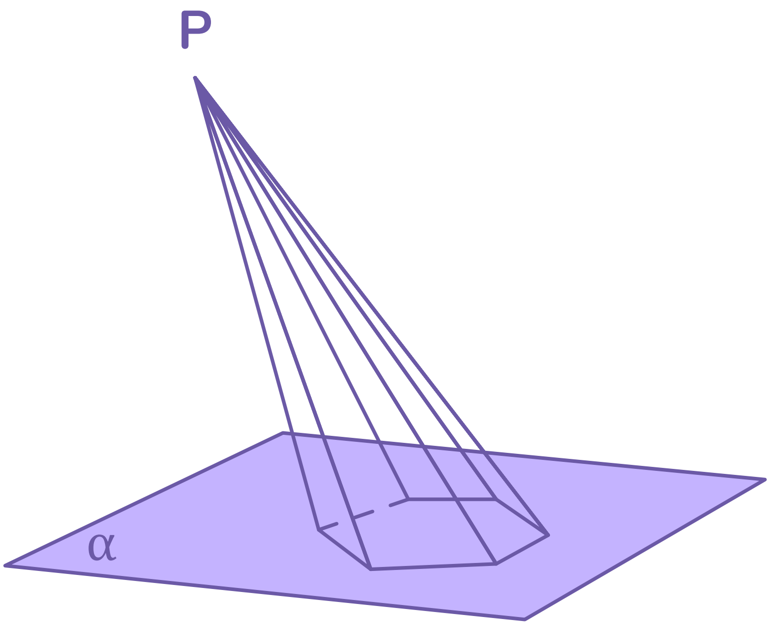
PIRÂMIDE

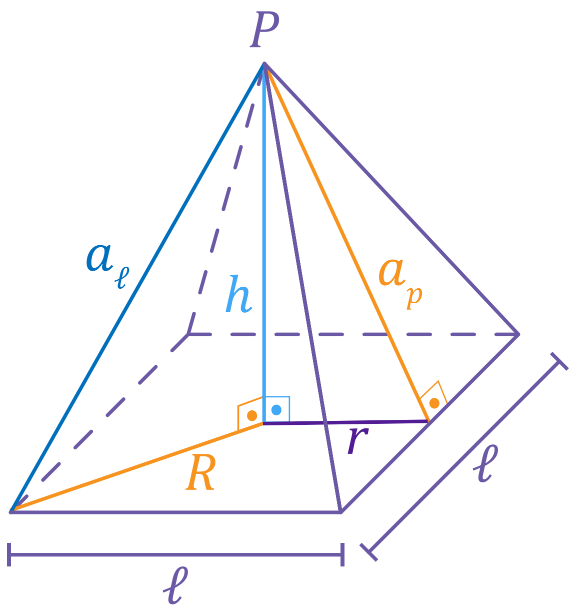
Você certamente já se deparou com fotografias das belas pirâmides do Egito, não é mesmo? Elas são objetos fascinantes, sendo que as primeiras construídas neste formato datam de mais de dois mil anos a.C. Embora não saibamos exatamente qual foi sua origem, podemos muito bem aprender sobre elas no contexto da geometria espacial! Afinal, qual é a definição de **pirâmide**?

Definição 1. Considere um plano α que contenha um polígono qualquer e um ponto P fora de α. Dizemos que uma pirâmide é um poliedro formado pela união entre os segmentos de reta que partem do polígono e chegam até P.



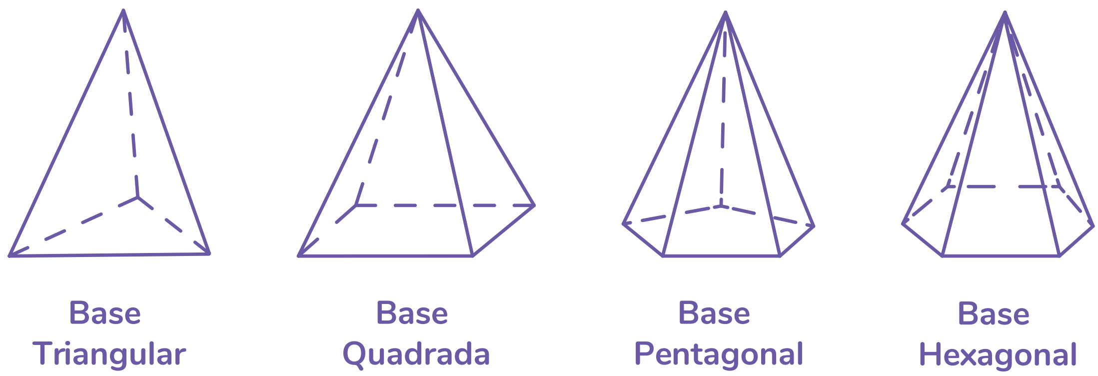
Obs.: Perceba que não necessariamente uma pirâmide possui a base quadrada, como estamos acostumados a ver.

Uma vez definida, vamos agora aprender sobre alguns elementos que compõe a pirâmide. Para isso, observe a figura abaixo.

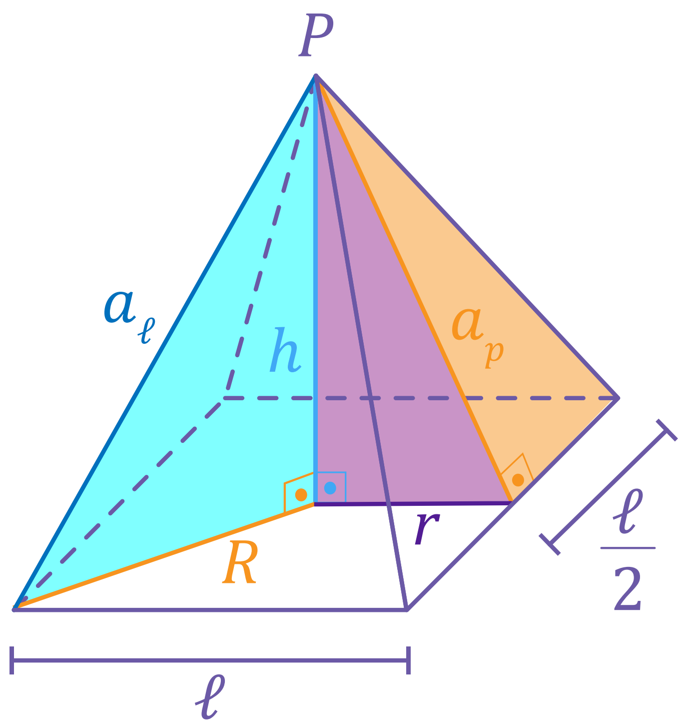


Chamamos o polígono contido no plano (da definição que vimos) de **base** da pirâmide. Os segmentos de reta que formam a base são chamados de **lados** da base. Por outro lado, os segmentos de reta que fazem a ligação entre os vértices da base e o ponto P são as **arestas laterais**. Perceba que as faces laterais da pirâmide são triângulos; a altura das faces laterais é o **apótema da pirâmide**. Se a base possui uma circunferência inscrita, o raio r dela é chamado de **apótema da base**. Se a base possui uma circunferência circunscrita, tem-se o **raio circunscrito** R. Por fim, o segmento de reta perpendicular que une o ponto P à base é a **altura** da pirâmide.

Existem determinadas pirâmides especiais que vamos estuda-las com maior ênfase. Elas são classificadas de acordo com o formato do polígono das bases. São elas: pirâmide de base triangular, de base quadrada, de base pentagonal e de base hexagonal, representadas abaixo.



Vamos começar pela pirâmide de base quadrada. Ela possui, claro, um quadrado como sendo a base e quatro triângulos como faces laterais.



A área de cada face triangular é calculada como o produto do lado da base com a altura dividido por dois. A altura da face triangular é o apótema da pirâmide; assim, temos:

$$A_{face} = \frac{l.a_p}{2}$$

A **área lateral** da pirâmide é a soma das áreas das faces laterais; como temos quatro faces, podemos escrever da seguinte forma:

$$A_{lateral} = 4.A_{face} = \frac{4.l.a_p}{2} = \frac{P_B.a_p}{2}$$

Onde P_B é o perímetro da base (neste caso, um quadrado de lado l).

Finalmente, a **área total** da pirâmide é a soma da área lateral com a área da base (denotada por A_B):

$$A_{total} = A_{lateral} + A_B$$

Obs.: A área da base é a área do quadrado, calculada por l^2.

Além das áreas citadas, a pirâmide de base quadrangular possui uma outra propriedade interessante: o seu **volume**. Este volume é calculado conforme a equação a seguir:

$$V = \frac{1}{3}.A_B.h$$

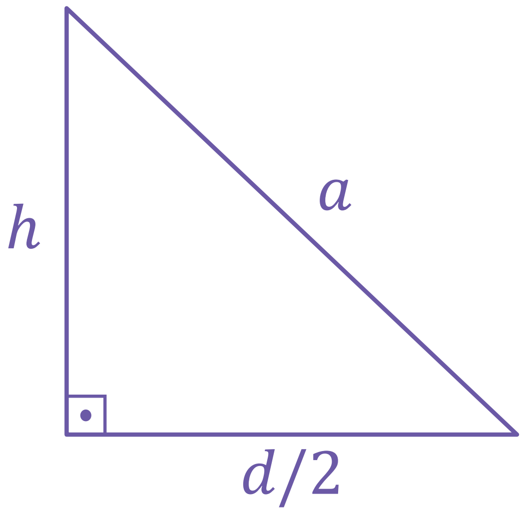
Vamos fazer um exercício sobre este assunto.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Dada uma pirâmide de base quadrada com aresta lateral medindo 8 cm e a altura medindo 6 cm, calcule o seu volume.

Resolução:

Para resolver este exercício, note que a aresta lateral a, a altura h e metade da diagonal do quadrado $\left({}^{d}/_{2}\right)$ formam um triângulo retângulo representado na figura abaixo.



Utilizando o teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$$

E substituindo os valores já conhecidos:

$$\frac{d^2}{4} + 36 = 100$$

$$\frac{d^2}{4} = 64$$

$$d^2 = 4.64$$

$$d = 16\ cm$$

Além disso, sabemos que a diagonal do quadrado se relaciona com o seu lado através da seguinte equação:

$$d = l\sqrt{2}$$

Assim, calcula-se o lado do quadrado da base:

$$l = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}\,cm$$

Com o lado do quadrado, basta elevar ao expoente 2 para acharmos a área da base:

$$A_B = l^2 = \left(8\sqrt{2}\right)^2 = 128\,cm^2$$

Por fim, calculamos o volume da pirâmide:

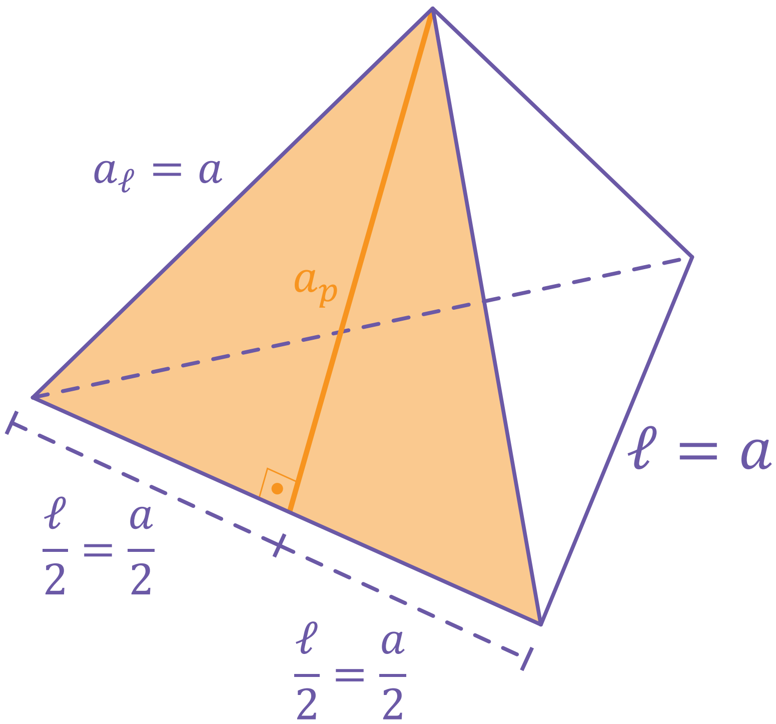
$$V = \frac{1}{3}.A_B.h = \frac{1}{3}.128.6 = 128.2$$

$$V = 256\,cm^3$$

Assim, como solução, o volume da pirâmide é de $256\,cm^3$.

TETRAEDRO

Agora, vamos começar a falar sobre a pirâmide de base triangular, mais conhecida como **tetraedro** (pois é um poliedro de quatro faces). O tetraedro possui um triângulo como sendo sua base e três triângulos como faces laterais. Se todas as suas faces são congruentes, dizemos se tratar de um **tetraedro regular**, ilustrado abaixo.



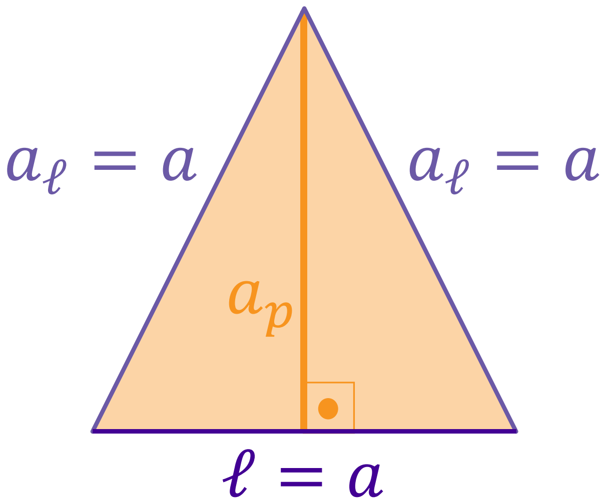
Observe na imagem acima que o tetraedro regular possui quatro faces formadas por triângulos equiláteros. Assim, se desejamos calcular a área de uma das faces, basta utilizar a já conhecida fórmula da área do triângulo equilátero.

$$A_{face} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

Desta forma, a área total do tetraedro regular equivale à soma das áreas das suas quatro faces:

$$A_{total} = l^2\sqrt{3}$$

O apótema da deste tetraedro regular é a altura de um dos triângulos equiláteros da face, como mostrado abaixo:

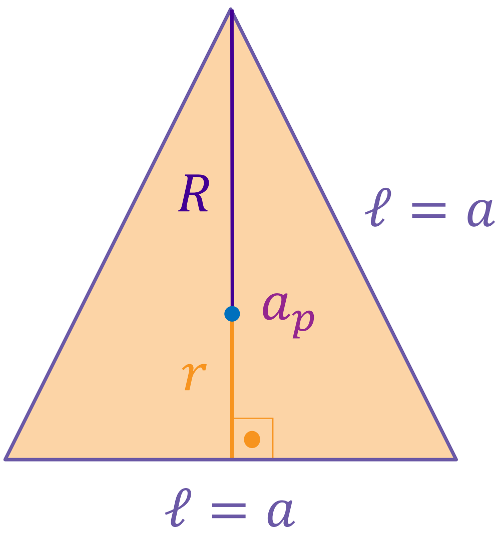


O apótema é calculado conforme abaixo:

$$a_p = h_{triângulo\ da\ face}$$

$$a_p = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Agora, tomemos a base do tetraedro regular, disposta na figura abaixo:

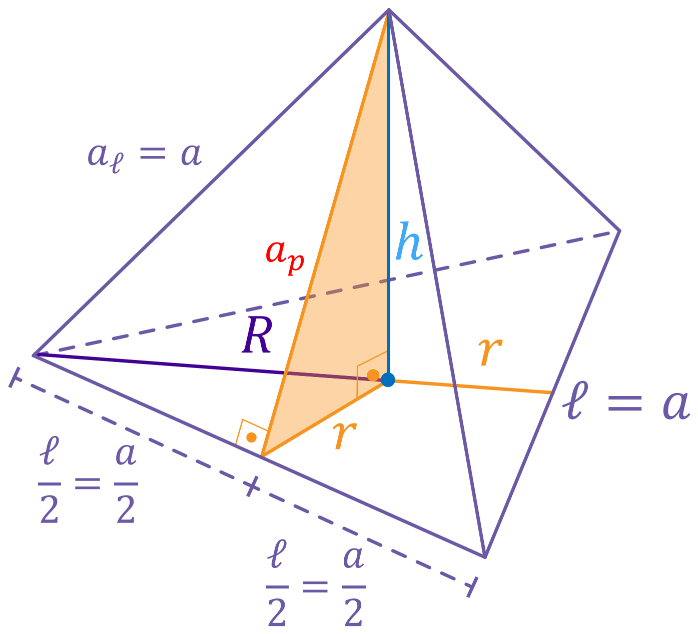


Podemos definir o raio r da circunferência inscrita e o raio R da circunferência circunscrita, representados acima. É possível calculá-los em função do apótema da pirâmide:

$$r = \frac{1}{3}.a_p = \frac{1}{3}.\frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{6}$$

$$R = \frac{2}{3}.a_p = \frac{2}{3}.\frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{3}$$

Voltemos ao tetraedro regular. A altura h do tetraedro regular faz parte de um triângulo retângulo, conforme podemos observar abaixo.



Este triângulo retângulo possui o apótema do tetraedro como hipotenusa, com o raio r da circunferência inscrita e a altura que queremos encontrar como catetos. Escrevemos o teorema de Pitágoras:

$$h^2 + r^2 = {a_p}^2$$

$$h^2 + \left(\frac{l\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$h^2 + \frac{l^2.3}{36} = \frac{l^2.3}{4}$$

$$h^2 = \frac{l^2.3}{4} - \frac{l^2}{12}$$

$$h^2 = \frac{l^2.9}{12} - \frac{l^2}{12}$$

$$h^2 = \frac{8.l^2}{12}$$

$$h^2 = \frac{2.l^2}{3}$$

$$\boxed{h = \frac{l\sqrt{6}}{3}}$$

Por último, mas não menos importante, agora podemos calcular o volume do tetraedro regular! Já que ele é uma pirâmide, utilizamos a mesma equação vista anteriormente:

$$V = \frac{1}{3}.A_B.h$$

$$V = \frac{1}{3}.\frac{l^2\sqrt{3}}{4}.\frac{l\sqrt{6}}{3}$$

$$V = \frac{l^3\sqrt{18}}{36}$$

$$V = \frac{l^3 3.\sqrt{2}}{36}$$

$$\boxed{V = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}}$$

Vamos fazer um exercício.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Um tetraedro regular possui uma área da base igual à $\sqrt{3}\ cm^2$. Encontre o seu volume.

Resolução:

O tetraedro regular possui quatro faces como sendo triângulos equiláteros (incluindo a sua base). Como já sabemos a sua área da base, podemos descobrir quanto vale a medida de seu lado (que é a aresta do tetraedro regular):

$$A_{face} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\sqrt{3} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{l^2}{4} = 1$$

$$l^2 = 4$$

$$l = 2\ cm$$

Uma vez que já descobrimos o valor da aresta do tetraedro, podemos calcular seu volume:

$$V = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}$$

$$V = \frac{2^3\sqrt{2}}{12}$$

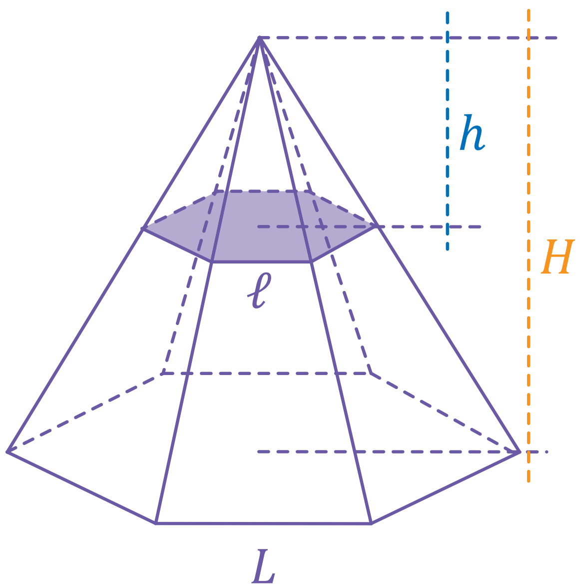
$$V = \frac{8.\sqrt{2}}{12}$$

$$V = \frac{2.\sqrt{2}}{3}\ cm^3$$

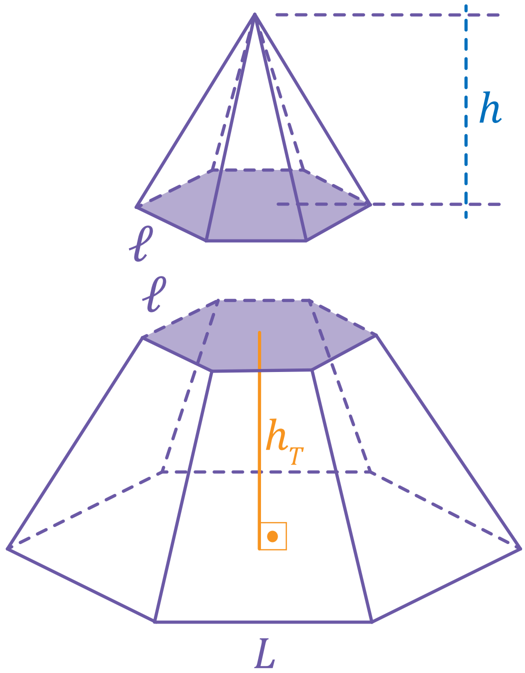
Assim, o volume deste tetraedro regular é de $\frac{2.\sqrt{2}}{3}\ cm^3$.

TRONCO DE PIRÂMIDE

Observe a figura abaixo, a qual mostramos uma pirâmide de base hexagonal.



O tronco de pirâmide é o sólido que resta ao realizarmos um “corte” na seção transversal da pirâmide “inteira”. Este corte separa o tronco (parte de baixo) e uma nova pirâmide (parte de cima). Na figura abaixo, representamos o tronco de pirâmide obtido quando realizamos este corte na pirâmide da imagem acima.



A nova pirâmide e a pirâmide maior anterior possuem algumas relações entre si:

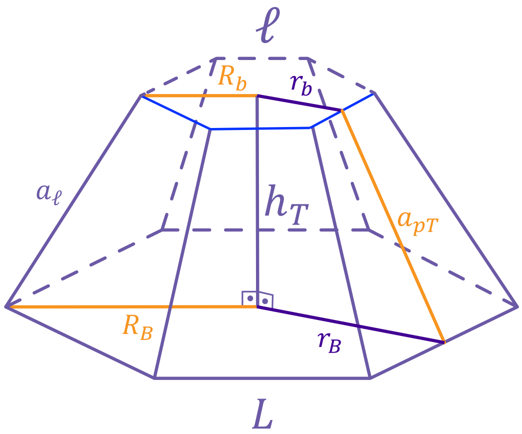
$$\frac{l}{L} = \frac{h}{H}$$

$$\frac{A_b}{A_B} = \left(\frac{l}{L}\right)^2 = \left(\frac{h}{H}\right)^2$$

$$\frac{V_p}{V_{total}} = \left(\frac{l}{L}\right)^3 = \left(\frac{h}{H}\right)^3$$

Onde A_b é a área da base da pirâmide menor e A_B é a área da base do tronco (que coincide com a área da base da pirâmide maior anterior ao corte). Além disso, V_p é o volume da pirâmide menor e V_{total} é o volume da pirâmide maior (antes do corte).

Vamos examinar com mais detalhes a forma do tronco de pirâmide. Representamos algumas grandezas importantes na figura abaixo.



Note que a as faces laterais do tronco são trapézios. Para calcular a área de uma face, vamos então utilizar a já conhecida relação para a área do trapézio:

$$A_{face} = \frac{(l + L).\, a_{pT}}{2}$$

Assim, a área lateral do tronco de pirâmide é a soma das áreas das faces:

$$A_{lateral} = n.\, A_{face}$$

Além disso, a área total do tronco é a soma da área lateral com as áreas das duas bases (de baixo e de cima):

$$A_{tronco} = A_{lateral} + A_b + A_B$$

Vamos finalizar o estudo do tronco de pirâmide falando sobre o volume deste sólido. O tronco possui um volume que pode ser calculado como o volume da pirâmide total (antes do "corte" do tronco) subtraído do volume da pirâmide menor obtida:

$$V_{tronco} = V_{total} - V_p$$

Após algumas deduções que não fazem parte do escopo desta apostila, chegamos no seguinte resultado para o volume do tronco de pirâmide:

$$V_{tronco} = \frac{h_T}{3}.\left(A_b + \sqrt{A_b.\, A_B} + A_B\right)$$

Vamos fazer um exercício.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Um tronco de pirâmide possui faces laterais na forma de trapézios cujas bases medem 4 cm e 2cm, com 3 cm de altura. Qual é a área total deste tronco?

Notamos primeiro que, para calcular a área do tronco de pirâmide, devemos utilizar a seguinte relação:

$$A_{tronco} = A_{lateral} + A_b + A_B$$

Começamos pelo cálculo da área lateral. Ela corresponde à área dos 6 trapézios, que são as faces laterais do tronco:

$$A_{lateral} = 6.A_{trapézio} = 6.\frac{(2+4).3}{2} = 54\ cm^2$$

Agora, vamos calcular a área da base maior do tronco. Ela é formada por um hexágono regular de lado medindo 4 cm:

$$A_B = \frac{6.4^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}\ cm^2$$

E agora, para calcular a área da base menor do tronco, ela também é formada por um hexágono regular, mas de lado medindo 2 cm:

$$A_b = \frac{6.2^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}\ cm^2$$

Por fim, a soma de tudo equivale à área do tronco de pirâmide:

$$A_{tronco} = 54 + 6\sqrt{3} + 24\sqrt{3}$$

$$A_{tronco} = 54 + 30\sqrt{3}\ cm^2$$

Assim, a área total do tronco de pirâmide equivale à $54 + 30\sqrt{3}\ cm^2$.

ANOTAÇÕES