AS 60 QUESTÕES MAIS DIFÍCEIS DA HISTÓRIA DO ITA

b²+f

Básico Bem Feito

INTRODUÇÃO.

O material "as 60 mais difíceis" foi feito com MUITO estudo e análise do TODAS as questões da história do ITA. Esse vestibular é recheado de questões extremamente complicadas e escolher as 60 mais não foi algo fácil.

A ideia das nossas resoluções é entregar o máximo raciocínio sobre uma questão, de maneira extremamente detalhada em linhas de pensamento e na matemática em si.

Todos sabemos que a prova de Física do ITA é conhecida como a mais difícil do vestibular. Nesse sentido, colocamos 2 questões a mais (22 no total de física), pois a ideia aqui é entregar algo de excelência.

Entre questões trabalhosas e questões conceitualmente difíceis, entendemos que as conceituais são mais complicadas. Entre questões de "show do milhão" e questões trabalhosas preferimos colocar as trabalhosas, pois as "show do milhão" agregam pouco ao aluno, já que são questões altamente mutáveis e sem uma lógica reprodutiva.

Como usar esse material? Bem, isso depende muito do seu nível atual.

Se você está começando, use esse material como consulta quando ao longo do ano for se deparando com esse tipo de questão.

Se você está quase lá, use esse material como uma espécie de simulado, tanto para achar possíveis erros em sua base quanto para direcionar seu aprofundamento.

Se você está em um meio termo, use o material das duas formas, começando como consulta e depois encarando como um simulado.

Como aproveitar o máximo desse material?

1) **Entenda os raciocínios para começar uma resolução.**
2) **Aprenda a estabelecer uma linha de pensamento que o corretor vá entender sua resolução.**
3) **Anote o motivo de você ter errado uma questão e interprete esse motivo como um vilão a ser vencido ao longo da preparação, no caso de questões que não são "show do milhão". (Veja bem, é o motivo e não a questão).**
4) **Leia mais de uma vez as resoluções para ter certeza que aprendeu e não apenas entendeu"Preferimos colocar as resoluções logo após as respectivas questões, pois isso garante que cada questão tenha sido um "problema" resolvido, o que é a principal ideia do nosso material."**

5) “A ordem das questões é aleatória. Preferimos não colocar por ordem de dificuldade, para que o aluno não saiba o que vem pela frente e sempre esteja atento! Também optamos por não colocar em ordem cronológica, pois isso de certa forma colocaria as questões em ordem de dificuldade.”

6) “Percebemos, ao analisar TODAS as provas do ITA, um significativo aumento do nível de dificuldade das questões, o que fica claro com a quantidade maior de questões a partir de 2000.

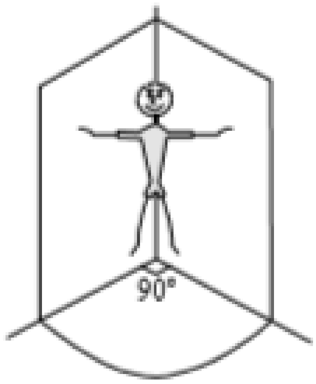
AS 60 QUESTÕES MAIS DIFÍCEIS DE FÍSICA

b²+f

Básico Bem Feito

1) ITA - 2004

Um atleta mantém-se suspenso em equilíbrio, forçando as mãos contra duas paredes verticais, perpendiculares entre si, dispondo seu corpo simetricamente em relação ao canto e mantendo seus braços horizontalmente alinhados, como mostra a figura. Sendo m a massa do corpo do atleta e μ o coeficiente de atrito estático interveniente, assinale a opção correta que indica o módulo mínimo da força exercida pelo atleta em cada parede.



A) $\frac{mg}{2}\left(\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}\right)^{\frac{1}{2}}$

B) $\frac{mg}{2}\left(\frac{\mu^2+1}{\mu^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}$

C) $\frac{mg}{2}\left(\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}\right)$

D) $mg\left(\frac{\mu^2+1}{\mu^2-1}\right)$

E) $n.d.a.$

SOLUÇÃO: Essa é uma quastão que não parece ser difícil…

Mas ela tem conceitos importantíssimos e a maioria dos alunos erram quando fazem esse exercício…

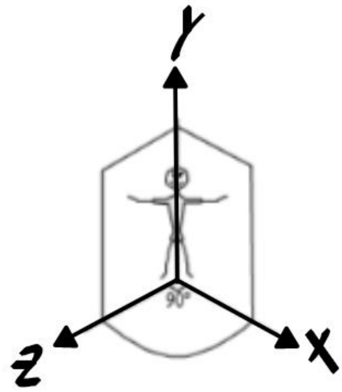
Bom, para começarmos vamos adotar as seguintes referências:

Todos sabemos que $Fat = \mu.N$. Mas quem seria N e quem seria Fat em termos rigorosos?

N é sempre a força de contato perpendicular ao plano em questão, no caso cada uma das paredes.

Fat é a força de atrito total, ou seja, o módulo da força de atrito resultante do somatório vetorial de todas as possíveis componentes nos eixos do espaço.

Na questão em análise, é interessante usarmos os eixos z e y, como na figura abaixo:



Nesse caso, temos que $Fat = \sqrt{{Fat_z}^2 + {Fat_y}^2}$.

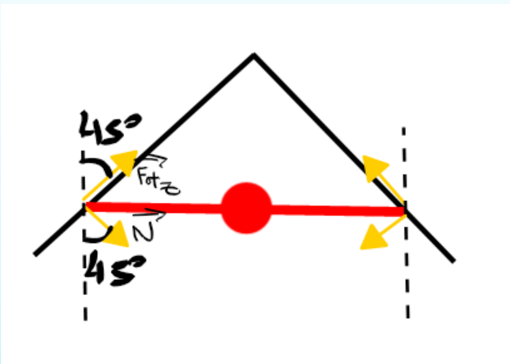
Assim, escrevemos: $\sqrt{{Fat_z}^2 + {Fat_y}^2} = \mu . N$.

Olhando para a vertical, a única força sobre a pessoa, que sustenta seu peso, é a componente vertical da Fat. Mas lembre-se que há duas paredes, cada uma com sua Fat e que elas são iguais, pela simetria da figura.

Logo, podemos escrever: $Fat_y = \frac{m.g}{2}$.

Uma parte difícil da questão é perceber que $Fat_z = N$.

E como percebemos isso? Bem, um bom desenho vai nos ajudar!



Na direção da reta pontilhada, as composições da Fat_z e da N se equilibram, logo essas forças são iguais!

Agora que sabemos quem são Fat_z e Fat_y, a questão está quase morta!!!

Usando que $\sqrt{{Fat_z}^2 + {Fat_y}^2} = \mu . N$ e substituindo Fat_z e Fat_y, temos:

$$\sqrt{N^2 + \frac{m^2.g^2}{4}} = \mu.N.$$

Elevando os dois lados ao quadrado, chegamos que $N^2 = \frac{m^2.g^2}{4.(\mu^2-1)}$.

Agora, para fecharmos, lembramos que a força F total é a resultante entre a normal e a força de atrito total, já que é a força F que gera essas reações.

Então, $F = \sqrt{N^2 + Fat^2}$, usando que $Fat = \mu.N$ e substituindo o valor da Normal, temos:

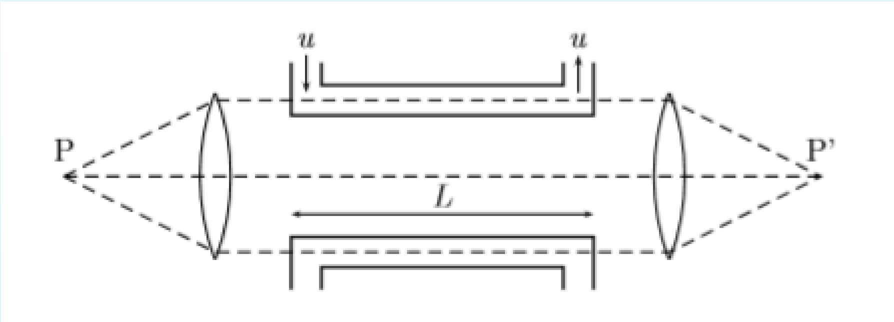
$$F = \sqrt{\frac{m^2.g^2}{4.(\mu^2-1)} + \mu.\frac{m^2.g^2}{4.(\mu^2-1)}}$$

Assim, chegamos em: $F = \frac{m.g}{2}.\sqrt{\frac{\mu^2+1}{\mu^2-1}}$.

LETRA B.

2) ITA - 2015

Luz de uma fonte de frequência f gerada no ponto P é conduzida através do sistema mostrado na figura. Se o tubo superior transporta um líquido com índice de refração n movendo-se com velocidade u, e o tubo inferior contêm o mesmo líquido em repouso, qual o valor mínimo de u para causar uma interferência destrutiva no ponto P'?



A) $\frac{c^2}{2nLf}$

B) $\frac{c^2}{2Lfn^2-cn}$

C) $\frac{c^2}{2Lfn^2+cn}$

D) $\frac{c^2}{2Lf(n^2-1)-cn}$

E) $\frac{c^2}{2Lf(n^2-1)+cn}$

SOLUÇÃO: Bem, o primeiro fato que causa estranheza nessa questão é "mas como o líquido pode deixar a luz mais rápida? A velocidade da luz não é a máxima possível?".

Então, a velocidade da luz é a máxima possível quando estamos no vácuo!!!

O líquido pode e vai deixar a luz mais rápida em comparação com a luz que passa no mesmo líquido em repouso.

Da definicão de índice de refração, temos: $n = \frac{c}{v}$.

Logo, a velocidade da luz nesse líquido em repouso é: $v = \frac{c}{n}$.

Velocidade da água no líquido em movimento é obtida usando a fórmula da velocidade relativa relativística. (Já que a luz se move em relação ao líquido e o líquido em relação à Terra)

Assim, $v' = \frac{v+u}{1+\frac{u.v}{c^2}}$

Usando a equação fundamental da ondulatória, sabemos que o comprimento de onda da luz é $\lambda = \frac{v}{f}$ para a luz no líquido em repouso e $\lambda' = \frac{v'}{f}$ para a luz no líquido em movimento.

Como os comprimentos de onda são distintos, na trajetoria do tubo (L), a fase da luz varia diferentemente comparando os dois líquidos.

Sabemos que a variação da fase da luz é dada por: $\Delta\Phi = \frac{2.\pi.L}{\lambda}$ para a luz no líquido em repouso e $\Delta\Phi' = \frac{2.\pi.L}{\lambda'}$ para a luz no líquido em movimento.

A diferença de fases é gerada por:$\Delta\Phi' - \Delta\Phi$.

Substituindo os valores de λ e λ', temos:

$$\Delta\Phi - \Delta\Phi' = 2.\pi.L.f.\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'}\right)$$

Agora, se substituirmos v' e v, temos:

$$\Delta\Phi - \Delta\Phi' = 2.\pi.L.f.u\left(\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{v(v+u)}\right)$$

Obs: a conta $\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'}\right)$ é "chatinha" de se fazer, vá com calma.

Substituindo $v' = \frac{c}{n}$, temos:

$$\Delta\Phi - \Delta\Phi' = 2.\pi.L.f.u.\frac{n^2 - 1}{c^2 + c.n.u}$$

Novamente, tenha calma nessa substituição, um erro e você chegará numa resposta errada e que, provavelmente, vai ter uma alternativa para te enganar!!!

Essa diferença de fases se for da forma $N_{ímpar}.\pi$, gerará uma interferência destrutiva, pois nesses casos as fases estarão opostas.

Para o mínimo valor de u, temos que usar o mínimo valor de $N_{ímpar}$, que é 1.

Assim: $\pi = 2.\pi.L.f.u.\frac{n^2-1}{c^2+c.n.u}$

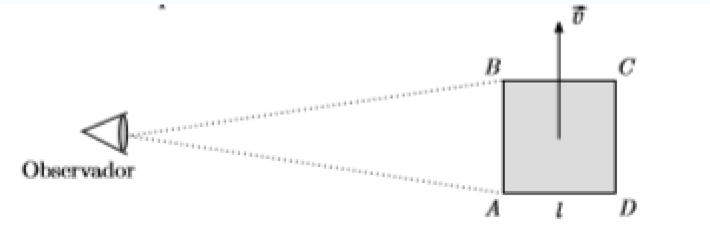
Logo, isolando u, temos:

$$u = \frac{c^2}{2.L.f.(n^2-1) - cn}$$

LETRA D

3) ITA - 2019

Uma placa quadrada de vértices A, B, C, D e lado l, medido em seu referencial de repouso, move-se em linha reta com velocidade de módulo v, próximo ao da velocidade da luz no vácuo c, em relação a um observador localizado a uma distância muito maior que l, conforme ilustra a figura. A imagem percebida pelo observador é formada a partir dos raios de luz que lhe chegam simultaneamente. Sabe-se que o movimento da placa faz com que o observador a perceba girada. Determine em função de v e c o ângulo de giro aparente da placa e indique o seu sentido, sabendo que está e o observador se situam num



mesmo plano.

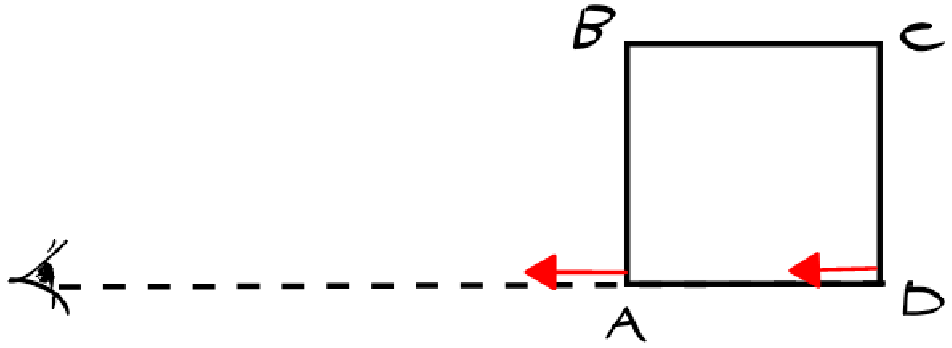
SOLUÇÃO: De relatividade essa questão NÃO TEM NADA!!!

O Efeito da rotação acontece qualquer que seja a velocidade da placa! Entretanto, apenas com velocidades próximas da luz esse efeito é considerável a ponto de percebermos.

Nosso primeiro objetivo é descobrir o sentido de rotação…

Vamos analisar os pontos A e D da figura original.

Básico Bem Feito



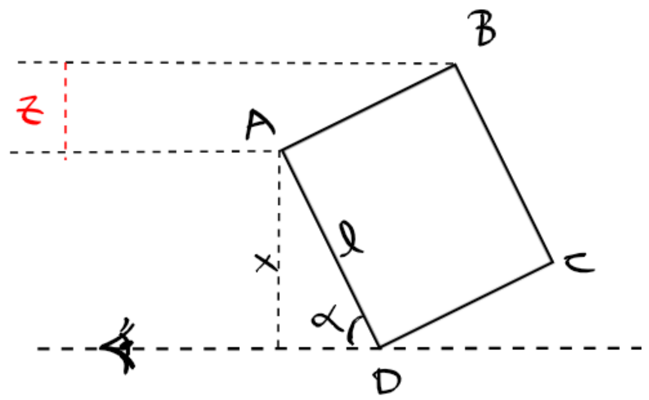
A luz que sai de D não chega ao mesmo tempo ao olho do que a luz de A, pois a luz que sai de D tem que percorrer o lado AD (tamanho l) a mais que a luz que sai de A.

Sim, eu te entendo… existem muitos "e se?". Mas, aqui vai uma dica! Quando vierem muitas hipóteses na sua cabeça, use a mais simples, em geral essa é a mais correta. Vamos usar o que o enunciado nos garantiu, que o único efeito é o da rotação e como ele não deu a distância do olho até o centro da espira, provavelmente esse é um dado irrelevante para a resolução… Lembrem-se: façam o BBF!!!

Então o que deve ocorrer, é que a luz que sai de A seja liberada um pouco depois que a de D para compensar a distância maior que D está do olho.

Mas se A "tem que esperar para lançar a luz", sabendo que a figura está com velocidade para cima, descobrimos que A será percebido acima de D e consequentemente descobrimos que a figura será percebida com um giro no **sentido horário**! (Analogamente B deve estar acima de C)

Veja na figura:



Perceba que x é a distância que A deve percorrer pra compensar o l a mais que o a luz de D tinha que percorrer…

O tempo que a luz de D perdeu para percorrer o lado AD é $\Delta t = \frac{l}{c}$

Assim, $sen\alpha = \frac{x}{l}$.

Mas, $x = v.\Delta t$

Logo, $sen\alpha = \frac{v.\frac{l}{c}}{l} = \frac{v}{c}$.

Concluimos então, que a figura gira no sentido horário e o angulo de giro é $arcsen\left(\frac{v}{c}\right)$.

Análise: não usamos nada relativístico… Mas perceba que se v for perqueno o ângulo será muito pequeno… Por isso não percebemos objetos em movimento rotacionados.

Há um fato relativístico na questão que é a diferença de altura (z na figura abaixo) entre A e B. Sabemos que $z = \frac{l}{\Upsilon}$ (em que ϒ é o fator de correção de Lorentz). Isso ocorre pois o lado AB está na direção do movimento!

4) ITA - 2019

Considere um elétron confinado no interior de uma cavidade esférica de raio a cuja fronteira é intransponível. (a) Estime o valor do módulo da velocidade (v) e a energia total (E) desse elétron em seu estado fundamental. (b) De acordo com o modelo de Bohr, o estado de menor energia do elétron em um átomo de hidrogênio é caracterizado pela órbita circular de raio r_b , tendo o elétron a velocidade tangencial de módulo v_b. Obtenha a restrição em $\frac{a}{r_b}$ para que ocorra a desigualdade v $> v_b$.

a) Vamos estabelecer um racicínio aqui…

SOLUÇÃO: Li a questão e não tive IDEIA de como resolver… pois não sei nenhuma informação sobre o que está acontecendo dentro da cavidade…

O Enunciado da letra b comentou sobre o modelo de Bohr, então se trata de uma questão de Física Moderna.

A palavra "estime" nos da uma sugestão de que é algo incerto…

Sei que pode parecer "carteado", mas com calma o Princípio da Incerteza parece uma ótima!

Mas tal Princípio é uma desigualdade, e agora??

Precisamos estimar apenas, logo vamos simplesmente colocar um "=" no lugar de " $\geq$ ". (limite do possível)!

Então, $\Delta p.\Delta x = \frac{h}{4.\pi}$

Δp é a incerteza que se tem na quantidade de movimento em uma determinada direção.

Δx é a incerteza que se tem na posição do elétron dentro da cavidade.

A Incerteza máxima da posição é a máxima distância possível dentro da cavidade esférica, que é justamente seu diâmetro. Assim, podemos usar que $\Delta x = 2.a$

A incerteza da quantidade de movimento ($\vec{Q} = m.\vec{v}$) depende apenas da incerteza da velocidade, pois consideramos a massa uma constante.

A incerteza da velocidade podemos usar que é a própria velocidade, que chamaremos de v_x , pois como foi dito estamos considerando uma direção específica, no caso o eixo x.

Assim, escrevemos:

$$m.v_x.2.a = \frac{h}{4.\pi}$$

Logo, $v_x = \frac{h}{8.\pi.m.a}$

Podemos supor que a velocidade em todas as 3 direções do espaço são iguais (já que se trata de um movimento aleatório).

A velocidade resultante é o módulo da soma vetorial dessas 3 velocidades, assim:

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2} = \sqrt{3.{v_x}^2} = \frac{\sqrt{3}.h}{8.\pi.m.a}$$

A energia total é apenas a cinética, já que isolado o elétron não apresenta nenhuma outra energia.

Assim,

$$E = \frac{m.v^2}{2} = \frac{3.h}{128.\pi^2.m.a^2}$$

Básico Bem Feito

b) Pelo modelo de Bohr, sabemos que o momento angular (L) do eletron é definido por:

$$L = n.\frac{h}{2.\pi}$$

Para o estado fundamental, $n = 1$.
Sabemos que $L = m.r_b.v_b$, logo:

$$m.r_b.v_b = \frac{h}{2.\pi}$$

Assim, $v_b = \frac{h}{2.\pi.m.r_b} < \frac{\sqrt{3}.h}{8.\pi.m.a} = v$

Finalmente, chegamos em:

$$\frac{a}{r_b} < \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Um outro modelo que se aplica a questão é "uma partícula na caixa rígida". Nesse problema, imaginamos o elétron como uma anda estacionária no seu estado fundamental com nós nas extremidades do diâmetro da cavidade, com o elétron tendo uma probabilidade zero de estar nas bordas…

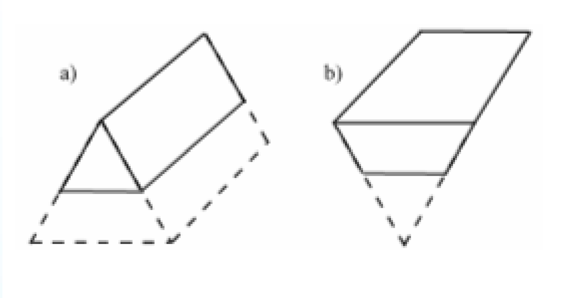
Como essa resolução ultrapassa o escopo do vestibular, inclusive é uma teoria ensinada dentro do próprio ITA, não colocaremos aqui.

5) ITA – 2011

Um bloco, com distribuição homogênea de massa, tem o formato de um prisma regular cuja seção transversal é um triângulo equilátero. Tendo 0,5 g/cm³ de densidade, tal bloco poderá flutuar na água em qualquer

das posições mostradas na figura. Qual das duas posições será a mais estável?

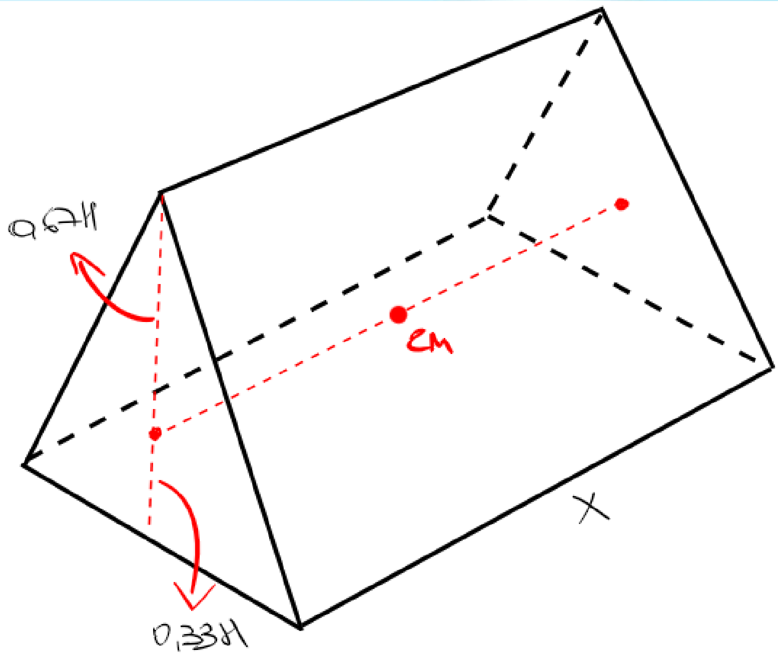
Justifique sua resposta. Lembrar que o baricentro do triângulo se encontra a 2/3 da distância entre um vértice e seu lado oposto.



SOLUÇÃO: Bem, no enunciado da questão, o próprio ITA sugere uma solução esperada!

A altura do baricentro é $y_{cm}\frac{2.H}{3}$. (que é aproximadamente $0{,}67.H$)

Em relação ao vértice oposto então temos: $\frac{H}{3}$. (que é aproximadamente $0.33, H$)



Vamos agora descobrir o volume submerso:

$$E = P$$

$$\rho_{água}.\,g.\,V_{sub} = \rho_{bloco}.\,g.\,V$$

Como a densidade do bloco é metade da água, ficamos com:

$$V_{sub} = \frac{V}{2}$$

Agora, avaliamos a posição desse centro massa com relação ao nível da água.

O volume de um prisma triangular é dado por: $V = A_{base}.\,x$

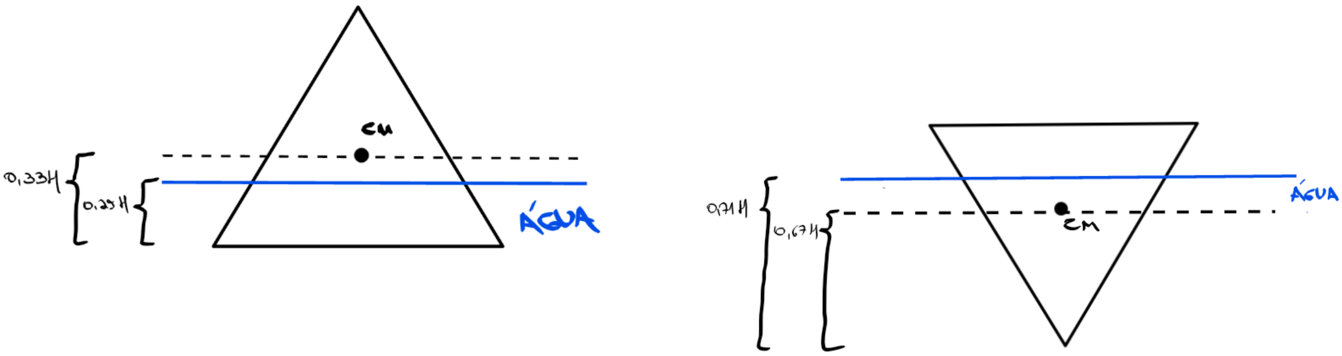
H é constante, o que muda é a área da base triangular, que depende do quadrado da altura da face triangular!

Assim, para termos metade do volume, devemos ter que: $\left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{V_{sub}}{V}$

Logo, o que sobre em relação à base é $\boldsymbol{0,29.\,H}$.

Básico Bem Feito

Podemos agora desenhar as duas situações para pensarmos numa interpretação física:



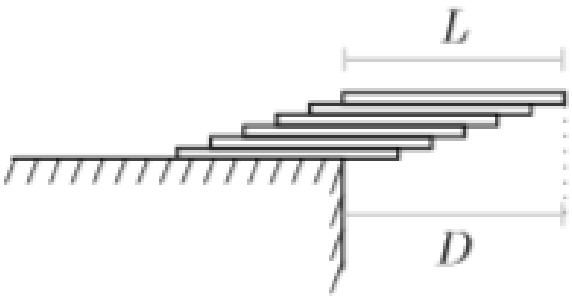
Como o nível da água é constante percebemos que o na figura da direita o centro de massa do sistema está a uma altura menor em comparação com a figura da direita... E o que isso quer dizer? Ora, que a energia potencial gravitacional do sistema da direita é menor e portanto, como outras energias não estão envolvidas, esse sistema é mais estável!!!

LETRA B.

6) ITA – 2009

Chapas retangulares rígidas, iguais e homogêneas, são sobrepostas e deslocadas entre si, formando um conjunto que se apoia parcialmente na borda de uma calçada. A figura ilustra esse conjunto com n chapas, bem como a distância D alcançada pela sua parte suspensa. Desenvolva uma fórmula geral da máxima distância D possível de modo que o conjunto ainda se mantenha em equilíbrio.

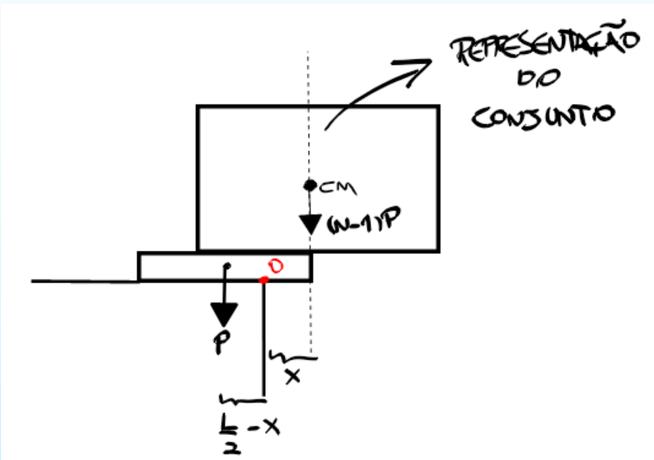
A seguir, calcule essa distância D em função do comprimento L de cada chapa, para n = 6 unidades.



SOLUÇÃO: O segredo dessa questão é avaliar um caso genérico e sempre pensar na distância que a placa encostada no chão está da quina!

Lembrando que um corpo está na iminência de tombar quando a linha vertical que passa pelo seu centro de massa atinge a quina, de modo eu a partir dai o torque ocasionará o tombamento.

Pensaremos no conjunto de N-1 placas encima da placa mais de baixo.



Para o equilíbrio rotacional em relação ao ponto O:

Básico Bem Feito

$$P.\left(\frac{L}{2} - x\right) = (N-1).P.x$$

Assim,

$x = \frac{L}{2.N}$

Ou seja, quando se tem N placas a distância da última até a quina é de $\frac{L}{2.N}$

Mas, para uma placa aleatória, podemos pensar que a placa que está embaixo dela é o piso de modo que, pelo mesmo raciocínio, a distância máxima que ela pode estar da quina só depende do número de placas que há acima dela mais um.

Seguindo esse raciocínio, a última pode estar a no máximo $\frac{L}{2.1}$ da penúltima e a penúltima a no máximo $\frac{L}{2.2}$ da antepenúltima e assim por diante. Lembrando que a mais de baixo (primeira) estará a no máximo uma distância que depende do número de placas e vale $\frac{L}{2.N}$.

Assim, a soma de todas as distâncias é:

$$D_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{L}{2.i}$$

Para $N = 6$ não tem muito segredo, temos que literalmente fazer a soma!

Logo $D_N = \frac{L}{2}.\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = 1{,}225.L.$

Básico Bem Feito

7) ITA – 2017

Dispondo de até 5 resistências R, monte um circuito no interior da caixa da figura, tal que: a) com uma bateria de tensão V entre os terminais AB, um voltímetro entre os terminais CD mede uma diferença de potencial V/2, e b) com essa bateria entre os terminais CD, um amperímetro entre os terminais AB mede uma corrente igual a V/3R.

SOLUÇÃO: De fato, essa questão é muito difícil, pois é preciso criatividade…

Um dado que atrapalha bastante a resolução é a informação das 5 resistências…

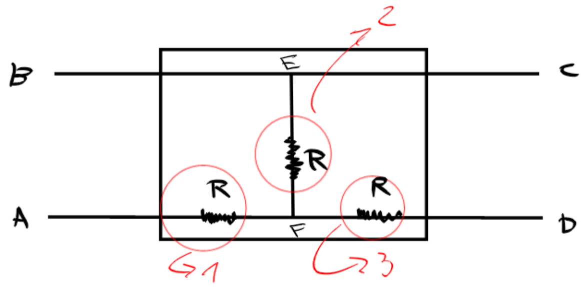
Se fosse informado que eram exatamente 3, o número de pessoas que teriam acertado essa questão seria bem maior.

Infelizmente, não há uma técnica para chegar a solução, temos que arriscar e ver modelos. Novamente, enfatizo o princípio da simplicidade, comece com uma resistência e vá aumentando. No caso, a solução é com 3 resistores, acompanhe:

conectado entre C e D, a corrente que sai de B, desce completamente por 2, já que a resistência entre C e D é infinita (voltímetro ideal).

Básico Bem Feito

Dessa forma, cada uma das resistências 1 e 2 consomem metade da ddp da fonte no percurso BEFA, o que garante a condição do enunciado que a ddp entre C e D (que é a mesma do que entre E e F já que não passa corrente em 3) é de $\frac{V}{2}$.



Com um amperímetro ideal (resistência zero) entre A e B, a corrente que sai de C, quando chega em E se divide, sendo que no caminho EBA encontra uma resistência de R e no caminho EF também, logo ela se divide em duas partes iguais.

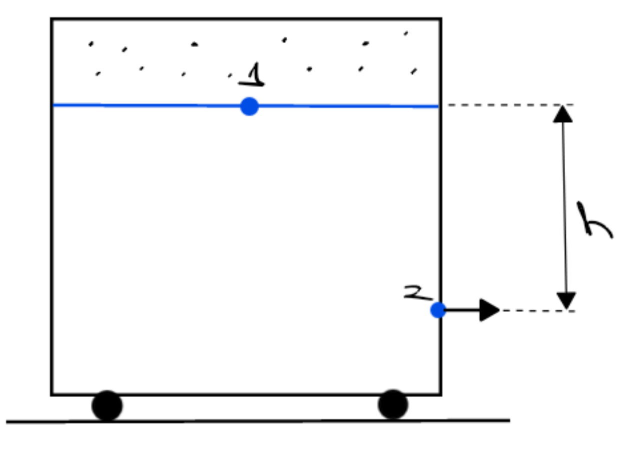
Precisamos então encontrar a resistência total entre C e D, que é R de AF em paralelo com R de EF em série com R de FD, ou seja, $R//R + R = \frac{R}{2} + R = \frac{3.R}{2}$.

Assim, $i = \frac{V}{\frac{3.R}{2}} = \frac{2.V}{3.R}$

Logo, a metade da corrente que passa por BA é $i = \frac{V}{3.R}$.

8) ITA – 2016

Um cilindro vertical de seção reta de área A_1, fechado, contendo gás e água é posto sobre um carrinho que pode se movimentar horizontalmente sem atrito. A uma profundidade h do cilindro, há um pequeno orifício de área A_2 por onde escoa a água. Num certo instante a pressão do gás é ρ, a massa da água, Ma e a massa restante do sistema, M. Determine a aceleração do carrinho nesse instante mencionado em função dos parâmetros dados. Justifique as aproximações eventualmente realizadas.



SOLUÇÃO: Primeiramente, devemos aplicar a equação de Bernoulli em relação aos pontos 1 e 2. É interessante ressaltar que a equação é válida pensando na parte do líquido que sai de 1 e escoa até 2, não há a necessidade de haver um tudo que os liga diretamente…

Além disso, usaremos como referencial de potencial zero a horizontal que passa pelo orifício.

Assim,

$$p + \rho_{água}.g.h + \frac{\rho_{água}.v_1^2}{2} = P_{at} + \frac{\rho_{água}.v_2^2}{2}$$

Ressalta-se que é considerado o ponto 2 imediatamente fora do vagão, ou seja, já sujeito à pressão atmosférica (P_{at}).

Sabemos da equação da continuidade, que

$$A_1.v_1 = A_2.v_2$$

Isolando v_1 e substituindo na equação de bernoulli, temos:

$$p + \rho_{água}.g.h + \frac{\rho_{água}.v_2^2.\left(\frac{A_2^2}{A_1^2}\right)}{2} = P_{at} + \frac{\rho_{água}.v_2^2}{2}$$

Isolando v_2, obtemos:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2.(p - P_{at} + \rho_{água}.g.h)}{\rho_{água}.\left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}\right)}}$$

Agora vem o "pulo do gato"... Para o ITA é muito bom saber a fórmula da força gerada pela vazão de massa em um sistema:

$$F = \frac{\Delta m}{\Delta t}.v_{rel}$$

F é chama de força de empuxo (sim... nome estranho) e a velocidade relativa é a velocidade que o jato sai em relação ao restante do sistema, que no caso já é a velocidade v_2.

Obs.: Como $\Delta m = \rho_{água}.\Delta V = \rho_{água}.A_2.v_2.\Delta t$

Logo, $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho_{água}.A_2.v_2$

Assim,

$$F = \rho_{água}.A_2.{v_2}^2$$

Pela terceira lei de Newton, a força que o restante do sistema faz sobre o jato é a mesma que o jato faz sobre o sistema (F).

Em especial, a aceleração do vagão para trás é dada pela segunda lei de Newton:

$a = \frac{F}{m_{vagão}}$

Nesse instante, a massa do vagão é

$a = \frac{\rho_{água}.A_2}{M+M_a}.\frac{2.(p-P_{at}+\rho_{água}.g.h)}{\rho_{água}.\left(1-\frac{A_2^2}{A_1^2}\right)}$

Simplificando, chegamos em:

$$a = \frac{2.A_2}{M+M_a}.\frac{p-P_{at}+\rho_{água}.g.h}{1-\frac{A_2^2}{A_1^2}}$$

Agora podemos fazer uma aproximação interessante:

Como $A_2 \ll A_1$, temos que $1-\frac{A_2^2}{A_1^2} \cong 1$.

Desse modo,

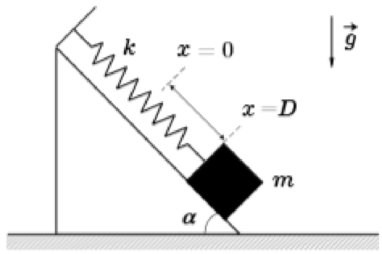
$$a = \frac{2.A_2.(p-P_{at}+\rho_{água}.g.h)}{M+M_a}$$

9) ITA – 2020

Uma mola de constante elástica k é presa a um bloco de massa m sobre um plano inclinado de um ângulo α em relação à horizontal, onde interage entre superfícies um atrito de coeficiente μ. Com o bloco deslocado forçadamente para baixo, a mola é distendida até um comprimento x = D da sua posição x = 0, quando livre em seu comprimento natural. A partir do repouso, o bloco é então liberado e se inicia um movimento oscilatório. Pedem-se:

(a) As possíveis posições finais x_f de parada do bloco após cessar o movimento oscilatório, em função das grandezas intervenientes.

(b) O gráfico da quantidade de movimento p do bloco em função da coordenada x, considerando o intervalo de tempo compreendido entre o início do movimento e o instante de sua primeira parada.



SOLUÇÃO:

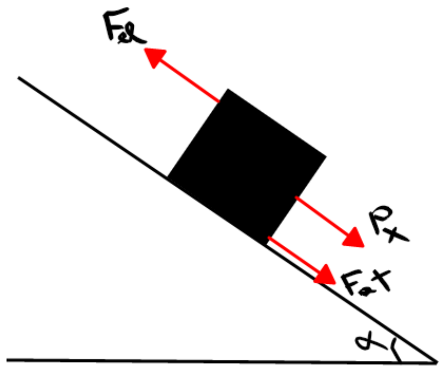
a) A primeira coisa a se pensar nessa questão é: o enunciado é completamente literal, logo teremos analisar qualitativamente em primeira análise.

Existem 3 hipóteses básicas:

1) Parar com a mola alongada.
2) Para com a mola comprimida.

Qualquer outra hipótese certamente estará entre essas duas!

Vamos trabalhar cada uma dessas hipóteses:



Nesse caso, para a condição de parada escreveríamos:

$$k.x_f = m.g.sen\alpha + F_{at}$$

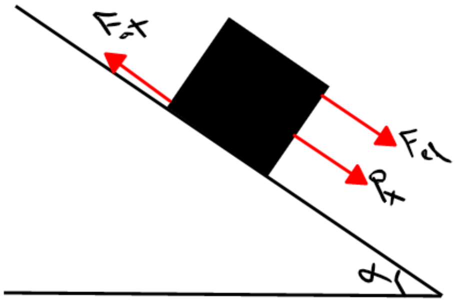
Como a F_{at} é sempre menor que a estática, podemos isolar ela na equação acima e escrever que $F_{at} \leq \mu.m.g.cos\alpha$.

Assim:

$$k.x_f - m.g.sen\alpha \leq \mu.m.g.cos\alpha$$

Isolando o x_f, temos:

$$x_f \leq \frac{\mu.m.g.cos\alpha + m.g.sen\alpha}{k}$$



Nesse caso, a mola está comprimida, ou seja, x_f é negativo, usaremos o módulo de x_f para equacionar e depois analisaremos o sinal:

$$k.|x_f| + m.g.sen\alpha = F_{at}$$

Como a F_{at} é sempre menor que a estática, podemos isolar ela na equação acima e escrever que $F_{at} \leq \mu.m.g.cos\alpha$.

Assim:

$$k.|x_f| + m.g.sen\alpha \leq \mu.m.g.cos\alpha$$

Isolando o x_f temos:

$$|x_f| \leq \frac{\mu.m.g.cos\alpha - m.g.sen\alpha}{k}$$

Entretanto, no equacionamento colocamos x_f em módulo.

Se temos: $|x| \leq 2$ e sabemos que x é negativo, podemos escrever que $x \geq -2$.

Logo,

$$x_f \geq \frac{-\mu.m.g.cos\alpha + m.g.sen\alpha}{k}$$

Assim, usando 1 e 2 escrevemos a resposta:

$$\frac{-\mu.m.g.cos\alpha + m.g.sen\alpha}{k} \leq x_f \leq \frac{\mu.m.g.cos\alpha + m.g.sen\alpha}{k}$$

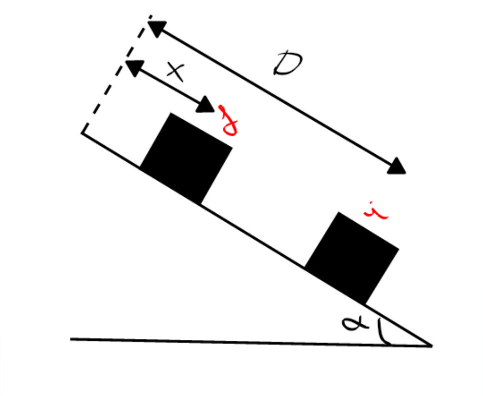
a) Para o gráfico da quantidade de movimento, vamos avaliar a energia total, que é desgastada pela dissipação de energia por atrito, e assim analisar quando essa quantidade de movimento torna-se nula.

Energia cinética: $E = \frac{m.v^2}{2} = \frac{p^2}{2.m}$, sendo p a quantidade de movimento.

Considerando a linha horizontal que passa pelo ponto de elongação nula como o nível de energia potencial gravitacional nulo, temos:

$$\Delta E_{mec} = W_{fat}$$

Vamos fazer um desenho genérico para equacionar e prosseguirmos:



Temos:

$$E_i = -m.g.D.sen\alpha + \frac{K.D^2}{2}$$

$$E_f = -m.g.x.sen\alpha + \frac{k.x^2}{2} + \frac{p^2}{2.m}$$

Assim,

$$E_f - E_i = -\mu.m.g.cos\alpha.\Delta x$$

$\Delta x = D - x$, distância percorrida.

Substituindo e desenvolvendo com CUIDADO, temos:

$p^2 + k.m.x^2 - 2m^2.g.(\mu.cos\alpha + sen\alpha).x + 2.m^2.g.D.(\mu.cos\alpha + sen\alpha) - k.D^2.m = 0$

Aqui, aparentemente, não sabemos a equação ainda... Mas, podemos avançar mais e, para isso, é interessante chamar os termos independentes (que não multiplicam p ou x)

Fazemos: $z = -2.m^2.g.D.(\mu.cos\alpha + sen\alpha) + k.D^2.m$

Assim, temos:

$p^2 + k.m.x^2 - 2m^2.g.(\mu.cos\alpha + sen\alpha).x = z$

Agora, usaremos o truque de completar quadrados:

$$a.x^2 + b.x = \left(\sqrt{a}.x + \frac{b}{2.\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4.a}$$

No caso da nossa equação, temos:

$$\frac{b^2}{4.a} = \frac{\left(2m^2.g.(\mu.cos\alpha + sen\alpha)\right)^2}{2.\sqrt{k.m}}$$

Com isso, fazemos:

$$z + \frac{b^2}{4.a} = z'$$

Assim,

$$p^2 + \left(\sqrt{k.m}.x - \frac{\sqrt{m^3}.g}{\sqrt{k}}.(\mu.cos\alpha + sen\alpha)\right)^2 = z'$$

Logo, temos:

$$\frac{p^2}{z'^2} + \frac{\left(\sqrt{k.m}.x - \frac{\sqrt{m^3}.g}{\sqrt{k}}.(\mu.cos\alpha + sen\alpha)\right)^2}{z'^2} = 1$$

Estamos quase chegando numa equação de uma elipse... mas antes o termo que multiplica p e x deve ser 1, o que não acontece para x, mas isso é facilmente ajeitável, basta dividirmos por $\sqrt{k.m}$ no numerador e no denominador e, com isso, chamaremos $\frac{z'}{\sqrt{k.m}} = z''$

Assim, temos:

$$\frac{p^2}{z'^2}+\frac{\left(x-\frac{m.g}{k}.(\mu.cos\alpha+sen\alpha)\right)^2}{z"^2}=1$$

Finalmente, obtemos a equação de uma elipse de semieixos z' e $z"$.

Não temos informações suficientes para saber qual semieixo é maior, pois não sabemos quanto vale $\sqrt{k.m}$.

A elipse está centrada em $(0,\frac{m.g}{k}.(\mu.cos\alpha+sen\alpha))$

E como sabemos que o movimento inicial do bloco é de subida (contra o eixo x), sabemos que o bloco tem $p<0$.

Sabemos, que um dos valores de $p=0$ é $x=D$, pois inicialmente se estava parado. Para descobrirmos o outro ponto onde $p=0$, podemos olhar para própria equação da elipse, mas não é algo rápido, pois teríamos de retomar os valores de z' e $z"$. Um jeito mais fácil é voltarmos à seguinte equação:

$$p^2+k.m.x^2-2m^2.g.(\mu.cos\alpha+sen\alpha).x=z$$

Fazendo $p=0$, temos uma equação do segundo grau em x.

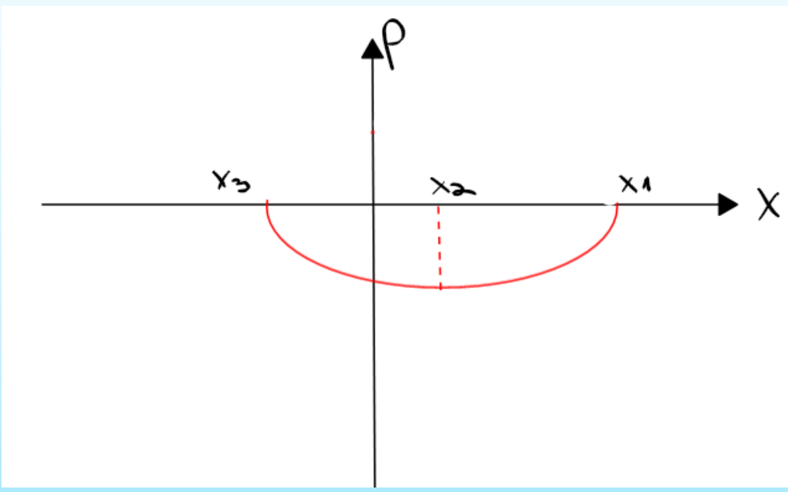
Não precisamos resolvê-la, pois sabemos que uma solução é $x=D$.

E a soma das raízes é dada por $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ em $a.x^2+b.x+c=0$.

Assim, $D+x=\frac{2m^2.g.(\mu.cos\alpha+sen\alpha)}{k.m}$

Assim, a outra raiz é: $x=\frac{2.m.g.(\mu.cos\alpha+sen\alpha)}{k}-D$

Agora, FINALMENTE, podemos desenhar o gráfico:



Básico Bem Feito

Sendo

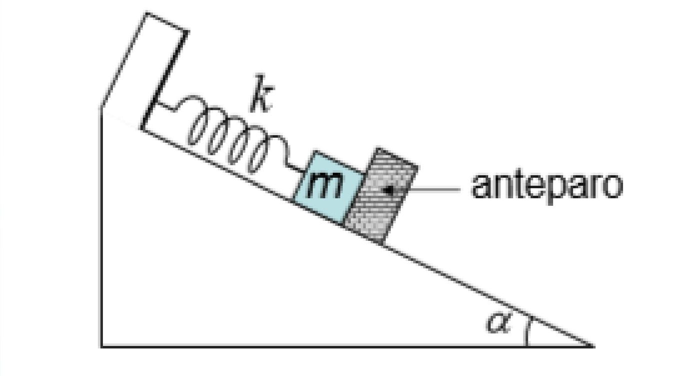
$$x_1 = D$$

$$x_2 = \frac{m.g}{k}.(\mu.cos\alpha + sen\alpha)$$

$$x_3 = \frac{2.m.g.(\mu.cos\alpha + sen\alpha)}{k} - D$$

10) ITA – 2010

No plano inclinado, o corpo de massa m é preso a uma mola de constante elástica k, sendo barrado à frente por um anteparo. Com a mola no seu comprimento natural, o anteparo, de alguma forma, inicia seu movimento de descida com uma aceleração constante a. Durante



parte dessa descida, o anteparo mantém contato com o corpo, dele se separando somente após um certo tempo. Desconsiderando quaisquer atritos, podemos afirmar que a variação máxima do comprimento da mola é dada por:

A) $\frac{\left[mg\sin\alpha + m\sqrt{a(2g\sin\alpha + a)}\right]}{k}$

B) $\frac{\left[mg\cos\alpha+m\sqrt{a(2g\cos\alpha+a)}\right]}{k}$

C) $\frac{\left[mg\sin\alpha+m\sqrt{a(2g\sin\alpha-a)}\right]}{k}$

D) $\frac{m(g\sin\alpha-a)}{k}$

E) $\frac{mg\sin\alpha}{k}$

SOLUÇÃO: Primeiramente, um fato que costuma assustar bastante os alunos nessa questão é “mas se o anteparo acelera com $'a'$ e o corpo está parado, não era pra eles se separarem desde o começo???”.

Veja bem, foi dada uma aceleração e não uma velocidade! Aceleração o bloco também tem no começo, causado pelas forças que agem sobre ele na direção do plano (peso decomposto nessa direção e normal do anteparo).

Bem, agora podemos começar a resolver, entendendo que até certo ponto eles andarão juntos e que, a partir do momento que a aceleração do corpo for menor que a aceleração "a" , eles vão se separar. Nesse momento, devido à separação, a normal entre eles é nula!

Quando o contato é imediatamente desfeito:

$$a_{corpo} = \frac{m.g.sen\alpha - k.x}{m} = a$$

Logo,

$$x = \frac{m.(g.sen\alpha - a)}{k}$$

Como até esse ponto a aceleração era constante (limitada em "a"), podemos usar Torricelli para descobrirmos com qual velocidade o corpo chegou nesse instante de perda de contato:

$$v^2 = v_0^2 + 2.a.\Delta x$$

Como o corpo começa do repouso e como já descobrimos quanto ele se deslocou (“x”),

Básico Bem Feito

$$v = \sqrt{\frac{2.a.m.(g.sen\alpha - a)}{k}}$$

Agora, o corpo andará sem influência do anteparo, até que a mola o pare completamente, temos um sistema conservativo e podemos usar uma equação de conservação para descobrirmos o ponto onde a energia cinética (atingiu o repouso).

Vamos considerar que o ponto onde ele perdeu o contato tem energia potencial gravitacional nula.

$$E_{cin_i} + E_{ela_i} = E_{ela_f} + E_{pot_f}$$

$$\frac{m.\frac{2.a.m.(g.sen\alpha - a)}{k}}{2} + \frac{k.\left(\frac{m.(g.sen\alpha - a)}{k}\right)^2}{2} = \frac{k.x_f^2}{2} - m.g.\left(x_f - \frac{m.(g.sen\alpha - a)}{k}\right).sen\alpha$$

Obs.: O termo $\left(x_f - \frac{m.(g.sen\alpha - a)}{k}\right).sen\alpha$ representa o quanto ele desceu na vertical (multiplicou-se por $sen\alpha$ para decompor na vertical, que é o que importa).

Desenvolvendo com CUIDADO a expressão e colocando no formato de uma equação do segundo grau tradicional ($a.x^2 + b.x + c = 0$), temos:

$$\frac{k}{2}.x_f{}^2 - m.g.sen\alpha.x_f + \frac{m^2}{2k}.(g.sen\alpha - a)^2 = 0$$

Resolvendo por Baskara, temos:

$$x_f = \frac{m.g.sen\alpha \pm \sqrt{(m.g.sen\alpha)^2 - 4.\frac{k}{2}.\frac{m^2}{2k}.(g.sen\alpha - a)^2}}{2.\frac{k}{2}}$$

Assim,

$$x_f = \frac{m.g.sen\alpha}{k} \pm \frac{m}{k}.\sqrt{a.(2.g.sen\alpha - a)}$$

As duas soluções são os pontos de parada do movimento oscilatório (MHS) que surge em torno da posição de equilíbrio $x_f = \frac{m.g.sen\alpha}{k}$.

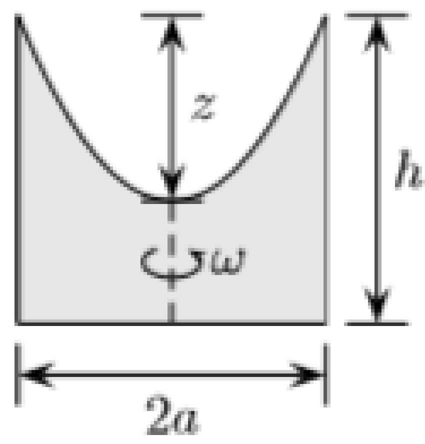
Como queremos a máxima distância, ficamos com o sinal de +.

Básico Bem Feito

$$x_f = \frac{m.g.sen\alpha + m.\sqrt{a.(2.g.sen\alpha - a)}}{k}$$

11) ITA – 2014

Um cilindro de altura h e raio a, com água até uma certa altura, gira com velocidade angular ω constante. Qual o valor máximo de ω para que a água não transborde, sabendo que neste limite a altura z (ver figura) é igual a h/3 + ω2a2/(4g)? Dado: num referencial que gira com o cilindro, e, portanto, considerando a força centrífuga, todos os pontos da superfície da água têm mesma energia potencial.



A) $w = \sqrt{\frac{2gh}{3a^2}}$

B) $w = \sqrt{\frac{4ga}{9h^2}}$

C) $w = \sqrt{\frac{4ga}{3h^2}}$

D) $w = \sqrt{\frac{4gh}{3a^2}}$

E) $w = \sqrt{\frac{4gh}{9a^2}}$

SOLUÇÃO: Essa questão pode ser resolvida por cálculo, mas não há necessidade, podemos usar a criatividade!

Pensando numa única molécula de água girando ela sente uma força das demais moléculas a empurrando! Algo como uma Normal, que como sabemos é sempre perpendicular a trajetória. Além disso, essa molécula tem seu próprio peso. Vejamos o desenho:

t: tangente a curva

h: horizontal

v: vertical

Essa molécula está girando em torno do eixo central da curva, com raio x enquanto na vertical ela fica em repouso (sempre a mesma altura). Com isso, podemos criar duas equações, uma para a resultante centrípeta na horizontal e outra para o equilíbrio na vertical.

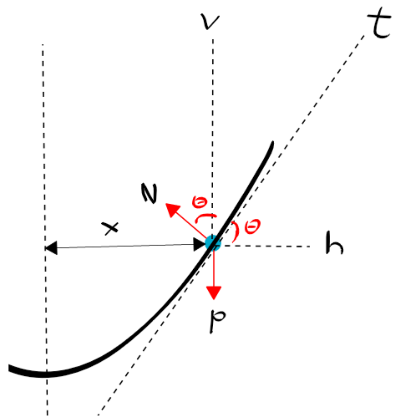
1) $N.sen\theta = m.\omega^2.x$
2) $N.cos\theta = m.g$

Dividindo uma equação pela outra, temos:

$$tg\theta = \frac{\omega^2}{g}.x$$

Aqui, precisaremos de um pouco de cálculo (mas bem menos que pela outra solução, que deduziria a equação da curva).

Sabemos que a tangente do angulo que uma curva faz com a horizontal (que no caso também é θ) é a derivada da curva, dada por:



$\frac{dy}{dx} = tg\theta$

Logo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2}{g}.x$$

Usando um "truque" (evite escrever em provas essa passagem, pois ela não tem rigor matemático... já coloque o resultado da integral) podemos fazer:

$$dy = \frac{\omega^2}{g}.x.dx$$

Integrando, temos:

$$y = \frac{\omega^2}{g}.\frac{x^2}{2}$$

Lembre-se: $\int a.x^n.dx = a.\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$

(k é uma constante de integração)

Agora que sabemos a equação da curva, podemos substituir x por a, onde $y = z$, para descobrirmos ω.

Temos:

$$z = \frac{\omega^2}{g}.\frac{a^2}{2}$$

Básico Bem Feito

Mas o enunciado disse que $z = \frac{h}{3} + \frac{\omega^2 . a^2}{4g}$

Logo,

$$\frac{h}{3} + \frac{\omega^2 . a^2}{4g} = \frac{\omega^2}{g} . \frac{a^2}{2}$$

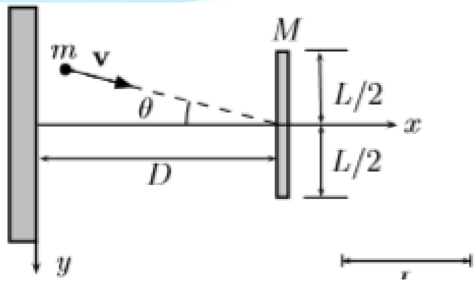
Assim,

$$\omega = \sqrt{\frac{4 . g . h}{3 . a^2}}$$

LETRA D

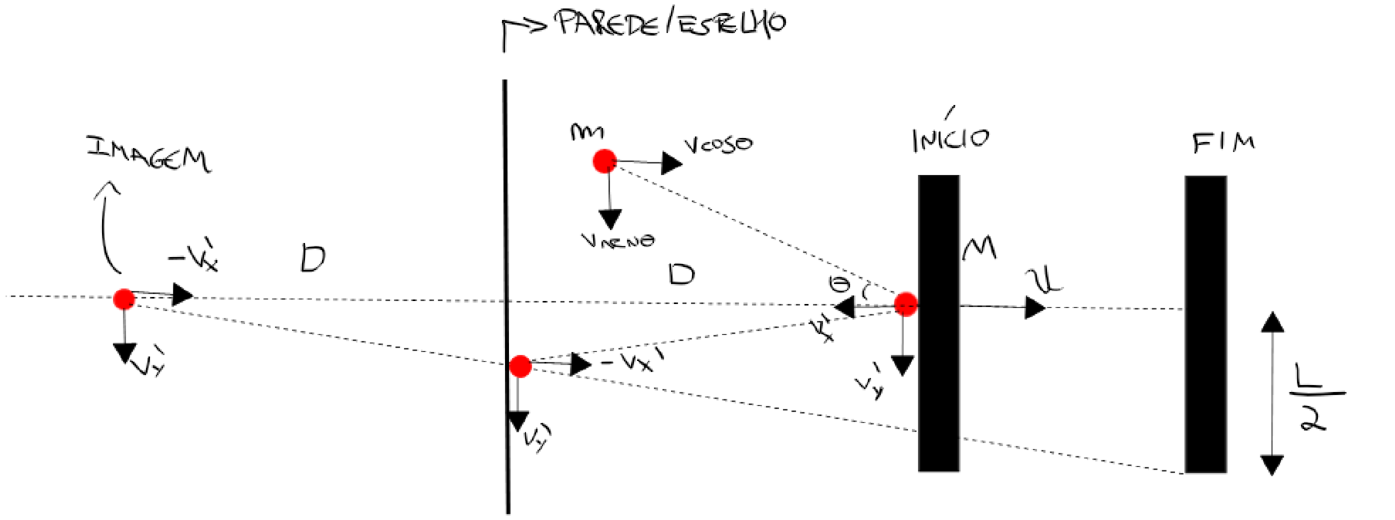
12) ITA – 2015

Um plano horizontal x × y, um projétil de massa m é lançado com velocidade v, na direção θ com o eixo x, contra o centro de massa de uma barra rígida, homogênea, de comprimento L e massa M, que se encontra inicialmente em repouso a uma distância D de uma parede, conforme a figura. Após uma primeira colisão elástica com a barra, o projétil retrocede e colide elasticamente com a parede. Desprezando qualquer atrito, determine o intervalo de valores de θ para que ocorra uma segunda colisão com a barra, e também o tempo decorrido entre esta e a anterior na parede.



SOLUÇÃO: Questão difícil por ser muito trabalhosa…

Primeiramente vamos equacionar a primeira colisão. Para isso, usaremos duas equações, uma para o coeficiente de restituição ($e = 1$, já que é elástica) e outra para a conservação do movimento na direção



horizontal.

1) $e = \frac{v'_x + u}{v.cos\theta} = 1$

2) $m.v.cos\theta = M.u - m.v'_x$

Podemos isolar u em 1 e substituirmos em 2 para descobrirmos v'_x.

Fazendo isso, com CUIDADO, obtemos:

$$v'_x = \frac{v.cos\theta.(M-m)}{M+m}$$

E, consequentemente, achamos u,

$$u = \frac{2.m.v.cos\theta}{M+m}$$

Como desprezaremos o atrito durante o choque, não haverá forças na vertical, portanto a velocidade na vertical que o projétil tinha se mantem e, além disso, a barra não ganhará movimento vertical.

Assim, o projétil volta com velocidade v', que possui os seguintes valores em x e y:

$v'_x = \frac{v.cos\theta.(M-m)}{M+m}$ e $v'_y = v.sen\theta$

Agora, para o choque elástico contra a parede (que não vai se mover com o choque), o projétil rebate sua velocidade em x (troca o sinal) e mantém a velocidade em y, como se fosse um raio de luz refletindo em um espelho plano. Falando em espelho, para facilitarmos a visão do que ocorre, para garantir outra colisão contra a placa, podemos ao invés de pensar que o projétil reflete na parede, que sua imagem (em relação a parede) é quem deseja atingir ao barra!

O tempo que o projétil levará para atingir a barra novamente, é o tempo que essa imagem demoraria para alcançar a barra. Logo após o primeiro choque, a barra está a $2.D$ da imagem do projétil. E no eixo x a velocidade relativa entre a barra e a imagem é $v'_x - u$.

Assim, o tempo entre as duas colisões com a barra é:

$t = \frac{2.D}{v'_x - u}$

Nesse tempo, a distância que o projétil andará em y será $\Delta y = v'_y.t$

Para que haja uma segunda colisão com a barra, precisamos que: $\Delta y \leq \frac{L}{2}$, de modo a atingir o limite da barra.

Substituindo, temos:

$$t = \frac{2.D}{\frac{v.cos\theta.(M-m)}{M+m} - \frac{2.m.v.cos\theta}{M+m}}$$

Básico Bem Feito

Logo,

$$\Delta y = v.sen\theta.\frac{2.D}{\frac{v.cos\theta.(M-m)}{M+m}-\frac{2.m.v.cos\theta}{M+m}} \leq \frac{L}{2}$$

Podemos colocar $cos\theta$ em evidência no numerador e usar que $tg\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}$

Assim, com muito CUIDADO com as contas, temos que:

$$tg\theta \leq \frac{L}{4.D}.\frac{M-3.m}{M+m}$$

Portanto, o intervalo de valores de θ é:

$$0 \leq \theta \leq arctg\left(\frac{L}{4.D}.\frac{M-3.m}{M+m}\right)$$

Além disso, o enunciado pediu o tempo entre a colisão entre a parede e a segunda colisão com a barra. Já temos o tempo entre as duas colisões com a barra, se acharmos o tempo entre a primeira colisão com a barra e a parede, podemos subtrair do tempo total e achar a resposta!

Vamos achar, então, o tempo entre a primeira colisão com a barra e a com a parede.

A distância entre projétil e parede era de D e velocidade de aproximação entre eles é v'_x.

Logo,

$$t' = \frac{D}{v'_x}$$

Assim, o tempo pedido (Δt) é:

$$\Delta t = t - t'$$

Substituindo o valor de v'_x e fazendo a subtração, encontramos:

$$\Delta t = \frac{D}{v.\cos\theta}.\frac{(M+m)^2}{(M-m)(M-3.m)}$$

Básico Bem Feito

13) ITA – 2002

Um pequeno camundongo de massa M corre num plano vertical no interior do cilindro de massa m e eixo horizontal. Suponha-se que o ratinho alcance a posição indicada na figura imediatamente no início de sua corrida, nela permanecendo devido ao movimento giratório de reação do cilindro, suposto ocorrer sem resistência de qualquer natureza. A energia despendida pelo ratinho durante o intervalo de tempo T para se manter na posição enquanto corre é:

A) $E = \frac{M^2 g^2 T^2}{2m}$

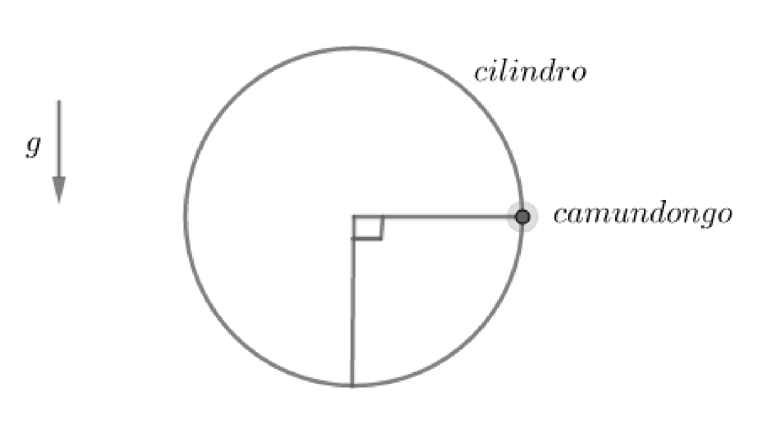
B) $E = M g^2 T^2$

C) $E = \frac{m^2 g^2 T^2}{M}$

D) $E = m g^2 T^2$

E) n.d.a

O ratinho, para ficar em uma posição estável na vertical, deve receber uma força igual ao seu peso. Mas, para isso, por ação e reação, ele deve empurrar o cilindro com uma força igual ao seu peso!



SOLUÇÃO: Vamos resolver essa questão de modo rigoroso!

Sabemos que $\tau = I.\alpha$

Onde, τ é o torque, I é o momento de inércia do cilíndro e α é sua aceleração angular.

O torque em relação ao centro é: $\tau = M.g.R$

O momento de inércia de um cilindro oco girando em torno do centro é:

$I = m.R^2$

Assim,

$$\alpha = \frac{M.g}{m.R}$$

A potência instantânea que o ratinho gasta é dada por:

$$P = \tau.\omega$$

Sendo $\omega = \alpha.t$

Assim, $P = M.g.R.\frac{M.g}{m.R}.t = \frac{M^2.g^2}{m}.t$

Para acharmos a energia gasta, fazemos: $E = \int_0^T P.dt = \int_0^T \frac{M^2.g^2}{m}.t.dt$

Logo,

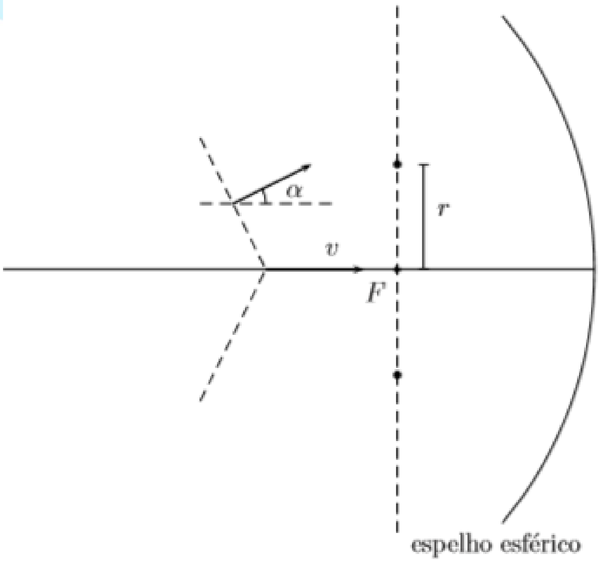
$$E = \frac{M^2.g^2}{m}.\frac{T^2}{2}$$

LETRA A.

Lembre-se: $\int a.x^n.dx = a.\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$

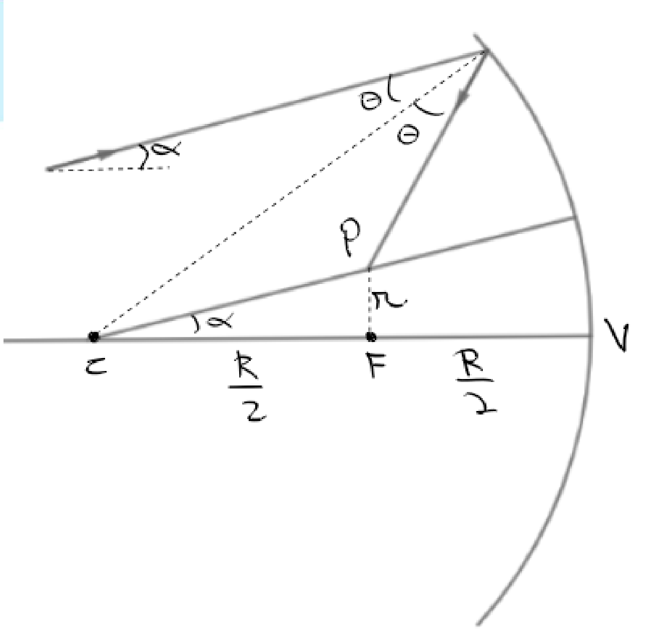
14) ITA – 2015

Uma partícula eletricamente carregada move-se num meio de índice de refração n com uma velocidade v = βc, em que β > 1 e c é a velocidade da luz. A cada instante, a posição da partícula se constitui no vértice de uma frente de onda cônica de luz por ela produzida que se propaga numa direção α em relação à da trajetória da partícula, incidindo em um espelho esférico de raio R, como mostra a figura. Após se refletirem no espelho, as ondas convergem para um mesmo anel no plano focal do espelho em F. Calcule o ângulo α e a velocidade v da partícula em função de c, r, R e n.



SOLUÇÃO: Primeiramente, vamos considerar algumas coisas:

1) Quando um raio de luz incide em um espelho esférico, esse é refletido com o mesmo ângulo (θ no desenho) em relação a normal.
2) A normal é uma reta que vai do ponto de incidência até o centro do espelho
3) Quando um raio não paralelo ao eixo do espelho (horizontal no desenho) incide num espelho esférico, temos uma regrinha para descobrirmos onde ele reflete. Traçamos uma reta com a mesma inclinação do raio (α no desenho) que passa pelo centro. Onde essa reta traçada cruzar a reta vertical que passa pelo foco (F) temos o ponto para onde o raio refletido irá.
4) O foco está no ponto médio entre o centro do espelho (C) e o vértice do espelho (V).



Analisando o triângulo CPF podemos tirar que:

$$tg\alpha = \frac{r}{\frac{R}{2}} = \frac{2.r}{R}$$

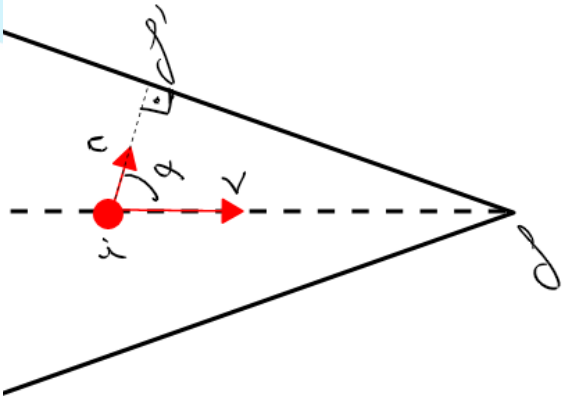
Agora, indo para a Física, podemos pensar "mas como a partícula pode estar mais rápido que a luz??"

Veja bem, caro aluno BBF, nada pode ser mais rápido que a luz no VÁCUO, não há nenhuma restrição para algo ser mais rápido do que a luz num meio diferente…

c é a velocidade da luz no meio em questão, podemos, para evitar confusões, chamar a velocidade da luz no vácuo de c_v.

A questão trata de um efeito conhecido como Efeito Cerenkov, em que um cone de luz é gerado pelo fato de que a fonte está mais rápida que a própria onda emitida. Muitos podem estar mais acostumados com o Cone de Match, que é quando se trata do mesmo fenômeno do cone, só que aplicado a ondas sonoras.

Vamos desenhar esse cone, entender seu formato e tirar conclusões matemáticas dele:



No tempo (Δt) que a partícula vai de i até f, a luz vai de i até f' e isso fera o formato cônico.

O ângulo α nesse desenho ficou parecendo diferente do outro desenho, mas são representações. Eles são iguais!

A distância de i a f vale: $d = v.\Delta t$

A distância de i a f' vale: $d' = c.\Delta t$

Assim, $cos\alpha = \frac{d'}{d} = \frac{c}{v}$

Sabemos que : $(tg\alpha)^2 = \frac{(sen\alpha)^2}{(cos\alpha)^2} = \frac{1-(cos\alpha)^2}{(cos\alpha)^2}$

Pois da relação fundamental da trigonometria, $(sen\alpha)^2 + (cos\alpha)^2 = 1$

Mas nós tinhamos o valor de $tg\alpha$ calculado anteriormente, logo:

$$\left(\frac{2.r}{R}\right)^2 = \frac{1-\left(\frac{c}{v}\right)^2}{\left(\frac{c}{v}\right)^2}$$

Isolando com CUIDADO a velocidade v, temos:

$$v = \frac{c.\sqrt{4.r^2 + R^2}}{R}$$

O enunciado pediu também o ângulo α e não sua tangente, assim, devemos escrever:

$$\alpha = arctg\left(\frac{2.r}{R}\right)$$

Básico Bem Feito

Obs.: Lembre-se de que o índice de refração da luz é definido como a razão entre a velocidade da luz no vácuo e a velocidade da luz em um determinado meio.

Assim,

$$n = \frac{c_v}{c}$$

Desse modo, a resposta pode ser dada da seguinte maneira também:

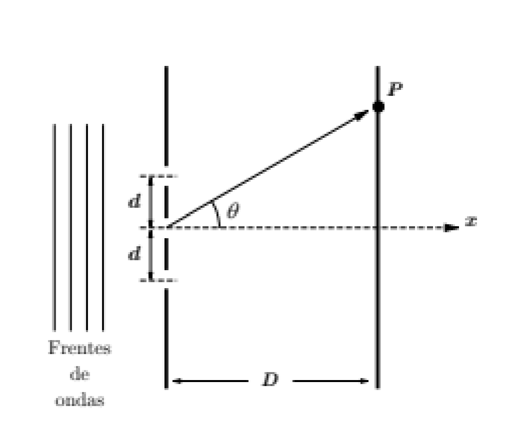
$$v = \frac{c_v.\sqrt{4.r^2 + R^2}}{n.R}$$

15) ITA – 2020

Frentes de ondas planas de luz, de comprimento de onda λ, incidem num conjunto de três fendas, com a do centro situando-se a uma distância d das demais, conforme ilustra a figura. A uma distância D ≫ d, um anteparo registra o padrão de interferência gerado pela difração da onda devido às fendas. Calcule:

(a) A razão entre a intensidade da franja clara central e a das franjas claras vizinhas.

(b) Os ângulos θ_n para os quais ocorrem franjas escuras.



SOLUÇÃO: Essa questão possui uma solução puramente trigonométrica...

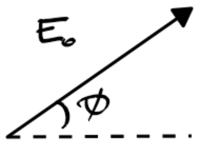
Mas acreditamos que o ITA a colocou como quem diz "a partir de agora, a ideia de fasores poderá ser cobrada na prova...".

Sendo assim, vamos ao básico de fasores.

Fasores nada mais são do que representações de uma senoide ou uma cossenoide. No caso do exercício, o campo elétrico é a nossa grandeza cossenoidal. Vejamos:

$$E = E_0 . \cos{(\omega . t + \Phi)}$$

Podemos representar esse campo com um vetor, da seguinte forma:



Um vetor de módulo E_0 e inclinção com a horizontal de Φ.

Agora que sabemos construir um vetor com base na interpretação fasorial de uma função senoidal, podemos passar para a próxima etapa.

Em um diagrama de fasores, se quisermos descobrir os efeitos de vários campos, podemos somar esses vetores!

Na questão temos 3 fendas, podemos considerar que a primeira tem fase inicial nula, a segunda tem uma fase inicial Φ e, consequentemente, a terceira tem uma fase inicial $2.\Phi$ já que elas estão igualmente espaçadas.

Essa fase inicial (Φ) é a diferença de fases causada pelo comprimento a mais que uma onda percorre em relação a outra, que no caso vale $d. sen\theta$, algo bem semelhante com a dupla fenda de Young, em que se considera os raios paralelos.

Sabemos que a diferença de fases causada por um deslocamento Δx é:

$$\Phi = \frac{2. \pi . \Delta x}{\lambda}$$

No nosso caso, temos:

$$\Phi = \frac{2. \pi . d. sen\theta}{\lambda}$$

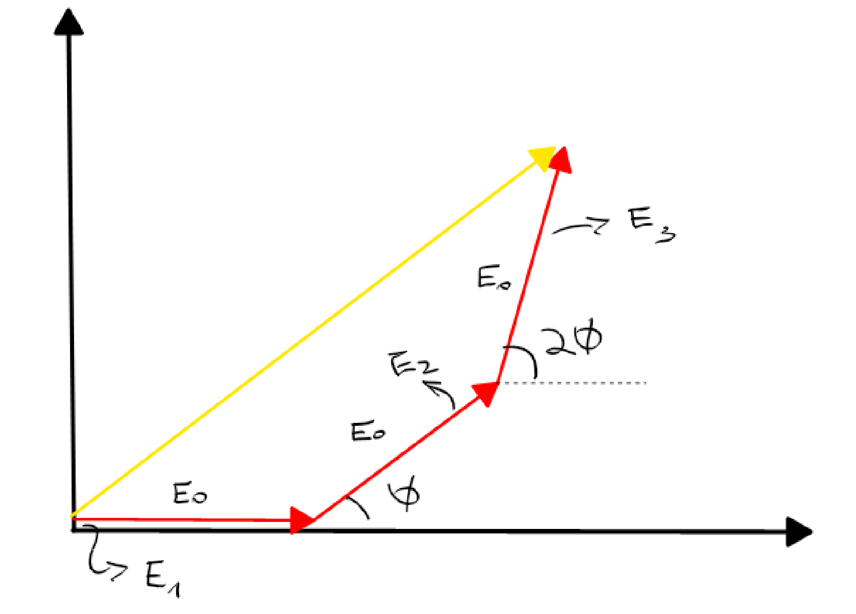
Assim, as três funções de campo elétrico delas são:

$$E_1 = E_0.\cos(\omega.t)$$

$$E_2 = E_0.\cos(\omega.t + \Phi)$$

$$E_3 = E_0.\cos(\omega.t + 2.\Phi)$$

Logo, como queremos descobrir o efeito em conjunto das 3 fendas no anteparo, devemos somar esses campos elétricos e, para facilitar essa operação, usaremos um diagrama de fasores!



O vetor em amarelo representa a soma dos 3 vetores.

Podemos, de forma inteligente, descobrir seu módulo:

Na horizontal (x) , seu tamanho é: $E_x = E_0 + E_0.\cos\,(\Phi) + E_0.\cos\,(2.\Phi)$

Na vertical (y) , seu tamanho é: $E_y = E_0.sen(\Phi) + E_0.sen(2.\Phi)$

Sabemos que: $E^2 = E_x^2 + E_y^2$

Vamos usar que: $\cos(2.\Phi) = 2.\cos^2(\Phi) - 1$

$$sen(2.\Phi) = 2.sen(\Phi).\cos(\Phi)$$

$$E_x^2 = E_0^2.(1 + \cos(\Phi) + 2.\cos^2(\Phi) - 1)^2 = E_0^2.\cos^2(\Phi).(1 + 4.\cos(\Phi) + 4.\cos^2(\Phi))$$

$$E_y^2 = E_0^2.\left(sen(\Phi) + 2.sen(\Phi).cos(\Phi)\right)^2 = E_0^2.sen^2(\Phi).(1 + 4.\cos(\Phi) + 4.\cos^2(\Phi))$$

Somando as duas temos:

$$E^2 = E_0^2.(\,1 + 4.\cos(\Phi) + 4.\cos^2(\Phi)).(sen^2(\Phi) + \cos^2(\Phi))$$

Mas, $sen^2(\Phi) + \cos^2(\Phi) = 1$

Logo,

$$E^2 = E_0^2.(1 + 4.\cos(\Phi) + 4.\cos^2(\Phi))$$

Com isso em mãos, podemos atacar a letra b!

Para as franjas escuras, a intensidade do campo elétrico deve ser nula, matematicamente falando, temos:

$$1 + 4.\cos(\Phi) + 4.\cos^2(\Phi) = 0$$

Resolvendo essa equação do segundo grau, temos:

$$\cos(\Phi) = -\frac{1}{2}$$

Da trigonometria, temos que os ângulos que satisfazem isso, são:

$$\Phi = \frac{2.\pi}{3} + k.\pi \quad ou \quad \Phi = \frac{4.\pi}{3} + k.\pi\,, com\ k\ inteiro$$

Mas, lembre-se que tinhamos:

$$\Phi = \frac{2.\pi.d.sen\theta}{\lambda}$$

Logo,

Isolando $sen\theta$, podemos escrever:

$$\theta = arcsen\left(\frac{\lambda}{3.d} + \frac{k.\lambda}{2.d}\right) \quad ou \quad \theta = arcsen\left(\frac{2.\lambda}{3.d} + \frac{k.\lambda}{2.d}\right)$$

Com $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, já que angulos maiores que $\frac{\pi}{2}$ não atingirão o anteparo.

Agora vamos para a letra a.

O máximo central ocorre quando os três vetores do campo elétrico estão alinhados (máxima soma). Assim, $E_{central} = 3.E_0$

Já o máximo vizinho ao central (segundo mais claro) ocorre quando dois vetores se anulam e o outro "sobra" (Ou seja, um tem fase 0, o outro tem fase π e o último tem fase $2.\pi$). Assim, $E_{vizinha} = E_0$

Sabemos que a intensidade de uma onda eletromagnética depende do quadrado do campo elétrico, matematicamente, temos:

Básico Bem Feito

$I = k.E^2$, onde k é uma constante.

Assim, a razão pedida $\frac{I_{central}}{I_{vizinha}} = \frac{E^2_{central}}{E^2_{vizinha}} = \frac{(3.E_0)^2}{(E_0)^2} = 9$

Logo,

$$\frac{I_{central}}{I_{vizinha}} = 9$$

16) ITA – 2016

Um bloco de massa m encontra-se inicialmente em repouso sobre uma plataforma apoiada por uma mola, como visto na figura. Em seguida, uma pessoa de massa M sobe na plataforma e ergue o bloco até uma altura h da plataforma, sendo que está se desloca para baixo até uma distância d. Quando o bloco é solto das mãos, o sistema (plataforma + pessoa + mola) começa a oscilar e, ao fim da primeira oscilação completa, o bloco colide com a superfície da plataforma num choque totalmente inelástico. A razão entre a amplitude da primeira oscilação e a da que se segue após o choque é igual a:

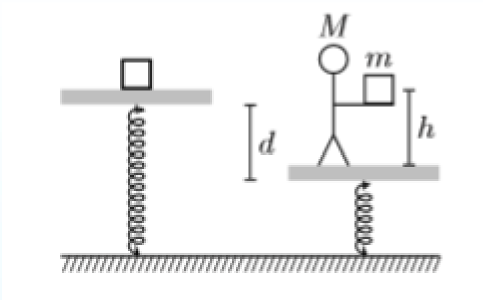
A) $\frac{\sqrt{(m+M)}}{\sqrt{2\pi M}}$

B) $\frac{\sqrt{(M-m)h}}{\sqrt{2dM}}$

C) $\frac{\sqrt{(M+m)h}}{\sqrt{2dM}}$

D) $\frac{\sqrt{(M-m)d}}{\sqrt{2hM}}$

E) $\frac{\sqrt{(M+m)d}}{\sqrt{hM}}$



SOLUÇÃO:

Primeiramente, temos que ter em mente que a oscilação completa que o enunciado cita é em relação à posição de equilíbrio do sistema! Mas qual é essa posição é essa??? Ora, com o bloco no ar, o sistema é apenas "pessoa+mola" e para essa posição a elongação de equilíbrio da mola é:

$$k.x = M.g$$

Logo,

$$x = \frac{M.g}{k}$$

Após uma oscilação completa o sistema volta a posição original, uma posição que conforme o início do movimento está em repouso!

No choque a quantidade de movimento é conservado e podemos achar a velocidade do novo sistema (homem+mola+bloco) para baixo.

Antes, precisávamos conhecer a velocidade do bloco no instante da queda.

Para isso, conservamos sua energia na queda, de modo que sua energia potencial gravitacional se transforma em energia cinética:

$\frac{m.v_b^2}{2} = m.g.h$, logo $v_b = \sqrt{2.g.h}$

Conservando a quantidade de movimento, temos:

$m.\sqrt{2.g.h} = (m + M).v_s$ em que v_s é a velocidade do novo sistema.

Assim, $v_s = \frac{m.\sqrt{2.g.h}}{(m+M)}$

Sabemos que como o sistema mudou, sua posição de equilíbrio mudou e não podemos nos esquecer disso, pois amplitude sempre é medida em relação à posição de equilíbrio!

Como o bloco bateu na exata posição onde antes estava homem+bloco, ele caiu exatamente na sua posição de equilíbrio! Logo, tudo aquilo que ele descer a partir disso é exatamente sua nova amplitude!!!

Podemos conservar a energia entre esse instante e o instante em que o conjunto para (energia cinética zero) e consequentemente é o ponto de elongação máxima (amplitude).

Para qualquer MHS, como é o caso, vale que $\frac{k.A'^2}{2} = \frac{m_s.v^2}{2}$

Onde A' é a amplitude (NÃO CONFUNDIR COM A ELONGAÇÃO DA MOLA, pois a mola já estava distendida, aqui é só a amplitude mesmo, pense como sendo um MHS horizontal, funciona do mesmo jeito e esse bizu facilita pra não ter que montar uma equação gigante com energia elástica, cinética e potencial gravitacional). Além disso, v é a velocidade da posição de equilíbrio, no nosso caso v_s e m_s é a massa total do sistema, no caso $(M+m)$.

Assim, $\frac{k.A'^2}{2} = \frac{(M+m).\left(\frac{m.\sqrt{2.g.h}}{(m+M)}\right)^2}{2}$

Isolando A, temos:

$$A' = \sqrt{\frac{2.g.h.m^2}{k.(M+m)}}$$

Agora, para a primeira oscilação, como havíamos comentado, a posição de equilíbrio dessa posição é:

$$x = \frac{M.g}{k}$$

Mas, a mola não estava na posição de equilíbrio, pois quando o bloco foi solto aquela era a posição de equilíbrio de homem+mola+bloco, ou seja, deslocado de:

$$x' = \frac{(M+m).g}{k}$$

Ou seja, a amplitude era de $x' - x$

Ou seja, $A = \frac{m.g}{k}$

Assim, podemos finalmente calcular $\frac{A}{A'} = \frac{\frac{m.g}{k}}{\sqrt{\frac{2.g.h.m^2}{k.(M+m)}}} = \sqrt{\frac{(M+m).g}{2.h.k}}$

Mas nenhuma das alternativas tem a letra k...

Felizmente isso pode ser facilmente ajustado! Perceba que o enunciado informou que o deslocamento extra causado quando o homem subiu na mola é d e o peso extra que ele adicionou foi de $M.g$.

Ou seja, $k.d = M.g$, logo $k = \frac{M.g}{d}$

Substituindo k na expressão final, temos:

$$\frac{A}{A'} = \sqrt{\frac{(M+m).d}{2.h.M}}$$

INFELIZMENTE NÃO HÁ RESPOSTA... ERRO BIZARRO DO ITA... uma questão tão linda e extremamente difícil sem resposta!!!

17) ITA – 1993

Os dois vasos comunicantes da figura são abertos, têm seções retas iguais a S e contêm um líquido de massa específica igual a ρ. Introduz-se no vaso esquerdo um cilindro maciço e homogêneo de massa M, seção S'<S e menos denso que o líquido. O cilindro é introduzido e abandonado de modo que, no equilíbrio, seu eixo permaneça na vertical. Podemos afirmar que, no equilíbrio, o nível de ambos os vasos sobe:

A) M/ $[\rho(S - S')]$
B) M/ $[\rho(2S - S')]$
C) M/ $[2\rho(2S - S')]$
D) 2M/ $[2\rho(2S - S')]$
E) M/ $[2\rho S]$

Solução:

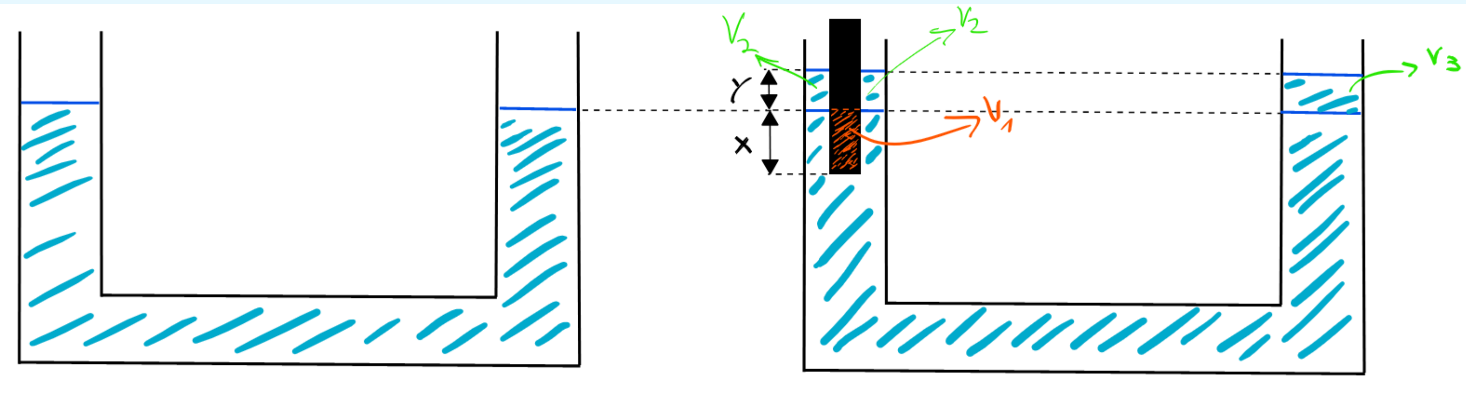
Uma questão que era pra ser fácil, mas MUITOS alunos insistem em errar.

Tudo é resolvido quando se compara estado final e inicial!

Precisamos de duas coisas:

1) Montar a equação do equilíbrio do cilindro
2) Analisar o fluxo de volume no tubo

Vejamos o desenho:



i) $$E = P$$
$$\rho.g.S'.(x+y) = M.g$$

ii) Perceba que o volume de água subiu devido parte do cilindro que adentrou a água. Mas não podemos nos confundir e achar que o esse volume que adentrou é $S'.(x+y)$, pois o volume $S.y$ é a consequencia da entrada do cilíndro! Temos que analisar em relação ao que tinhamos antes de o cilíndro entrar, ou seja, somente o volume $S.x$ deslocou a água, gerando o volume extra $S'.y$ que subiu. Muitos perdem a questão exatamente aqui!!!

Assim, $V_1 = 2.V_2 + V_3$

Logo, $S'.x = (S - S').y + S.y$

$$x = \frac{(2.S - S').y}{S'}$$

Substituindo x na equação, podemos achar y.

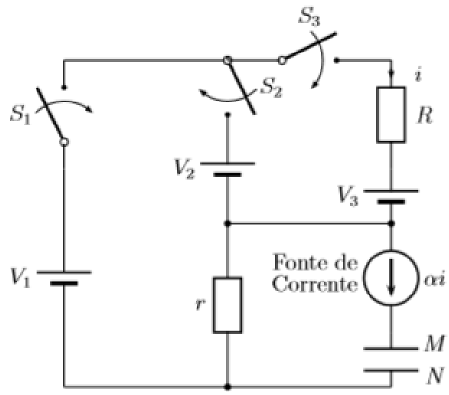
Com cuidado, obtemos:

$$y = \frac{M}{2.\rho.S}$$

18) ITA – 2014

Uma fonte de corrente é um dispositivo que fornece uma corrente invariável independentemente da tensão entre seus terminais. No circuito da figura, a corrente αi produzida pela fonte é proporcional à corrente i que circula no resistor R. Inicialmente descarregadas, as placas M e N são carregadas após o fechamento das chaves S1, S2 e S3, que serão novamente abertas após um intervalo de tempo T. A placa M é então retirada do circuito e é posta em contato com um condutor C descarregado (não mostrado na figura), ao qual transfere uma fração f de sua carga. Em seguida, com esse contato desfeito, o condutor C é totalmente descarregado. Na sequência, o mesmo procedimento é aplicado à placa N, a qual transfere a C a mesma fração f de sua carga.

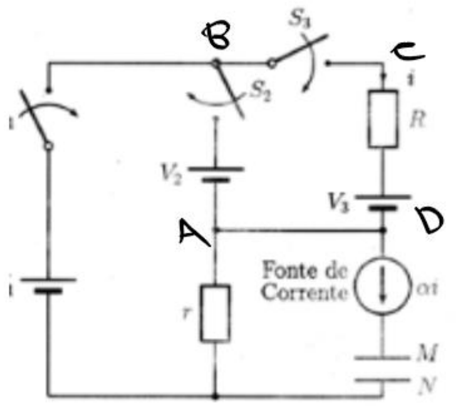
sendo então o contato desfeito e descarregando-se novamente C. Quando M e N são reintroduzidas no circuito, com as respectivas cargas remanescentes (de mesmo módulo, mas de sinais opostos), as chaves S1, S2 e S3 são fechadas outra vez, permanecendo assim durante o



intervalo de tempo T, após o que são novamente abertas. Então, como antes, repetem-se os contatos entre cada placa e C, e este processo de carga/descarga das placas é repetido indefinidamente. Nestas condições, considerando os sucessivos processos de transferência de carga entre M e C, e N e C, determine a carga q de M após todo esse procedimento em função de α, f, r, R, V1, V2, V3 e T. Considere V3 < V2 < V1.

SOLUÇÃO: Questão que os alunos geralmente têm bastante dificuldade, pois fonte de corrente é algo pouco trabalhado nas escolas e cursinhos…

Bem, nesse exercício, não precisamos nem sequer entender seu funcionamento, apenas seguir as orientações do enunciado! Então vamos lá!



Primeiramente vamos usar a Lei das Malhas na malha ABCD:

$$V_2 - R.i - V_3 = 0$$

Daí, tiramos que:

$$i = \frac{V_2 - V_3}{R}$$

Como a fonte de corrente mantém uma corrente $\alpha.i$, achamos também essa corrente, que será:

$$\frac{\alpha.(V_2 - V_3)}{R}$$

A carga armazenada no capacitor em um tempo T é dada por:

$$Q = \alpha.i.\mathrm{T}$$

Logo, $Q = \frac{\alpha.(V_2 - V_3).T}{R}$

Após o contato com o condutor, temos que a carga restante é:

$$Q' = Q - f.Q = (1 - f).Q$$

O que acontecerá agora, no mesmo intervalo t, é que o capacitor vai receber novamente uma carga Q, ficando com carga $Q' + Q$.

De modo que após outra descarga, ficaremos com:

$$Q'' = (1 - f)(Q' + Q)$$

Ou seja, $Q'' = (1-f)\big((1-f)Q + Q\big) = \big((1-f)^2 + (1-f)\big).Q$

Perceba o padrão, se fizéssemos todo o processo de novo, teríamos:

$$Q''' = (1-f)(Q'' + Q)$$

Ou seja, $Q''' = (1-f)\big(\big((1-f)^2 + (1-f)\big).Q + Q\big) = \big((1-f)^3 + (1-f)^2 + (1-f)\big).Q$

Agora, deu para perceber não é mesmo?

Após "infinitas" vezes teríamos:

$$Q'^{\cdots\prime} = q = \big((1-f) + (1-f)^2 + (1-f)^3 + \cdots\big).Q$$

Temos uma soma de P.G infinita com razão $1-f$ (positiva e menor que 1) e termo inicial $(1-f)$.

Assim, $q = \frac{1-f}{1-(1-f)}.Q = \frac{1-f}{f}.Q$

Substituindo Q que já tinhamos encontrado, ficamos com:

$$q = \frac{1-f}{f}.\frac{\alpha.(V_2 - V_3).\mathrm{T}}{R}$$

19) ITA – 2014

Uma amostra I de átomos de Fe^{57}, cujos núcleos excitados emitem fótons devido a uma transição nuclear, está situada a uma altura d verticalmente acima de uma amostra II de Fe^{57} que recebe a radiação emitida pela amostra I. Ao chegar a II, os fótons da amostra I sofrem um aumento de frequência devido à redução de sua energia potencial gravitacional, sendo, portanto, incapazes de excitar os núcleos de Fe^{57} dessa amostra. No entanto, essa incapacidade pode ser anulada se a amostra I se afastar verticalmente da amostra II com uma velocidade v adequada. Considerando v ≪ c e que a energia potencial gravitacional do fóton de energia E pode ser obtida mediante sua "massa efetiva" E/c2, assinale a opção que explicita v. Se necessário, utilize $(1+x)^n \cong 1 + nx\ para\ x \ll 1$.

SOLUÇÃO: Os alunos têm bastante dificuldade nessa questão, principalmente porque trata-se de uma situação bem difícil de se abstrair...

"Fótons tem peso???"

Acalme-se...

Básico Bem Feito

Na verdade, o que acontece aqui é que a matemática envolvida no fenômeno pode ser tratada de maneira "clássica", de modo que os resultados encontrados sejam satisfatórios.

1) Conservação da energia:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + m.g.d$$

Mas o que seria essa energia? Ora, a energia do fóton. E como sabemos ela é dada por $E = h.f$ (depende da frequência apenas). Além disso, usaremos no lugar de m a massa efetiva fornecida pelo enunciado.

Assim,

$$h.f = h.f_0 + \frac{\mathcal{E}_0}{c^2}.g.d$$

Uma dúvida que pode surgir é "mas essa energia da massa efetiva é a inicial ou a final?". No caso é a inicial, pois é essa energia que "sofrerá influência da gravidade" gerando uma nova energia.

Substituindo $\mathcal{E}_0 = h.f_0$ e manipulando, temos:

$$f - f_0 = \frac{g.d}{c^2}.f_0$$

Logo,

$$\frac{f}{f_0} = \frac{g.d}{c^2} + 1.$$

A frequência aumentou e ficou incapaz de excitar a segunda amostra.

Mas sabemos reduzir a frequência das ondas... Basta usarmos um Efeito Doppler de redução de energia. Para isso, conforme instrui o enunciado, afastamos a fonte com uma velocidade v. Assim, faremos nossa amostra que agora tem frequência f voltar a ter frquência f_0 e sendo capaz de excitar a amostra 2.

2) Efeito Doppler relativístico:

$$f_0 = f.\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

Onde $\beta = \frac{v}{c}$ e c é a velocidade da luz.

Usamos o sinal de cima negativo pois há afastamento (decréscimo de frequência) e o sinal debaixo é sempre o contrário do de cima.

Assim,

$$f_0 = f.(1-\beta)^{\frac{1}{2}}.(1+\beta)^{-\frac{1}{2}}$$

Podemos agora usar a aproximação do enunciado $(1+x)^n = 1 + n.x$.

Isso pode ser feito, pois $\beta \ll 1$. (já que $v \ll c$)

Assim:

$$(1-\beta)^{\frac{1}{2}} = (1-\frac{\beta}{2}) \quad \text{e} \quad (1+\beta)^{-\frac{1}{2}} = (1-\frac{\beta}{2})$$

Logo, ficamos com:

$$f_0 = f.\left(1-\frac{\beta}{2}\right)^2$$

Usando a aproximação novamente, já que $\frac{\beta}{2} < \beta \ll 1$

Assim,

$$f_0 = f.(1-\beta)$$

Assim, $\frac{f}{f_0} = \frac{1}{1-\beta} = (1+\beta)^{-1} = (1+\beta)$ (usando novamente a aproximação)

Mas, sabemos que:

$$\frac{f}{f_0} = \frac{g.d}{c^2} + 1.$$

Logo,

$$\frac{g.d}{c^2} + 1 = 1 + \beta$$

Ou seja,

$$\beta = \frac{g.d}{c^2}$$

Substituindo β, temos:

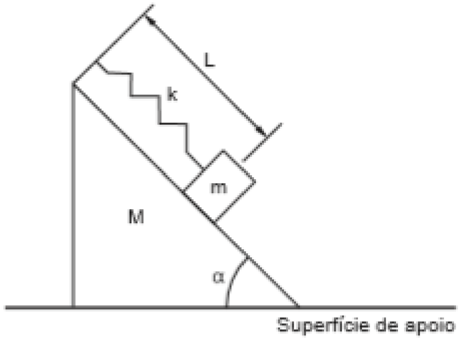
$$\frac{v}{c} = \frac{g.d}{c^2}$$

E finalmente, chegamos a resposta:

$$v = \frac{g.d}{c}$$

20) ITA – 2000

Um corpo de massa m desliza sem atrito sobre a superfície plana (e inclinada de um ângulo α em relação à horizontal) de um bloco de massa M sob a ação da mola, mostrada na figura. Esta mola, de



constante elástica k e comprimento natural C, tem suas extremidades respectivamente fixadas ao corpo de massa m e ao bloco. Por sua vez, o bloco pode deslizar sem atrito sobre a superfície plana e horizontal em que se apoia. O corpo é puxado até uma posição em que a mola seja distendida elasticamente a um comprimento L (L > C), tal que, ao ser liberado, o corpo passa pela posição em que a força elástica é nula. Nessa posição o módulo da velocidade do bloco é:

a) $\sqrt{\dfrac{2.m.\left(\frac{k.(L-C)^2}{2} - m.g.(L-C).sen\alpha\right)}{M^2(1+(sen\alpha)^2)}}$

b) $\sqrt{\dfrac{2.m.\left(\frac{k.(L-C)^2}{2} - m.g.(L-C).sen\alpha\right)}{M^2(1+(tg\alpha)^2)}}$

c) $\sqrt{\dfrac{2.m.\left(\frac{k.(L-C)^2}{2} - m.g.(L-C).sen\alpha\right)}{(M+m)(M+(M+m).(tg\alpha)^2)}}$

d) $\sqrt{\dfrac{2.m.\left(\frac{k.(L-C)^2}{2}\right)}{M^2(1+(tg\alpha)^2)}}$

e) 0

SOLUÇÃO: Primeiramente, uma erro conceitual que já devemos eliminar DE CARA é: o corpo não desce com um ângulo α em relação a terra! Pense: a medida que ele desce, o bloco (M) desloca e seu movimento é alterado, modificando o ângulo. Em relação ao bloco, ai sim ele desce em com ângulo α. (num referencial em que se para a bloco).

1) Como só existem forças internas (entre bloco e corpo) no eixo horizontal, podemos conservar a quantidade de movimento nesse eixo.
   Sendo v_x a velocidade do bloco em relação à terra no eixo x e V a velocidade do corpo, temos:
   $$m.v_x = M.V$$
2) Podemos conservar a energia do sistema, já que não há forças dissipativas. Vamos conservar a energia do ponto de liberação até o ponto de relaxamento da mola (energia potencial elástica nula). Além disso, consideraremos o ponto de lançamento como tendo energia potencial gravitacional nula.
   $$\frac{k.(L-C)^2}{2} = \frac{\left(m.\left(v_x^2 + v_y^2\right)\right)^2}{2} + \frac{M.V^2}{2} + m.g.(L-C).sen\alpha$$
   Explicando: para o bloco: $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ e $(L-C).sen\alpha$ é a distância percorrida pelo bloquinho decomposto na vertical.
3) Vínculo Geométrico. No referencial do bloco, o corpo desce com ângulo α. Mas como entramos no referencial do bloco? Ora, é só colocar ele parado! Mas se paramos ele, todos os outros componentes do sistema ganham uma velocidade V.
   Na direção x, temos: $v_x = v_{x_{bloco}} + v_{cunha}$
   v_x: velocidade do corpo em relação a terra em x.
   $v_{x_{bloco}}$: velocidade do corpo em relação ao bloco em x.
   v_{cunha}: velocidade do bloco em relação à terra.
   Temos: $v_{cunha} = -V$ (sentido contrário da velocidade do corpo).
   Logo,
   $$v_{x_{bloco}} = v_x + V$$
   Obs.: v_y é o mesmo em relação à terra e ao bloco, pois o bloco não se move em y.
   Em relação ao bloco temos:

Básico Bem Feito

$$tg\alpha = \frac{v_y}{v_{x_{bloco}}} = \frac{v_y}{v_x + V} \ (3)$$

De 1) tiramos: $v_x = \frac{M}{m}.V$

Com 1) em 3) tiramos que:

$$v_y = \frac{tg\alpha.(M+m)}{m}.V$$

Substituindo v_x e v_y em 2) temos:

$$\frac{k.(L-C)^2}{2} = \frac{m.\left(\left(\frac{M}{m}.V\right)^2 + \left(\frac{tg\alpha.(M+m)}{m}.V\right)^2\right)}{2} + \frac{M.V^2}{2} + m.g.(L-C).sen\alpha$$

Assim,

$$\frac{k.(L-C)^2}{2} - m.g.(L-C).sen\alpha = \frac{M^2+(M+m)^2.(tg\alpha)^2}{2.m}.V^2 + \frac{M}{2}.V^2$$

Assim,

$$\frac{k.(L-C)^2}{2} - m.g.(L-C).sen\alpha = \frac{V^2}{2.m}.(M^2 + (M+m)^2.(tg\alpha)^2 + M.m)$$

$$\frac{k.(L-C)^2}{2} - m.g.(L-C).sen\alpha = \frac{V^2}{2.m}.(M(M+m) + (M+m)^2.(tg\alpha)^2)$$

$$\frac{k.(L-C)^2}{2} - m.g.(L-C).sen\alpha = \frac{V^2}{2.m}.(M+m)(M + (M+m).(tg\alpha)^2)$$

Isolando V^2 e tirando a raiz, temos:

$$\sqrt{\frac{2.m.\left(\frac{k.(L-C)^2}{2} - m.g.(L-C).sen\alpha\right)}{(M+m)(M+(M+m).(tg\alpha)^2)}}$$

LETRA C.

21) ITA – 2015

Uma espira quadrada, feita de um material metálico homogêneo e rígido, tem resistência elétrica R e é solta em uma região onde atuam o campo gravitacional g= $-ge_z$ e um campo magnético

$$B = \frac{B_0}{L}(-xe_x + ze_z)$$

Inicialmente a espira encontra-se suspensa, conforme a figura, com sua aresta inferior no plano xy num ângulo α com o eixo y, e o seu plano formando um ângulo β com z. Ao ser solta, a espira tende a

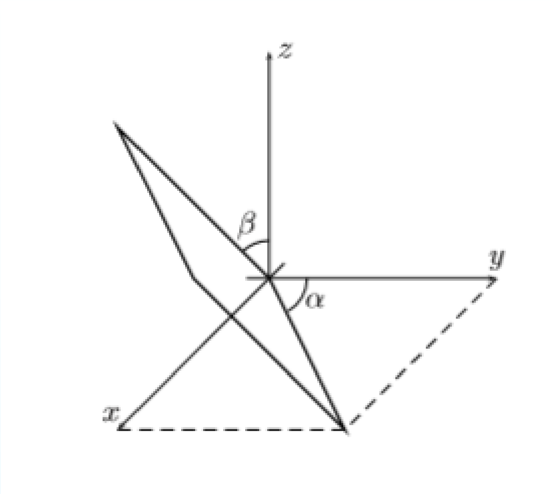
A) Girar para α > 0°, se α=0° e β=0°.

B) Girar para α < 45°, se α=45° e β=0°.

C) Girar para β < 90°, se α=0° e β=90°.

D) Girar para α > 0°, se α=0° e β=45°.

E) Não girar se α=45° e β=90°.



Básico Bem Feito

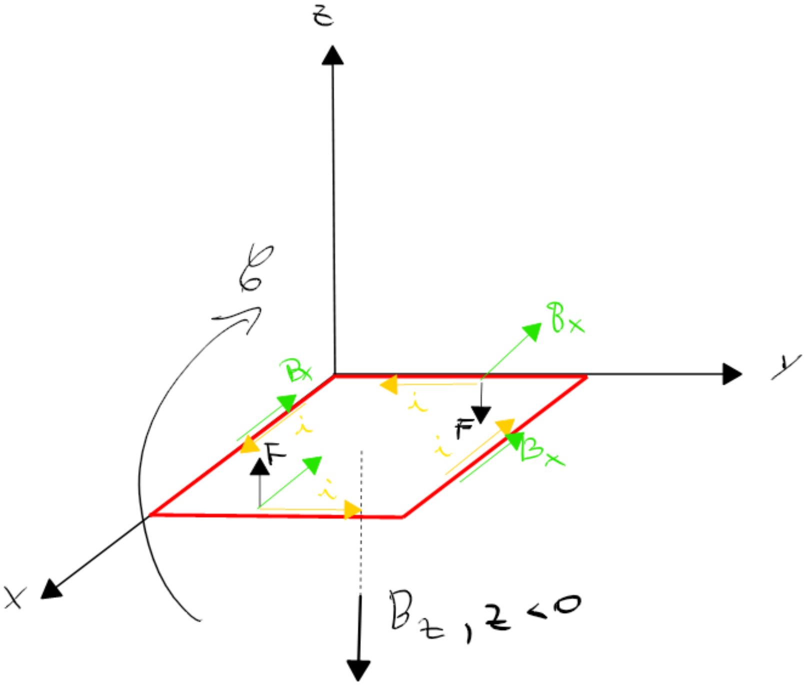
SOLUÇÃO: Essa é uma questão que temos que testar alternativas, pois o comportamento depende da posição inicial.

Então, vamos analisar uma a uma.

Primeiramente, perceba que, se $B = \frac{B_0}{L}.(-x.e_x + z.e_z)$, significa que os campos apontam nas direções x e z e mais, são proporcionais a x e z!

a) Nesse caso, a espira está toda em $x = 0$, logo em x não há fluxo. Em z, mesmo que haja campo, ele não atravessa a espira ($\beta = 0$)... Assim, não há fluxo e muito menos giro e a espira cai em queda livre.

b) Novamente, como $\beta = 0$, em z não há fluxo. Em x, os valores são contantes, assim há fluxo mas como ele não varia não há giro.
c) CORRETO! Nesse caso a espira está no plano xy, em x o campo não atravessa a espira, mas como em z os valores vão aumentando em módulo, já que ela cai por ação da gravidade, o campo em z aumenta na direção negativa de z (já que $z < 0$) e o fluxo, consequentemente, varia. Com isso, surgem correntes na espira, tentando impedir a variação do fluxo. Nesse instante, o campo em x gera uma força nesses fios ($F = B.i.l$), e, consequentemente, surge um torque na espira de modo a diminuir β. Veja Na figura:



d) Como no item C, a espira gira, mas na tentativa de diminuir β e não de aumentar α.
e) Como no item C, a espira gira, tentando diminuir o ângulo β.

22) ITA – 2014

Uma esfera de massa m tampa um buraco circular de raio r no fundo de um recipiente cheio de água de massa específica ρ. Baixando-se lentamente o nível da água, num dado momento a esfera se desprende do fundo do recipiente. Assinale a alternativa que expressa a altura h do nível de água para que isto aconteça, sabendo que o topo da esfera, a uma altura a do fundo do recipiente, permanece sempre coberto de água.

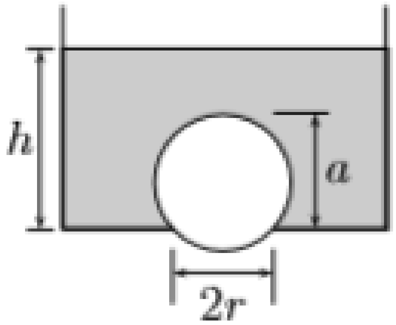
A) $\frac{m}{\rho \pi a^2}$

B) $\frac{m}{\rho \pi r^2}$

C) $\frac{a(3r^2+a^2)}{6r^2}$

D) $\frac{a}{2} - \frac{m}{\rho \pi r^2}$

E) $\frac{a(3r^2+a^2)}{6r^2} - \frac{m}{\rho \pi r^2}$



SOLUÇÃO: Questão interessante por dois motivos:

1) É necessário saber o volume de uma calota esférica.
2) É necessário saber o que é conhecido como "completar empuxo".

i) O volume da calota esférica é $V_{cal} = \frac{1}{3}.\pi.h^2(3R - a)$

Onde R é o raio da esfera e a a altura da calota. Perceba que se $a = 2.R$ (diâmetro), o volume é exatamente o de uma esféra ($\frac{4}{3}.\pi.R^3$)

No caso, não foi dado o raio da esfera, mas sabemos que:

$$R^2 = (a - R)^2 + r^2$$

Logo,

$$R = \frac{a^2 + r^2}{2.a}$$

Assim, o volume é dado por:

$$V_{cal} = \frac{1}{6}.\pi.a.(3r^2 + a^2)$$

ii) Se o corpo estivesse todo envolvido por água, o empuxo sobre ele seria calculado como conhecemos: $E = \rho.g.V$. Mas nessa conta, sabemos que o volume está todo coberto por água, o que não acontece nesse exemplo, já que não há água embaixo da esfera... Na conta clássica, se leva em conta que a pressão da água empurra o bloco pra cima, mas como não tem, ele se sente menos empurrado para cima... ou seja, tem empuxo menor. Mas menor quanto? Ora o valor de força que aquela água produziria, que é a pressão da água daquela profundidade multiplicada pela área onde não há água. Veja bem, estamos tratando da calota e não da esfera, a parte que a água estaria ocupando mas não está é o círculo de raio r.

No momento do descolamento, a normal entre recipiente e esfera deixa de existir, mas água ainda não preencheu essa região, assim, temos:

$$E_{efetivo} = P$$

$$\rho.g.V_{cal} - \rho.g.h.(\pi.r^2) = m.g$$

Substituindo V_{cal}, temos:

$$\rho.g.\frac{1}{6}.\pi.a.(3r^2 + a^2) - \rho.g.h.(\pi.r^2) = m.g$$

Isolando h, temos:

$$h = \frac{a.(3.r^2 + a^2)}{6.r^2} - \frac{m}{\rho.\pi.r^2}$$

Básico Bem Feito

AS 20 QUESTÕES MAIS DIFÍCEIS DE MATEMÁTICA

Básico Bem Feito

MATEMÁTICA ITA (AS MAIS DIFÍCEIS)

1) ITA – 2020

Dado $a \in \mathbb{R}$, defina $p = a + a^2$ e $q = a + a^3$ e considere as seguintes afirmações:

I. Se p ou q é irracional, então a é irracional.
II. Se p e q são racionais, então a é racional.
III. Se q é irracional, então p é irracional.

É(são) VERDADEIRAS(S)

a) Apenas I
b) Apenas II
c) Apenas I e II
d) Apenas I e III
e) Todas

Solução:

I. Vamos analisar a sentença "Se p ou q são irracionais, então a é irracional". Mexer com números irracionais é relativamente complicado. Então, vamos tentar provar de outra maneira. Uma forma é usar a contrapositiva.
Só para recordar o que é contrapositiva, vamos supor uma sentença $A \rightarrow B$. A contrapositiva, ou seja, $\sim B \rightarrow \sim A$, é equivalente à sentença inicial. Em outras palavras, $\sim B \rightarrow \sim A$, para o item da questão, significa que "Se a é racional, então p e q são racionais".
Se provarmos que contrapositiva está certa então a afirmação está certa.
Da questão, vamos supor $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, com $m, n \in \mathbb{Q}$.
Disso, temos que:
$$p = a + a^2 = \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n^2} = \frac{m(m+n)}{n^2} \in \mathbb{Q}$$
$$q = a + a^3 = \frac{m}{n} + \frac{m^3}{n^3} = \frac{m(m^2+n^2)}{n^3} \in \mathbb{Q}$$
Logo, a afirmação é VERDADEIRA!

II. Para resolvermos essa questão, vamos analisar o que foi dado.
$$\begin{cases} p = a + a^2 \\ q = a + a^3 \end{cases}$$

Olhando as expressões, você tem a impressão de que é possível fazer alguma álgebra para obter algo bom. Tentando um pouco, você percebe que:

$$\begin{cases} pa = a^2 + a^3 \\ q = a + a^3 \end{cases} \rightarrow pa - q = a^2 - a$$

Porém, $p = a + a^2$

Assim, temos:

$$pa - q = p - 2a$$
$$a = \frac{p+q}{p+2}$$

Se p e q são racionais, então a é racional. Lembrando que p não pode ser -2, pois isso implicaria $a \notin \mathbb{R}$, uma vez que $a^2 + a + 2 = 0$ não possui raízes reais.

Logo, o item está VERDADEIRO.

III. Provar que algo é falso é mais fácil que provar ser verdadeiro. Para provar que é falso, basta achar um contraexemplo que fure a afirmação. Portanto, vamos primeiro tentar achar esse contraexemplo. Devemos pensar em um a irracional que torne p racional, vamos pegar o número $a = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$. Dessa forma, temos que:

$$p = a + a^2 = \sqrt{2} - \frac{1}{2} + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$$

Porém,

$$q = a + a^3 = \sqrt{2} - \frac{1}{2} + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{15\sqrt{2}}{4} - \frac{29}{8} \notin \mathbb{Q}$$

Sendo assim, a afirmação está FALSA.

Alternativa C

2) ITA – 2013

Considere um sistema na varável real x:

$$\begin{cases} x^2 - x = \alpha \\ x - x^3 = \beta \end{cases}$$

a) Determine os números reais α e β para que o sistema admita somente soluções reais.

b) Para cada valor de β encontrado em (a), determine todas as soluções da equação $x - x^3 = \beta$.

Solução:

a)

Vamos começar encontrando um valor de x pela primeira equação:

$$x^2 - x = \alpha \to x(x-1) = \alpha \to x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\alpha}}{2}$$

Da primeira equação dada com a segunda, temos:

$$x - x^3 = \beta \to -x(x-1)(x+1) = \beta \to (x-1)x(x+1) = -\beta$$

$$\alpha(x+1) = -\beta$$

Se $\alpha = 0$, pela solução da primeira equação, $x = 1$ ou $x = 0$ e $\beta = 0$.

Se $\alpha \neq 0 \to \alpha \geq -\frac{1}{4} \to x = \frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}$ ou $x = \frac{1-\sqrt{1+4\alpha}}{2}$

Vamos achar agora o valor de β.

$$\beta = -x(x+1)(x-1) =$$

$$\beta = -\left(\frac{1 \pm \sqrt{1+4\alpha}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1 \pm \sqrt{1+4\alpha}}{2} + 1\right) \cdot \left(\frac{1 \pm \sqrt{1+4\alpha}}{2} - 1\right)$$

$$\beta = -\left(\frac{1 \pm \sqrt{1+4\alpha}}{2}\right) \cdot \left(\frac{3 \pm \sqrt{1+4\alpha}}{2}\right) \cdot \left(\frac{-1 \pm \sqrt{1+4\alpha}}{2}\right)$$

$$\beta = \frac{-3\alpha \pm \alpha\sqrt{1+4\alpha}}{2}$$

Sendo assim, para que o sistema admita apenas soluções reais, devemos ter que:

$\alpha \geq -\frac{1}{4}$ e $\beta = \frac{-3\alpha \pm \alpha\sqrt{1+4\alpha}}{2}$

b)

Como já usamos a segunda equação para achar os valores de β, então temos que r é uma raiz da equação, em que $r = \frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}$ ou $r = \frac{1-\sqrt{1+4\alpha}}{2}$. Agora, vamos encontrar as outras duas raízes.

$$x^3 - x + \beta = 0$$

Como r é uma raiz e x_2 e x_3 as outras raízes, podemos escrever as relações de girard:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + r = 0 \\ x_1 x_2 r = -\beta = r(r+1)(r-1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = -r \\ x_1 x_2 = (r+1)(r-1) \end{cases}$$

Dessa forma, x_2 e x_3 são as raízes da seguinte equação:

$$x^2 + rx + r^2 - 1 = 0$$

Fazendo Delta e Bhaskara, temos que:

$$x_2 = \frac{-r + \sqrt{4 - 3r^2}}{2} \; e \; x_2 = \frac{-r - \sqrt{4 - 3r^2}}{2}$$

Logo, as soluções são:

$$\left\{ r, \frac{-r + \sqrt{4 - 3r^2}}{2}, \frac{-r - \sqrt{4 - 3r^2}}{2} \right\}$$

Em que $r = \frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}$ ou $r = \frac{1-\sqrt{1+4\alpha}}{2}$.

3) ITA – 2010

Considere o polinômio $p(x) = \sum_{n=0}^{6} a_n x^n$, com coeficientes reais, sendo $a_0 \neq 0$ e $a_6 = 1$. Sabe-se que se r é raiz de p, $-r$ também é raiz de p. Analise a veracidade ou falsidade das afirmações:

I. Se r_1 e r_2, $|r_1| \neq |r_2|$, são raízes reais e r_3 é raiz não real de p, então r_3 é imaginário puro;
II. Se r é raiz dupla de p, então r é real ou imaginário puro;
III. $a_0 < 0$

Solução:

I. Para resolvermos essa questão, vamos prestar muita atenção na informação desse item. Ele diz que o polinômio tem duas raízes reais, r_1 e r_2. Além disso, pelo enunciado, sabemos que se r é raiz de p, então $-r$ também é raiz de p. Como as raízes reais são diferentes, pois $|r_1| \neq |r_2|$,

então r_1, $-r_1$, r_2, -r_2 são raízes da equação. Além disso r_3, que é um número complexo, também é raiz de p, assim como $-r_3$.
Como $a_0 \neq 0$, temos que $r_i \neq 0$, com $i = 1, 2, 3$.
Dessa forma, temos que:

$$(r_1)(-r_1)(r_2)(-r_2)(r_3)(-r_3) = \frac{a_0}{1} \Rightarrow -(r_1 r_2 r_3)^2 = a_0 \Rightarrow r_3^2 = -\frac{a_0}{(r_1 r_2)^2} \in \mathbb{R}$$

Como r_3é um número imaginário, podemos escrevê-lo como $r_3 = a + bi$.

$$r_3^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi.$$

$r_3^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow ab = 0 \Rightarrow b = 0$, pois, pelo enunciado, $a \neq 0$.

Logo, r_3 é imaginário puro. A afirmação está VERDADEIRA.

II. Vamos dizer que r é raiz dupla de p e não é nem imaginário puro nem real puro. Ou seja, ele pode ser escrito na forma $r = a + bi$.
Se r é raiz dupla de p, então $\overline{r}$ também é raiz dupla de p. Agora, o passo matador da questão, é perceber que, se r é raiz dupla, então $-r$ não vai ser necessariamente raiz dupla.
Basta analisarmos o exemplo do polinômio $x^3 + x^2 - x - 1$, que tem raízes $1, 1$ e -1. Não importa qual raiz 1 pegamos, sempre poderemos dizer que -1 será raiz. Esse argumento serve para cada uma das raízes 1. Sendo assim, esperamos que as raízes $r, r, \overline{r}, \overline{r}, -r, -\overline{r}$ sejam as raízes da equação.
Para verificar se um número da forma $r = a + bi$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$ pode ser raiz, vamos verificar se algum par de raízes acima listadas são iguais.

i. Se $r = -\overline{r} \Rightarrow a + bi = -a + bi \Rightarrow a = 0 \Rightarrow r$ imaginário puro. Absurdo.
ii. Se $r = -\overline{r} \Rightarrow 2\overline{r} = 0 \Rightarrow \overline{r} = 0 \Rightarrow \overline{r} = 0$. Absurdo.
iii. Se $r = \overline{r} \Rightarrow a + bi = a - bi \Rightarrow b = 0 \Rightarrow r \in \mathbb{R}$, Absurdo.
iv. Se $r = -r \Rightarrow 2r = 0 \Rightarrow r = 0 \Rightarrow$ Absurdo.

Logo, é possível termos um polinômio sem raízes imaginárias puras ou reais puras que satisfaçam as condições do item. Para exemplificar, vamos analisar o polinômio com raiz dupla $1 + i$ que satisfaz as condições do enunciado. Esse polinômio é da forma:

$$P(x) = [x - (1+i)]^2[x - (1-i)]^2[x + (1+i)][x - (-1+i)]$$
$$P(x) = (x^2 - 2x + 2)^2(x^2 + 2x + 2)$$

Com isso, temos que a afirmação está FALSA.

III. Para verificarmos essa afirmação, vamos tentar provar primeiro se ela é falsa achando um contraexemplo. Do item anterior, temos um polinômio que satisfaz as características do enunciado e tem um termo independente $a_0 > 0$. Com isso, essa afirmação está FALSA.

4) ITA – 2019

Um número natural n, escrito na base 10, tem seis dígitos, sendo 2 o primeiro. Se movermos o dígito 2 da extrema esquerda para a extrema direita, sem alterar a ordem dos dígitos intermediários, o número resultante é três vezes o número original. Determine n.

Solução:

Essa questão do vestibular de 2019 deu trabalho para muitos aprovados. Em meio a uma prova trabalhosa, o raciocínio mais numérico exigido aqui pode não ter surgido de imediato, por isso é sempre bom você voltar nas questões que não conseguiu antes de terminar a prova.

1° Solução:

Seja $n = \overline{2abcde}$, então $\overline{abcde2} = 3 \cdot \overline{2abcde}$

Com isso, temos que:

$$a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + 2$$
$$= 3(2 \cdot 10^5 + a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e)$$

$$a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + 2$$
$$= 6 \cdot 10^5 + 3a \cdot 10^4 + 3b \cdot 10^3 + 3c \cdot 10^2 + 3d \cdot 10 + 3e$$

Agora, o que precisamos é tirar várias conclusões acerca da equação que montamos acima.

Do lado esquerdo temos a soma de potências de 10. Do lado direito, também. Sendo assim, a ideia aqui é comparar os dois lados e encontrar os valores das variáveis.

Primeiramente, vamos olhar para o valor do e. Percebemos que $3e$ tem que deixar resto 2 na divisão por 10. Sendo assim, como e só pode assumir os valores

$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, conclui-se que $e = 4$. Com o valor de d, podemos observar que $3e = 3 \cdot 4 = 12 = 10 + 2$. Dessa forma, o que era $3d \cdot 10$ se torna

$(3d + 1) \cdot 10$, o que, comparando com o lado esquerdo, termina com dígito 4. Assim, como d só pode assumir os valores $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $d = 1$. Seguindo esse mesmo raciocínio, concluímos que $c = 7$, $b = 5$ e $a = 8$.

Então, $n = 285714$.

2º Solução:

Essa solução é mais curta, porém é um pouco menos intuitiva.

Vamos escrever n como sendo:

$$n = 2 \cdot 10^5 + k$$

Assim, quando trocamos a posição do 2, temos que:

$$3n = 10k + 2$$

O número assume a forma $10k + 2$ pois, ao fazer a troca, o dois passa a ser o resto desse número na divisão por 10, enquanto o número k é multiplicado por 10.

$$3(2 \cdot 10^5 + k) = 10k + 2 \Rightarrow k = 85714$$

Dessa forma, $n = 285714$

5) ITA – 1978

Seja a uma constante real. Eliminando θ das equações abaixo:

$$\begin{cases} xsen\theta + ycos\theta = 2asen2\theta \\ xcos\theta - ysen\theta = acos2\theta \end{cases}$$

Obtemos:

a) $(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$
b) $(x+y)^{\frac{2}{3}} - (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$
c) $(x+y)^{\frac{2}{3}} + (y-x)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$
d) $(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{2}$
e) $n.d.a$

Solução:

Para resolvermos essa questão, vamos apelar para a sagacidade de prova. A sagacidade de prova é você perceber que se você começar a mexer nesse sistema sem um objetivo prévio, você pode fazer muitas contas e não chegar em algo bom. Para driblar isso, vamos olhar as alternativas. Observe que tem $x+y$ e $x-y$, então vamos começar achando esses valores! Não sabemos se esse é o melhor caminho, mas é um bom palpite.

Para achar x e y, vamos usar a regra e Crammer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2asen2\theta & cos\theta \\ acos2\theta & -sen\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} sen\theta & cos\theta \\ cos\theta & -sen\theta \end{vmatrix}} = 2asen\theta \cdot sen2\theta + acos\theta \cdot cos2\theta$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} sen\theta & 2asen2\theta \\ cos\theta & acos2\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} sen\theta & cos\theta \\ cos\theta & -sen\theta \end{vmatrix}} = -asen\theta \cdot cos2\theta + 2acos\theta \cdot sen2\theta$$

Com isso, temos que:

$$x \pm y = 2asen\theta sen2\theta + acos\theta cos2\theta \pm asen\theta cos2\theta \pm 2acos\theta sen2\theta =$$

$$2asen\theta \cdot 2sen\theta cos\theta + acos\theta(\cos^2\theta - sen^2\theta) \pm asen(\cos^2\theta - sen^2\theta) \pm 2acos\theta \cdot 2sen\theta cos\theta =$$

$$4asen^2\theta cos\theta + a\cos^3\theta - acos\theta sen^2\theta \pm asen\theta\cos^2\theta \pm asen^3\theta \pm 4asen\theta\cos^2\theta =$$

$$3asen^2\theta cos\theta \pm 3asen\theta \cos^2\theta + a(\cos^3\theta \pm sen^3\theta) =$$

$$a(\cos^3\theta \pm 3\cos^2\theta\, sen\theta + 3cos\theta sen^2\theta \pm sen^3\theta) = a(cos\theta \pm sen\theta)^3$$

Dessa forma, temos que:

$$x + y = a(cos\theta + sen\theta)^3$$

$$x - y = a(cos\theta - sen\theta)^3$$

$$\begin{cases} x + y = a(cos\theta + sen\theta)^3 \\ x - y = a(cos\theta - sen\theta)^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}(cos\theta + sen\theta) \\ (x-y)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}(cos\theta - sen\theta) \end{cases}$$

Elevando ao quadrado as duas equações, temos:

$$\begin{cases} (x+y)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}(cos\theta + sen\theta) \\ (x-y)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}(cos\theta - sen\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}(1 + sen2\theta) \\ (x-y)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}(1 - sen2\theta) \end{cases}$$

Com isso, temos que:

$$(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$$

Alternativa A

6) ITA – 2007

Considere a equação

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$$

a) Para que valores do parâmetro real p a equação admite raízes reais?

b) Determine todas essas raízes.

Solução:

Esse é o tipo de questão que exige de você bastante atenção, pois, caso você esqueça de analisar alguma condição de existência, você pode perder algum intervalo no final do exercício. O método para resolver essas questões de paramétricas basicamente se resume em:

I) Analisar condições de existência no começo da questão e a cada vez que você elevar ao quadrado.

II) Achar o valor no final e comparar com as condições de existência que você obteve ao longo do caminho.

Sendo assim, vamos começar.

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x$$

Condições de existência iniciais:

$$(i)\begin{cases} x^2-p\geq 0 \\ x^2-1\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2\geq p \\ x\geq 1 \end{cases}$$

Elevando ao quadrado:

$$x^2-p+4(x^2-1)+4\sqrt{x^2-p}\cdot\sqrt{x^2-1}=x^2 \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2-p}\cdot\sqrt{x^2-1}=p+4-4x^2$$

Condição de existência depois de elevar ao quadrado:

$$p+4-4x^2\geq 0\Rightarrow x^2\leq\frac{p+4}{4}\ (ii)$$

Elevando novamente a equação ao quadrado, temos:

$$16(x^2-p)(x^2-1)=(p+4-4x^2)^2$$

$$16x^4-16px^2-16x^2+16p=16x^4+p^2+16+8p-8px^2-32x^2$$

$$16x^2-8px^2+8p-p^2-16=0$$

$$(16-8p)x^2=p^2-8p+16\Rightarrow(16-8p)x^2=(p-4)^2$$

$$x=\pm\frac{(p-4)}{2\sqrt{4-2p}}\Rightarrow 4-2p>0\ e\ p<2$$

Agora que achamos os possíveis valores de x, temos que comparar com as condições de existência que fomos encontrando ao longo do caminho. Sendo assim, temos:

Básico Bem Feito

- Com $x \geq 1$, $\frac{(4-p)}{2\sqrt{4-2p}} \geq 1 \Rightarrow 16 - 8p + p^2 \geq 16 - 8p \Rightarrow p^2 \geq 0 \Rightarrow \forall p \in \mathbb{R}$.

  Colocamos o valor $\frac{(4-p)}{2\sqrt{4-2p}}$ na desigualdade inicial pois, para $p < 2$, esse valor é maior que zero.
- Com $x^2 \geq p$, $\frac{(p-4)^2}{16-8p} \geq p \Rightarrow p^2 - 8p + 16 \geq 16p - 8p^2 \Rightarrow 9p^2 - 24p + 16 \geq 0 \Rightarrow (3p-4)^2 \geq 0 \Rightarrow \forall p \in \mathbb{R}$
- Para $x^2 \leq \frac{p+4}{4}$, devemos ter $\frac{(p-4)^2}{16-8p} \leq \frac{p+4}{4} \Rightarrow \frac{(p-4)^2}{4(4-2p)} \leq \frac{p+4}{4} \Rightarrow (p-4)^2 \leq (p+4)(4-2p) \Rightarrow p^2 - 8p + 16 \leq 4p - 2p^2 + 16 - 8p \Rightarrow 3p^2 - 4p \leq 0 \Rightarrow 0 \leq p \leq \frac{4}{3}$

Fazendo a intersecção dos intervalos encontrados, obtemos que $0 \leq p \leq \frac{4}{3}$. Esse intervalo que acabamos encontrar para p está dentro do intervalo de $p \leq 2$, logo, é um intervalo válido. Para os valores de p encontrados, temos que $x = \frac{(4-p)}{\sqrt{8(2-p)}}$.

a) $0 \leq p \leq \frac{4}{3}$

b) $x = \frac{(4-p)}{\sqrt{8(2-p)}}$

7) ITA – 2018

Quantos pares de números inteiros positivos (A, B) existem cujo mínimo múltiplo comum é 126×10^3? Para efeito de contagem, considerar $(A, B) \equiv (B, A)$.

Solução:

Questão mais difícil da prova no ano em que caiu. A dificuldade desse tipo de questão no ITA é devido ao fato de que, na prova do ITA, você tem pouco tempo para cada questão, o que torna as questões de contagem, como essa, mais difíceis de cravar a resposta. Mesmo assim, é bom você aprender com as edições anteriores do vestibular. Pois, caso caia uma dessas novamente, você já vai estar mais treinado para fazer de maneira rápida.

A questão pede que o MMC entre dois números, A e B, seja $126 \cdot 10^3$.

O primeiro passo para resolver essa questão é fatorar o número $126 \cdot 10^3$. Fatorando, temos que: $126 \cdot 10^3 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^1$

Podemos, então, escrever que:

$$A = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \cdot 7^{a_4}$$

$$B = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3} \cdot 7^{b_4}$$

Como estamos trabalhando com MMC, os expoentes a_i e b_i podem ser desde zero até o valor máximo possível, dado pelo número que queremos que seja o MMC, no caso. Assim, podemos escrever que:

$Máx\ \{a_1; b_1\} = 4$ $\quad$ $Máx\ \{a_2; b_2\} = 2$

$Máx\ \{a_3; b_3\} = 3$ $\quad$ $Máx\ \{a_4; b_4\} = 1$

Agora, precisamos contar o número de possibilidade de cada um desses casos de máximos entre os expoentes.

Seja X o conjunto dos pares (a_1, b_1) possíveis:

$$X = \{(4,0), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (3,4), (2,4), (1,4), (0,4)\ \}$$

$$n(X) = 9$$

Seja Y o conjunto dos pares (a_2, b_2) possíveis:

$$Y = \{(2,0), (2\ 1), (2,2), (1,2), (0,2)\}$$

$$n(Y) = 5$$

Seja W o conjunto dos pares (a_3, b_3) possíveis:

$$W = \{(3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (2,3), (1,3), (0,3)\}$$

$$n(W) = 7$$

Seja Z o conjunto dos pares (a_4, b_4) possíveis:

$$Z = \{(1,0), (1,1), (0,1)\}$$

$$n(Z) = 3$$

Com isso, para encontrar os pares (A, B) tais que $(A, B) \neq (B, A)$, podemos escrever que:

$$n = \frac{n(X)n(Y)n(W)n(Z) - 1}{2} = \frac{9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 - 1}{2} = 472$$

Básico Bem Feito

Porém, com esse cálculo excluímos o caso em que $(A, B) = (B, A)$. Assim:

$$n = 473\ pares$$

8) ITA – 1988

Considere P um polígono regular de n lados. Suponha que os vértices de P determinem $2n$ triângulos, cujos lados não são lados de P. O valor de n é:

a) 6
b) 8
c) 10
d) 20
e) Não existe um polígono regular com esta propriedade.

Solução:

1° Solução:

Para resolver essa questão, vamos usar um princípio simples de contagem. Ao invés de contar diretamente o que queremos saber, vamos fazer isso indiretamente.

Sabemos que o número total de triângulos com vértices nesse polígono é dado por $C_3^n = \frac{n!}{(n-3)!3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

Agora, vamos calcular o número de triângulos com 1 lado que também é lado do polígono e fazer esse mesmo cálculo para os triângulos com 2 lados que também são lados do polígono.

Com 1 lado coincidente: Para achar esse número, basta escolhermos o lado que será coincidente, que pode ser feito de n maneiras, depois escolher qualquer um dos $n - 4$ vértices que restaram. Os 4 vértices que retiramos foram os dois já escolhidos quando escolhemos os lados com os dois adjacente à esses vértices. Sendo assim, esse caso tem $n(n - 4)$ possibilidades.

Para calcular o número de triângulos com dois lados coincidentes, basta escolhermos um dos vértices, pois, automaticamente, serão escolhidos também os dois lados que serão coincidentes. Sendo assim, esse caso tem n possibilidades.

Com isso, podemos montar a equação:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n(n-4) - n = 2n \Rightarrow n = 8$$

Uma outra solução dessa equação é o número 1, o que é um absurdo.

Com isso, temos que $n = 8$.

Alternativa B

2º Solução:

Nessa solução, vamos usar o segundo lema de Kaplansky para resolver a questão. Mas, em que consiste o segundo lema de Kaplansky?

Esse lema diz que, usando determinado método, que, por sorte, é uma fórmula fechada, podemos contar o número de p elementos não adjacente dentro de uma ordenação circular de n elementos. Em outras palavras, poderemos contar

quantas possibilidades teremos de forma que p elementos não apareçam adjacentes uns aos outros na permutação circular.

No caso da questão, queremos contar quantos conjuntos de 3 elementos podemos formar de tal forma que não apareçam vértices adjacentes, pois isso implicaria em um lado do triângulo, no mínimo, coincidente com o lado do polígono.

Assim, podemos escrever o 2º lema de Kaplansky:

$$g(n,p) = \frac{n}{n-p} \cdot C_p^{n-p}$$

Para a questão em específico, $p = 3$:

$$g(n,3) = \frac{n}{n-3} \cdot C_3^{n-3} = \left(\frac{n}{n-3}\right) \cdot \frac{(n-3)!}{(n-6)!\,3!} =$$

$$= \left(\frac{n}{n-3}\right) \cdot \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)!}{(n-6)!\,6} = \frac{n(n-4)(n-5)}{6}$$

Agora, o que precisamos fazer é igualar o valor que encontramos ao número de triângulos dado no enunciado, que é $2n$.

$$\frac{n(n-4)(n-5)}{6} = 2n \Rightarrow n = 8$$

Uma outra solução dessa equação é o número 1, o que é um absurdo. Logo, $n = 8$.

Alternativa B

9) ITA – 2018

Sejam A e B matrizes quadradas $n \times n$ tais que $A + B = A \cdot B$ e I_n a matriz identidade $n \times n$. Das afirmações:

I. $I_n - B$ é inversível;
II. $I_n - A$ é inversível;
III. $A \cdot B = B \cdot A$

É(são) verdadeira(s)

a) Somente I.
b) Somente II.
c) Somente III.
d) Somente I e II.
e) Todas.

Solução:

Para resolver essa questão, temos que ter certa sagacidade para relacionar o que ele pede nos itens I e II com a informação do enunciado, $A + B = AB$.

Para isso, basta multiplicarmos as duas expressões $I_n - A$ e $I_n - B$, que vamos encontrar $A + B$, e assim vamos estar relacionando as duas informações.

$$(I_n - A)(I_n - B) = I_n^2 - B - A + AB =$$

$$I_n^2 - (B + A) + AB = I_n - AB + AB = I_n$$

Em seguida, temos que:

$$\det[(I_n - A)(I_n - B)] = \det I_n = 1$$

Como $\det(I_n - A) \neq 0, \quad I_n - A$ é inversível

Como $\det(I_n - B) \neq 0, \quad I_n - B$ é inversível

Com isso, as afirmações I e II são verdadeiras.

Usando o mesmo raciocínio para a afirmação III, temos:

$$(I_n - A) \cdot (I_n - B) = I_n \Leftrightarrow (I_n - B) \cdot (I_n - A) = I_n$$

Pois, se o produto de duas matrizes dá I_n, elas comutam entre si.

Assim, tem-se que:

$$(I_n - B) \cdot (I_n - A) = I_n$$

$$I_n^2 - (A + B) + BA = I_n$$

$$I_n - AB + BA = I_n$$

$$AB = BA$$

Logo, a afirmação III está verdadeira.

Alternativa E

10) ITA – 1979

Estudando a equação $32z^5 = (z + 1)^5$ no plano complexo, podemos afirmar que:

a) A equação possui todas as raízes imaginárias, situadas numa circunferência de raio 1.
b) A equação possui 4 raízes imaginárias, situadas uma em cada quadrante.
c) A equação possui 2 raízes imaginárias, uma no $1°$ quadrante e outra no $4°$ quadrante.
d) A equação possui 4 raízes imaginárias, duas no $2°$ quadrante e outras duas no $3°$ quadrante.
e) A equação tem 4 raízes imaginárias, duas no $1°$ quadrante e outras duas no $4°$ quadrante.

Solução:

Essa questão está aqui pelo fato de ser bem trabalhosa. Então, é interessante você tenha paciência e volte na resolução quantas vezes for necessária para aprender o conceito.

Vamos começar desenvolvendo a expressão do enunciado e encontra um valor para o número z:

$$32z^5 = (z+1)^5 \Rightarrow \left(\frac{z+1}{z}\right)^5 = 32 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{z}\right)^5 = 32$$

$$1+\frac{1}{z} = 2\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + isen\left(\frac{2k\pi}{5}\right)\right) \Rightarrow \frac{1}{z} = 2\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + isen\left(\frac{2k\pi}{5}\right)\right) - 1$$

$$z = \frac{1}{2\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + isen\left(\frac{2k\pi}{5}\right)\right) - 1} \Rightarrow z = \frac{1}{\left(2\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) - 1\right) + 2isen\left(\frac{2k\pi}{5}\right)}$$

$$z = \frac{\left(2\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) - 1\right) - 2isen\left(\frac{2k\pi}{5}\right)}{\left(2\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) - 1\right)^2 + \left(2sen\left(\frac{2k\pi}{5}\right)\right)^2}$$

$$\therefore z = \frac{\left(2\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) - 1\right) - 2isen\left(\frac{2k\pi}{5}\right)}{5 - 4\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)}$$

Para resolver essa questão, vamos ter que analisar caso por caso em que o $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Vamos, primeiro, analisar o denominador da fração.

$$D = 5 - 4\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) > 0$$

Com isso, podemos escrever que $Re(z_k) = \frac{2\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)-1}{D}$ e $Im(z_k) = \frac{-2sen\left(\frac{2k\pi}{5}\right)}{D}$

Uma das dificuldades da questão a partir de agora é determinar cada um dos números complexos e, com isso, determinar a posição deles no ciclo trigonométrico.

- Para $k = 0$, temos que $Re(z_0) = 1$ e $Im(z_0) = 0$, isto é. $z_0 = 1$.
- Para $k = 1$, temos $Re(z_1) = \frac{2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1}{D} < 0$ $\quad\left(0 < \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) < \frac{1}{2}\right)$

$$Im(z_1) = -\frac{2\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1}{D} < 0 \qquad \left(sen\frac{2\pi}{5} > 0\right)$$

- Para $k=2$, temos $Re(z_2)=\frac{2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)-1}{D}<0$ $\qquad \left(0<\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)<0\right)$

$$Im(z_2)=-\frac{2\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{5}\right)-1}{D}<0 \qquad \left(sen\frac{4\pi}{5}>0\right)$$

- Para $k=3$, temos $Re(z_3)=\frac{2\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)-1}{D}<0$ $\qquad \left(\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)<0\right)$

$$Im(z_3)=-\frac{2\,\text{sen}\left(\frac{6\pi}{5}\right)-1}{D}>0 \qquad \left(sen\frac{6\pi}{5}<\right)$$

- Para $k=4$, temos $Re(z_4)=\frac{2\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)-1}{D}<0$ $\qquad \left(0<\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)<\frac{1}{2}\right)$

$$Im(z_4)=-\frac{2\,\text{sen}\left(\frac{8\pi}{5}\right)-1}{D}>0 \qquad \left(sen\frac{8\pi}{5}<0\right)$$

A equação possui 1 raiz real e 4 raízes imaginárias.

De posse dos valores dessas raízes, podemos concluir que $z_1\ e\ z_2$ estão no 3º quadrante e $z_3\ e\ z_4$ estão no 2º quadrante.

11) ITA – 2020

Considere o conjunto $M(n,k)$ de todas as matrizes quadradas de ordem $n\times n$, com exatamente k elementos iguais a 1, e os demais iguais a 0 (zero). Escolhendo aleatoriamente matrizes $L\in M(3,1)$ e $R\in M(4,2)$, a probabilidade de que $L^2=0$ e $R^2=0$ é igual a

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{5}$
c) $\frac{4}{15}$
d) $\frac{13}{30}$
e) $\frac{29}{30}$

Solução:

Primeiro, vamos calcular separadamente a probabilidade de que $L^2 = 0$ e de $R^2 = 0$.

Probabilidade de $L^2 = 0$

Vamos supor a multiplicação de uma matriz L da forma $(3,1)$ qualquer por ela mesma:

$$L^2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{21}' & a_{22}' & a_{23}' \\ a_{31}' & a_{32}' & a_{33}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Em que, nessas matrizes, um único elemento é igual a 1 o outros são iguais a 0. Vamos separar em dois casos, em que o 1 está na diagonal principal e outro em que o 1 não está na diagonal principal. Observe que, na multiplicação de matrizes, valor a_{ii} da primeira matriz sempre se multiplica pelo fator a'_{ii} da segunda matriz. Sendo assim, se existir o valor 1 na diagonal principal de L, a

matriz L^2 não será nula. Por outro lado, perceba que, se o número 1 se encontra na posição a_{ij}, com $i \neq j$, ele não se multiplicará pela posição a'_{ij} da outra matriz. Sendo assim, a probabilidade de $L^2 = 0$ e dada por:

$$P_{L^2=0} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Probabilidade de $Q^2 = 0$

Básico Bem Feito

Nesse caso, também não poderemos colocar nenhum dos números 1 na diagonal principal, pelo mesmo motivo do caso anterior.

Além disso, se um elemento está na linha i e coluna j, então, necessariamente, deve haver zeros na linha j e coluna i dessa mesma matriz, pois, se não, os

números 1 das duas matrizes se multiplicariam. Ou seja, o segundo 1 que colocamos, além de não poder estar na diagonal principal, também não poderá aparecer nas 5 posições que ficam inválidas pelo fato de colocarmos o primeiro 1.

Sendo assim, com P_1 sendo a probabilidade de colocarmos o primeiro número 1 no local permitido e P_2 a probabilidade de colocarmos o segundo número 1 no local permitido, temos:

$$P_{R^2=0} = P_1 \cdot P_2 = \left(\frac{12}{16}\right) \cdot \left(\frac{6}{15}\right) = \frac{3}{10}$$

Logo, como $L^2 = 0 \ e \ R^2 = 0$ são eventos independentes, temos:

$$P_{(L^2=0 \ e \ R^2=0)} = P_{L^2=0} \cdot P_{R^2=0} = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{10}\right) = \frac{1}{5}$$

Alternativa B

12) ITA – 2019

Considere as seguintes afirmações a respeito de matrizes A de ordem $n \times n$ inversíveis, tais que os seus elementos e os de sua inversa sejam todos números inteiros:

I. $|\det(A)| = 1$
II. $A^T = A^{-1}$
III. $A + A^{-1}$ é uma matriz diagonal.

É(são) sempre VERDADEIRAS(S)

a) Apenas I
b) Apenas III
c) Apenas I e II
d) Apenas I e III
e) Todas

Solução:

A dificuldade dessa questão reside no fato da generalidade do seu enunciado. Isso, portanto, já liga um alerta na nossa memória para ficarmos atentos a um contraexemplo que fure alguma das afirmativas. Porém, na hora da prova, muitos alunos buscaram soluções algébricas para provar as afirmativas II e III.

Porém, lembre-se, provar que algo é falso, geralmente, é mais fácil que provar que é verdadeiro.

I. Se as entradas A^{-1} são inteiras, como o determinante é algo que calcula a soma de vários produtos entre as entradas de A^{-1}, podemos dizer que $\det(A^{-1}) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{\det(A)} \in \mathbb{Z}$, pois $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$.
Como os elementos de A também são inteiros, temos que:
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\det(A)} \in \mathbb{Z} \\ \det(A) \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \det(A) = \pm 1$$
Logo, a afirmação está VERDADEIRA.

II. Agora, não tem para onde correr. Devemos testar essa afirmativa testando um caso que fure. Pensando um pouco, temos que, para $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\det(A) = 1$ e: $\begin{cases} A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow A^T \neq A^{-1}$.
Logo, o item está FALSO.

Básico Bem Feito

III. Da mesma forma nessa questão, devemos achar um contraexemplo. Para $A = \begin{bmatrix} 3 & 13 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, temos que:

$\det(A) = -1$ e $A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 13 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

Logo, $A + A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 26 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, que não é diagonal.

Logo, a afirmativa está FALSA.

Esse caso poderia das mais trabalho para achar um contraexemplo que furasse, porém, pela generalidade do enunciado, ficamos suspeitos em achar que é verdadeira a afirmação desse item.

Alternativa A

13) ITA – 2020

Considere as seguintes afirmações:

I. Todo poliedro formado por 16 faces quadrangulares possui exatamente 18 vértices e 32 arestas.
II. Em todo poliedro convexo que possui 10 faces e 16 arestas, a soma dos ângulos de todas as faces é igual a $2160°$.
III. Existe um poliedro com 15 faces, 22 arestas e 9 vértices.

É(são) VERDADEIRAS(S)

a) Apenas I.
b) Apenas II.
c) Apenas III.
d) Apenas I e II.
e) Todas.

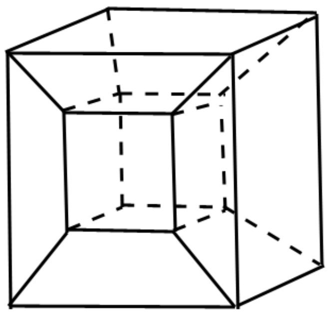
Solução:

A dificuldade dessa questão consiste na quantidade de possíveis erros que o aluno poderia cometer nela na hora da prova. Então, a lição que essa questão passa é: atenção. Muita atenção na hora de prestar o vestibular do ITA.

I. Começando pelo item I. Se você fosse pensar em poliedro convexos, você usaria a fórmula de Euler para testar a afirmação:

$$V + F = A + 2 \Rightarrow 18 + 16 = 32 + 2, \text{ o que está correto.}$$

Porém, observe que na questão não é mencionado se o poliedro é côncavo ou convexo. Se você percebesse isso na hora da prova, você ainda teria que encontrar um contraexemplo. Com um pouco de insistência, encontramos que um sólido que fura a afirmação é o seguinte:



II. Para resolver esse item, vamos usar duas fórmulas:
Euler: $V + F = A + 2$
Soma dos ângulos de todas as faces do poliedro convexo: $S = (V - 2) \cdot 360°$.
Calculando o número de vértices pela fórmula de Euler, temos:

$$V + 10 = 16 + 2 \Rightarrow V = 8$$

Logo:

$$S = (V - 2) \cdot 360° = (8 - 2) \cdot 360° = 2160°$$

Assim, o item está verdadeiro.

III. Sendo F o total de faces com n lados, como o total de faces é 15, temos que:

$$F_3 + F_4 + F_5 \ldots = 15$$

Porém, da geometria espacial, sabemos que:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots$$

Agora, vamos fazer uma manipulação não muito intuitiva...

$$2A > 3F_3 + 3F_4 + 3F_5 + \cdots$$

Fizemos isso pois é uma desigualdade que vai nos permitir usar informações do enunciado, ou seja, o número total de faces.

Dessa forma, temos que:

$$2A > 3 \cdot (F_3 + F_4 + F_5 + \cdots \ )$$
$$2A > 3 \cdot F$$

Como $A = 22$ e $F = 15$, implicaria que $2A < 3F$. Porém, pelo item, encontramos $2A > 3 \cdot F$. Logo, o item está falso.

14) ITA – 2016

Determine o termo constante do resto da divisão do polinômio $(1 + x + x^2)^{40}$ por $(1 + x)^3$.

Solução:

1° Solução:

Vamos expandir o binômio, de forma que apareçam vários fatores $x + 1$, pois isso vai facilitar nossa análise de divisão posteriormente:

$$(1 + x + x^2)^{40} = [x(x+1) + 1]^{40} =$$

$$= \binom{40}{0}[x(x+1)]^{40} + \binom{40}{1}[x(x+1)]^{39} + \cdots + \binom{40}{37}[x(x+1)]^3 + \binom{40}{38}[x(x+1)]^2 + \binom{40}{39}[x(x+1)] + \binom{40}{40} =$$

$$= (x+1)^3\left[\binom{40}{0}x^{40}(x+1)^{37} + \binom{40}{1}x^{39}(x+1)^{36} + \cdots + \binom{40}{37}x^3\right] + 780x^2(x+1)^2 + 40x(x+1) + 1$$

Assim, quando dividirmos $(1 + x + x^2)^{40}$ por $(1 + x)^3$, o resto que vamos obter é o mesmo resto que $780x^2(1 + x)^2 + 40x(x + 1) + 1$ deixa quando dividido por $(1 + x)^3$, uma vez que todo o resto do binômio é múltiplo de $(1 + x)^3$.

Desenvolvendo os seguintes polinômios, temos que:

$$780x^2(1 + x)^2 + 40x(x + 1) + 1 = 780x^4 + 1560x^3 + 820x^2 + 40x + 1$$

Básico Bem Feito

$$(1+x)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Dividindo um pelo outro pelo método da chave, obtemos que:

$$\begin{aligned} &780x^4 + 1560x^3 + 820x^2 + 40x + 1 \\ &\qquad = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)(780x - 780) + 820x^2 + 1600x + 781 \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos que o resto da divisão de $(1+x+x^2)^{40}$ por $(1+x)^3$ é $820x^2 + 1600x + 781$, com termo independente igual a 781, que é o que ele pede na questão.

2º Solução:

$$(1+x+x^2)^{40} = (1+x)^3 Q(x) + R(x)$$

Como o grau do divisor é igual à 3, podemos escrever o resto da divisão como:

$$(1+x+x^2)^{40} = (1+x)^3 q(x) + ax^2 + bx + c$$

Se fizermos $x \leftarrow -1$, temos que:

$$1 = 0 + a - b + c$$

Derivando o polinômio, temos:

$$40(1+x+x^2)^{39}(2x+1) = 3(1+x)^2 Q(x) + (1+x)^3 Q'(x) + 2ax + b$$

Fazendo $x \leftarrow -1$, temos que:

$$40 \cdot 1 \cdot (-1) = 0 + 0 - 2a + b$$

$$-2a + b = -40$$

Derivando novamente, temos:

$$\begin{aligned} &40 \cdot 39 \cdot (1+x+x^2)^{38}(2x+1) + 40(1+x+x^2)^{39} \cdot 2 \\ &\qquad = 6(1+x)Q(x) + 3(1+x)^2 Q'(x) + 3(1+x)^2 Q(x) + (1+x)^3 Q''(x) + 2a \end{aligned}$$

Fazendo $x \leftarrow -1$, temos que:

$$40 \cdot 39 \cdot 1 + 40 \cdot 1 \cdot 2 = 0 + 0 + 0 + 0 + 2$$

$$a = 41 \cdot 20$$

Assim, podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -2a + b = -40 \\ a = 41 \cdot 20 \\ 1 = a - b + c \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, encontramos que $a = 820$, $b = 1600$ e $c = 781$.

Logo, o termo constante é $c = 781$.

Obs: O termo "$x \leftarrow a$" significa que o x assume o valor de a naquele momento para a análise do problema. Ou seja, x não é igual a a, ele apenas recebe esse valor para que você tire conclusões sobre alguma coisa.

15) ITA – 2005

Considere a equação em $x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{1 + mx} = x + \sqrt{1 - mx}$$

Sendo m um parâmetro real.

a) Resolva a equação em função do parâmetro m.

b) Determine todos os valores de m para os quais a equação admite solução não nula.

Solução:

a) Para resolvermos essa equação, vamos elevar ao quadrado:

$$\sqrt{1 + mx} = x + \sqrt{1 - mx}$$

$$x = \sqrt{1 + mx} - \sqrt{1 - mx}$$

$$x^2 = 1 + mx - 2\sqrt{1 - m^2x^2} + 1 - mx$$

$$2\sqrt{1 - m^2x^2} = 2 - x^2 \geq 0 \ \ (i)$$

$$4(1 - m^2x^2) = 4 - 4x^2 + x^4$$

$$4 - 4m^2x^2 = 4 - 4x^2 + x^4$$

$$x^4 = 4x^2(1 - m^2)$$

Básico Bem Feito

Dessa forma, temos que:

$$x = 0$$

Ou,

$$x^2 = 4(1 - m^2) \ \ (ii)$$

Com isso, as soluções da equação são:

$$x = \left\{0, 2\sqrt{1 - m^2}, -2\sqrt{1 - m^2}\right\}$$

b)

Olhando para a equação do enunciado, percebemos que:

$$\sqrt{1 + mx} = x + \sqrt{1 - mx}$$

$x = 0$ é solução, independente do valor de m

Para $x > 0$, temos que:

$$\sqrt{1 + mx} > \sqrt{1 - mx} \Rightarrow m > 0$$

Para $x < 0$, temos que:

$$\sqrt{1 - mx} > \sqrt{1 + mx} \Rightarrow m > 0$$

Dessa forma, para $x \neq 0$, temos que $m > 0$.

Além disso, marcamos as condições (i) e (ii) no item a) da questão.

A partir do item (ii), podemos concluir que, para que exista solução não nula real:

$$1 - m^2 > 0 \Rightarrow |m| < 1$$

Por fim, com a condição (i), temos que:

$$x^2 \leq 2 \Rightarrow 4(1-m^2) \leq 2 \Rightarrow |m| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim, temos as seguintes restrições:

$$\begin{cases} m > 0 \\ |m| < 1 \\ |m| \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq m < 1$$

16) ITA – 2017

Sejam A e B dois conjuntos com 3 e 5 elementos, respectivamente. Quantas funções sobrejetivas $f: B \to A$ existem?

Solução:

1° Solução:

Para que uma função seja sobrejetiva, é necessário que todos os elementos do contradomínio recebam "flechas", ou seja, que todos esses elementos sejam imagem de algum elemento do domínio.

Sendo assim, o número de "flechas" que devem sair do domínio e chegar no contradomínio deve ser 3 também. Logo, para resolver a questão, só precisamos encontrar uma maneira de agrupar os 5 elementos do domínio em 3 grupos, pois cada um deles representará uma flecha.

Analisando um pouco, percebemos que podemos rearranjar esse grupo de 5 números de duas formas:

1) Um conjunto com três elementos e dois subconjuntos com um elemento cada um.

2) um subconjunto com um elemento e dois subconjuntos com dois elementos cada um.

Dessa forma, o que precisamos fazer se resume a contar o número de possibilidades em casa um dos casos.

1) Para contarmos o número de possibilidades desse caso, basta percebermos que é necessário apenas escolher o grupo com 3 elementos, dos 5 do domínio, que automaticamente os outros dois estarão determinados. Sendo assim:

$$n_1 = \binom{5}{3} = 10$$

2) Para contarmos a quantidade de casos em que temos 1 conjunto com 1 elemento e 2 conjuntos com 2 elementos, vamos raciocinar da seguinte maneira:

Primeiro, vamos escolher o elemento que ficará sozinho no subconjunto. Para isso, temos 5 possibilidade. Depois, temos que escolher dois grupos de dois números entre 4 números. Para contar isso, vamos pensar que:

O número de formar de escolher duas coisas entre quatro coisas é $\binom{4}{2}$. Porém, essa contagem está considerando diferente os casos em que foram escolhidos os elementos 1 e 2 e sobraram os elementos 3 e 4 do caso em que foram escolhidos os elementos 3 e 4 e sobraram os elementos 1 e 2, o que não faz sentido nesse problema. Sendo assim, temos que dividir por 2 o resultado dessa contagem.

A partir disso, podemos dizer que o número de possibilidades do segundo caso é:

$$n_2 = \frac{5 \cdot \binom{4}{2}}{2} = 15$$

Perceba, agora, que, para cada grupo de três subconjuntos no domínio que é formado, é possível organizar as "flechas" que esses subconjuntos vão lançar de 3! maneiras, pois existem 3 elementos no contradomínio.

Logo, o número de funções sobrejetivas é:

$$n = (n_1 + n_2) \cdot 3! = 25 \cdot 6 = 150$$

2° Solução:

Essa solução pressupõe que o aluno já soubesse, na hora da prova, a fórmula geral para o cálculo do número de funções sobrejetoras.

A fórmula é:

$$n_s = n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m + \cdots + (-1)^{n+1}n =$$

$$n_s = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^m$$

Em que n é o número de elementos do contradomínio e m é o número de elementos do domínio.

No caso na questão do ITA, $n = 3$ e $m = 5$. Substituindo, temos:

$$n_s = 3^5 - \binom{3}{1} 2^5 + \binom{3}{2} 1^5 = 150$$

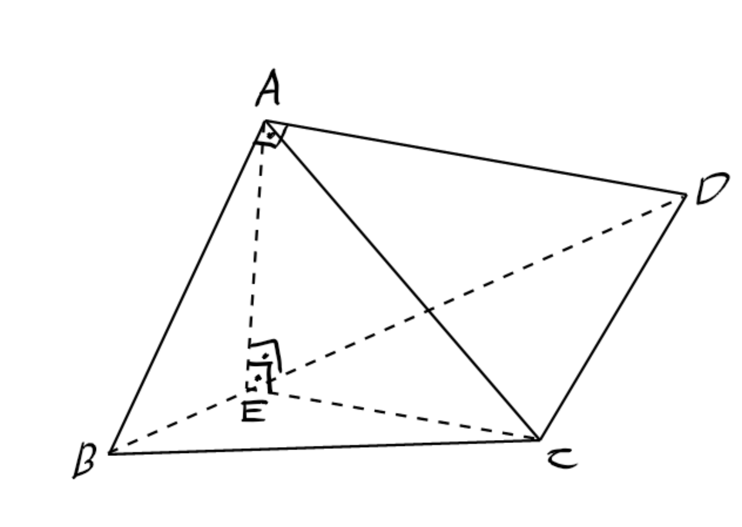
Básico Bem Feito

Observação 1: Observe que, para resolver a questão, não precisaríamos conhecer essa fórmula. Porém, ir para a prova com isso em mente poderia economizar bastante tempo.

Observação 2: A demonstração dessa fórmula envolve um estudo mais aprofundado de análise combinatória, o que foge da proposta desse material. Faremos um estudo detalhado no material de análise combinatória.

17) ITA – 2015

Na construção de um tetraedro, dobra-se uma folha retangular de papel, com lados de $3\ cm$ e $4\ cm$, ao longo de uma de suas diagonais, de modo que essas duas partes da folha formem um ângulo reto e constituam duas faces do tetraedro. Numa segunda etapa, de maneira adequada, completa-se com outro papel as faces restantes para formar o tetraedro. Obtenha as medidas das arestas do tetraedro.



Solução

Para essa questão, devemos ter paciência para visualizar a construção da melhor forma possível. Por partes, vamos imaginando a dobra da folha e representando no papel o máximo de informações possível. Observe que o maior desafio dessa questão é calcular o valor de AC, pois os outros lados são conhecidos e o lado BD é relativamente fácil de calcular, pois é a hipotenusa do triângulo retângulo ΔBCD. Sabendo disso, vamos para a questão:

Do triângulo ABD, sabemos que:

$$(i)\ \ BD^2 = AB^2 + AD^2 \Rightarrow BD^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow BD = 5$$

$$BD \cdot AE = AB \cdot AD \Rightarrow 5 \cdot AE = 3 \cdot 4$$

$$AE = \frac{12}{5}\ e\ AB^2 = BD \cdot BE \Rightarrow 3^2 = 5 \cdot BE \Rightarrow BE = \frac{9}{5}$$

Analisando o triângulo retângulo BCD, temos:

$$cos C\hat{B}D = \frac{4}{5}$$

Usando lei dos cossenos no triângulo BEC, temos:

$$CE^2 = BE^2 + BC^2 - 2 \cdot BE \cdot BC \cdot cos C\hat{B}D$$

$$CE^2 = \left(\frac{9}{5}\right)^2 + 4^2 - 2 \cdot \frac{9}{5} \cdot 4 \cdot \frac{4}{5}$$

$$CE^2 = \frac{193}{25}$$

Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AEC, temos:

$$AC^2 = AE^2 + CE^2$$

$$AC^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \frac{193}{25} \Rightarrow (ii)\ \ AC = \frac{\sqrt{337}}{5}$$

Sendo assim, esse tetraedro possui duas áreas que medem $3cm$, duas arestas que medem $4cm$, uma aresta que mede $5cm$ e uma areta que mede $AC = \frac{\sqrt{337}}{5}$.

18) ITA – 2013

Sejam a um número real e n o número de todas as soluções reais de distintas $x \in [0, 2\pi]$ da equação $\cos^8 x - sen^8 x + 4sen^6 x = a$. Das afirmações:

I. Se $a = 0$, então $n = 0$;
II. Se $a = \frac{1}{2}$, então $n = 8$;
III. Se $a = 1$, então $n = 7$;
IV. Se $a = 3$, então $n = 2$,

É(são) verdadeira(s)

a) Apenas I
b) Apenas III
c) Apenas I e III
d) Apenas II e IV
e) Todas

Solução:

Uma das dificuldades dessa questão é desenvolver da maneira certa a equação que foi dada no enunciado. Para isso, vamos olhar para "o princípio das coisas parecidas" das questões de vestibular. Não conhece esse princípio? Vou apresentar. Observe que, na questão, você tem vários "senos" e um cosseno. Pelo princípio das coisas parecidas, caso você não saiba por onde começar, comece agrupado coisas parecidas deixando o mais homogêneo possível. No caso da questão, vamos tentar transformar o cosseno em seno, já que tem bem mais senos, e ver no que dá.

$$(1 - sen^2 x)^4 - sen^8 x + 4sen^6 x = a$$

$$1 - 4sen^2 x + 6sen^4 x - 4sen^6 x + sen^6 x - sen^8 x + 4sen^6 x = a$$

$$6sen^4 x - 4sen^2 x + (1 - a) = 0$$

$$sen^2 x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24(1 - a)}}{12} = \frac{2 \pm \sqrt{6a - 2}}{6}$$

Assim:

Se $a = 0$, temos:

$$sen^2 x = \frac{2 \pm \sqrt{-2}}{6} \Rightarrow n = 0$$

Se $a = \frac{1}{2}$, temos:

Básico Bem Feito

$$sen^2x = \frac{2 \pm 1}{6} = \frac{1}{2}\ ou \frac{1}{6} \Rightarrow senx = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\ ou\ senx = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$$

Observe que, para cada valor de seno que encontramos, existem dois valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem. Ou seja, $n = 8$.

Se $a = 1$, temos:

$$sen^2x = \frac{2 \pm 2}{6} = 0\ ou \frac{2}{3} \Rightarrow senx = 0\ ou\ senx = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Observe que, no intervalo dado na questão existem 3 valores para os quais $senx = 0$, $0, \pi$ e 2π. Além disso, mais 4 valores para os quais $senx = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$. Logo, temos que $n = 7$.

Se $a = 3$, temos:

$$sen^2x = \frac{2 \pm 4}{6} = 1\ ou - \frac{2}{3} \Rightarrow senx = \pm 1$$

Para $senx = \pm 1$, temos 2 soluções no intervalo da questão, $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$. Logo, $n = 2$.

Sendo assim, todas as afirmativas estão corretas.

Alternativa E

19) ITA – 2006

Considere A um conjunto não vazio com um número finito de elementos. Dizemos que: $F = \{A_1, \dots, A_m\} \subset \mathrm{P}(A)$ é uma partição de A se as seguintes condições são satisfeitas:

I. $A_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, m$;
II. $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $i \neq j$, para $i, j = 1, \dots, m$;
III. $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$.

Dizemos ainda que: F é uma partição de ordem k se $n(A_i) = k,\ i = 1, \dots, m$.

Supondo que $n(A) = 8$, determine:

a) As ordens possíveis para uma partição de A

b) O número de partições de A que têm ordem 2.

Solução:

a) Pela definição, os conjuntos que compõem a partição F de ordem k devem ser disjuntos e ter o mesmo número de elementos. Dessa forma, as ordens
b)

possíveis para uma partição de A são dadas pelos divisores de $n(A)$. No caso, como $n(A) = 8$, os possíveis valores são $k = 1, 2, 4\ e\ 8$.

b) Para determinarmos o número de partições de A de ordem 2, equivale a determinarmos de quantas formas podemos formas 4 grupos de 2 elementos, não é verdade? Para isso, vamos pensar da seguinte forma:

Primeiro, escolhemos o primeiro grupo de 2 elementos entre o 8.

Isso pode ser feito de $\binom{8}{2}$ formas.

Depois, vamos escolher mais um grupo de 2 entre os 6 que restaram

Isso pode ser feito de $\binom{6}{2}$ maneiras.

Analogamente, vamos escolher mais dois grupos de 2 elementos, de $\binom{4}{2}$ e $\binom{2}{2}$ maneiras.

Porém, nessa contagem, uma sequência de 4 grupos pode aparecer de P_4 maneiras, ou seja, $4!$.

Dessa forma, o número de partições é dada por:

$$\frac{\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{4!} = 105$$

20) ITA – 2015

Considere as funções $f_1, f_2, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sendo $f_1(x) = \frac{1}{2}|x| + 3$, $f_2 = \frac{3}{2}|x+1|$ e $f(x)$ igual ao maior valor entre f_1 e f_2, para cada $x \in \mathbb{R}$. Determine:

a) Todos os $x \in \mathbb{R}$ tais que $f_1(x) = f_2(x)$.

b) O menor valor assumido pela função f.

c) Todas as soluções da equação $f(x) = 5$.

Solução:

$$f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow \frac{1}{2}|x| + 3 = \frac{3}{2}|x+1|$$

$$|x| + 6 = 3|x+1|$$

A partir daqui, temos que analisar caso por caso.

Se $x \geq 0$, temos:

$$|x| + 6 = 3|x+1|$$

$$x + 6 = 3(x+1) \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Se $x \leq -1$, temos:

$$|x| + 6 = 3|x+1|$$

Básico Bem Feito

$$-x + 6 = 3(-x - 1) \Rightarrow x = -\frac{9}{2}$$

Se $-1 \leq x \leq 0$, temos:

$$|x| + 6 = 3|x + 1|$$

$$-x + 6 = 3(x + 1) \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

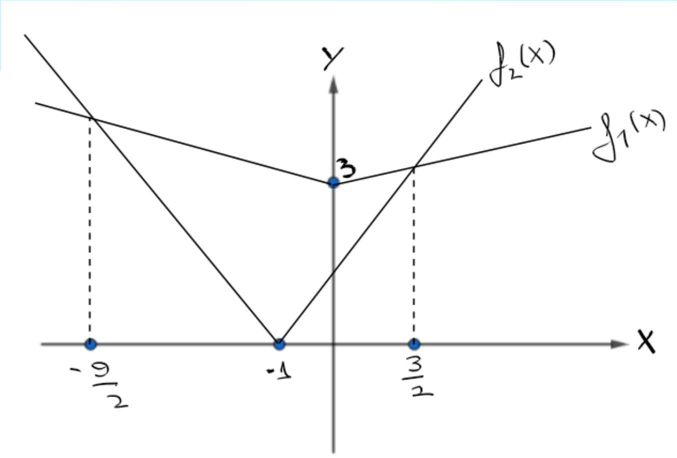
Porém, perceba que o valor que encontramos não condiz com o intervalo preestabelecido. Sendo assim, descartamos esse resultado.

Logo, a raízes da equação são $-\frac{9}{4}$ e $\frac{3}{2}$.

b)

Uma das dificuldades dessa questão é entender o que significa essa função f. Uma forma de pensar é que, para cada valor de x, $f_1(x)$ e $f_2(x)$ assumem determinados valores. A função $f(x)$ é formada pelo maior valor se formos comparar $f_1(x)$ e $f_2(x)$, em cada ponto x. Dessa forma, o gráfico fica assim:

O menor valor de f, como ilustrado no gráfico, é 3.



c)

Para resolvermos isso, devemos pensar em quais são os valores assumidos pela função f e em que intervalo isso acontece:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}|x+1|, & x \leq -\frac{9}{2} \; ou \; x \geq \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}|x| + 3, & -\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Dessa forma, temos:

Para $\leq -\frac{9}{2} \; ou \; x \geq \frac{3}{2}$,

$$\frac{3}{2}|x+1| = 5 \Rightarrow |x+1| = \frac{10}{3} \Rightarrow x = \frac{7}{3} \; ou \; x = -\frac{13}{3} \, (Absurdo)$$

Para $-\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$,

$$\frac{1}{2}|x| + 3 = 5 \Rightarrow |x| = 4 \Rightarrow x = -4 \; ou \; x = 4 \; (absurdo)$$

Dessa forma, os valores de x para os quais $f(x) = 5$ são $\left\{-4, \frac{7}{3}\right\}$.

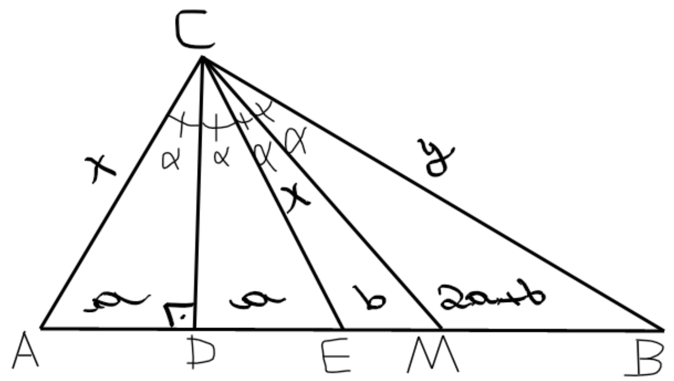
Questão BÔNUS de matemática:

(ITA – 2013) Em um triângulo de vértices A, B e C, a altura, a bissetriz e a mediana, relativamente ao vértice C, dividem o ângulo $B\hat{C}A$ em quatro ângulos iguais. Se l é a medida do lado aposto ao vértice C, calcule:

a) A medida da mediana em função de l.
b) Os ângulos $C\hat{A}B$, $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$.

Solução:

Solução 1: Trigonometria.



Sendo CD é altura do triângulo ABC e também é bissetriz do triângulo ACE, temos que o triangulo ACB é isósceles.

Como CE é bisstriz do triângulo ABC, podemos escrever o teorema da bissetriz interna:

$$\frac{x}{y} = \frac{2a}{2a+2b} = \frac{b}{2a+b} \Longrightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{2}$$

Do triângulo ACD e do triângulo CDM, temos que:

$$tg\alpha = \frac{x}{CP} \; e \; tg2\alpha = \frac{x+y}{CP} \Longrightarrow \frac{tg2\alpha}{tg\alpha} = \frac{x+y}{x}$$

$$\frac{2tg\alpha}{(1-tg^2\alpha)tg\alpha} = 1+\sqrt{2} \Longrightarrow tg\alpha = \sqrt{2}-1 \Longrightarrow B\hat{C}A = 90°$$

Dessa forma, descobrimos que o triangulo ABC é retângulo.

Sendo retângulo, sabemos que o valor da mediana é metade do valor da hipotenusa.

Como $4\alpha = 90°$, temos que $\alpha = 22{,}5°$

a) $CM = \frac{l}{2}$
b) $C\hat{B}A = 22{,}5°$, $C\hat{A}B = 67{,}5°$ e $A\hat{C}B = 90°$

Solução 2: Geometria Plana

Outra forma de pensar a solução dessa questão é se você soubesse que a ortogonal à altura, ou seja, a reta que passa por C faz o mesmo ângulo com um dos lados passando pelo vértice C que a bissetriz faz com o outro lado que passa pelo vértice C, passa pelo circuncentro.

Porém, pelas opções das questões, sabemos que a ortogonal da altura coincide com a mediana. Se a mediana de um triângulo passa pelo circuncentro, esse triângulo é retângulo. Você pode provar isso pensando na circunferência circunscrita ao triângulo, Comparando o ponto médio do maior lado com o centro. Uma vez que descobrimos que o triângulo é retâgulo, despobrimos o valor de CE e dos ângulos.

Básico Bem Feito

AS 20 QUESTÕES MAIS DIFÍCEIS DE QUÍMICA

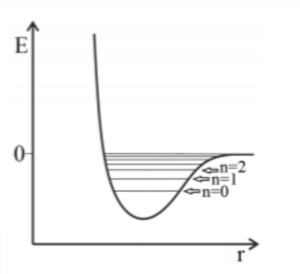
Básico Bem Feito

QUESTÕES QUÍMICA (MAIS DIFÍCEIS)

1) ITA – 2015

Para uma molécula diatômica, a energia potencial em função da distância internuclear é representada pela figura horizontais representam os níveis de energia vibracional quanticamente permitidos para uma molécula diatômica. Uma amostra contendo um mol de moléculas diatômicas idênticas, na forma de um sólido cristalino, pode ser modelada como um conjunto de osciladores para os quais a energia potencial também pode ser representada

qualitativamente pela figura. Em relação a este sólido cristalino, são feitas as seguintes proposições:



I. À temperatura de 0 K, a maioria dos osciladores estará no vibracional fundamental, cujo número quântico vibracional,

II. À temperatura de 0 K, todos os osciladores estarão no estado vibracional fundamental quântico vibracional, n, é igual a zero

III. O movimento vibracional cessa a 0 K.

IV. O movimento vibracional não cessa a 0 K. V. O princípio de incerteza de Heisenberg será violado se o movimento vibracional cessar.

Das proposições acima estão CORRETAS

a) Apenas I e III

b) Apenas II e III

c) Apenas I, IV e V

d) Apenas II, IV e V

e) Apenas II, III e V

Solução:

I. Falso. Desde sempre nos acostumamos a tomar muito cuidado com a palavra "todos". Até evitamos de marcar algumas alternativas devido a essa palavra. Porém, deve-se tomar muito cuidado. Vamos para a afirmação. Ele diz que a maioria do osciladores estará no seu estado fundamental. Porém, com base nos estudos de termodinâmica estatística, podemos afirmar que, como $S = klnw$, no zero kelvin a entropia é zero e o número de possibilidades energéticas para as partículas é 1, ou sejam todas as partículas estão no estado fundamental.

II. Verdadeiro.

III. Falso. Mesmo para temperaturas de zero kelvin, podemos ver, pelo gráfico, que a energia não é zero. Sendo assim, o movimento não cessa a 0 kelvin.

IV. Verdadeiro.

V. O princípio da incerteza de Heisenberg consiste na impossibilidade que temos de aferir a velocidade e a posição de determinada partícula no mundo quântico ao mesmo tempo com certeza de ambos. Ou seja, é impossível determinar com certeza qualquer uma dessas grandezas no mundo quântico. A partícula cessar o movimento implicaria nela estar em uma posição determinada com o passar do tempo, podendo assim sua posição ser determinada com certeza, o que viola o princípio da incerteza de Heisenberg.

2) ITA – 2016

O ácido hipocloroso sofre, em solução aquosa, três diferentes processos de transformação que ocorrem de forma independente. Escreva as equações balanceadas que representam as reações químicas que ocorrem nas seguintes condições:

a) sob a ação da luz solar direta ou em presença de sais de cobalto como catalisador.

b) reação ocorrendo na presença de CaCl2 como substância desidratante.

c) sob ação de calor.

Solução:

Uma das questões mais difíceis que já caíram no ITA.

a) Ácido Hipocloroso: $HClO$ sob ação da luz solar (ou com Co^{2+}como catalizador da reação), sofre decomposição, produzindo oxigênio O_2:

$$2ClO^- \xrightarrow{Co^{2+}} 2Cl^- + O_2^{\nearrow}$$

DECOREBA… O ITA esperou que o candidato chegasse sabendo…

b) Na presença de cloreto de cálcio, a desidratação do ácido hipocloroso produz anidrido hipocloroso, da seguinte maneira:

$$2HClO \xrightarrow{CaCl_2} Cl_2O_{(s)} + H_2O_{(l)}$$

Essa é a mais intuitiva (apesar de não ser…), já que numa desidratação é "natural" que se produza água. No caso é uma desidratação intermolecular, precisando de duas moleculas de $HClO$.

c) Em solução aquosa a quente, os íons ClO^- se decompõem formando clorato e cloreto:

$$3ClO^-_{(aq)} \underset{\Delta}{\rightarrow} ClO^-_{3(aq)} + 2Cl^-_{(aq)}$$

DECOREBA… O ITA esperou que o candidato chegasse sabendo…

Sim… essas questões são desestimulantes… Mas pense pelo lado positivo, se cair novamente e você tiver decorado, você poderá acertar e isso lhe colocará 1 questão a frente da grande maioria dos concorrentes.

3) ITA – 2014

O ácido nítrico reage com metais, podendo liberar os seguintes produtos: NO (que pode ser posteriormente oxidado na presença do ar), N_2O, NO_2 ou NH_3 (que reage posteriormente com HNO_3, formando NH_4NO_3). A formação desses produtos depende da concentração do ácido, da natureza do metal e da temperatura da reação. Escreva qual(is) dos produtos citados acima é(são) formado(s) nas seguintes condições:

(a) Zn (s) HNO_3 muito diluído(~2%)

(b) Zn (s) HNO_3 diluído(~10%)

(c) Zn (s) HNO_3 concentrado

(d) Sn (s) HNO_3 diluído

(e) Sn (s) HNO_3 concentrado

Solução:

Essa questão é considerada uma questão bastante difícil.

É o tipo de questão que o seu objetivo não deve ser gabaritar a questão na hora da prova, pois isso pode demandar muito tempo. Seu objetivo aqui é ganhar o máximo de pontos possível.

Com isso, nos resta saber, como vamos raciocinar esse tipo de questão?

Vamos lá. Devemos ter em mente que, quanto mais diluída for a solução, menor seu poder oxidante, e quanto mais concentrada, maior o poder. Em reações diluídas, a tendência é se formarem compostos de nitrogênio com Nox menor, e se a solução está concentrada, com nox maior, justamente devido ao poder oxidante do oxigênio. Sendo assim, podemos dizer que:

a) Nesse item A, por ser a solução mais diluída, podemos supor que irá se formar NH_3 e que reagirá posteriormente com o HNO_3 da reação, produzindo NH_4NO_3. Dessa forma, a reação ficaria:

$$Zn_{(s)} + 10HNO_{3\ (muito\ diluído\ -\ 2\%)} \longrightarrow 4Zn(NO_3)_{2(aq)} + NH_4NO_{3(aq)} + 3H_2O_{(l)}$$

Básico Bem Feito

b) Nesse item b), fica difícil sabermos o que marcar, pois está bem mais concentrado que a solução do item A. Vamos então pular esse item. Agora que você já tentou os outros itens, você volta nesse e marca alguma coisa. Sem ter certeza do que marcar, esse item é o que mais se aproxima de um chute. Você talvez não queira marcar NO, pois ele tem o segundo maior Nox, então você fica em dúvida entre NH_3 e N_2O. Digamos que você marque NH_3 novamente. Você, então, teria errado, pois a resposta é N_2O. Porém, você conseguiria acerta 80% da questão.

c) No item C, como está concentrado, podemos supor que o número de oxidação do nitrogênio vai para o valor máximo possível entre os compostos que podem ser formados segundo o enunciado. Sendo assim, a reação ficaria:

$$Zn_{(s)} + 4HNO_{3\,(concentrado)} \longrightarrow Zn(NO_3)_{2(aq)} + 2NO_2 + 2H_2O_{(l)}$$

d) Nesse item D, como não temos referência de outra reação mais diluída, vamos chutar que é formado também o composto de nitrogênio de menor Nox entre os listados na questão, que é o NH_3.

$$4Sn_{(s)} + 10HNO_{3\,(diluído)} \longrightarrow 4Sn(NO_3)_{2(aq)} + NH_4NO_{3(aq)} + 3H_2O_{(l)}$$

e) O raciocínio desse item é muito parecido com o do item C. Pelo fato de estar concentrada, vamos supor que é formado o composto NO_2. A reação ficaria:

$$Sn_{(s)} + 4HNO_{3\,(concentrado)} \longrightarrow H_2SnO_{3(aq)} + 4NO_{2(g)} + H_2O_{(l)}$$

Como dito anteriormente, você teria acertado 80% da questão, o que é muito bom. Porém, o gabarito 100% correto seria:

a) $Zn_{(s)} + 10HNO_{3\,(muito\ diluído\ -\ 2\%)} \longrightarrow 4Zn(NO_3)_{2(aq)} + NH_4NO_{3(aq)} + 3H_2O_{(l)}$

b) $Zn_{(s)} + 10HNO_{3\,(diluído)} \longrightarrow 4Zn(NO_3)_{2(aq)} + N_2O_g + 5H_2O_{(l)}$

c) $Zn_{(s)} + 4HNO_{3\,(concentrado)} \longrightarrow Zn(NO_3)_{2(aq)} + 2NO_2 + 2H_2O_{(l)}$

d) $4Sn_{(s)} + 10HNO_{3\,(diluído)} \longrightarrow 4Sn(NO_3)_{2(aq)} + NH_4NO_{3(aq)} + 3H_2O_{(l)}$

e) $Sn_{(s)} + 4HNO_{3\,(concentrado)} \longrightarrow H_2SnO_{3(aq)} + 4NO_{2(g)} + H_2O_{(l)}$

Observação: A questão pede que você escrava os produtos nitrogenados formados nas reações. Ou seja, se você escrevesse apenas os produtos nitrogenados, não perderia os pontos. Inclusive, você corre menos risco de errar se escrever apenas os produtos. Como esse é um material didático, optamos por escrever a equação completa.

4) ITA – 2017

Com base no fato de que o esmalte dentário é sujeito à desmineralização, explique

a) Como se forma o ácido lático na saliva humana.

b) Como o ácido lático provoca a desmineralização

c) Como a uréia contida na saliva ajuda a proteger contra a desmineralização do esmalte dentário causada pelo ácido lático.

Solução:

a)

O componente responsável pela mineralização do dente é a hidroxiapatita. Ela sofre desmineralização da seguinte forma:

$$Ca_{10}(PO_4)(OH)_{2(s)} \leftrightarrows 10Ca^{2+}_{(aq)} + 6(PO_4)^{3-}_{(aq)} + 2(OH)^{-}_{(aq)}$$

b)

Como podemos ver, a desmineralização ocorre através de um equilíbrio. Logo, um palpite para responder esse item é dizer que ocorre um deslocamento para a direita, causando a desmineralização do dente. E, de fato, esse deslocamento acontece. Conforme é produzido o ácido lático, através da fermentação de açucares, a concentração de H^+ aumenta, o que diminui a concentração de OH^-, causando o deslocamento.

c)

Sabemos que a ureia, em meio aquoso, sofre hidrólise. Seguindo a seguinte reação:

$$N_2H_4CO + H_2O \xrightarrow{H_2O, H^+} 2NH_3 + CO_2$$

Porém, sabemos também que a amônia, em meio aquoso, está sujeita ao seguinte equilíbrio:

$$NH_3 + H_2O \rightleftarrows NH_4^+ + OH^-$$

Dessa forma, podemos dizer a ureia protege os dentes contra a desmineralização, uma vez que aumenta a concentração de OH^- na saliva, deslocando o equilíbrio no sentido da mineralização.

5) ITA – 2019

Após atravessar um filtro de radiação ultravioleta, o qual não permite passar fótons de comprimento de onda menor que 300 nm, um feixe de luz solar é direcionado para uma amostra de hidrogênio atômico gasoso à baixa pressão, mantido em um recipiente transparente à luz visível e opaco ao infravermelho (com comprimento de onda superior a 663 nm). Após passarem pela amostra, a quantidade de fótons e suas energias são detectadas por sensores posicionados ortogonalmente ao feixe de luz. Assinale a opção que melhor apresenta as energias, em eV, dos fótons que podem ser detectados.

a) 0,7; 1,9; 3,3; 10,2

b) 0,9; 1,4; 1,9; 3,3

c) 1,0; 1,5; 3,4; 13,6

d) 1,9; 2,6; 2,9; 3,0

e) 2,1; 2,4; 3,4; 3,8

Solução:

A primeira grande dificuldade dessa questão é entender o que está acontecendo e bolar um plano de resolução.

O aluno teria que perceber que as transições estão ocorrendo dentro da faixa do visível, e essas transições ocorrem até o nível $n = 2$ do átomo de Bohr. A série que descreve essas transições é a série de Balmer:

$$\Delta E = E_n - E_2 = -13{,}6\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2^2}\right) eV$$

A questão pede a energia dos fótons que podem ser detectados. Olhando as alternativas, temos quatro opções em todas. Sendo assim, vamos teste $n = 3, 4, 5\ e\ 6$.

$$E_3 - E_2 = -13{,}6\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2}\right) \cong 1{,}9$$

$$E_4 - E_2 = -13{,}6\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{2^2}\right) \cong 2{,}6$$

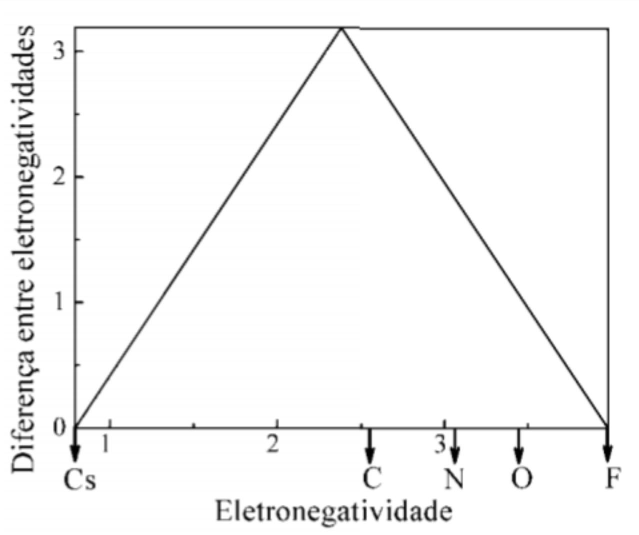
$$E_5 - E_2 = -13{,}6\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{2^2}\right) \cong 2,9$$

$$E_6 - E_2 = -13{,}6\left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{2^2}\right) \cong 3$$

Dessa forma, a resposta certa é a alternativa D.

6) ITA – 2017

O diagrama de van Arkel-Ketelar apresenta uma visão integrada das ligações químicas de compostos binários, representando os três tipos clássicos de ligação nos vértices de um triângulo. Os vértices esquerdo e direito da base correspondem, respectivamente, aos elementos menos e mais eletronegativos, enquanto o vértice superior do triângulo representa o composto puramente iônico. Com base no diagrama, assinale a opção que apresenta o composto binário de maior caráter covalente.



a) CCl_4

b) C_3N_4

c) CO_2

d) NO

e) OF_2

Solução:

Questão de difícil interpretação e difícil solução também. Vamos resolver essa questão de duas formas.

1º solução

Conhecendo um pouco sobre o diagrama de Arkel-Ketelar, podemos dizer que ele é formado quando se tem, em um dos eixos, o caráter iônico e, no outro eixo, o caráter covalente.

Essas grandezas são dadas por:

$$I = EN_A - EN_B$$

$$C = \frac{EN_A + EN_B}{2}$$

Em que EN_A é a eletronegatividade de A e EN_B é a eletronegatividade de B.

Utilizando o diagrama fornecido na prova, podemos estimar que a eletronegatividade de F, O e N.

$$\begin{cases} EN_F = 4{,}00 \\ EN_N = 3{,}1 \\ EN_O = 3{,}4 \end{cases}$$

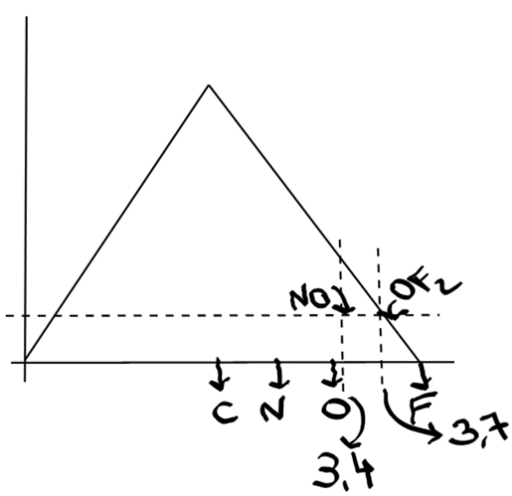
Como o O e o F estão mais perto do canto inferior direito, podemos supor que eles têm maior caráter covalente.

Vamos agora calcular os valores de I e C para os compostos NO e OF_2

$$\begin{cases} I_{NO} = EN_0 - EN_N = 3{,}4 - 3{,}1 = 0{,}3 \\ C_{NO} = \dfrac{EN_{NO} + EN_{OF_2}}{2} = \dfrac{3{,}1 + 3{,}4}{2} = 3{,}25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{OF_2} = EN_F - EN_O = 4{,}0 - 3{,}4 = 0{,}6 \\ C_{OF_2} = \dfrac{EN_F + EN_O}{2} = \dfrac{4{,}0 + 3{,}4}{2} = 3{,}7 \end{cases}$$

Sendo assim, podemos montar o gráfico:

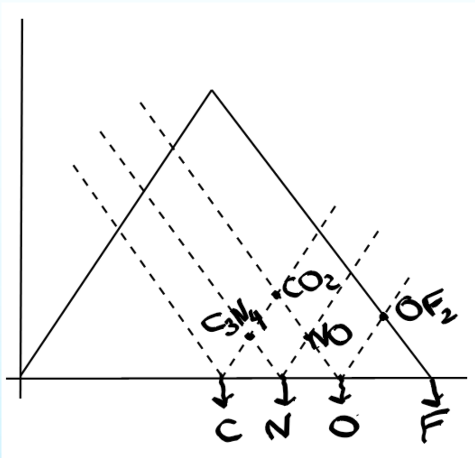


Observando os pontos de intersecção, percebemos que o OF_2 está mais perto do canto inferior direito. Logo, ele é o mais covalente.

2º solução

Essa solução exige uma compreensão mais aprofundado de diagramas como esse. Uma questão com raciocínio parecido caiu no IME, em 2010.

A ideia aqui é descobrir o caráter do composto (se é mais iônico, covalente ou metálico) através da construção de retas paralelas aos lados do diagrama passando pelo ponto que representa o composto no diagrama. No diagrama da questão, ficaria assim:



Dessa forma, fica nítido que o composto com maior caráter covalente é o OF_2.

As informações usadas para resolver essa questão não são encontradas facilmente em livros de ensino médio. Sendo essa questão a mais difícil da prova do ano em que caiu. É importante o aluno entender que ele não precisa acertar essa questão na prova para conseguir a aprovação,

pois geralmente o índice de acerto de questões como essas são baixíssimos, até mesmo entre os aprovados no vestibular. Portanto, não é uma questão que diferencia os candidatos.

7) ITA – 1988

Entre as informações a seguir, assinale a opção ERRADA:

a) Os íons He^{+}, Li^{2+}, Be^{3+}, no estado gasoso, são exemplos de "hidrogenoides".

b) No átomo de hidrogênio, os orbitais 3s, 3p e 3d têm a mesma energia.

c) No átomo de carbono, os orbitais 3s, 3p e 3d têm valores de energias diferentes

d) A densidade de probabilidade de encontrar um elétron num átomo de hidrogênio no orbital 2p é nula num plano que passa pelo núcleo.

e) As frequências das radiações emitidas pelo íon He^{+} são iguais às emitidas pelo átomo de hidrogênio.

Solução:

a) VERDADEIRO. Átomos hidrogenoides são átomos que possuem apenas um elétrons na sua eletrosfera, como é o caso do hidrogênio.

b) VERDADEIRO. A energia de um orbital em determinado nível de energia do hidrogênio é dada por:

$$E = -\frac{13,6}{n^2}$$

Observe que a energia dos níveis no átomo de hidrogênio só depende do número quântico principal, ou seja, n. Vejamos por outo lado. O átomo de hidrogênio tem apenas 1 elétron, ou seja, a energia dele não é interferida por outros elétrons, apenas pela distância ao núcleo. Sendo assim, faz sentido depender apenas de n. Dessa forma, a energia dos orbitais $3s$, 3p e $3d$ são iguais. Quando isso acontece, ou seja, quando vários subníveis têm a mesma energia, é dito que os orbitais são degenerados.

c) VERDADEIRO. Conforme estudamos no item anterior, se na eletrosfera existe mais de 1 elétron, eles irão interferir entre si e a energia não dependerá apenas de n, ocasionando

orbitais não degenerados. Sendo assim, a energia dos orbitais $3s$, $3p$ e $3d$ do carbono são diferentes.

d) VERDADEIRO. O orbital p é caracterizado por três planos nodais que passam pelo núcleo. Logo, quando a questão fala em densidade de probabilidade, ele quer saber se algum desses planos nodais passa pelo núcleo. Pois, se isso acontecer, a probabilidade de encontrar o elétron será nula e, consequentemente, a densidade de probabilidade também será nula. Como vimos já vimos, esse plano existe. Logo, o item está verdadeiro.

e) FALSO. Esse item engana muita gente. Apesar dos dois átomos serem hidrogenoides, o núcleo deles tem massas diferentes. A massa do hidrogênio é $1u$ e a massa do Hélio é $4u$. Do estudo sobre o átomo de hidrogênio, sabemos que a equação de Rydberg, que calcula o comprimento de onda do fóton emitido em uma transição eletrônica, é dada por:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$$

Em que R_H é a constante de Rydberg e é dada por:

$$R_H = \frac{Z^2 e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}$$

O mais importante dessa fórmula é perceber que a constante depende do número atômico Z do átomo, o que influencia no valor do comprimento de onda do fóton emitido na transição eletrônica. Logo, o item está falso.

Alternativa B

8) ITA – 2016

Dado o seguinte mecanismo reacional, constituído de duas etapas elementares (I e II).

$$\text{I.} \quad A \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} M \qquad\qquad \text{II.} \quad M + A \xrightarrow{k_2} C$$

Escreva a expressão para a taxa de variação temporal da concentração do:

a) reagente A.

b) intermediário M.

c) produto C.

Solução:

As reações da questão são:

$$(i)\ A \xrightarrow{k_1} M$$

$$(ii)\ A \xleftarrow{k_{-1}} M$$

$$(iii)\ M + A \xrightarrow{k_2} C$$

a)

O que o item está pedindo é o valor de $v_A = \frac{d[A]}{dt}$. Para isso, temos que analisar a contribuição de cada equação para a concentração final de A:

A é consumido em (i), produzido em (ii) e consumido em (iii) novamente. Sendo assim, temos:

$$\frac{d[A]}{dt} = -v_i + v_{ii} - v_{iii} = -k_1[A] + k_{-1}[M] - k_2[M][A]$$

$$\frac{d[A]}{dt} = -k_1[A] + k_{-1}[M] - k_2[M][A]$$

b)

SAplicando o mesmo raciocínio nesse item, temos que:

$$\frac{d[M]}{dt} = v_i - v_{ii} - v_{iii} = k_1[A] - k_{-1}[M] - k_2[M][A]$$

$$\frac{d[M]}{dt} = k_1[A] - k_{-1}[M] - k_2[M][A]$$

c)

$$\frac{d[C]}{dt} = v_{iii} = k_2[M][A]$$

Nessa questão, você poderia querer usar o estado estacionário e dizer que $\frac{d[M]}{dt} = 0$, para, a partir daí, deixar a taxa de variação de A e de C em função somente da concentração de A. Esse raciocínio é possível, uma vez que não é comum o acúmulo do intermediário e, no geral, os intermediários são mais reativos, sendo essas algumas condições para que seja possível utilizar a aproximação do estado estacionário. Optamos por deixar sem a aproximação, pois a questão não fornece dados referentes aos reagentes, mas também não estaria errado se você considerasse. Resolvendo por estado estacionário, teríamos:

$$\frac{d[M]}{dt} = 0 \Rightarrow k_1[A] - k_{-1}[M] - k_2[M][A] \Rightarrow [M] = \frac{k_1[A]}{k_{-1} + k_2[A]}$$

Com isso, teríamos:

$$\frac{d[A]}{dt} = -k_1[A] + k_{-1}[M] - k_2[M][A]$$

$$= -k_1[A] + k_{-1}\left(\frac{k_1[A]}{k_{-1} + k_2[A]}\right) - k_2[A]\left(\frac{k_1[A]}{k_{-1} + k_2[A]}\right) =$$

$$-\frac{2k_1k_2[A]^2}{k_{-1} + k_2[A]} \Rightarrow -\frac{d[A]}{dt} = v_A = \frac{2k_1k_2[A]^2}{k_{-1} + k_2[A]}$$

$$\frac{d[C]}{dt} = v_C = \frac{k_1k_2[A]^2}{k_{-1} + k_2[A]}$$

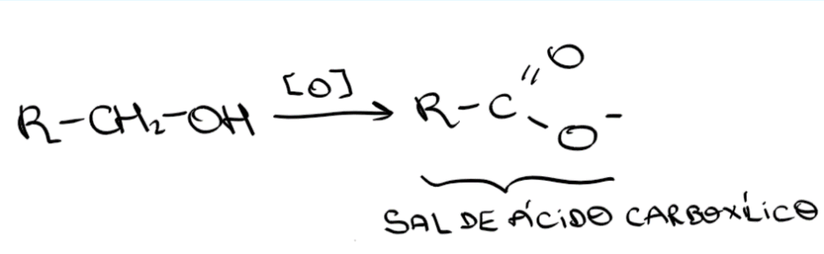
9) ITA – 2009

Foi observada a reação entre um composto X e uma solução aquosa de permanganato de potássio, a quente, ocorrendo o aumento do pH da solução e a formação de um composto Y sólido. Após a separação do composto Y e a neutralização da solução resultante, verificou-se a formação de um composto Z pouco solúvel em água. Assinale a opção que melhor representa o grupo funcional do composto orgânico X.

a) Álcool
b) Amida
c) Amina
d) Éster
e) Éter

Solução:

Dessa questão, poderíamos eliminar o item D e o item E. Entre o álcool, a amida e amina, vamos começar a testar o álcool, pois geralmente álcool reage



bem ao processo de oxidação. Vamos pensar em X como um álcool secundário. Ao sofrer um processo de oxidação, o álcool secundário vira aldeído e não reagiria novamente, sendo neutralizado. Logo, se for o álcool, tem que ser um álcool primário. O álcool primário, reagindo com permanganato a quente, forma um sal de ácido carboxílico. O sólido Y que é citado na questão advém da seguinte reação:

$$2KMnO_4 + H_2O \rightarrow 2\underbrace{MnO_2}_{ppt} + 2KOH + 3[O]$$

O MnO_2, que é um sólido marrom, foi o responsável pelo aparecimento de um precipitado e o KOH foi o responsável pelo aumento de PH.

Com a neutralização do sal de ácido carboxílico, será formado um sal de ácido carboxílico que pode ser pouco solúvel em água pelo tamanho da cadeia de carbônica. Sendo assim, não há qualquer fato que falsifique o item A. Sendo assim, vamos marcar esse item.

10) ITA – 2003

Descreva um processo que possa ser utilizado na preparação de álcool etílico absoluto, 99,5% (m/m), a partir de álcool etílico comercial, 95,6 %(m/m). Sua descrição deve conter:

i) A justificativa para o fato da concentração de álcool etílico comercial ser 95,6% (m/m)

ii) O esquema da aparelhagem utilizada e a função de cada um dos componentes desta aparelhagem

iii) Os reagentes utilizados na obtenção do álcool etílico absoluto

iv) As equações químicas balanceadas para as reações químicas envolvidas na preparação do álcool etílico absoluto

v) Sequência das etapas envolvidas no processo de obtenção do álcool etílico absoluto

Solução:

Essa é uma questão que exigia bastante conhecimento sobre as propriedades do etanol, desde de sua fabricação até a sua purificação. Além de cobrar especificidades sobre a mistura etanol + água. Sendo assim, a consideramos uma das mais difíceis que já caíram.

i. Primeiro, é fermentada a cana de açúcar, o que gera uma solução de água e álcool. Depois, é feita uma destilação fracionada dessa solução, que pode ter uma porcentagem máxima de $95{,}6\%(m/m)$, pois a mistura de água e álcool forma um azeótropo de mínimo, o que inviabiliza a purificação do álcool além desse valor.

ii. Para prepararmos álcool $99{,}5\%(m/m)$, devemos primeiro reagir a solução de álcool $95{,}6\%(m/m)$ com algum agente desidratante, como o CaO. Depois isso, devemos filtrar a mistura, utilizando as seguintes vidrarias:
1) Béquer: Para realizar a reação e para coletar o etanol após a reação.
2) Funil e papel de filtro: Para filtrar o hidróxido de sódio formado.
3) Espátula: Para adicionar o CaO ao etanol $95{,}6\%(m/m)$.
4) Bastão de vidro: Para agitar a mistura durante a reação.

iii. Devemos usar reagentes desidratantes. O mais importante para essa atividade é o CaO.

iv. $CaO_{(s)} + H_2O_{(l)} \rightarrow Ca(OH)_{2(s)}$. O hidróxido de cálcio formado precipita e pode ser filtrado.

v. A sequência de etapas é dada por:
1) Destilação fracionada até atingir o azeótropo de mínimo.
2) Desidratação com CaO.
3) Filtração comum.

11) ITA – 2017

Barreiras térmicas de base cerâmica são empregadas em projetos aeroespaciais. Considere os materiais a seguir:

$$I)\ BN \quad II)\ Fe_2O_3 \quad III)\ NaN_3 \quad IV)\ Na_2SiO_3 \quad V)\ SiC$$

Assinale a opção que apresenta o(s) material(is) geralmente empregado(s) como componente(s) principal(is) de barreiras térmicas em projetos aeroespaciais.

a) Apenas I e V

b) Apenas II

c) Apenas III

d) Apenas III e IV

e) Apenas V

Solução:

Essa questão foi considerada uma das mais difíceis da história pelo nível de compreensão do problema que a questão exigia do aluno para marcar uma alternativa consistente. Podemos pensar que, para que um material sirva como barreira térmica, ele não pode se decompor frente ao calor, o que ocorre com o N_aN_3, por exemplo, que, quando aquecido, sofre decomposição da seguinte forma:

$$2NaN_{3(s)} \rightarrow 2Na_{(s)} + 3N_{2(g)}$$

Outro que sofre decomposição térmica é o silicato de sódio. Porém, se você só soubesse sobre o $N_aN_{3(s)}$, você conseguiria eliminar a alternativa D, a única com o silicato.

Agora, temos que decidir entre o Fe_2O_3, BN e SiC. O Fe_2O_3 pode acabar causando outras complicações, como o peso desse material, caso fosse utilizado como barreira térmica em projetos aeroespaciais.

Sendo assim, ficamos só com a opção de BN e SiC. Por descarte de alternativas, já sabemos que o SiC é um material que pode ser utilizado com barreira térmica. Olhando para o BN,

percebemos que ele é bem parecido com o SiC no sentido de serem bem iônicos e duros. Dessa forma, ficamos com a opção com os dois compostos.

Observe que boa parte da solução é especulativa. Ou seja, esse é o tipo de questão que você vai analisando de certa forma e chega em uma resposta que não necessariamente é a correta, pois a informações envolvidas na análise são bem específicas. Dessa forma, a alternativa que marcamos é a A, que é a correta ☺.

12) ITA – 2005

A 25°C, borbulha-se H_2S(g) em uma solução aquosa 0,02 mol/L em $MnCl_2$ (g), contida em um erlenmeyer, até que seja observado o inicio de precipitação de MnS(s). Nesse momento, a concentração de H^+ na solução é igual a $2{,}5x10^{-7}mol/L$

Dados eventualmente necessários, referentes à temperatura de 25°C:

$$MnS(s) + H_2O(l) \rightleftharpoons Mn^{2+}(aq) + HS^-(aq) + OH^-(aq)\,;\ K_1 = 3x10^{-11}$$

$$H_2S(aq) \rightleftharpoons HS^-(aq) + H^+(aq)\,;\ \ K_2 = 9{,}5x10^{-8}$$

$$H_2O(l) \rightleftharpoons OH^-(aq) + H^+(aq)\,;\ \ K_3 = 1{,}0x10^{-14}$$

Assinale a opção que contém o valor da concentração, em mol/L, de H_2S a solução, no instante em que é observada a formação de sólido.

a) $1{,}0x10^{-10}$

b) $7x10^{-7}$

c) $4x10^{-2}$

d) $1{,}0x10^{-1}$

e) $1{,}5x10^4$

Solução:

Questão de equilíbrio químico que exige bastante atenção e treino.

Para resolver esse tipo de questão, devemos fazer algo chamado análise sistemática do equilíbrio. Mas, o que seria isso? É relativamente comum nesses vestibulares de alto nível você encontrar questões de equilíbrio com muitas reações paralelas, muitas constantes, enfim, muitas informações. A ideia então é, antes de começar a questão, escrever todas as reações que acontecem e as constantes de equilíbrio para, a partir daí, bolarmos um plano de resolução. Sendo assim, temos:

A reação que acontece quando borbulha-se H_2S em $MnCl_2$ é dada por:

$$H_2S_{(g)} + Mn^{2+}_{(aq)} \rightarrow MnS_{(s)} + 2H^+_{(aq)}$$

$$(i) \qquad K = \frac{[H^+]^2}{[H_2S] \cdot [Mn^{2+}]}$$

Das reações do enunciado, temos:

$$(ii) \qquad MnS_{(s)} + H_2O_{(l)} \rightleftharpoons Mn^{2+}_{(aq)} + HS^-_{(aq)} + OH^-_{(aq)}$$

$$K_1 = [Mn^{2+}][HS^-][OH^-] = 3 \cdot 10^{-11}$$

$$(iii) \qquad H_2S \rightleftharpoons HS^-_{(aq)} + H^+_{(aq)}$$

$$K_{II} = \frac{[HS^-][H^+]}{[H_2S]} = 9{,}5 \cdot 10^{-8}$$

$$(iiii) \qquad H_2O_{(l)} \leftrightharpoons OH^-_{(aq)} + H^+_{(aq)}$$

$$K_{III} = [OH^-][H^+] = 1{,}0 \cdot 10^{-14}$$

Também sabemos que:

$$[Mn]^{2+} = 0{,}02M$$

$$[H^+] = 2{,}5 \cdot 10^{-7}M$$

Pronto. Agora, o que precisamos fazer é bolar um plano de resolução. Veja que, temos a concentração de $[H^+]$, de $[Mn]^{2+}$ e queremos a concentração de $[H_2S]$. A equação (i) é justamente o que precisamos para resolver o problema. Porém, não temos o valor de K. Ora, basta agora olhar para as outras equações e tentar escrever K em função dela. Tentando um pouco, chegamos que:

$$K = \frac{[OH^-][H^+]\frac{[HS^-][H^+]}{[H_2S]}}{[Mn^{2+}][HS^-][OH^-]} = \frac{[H]^2}{[H_2S][Mn^{2+}]} = \frac{K_{III} \cdot K_{II}}{K_I}$$

$$K = 3{,}17 \cdot 10^{-11}$$

Dessa forma, concluímos que:

$$3{,}17 \cdot 10^{-11} = \frac{(2{,}5 \cdot 10^{-7})^2}{0{,}02 \cdot [H_2S]}$$

$$[H_2S] = \frac{(2{,}5 \cdot 10^{-7})^2}{3{,}17 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}020}$$

$$[H_2S] = 9{,}87 \cdot 10^{-2} mol/L$$

$$[H_sS] \cong 1{,}0 \cdot 10^{-1}\ mol/L$$

13) ITA – 2016

Considere os seguintes compostos químicos que se encontram no estado líquido à temperatura de 298 K e pressão ambiente de 1 bar:

I. 2-metil-pentano

II. 3-metil-pentano

III. 2,2-dimetil-butano

IV. 2,3-dimetil-butano

V. Hexano

Nestas condições, assinale a opção que apresenta a ordem decrescente da magnitude da pressão de vapor dos respectivos compostos.

a) I > II > III > IV > V

b) II > I > V > III > IV

c) III > IV > I > II > V

d) IV > III > I > II > V

e) V > II > I > IV > III

Solução:

Para responder essas questões, precisamos ter em mente os principais fatores a serem analisados para decidir qual tem maior pressão de vapor. Vamos analisando os 5 compostos e ir decidindo qual deles vamos eliminando ao longo do caminho.

De primeira, vamos procurar os compostos com maior área de superfície, pois eles tem mais contato com outras moléculas e isso faz diminuir a pressão de vapor, uma vez há maior área de contato para atuação das forças de London.

Logo, podemos dizer que o hexano tem menor pressão de vapor.

Agora, devemos nos perguntar: Qual dos compostos terá menor área de contato? Desenhando as figuras, percebemos que o 2,2-dimetil-butano, uma vez que tem impedimentos espaciais dos dois lados devido aos grupos metil, é o composto com maior pressão de vapor, pois tem menor contato com outras moléculas.

Agora, temos que decidir entre o 2-metil-pentano, 3-metil-pentano e 2,3-dimetil-butano

Entre esses 3, qual você acha que tem maior contato com outras moléculas? Isso, quanto maior a cadeia carbônica principal, maiores são as atrações que a partícula sofre. Sendo assim, entre os 3, aquele com maior pressão de vapor é o 2,3-dimetil-butano.

Agora, entre o 2-metil-pentano e o 3-metil-pentano, precisamos de um argumento para decidir. Esse argumento será a simetria! Quanto mais simétrica for a molécula, melhor o empacotamento dela com as outras ao redor. Sendo assim, a pressão de vapor do 3-metil-pentano é menor que a do 2-metil-pentano. Com isso, a ordem decrescente da magnitude da pressão de vapor fica:

$$III > IV > I > II > V$$

Observação: Apesar da solução ser relativamente longa, você poderia ter marcado e acertado a questão apenas identificando o composto III como de maior pressão de vapor, pois só uma alternativa que contém essa opção, que é a alternativa C.

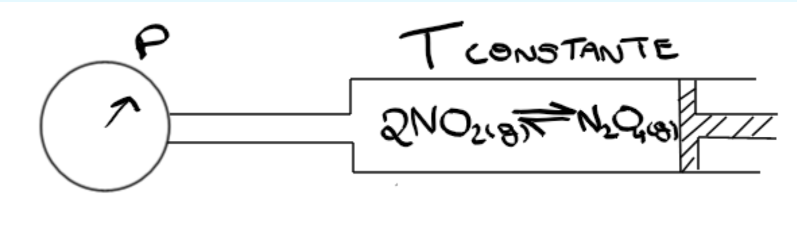
Alternativa C

14) ITA – 1996

Um cilindro provido de torneira contém uma mistura de N_2O_4(g) e NO_2(g). Entre estas substâncias se estabelece, rapidamente, o equilíbrio

$$N_2O_4 \rightleftharpoons 2NO_2 \; ; \Delta E > zero$$

Mantendo o volume (V) constante, a temperatura é aumentada de 27 para



57 °C

Diante deste aumento de temperatura, restabelecido o equilíbrio, podemos concluir que a pressão total (P_t) vai:

a) Aumentar cerca de 10%

b) Aproximadamente duplicar

c) Permanecer aproximadamente constante

d) Aumentar mais que 10%, sem chegar a duplicar.

e) Aumentar menos o que 10%, porém mais que 1%

Solução:

O equilíbrio dado na questão é:

$$N_2O_{4(g)} \rightleftharpoons 2NO_{2(g)}, \Delta E > 0$$

Como a situação da questão acontece para temperaturas baixas, podemos escrever:

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

O aumento de temperatura de $27°C$ $(300K)$ para $57°C$ $(330K)$ é de 10%. Pela equação de Clapeyron, o aumento da pressão deveria ser de 10% se o número de mols de mantivesse constante dentro do cilindro.

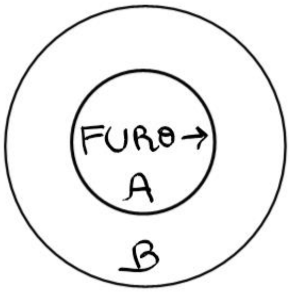
Porém, como a reação direta é endotérmica, pelo princípio de Le Chatelier, o aquecimento desloca o equilíbrio para a direita, no sentido endotérmico, provocando um aumento do número de mols, mas sem chegar a duplicar, pois a reação não se completa devido ao equilíbrio existente, uma vez que, como é um equilíbrio, deve haver uma quantidade, mesmo que mínima, de N_2O_4. Logo, a pressão vai aumentar, porém sem chegar a duplicar. Além do mais, como a variação é de apenas 30°C, não é de se esperar que a variação do número de mols seja tão significativa a ponto de, junto com o efeito da temperatura, duplicar a pressão. Sendo assim, ficamos com item **E** mesmo.

Alternativa E

Assim, podemos afirmar que a pressão total aumenta mais que 10%, sem chegar a duplicar.

15) ITA – 1992

Um recipiente A contém, inicialmente, uma mistura gasosa, comprimida, dos isótopos 20 e 22 do Neônio. Este recipiente é envolvido completamente por outro, B, conforme a figura ilustrada ao lado. No início, o recipiente B estava completamente evacuado. Por um pequeno furo na parede de A, o gás escapa de A para B. Numa situação desse tipo, a concentração (em fração molar) do isótopo mais leve no gás remanescente dentro do recipiente A, em função do tempo, a partir do início do



vazamento:

a) Permanece constante
b) Vai diminuindo sempre
c) Vai aumentando sempre
d) Aumenta, passa por um máximo, retornando ao valor inicial
e) Diminui, passa por um mínimo, retornando ao valor inicial.

Solução:

Vamos dividir os acontecimentos da questão em 3 partes.

1° parte – O furo é feito em A.

Lembremos a fórmula da velocidade de um gás:

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Perceba que é inversamente proporcional à velocidade de efusão do gás. Logo, o isótopo mais leve sai mais rápido no começo, causando a diminuição da concentração desse gás no recipiente A.

2° parte – O conflito de interesses.

Básico Bem Feito

Na entrada do furo, desde o momento em que ele é feito, partículas vão de A para B e de B para A, dos dois gases. Porém, como no início não há gases em B, a concentração dos dois gases cai. Porém, com o passar do tempo, como o gás mais leve esvaziou mais rápido o recipiente A, a tendência é, em algum momento, entrarem mais partículas do gás mais leve no recipiente A do que o gás mais pesado, então a fração molar volta a subir, passando por um ponto de mínimo.

3° parte – O equilíbrio é atingido.

Conforme vão entrando mais partículas do isótopo mais leve em A, a tendência é que as pressões se igualem, dentro e fora de A. Quando isso acontecer, a fração molar de A vai se tornar a mesma da fração inicial, pois a proporção entre as partículas continua a mesma, por todo o recipiente. Logo, depois do ponto de mínimo, a fração molar do isótopo mais leve sobe até se tornar igual à inicial.

16) ITA – 2010

Sabendo que o produto de solubilidade do calomelano (cloreto de mercúrio I) é Kps = $2{,}6x10^{-18}$ e que seu logaritmo natural é ln(Kps) = −40,5, determine:

a) a concentração, em mol/L, de Hg_2^{2+} e de Cl^- numa solução aquosa saturada de calomelano.

b) o potencial padrão de um eletrodo de calomelano.

Solução:

A dificuldade dessa questão consiste, primeiro, em saber o que é o eletrodo de calomelano. Depois, o que torna a questão difícil é todo o conjunto de ideias envolvidas na resolução do item b. Sendo assim, vamos para a questão:

a)

Escrevendo a dissociação do calomelano, temos:

$$Hg_2Cl_{2(s)} \rightleftharpoons Hg_{2(g)}^{2+} + 2Cl_{(aq)}^-$$

$$k_{ps} = [Hg_2^{2+}][Cl^-]^2$$

Vamos, agora, descobrir qual a concentração final de $[Hg_2^{2+}]$ e de $[Cl^-]$, através do quadro de equilíbrio. Seja $[Hg_2^{2+}] = x$. Pela estequiometria da reação, $[Cl^-] = 2x$.

Através do quadro de equilíbrio e considerando que a concentrações iniciais das substâncias são nulas, temos que:

$$x \cdot (2x)^2 = 2{,}6 \cdot 10^{-18} \Rightarrow 4x^3 = 2{,}6 \cdot 10^{-18}$$

$$x = 8{,}66 \cdot 10^{-7} M$$

$$[Hg_2^{2+}] = 8{,}66 \cdot 10^{-7} M \cong 8{,}7 \cdot 10^{-7} M$$

$$[Cl^-] = 1{,}73 \cdot 10^{-6} M \cong 1{,}7 \cdot 10^{-6} M$$

b) Agora, calculando o potencial do eletrodo de calomelano, temos:

$$Semi\ Reação\ de\ Redução: \quad Hg_{2(aq)}^{2+} + 2e^- \rightarrow 2Hg_{(l)} \qquad E^0_{Hg^{2+}/Hg}$$

$$Semi\ Reação\ de\ Oxidação: \quad 2Hg_{(l)} + 2Cl^-_{(aq)} \rightarrow Hg_2Cl_{2(s)} + 2e^- \qquad E^0_{calomelano}$$

$$Reação\ global: \quad Hg_{2(aq)}^{2+} + 2Cl^-_{(aq)} \rightarrow Hg_2Cl_{2(s)} \qquad \Delta E°$$

Agora, iremos encontrar o valor de ΔE de fato:

Para tornar mais intuitivo, vamos demonstrar, matematicamente, os princípios aqui envolvidos. Temos que:

$$\Delta G = \Delta G° + RTlnQ$$

Também temos que:

$$\Delta G° = -nF\Delta E°$$

Na situação de equilíbrio, $\Delta G = 0$. Assim, segue que:

$$-nF\Delta E° = -RTlnK_{ps} \Rightarrow nF\Delta E° = RTlnK_{ps}$$

Porém, aqui há um detalhe importantíssimo! Perceba que não estamos olhando para a reação direta da dissociação do calomelano, e sim a reação inversa. Logo, o que entra na fórmula não é o K_{ps}, e sim o K_{ps}^{-1}. Dessa forma, segue que:

$$2 \cdot 96500 \cdot \Delta E° = 8{,}31 \cdot 298 \cdot 40{,}5 \Rightarrow \Delta E° = 0{,}52\ V$$

A seguir, fazemos: $\Delta E° = E^0_{Hg^{2+}/Hg} - E^0_{calomelano}$

Um bizu para escrever a diferença de potencial certa é pensar "A ddp é sempre o potencial do que reduz menos o potencial do que oxida", lembrando que esse bizu serve apenas quando todos os potenciais forem de redução.

Dessa forma, temos que:

$$\boxed{E^0_{calomelano} = E^0_{Hg^{2+}/Hg} - 0{,}52}$$

Porém, o valor de $E^0_{Hg^{2+}/Hg}$ não foi dado. Logo, não é possível continuar o cálculo.

17) ITA – 2020

Considere a conformação estrutural das moléculas 1,3-dietilcicloexano, 1,4-dietilcicloexano e 2,3 diclorobutano. Pedem-se:

a) Desenhe todas as estruturas conformacionais;

b) Determine o número de centros quirais em cada molécula;

c) Identifique todos os pares enantioméricos e os compostos meso, se presentes.

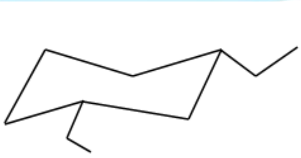
Solução:

Essa questão pode gerar muita divergência de gabaritos. Essa divergência é devido ao fato de que o enunciado abre margem para mais de uma interpretação o que o ITA queria dizer com isômeros conformacionais. Aqui, vamos abordar uma solução que expressa apenas os isômeros mais estáveis, que são as confomações cadeira, barco e barco torcido para os compostos 1,3 – dietilcicloexano e 1,4 – dietilcicloexano. Pois, se formos fazer suposições sobre o que o elaborador da questão quer, vamos supor o caso mais genérico, para ter mais chances de pontuar.

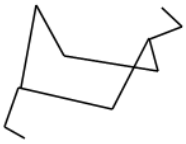
a)

Para resolver esse item, devemos lembrar que o hexano possui conformação cadeira, barco e barco torcido. Além disso, nessa questão, podemos falar de conformações axial e equatorial para os grupos etil. Perceba que o ITA, nessa questão, pede muita coisa, o que não é normal para o espaço e o tempo que você tem na prova. Sendo assim, para você não perder muito tempo fazendo essa questão e deixando as outras de lado, escreva as conformações que parecem ser mais intuitivas, que são aquelas relacionadas à estabilidade do composto. Porém, um breve comentário sobre a existência das posições axial e equatorial do grupo etil acrescentaria bastante à sua resolução. Para o 2,3 – diclorobutano, devemos contabilizar as conformações referente ao giro da molécula em torno da própria ligação sigma. Sendo assim, temos que:

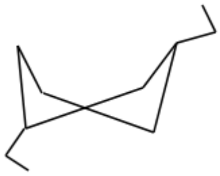
1,3 – dietilcicloexano



CADEIRA

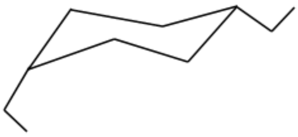


BARCO

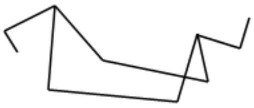


BARCO TORCIDO

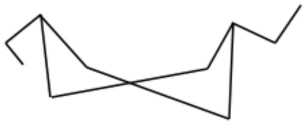
1,4 – dietilcicloexano



CADEIRA

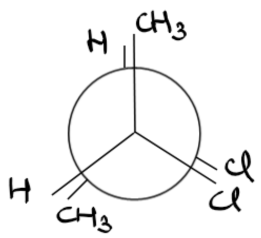


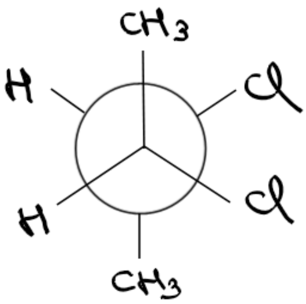
BARCO

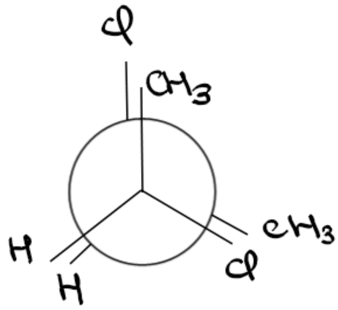


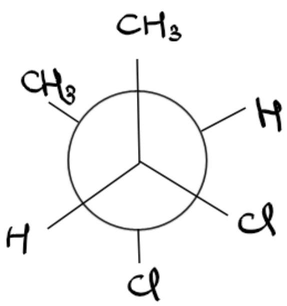
BARCO TORCIDO

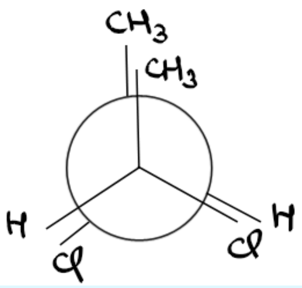
2,3 – diclorobutano

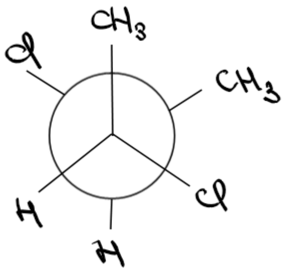








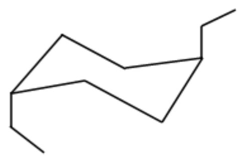




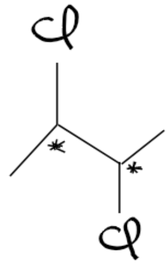
c) Para esse item, você só precisa identificar o carbonos que têm todos os "caminhos de chegar até ele" diferentes. Ou seja, você verá se há mais de um grupo diferente ligado ao carbono e verá se existe um simétrico para cada caminho que você percorrer pela molécula, saindo

d) do carbono. Se não houver nada disso, aquele carbono é um centro quiral. Logo, temos que:

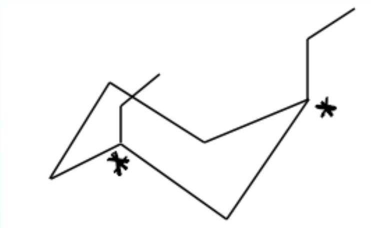
1,4 – dietilcicloexano. Não possui centro quirais



2,3 – diclorobutano. Possui dois centros quirais



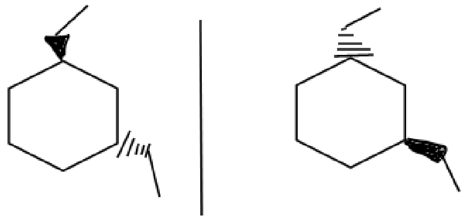
1,3 – dietilcicloexano. Possui dois centros quirais



c)

Para analisar esse item, devemos ter em mente que, se existe um plano de simetria ou um espelho passando pelo composto, ele é meso. Se não, e ele possui carbonos quirais, ele terá um par de enantiômeros. Com isso, temos que:

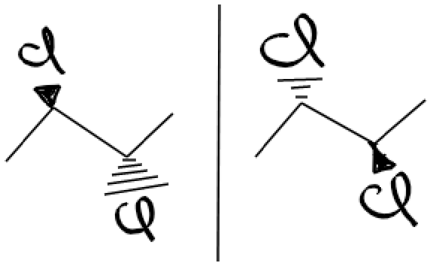
Par enantiômero

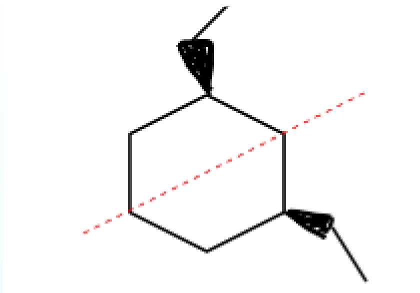


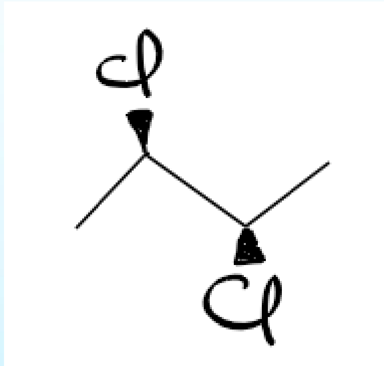
Par enantiômero

Composto meso (possui plano de simetria)

Composto meso





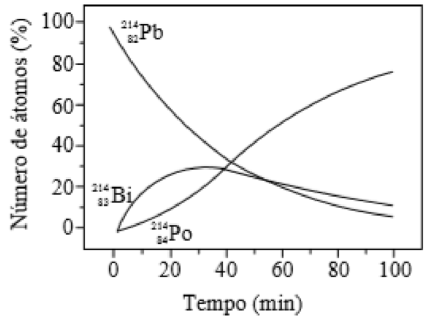


18) ITA – 2004

O ${}^{214}_{82}Pb$ desintegra-se por emissão de partículas Beta, transformando-se em ${}^{214}_{83}Bi$ que, por sua vez, se desintegra também por emissão de partículas Beta, transformando-se em ${}^{214}_{84}Pb$. A figura ao lado mostra como varia, com o tempo, o número de átomos, em porcentagem de partículas, envolvidos nestes processos de desintegração. Admita ln 2 = 0,69. Considere que, para estes processos, sejam feitas as seguintes afirmações:

I. O tempo de meia-vida do chumbo é de aproximadamente 27 min.
II. A constante de velocidade da desintegração do chumbo é de aproximadamente $3 \times 10^{-2}\ (\mathrm{min})^{-1}$.
III. A velocidade de formação de polônio é igual à velocidade de desintegração do bismuto.
IV. O tempo de meia-vida do bismuto é maior que o do chumbo.
V. A constante de velocidade de decaimento do bismuto é de aproximadamente $1 \times 10^{-2}\ (\mathrm{min})^{-1}$.

a) apenas I, II e III.
b) apenas I e IV.
c) apenas II, III e V.
d) apenas III e IV.
e) apenas IV e V.



SOULUÇÃO: A primeira afirmativa é resolvida simplesmente observando o gráfico.

Podemos confirmar que quando são consumidos metade dos átomos de chumbo (100% viram 50%) o tempo é algo próximo de 27 min. Veja a

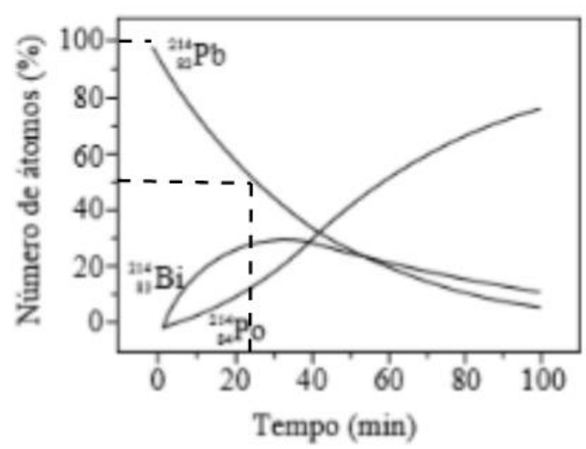


figura:

Assim, a primeira afirmativa é verdadeira.

Como a decomposição é de primeira ordem ($^{214}_{82}Pb \rightarrow {}^{0}_{-1}\beta + {}^{214}_{83}Bi$) podemos usar que a decomposição é regida pela seguinte fórmula.

$$N = N_0 . e^{-k.t}$$

Onde N é o número de átomos não desintegrados e N_0 o número de átomos inicial. Usando a primeira afirmativa (que assuimimos verdadeira), podemos usar o tempo de meia vida:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 . e^{-k.27}$$

Assim, $2 = e^{27.k}$

Aplicando o ln dos dois lados:

$$ln2 = 27. k$$

Com $ln2 \cong 0{,}7$ temos:

$$k \cong 2{,}6.10^{-2}\ (\text{min})^{-1} \cong 3.10^{2}\ (\text{min})^{-1}$$

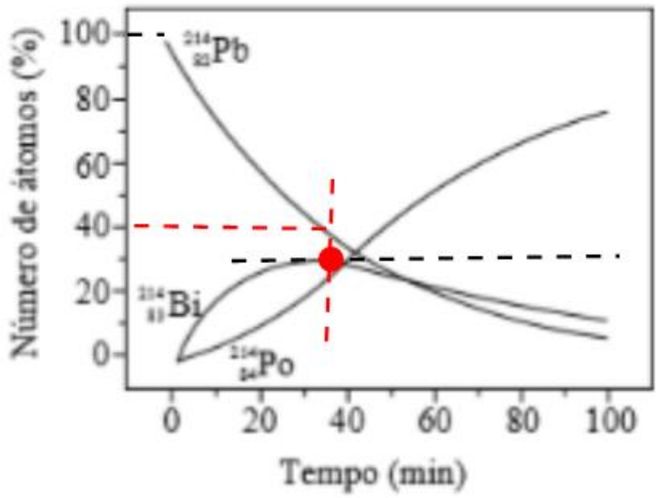
Sim… essa aproximação é bem forçada!

Mas colocamos como verdadeira.

Vamos para a terceira afirmativa:

Como o Bismuto vira exclusivamente Polônio, o que é desintegrado de Bismuto vira apenas Polônio, ou seja, estão relacionados pela mesma taxa. O fato de o Bismuto ser gerado pela decomposição do chumbo não muda o fato de que na DESINTEGRÇÃO o bismuto vira apenas Polônio.

Vamos paquarta afirmativa:



Perceba que no ponto de inflexão do Bismuto, onde a taxa de formação de Bismuto (consumo de chumbo) é igual a de desintegração do Bismuto e podemos escrever:

$$A_{Pb} = A_{Bi}$$

Onde A é a atividade química (relacionada à velocidade).

Mas, $A = k.N$

Mas no ponto de inflexão, há mais chumbo que Polônio. Ou seja, $N_{Pb} > N_{Bi}$

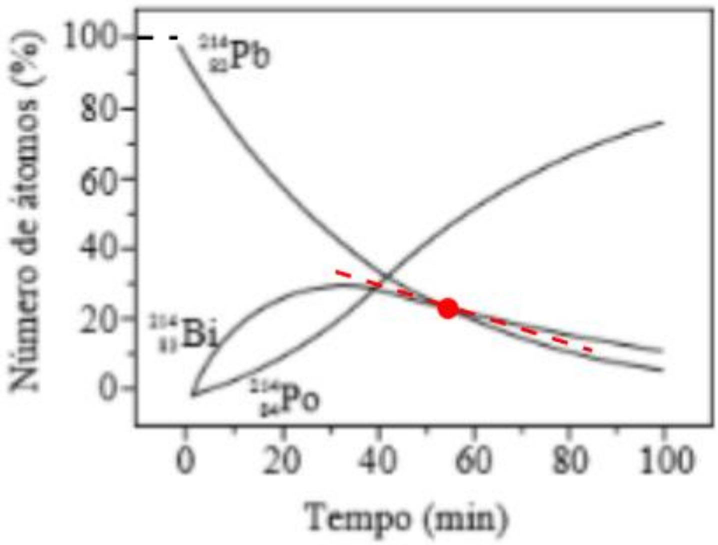
Assim, concluimos que $k_{Pb} < k_{Bi}$.

Como vimos na primeira afirmação $t_{\frac{1}{2}} = \frac{ln2}{k}$.

Logo,

$$t_{\frac{1}{2}Pb} > t_{\frac{1}{2}Bi}$$

Poderiamos concluir de outra forma também, ao invés de procurarmos o ponto onde as atividades são iguais (ponto de inflexão) podemos ir atrás do ponto onde as quantidades são iguais (onde os gráficos de Polônio e de Bismuto se cruzam.



Como nesse ponto o gráfico de Bismuto é decrescente, significa que ele é mais consumido do que formado (a partir do Chumbo).

Assim,

$$A_{Bi} > A_{Pb} \rightarrow k_{Bi}.N_{Bi} > k_{Pb}.N_{Pb}$$

Mas, nesse ponto, $N_{Bi} = N_{Pb}$

Logo,

$$k_{Bi} > k_{Pb}$$

Como vimos na primeira afirmação $t_{\frac{1}{2}} = \frac{ln2}{k}$.

Logo,

Básico Bem Feito

$$t_{\frac{1}{2}Pb} > t_{\frac{1}{2}Bi}$$

Para a quinta afirmação, como $k_{Bi} > k_{Pb}$ então $k_{Bi} > 2{,}6.10^{-2}\ (\text{min})^{-1}$ e não é algo aproximadamente $1.10^{-2}\ (\text{min})^{-1}$

19) ITA – 2003

O tempo de meia-vida (t1/2)do decaimento radioativo do potássio 40 (${}^{40}_{39}K$) é igual a 1,27 x 10^9 anos. Seu decaimento envolve os dois processos representados pelas equações seguintes:

I. ${}^{40}_{19}K \rightarrow {}^{40}_{20}Ca + {}^{0}_{-1}e +$
II. ${}^{40}_{19}K + {}^{0}_{-1}e \rightarrow {}^{40}_{18}Ar$

SOLUÇÃO: O desafio inicial dessa questão é entender como usar os dados das porcentagens... Pois bem, vamos lá!

Durante o período em questão, 10,7% dos átomos de de potássio que sofreram decaimento viraram Cálcio e os outros 89,3% viraram Argônio.

Sendo N_0 é o número inicial de átomos de Potássio e N o número de átomos restantes (que não decairam) em cada processo.

O processo representado pela equação I é responsável por 89,3% do decaimento radioativo do 40 19K , enquanto que o representado pela equação II contribui com os 10,7% restantes. Sabe-se, também, que a

razão em massa de 40 18 Ar e 40 19 K pode ser utilizada para a datação de materiais geológicos. Determine a idade de uma rocha, cuja razão em massa de ${}^{40}_{18}Ar$ / ${}^{40}_{19}K$ é igual a 0,95. Mostre os cálculos e raciocínios utilizados

I. Para a segunda reação:
$N = N_0 . e^{-k_2 . t} \qquad (x)$

Logo,

$$t = \frac{1}{\mathrm{k}_2} . \ln\left(\frac{N_0}{N}\right)$$

Básico Bem Feito

Mas,

$$\frac{N_0}{2} = N_0 . e^{-k_2 . t_{\frac{1}{2}}}$$

Assim, $2 = e^{t_{\frac{1}{2}} . k_2}$

Aplicando o ln dos dois lados:

$$ln2 = t_{\frac{1}{2}} . k_2$$

Isolando k_2e substituindo em (x), temos:

$$t = \frac{t_{\frac{1}{2}}}{ln2} . \ln\left(\frac{N_0}{N}\right)$$

Como sabemos $ln2$ e $t_{\frac{1}{2}}$, precisamos apenas conhecer $\frac{N_0}{N}$ usando as informações do argônio, já que usamos sua constante (k_2), sendo assim o $t_{\frac{1}{2}}$ referente a ele.

Para o Argônio:

Temos que o número de átomos decaidos é: $N - N_0$.

A massa de Argônio é $10{,}7\% . (N_0 - N) . 40$, já que essa porcentagem virou Argônio.

A massa de Potássio restante é $40 . N$, já que N é o número de átomos de potássio restantes.

Cuidado com a confursão… perceba que ambos átomos têm a mesma massa atômica $(40u.)$.

Assim, usando a razão de massas fornecidas no enunciado, temos:

$0{,}95 = \frac{10{,}7\% . (N_0 - N) . 40}{40 . N}$

Assim,

$$95 = 10{,}7.\left(\frac{N_0}{N} - 1\right)$$

Logo,

$$\frac{N_0}{N} = \frac{1}{0{,}101123}$$

Assim,

$$t = \frac{t_{\frac{1}{2}}}{ln2}.\ln\left(\frac{1}{(0{,}101123)}\right) = \frac{t_{\frac{1}{2}}}{ln2}.(-\ln(0{,}101123)) = 1{,}27.10^9.log_{0,5}^{0,101123}$$
$$= 4{,}2.10^9\ anos.$$

Usamos que: $-log_b^a = log_{\frac{1}{b}}^a$ e que $\frac{log_a^b}{log_a^c} = log_c^b$

20) ITA – 2017

Considere as reações químicas reversíveis I e II:

$$(I)\quad BrO3^-(aq) + 3SO_3^{2-}(aq) \rightleftharpoons Br^-(aq) + 3SO_4^{2-}(aq)\ \ (k_1 direta\ e\ k_2 inversa)$$

$$(II)\quad O_2(g) + O(g) \rightleftharpoons O_3(g)$$

A respeito das reações I e II responda às solicitações dos itens a e b, respectivamente:

a) Sabendo que a reação I ocorre em meio ácido e que a sua reação direta é sujeita à lei de velocidade dada por $v =$

$k_1.[BrO_3^-].[SO_3^{2-}].[H^+]$, expresse a lei de velocidade para a reação reversa.

b) Calcule a constante de equilíbrio da reação II dadas as seguintes reações e suas respectivas constantes de equilíbrio:

$$NO_2(g) \rightleftharpoons NO(g) + O(g)\quad K_{eq} = 4{,}0.10^{-49}\ (direta\ com\ h.v)$$

$$O_3(g) + NO(g) \rightleftharpoons NO_2(g) + O_2(g)\quad K_{eq} = 2{,}0.10^{-34}$$

Básico Bem Feito

SOLUÇÃO: A letra a logo de cara assusta, pois não são fornecidas muitas informações…

Mas, felizmente a letra b é bastante atrativa. Vamos a ela primeiramente:

a) Vamos organizar as equações dadas para chegar na desejada:

$$NO_2(g) + O_2(g) \rightleftharpoons O_3(g) + NO(g) \quad K_1{}'$$

$$NO(g) + O(g) \rightleftharpoons NO_2(g) \quad K_2'$$

Somando as duas ficamos com:

$$O_2(g) + O(g) \rightleftharpoons O_3(g) \quad K_3$$

Quando invertemos uma equação, sua constante se eleva a -1 e quando somamos equações suas constantes se multiplicam!

Logo: $K_3 = K_1'.K_2' = \frac{1}{K_1.K_2} = \frac{1}{2.10^{-34}.4.10^{-49}} = 1{,}25.10^{82}$

Obs.: esse parece um valor absurdo, já que é muito alto! Mas nosso instinto está correto, de fato, ITA errou o dado, em que $K_1 = 2.10^{34}$ sem o sinal de menos… Mas, devemos usar sempre o que foi fornecido!

a) Como o mecanismo não foi fornecido, estamos "à deriva". E sim, aqui a experiência conta bastante… algo que é inesperado de um aluno. Com certeza pouquíssimos acertaram essa letra.

Usando a lei de velocidade direta, podemos supor que seja:

$$BrO_3^- + SO_3^{2-} + H^+ \rightarrow HBrO_2 + SO4^{2-}$$

Um bom palpite é usar o $HBrO_2$ no produto, poispor ser um ácido fraco ele não tende a continuar se ionizando.

Agora de fato temos que "chutar" um mecanismo…

Vamos considerar o seguinte:

(lenta) $BrO_3^- + SO_3^{2-} + H^+ \rightarrow HBrO_2 + SO4^{2-}$

(rápida) $HBrO_2 + SO_3^{2-} \rightarrow HBrO + SO4^{2-}$

(rápida) $HBrO + SO_3^{2-} \rightarrow Br^- + SO4^{2-} + H^+$

Agora, na volta, qual seria a mais lenta?? Não necessáriamente é a reação que direta é mais rápida…

Fomos colocados em xeque… Mas vamos procurar informações que nos ajudem…

Não é difícil aceitar que reações que envolvam mais reagentes demorem mais para ocorrer, já que há mais tempo desprendido na quebra e formação de moléculas. Perceba que no sentido inverso a terceira reação apresenta 3 reagentes, enquanto as outras duas apresentam apenas 2. Vamos admitir que aquela seja a reação mais lenta.

Logo, seus reagentes que farão parte da lei de velocidade da reação inversa. Assim, propõe-se:

$v_i = k_i.[Br^-][SO_4^{2-}][H^+]$.