".

83. (ESA/2013)

O volume de um tronco de pirâmide de $4dm$ de altura e cujas áreas das bases são iguais a $36\ dm^2$ e $144\ dm^2$ vale:

a) $330cm^3$

b) $720dm^3$

c) $330dm^3$

d) $360m^3$

e) $336dm^3$

Comentários

Sabemos que o volume de um tronco de pirâmide regular é dado pela seguinte equação:

$$V = \frac{\left(A_b + A_B + \sqrt{A_b \cdot A_B}\right) \cdot h}{3}$$

Em que A_b é a área da menor base e A_B é a área da maior base, portanto, temos:

$$V = \frac{\left(36 + 144 + \sqrt{36 \cdot 144}\right) \cdot 4}{3}$$

$$V = \frac{(180 + 72) \cdot 4}{3}$$

$$V = 84 \cdot 4 = 336\ dm^3$$

Gabarito: "e".

---

84. (ESA/2009)

A altura de um prisma hexagonal regular é de 5m. Sabe-se também que sua área lateral é o dobro da área de sua base. O volume desse prisma, em m^3, é:

a) $270\sqrt{3}$

b) $220\sqrt{3}$

c) $200\sqrt{3}$

d) $285\sqrt{3}$

e) $250\sqrt{3}$

Comentários

Vamos considerar que o lado da base hexagonal seja l. As faces laterais do prisma são todas retangulares e são 6. Portanto, sua área lateral é, considerando que a altura é 5:

$$A_l = 6 \cdot l \cdot 5 = 30l$$

Agora, a área da base desse prisma é igual à área de um hexágono regular de lado l. Sabemos que a área de um hexágono é 6 vezes a área de um triangulo equilátero de lado l:

$$A_{base} = 6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$$

A área lateral é o dobro da área da base. Portanto:

$$30l = 2 \cdot \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 30l = 3l^2\sqrt{3} \Rightarrow \div\, 3l$$

$$\Rightarrow 10 = l\sqrt{3} \Rightarrow l = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

Portanto, elevando ao quadrado:

$$l^2 = \frac{100}{3} \Rightarrow 3l^2 = 100$$

Assim, podemos calcular o volume do prisma:

$$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} \cdot 5 = 250\sqrt{3}$$

Gabarito: "e".

---

85. (ESA/2008)

A pirâmide de Quéops, em Gizé, no Egito, tem aproximadamente $90\sqrt{2}\ metros$ de altura, possui uma base quadrada e suas faces laterais são triângulos equiláteros. Nessas condições, pode-se afirmar que, em metros, cada uma de suas arestas mede:

a) 90

b) 120

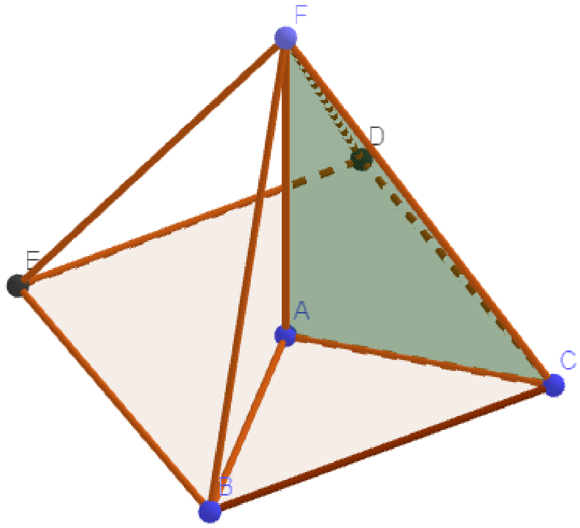
c) 160

d) 180

e) 200

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte imagem:



No triângulo ΔACD temos a seguinte relação por Pitágoras:

$$l^2 = \left(l\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + h^2$$
$$l^2 - \frac{l^2}{2} = h^2$$
$$l^2 = 2h^2$$
$$l = \sqrt{2} \cdot 90\sqrt{2}$$
$$l = 180\ m$$

Gabarito: “d”.

---

86. (EsPCEx/2017)

Considere dois planos α e β perpendiculares e três retas distintas r, s e t tais que r ⍰ α, s ⍰ β e t = α ⍰ β. Sobre essas retas e os planos é correto afirmar que

a) as retas r e s somente definirão um plano se forem concorrentes com t em um único ponto.

b) as retas r e s podem definir um plano paralelo à reta t.

c) as retas r e s são necessariamente concorrentes.

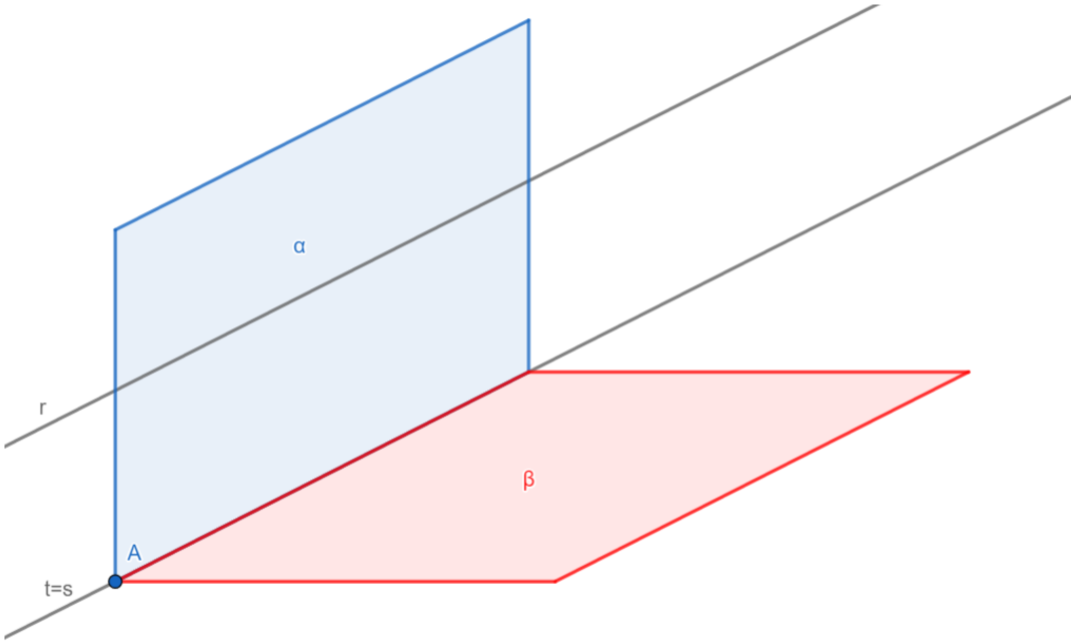
d) se r e s forem paralelas, então elas definem um plano perpendicular a α e β.

e) o plano definido por r e t é necessariamente paralelo a s.

Comentários

Sendo $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ planos perpendiculares entre sí, a intersecção entre eles é formada por uma única reta. Logo $\boldsymbol{t}$ está na intersecção dos planos $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$

a) FALSO. Seja $\boldsymbol{r}$ paralelo à $\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{s}$ coincidente com $\boldsymbol{t}$, podemos formar um plano coincidente com o plano $\boldsymbol{\alpha}$ tal que $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ não são coincidentes com $\boldsymbol{t}$ em um único ponto.

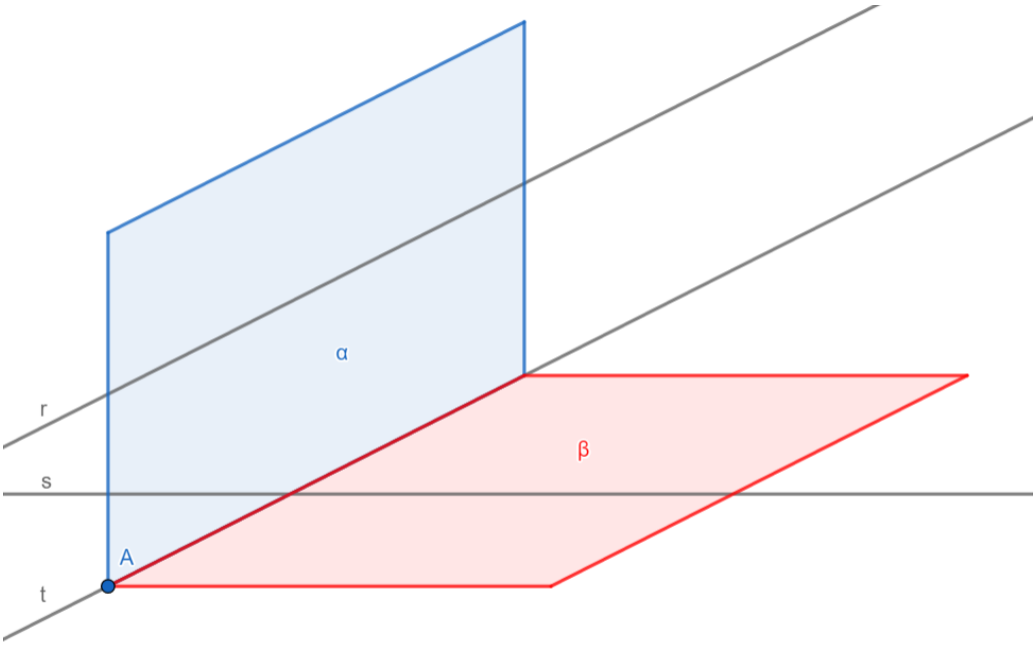


b) VERDADEIRO. Nas condições propostas acima, podemos formar um plano coincidente com $\boldsymbol{\alpha}$, o plano $\boldsymbol{\alpha}$ é paralelo a reta t (Se um plano contém uma reta, o dito plano é paralelo à reta).

c) Falso. Nas condições propostas na resposta do item a) conclui-se que $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ são paralelos por construção.

d) FALSO. Nas condições do problema e pensando no espaço do $\mathbb{R}^3$, um plano perpendicular $\boldsymbol{\alpha}$ é necessariamente paralelo a $\boldsymbol{\beta}$

e) FALSO. Sendo $\boldsymbol{r}$ perpendicular a $\boldsymbol{t}$ o plano definido será coincidente com o plano $\boldsymbol{\alpha}$, se a reta $\boldsymbol{s}$ for perpendicular a $\boldsymbol{t}$, então ela será perpendicular a $\boldsymbol{\alpha}$



Gabarito: “b”.

87. (EsPCEx/2016)

Determine o volume (em cm^3) de uma pirâmide retangular de altura a e lados da base b e c (a, b e c em centímetros), sabendo que $a + b + c = 36$ e a, b e c são, respectivamente, números diretamente proporcionais a 6, 4 e 2.

a) 16

b) 36

c) 108

d) 432

e) 648

Comentários

Como a, b e c são proporcionais a $6, 4$ e 2. Façamos k a razão de proporção. Então,

$$\begin{cases} a = 6k \\ b = 4k \\ c = 2k \end{cases} \Rightarrow \quad a + b + c = 6k + 4k + 2k = 12k = 36 \Rightarrow \quad k = 3$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a = 6 \cdot 3 = 18 \\ b = 4 \cdot 3 = 12 \\ c = 2 \cdot 3 = 6 \end{cases}$$

Então o volume da pirâmide é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (b \cdot c) \cdot (a) = \frac{1}{3} \cdot (12 \cdot 6) \cdot 18 = 432$$

$$V = 432\ cm^3$$

Gabarito: “d”.

88. (EsPCEx/2015)

As medidas das arestas de um paralelepípedo retângulo são diretamente proporcionais a $3, 4$ e 5 e a soma dessas medidas é igual a $48\ cm$. Então a medida da sua área total, em cm^2, é

a) 752

b) 820

c) 1024

d) 1302

e) 1504

Comentários

No Sejam a, b e c as medidas das arestas do paralelepípedo. Como a, b e c são proporcionais a $3, 4$ e 5. Façamos k a razão de proporção. Então,

$$\begin{cases} a = 3k \\ b = 4k \\ c = 5k \end{cases} \Rightarrow \quad a + b + c = 3k + 4k + 5k = 12k = 48 \Rightarrow \quad k = 4$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a = 3 \cdot 4 = 12 \\ b = 4 \cdot 4 = 16 \\ c = 5 \cdot 4 = 20 \end{cases}$$

Então a área superficial do paralelepípedo é dada por:

$$S_{sup} = 2ab + 2ac + 2bc = 2 \cdot 12 \cdot 16 + 2 \cdot 12 \cdot 20 + 2 \cdot 16 \cdot 20 = 384 + 480 + 640 = 1504$$

$$S_{sup} = 1504\ cm^2$$

Gabarito: "e".

---

89. (EsPCEx/2013)

Considere um prisma regular reto de base hexagonal tal que a razão entre a aresta da base e a aresta lateral é $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Aumentando-se a aresta da base em 2 cm e mantendo-se a aresta lateral, o volume do prisma ficará aumentado de $108\ cm^3$. O volume do prisma original é

a) $18\ cm^3$

b) $36\ cm^3$

c) $18\sqrt{3}\ cm^3$

d) $36\sqrt{3}\ cm^3$

e) $40\ cm^3$

Comentários

Lembrete: área do hexágono regular de lado l: $A = \frac{3\sqrt{3}l^2}{2}$

Logo o volume do prisma é dado por:

$$V = B \cdot h = \left(\frac{3\sqrt{3}l^2}{2}\right) \cdot h$$

Segundo o enunciado, $\Delta V = 108$

$$\Delta V = V_f - V_i = (A_f) \cdot h - (A_i) \cdot h =$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{3}(l+2)^2}{2}\right) \cdot h - \left(\frac{3\sqrt{3}l^2}{2}\right) \cdot h = \frac{3\sqrt{3}}{2} h \cdot ((l+2)^2 - l^2)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} h \cdot (l^2 + 4l + 4 - l^2) = 6\sqrt{3}h \cdot (l+1)$$

Mas segundo o enunciado: $\frac{l}{h} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow h = l\sqrt{3}$, então

$$6\sqrt{3}(l\sqrt{3}) \cdot (l+1) = 18l^2 + 18l = 108$$

$$l^2 + l - 6 = (l-2)(l+3)$$

$l = -3$ $(não\ convém)$ ou $l = 2$

Sendo $l = 2\ cm$ temos que:

$$h = 2\sqrt{3}$$

Sendo assim:

$$V = \left(\frac{3\sqrt{3}l^2}{2}\right) \cdot h = \left(\frac{3\sqrt{3}(2)^2}{2}\right) \cdot (2\sqrt{3}) = 36$$

$$V = 36\ cm^3$$

Gabarito: "b".

---

90. (EsPCEx/2012)

Considere as seguintes afirmações:

I. Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então todas as retas de α são perpendiculares ou ortogonais a r;

II. Se a medida da projeção ortogonal de um segmento $\overline{AB}$ sobre um plano α é a metade da medida do segmento $\overline{AB}$, então a reta $\overrightarrow{AB}$ faz com α um ângulo de $60°$;

III. Dados dois planos paralelos α e β, se um terceiro plano γ intercepta α e β, as interseções entre esses planos serão retas reversas;

IV. Se α e β são dois planos secantes, todas as retas de α também interceptam β.

Estão corretas as afirmações

a) Apenas I e II

b) Apenas II e III

c) I, II e III

d) I, II e IV

e) II, III e IV

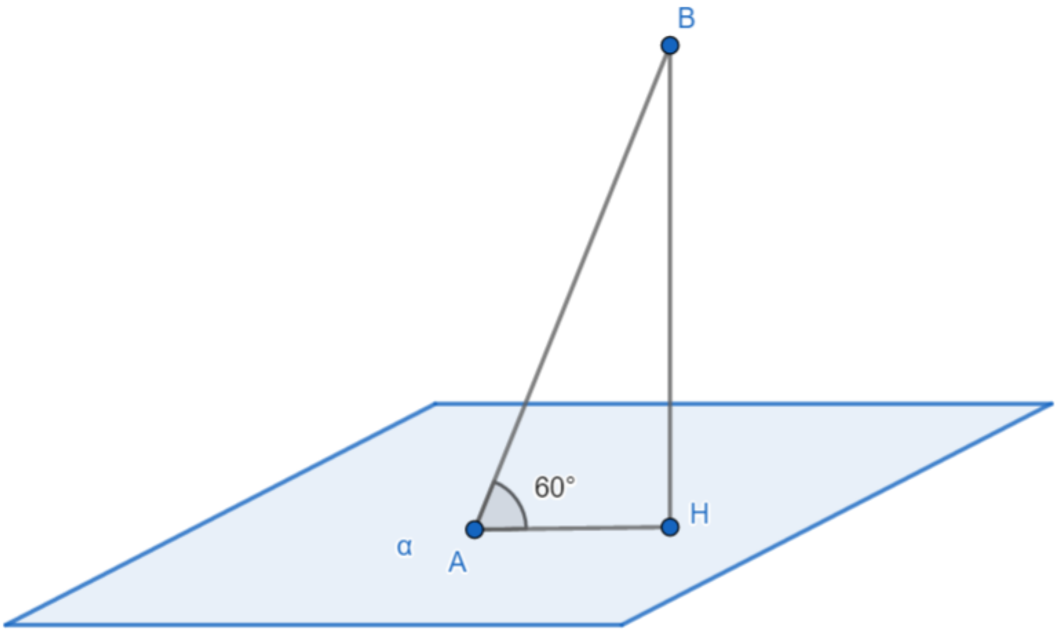
Comentários

I. VERDADEIRO.

Esta afirmação é verdadeira pela própria definição de reta perpendicular à plano. “Uma reta é perpendicular a um plano se, e somente se, esta reta é perpendicular ou ortogonal a todas as retas contidas no plano.”

II. VERDADEIRO.

Usemos o seguinte desenho para analisar

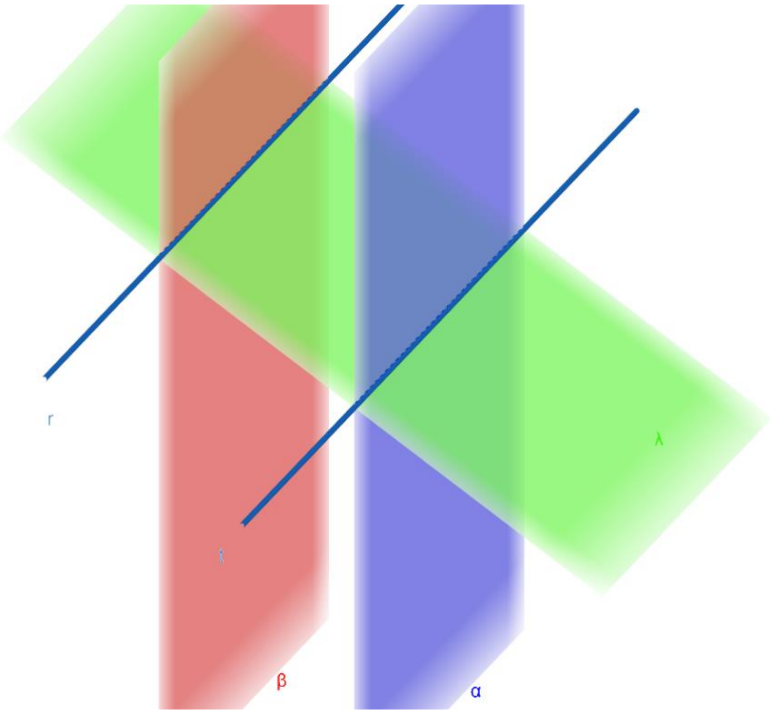


Se a medida da projeção ortogonal é metade da medida do segmento $\overline{AH} = \frac{AB}{2}$, sendo o ângulo $\hat{H} = 90°$, então o ângulo $\hat{B} = 30°$, sendo assim:

$$\hat{A} = 60°$$

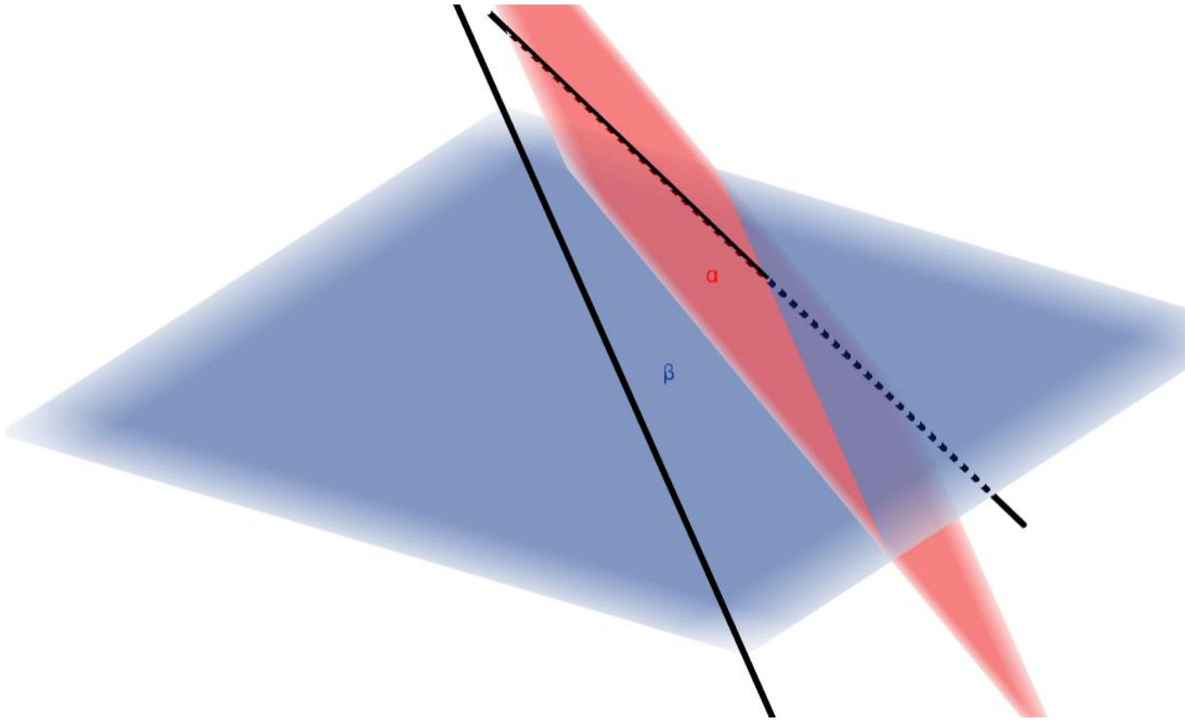
III. FALSO.

A figura abaixo ilustra a situação, note que as retas são paralelas.



IV. FALSO.

Perceba que podemos construir uma figura em que duas retas contidas em planos secantes nunca se tocam.

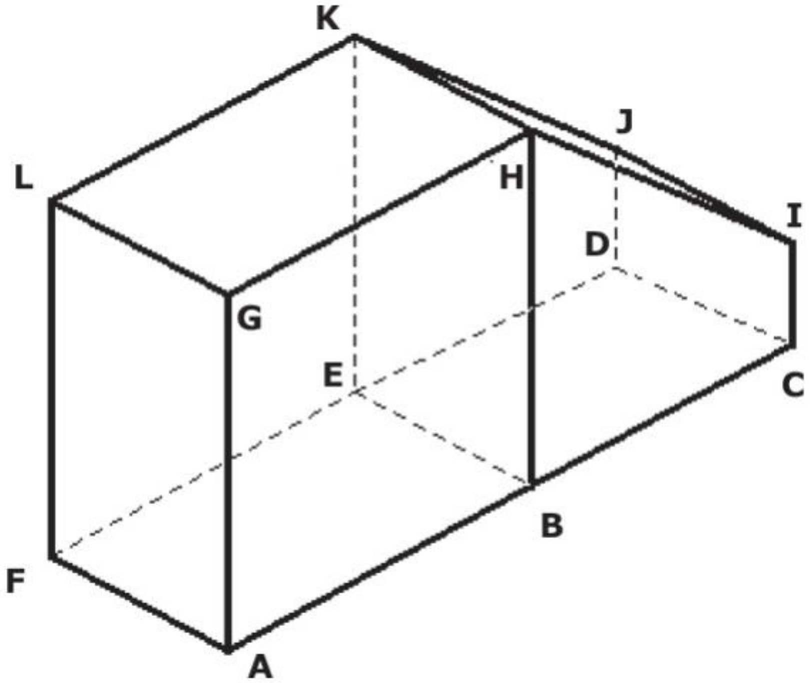


Gabarito: “a”.

---

91. (EsPCEx/2012)

O sólido geométrico abaixo é formado pela justaposição de um bloco retangular e um prisma reto, com uma face em comum. Na figura estão indicados os vértices, tanto do bloco quanto do prisma. Considere os seguintes pares de retas definidas por pontos dessa figura: as retas $\overline{LB}$ e $\overline{GE}$; as retas $\overline{AG}$ e $\overline{HI}$ e as retas $\overline{AD}$ e $\overline{GK}$. As posições relativas desses pares de retas são, respectivamente,



a) concorrentes; reversas; reversas.

b) reversas; reversas; paralelas.

c) concorrentes, reversas; paralelas.

d) reversas; concorrentes; reversas.

e) concorrentes; concorrentes; reversas.

Comentários

Perceba que as retas $\overline{LB}$ e $\overline{GE}$ são diagonais do bloco retangular, logo, elas são **concorrentes**.

Perceba que as retas $\overline{AG}$ e $\overline{HI}$ são **concorrentes**, pois, elas fazem parte do plano definido pela face ACG e não são paralelas, logo elas concorrem em um único ponto.

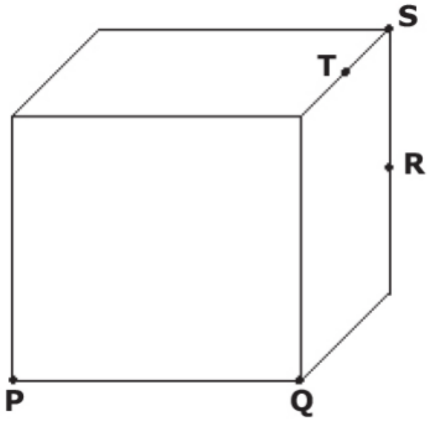
Perceba que as retas $\overline{AD}$ e $\overline{GK}$ são **reversas**, pois elas não são paralelas e não pertencem ao mesmo plano.

Gabarito: "e".

---

92. (EsPCEx/2011)

Na figura abaixo, está representado um cubo em que os pontos T e R são pontos médios de duas de suas arestas.



Sabe-se que a aresta desse cubo mede $2\ cm$. Assim, o volume do sólido geométrico definido pelos pontos $PQRST$, em cm^3, é

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{4}{3}$

c) $\frac{5}{3}$

d) $\frac{16}{3}$

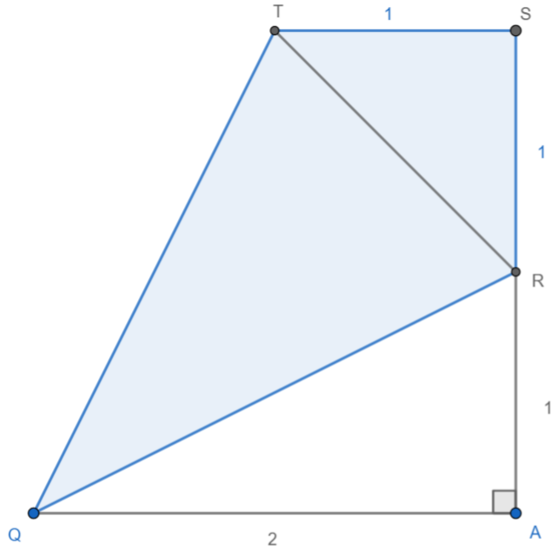
e) $\frac{32}{3}$

Comentários

Considere que o sólido é uma pirâmide de base $QRST$, iremos calcular o volume do sólido partindo da área do quadrilátero $QRST$ e da altura até o ponto P.

Veja que $h = 2\ cm$, pois o lado PQ do cubo já representa a projeção do ponto P sobre o plano da base.

Calculemos agora a área da base:



Por Pitágoras, conclui-se que $TR = \sqrt{2}\,cm$ e $QR = \sqrt{5}\,cm$, perceba que o triângulo QRT é isósceles, sendo assim, podemos concluir que a medida da altura deste é

$$h = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Sendo assim a área do triângulo QRT é

$$S_{QRT} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{3}{2}\ cm^2$$

O triângulo RST é isósceles retângulo e tem área dada por:

$$S_{RST} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}\ cm^2$$

Sendo assim:

$$S_{QRST} = S_{QRT} + S_{RST} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2\ cm^2$$

Por fim, o volume da pirâmide pode ser calculado:

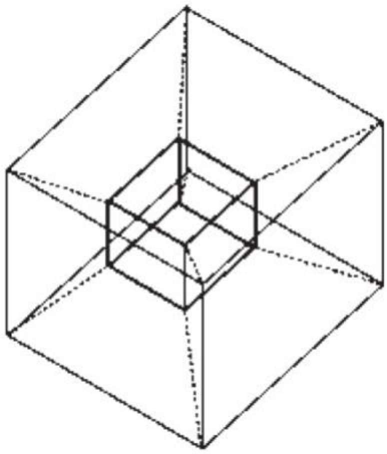
$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{4}{2}\ cm^3$$

Gabarito: “b”.

---

93. (EsPCEx/2011)

A figura espacial representada abaixo, construída com hastes de plástico, é formada por dois cubos em que, cada vértice do cubo maior é unido a um vértice correspondente do cubo menor por uma aresta e todas as arestas desse tipo têm a mesma medida.



Se as arestas dos cubos maior e menor medem, respectivamente, $8\ cm$ e $4\ cm$, a medida de cada uma das arestas que ligam os dois cubos é

a) $6\sqrt{2}\ cm$

b) $3\sqrt{2}\ cm$

c) $2\sqrt{3}\ cm$

d) $4\sqrt{3}\ cm$

e) $6\sqrt{3}\ cm$

Comentários

Perceba primeiramente a simetria da construção. Ambos os cubos possuem o mesmo centro geométrico, sendo assim, a soma da medida das arestas com a diagonal do cubo menor, é igual a medida da diagonal do cubo maior, ou seja:

$$D = 2a + d$$

Sendo $D = 8\sqrt{3}\ cm$ e $d = 4\sqrt{3}\ cm$. Logo:

$$8\sqrt{3} = 2a + 4\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad a = 2\sqrt{3}\ cm$$

Gabarito: "c".

---

94. (EsPCEx/2011)

Considere as seguintes afirmações:

I. Se dois planos α e β são paralelos distintos, então as retas $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \beta$ são sempre paralelas.

II. Se α e β são planos não paralelos distintos, existem as retas $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \beta$ tal que r_1 e r_2 são paralelas.

III. Se uma reta r é perpendicular a um plano α no ponto P, então qualquer reta de α que passa por P é perpendicular a r.

Dentre as afirmações acima, é (são) verdadeira(s)

a) Somente II

b) I e II

c) I e III

d) II e III

e) I, II e III

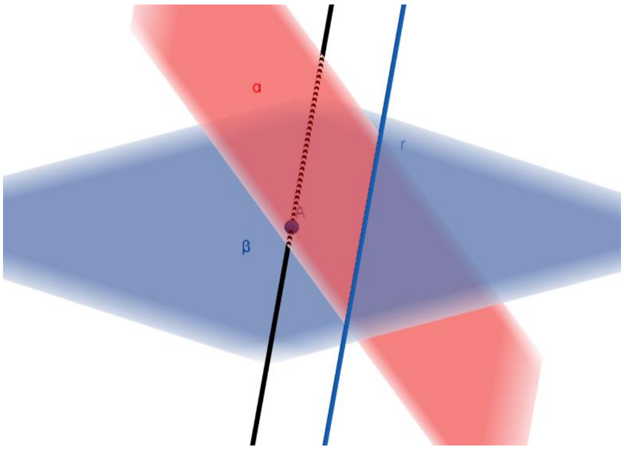
Comentários

I. FALSO.

Elas podem ser reversas.

II. VERDADEIRO.

Podemos construir da seguinte forma, tome a reta r_1 como a intersecção entre os planos, e faça a reta r_2 como uma reta pertencente ao plano β e paralela à r_1



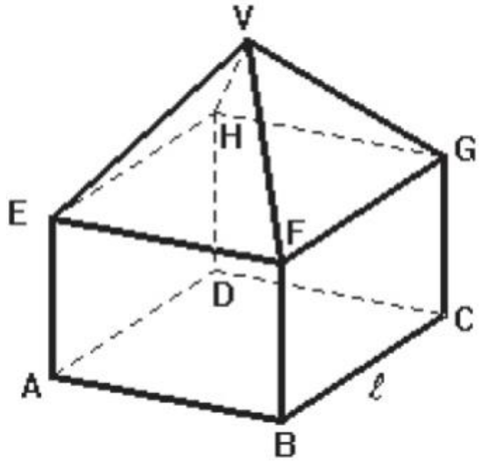
III. VERDADEIRO.

Decorre diretamente da própria definição de reta perpendicular ao plano.

Gabarito: “d”.

95. (EsPCEx/2010)

Na figura abaixo, está representado um sólido geométrico de 9 faces, obtido a partir de um cubo e uma pirâmide.



Sabendo que todas as arestas desse sólido têm medida l, então as medidas da altura (distância do ponto V à face $ABCD$) e da superfície total desse sólido são, respectivamente,

a) $l\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)$ e $l^2\left(\sqrt{3}+4\right)$

b) $l\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)$ e $l^2\left(\sqrt{3}+5\right)$

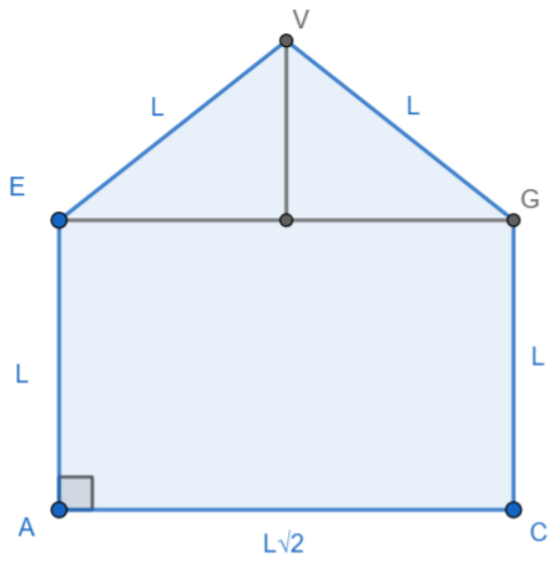
c) $l\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)$ e $l^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+5\right)$

d) $l\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $l^2\left(\sqrt{3}+5\right)$

e) $l\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $l^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+4\right)$

Comentários

Fazendo a seção do sólido pelo plano $ACGVE$, obtemos:



Calculando a altura do triângulo GVE por Pitágoras, obtemos:

$$h = \sqrt{(L)^2 - \left(\frac{L\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{L\sqrt{2}}{2}$$

Sendo assim a altura total do sólido é:

$$h_{sol} = L + \frac{L\sqrt{2}}{2} = L\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}$$

A área lateral total é a área de 5 quadrados e 4 triângulos equiláteros de lado L

$$S_l = 5S_Q + 4S_T = 5 \cdot (L^2) + 4 \cdot \left(L^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = L^2(5+\sqrt{3})$$

Resposta:

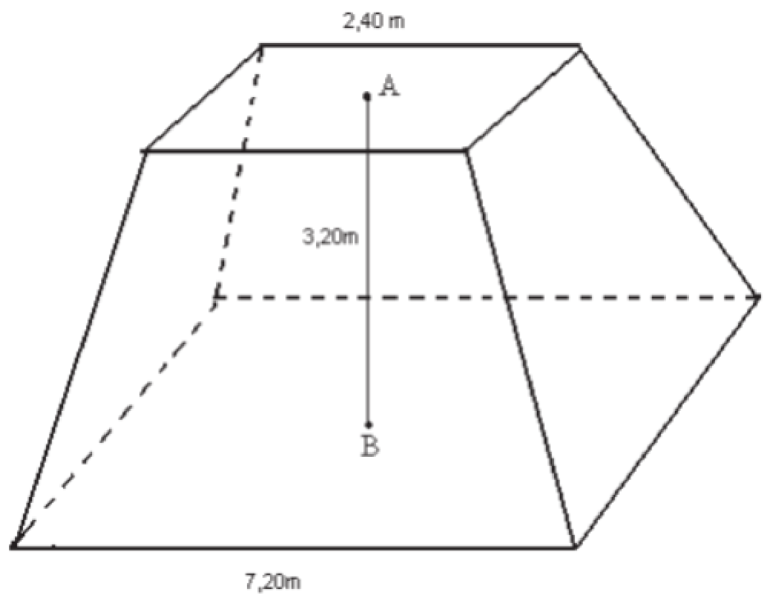
$$L\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)}{2} \ e \ L^2(5+\sqrt{3})$$

Gabarito: "b".

---

96. (EsPCEx/2009)

Um reservatório em forma de tronco de pirâmide regular de base quadrada e dimensões indicadas na figura deverá ter suas paredes laterais externas cobertas por uma tinta impermeável, cujo rendimento é de $11\ m^2$ por galão.



Desenho fora de escala

Os pontos A e B representam os centros das bases do tronco de pirâmide

O número mínimo de galões que devem ser adquiridos para tal operação é:

a) 6

b) 7

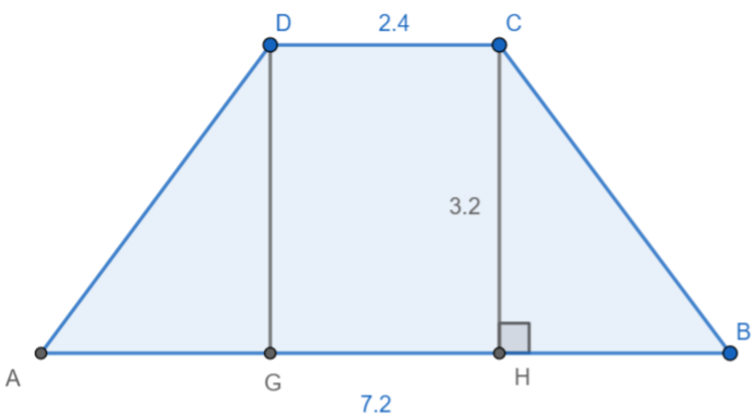
c) 9

d) 10

e) 11

Comentários

Precisamos primeiramente obter a área lateral do tronco de pirâmide. Para isso devemos descobrir a medida da altura da face lateral. Observe a seção meridiana do tronco:



Devido a simetria da figura obtemos que $HB = \frac{7,2-2,4}{2} = 2,4\ m$

Aplicando Pitágoras no triângulo BCH obtemos que $BC = \sqrt{(3,2)^2 + (2,4)^2} = 4\ m$

Sendo assim podemos agora obter a área lateral do tronco. Sendo a lateral do tronco composta por 4 faces laterais trapezoidais, obtemos:

$$S = 4 \cdot S_t = 4 \cdot \frac{B+b}{2} \cdot h = 4 \cdot \frac{(7,2+2,4)}{2} \cdot 4 = 76,8\ m^2$$

Sendo o rendimento da tinta de $11\ m^2$ por galão, precisaremos de

$$\frac{76,8}{11} \approx 7\ galões$$

Gabarito: "b".

---

97. (EsPCEx/2009)

Considere duas retas r e s no espaço e quatro pontos distintos, A, B, C e D, de modo que os pontos A e B pertencem à reta r e os pontos C e D pertencem à reta s.

Dentre as afirmações abaixo

I. Se as retas $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ são concorrentes, então r e s são necessariamente concorrentes.

II. Os triângulos ABC e ABD serão sempre coplanares.

III. Se $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ forem concorrentes, então as retas r e s são coplanares.

Pode-se concluir que

a) somente a I é verdadeira.

b) somente a II é verdadeira.

c) somente a III é verdadeira.

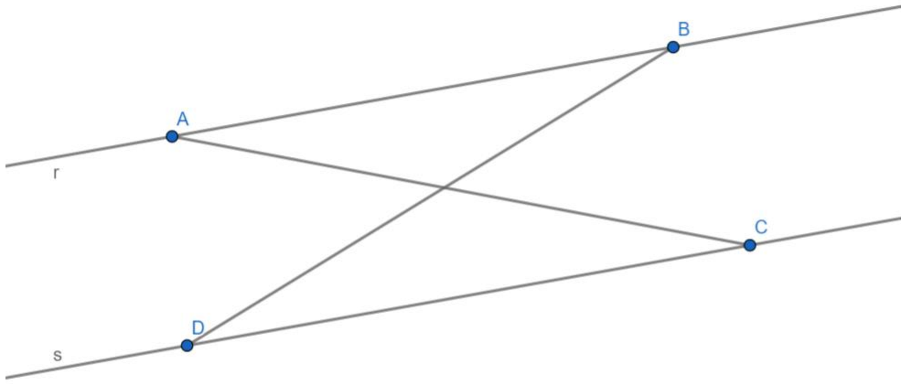
d) as afirmações II e III são verdadeiras.

e) as afirmações I e III são verdadeiras.

Comentários

I. Falso.

Conseguimos fazer as retas r e s paralelas e os dados segmentos concorrentes



II. Falso.

Se as retas r e s forem reversas, então teremos ABC e ABD em planos distintos, logo, esta afirmação é falsa.

III. Verdadeiro.

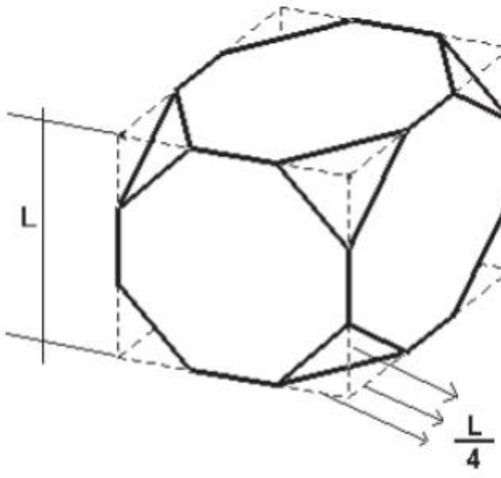
Sendo Se $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ concorrentes, é possível utilizar tais pontos para se montar um quadrilátero cujos os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ estão sobre as retas r e s, sendo os lados do quadrilátero $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ coplanares, então $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são complanares, logo por fim, as retas r e s são coplanares

Gabarito: "c".

---

98. (EsPCEx/2008)

Para obter o sólido geométrico representado abaixo, partiu-se de um cubo de aresta L e retirou-se de cada um dos vértices desse cubo uma pirâmide de base triangular com as arestas laterais medindo $\frac{L}{4}$, conforme a figura.



Desenho Fora de Escala

Denominando-se V o volume do cubo a partir do qual foi obtido o sólido, pode-se concluir que o volume desse sólido é

a) $\frac{23}{24}V$

b) $\frac{47}{48}V$

c) $\frac{71}{72}V$

d) $\frac{95}{96}V$

e) $\frac{143}{144}V$

Comentários

O volume do sólido é a diferença entre o volume do cubo e o volume de 8 pirâmides retas.

$$V_s = V - 8 \cdot V_p$$

Sendo as pirâmides retas de área da base $A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{L}{4}\right) \cdot \left(\frac{L}{4}\right) = \frac{L^2}{32}$, e altura $h = \frac{L}{4}$, portanto:

$$V_p = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{L^2}{32}\right) \cdot \left(\frac{L}{4}\right) = \frac{L^3}{384}$$

E o volume do cubo é dado por: $V = L^3$

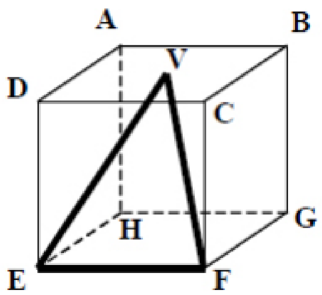
Logo:

$$V_s = L^3 - 8 \cdot \left(\frac{L^3}{384}\right) = \frac{47}{48}L^3 = \frac{47}{48}V$$

Gabarito: “b”.

99. (EsPCEx/2008)

Em um cubo de aresta medindo $4\ cm$, forma-se um triângulo VEF, conforme figura abaixo, em que V é o centro do quadrado $ABCD$. A área, em cm^2 , do triângulo VEF é igual a



a) $4\sqrt{5}$

b) $4\sqrt{6}$

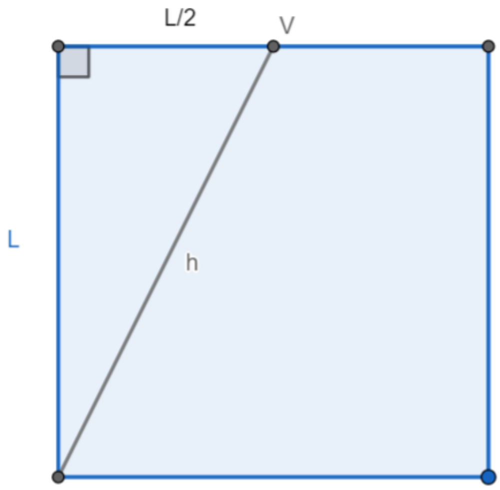
c) $5\sqrt{5}$

d) $5\sqrt{6}$

e) $6\sqrt{6}$

Comentários

Traçando-se a seção utilizando um plano passando por V e perpendicular ao lado $\overline{EF}$, obtemos:



Aplicando-se o teorema de Pitágoras, obtemos que

$$h = \sqrt{(L)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{L\sqrt{5}}{2}$$

Sendo assim a área do triângulo VEF vale:

$$S=\frac{1}{2}\cdot(L)\cdot\left(\frac{L\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{L^2\sqrt{5}}{4}=\frac{(4)^2\sqrt{5}}{4}=4\sqrt{5}$$

Gabarito: "a".

---

100. (EsPCEx/2006)

Dispondo de um recipiente em forma de paralelepípedo retângulo, com as dimensões da figura, preenchido com água até o nível indicado, um aluno fez o seguinte experimento:

- **mergulhou na água um cubo maciço, com $1\ cm^3$ de volume;**
- **mergulhou, sucessivamente, novos cubos, cada vez maiores, cujos volumes formam, a partir do cubo de $1\ cm^3$ de volume, uma progressão aritmética de razão $2\ cm^3$.**

Após mergulhar certo número de cubos, que ficaram completamente submersos, verificou que a altura do nível da água passou para $39\ cm$.

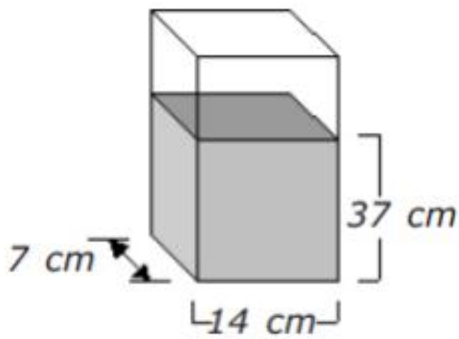


Figura fora de escala

Com base nessas informações, a área total do último cubo colocado é de

a) $54\ cm^2$

b) $42\ cm^2$

c) $24\ cm^2$

d) $150\ cm^2$

e) $216\ cm^2$

Comentários

Primeiramente temos que a soma S dos volumes dos cubos corresponde a variação do volume do recipiente. Sendo assim:

$$\Delta V=V_f-V_i=7\cdot 14\cdot 39-7\cdot 14\cdot 37=176\ cm^3=S$$

Logo a soma dos volumes de cubos em P.A vale 176 cm^3.

Sabemos que a soma dos n primeiros termos de uma P.A de razão r e termo inicial a é dada por:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(a_1 + (a_1 + (n-1)r))}{2} = \frac{n^2 r + n(2a - r)}{2}$$

$$176 = \frac{n^2(2) + n(2 \cdot 1 - 2)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 352 = 2n^2 \quad \therefore \; n = 14$$

Logo, $a_{14} = a_1 + (14-1)r = 1 + 13 \cdot 2 = 27\, cm^3 = l^3 \quad \therefore \quad l = 3\, cm,$ sendo $l - lado\ do\ ultimo\ cubo$

Logo, a área lateral do último cubo vale:

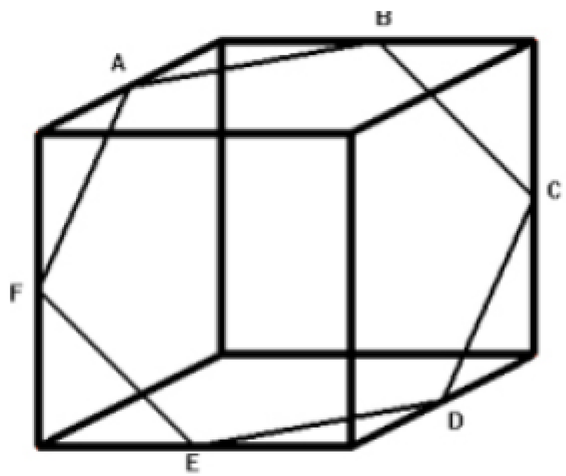
$$A = 6 \cdot l^2 = 6 \cdot (3)^2 = 54\, cm^2$$

Gabarito: "a".

---

101. (EsPCEx/2005)

O hexágono regular $ABCDEF$ é uma secção plana de um cubo de aresta $2a\sqrt{3}$. Cada vértice do polígono divide ao meio a aresta na qual está apoiado.



A área do hexágono é

a) $9a^2\sqrt{3}$

b) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$

d) $4a^2\sqrt{3}$

e) $\frac{5a^2\sqrt{3}}{4}$

Comentários

Observe as faces que contém as arestas do hexágono. Aplicando Pitágoras para descobrir a medida da aresta, descobrimos que:

$$l = \sqrt{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = a\sqrt{6}$$

A área do hexágono regular é dada por:

$$S = \frac{l^2 3\sqrt{3}}{2}$$

Sendo assim, a área obtida é:

$$S = \frac{(a\sqrt{6})^2 3\sqrt{3}}{2} = 9a^2\sqrt{3}$$

Gabarito: "a".

---

102. (EsPCEx/2004)

Um prisma reto com $5\ cm$ de altura e base retangular com dimensões de $4\ cm$ e $6\ cm$ contém água até uma altura de $3\ cm$. Um cubo maciço de aresta igual a $2\ cm$ é colocado dentro deste prisma, ficando totalmente submerso. A partir de então, a altura do nível da água, em cm, passa a ser de:

a) $\frac{13}{4}$

b) $\frac{10}{3}$

c) $\frac{15}{4}$

d) $\frac{13}{3}$

e) $\frac{14}{4}$

Comentários

O aumento do volume do líquido corresponde ao volume do sólido inserido, sendo assim:

$$\Delta V = V_f - V_i = 4 \cdot 6 \cdot h - 4 \cdot 6 \cdot 3 = 24 \cdot (h - 3)\ cm^3$$

O volume do sólido é $V_{cubo} = 2^3 = 8\ cm^3$

Sendo assim:

$$\Delta V = V_{cubo} \quad \Rightarrow \quad 24 \cdot (h-3) = 8 \quad \therefore \quad h = \frac{8}{24} + 3 = \frac{10}{3}$$

Como $\frac{10}{3} < 5$ a água não transborda e esta resposta é valida.

Gabarito: "b".

---

103. (EsPCEx/2002)

Pedro construiu um aquário em forma cúbica. Enquanto o enchia, notou que, colocando 64 litros de água, o nível subia $10\ cm$. O volume máximo, em litros, que comporta esse aquário é de:

a) 216

b) 343

c) 512

d) 729

e) 1024

Comentários

Primeiramente, vamos trabalhar com cm^3. Logo: $64\ l = 64\ 000\ cm^3$

O aquário é cúbico, logo, possui arestas medindo l. Sendo assim, temos que:

$$V_{ini} = l \cdot l \cdot 10 = 10l^2 = 64000 \quad \Rightarrow \quad l = 80\ cm$$

Portanto o volume total do aquário é:

$$V = l^3 = (80)^3 = 512\ 000\ cm^3 = 512\ l$$

Gabarito: "c".

---

104. (EsPCEx/2002)

Considere as afirmações abaixo:

I- Se um plano encontra outros dois planos paralelos, então as intersecções são retas paralelas.

II- Uma reta perpendicular a uma reta de um plano e ortogonal a outra reta desse plano é perpendicular ao plano.

III- Se a intersecção de uma reta r com um plano é o ponto P, reta essa não perpendicular ao plano, então existe uma única reta s contida nesse plano que é perpendicular à reta r passando por P.

Pode-se afirmar que

a) todas são verdadeiras.

b) apenas I e II são verdadeiras.

c) apenas I e III são verdadeiras.

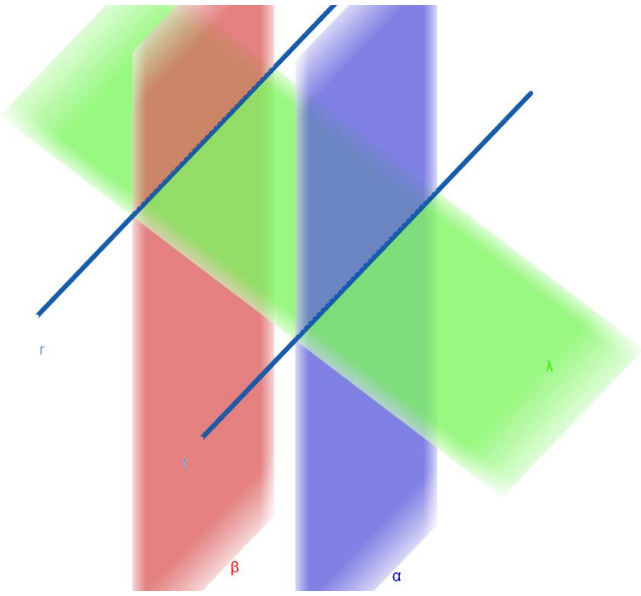
d) apenas II e III são verdadeiras.

e) todas são falsas.

Comentários

I. Verdadeiro.

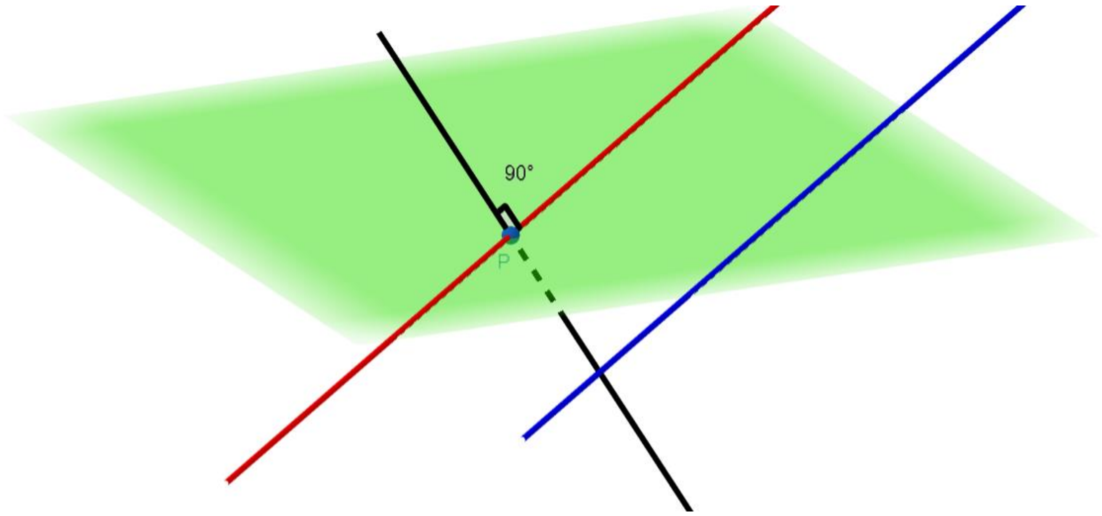
Observe a seguinte figura:



Perceba que as retas são de fato paralelas.

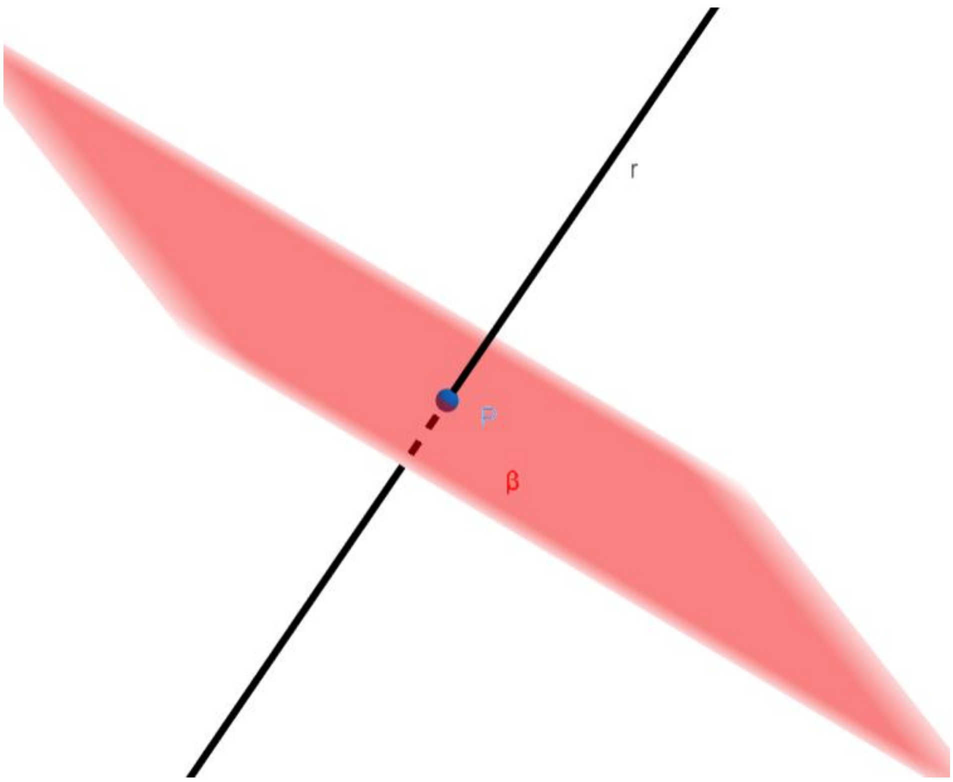
II. Falso.

Se as retas do plano forem paralelas, entre si o plano pode não ser perpendicular à reta que o corta.

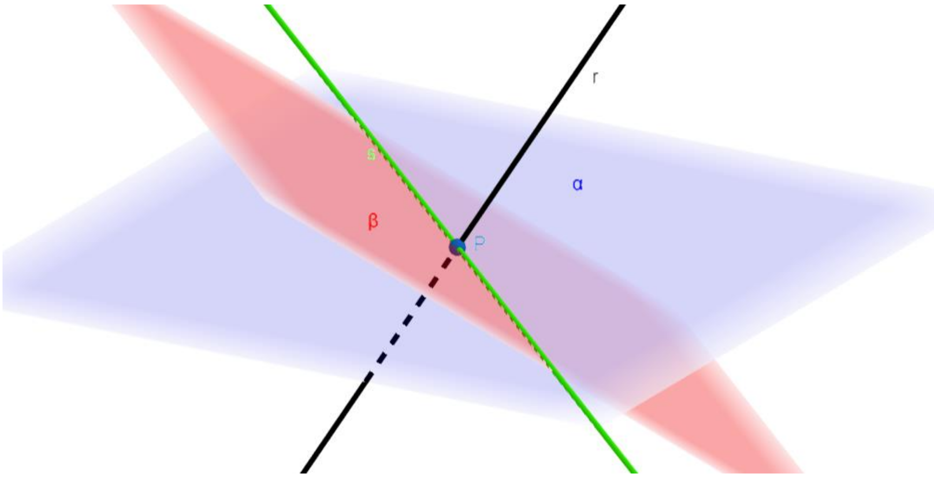


III. Verdadeiro.

O lugar geométrico dos pontos perpendiculares a uma reta sobre um ponto P é um plano perpendicular a esta reta. Conforme:



Devido ao fato do ponto P já pertencer a um dado plano α, o lugar geométrico da reta s perpendicular a reta r, é a intersecção entre os planos, conforme:



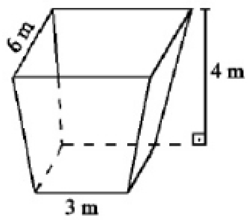
Portanto, existe uma única reta que satisfaz tal condição.

Gabarito: “c”.

---

105. (EsPCEx/2001)

Um reservatório com forma de tronco de pirâmide regular, representado pela figura abaixo, com bases quadradas e paralelas, está repleto de água. Deseja-se esvaziá-lo com o auxílio de uma bomba de sucção que retira água com uma vazão constante.



A vazão, em litros/segundo, que esta bomba deve ter para que o reservatório seja esvaziado exatamente em 1 hora e 40 minutos é:

a) $12\ l/s$

b) $18\ l/s$

c) $16\ l/s$

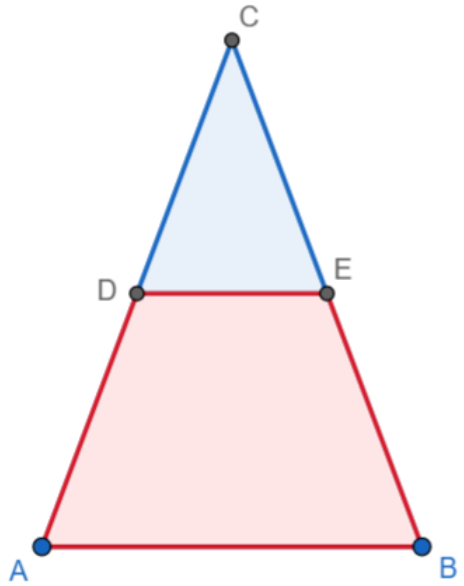
d) $14\ l/s$

e) $20\ l/s$

Comentários

Primeiramente, devemos calcular o volume do tronco.

Vamos considerar o tronco como a diferença de duas pirâmides. Sendo assim, observe a seção meridiana da pirâmide completa:



Sabemos que $\overline{DE} = 3\,m$ e $\overline{AB} = 6\,m$ e os triângulos ABC e CDE são semelhantes, então podemos estabelecer uma relação de altura entre os triângulos conforme:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{H}{h} \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{3} = 2 = \frac{H}{h} \quad \therefore \quad H = 2h$$

Mas da figura depreende-se que $H - h = 4\,m$

$$2h - h = h = 4\,cm \quad \Rightarrow \quad H = 8\,m$$

Agora calcularemos o volume do tronco como a diferença entre os volumes das pirâmides.

$$V_{tronco} = V - v = \frac{1}{3} \cdot (6)^2 \cdot 8 - \frac{1}{3} \cdot (3)^2 \cdot 4 = 84\,m^3$$

A vazão da bomba deve ser suficiente para esvaziar $84\,m^3 = 84\,000\,l$ em $1h40min = 6\,000\,s$

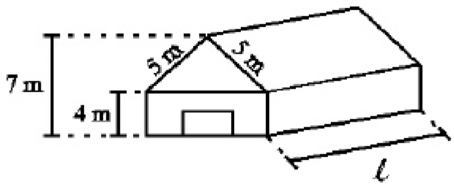
$$Z = \frac{84000}{6000} = 14\,l/s$$

Gabarito: "d".

---

106. (EsPCEx/2001)

Um galpão com as dimensões do desenho abaixo deverá ser construído para armazenar produtos que necessitam de controle de temperatura. Cada um dos condicionadores de ar disponíveis, que atendem às suas especificações, é capaz de climatizar um volume de até $220\,m^3$. Nessas condições, pode-se afirmar que o maior comprimento l que o galpão pode ter, em metros, para ser equipado com 3 (três) aparelhos de ar condicionado é:



(desprezar a espessura das paredes e considerar que o galpão é um prisma reto e não tem forro nem laje)

a) $13\ m$

b) $20\ m$

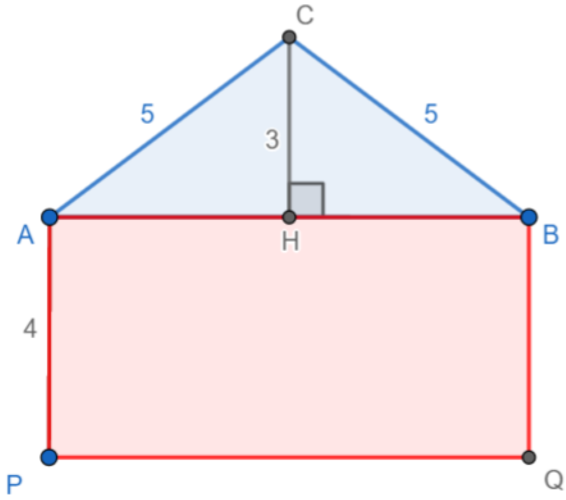
c) $5\ m$

d) $25\ m$

e) $15\ m$

Comentários

Perceba que o triângulo que forma o telhado possui $7 - 4 = 3\ m$ de altura, logo:



Aplicando Pitágoras no triângulo ACH descobrimos que $\overline{AH} = 4\ m$ e, portando $\overline{AB} = 8\ m$

A área do triângulo ABC é $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12\ m^2$

A área da parte retangular mede $S = 4 \cdot 8 = 32\ m^2$

Logo, a área da figura $S_{ACBQP} = 12 + 32 = 44\ m^2$

O volume do galpão é: $V = 44 \cdot l$

Sendo o volume máximo de cobertura de 3 aparelhos de $3 \cdot 220 = 660\, m^3$, então o comprimento l máximo do galpão é:

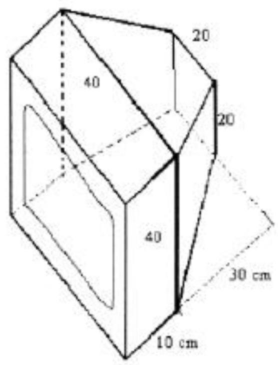
$$660 = 44 \cdot l \quad \therefore \quad l = 15\, m$$

Gabarito: "e".

---

107. (EsPCEx/2000)

Uma fábrica produz monitores para computador que têm a forma de um bloco retangular associado a um tronco de pirâmide, conforme o desenho e dimensões abaixo. Os monitores são acondicionados para venda em caixas cúbicas, com aresta $40\, cm$, medidos internamente. Os espaços vazios da caixa são preenchidos com isopor, para proteger o aparelho. Sabendo que a produção diária da fábrica é de 300 aparelhos, podemos dizer que o consumo diário de isopor em metros cúbicos é de:



(dados: volume da pirâmide $\rightarrow V = \frac{1}{3} S_b \cdot h, S_b \rightarrow \acute{a}rea\ da\ base, h \rightarrow altura$)

a) 2

b) 3

c) 4

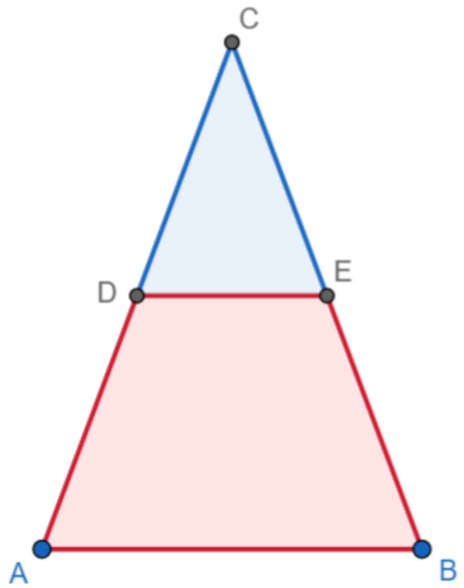
d) 5

e) 6

Comentários

Primeiramente, devemos calcular o volume da televisão, consideremos primeiro o tronco de pirâmide.

Vamos considerar o tronco como a diferença de duas pirâmides. Sendo assim, observe a seção meridiana da pirâmide completa:



Sabemos que $\overline{DE} = 20\ cm$ e $\overline{AB} = 40\ cm$ e os triângulos ABC e CDE são semelhantes, então podemos estabelecer uma relação de altura entre os triângulos conforme:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{H}{h} \quad \Rightarrow \quad \frac{40}{20} = 2 = \frac{H}{h} \quad \therefore \quad H = 2h$$

Mas da figura depreende-se que $H - h = 30\ cm$

$$2h - h = h = 30\ cm \quad \Rightarrow \quad H = 60\ cm$$

Agora calcularemos o volume do tronco como a diferença entre os volumes das pirâmides.

$$V_{tronco} = V - v = \frac{1}{3} \cdot (40)^2 \cdot 60 - \frac{1}{3} \cdot (20)^2 \cdot 30 = 28\,000\ cm^3$$

O volume da televisão é a soma do volume do tronco com o volume do paralelepípedo reto que constitui o restante da televisão, sendo assim:

$$V_{tel} = V_{paral} + V_{tronco} = 10 \cdot 40 \cdot 40 + 28000 = 44\,000\ cm^3$$

O volume de isopor corresponde a diferença de volume entre a caixa cúbica da televisão e o volume da própria televisão, portanto:

$$V_{isopor} = V_{caixa} - V_{tel} = 40 \cdot 40 \cdot 40 - 44000 = 20\,000\ cm^3 = 0{,}02\ m^3$$

Por fim, o total de isopor usado por dia é $300 \cdot 0{,}02 = 6\ m^3$ de isopor.

Gabarito: “e”.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA

Chegamos ao final da aula. Vimos os conceitos de Geometria de Posição, que será a base para o nosso estudo de Geometria Espacial. Com ela, podemos analisar todos os assuntos que podem ser cobrados nos vestibulares sobre esse tema, tais como ângulo entre planos, ângulo entre faces, distância entre planos etc. Também estudamos as propriedades e características dos poliedros.

Para aprender Geometria Espacial, é importante que você consiga desenhar os sólidos e saiba como extrair as informações a partir da figura. Isso, normalmente, você adquire com a prática. Então, tente resolver a maior quantidade de questões possível!

Na próxima aula, daremos continuidade a esse tema e estudaremos os sólidos redondos e os sólidos de revolução.

Quaisquer dúvidas, você pode entrar em contato conosco pelo fórum de dúvidas ou caso prefira:

FALE COMIGO

/victorso /profvictorso /profvictorso

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Iezzi, Gelson. Fundamentos de matemática elementar, 10: geometria espacial. 7. ed. Atual, 2013. 472p.

[2] Carvalho, Paulo. Introdução à Geometria Espacial. 4 ed. SBM, 2005. 93p.

[3] A. V. Pogorelov, Geometría elemental, trad. para o espanhol por Carlos Vega, Ed. Mir, Moscou, 1974.

[4] Machado, Paulo. Fundamentos de Geometria Espacial. CAED-UFMG, 2012. 119p.

9. VERSÕES DAS AULAS

Caro aluno! Para garantir que o curso esteja atualizado, sempre que alguma mudança no conteúdo for necessária, uma nova versão da aula será disponibilizada.