Estratégia Militares

CURSO EXTENSIVO

ITA 2023

GEOMETRIA ESPACIAL II

AULA 16

Prof. Victor So

www.estrategiamilitares.com.br

Sumário

APRESENTAÇÃO

Olá,

Iniciaremos o último assunto de geometria, a espacial. Para aprender bem essa aula, o requisito básico é ter feito as aulas de geometria plana e ter bem consolidado os diversos conceitos abordados nelas. Nesta aula, estenderemos o conceito que aprendemos no plano ao espaço tridimensional. Veremos muitos exemplos e teoremas que nos ajudarão a resolver as questões da prova.

Se você for um aluno que já possui os conceitos de geometria espacial bem fundamentados, pule direto para a lista de exercícios e tente resolver todas questões. Caso você não consiga resolver alguma, consulte a resolução e sempre que precisar, você poderá nos encontrar no fórum de dúvidas.

Então, vamos à aula.

Bons estudos.

FALE COMIGO

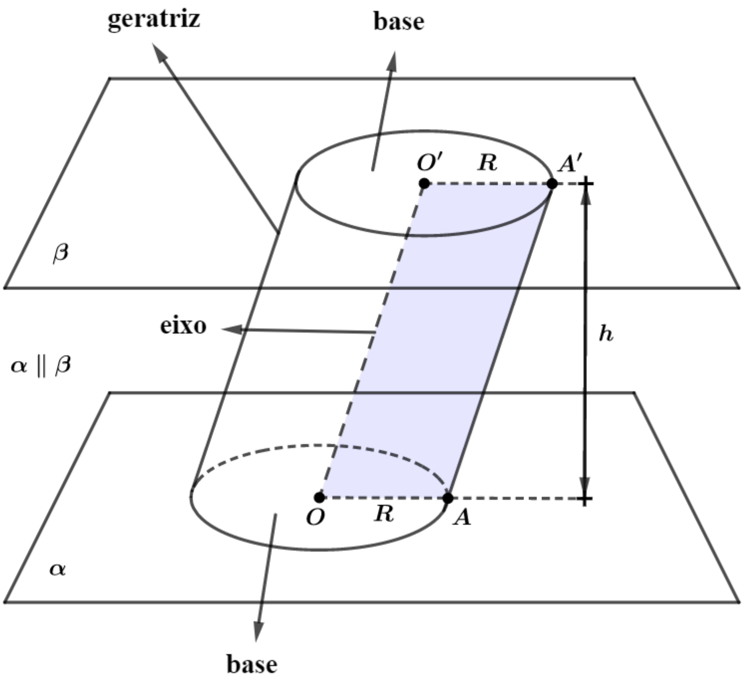
/profvictorso

1. SÓLIDOS REDONDOS

Vamos começar nosso estudo de sólidos redondos, são eles: os cilindros, os cones e as esferas. Iniciemos pelos cilindros.

1.1. CILINDROS

Os cilindros são figuras muito parecidas com os prismas, a diferença é que ao invés da base ser um polígono convexo, a base do cilindro é um círculo. Podemos pensar em um prisma arredondado. Vejamos os elementos presentes no cilindro.

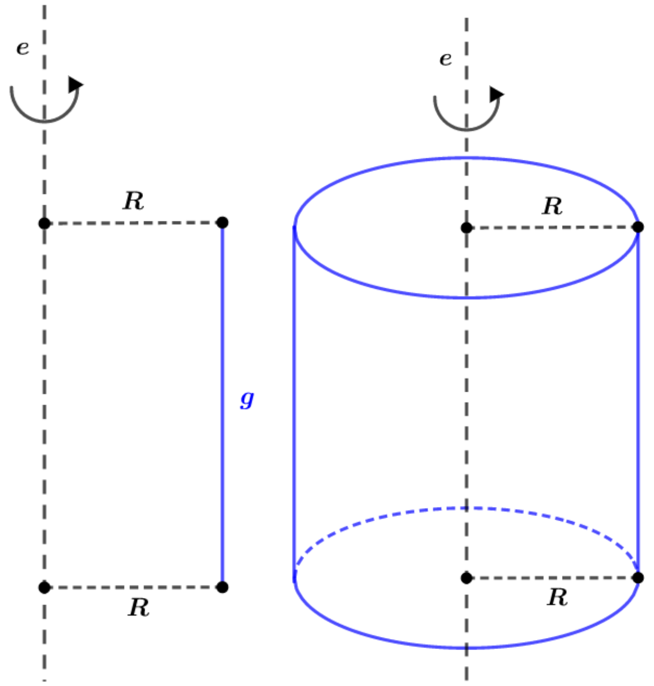


Note que o cilindro possui duas bases circulares congruentes de raio R e que $OAA'O$ é um paralelogramo. Geratriz é o termo usado para qualquer segmento de reta do cilindro distando R do eixo OO', e paralelo ao mesmo.

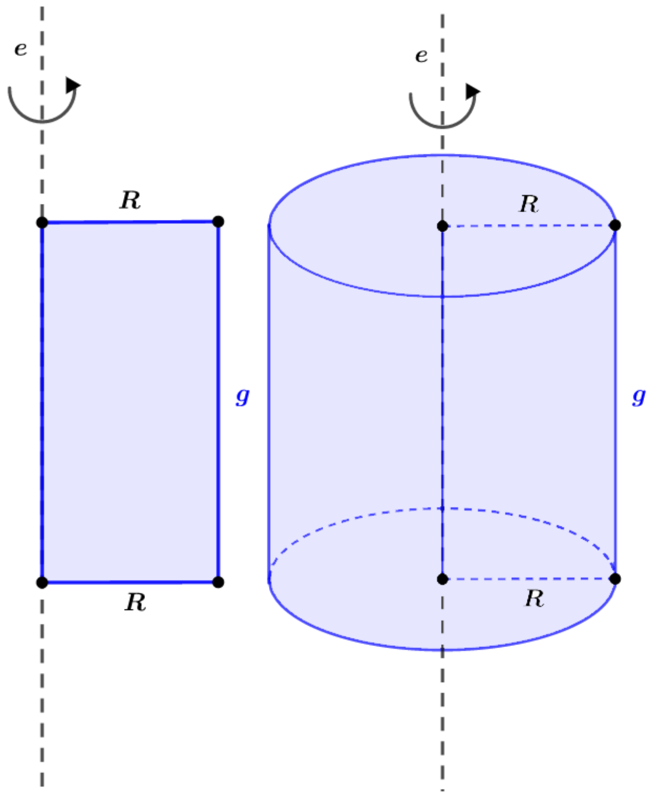
Quando as geratrizes do cilindro são oblíquas às bases, temos um cilindro circular oblíquo e quando elas são perpendiculares às bases, temos um cilindro circular reto. Neste caso, a altura do cilindro será igual à medida da geratriz, ou seja, $h = g$.

1.1.1. SUPERFÍCIE CILÍNDRICA E CILINDRO DE REVOLUÇÃO

Tomando-se um eixo e e rotacionando um segmento de reta g (reta geratriz) de uma distância R ao longo de e, obtemos uma **superfície cilíndrica de revolução**.

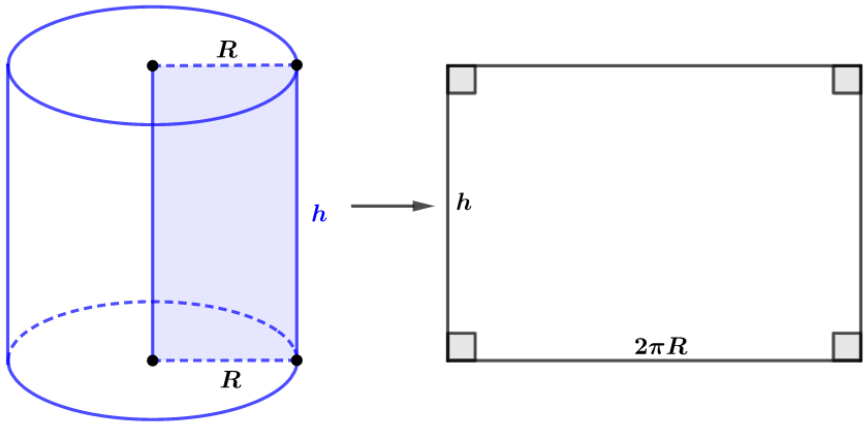


Se ao invés de um segmento de reta, rotacionarmos um retângulo que possui um lado contido no eixo e, obtemos um **cilindro de revolução**. Perceba que esse cilindro é circular reto, ou seja, a geratriz é perpendicular ao plano da base.



1.1.2. ÁREA LATERAL E ÁREA TOTAL

Se cortarmos uma superfície cilíndrica de revolução de altura h e a colocarmos em cima de uma mesa esticada, obtemos a figura de um retângulo de dimensões iguais à altura h e ao comprimento da base circular. Sabemos que o comprimento de uma circunferência de raio R é $2\pi R$. Assim, temos que a superfície lateral de um cilindro circular reto planificada é equivalente a um retângulo de dimensões h e $2\pi R$.



Logo, a área lateral de um cilindro é:

$$\boxed{A_L = 2\pi Rh}$$

Para encontrar a área total do cilindro circular reto, basta somar duas vezes a área da base. Como a base é um círculo de raio R, temos:

$$A_B = \pi R^2$$

$$A_T = A_L + 2A_B = 2\pi Rh + 2\pi R^2$$

$$\therefore \boxed{A_T = 2\pi R(h + R)}$$

1.1.3. VOLUME DO CILINDRO

Para encontrar o volume de um cilindro, podemos usar o princípio de Cavalieri. Assim, tomando-se um cilindro circular de raio R e um prisma tais que ambos possuem a mesma altura h e também bases de mesma área, temos:

$$A_{base\_prisma} = A_{base\_cilindro} = \pi R^2$$

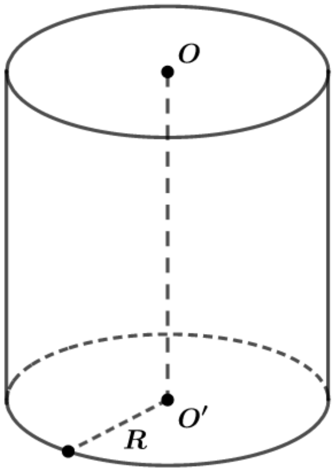
Pelo princípio de Cavalieri:

$$V_{cilindro} = V_{prisma} = A_{base_{prisma}} \cdot h$$

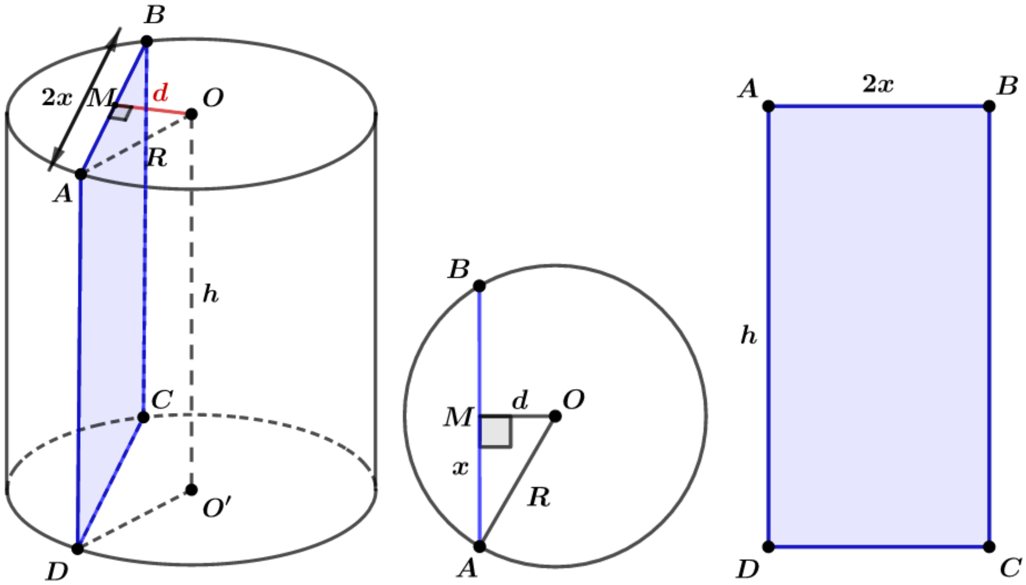
$$\therefore \boxed{V_{cilindro} = \pi R^2 h}$$

1.1.4. SECÇÃO PARALELA AO EIXO

Consideremos um cilindro circular reto de eixo OO' e altura h conforme representado pela figura abaixo:



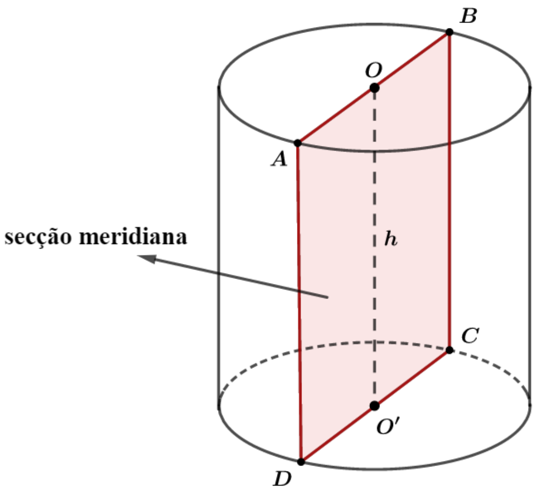
Ao seccionarmos esse cilindro por um plano paralelo ao seu eixo e a uma distância d deste, a secção plana formada é um retângulo de dimensões h e $2x$. Podemos calcular o valor de x da seguinte forma:



Observando a circunferência e aplicando o teorema de Pitágoras no ΔAOM:

$$R^2 = x^2 + d^2 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{R^2 - d^2}; 0 \leq d \leq R}$$

Se a distância d for nula, chamamos a secção plana obtida de secção meridiana.

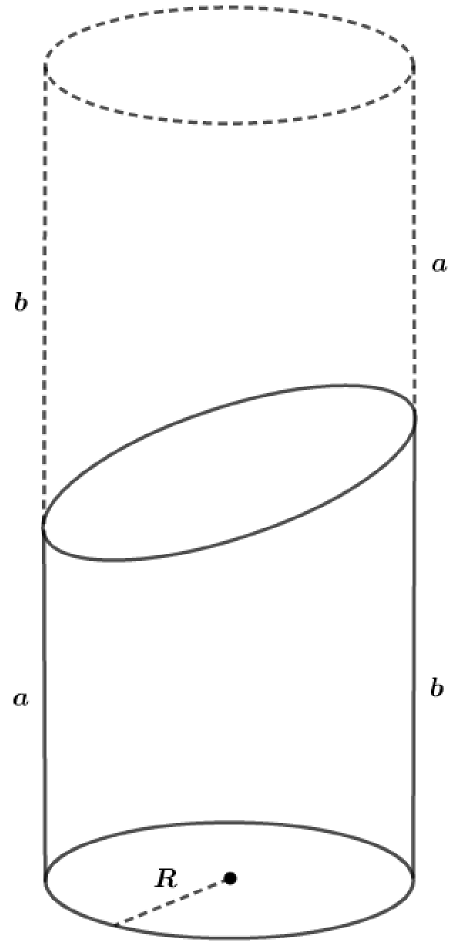


Note que a secção meridiana divide o cilindro em dois semicilindros. Quando a **secção meridiana é um quadrado**, temos um **cilindro equilátero**. Neste caso:

$$g = h = 2R$$

1.1.5. TRONCO DE CILINDRO

Consideremos o seguinte tronco de cilindro:



Nesse tronco, podemos ver que ao completarmos esse tronco com um outro com as mesmas dimensões, obtemos um cilindro reto. Assim, temos que seu volume V_T é dado por:

$$2V_T = V_{cilindro\ reto}$$

$$2V_T = \pi R^2(a+b)$$

$$\therefore \boxed{V_T = \frac{\pi R^2(a+b)}{2}}$$

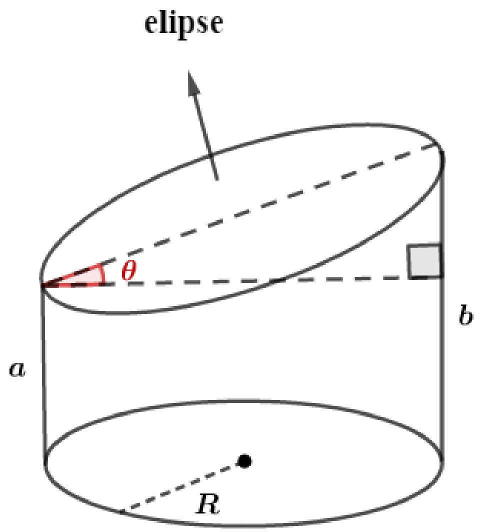
Da mesma forma, podemos calcular sua área lateral:

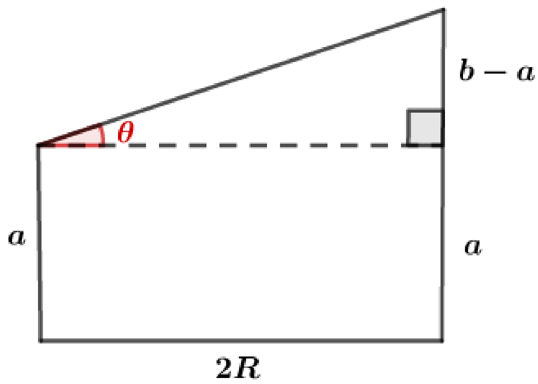
$$2A_l = A_{lateral\ cilindro\ reto}$$

$$2A_l = 2\pi R(a+b)$$

$$\therefore \boxed{A_l = \pi R(a+b)}$$

Agora, vejamos o caso de um tronco de cilindro que possui uma base reta e a outra base inclinada de um ângulo θ em relação à base reta.





A base superior é uma elipse. Fazendo a projeção ortogonal da área dessa elipse, obtemos a área da base circular. Assim, podemos escrever:

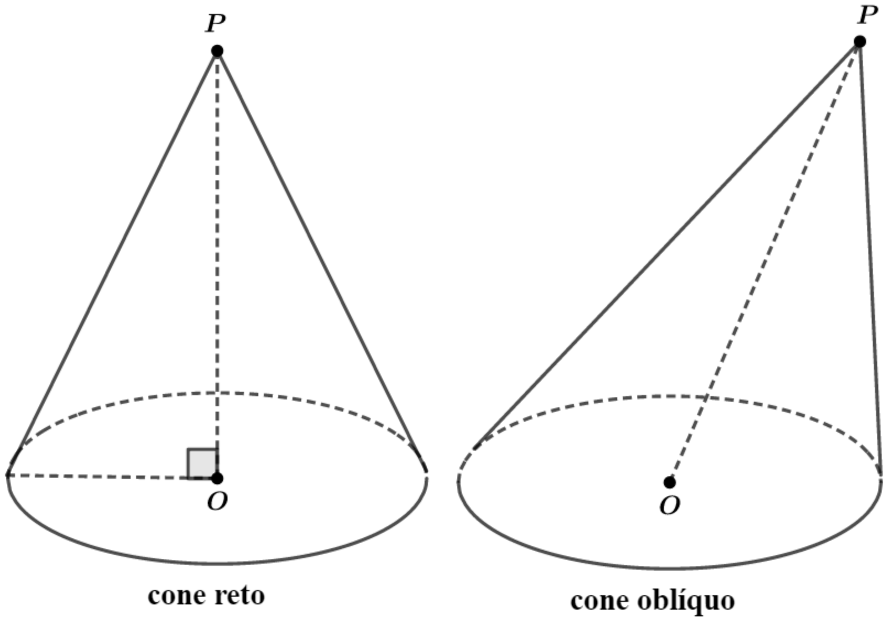
$$A_{elipse} \cdot \cos\theta = \pi R^2 \Rightarrow \boxed{A_{elipse} = \frac{\pi R^2}{\cos\theta}}$$

A figura plan é a secção do plano que corta o tronco ao meio. Ela é um trapézio e como podemos ver, o ângulo θ deve satisfazer:

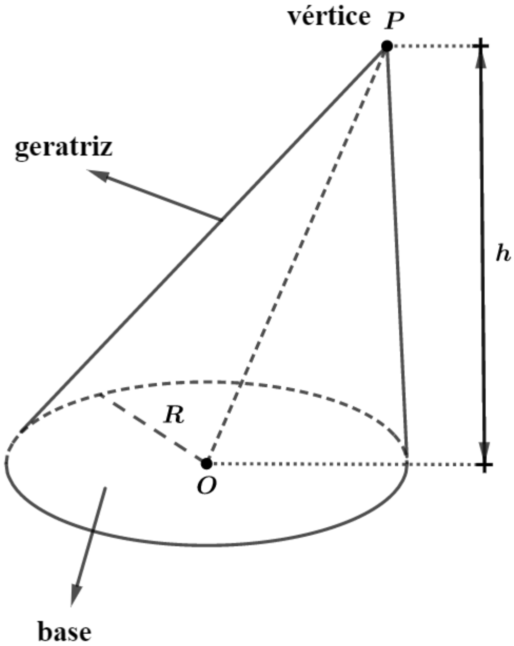
$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = \frac{b-a}{2R}}$$

1.2. CONES

Cones são sólidos que possuem uma base circular contida num plano e um vértice fora deste plano. Podemos pensar no cone como uma pirâmide arredondada. Assim, quando a projeção ortogonal do cone se encontra no centro da sua base circular, temos um cone reto. Por outro lado, quando essa projeção não está no centro da circunferência, temos um cone oblíquo.

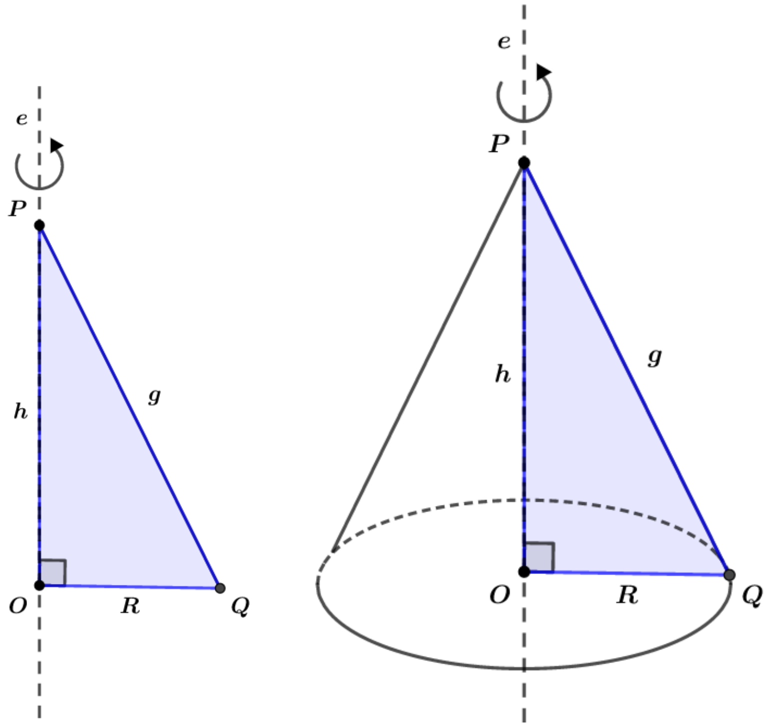


Vejamos os elementos presentes no cone:



Note que no caso do cone oblíquo, a geratriz pode ter medidas diferentes. Além disso, o termo geratriz também pode ser referido como apótema do cone.

Um **cone reto** pode ser chamado de **cone de revolução**. Pois, ao rotacionarmos um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um de seus catetos, obtemos um cone reto.

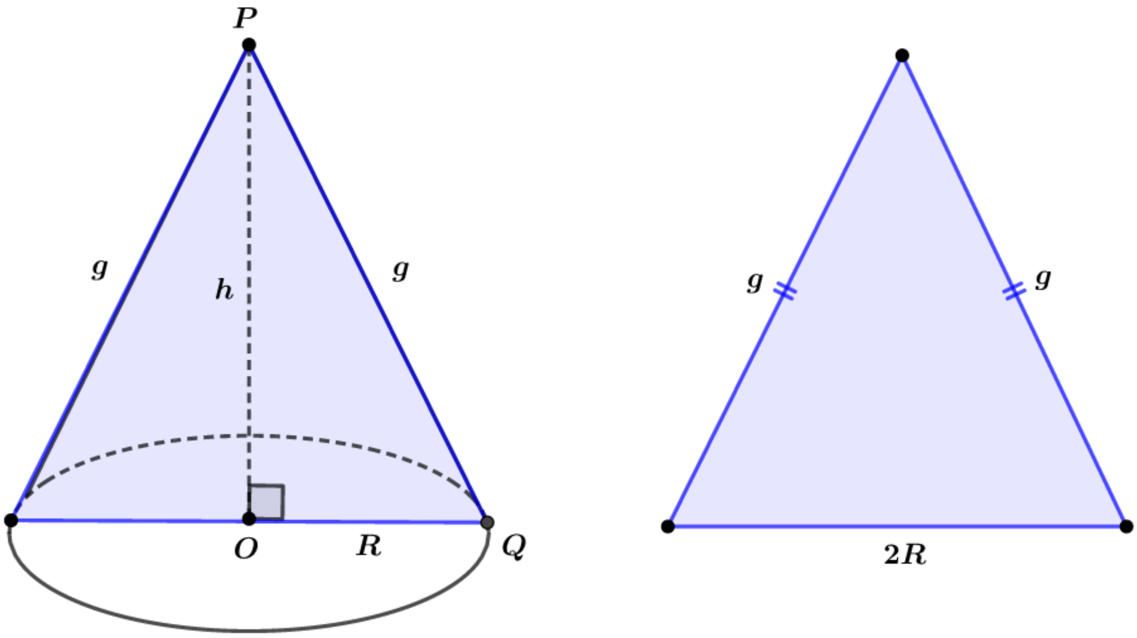


No caso do cone reto, temos a seguinte relação:

$$\boxed{g^2 = h^2 + R^2}$$

1.2.1. SECÇÃO MERIDIANA

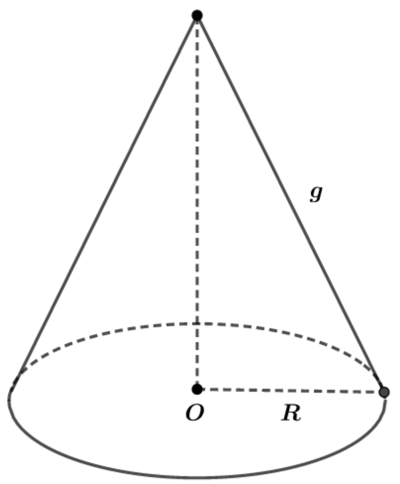
Quando seccionamos um cone reto por um plano que contém seu eixo PO, obtemos uma secção meridiana. Essa figura será um triângulo isósceles.

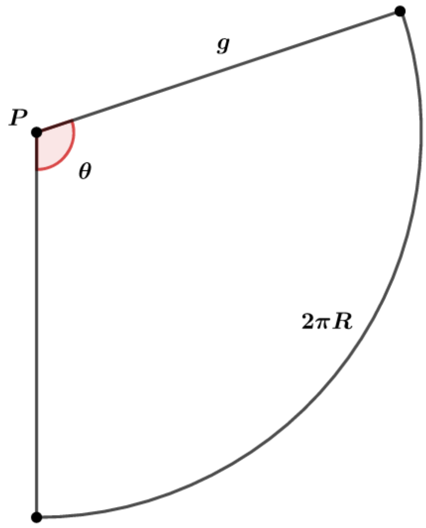


Se a secção meridiana for um triângulo equilátero, chamamos o cone de cone equilátero. Neste caso, temos $g = 2R$ e $h = R\sqrt{3}$.

1.2.2. ÁREA LATERAL E ÁREA TOTAL

Podemos afirmar que a superfície lateral de um cone de geratriz g e raio R é equivalente a um setor circular de raio g e comprimento de arco $2\pi R$.





Do setor circular, temos:

$$\theta = \frac{2\pi R}{g}$$

A área lateral do cone será igual à área do setor circular, logo:

$$A_L = \pi g^2 \frac{\theta}{2\pi} = \frac{g^2}{2} \cdot \frac{2\pi R}{g}$$

$$\therefore \boxed{A_L = \pi R g}$$

A área total do cone é igual à soma da área lateral com a área da base:

$$A_T = A_L + A_B$$

$$A_T = \pi R g + \pi R^2$$

$$\boxed{A_T = \pi R(g + R)}$$

1.2.3. VOLUME DO CONE

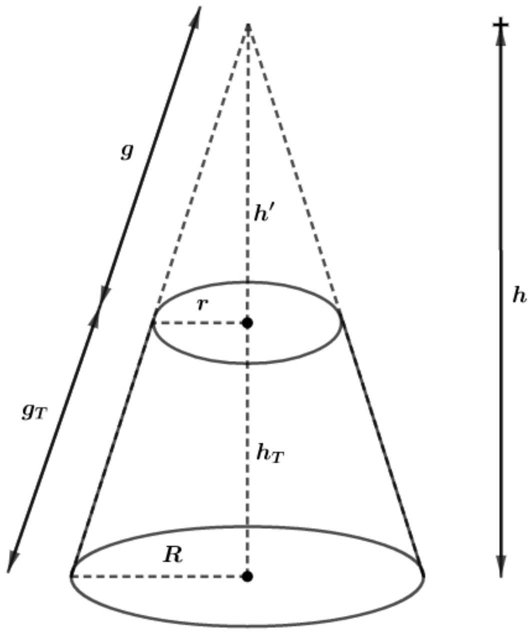
O volume do cone pode ser obtido pelo princípio de Cavalieri tomando-se um cone e uma pirâmide de mesma altura e área da base. Assim, temos para um cone de raio R e altura h:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} A_B \cdot h$$

$$\boxed{V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h}$$

1.2.4. TRONCO DE CONE DE BASES PARALELAS

Vamos deduzir a fórmula para calcular o volume de um tronco de cone de bases paralelas. Consideremos a seguinte figura:



Sejam V_1, V_2, V_T os volumes do cone menor, do cone maior e do tronco de cone. Assim, temos:

$$V_T = V_2 - V_1$$

$$\Rightarrow V_T = \frac{\pi R^2 h}{3} - \frac{\pi r^2 h'}{3} = \frac{\pi R^2 (h' + h_T)}{3} - \frac{\pi r^2 h'}{3}$$

$$\Rightarrow V_T = \frac{\pi h' (R^2 - r^2)}{3} + \frac{\pi R^2 h_T}{3}$$

Pela semelhança dos cones, podemos escrever:

$$\frac{h'}{h} = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{h'}{h' + h_T} = \frac{r}{R} \Rightarrow Rh' = h'r + h_T r \Rightarrow h' = \frac{h_T r}{R - r}$$

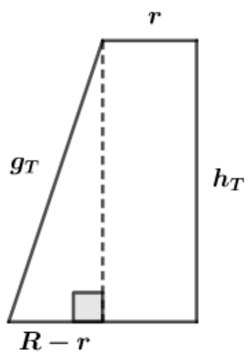
Substituindo h' na expressão do volume do tronco:

$$V_T = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h_T r}{R - r}\right)(R^2 - r^2) + \frac{\pi R^2 h_T}{3}$$

Portanto, o volume do tronco é:

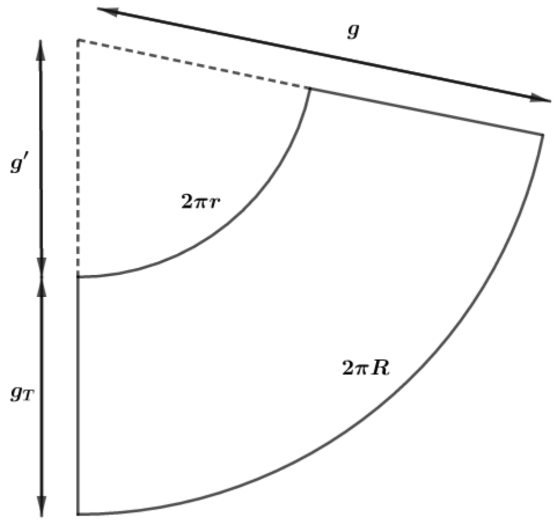
$$\boxed{V_T = \frac{\pi h_T}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)}$$

Pela figura da região planificada, vemos que podemos relacionar a geratriz, a altura e os raios das bases do tronco:



$$\boxed{g_T^2 = h_T^2 + (R - r)^2}$$

A área lateral do tronco pode ser calculada subtraindo-se a área lateral do cone menor da área lateral do cone maior. Sejam A_L, A_l, A_{LT} as áreas laterais do cone maior, do cone menor e do tronco. Assim, temos:



$$A_{LT} = A_L - A_l = \pi R g - \pi r g' = \pi R(g' + g_T) - \pi r g'$$
$$\Rightarrow A_{LT} = \pi[(R - r)g' + R g_T]$$

Pela razão de proporção, temos:

$$\frac{g'}{g} = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{g'}{g' + g_T} = \frac{r}{R} \Rightarrow g' = \frac{r g_T}{R - r}$$

Substituindo na expressão da área:

$$A_{LT} = \pi\left[(R - r)\left(\frac{r g_T}{R - r}\right) + R g_T\right]$$

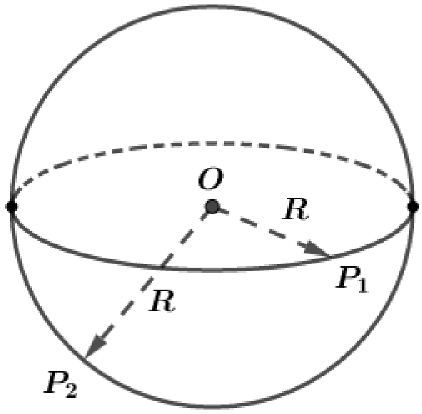
Portanto, a área lateral do tronco de cone é:

$$\boxed{A_{LT} = \pi g_T (R + r)}$$

1.3. ESFERAS

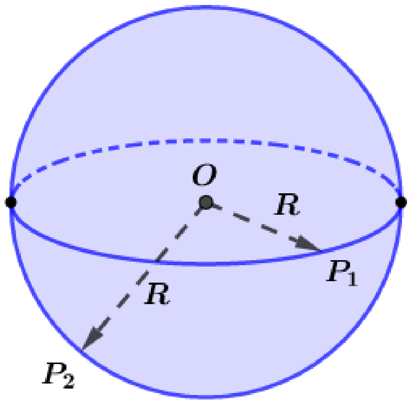
Vimos no capítulo de lugares geométricos que uma superfície esférica é o conjunto dos pontos no espaço que equidistam de um determinado ponto, denominado de centro.

$$S\{O,R\} = \left\{ P \in \underbrace{\epsilon}_{espaço} \middle| d_{P,O} = \underbrace{R}_{raio\ da\ esfera} \right\}$$

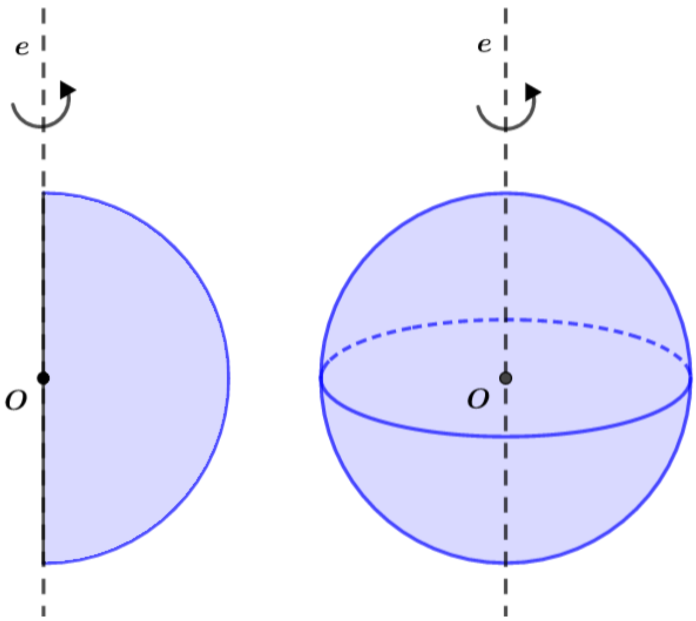


Uma esfera é o conjunto dos pontos no espaço que satisfazem a seguinte relação:

$$S_1\{O,R\} = \{P \in \epsilon | d_{P,O} \leq R\}$$

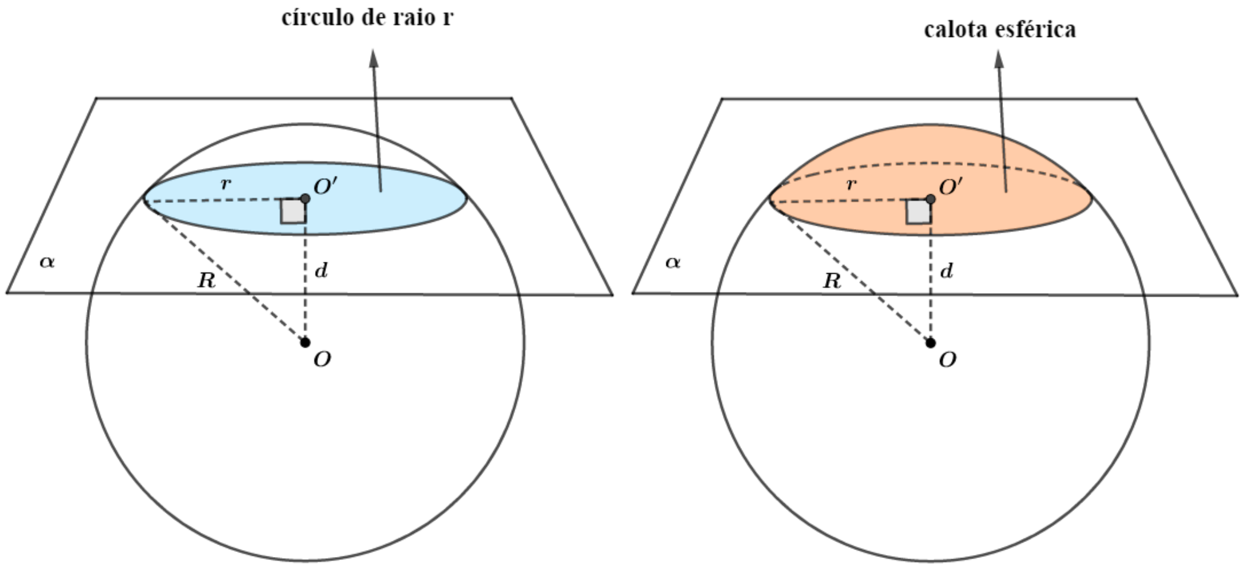


Também podemos dizer que a esfera é um sólido de revolução gerado pela rotação de uma semicircunferência em torno de um eixo que contém seu diâmetro.



1.3.1. SECÇÃO PLANA DA ESFERA

Toda secção plana de uma esfera é um círculo.



Pela figura, vemos que:

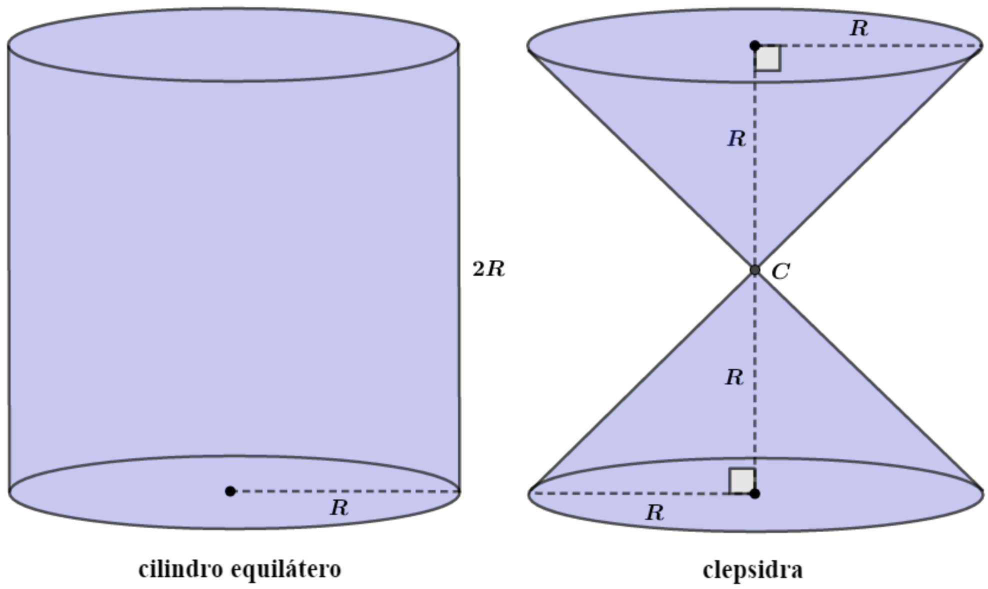
$$\boxed{R^2 = d^2 + r^2; 0 \leq d \leq R}$$

Se o plano secante à esfera passar pelo centro da esfera, a secção formada será o **círculo máximo** da esfera. Neste caso, temos $d = 0$ e, portanto, $r = R$.

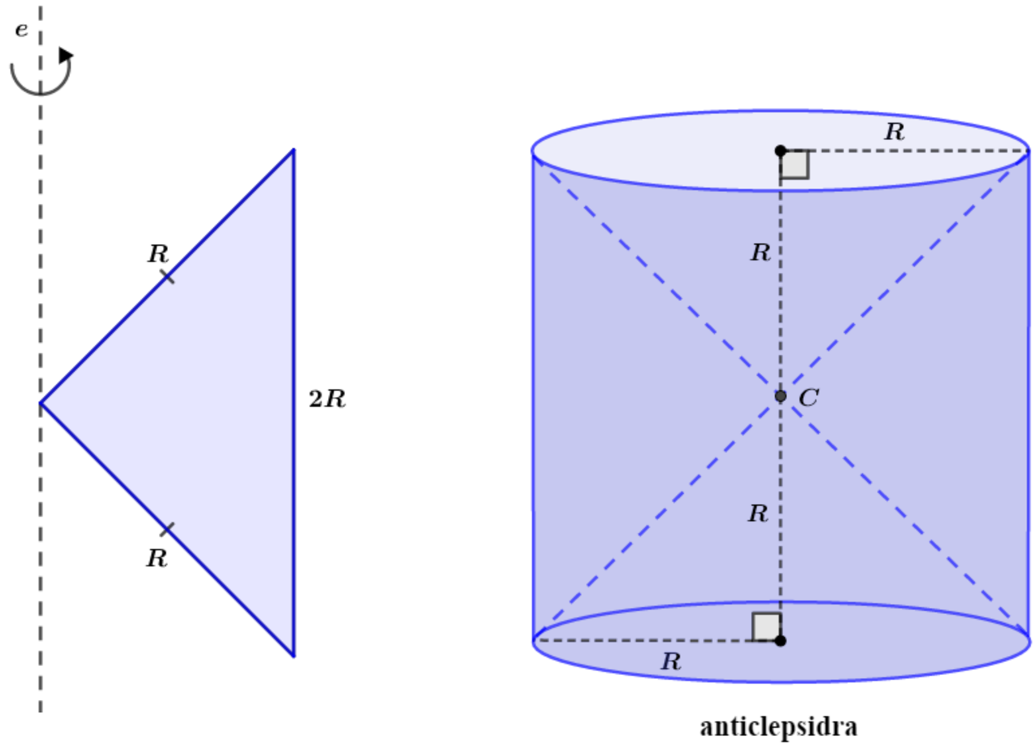
Note que **calota esférica** é o termo usado para a parte da esfera cortada por um plano.

1.3.2. VOLUME DA ESFERA

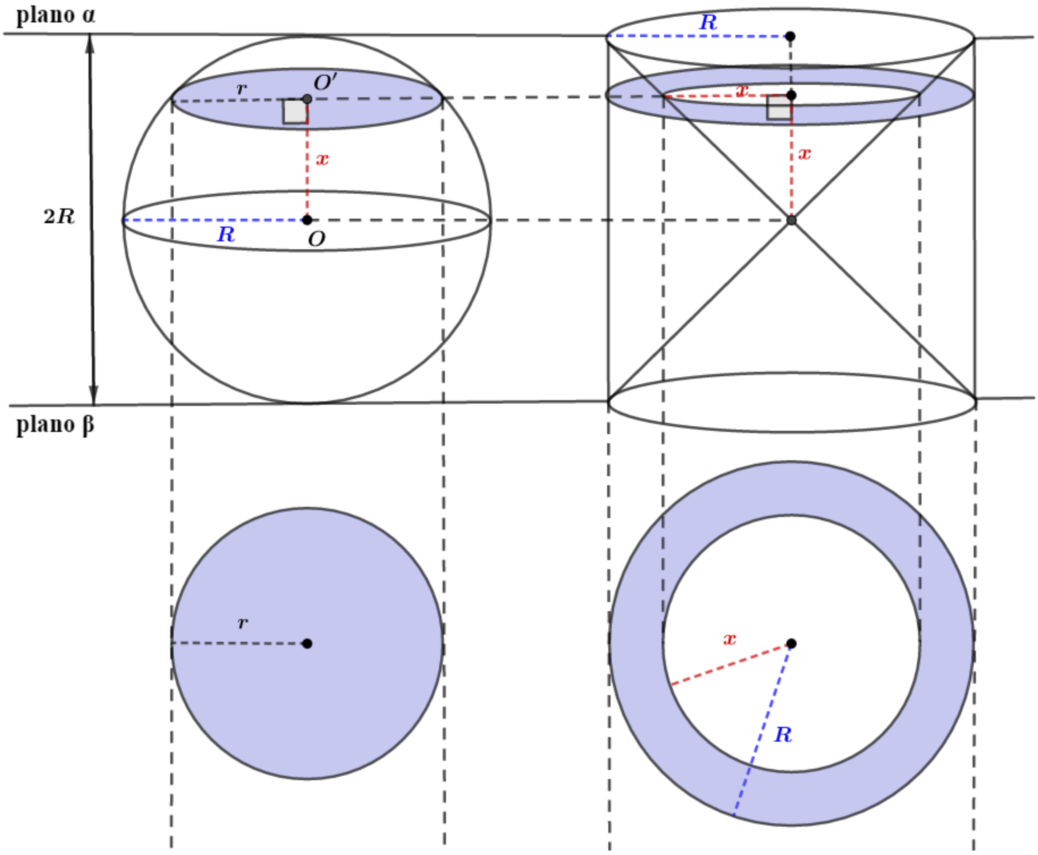
Para a dedução da fórmula do volume da esfera, usaremos um sólido de volume equivalente. Consideremos um cilindro equilátero de altura $2R$ e dois cones de raio R e com vértice comum C conforme representada na figura abaixo:



A união de dois cones com vértice comum é um sólido conhecido como **clepsidra**. Tomando o cilindro e removendo uma clepsidra do seu interior, obtemos um sólido conhecido como **anticlepsidra**. Este sólido também pode ser obtido pela rotação de um triângulo isósceles de lados $R, R, 2R$ em torno de um eixo contendo o vértice oposto ao lado de medida $2R$.



Para o cálculo do volume da esfera, usaremos uma esfera de raio R e uma anticlepsidra de raio R.



Os planos α e β são paralelos e ambos tangenciam a esfera. As bases da anticlepsidra estão contidas nesses planos. Vamos calcular a área da secção plana da esfera e da anticlepsidra.

Da esfera, temos um círculo de raio r:

$$A_{secção\_esfera} = \pi r^2$$

Mas podemos escrever r em função de x e R, pelo teorema de Pitágoras:

$$R^2 = x^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - x^2$$

$$\Rightarrow A_{secção\_esfera} = \pi(R^2 - x^2)$$

Da anticlepsidra, temos:

$$A_{secção\_anticlepsidra} = \pi R^2 - \pi x^2 = \pi(R^2 - x^2)$$

Assim, temos $A_{secção\_esfera} = A_{secção\_anticlepsidra}$. Pelo princípio de Cavalieri, como as áreas das secções são iguais e os sólidos têm mesmo volume, podemos escrever:

$$V_{esfera} = V_{anticlepsidra}$$

O volume da anticlepsidra é igual ao volume do cilindro equilátero menos o volume da clepsidra, ou seja,

$$V_{anticlepsidra} = V_{cilindro} - \underbrace{V_{clepsidra}}_{=dois\ cones} = \underbrace{\pi R^2}_{base\ cilindro}\left(\underbrace{2R}_{altura\ cilindro}\right) - 2\left(\frac{1}{3}\underbrace{\pi R^2}_{base\ cone}\underbrace{R}_{altura\ cone}\right)$$

$$\Rightarrow V_{anticlepsidra} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Portanto, o volume de uma esfera de raio R é dado por:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

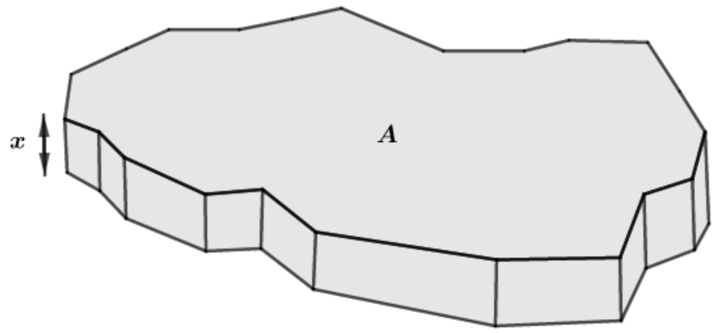
1.3.3. ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

A dedução da área da superfície esférica envolve cálculo diferencial e ela pode ser obtida derivando-se o volume da esfera de raio R em relação à R:

$$A = \frac{dV}{dR} = \frac{d\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)}{dR}$$

$$\boxed{A = 4\pi R^2}$$

Uma outra forma de deduzir é pela noção intuitiva de volume. Tomando-se uma placa sólida de espessura x e área da base A, temos que seu volume é



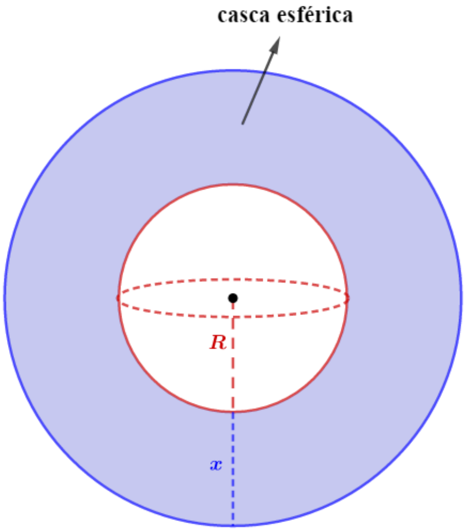
$$V = Ax$$

Assim:

$$A = \frac{V}{x}$$

Ao fazermos a placa a sólida assumir uma espessura infinitamente pequena, ou seja, fazendo x tender a zero, a expressão V/x resultará na área da superfície do sólido. Com base nisso, deduziremos a fórmula da superfície esférica.

Para deduzirmos a área da esfera, consideremos a seguinte casca esférica de espessura x:



Seja ΔV o volume da casca esférica acima. Assim, seu volume é igual ao volume de uma esfera de raio $R + x$ menos o volume de uma esfera de raio R. Desse modo:

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi(R+x)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi[(R^3 + 3R^2x + 3Rx^2 + x^3) - R^3]$$

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi(3R^2x + 3Rx^2 + x^3)$$

Dividindo a equação por x:

$$\frac{\Delta V}{x} = \frac{4}{3}\pi(3R^2 + 3Rx + x^2)$$

Ao aplicarmos o limite de $x \to 0$ na equação acima, a casca esférica torna-se a superfície da esfera. Assim, para $x \to 0$, temos a área da superfície esférica:

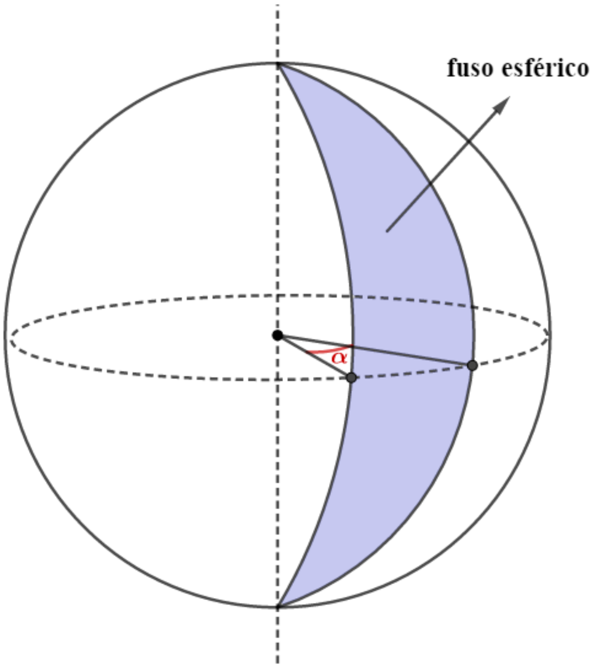
$$A_{esfera} = \lim_{x\to 0}\frac{\Delta V}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{4}{3}\pi\left(3R^2 + \underbrace{3Rx}_{0} + \underbrace{x^2}_{0}\right)\right] = 4\pi R^2$$

Portanto, a área de uma superfície esférica de raio R é dada por:

$$\boxed{A = 4\pi R^2}$$

1.3.4. FUSO ESFÉRICO E CUNHA ESFÉRICA

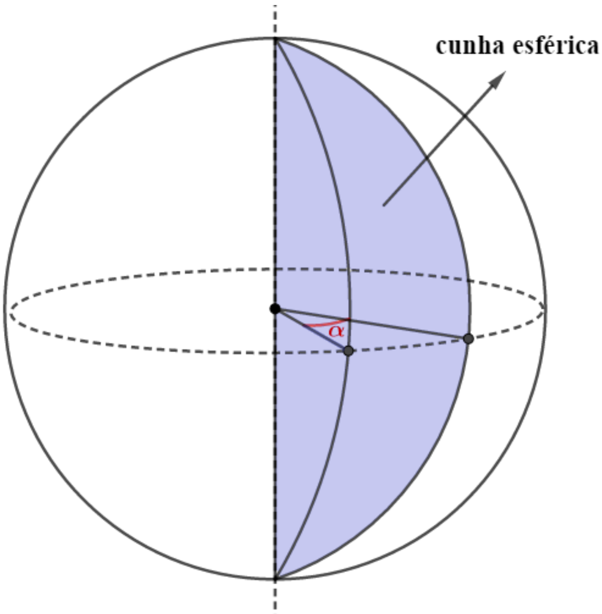
Fuso esférico é a parte da superfície esférica formada pela rotação em α graus de uma **semicircunferência** em torno do diâmetro da superfície esférica. Podemos dizer que ele é uma fatia de uma superfície esférica.



Para calcular a área do fuso, podemos fazer uma simples regra de três. Considerando α em radianos:

$$2\pi - 4\pi R^2$$
$$\alpha - A_{fuso}$$
$$\Rightarrow A_{fuso} = 4\pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{2\pi}$$
$$\therefore \boxed{A_{fuso} = 2R^2\alpha}$$

Cunha esférica é a parte da esfera formada pela rotação em α graus de um **semicírculo** em torno do diâmetro da esfera. Podemos dizer que ela é uma fatia de uma esfera.



Para calcular o volume da cunha, podemos fazer uma simples regra de três. Considerando α em radianos:

$$2\pi - \frac{4}{3}\pi R^3$$

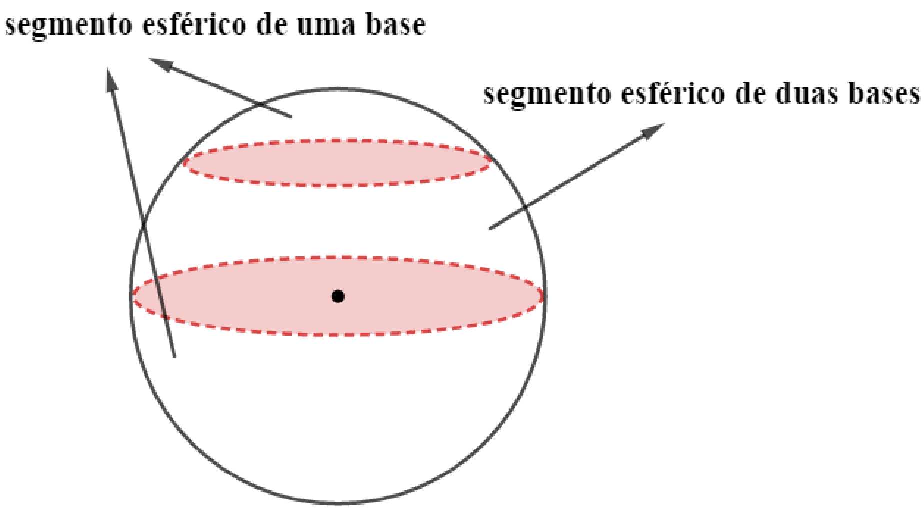
$$\alpha - V_{cunha}$$

$$\Rightarrow V_{cunha} = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{\alpha}{2\pi}$$

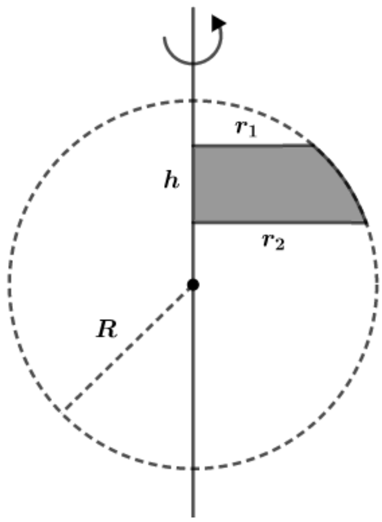
$$\therefore \boxed{V_{cunha} = \frac{2}{3}R^3\alpha}$$

1.3.5. SEGMENTOS ESFÉRICOS

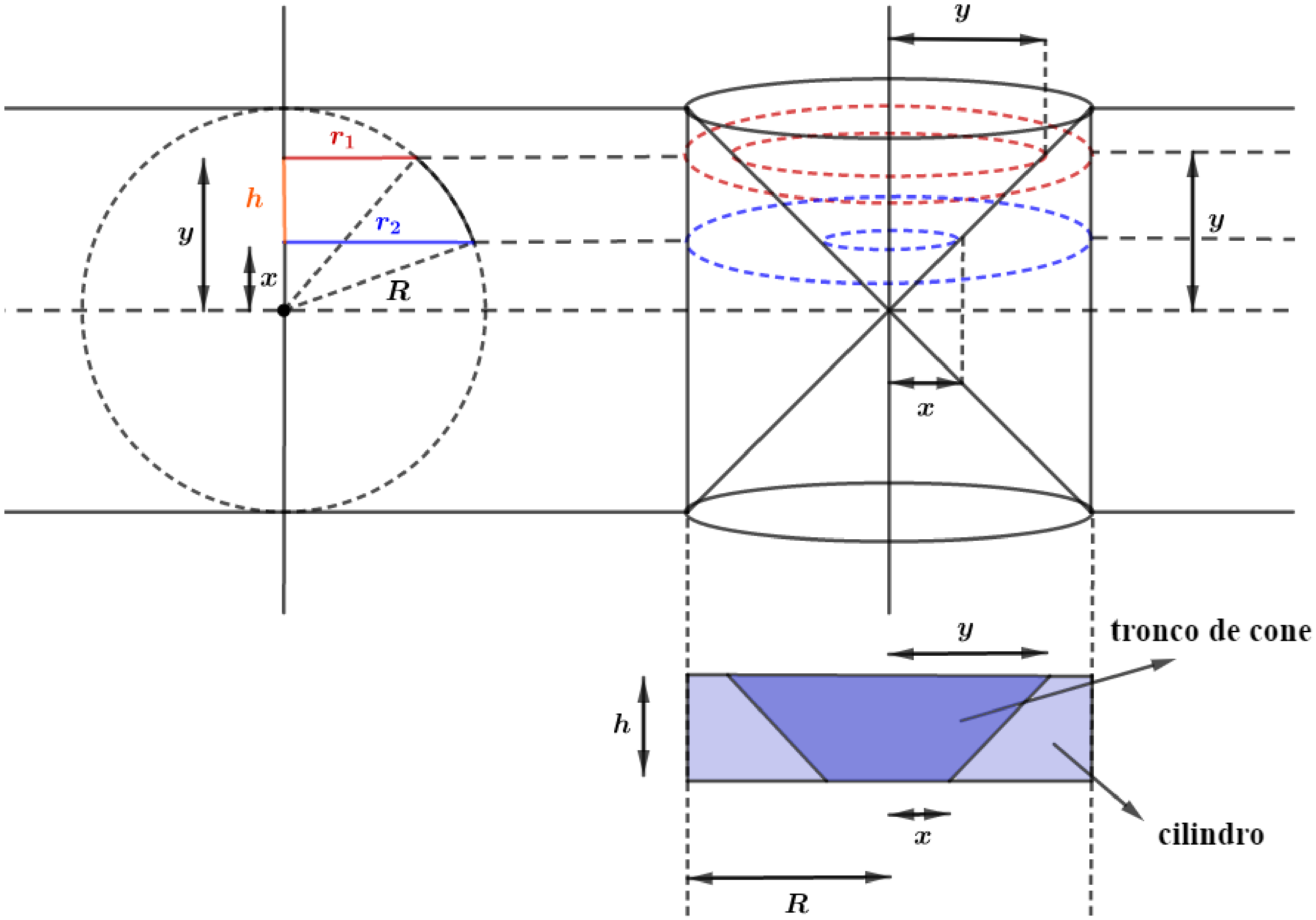
Seccionando-se uma esfera com dois planos paralelos entre si, dividimos a esfera em três partes. A região compreendida entre os planos é chamada de **segmento esférico de duas bases**. As outras duas são chamadas de **segmentos esféricos de uma base**, essas também podem ser denominadas de **calotas esféricas**.



Vamos calcular o volume de um segmento esférico de duas bases. Podemos construir esse sólido rotacionando-se a seguinte figura em torno de um eixo:



Assim, vamos usar o princípio de Cavalieri e uma anticlepsidra para encontrar o volume desse sólido.



Note que o volume do segmento esférico é igual ao volume da anticlepsidra. Este é igual à diferença entre os volumes do cilindro e do tronco de cone. Logo, temos:

$$V_{segmento\ esférico} = V_{cilindro} - V_{tronco} = \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3}(x^2 + y^2 - xy)$$

$$\Rightarrow V_{segmento\ esférico} = \frac{\pi h}{6}(6R^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2xy)$$

$$\Rightarrow V_{segmento\ esférico} = \frac{\pi h}{6}(6R^2 - 3(x^2 + y^2) + x^2 + y^2 - 2xy)$$

$$\Rightarrow V_{segmento\ esférico} = \frac{\pi h}{6}(6R^2 - 3(x^2 + y^2) + (y - x)^2)$$

Na figura da esfera, podemos aplicar o teorema de Pitágoras:

$$R^2 = y^2 + r_1^2$$

$$R^2 = x^2 + r_2^2$$

Somando-se essas duas relações:

$$2R^2 = x^2 + y^2 + r_1^2 + r_2^2 \Rightarrow 3(x^2 + y)^2 = 6R^2 - 3(r_1^2 + r_2^2)$$

Além disso, temos $y - x = h$, logo:

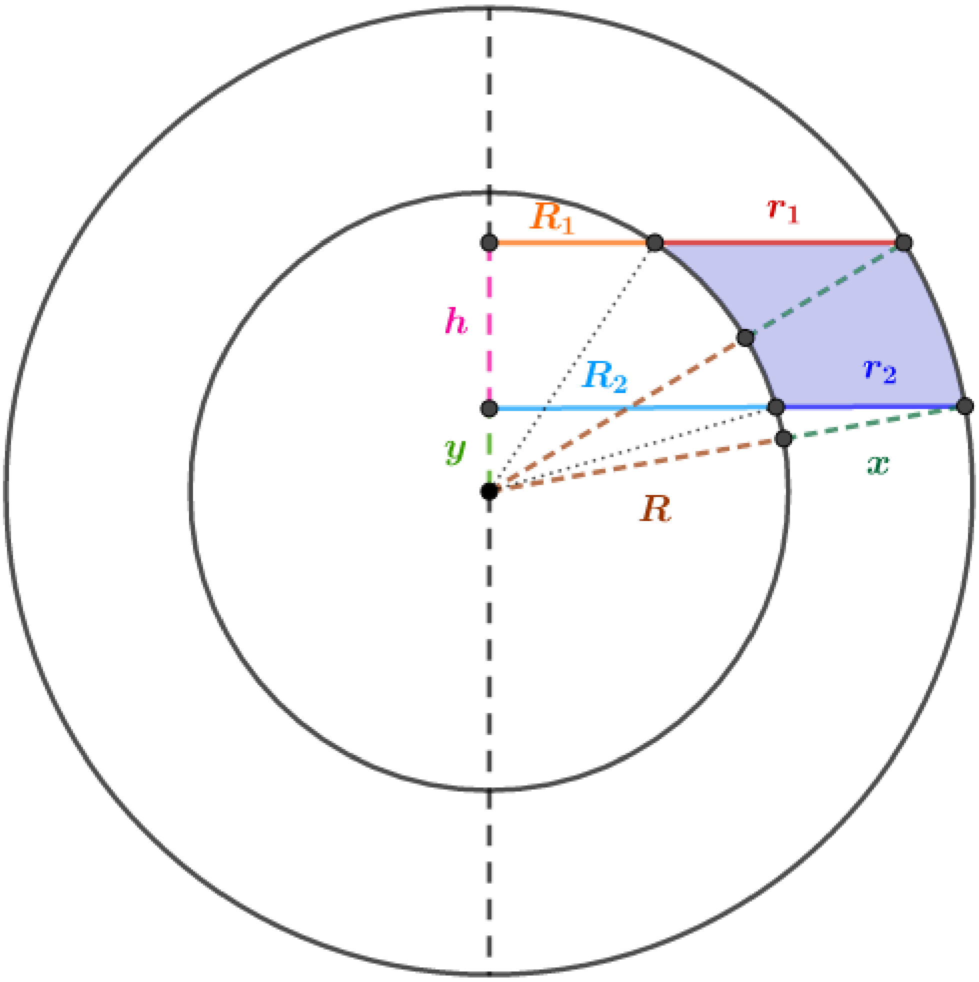
$$\Rightarrow V_{segmento\ esférico} = \frac{\pi h}{6}\left(6R^2 - \left(6R^2 - 3(r_1^2 + r_2^2)\right) + h^2\right)$$

$$\therefore \boxed{V_{segmento\ esférico} = \frac{\pi h}{6}[3(r_1^2 + r_2^2) + h^2]}$$

Para o volume do segmento esférico de uma base, basta considerar $r_1 = 0$ e $r_2 = r$. Logo:

$$\boxed{V = \frac{\pi h}{6}\left(3r^2 + h^2\right)}$$

Podemos calcular a área da superfície do segmento esférico usando a expressão do seu volume. Para isso, usaremos uma casca esférica de espessura x e tomaremos um segmento esférico dessa casca. Consideremos a seguinte figura que é a secção plana que passa pelo centro desse segmento esférico:



Assim, temos que a diferença de volumes entre os segmentos de esferas concêntricas é:

$$\Delta V = \frac{\pi h}{6}[3(R_1 + r_1)^2 + 3(R_2 + r_2)^2 + h^2] - \frac{\pi h}{6}[3R_1^2 + 3R_2^2 + h^2]$$

$$\Delta V = \frac{\pi h}{6}[3R_1^2 + 6R_1 r_1 + 3r_1^2 + 3R_2^2 + 6R_2 r_2 + 3r_2^2 + h^2] - \frac{\pi h}{6}[3R_1^2 + 3R_2^2 + h^2]$$

$$\Delta V = \frac{\pi h}{6}(6R_1 r_1 + 3r_1^2 + 6R_2 r_2 + 3r_2^2)$$

$$\boxed{\Delta V = \frac{\pi h}{2}(2R_1 r_1 + 2R_2 r_2 + r_1^2 + r_2^2)}\ (I)$$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(R + x)^2 = y^2 + (R_2 + r_2)^2\ \ (II)$$

$$(R + x)^2 = (h + y)^2 + (R_1 + r_1)^2\ \ (III)$$

$$R^2 = y^2 + R_2^2 \Rightarrow y^2 = R^2 - R_2^2\ \ (IV)$$

$$R^2 = (h + y)^2 + R_1^2 \Rightarrow (h + y)^2 = R^2 - R_1^2\ \ (V)$$

Somando (II) e (III), temos:

$$2(R+x)^2 = y^2 + (h+y)^2 + (R_1+r_1)^2 + (R_2+r_2)^2$$

Substituindo (IV) e (V) na equação acima:

$$2(R+x)^2 = R^2 - R_2^2 + R^2 - R_1^2 + (R_1+r_1)^2 + (R_2+r_2)^2$$

$$2(R+x)^2 = 2R^2 + 2R_1r_1 + 2R_2r_2 + r_1^2 + r_2^2$$

$$\Rightarrow 2R_1r_1 + 2R_2r_2 + r_1^2 + r_2^2 = 2(R+x)^2 - 2R^2 \quad (VI)$$

Substituindo (VI) em (I):

$$\Delta V = \frac{\pi h}{2}[2(R+x)^2 - 2R^2]$$

$$\Delta V = \frac{\pi h}{2}(4Rx + 2x^2)$$

Dividindo a equação por x:

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{x} = \frac{\pi h}{2}(4R+2x)$$

Aplicando o limite de $x \to 0$:

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{\Delta V}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\pi h}{2}\left(4R + \underbrace{2x}_{0}\right)$$

Portanto, a área da superfície do segmento esférico é:

$$\therefore \boxed{A = 2\pi Rh}$$

1. (Inédito)

O volume de uma esfera de raio $r = 5$ é interceptada por um plano que contém seu diâmetro.

A intersecção entre a esfera e o plano forma

a) uma esfera de raio $r = 5$

b) uma circunferência de raio $r = 5$ pertencente ao plano

c) uma esfera de raio $r > 5$ perpendicular a plano

d) uma circunferência de raio $r < 5$ oblíqua ao plano

e) uma reta pertencente ao plano

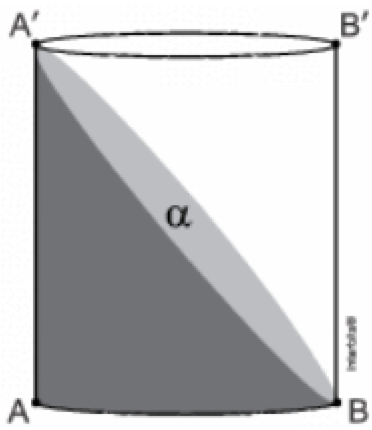
Comentários

A intersecção entre um plano que contém o centro de uma esfera e a própria esfera gera uma circunferência pertencente ao plano e de mesmo raio da esfera, neste caso, $r = 5$.

Gabarito: "b".

2. (UERJ/2017)

Um cilindro circular reto possui diâmetro AB de $4\ cm$ e altura AA' de $10\ cm$. O plano α, perpendicular à seção meridiana $ABB'A'$, que passa pelos pontos B e A' das bases, divide o cilindro em duas partes, conforme ilustra a imagem.



O volume da parte do cilindro compreendida entre o plano a e a base inferior, em cm^3, é igual a:

a) 8π

b) 12π

c) 16π

d) 20π

Comentários

Apesar de o plano estar inclinado, divide o cilindro em duas partes de igual volume.

Dessa forma, o volume solicitado é igual à metade do volume do cilindro completo.

$$V_{metade} = \frac{1}{2} \cdot Área\ da\ base \cdot altura$$

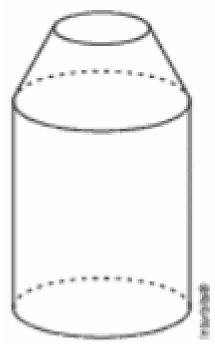
$$V_{metade} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 10$$

$$V_{metade} = 20\pi$$

Gabarito: “d”.

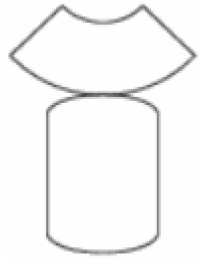
3. (ENEM-Libras/2017)

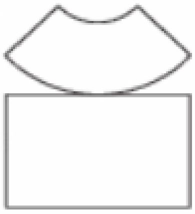
Para divulgar sua marca, uma empresa produziu um porta-canetas de brinde, na forma do sólido composto por um cilindro e um tronco de cone, como na figura.

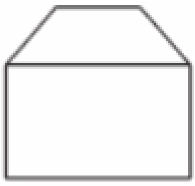


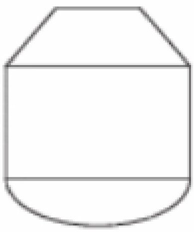
Para recobrir toda a superfície lateral do brinde, essa empresa encomendará um adesivo na forma planificada dessa superfície.

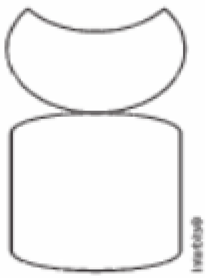
Que formato terá esse adesivo?

a) 

b) 

c) 

d) 

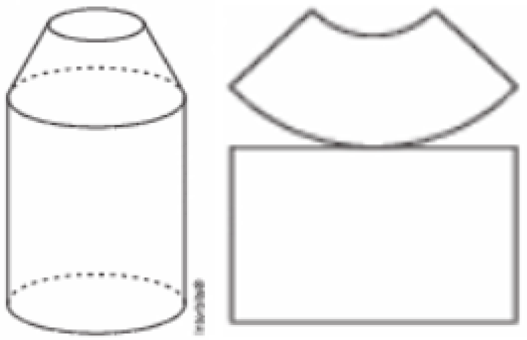
e) 

Comentários

Ao planificar um tronco de cone, presente na parte superior, temos, como planificação a superfície de um setor circular.

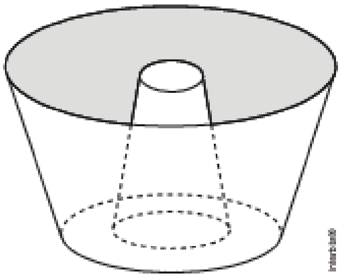
Ao planificar um cilindro, temos um retângulo.

Dessa forma, a única alternativa que apresenta essas opções é a alternativa b)



Gabarito: "b".

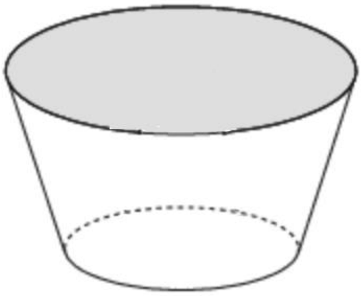
4. (ENEM/2013)
Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato representado na figura:



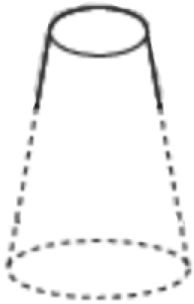
Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais.
Essas figuras são
a) um tronco de cone e um cilindro.
b) um cone e um cilindro.
c) um tronco de pirâmide e um cilindro.
d) dois troncos de cone.
e) dois cilindros.

Comentários

Se retirarmos a parte interna da forma, a que faz o "buraco no bolo", vemos um tronco de cone invertido, ou seja, com o vértice para baixo.



Já a parte interna, sozinha, representa outro tronco de cone, veja.



Dessa forma, a forma é composta de dois troncos de cone.

Gabarito: "d".

5. (UFPA/2011)
Uma rasa é um paneiro utilizado na venda de frutos de açaí. Um típico exemplar tem forma de um tronco de cone, com diâmetro de base $28\ cm$, diâmetro de boca $34\ cm$ e altura

27 cm. Podemos afirmar, utilizando $\pi = 3{,}14$, que a capacidade da rasa, em litros, é aproximadamente

a) 18 b) 20 c) 22 d) 24 e) 26

Comentários

Já sabemos que a rasa é um tronco de cone. O enunciado nos informou os diâmetros das bases, inferior e superior. Com eles, conseguimos os raios respectivos.

$$r = \frac{28}{2} = 14 \qquad R = \frac{34}{2} = 17$$

Sabendo que a altura do tronco é de 27 cm, podemos calcular o volume diretamente.

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2)$$

$$V \cong \frac{3{,}14}{3} \cdot 27 \cdot (17^2 + 17 \cdot 14 + 14^2)$$

$$V \cong \frac{3{,}14}{\cancel{3}} \cdot {}^{9}\cancel{27} \cdot (289 + 238 + 196)$$

$$V \cong 3{,}14 \cdot 9 \cdot 723$$

$$V \cong 3{,}14 \cdot 6507$$

$$V \cong 20431{,}98\ cm^3$$

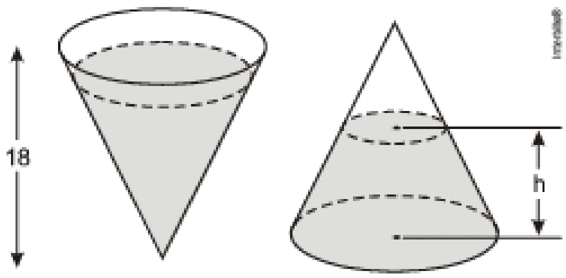
Como $1l$ equivale a $1000\ cm^3$, temos que

$$V \cong 20{,}43198\ l$$

Gabarito: "b".

6. (UFRGS/2008)

A areia contida em um cone fechado, de altura 18 cm, ocupa $\frac{7}{8}$ da capacidade do cone.



Voltando-se o vértice do cone para cima, conforme indica a figura, a altura h do tronco de cone ocupado pela areia, em centímetros, é

a) 7. b) 8. c) 9. d) 10. e) 11.

Comentários

Chamemos v o volume de areia contido no cone e de V o volume total do cone.

Pelo enunciado, temos que

$$v = \frac{7}{8}V.$$

Sendo assim, podemos calcular o volume do cone menor, na parte superior da segunda figura, como sendo

$$V - v = V - \frac{7}{8}V = \frac{1}{8}V$$

Com essa informação, temos condição de encontrar a constante de proporcionalidade entre o cone menor, não ocupado pela areia, e o cone completo. Como estamos lidando com volumes, a razão k ao cubo é igual à razão entre os volumes dos dois cones.

$$k^3 = \frac{V\ cone\ pequeno}{V\ cone\ grande}$$
$$k^3 = \frac{\frac{1}{8}V}{V}$$
$$k^3 = \frac{1}{8}$$
$$\sqrt[3]{k^3} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$$
$$k = \frac{1}{2}$$

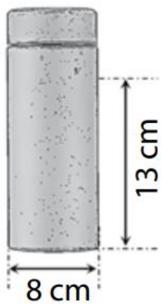
Por semelhança de triângulos na segunda figura, podemos dizer que a razão entre as alturas (cone pequeno para cone grande) é igual a k.

$$\frac{H-h}{H} = k$$
$$\frac{18-h}{18} = \frac{1}{2}$$
$$18 - h = \frac{18}{2}$$
$$18 - h = 9$$
$$18 - 9 = h$$
$$9\ cm = h$$

Gabarito: "c".

7. (Fatec/2019-1)

Uma garrafa térmica tem formato de um cilindro circular reto, fundo plano e diâmetro da base medindo $8{,}0\ cm$. Ela está em pé sobre uma mesa e parte do suco em seu interior já foi consumido, sendo que o nível do suco está a $13\ cm$ da base da garrafa, como mostra a figura. O suco é despejado num copo vazio, também de formato cilíndrico e base plana, cujo diâmetro da base é $4\ cm$ e com altura de $7\ cm$. O copo fica totalmente cheio de suco, sem desperdício.



Adote $\pi = 3$.
Despreze a espessura do material da garrafa e do copo.
Nessas condições, o volume de suco restante na garrafa é, em cm^3, aproximadamente,

a) 250. b) 380. c) 540. d) 620. e) 800.

Comentários

O volume final na garrafa V_f será a diferença entre o valor inicial nela, V_o e o volume constante no copo, V_c.

Como são todos cilindros circulares retos, temos.

$$V_f = V_0 - V_c$$

Como o volume V de um cilindro circular reto é dado por

$$V = ab.h = \pi \cdot r^2 \cdot h,$$

onde r e h representam o raio da base e a altura do cilindro, respectivamente, podemos calcular V_f.

$$V_f = V_0 - V_c$$
$$V_f = \pi \cdot R^2 \cdot h - \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Atenção, para não causar confusão, usaremos R para simbolizar o raio da garrafa e r para simbolizar o raio do copo.

Além disso, fique ligado, o enunciado não forneceu os raios e sim os diâmetros, portanto, temos que dividir por dois os valores dados antes de colocá-los na equação. Os valores das alturas permanecem inalterados, ok?

O valor de π deve, segundo enunciado, ser aproximado para 3.

As dimensões dadas estão em cm e o volume final está indicado, nas alternativas, em cm^3. Assim, não são necessárias transformações de unidade.

Vamos à equação.

$$V_f = \pi \cdot R^2 \cdot h - \pi \cdot r^2 \cdot h$$
$$V_f = 3 \cdot 4^2 \cdot 13 - 3 \cdot 2^2 \cdot 7$$
$$V_f = 624 - 84$$
$$V_f = 540$$

Gabarito: "c".

8. (Mackenzie/2019)

Se as áreas laterais de dois cilindros equiláteros são, respectivamente, $16\pi\ cm^2$ e $100\pi\ cm^2$, então seus volumes, em cm^3 são, respectivamente,

a) $16\sqrt{2}\pi$ e $250\sqrt{2}\pi$

b) 32π e 200π

c) 16π e 250π

d) 24π e 150π

e) $24\sqrt{2}\pi$ e $150\sqrt{2}\pi$

Comentários

Sendo r o raio do cilindro menor e R o raio do cilindro maior; A_c a área lateral do cilindro menor e A_C a área lateral do cilindro maior, V_c o volume do cilindro menor e V_C o volume do cilindro maior, lembrando que são ambos equiláteros (altura = diâmetro do raio da base), temos:

$$A_c = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$
$$16\cancel{\pi} = 2 \cdot \cancel{\pi} \cdot r \cdot 2 \cdot r$$
$$16 = 4 \cdot r^2$$
$$\frac{16}{4} = r^2$$
$$4 = r^2$$
$$\sqrt{4} = \sqrt{r^2}$$
$$2 = |r|$$
$$\pm 2 = r$$

Como r é uma distância, podemos considerar apenas $r = 2$.

Assim, para o cálculo do volume, temos:

$$V_c = \pi \cdot r^2 \cdot h$$
$$V_c = \pi \cdot r^2 \cdot 2 \cdot r$$
$$V_c = 2 \cdot \pi \cdot r^3$$
$$V_c = 2 \cdot \pi \cdot 2^3$$
$$V_c = \pi \cdot 2^4$$
$$V_c = \pi \cdot 16$$

Aplicando o mesmo raciocínio para o cilindro maior, temos:

$$A_C = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H$$
$$16 \cancel{\pi} = 2 \cdot \cancel{\pi} \cdot R \cdot 2 \cdot R$$
$$100 = 2^2 \cdot R^2$$
$$\frac{100}{4} = R^2$$
$$25 = R^2$$
$$\sqrt{25} = \sqrt{R^2}$$
$$5 = |R|$$
$$\pm 5 = R$$

Como R é uma distância, podemos considerar apenas $r = 5$.
Assim, para o cálculo do volume, temos:

$$V_C = \pi \cdot R^2 \cdot H$$
$$V_C = \pi \cdot R^2 \cdot 2 \cdot R$$
$$V_C = 2 \cdot \pi \cdot R^3$$
$$V_C = 2 \cdot \pi \cdot 5^3$$
$$V_C = 2 \cdot \pi \cdot 5^3 \cdot \sqrt{2}^3$$
$$V_C = \pi \cdot 250 \cdot \sqrt{2}$$

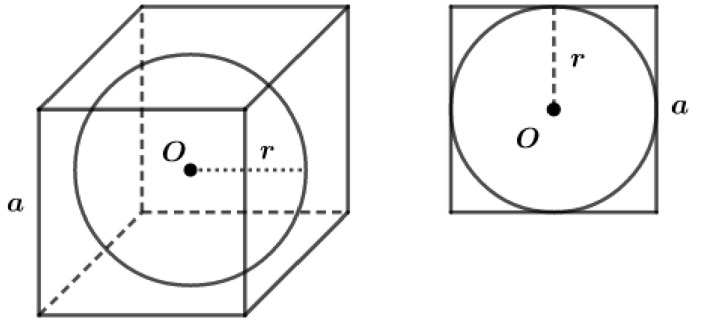
Gabarito: “c”.

2. INSCRIÇÃO E CIRCUNSCRIÇÃO DE SÓLIDOS

Neste capítulo, veremos alguns casos de inscrição de circunscrição de sólidos que poderão ser cobrados no concurso, muitas das questões desse tópico envolverão esferas, então, vamos estudá-las. A ideia aqui é apresentar o raciocínio que deve ser utilizado ao se deparar com esse tipo de questão.

2.1. ESFERA E CUBO

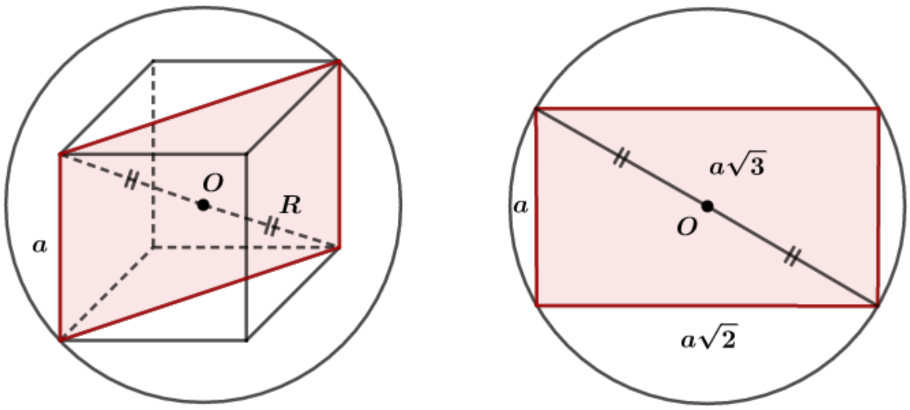
a) Esfera inscrita em cubo



Note que a esfera tangencia todas as faces do cubo. Assim, o centro da esfera equidista das faces, logo:

$$\boxed{r = \frac{a}{2}}$$

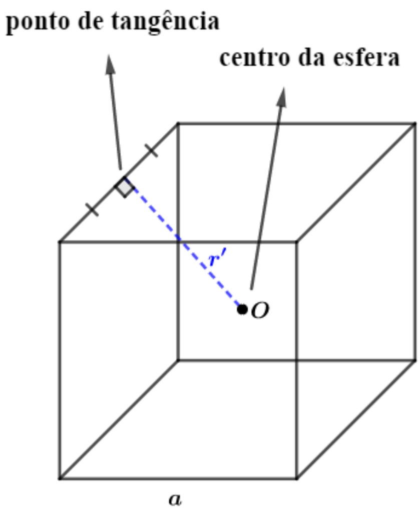
b) Esfera circunscrita ao cubo



O raio da esfera circunscrita é igual à metade da diagonal do cubo, como a diagonal do cubo mede $a\sqrt{3}$, temos:

$$\boxed{R = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

c) Esfera tangente às arestas do cubo



Nesse caso, o centro da esfera equidista do ponto médio das arestas do cubo, ou seja,

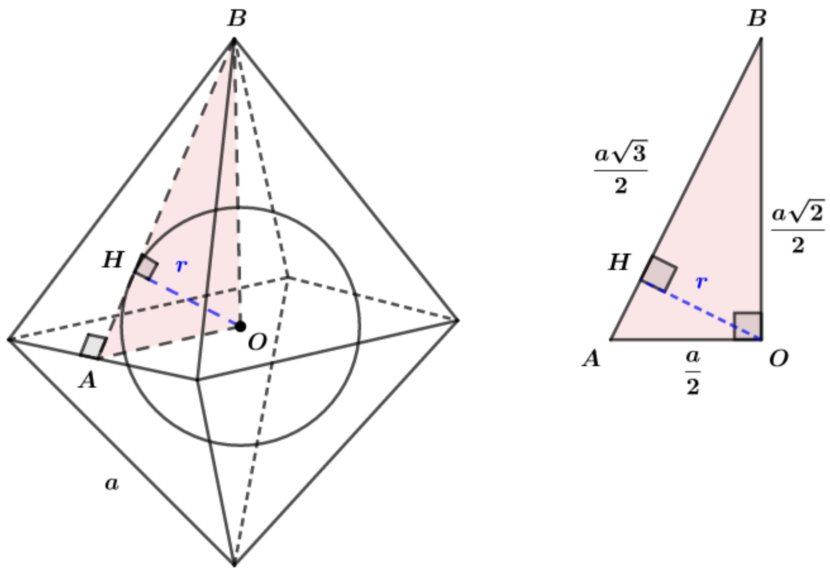
$$\boxed{r' = \frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

Note que, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{R^2 = r'^2 + r^2}$$

2.2. ESFERA E OCTAEDRO REGULAR

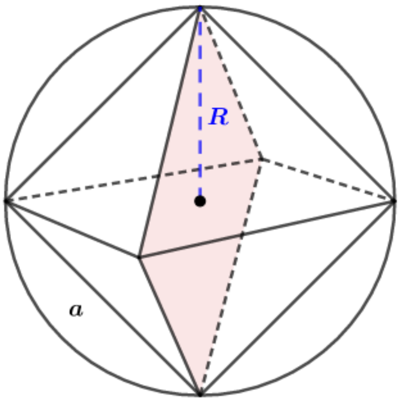
a) Esfera inscrita em um octaedro regular

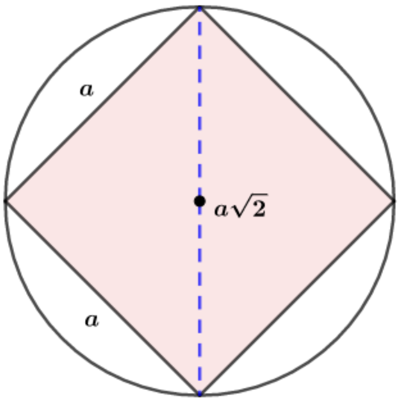


A esfera tangencia todas as faces do octaedro regular. Pela figura, podemos ver que o raio da esfera inscrita é igual à altura do triângulo retângulo AOB, logo:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2}r = \left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \boxed{r = \frac{a\sqrt{6}}{6}}$$

b) Esfera circunscrita ao octaedro regular

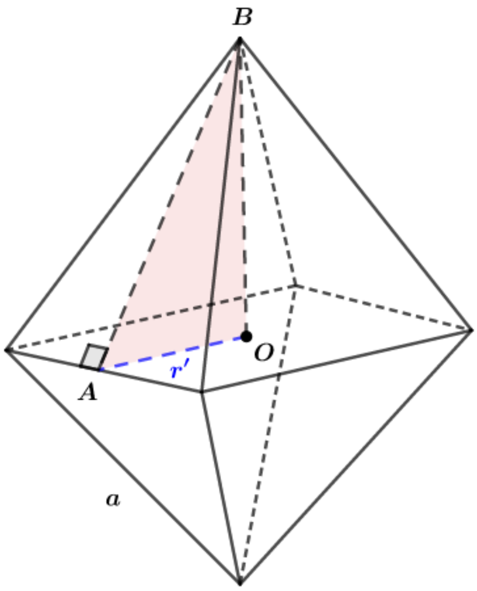




Nesse caso, o raio da esfera é igual à metade da diagonal do octaedro regular, logo:

$$\boxed{R = \frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

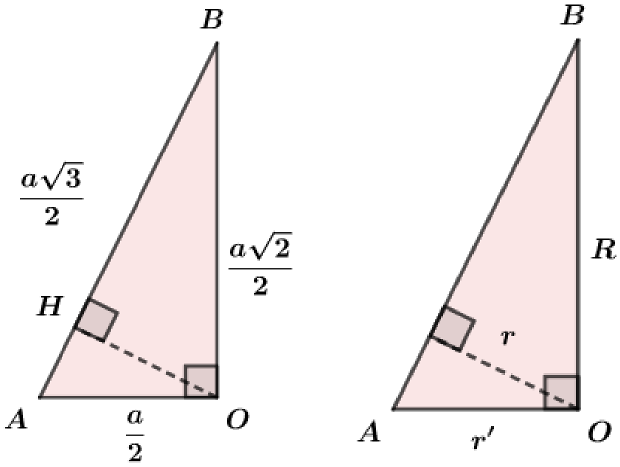
c) Esfera tangente às arestas do octaedro regular



O raio dessa esfera é

$$r' = \frac{a}{2}$$

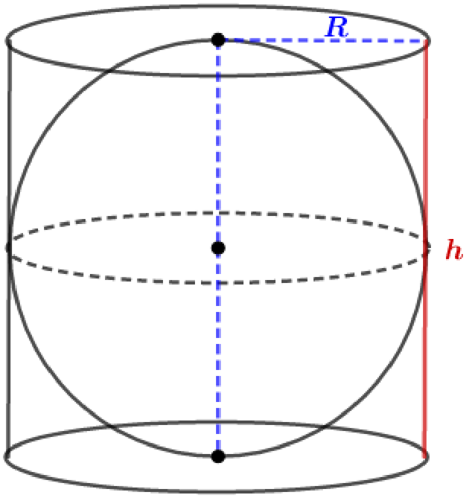
Note que os raios das esferas que estudamos podem se relacionar da seguinte forma:



$$\boxed{\frac{1}{r^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{r'^2}}$$

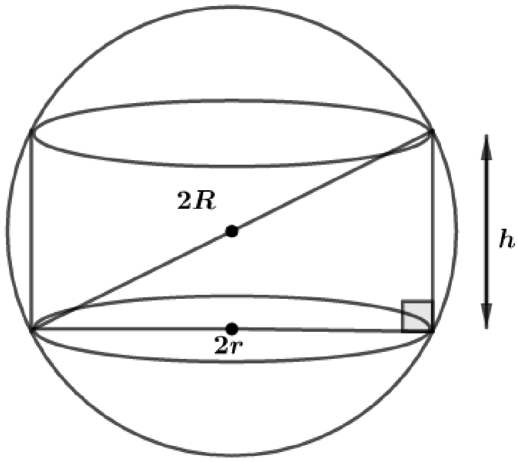
2.3. ESFERA E CILINDRO

a) Cilindro circunscrita a uma esfera



Note que o cilindro circunscrito a uma esfera é um cilindro equilátero com $\boxed{h = 2R}$.

b) Cilindro inscrito em uma esfera



Legenda:

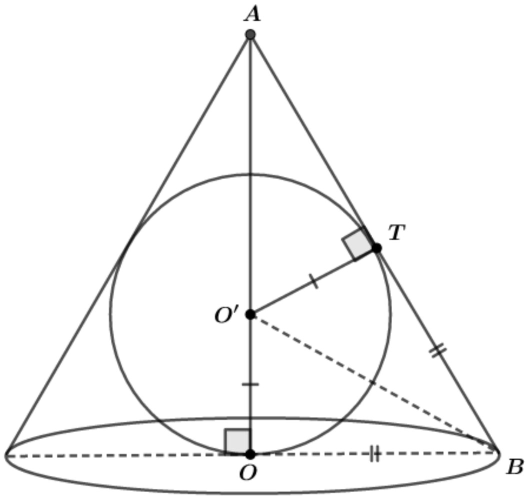
$$R - raio\ da\ esfera$$
$$r - raio\ da\ base\ do\ cilindro$$
$$h - altura\ do\ cilindro$$

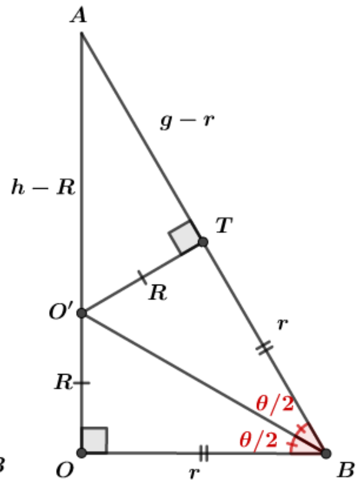
Temos a seguinte relação:

$$\boxed{(2R)^2 = (2r)^2 + h^2}$$

2.4. ESFERA E CONE

a) Esfera inscrita em um cone





Legenda:

$$R - raio\ da\ esfera$$
$$h - altura\ do\ cone$$
$$r - raio\ da\ base\ do\ cone$$

$$g - geratriz\ do\ cone$$

$$\theta - \hat{a}ngulo\ entre\ a\ geratriz\ e\ a\ base\ do\ cone$$

T e O são pontos de tangência entre a esfera e o cone. T também é o ponto de tangência da geratriz com a esfera.

Do $\Delta ATO'$, temos:

$$\boxed{(h-R)^2 = (g-r)^2 + R^2}$$

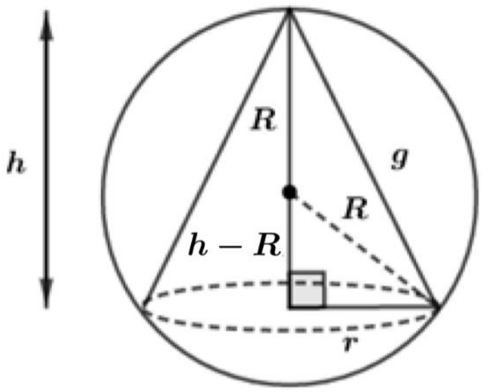
Note que $\Delta ATO' \sim \Delta AOB$, assim, pela semelhança de triângulos:

$$\boxed{\frac{h-R}{R} = \frac{g}{r}}$$

Pelas relações trigonométricas:

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{R}{r} \Rightarrow \boxed{\theta = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{R}{r}\right)}$$

b) Esfera circunscrita ao cone



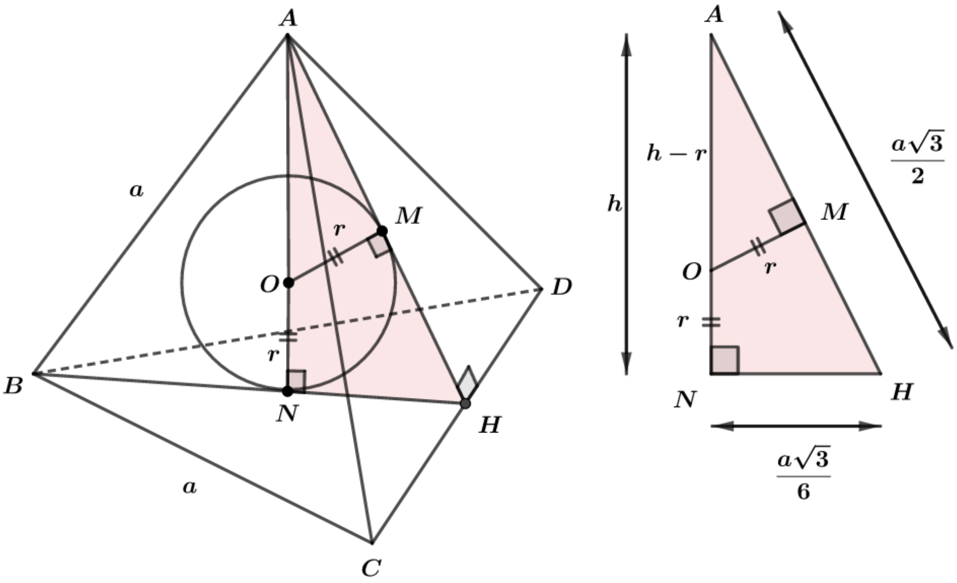
O cone possui base de raio r e altura h. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$R^2 = (h-R)^2 + r^2 \Rightarrow R^2 = R^2 - 2Rh + h^2 + r^2$$

$$\therefore \boxed{R = \frac{h^2 + r^2}{2h}}$$

2.5. ESFERA E TETRAEDRO REGULAR

a) Esfera inscrita em um tetraedro regular



As faces do tetraedro são triângulo equiláteros, assim, AH é altura de um triângulo equilátero de lado a, logo:

$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

No triângulo equilátero BCD, N é o baricentro desse triângulo, logo:

$$NH = \frac{BH}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Pelo teorema de Pitágoras, podemos achar a altura do tetraedro:

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = a^2\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{12}\right) \Rightarrow \boxed{h = \frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

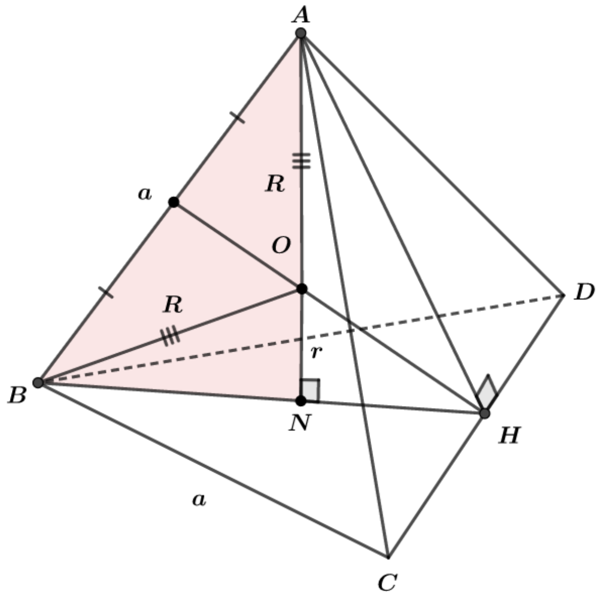
Por semelhança de triângulos, temos:

$$\Delta AMO \sim \Delta ANH \Rightarrow \frac{h-r}{r} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} \Rightarrow h = 4r \therefore r = \frac{h}{4}$$

Portanto, o raio da esfera inscrita é:

$$\boxed{r = \frac{a\sqrt{6}}{12}}$$

b) Esfera circunscrita ao tetraedro regular



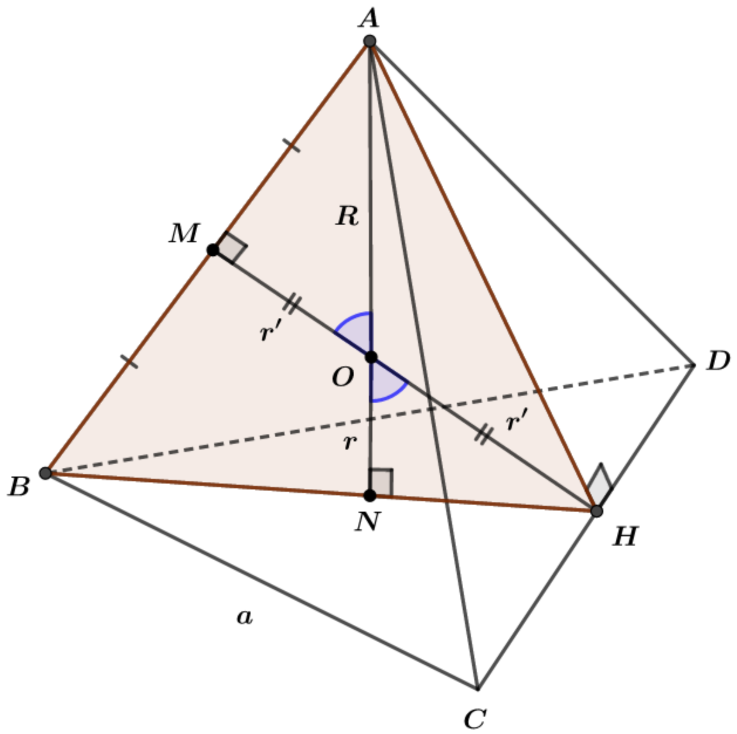
R é o raio da esfera circunscrita ao tetraedro regular. Note que $r + R = h$, desse modo:

$$r + R = 4r \Rightarrow R = 3r \Rightarrow \boxed{\frac{R}{r} = 3}$$

Substituindo a expressão de r, obtemos:

$$\boxed{R = \frac{a\sqrt{6}}{4}}$$

c) Esfera tangente às arestas do tetraedro regular



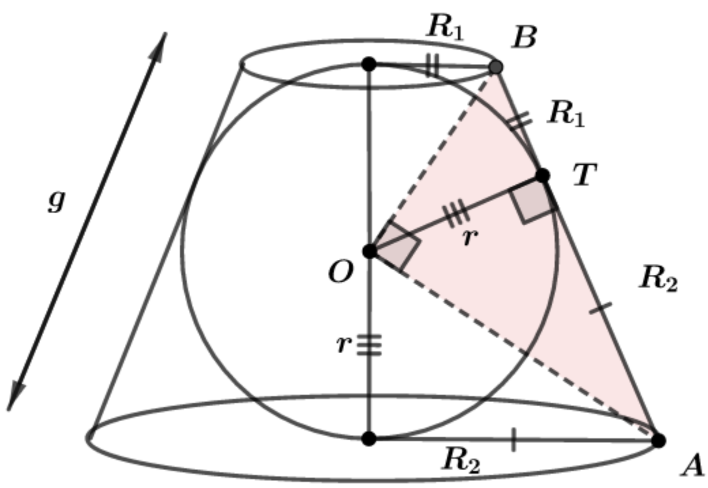
r' é o raio da esfera tangente às arestas. Por semelhança, temos:

$$\Delta AOM \sim \Delta HON \Rightarrow \frac{r'}{R} = \frac{r}{r'} \Rightarrow \boxed{r' = \sqrt{Rr}}$$

Portanto, o raio da esfera tangente às arestas é a média geométrica entre os raios das esferas inscritas e circunscritas ao mesmo tetraedro.

2.6. ESFERA E TRONCO DE CONE

a) Esfera inscrita em um tronco de cone reto de bases paralelas



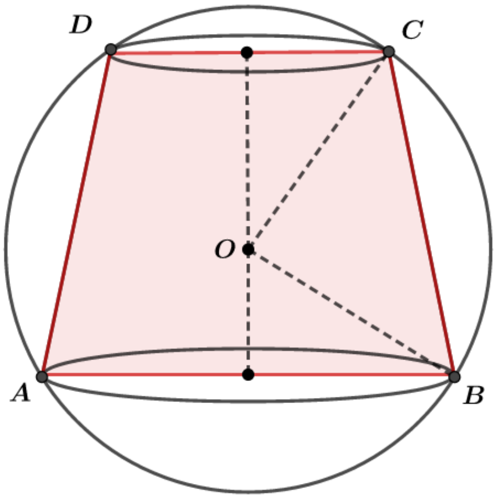
Para o tronco de cone ser circunscritível a uma esfera, devemos ter:

$$\boxed{g = R_1 + R_2}$$

Além disso, analisando o triângulo retângulo AOB, obtemos o raio da esfera inscrita em função de R_1 e R_2:

$$\Delta BTO \sim \Delta OTA \Rightarrow \frac{r}{R_1} = \frac{R_2}{r} \Rightarrow \boxed{r = \sqrt{R_1 R_2}}$$

b) Esfera circunscrita a um tronco de cone reto de bases paralelas



Nesse caso, tomando-se um plano secante que divide o tronco de cone em duas partes iguais, podemos ver que a secção plana é um trapézio isósceles inscrito numa circunferência.

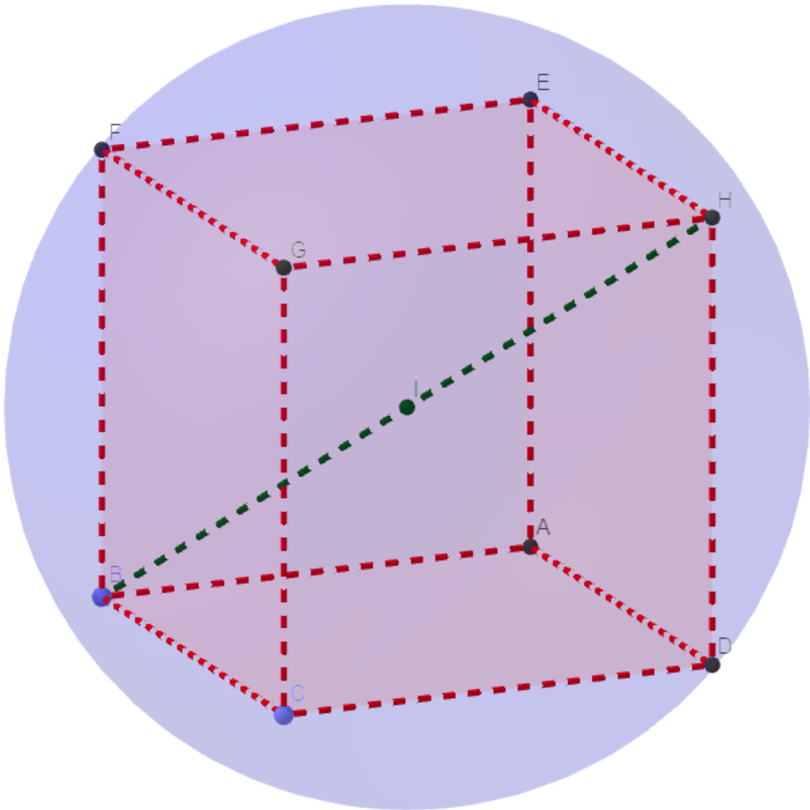
9. (UECE/2017)

Um cubo cuja medida de cada aresta é 3 dm está inscrito em uma esfera de raio R. A medida de um diâmetro $(2R)$ da esfera é

a) $2\sqrt{3}\ dm$. b) $3\sqrt{2}\ dm$. c) $3\sqrt{3}\ dm$. d) $4\sqrt{3}\ dm$.

Comentários

Perceba que o cubo $ABCDEFGH$ tem uma diagonal BH que passa por I, centro da esfera.



Como a diagonal do cubo é igual ao diâmetro da esfera, podemos dizer que:

$$Diagonal\ do\ quadrado = Diâmetro\ da\ esfera$$
$$l\sqrt{3} = D$$
$$3\sqrt{3} = D$$

Gabarito: "c".

10. (Unicamp/2016)

Um cilindro circular reto, cuja altura é igual ao diâmetro da base, está inscrito numa esfera. A razão entre os volumes da esfera e do cilindro é igual a

$a)\ \frac{4\sqrt{2}}{3}$ $\quad b)\ \frac{4}{3}$ $\quad c)\ \frac{3\sqrt{2}}{4}$ $\quad d)\ \sqrt{2}$

Comentários

Se considerarmos R o raio da esfera e r o raio do cilindro, a relação entre o raio da esfera e do cilindro inscrito é dada por $R = r\sqrt{2}$.

Assim, a razão entre o volume da esfera e o volume do cilindro é dada por:

$$\frac{V_{esfera}}{V_{cilindro}} = \frac{\frac{4}{3}\cdot\cancel{\pi}\cdot R^3}{\cancel{\pi}\cdot r^2\cdot 2\cdot r} = \frac{\frac{4}{3}(r\sqrt{2})^3}{2\cdot r^3} = \frac{\frac{4}{3}\cdot\cancel{r^3}\cdot\sqrt{2}^3}{2\cdot\cancel{r^3}} = \frac{\frac{4}{3}\cdot\cancel{2}\cdot\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \frac{4}{3}\cdot\sqrt{2}$$

Gabarito: "a".

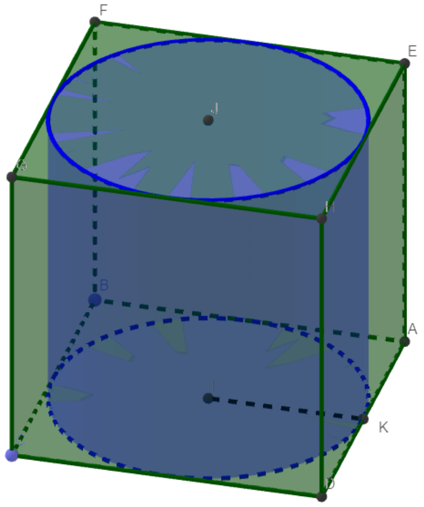
11. (UEPB/2012)

Um cilindro reto está inscrito em um cubo de aresta $b\ cm$. A relação entre o volume do cubo e o volume do cilindro é

$a)\ 2\pi$ $\quad b)\ \frac{\pi}{4}$ $\quad c)\ \pi$ $\quad d)\ \frac{4}{\pi}$ $\quad e)\ \frac{1}{2\pi}$

Comentários

Se o cilindro está inscrito no cubo, seu raio é igual à metade do lado do cubo.



Assim, a razão entre o volume do cubo e o volume do cilindro é

$$\frac{V_{cubo}}{V_{cilindro}} = \frac{aresta\ ao\ cubo}{área\ da\ base \cdot altura} = \frac{b^3}{\pi \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot b} = \frac{b^3}{\pi \cdot \frac{b^2}{4} \cdot b} = \frac{\cancel{b^3}}{\pi \cdot \frac{\cancel{b^3}}{4}} = \frac{1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$$

Gabarito: "d".

12. (CEFET/2015)

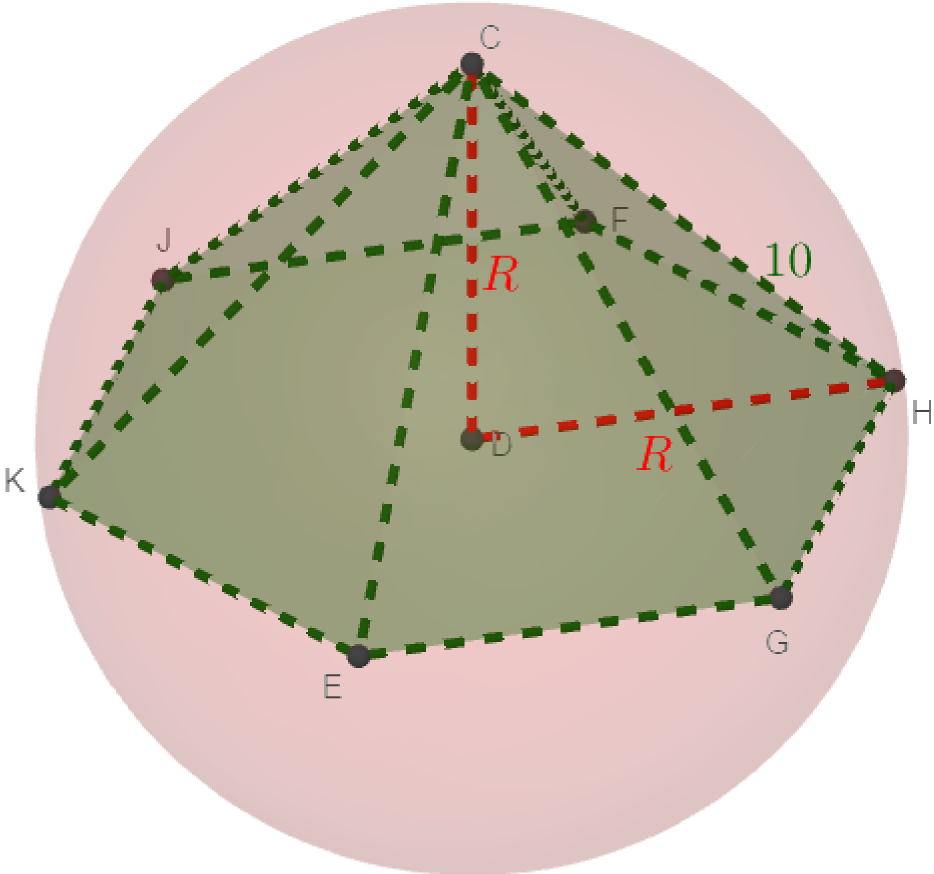
Uma pirâmide regular de base hexagonal tem o vértice sobre uma semiesfera e a base inscrita na base desta semiesfera. Sabendo que a aresta lateral dessa pirâmide mede $10\ cm$, então o volume é igual a:

a) $125\sqrt{6}\ cm^3$ b) $500\sqrt{3}\ cm^3$ c) $375\sqrt{6}\ cm^3$

$d)\ \frac{5\sqrt{15}}{2}\ cm^3$ $250\sqrt{3}\ cm^3$

Comentários

Façamos um esboço da situação retratada no enunciado.



Para encontrarmos o raio R, podemos utilizar o teorema de Pitágoras entre a altura R da pirâmide, a distância R entre o centro da base e um vértice do hexágono da base e, como hipotenusa, a aresta da pirâmide, que vale $10\ cm$.

$$R^2 + R^2 = 10^2$$
$$2R^2 = 100$$
$$R^2 = \frac{100}{2}$$
$$R^2 = 50$$
$$\sqrt{R^2} = \sqrt{50}$$
$$|R| = 5 \cdot \sqrt{2}$$
$$R = \pm 5 \cdot \sqrt{2}$$

Como R representa uma distância, fiquemos só com a parte positiva.

$$R = 5 \cdot \sqrt{2}$$

Já sabemos que a altura da pirâmide é igual a $R = 5 \cdot \sqrt{2}$.

Como a base da pirâmide é hexagonal, podemos inferir que a aresta da base também é igual a R, pois um hexágono é formado por seis triângulos equiláteros justapostos, todos de lado também iguais a $R = 5 \cdot \sqrt{2}$.

Dessa forma, podemos calcular o volume da pirâmide.

$$V_p = \frac{1}{3} \cdot \text{área da base} \cdot \text{altura}$$
$$V_p = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \text{área do triângulo equilátero} \cdot \text{altura}$$
$$V_p = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \cdot R$$

$$V_p = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{6}^{2} \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{\cancel{4}_{2}} \cdot R$$
$$V_p = \frac{R^3\sqrt{3}}{2}$$
$$V_p = \frac{(5\cdot\sqrt{2})^3\sqrt{3}}{2}$$
$$V_p = \frac{5^3\cdot\sqrt{2}^3\sqrt{3}}{2}$$
$$V_p = \frac{5^3\cdot\cancel{2}\cdot\sqrt{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$
$$V_p = 125\cdot\sqrt{6}\,cm^3$$

Gabarito: "a".

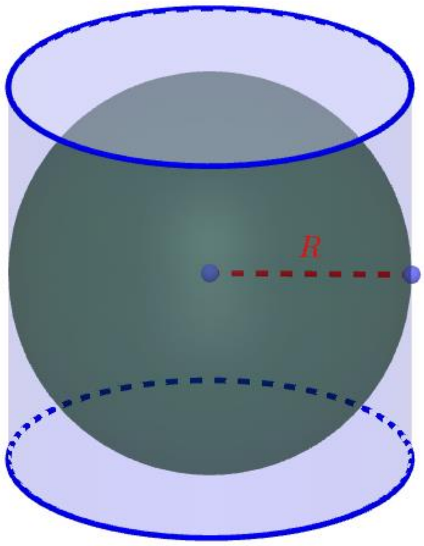
13. (EEAR/2017)

Uma esfera está inscrita num cilindro equilátero cuja área lateral mede $16\ cm^2$. O volume da esfera inscrita é

$a)\ 8\pi$ $\quad b)\ 16\pi$ $\quad c)\ \frac{32}{3}\pi$ $\quad d)\ \frac{256}{3}\pi$

Comentários

Esboçando a situação descrita no enunciado, temos:



Pelo esboço, percebemos que o raio da circunferência inscrita também é raio da base do cilindro.

A área da base de um cilindro é dada por

$$A = 2\cdot\pi\cdot R\cdot h$$
$$16\pi = 2\cdot\pi\cdot R\cdot 2\cdot R$$
$$16\cancel{\pi} = 2\cdot\cancel{\pi}\cdot R\cdot 2\cdot R$$
$$16 = 4\cdot R^2$$
$$\frac{16}{4} = R^2$$
$$4 = R^2$$
$$\sqrt{4} = \sqrt{R^2}$$
$$2 = |R|$$
$$\pm 2 = R$$

Como R é uma distância, podemos assumir apenas o valor positivo pelo contexto.

$$2 = R$$

De posse do raio da circunferência, podemos calcular seu volume.

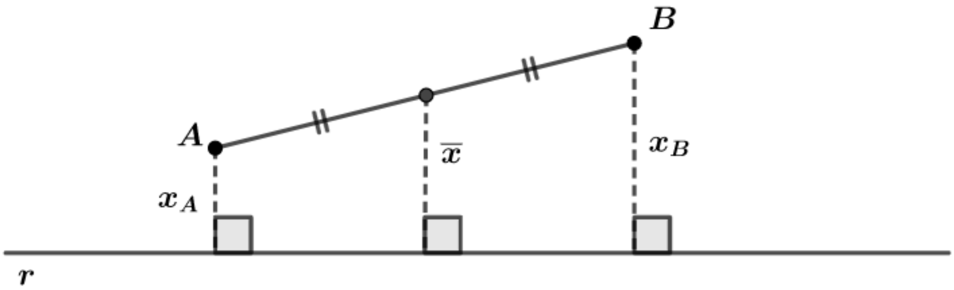
$$V_c = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 8 = \frac{32 \cdot \pi}{3}$$

Gabarito: “c”.

3. TEOREMA DE PAPPUS-GULDIN

O teorema de Pappus-Guldin nos permite calcular facilmente a área da superfície e o volume de um sólido de revolução. Para isso, precisamos conhecer a distância do centro de gravidade da figura a ser rotacionada ao eixo de rotação. Vejamos como determinar essa distância com alguns exemplos.

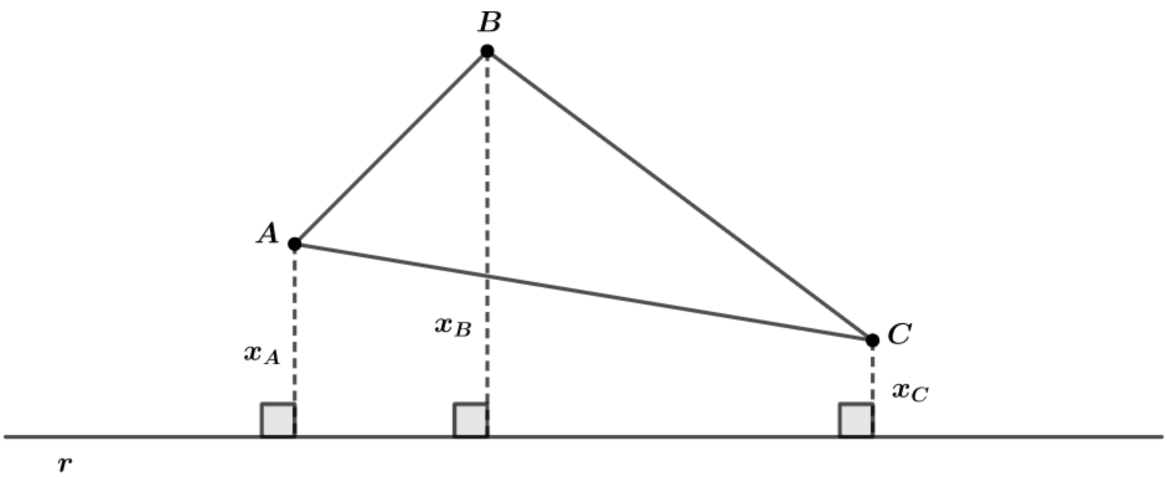
Consideremos o segmento de reta $\overline{AB}$ e a reta r abaixo:



$\bar{x}$ é a distância do centro de gravidade do segmento de reta $\overline{AB}$ à reta r, essa distância é igual à média aritmética entre x_A e x_B:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_A + x_B}{2}}$$

Vejamos o caso de um triângulo:

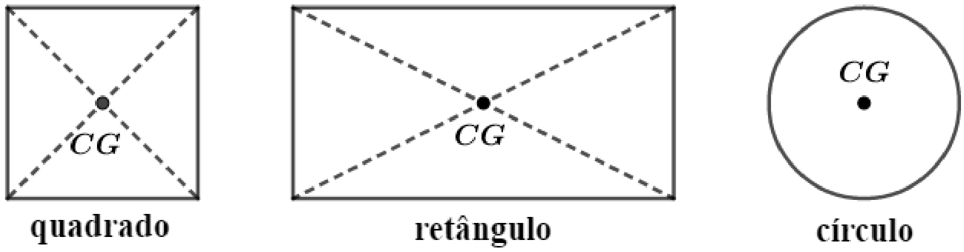


A distância do centro de gravidade do triângulo de vértices A, B e C à reta r é dado pela média aritmética entre x_A, x_B e x_C:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}}$$

Além disso, o **centro de gravidade** de um triângulo é o seu **baricentro**.

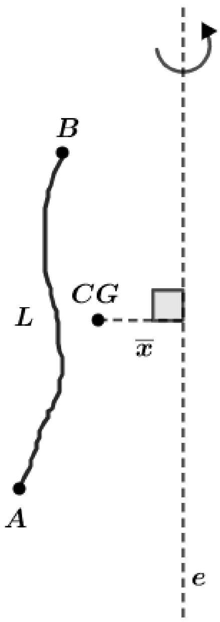
De forma geral, o centro de gravidade de uma figura plana é o seu centro geométrico.



Agora que sabemos o que é centro de gravidade de uma figura plana, vamos aprender os teoremas de Pappus-Guldin.

3.1. ÁREA DE SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

Consideremos a seguinte figura:



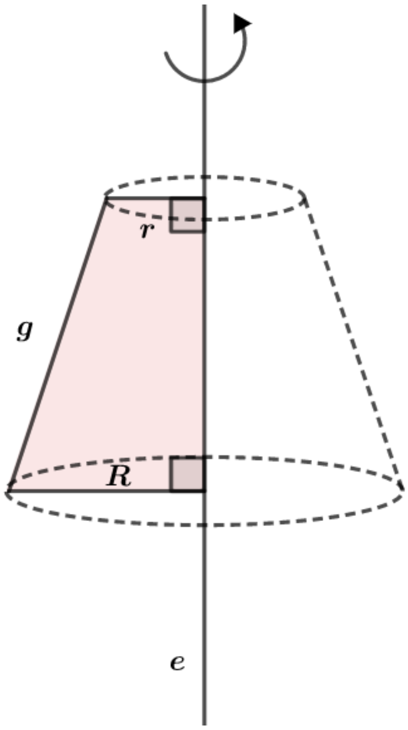
Ao rotacionar a linha em torno do eixo, obteremos uma superfície de revolução cuja área é dada por:

$$\boxed{A = 2\pi\overline{x}L}$$

Onde $\overline{x}$ é a distância do centro de gravidade da linha ao eixo e L é o comprimento da linha.

Vejamos um exemplo.

3.1.a) Calcule a área lateral do sólido de revolução gerado pela seguinte figura plana:



Essa figura é um trapézio cujas bases medem r e R e a distância do seu centro de gravidade ao eixo de rotação é

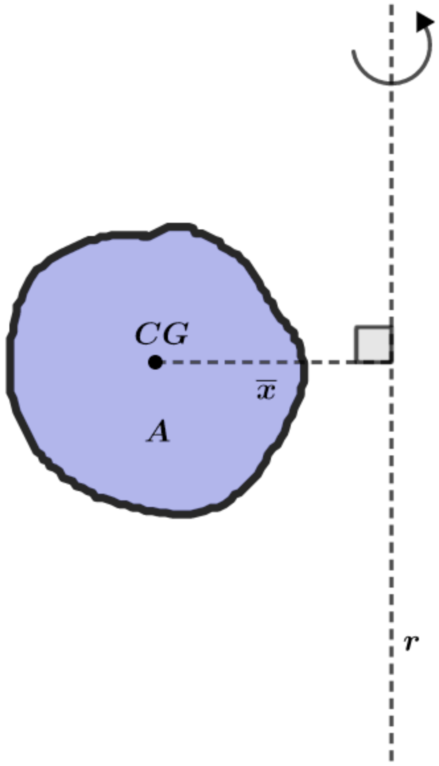
$$\overline{x} = \frac{r + R}{2}$$

O sólido gerado é um tronco de cone. Aplicando o teorema de Pappus-Guldin, obtemos a área lateral desse tronco:

$$A_L = 2\pi g\left(\frac{r + R}{2}\right) \therefore \boxed{A_L = \pi g(r + R)}$$

3.2. VOLUME DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Para calcular o volume de sólidos de revolução, basta conhecer a área da superfície a ser rotacionada e a distância do centro de gravidade dessa superfície ao eixo de rotação.



O volume do sólido de revolução é dado por:

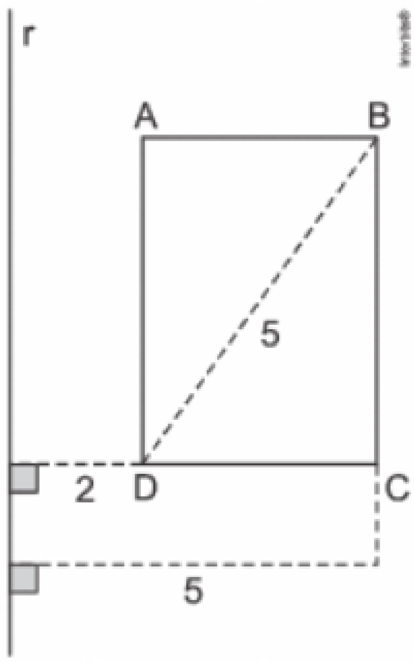
$$\boxed{V = 2\pi\overline{x}A}$$

Onde A é a área da superfície geradora.

Vejamos um exemplo.

3.2.a) (UFRGS/2019)

Considere o sólido obtido pela revolução do retângulo $ABCD$ em torno da reta r, conforme indicado na figura a seguir.



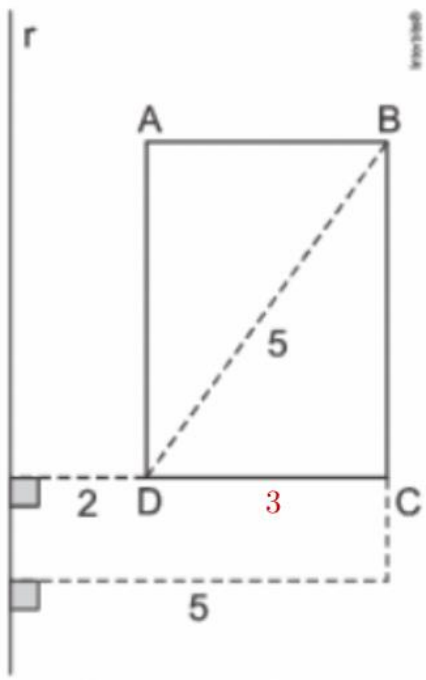
O volume do sólido obtido é

a) 16π b) 84 c) 100 d) 84π e) 100π

Comentários

Solução 1)

Da figura, tiramos que $DC = 3$. Com esse dado, podemos calcular o valor de BC por meio do teorema de Pitágoras.



$$BC^2 + CD^2 = 5^2$$
$$BC^2 + 3^2 = 5^2$$
$$BC^2 = 25 - 9$$
$$BC^2 = 16$$
$$\sqrt{BC^2} = \sqrt{16}$$
$$|BC| = 4$$
$$BC = \pm 4$$

Entendendo BC como uma distância, podemos descartar a parte negativa.

$$BC = 4$$

Assim, o volume de revolução é dado por:

$$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 4 - \pi \cdot 2^2 \cdot 4$$
$$V = 100\pi - 16\pi$$
$$V = 84\pi$$

Solução 2)

A distância do centro de gravidade de $ABCD$ à reta r é igual a

$$\overline{x} = 2 + \frac{DC}{2} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

A área da figura é

$$A = 3 \cdot 4 = 12$$

Portanto, o volume do sólido de revolução é

$$V = 2\pi\overline{x}A = 2\pi\left(\frac{7}{2}\right)12 = 84\pi$$

Gabarito: "d".

14. (ENEM/2011)
A figura seguinte mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais.

Disponível em: http://mdmat.psico.ufrgs.br. Acesso em: 1 maio 2010.

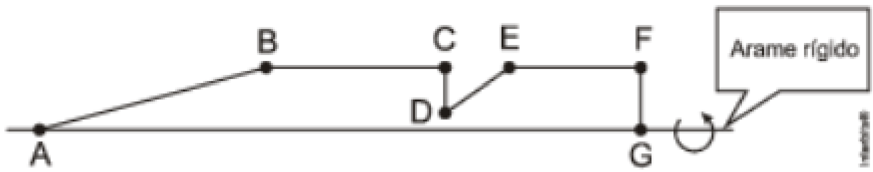
Essa figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de
a) pirâmide
b) semiesfera
c) cilindro
d) tronco de cone
e) cone

Comentários

Veja que a figura pode ser obtida com a rotação de um segmento de reta oblíquo ao eixo, gerando um cone.

Gabarito: "e".

15. (ENEM/2010)
Numa feira de artesanato, uma pessoa constrói formas geométricas de aviões, bicicletas, carros e outros engenhos com arame inextensível. Em certo momento, ele construiu uma forma tendo como eixo de apoio outro arame retilíneo e rígido, cuja aparência é mostrada na



Ao girar tal forma em torno do eixo, formou-se a imagem de um foguete, que pode ser pensado como composição, por justaposição, de diversos sólidos básicos de revolução. Sabendo que. a figura, os pontos B, C, E e F são colineares, $AB = 4FG, BC = 3FG, EF = 2FG$, e utilizando-se daquela forma de pensar o foguete, a decomposição deste, no sentido da ponta para a cauda, é formada pela seguinte sequência de sólidos:

a) pirâmide, cilindro reto, cone reto, cilindro reto.

b) cilindro reto. tronco de cone, cilindro reto, cone equilátero.

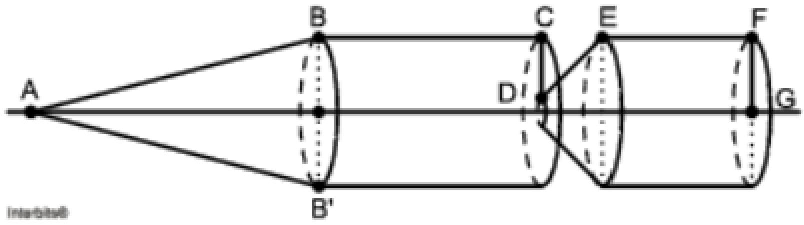
c) cone reto, cilindro reto, tronco de cone e cilindro equilátero.

d) cone equilátero, cilindro reto, pirâmide, cilindro.

e) cone, cilindro equilátero, tronco de pirâmide, cilindro.

Comentários

Fazendo a revolução da parte de arame, temos o seguinte sólido:

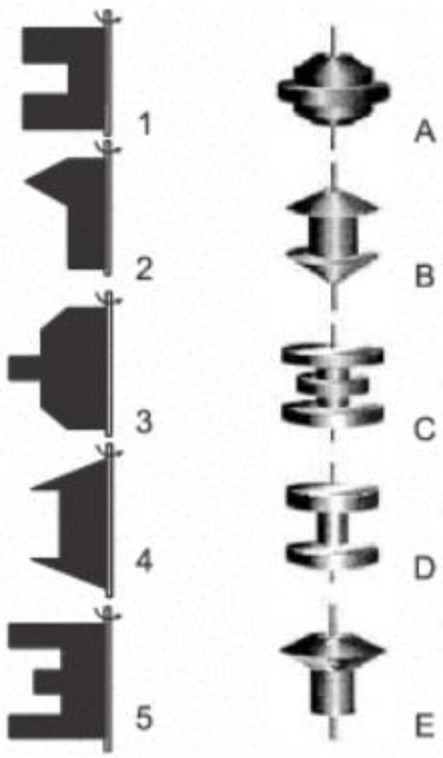


$$AB\ gera\ um\ cone\ reto$$
$$BC\ gera\ um\ cilindro\ reto$$
$$DE\ gera\ um\ tronco\ de\ cone$$
$$EF\ gera\ outro\ cilindro\ reto\ (equilátero, pois\ EF = 2FG)$$

Gabarito: "c".

16. (ENEM/1999)

Assim como na relação entre o perfil de um corte de um torno e a peça torneada, sólidos de revolução resultam da rotação de figuras planas em tomo de um eixo. Girando-se as figuras a seguir em torno da haste indicada obtém-se os sólidos de revolução que estão na coluna da direita.



A correspondência correta entre as figuras planas e os sólidos de revolução obtidos é:

a) 1A, 2B, 3C, 4D, 5E.

b) 1B, 2C, 3D,4E, 5A.

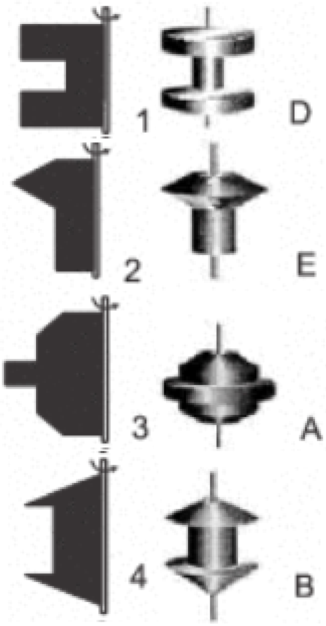
c) 1B, 2D, 3E, 4A, 5C.

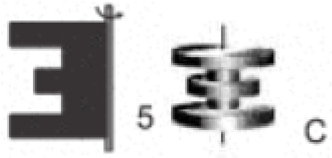
d)1D,2E, 3A, 4B, 5C.

e)1D, 2E, 3B, 4C, 5A.

Comentários

Fazendo a correspondência direta, figura a figura, temos:

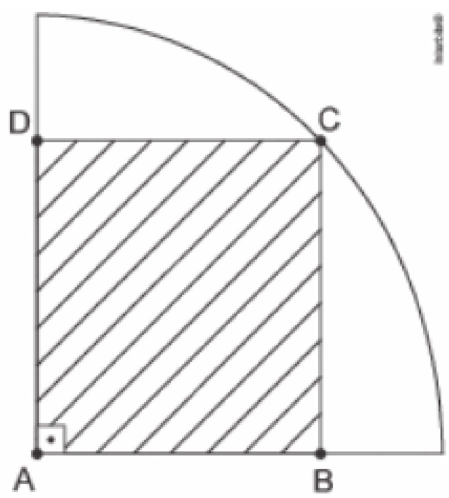




Gabarito: “d”.

17. (CEFET/2015)

Na figura a seguir, $ABCD$ é um retângulo inscrito em um setor circular de raio R com $\overline{AB} = \frac{2}{3}R$



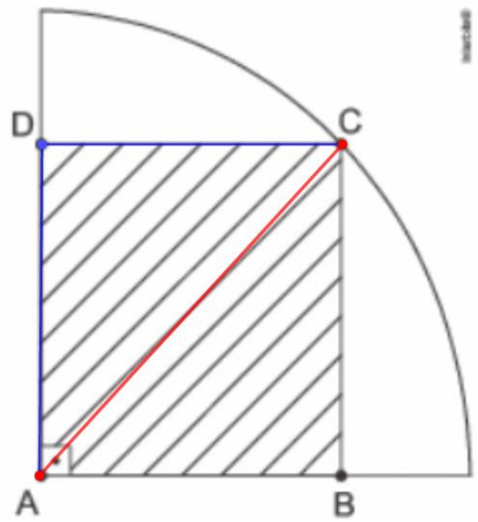
O volume do sólido de revolução gerado pela rotação desse retângulo em torno de um eixo que contenha o segmento $\overline{AD}$, em função de R, é igual a

$a)\ \frac{\sqrt{5}\pi R^3}{3}$ $b)\ \frac{8\pi R^3}{9}$ $c)\ \frac{4\sqrt{5}\pi R^3}{27}$ $d)\ \frac{10\pi R^3}{49}$ $e)\ \frac{5\sqrt{5}\pi R^3}{54}$

Comentários

Solução 1)

Considerando $AC = R$, podemos aplicar o teorema de Pitágoras para encontrar a altura $\overline{AD}$ do retângulo $ABCD$.



$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

Como $DC = AB$, podemos fazer a substituição.

$$AC^2 = AD^2 + AB^2$$
$$R^2 = AD^2 + \left(\frac{2}{3}R\right)^2$$
$$R^2 - \left(\frac{2}{3}R\right)^2 = AD^2$$
$$R^2 - \frac{4}{9}R^2 = AD^2$$
$$\frac{5}{9}R^2 = AD^2$$
$$\sqrt{\frac{5}{9}R^2} = \sqrt{AD^2}$$
$$\frac{\sqrt{5}}{3}R = |AD|$$
$$\pm\frac{\sqrt{5}}{3}R = AD$$

Como AD é equivalente a um lado de um retângulo, podemos considerar apenas a vertente positiva.

$$\frac{\sqrt{5}}{3}R = AD$$

O sólido de rotação gerado por esse retângulo será um cilindro de raio de base igual a AB e de altura igual a AD.

Dessa forma, seu volume é dado por:

$$V = \text{área da base} \cdot \text{altura}$$
$$V = \pi \cdot AB^2 \cdot AD$$
$$V = \pi \cdot \left(\frac{2}{3}R\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}R$$
$$V = \pi \cdot \frac{4}{9}R^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}R$$
$$V = \frac{4\sqrt{5}\pi R^3}{27}$$

Solução 2)

Vamos aplicar diretamente o teorema de Pappus-Guldin. Inicialmente, devemos calcular a área da figura a ser rotacionada:

$$A = \overline{AD} \cdot \overline{AB} = \frac{\sqrt{5}}{3}R \cdot \frac{2}{3}R = \frac{2\sqrt{5}}{9}R^2$$

Como AB mede $2/3R$, temos que a distância do centro de gravidade do quadrilátero é $\overline{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}R = \frac{1}{3}R$. Logo:

$$V = 2\pi\overline{x}A = 2\pi\left(\frac{1}{3}R\right)\left(\frac{2\sqrt{5}}{9}R^2\right) = \frac{4\sqrt{5}\pi R^3}{27}$$

Gabarito: "c".

4. QUESTÕES NÍVEL 1

1. (ESA/2017)

A geratriz de um cone circular reto de altura 8cm é10cm, então a área da base desse cone é:

a) $64\pi\ cm^2$

b) $9\pi\ cm^2$

c) $16\pi\ cm^2$

d) $36\pi\ cm^2$

e) $25\pi\ cm^2$

2. (ESA/2016)

Duas esferas de raios $3cm$ e $\sqrt[3]{51}cm$ fundem-se para formar uma esfera maior. Qual é o raio da nova esfera?

a) $\sqrt[3]{78}$

b) $\sqrt[3]{36}$

c) $\sqrt[3]{68}$

d) $\sqrt[3]{104}$

e) $\sqrt[3]{26}$

3. (ESA/2015)

Em uma pirâmide reta de base quadrada, de $4m$ de altura, uma aresta da base mede 6m. A área total dessa pirâmide, em m^2, é

a) 144

b) 84

c) 48

d) 72

e) 96

4. (ESA/2014)

Dobrando o raio da base de um cone e reduzindo sua altura à metade, seu volume:

a) dobra

b) quadriplica

c) não se altera

d) reduz-se à metade do volume original.

e) reduz-se a um quarto do volume original.

5. (ESA/2012)

Duas esferas de aço de raio 4cm e $\sqrt[3]{61}\ cm$ fundem-se para formar uma esfera maior. Considerando que não houve perda de material das esferas durante o processo de fundição, a medida do raio da nova esfera é de:

a) $5\ cm$

b) $5,5\ cm$

c) $4,5\ cm$

d) $6\ cm$

e) $7\ cm$

6. (ESA/2012)

Dobrando-se a altura de um cilindro circular reto e triplicando o raio de sua base, pode-se afirmar que seu volume fica multiplicado por:

a) 6

b) 9

c) 12

d) 18

e)36

7. (ESA/2011)

Um tanque subterrâneo tem a forma de um cone invertido. Esse tanque está completamente cheio com$8dm^3$ de água e $56dm^3$ de petróleo. Petróleo e água não se misturam, ficando o petróleo na parte superior do tanque e a água na parte inferior. Sabendo que o tanque tem12m de profundidade, a altura da camada de petróleo é:

a) $10m$

b) $9m$

c) $8m$

d) $7m$

e) $6m$

8. (ESA/2010)

Um cone reto, de altura H e área da base B, é seccionado por um plano paralelo à base. Consequentemente, um novo cone com altura $\frac{H}{3}$ é formado. Qual a razão entre os volumes do maior e o do menor cone, o de altura H e o de altura $\frac{H}{3}$?

a) 3

b) 6

c) 9

d) 18

e) 27

9. (EsPCEx/2017)

A angioplastia é um procedimento médico caracterizado pela inserção de um cateter em uma veia ou artéria com o enchimento de um pequeno balão esférico localizado na ponta desse cateter. Considerando que, num procedimento de angioplastia, o raio inicial do balão seja desprezível e aumente a uma taxa constante de $0,5mm/s$ até que o volume seja igual a $500\ mm^3$, então o tempo, em segundos, que o balão leva para atingir esse volume é

a) 10

b) $10\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$

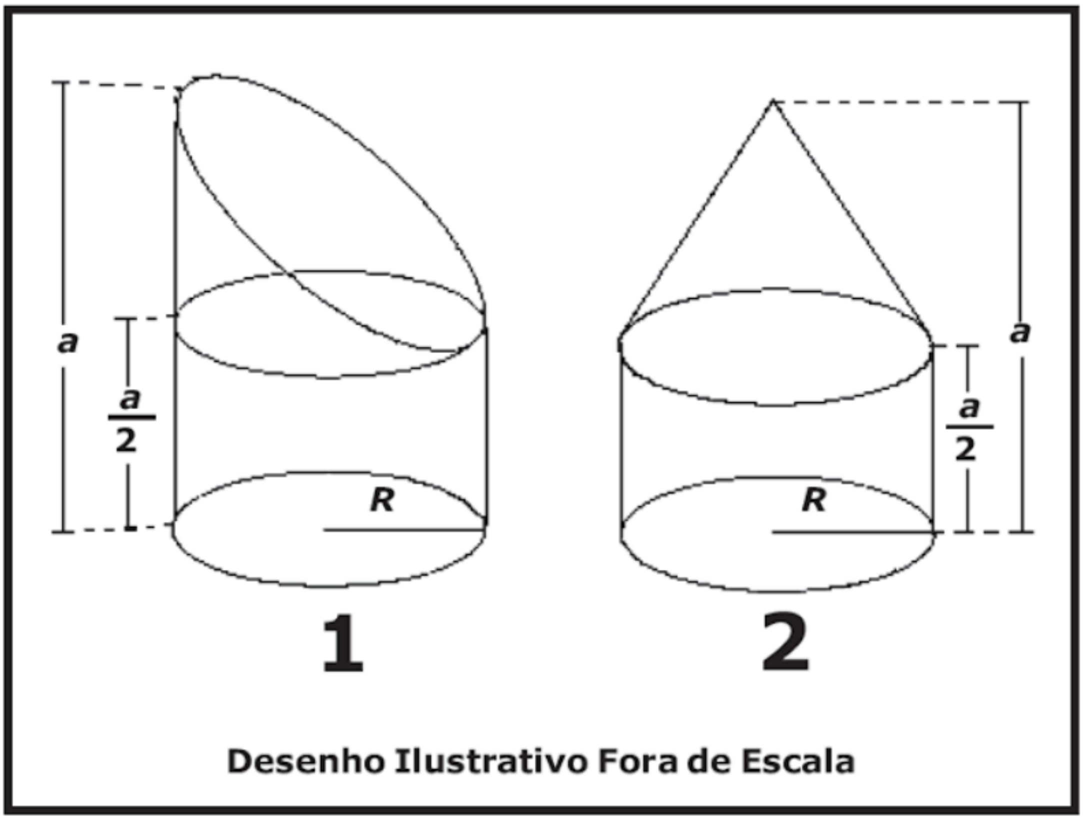
c) $10\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$

d) $10\sqrt[3]{\pi}$

e) $10\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$

10. (EsPCEx/2017)

O valor da altura de um cilindro reto de raio R, cujo volume é a soma dos volumes dos sólidos 1 e 2 é



a) $\frac{13}{12}a$

b) $\frac{7}{6}a$

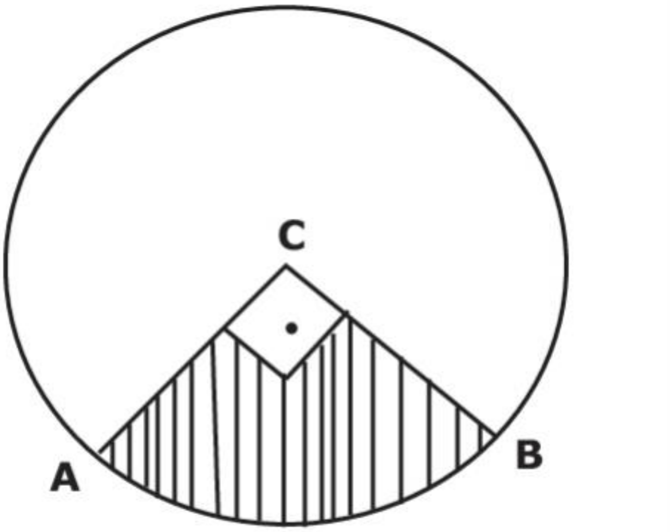
c) $\frac{5}{4}a$

d) $\frac{4}{3}a$

e) $\frac{17}{12}a$

11. (EsPCEx/2016)

Corta-se de uma circunferência de raio 4 cm, um setor circular de ângulo $\frac{\pi}{2}\ rad$ (ver desenho ilustrativo), onde o ponto C é o centro da circunferência. Um cone circular reto é construído a partir desse setor circular ao se juntar os raios $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$. O volume desse cone, em cm^3, é igual a:



desenho ilustrativo-fora de escala

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

b) $\frac{\sqrt{3}}{5}\pi$

c) $\frac{\sqrt{15}}{3}\pi$

d) $\frac{\sqrt{15}}{5}\pi$

e) $\frac{\sqrt{5}}{5}\pi$

12. (EsPCEx/2015)

Um recipiente cilíndrico, cujo raio da base tem medida R, contém água até uma certa altura. Uma esfera de aço é mergulhada nesse recipiente ficando totalmente submersa, sem haver transbordamento de água. Se a altura da água subiu $\frac{9}{16}R$, então o raio da esfera mede

a) $\frac{2}{3}R$

b) $\frac{3}{4}R$

c) $\frac{4}{9}R$

d) $\frac{1}{3}R$

e) $\frac{9}{16}R$

13. (EsPCEx/2014)

Um cone de revolução tem altura $4\ cm$ e está circunscrito a uma esfera de raio $1\ cm$. O volume desse cone (em cm^3) é igual a

a) $\frac{1}{3}\pi$

b) $\frac{2}{3}\pi$

c) $\frac{4}{3}\pi$

d) $\frac{8}{3}\pi$

e) 3π

14. (EsPCEx/2013)

Considere que uma laranja tem a forma de uma esfera de raio $4\ cm$, composta de 12 gomos exatamente iguais. A superfície total de cada gomo mede

a) $\frac{4^3\pi}{3}\ cm^2$

b) $\frac{4^3\pi}{9}\ cm^2$

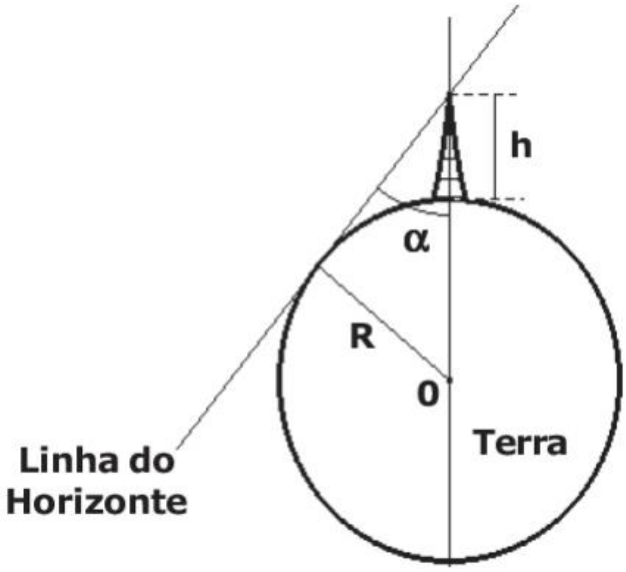
c) $\frac{4^2\pi}{3}\ cm^2$

d) $\frac{4^2\pi}{9}\ cm^2$

e) $4^3\pi\ cm^2$

15. (EsPCEx/2012)

Em uma das primeiras tentativas de determinar a medida do raio da Terra, os matemáticos da antiguidade observavam, do alto de uma torre ou montanha de altura conhecida, o ângulo sob o qual se avistava o horizonte, tangente à Terra, considerada esférica, conforme mostra a figura. Segundo esse raciocínio, o raio terrestre em função do ângulo α é dado por:



a) $R = \frac{sen(\alpha h)}{1 - sen\,\alpha}$

b) $R = \frac{h\,sen\,\alpha}{1 - sen\,\alpha}$

c) $R = \frac{h\,sen\,\alpha}{sen\,\alpha - 1}$

d) $R = \frac{1 - sen\,\alpha}{h\,sen\,\alpha}$

e) $R = \frac{1 + sen\,\alpha}{h\,sen\,\alpha}$

16. (EsPCEx/2012)

Um recipiente em forma de cone circular reto, com raio da base R e altura h, está completamente cheio com água e óleo. Sabe-se que a superfície de contato entre os líquidos está inicialmente na metade da altura do cone. O recipiente dispõe de uma torneira que permite escoar os líquidos de seu interior, conforme indicado na figura.

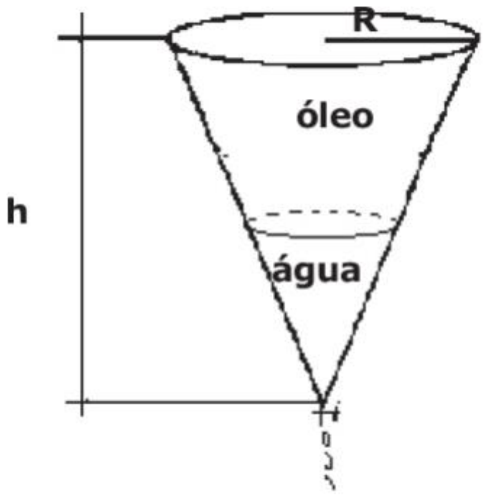


Figura fora de escala

Se essa torneira for aberta, exatamente até o instante em que toda água e nenhum óleo escoar, a altura do nível do óleo, medida a partir do vértice será

a) $\frac{\sqrt[3]{7}}{2}h$

b) $\frac{\sqrt[3]{7}}{3}h$

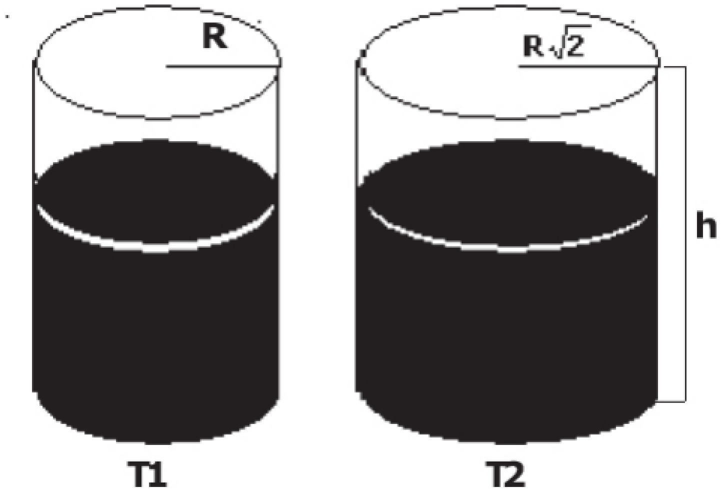
c) $\frac{\sqrt[3]{12}}{2}h$

d) $\frac{\sqrt[3]{23}}{2}h$

e) $\frac{\sqrt[3]{23}}{3}h$

17. (EsPCEx/2011)

A figura abaixo representa dois tanques cilíndricos, $T1$ e $T2$, ambos com altura h, e cujos raios das bases medem R e $R\sqrt{2}$, respectivamente. Esses tanques são usados para armazenar combustível e a quantidade de combustível existente em cada um deles é tal que seu nível corresponde a $\frac{2}{3}$ da altura.



O tanque $T1$ contém gasolina pura e o tanque $T2$ contém uma mistura etanol-gasolina, com 25% de etanol.

Deseja-se transferir gasolina pura do tanque $T1$ para $T2$ até que o teor de etanol na mistura em $T2$ caia para 20%. Nessas condições, ao final da operação, a diferença entre a altura dos níveis de $T1$ e $T2$ será

a) $\frac{1}{2}h$

b) $\frac{1}{3}h$

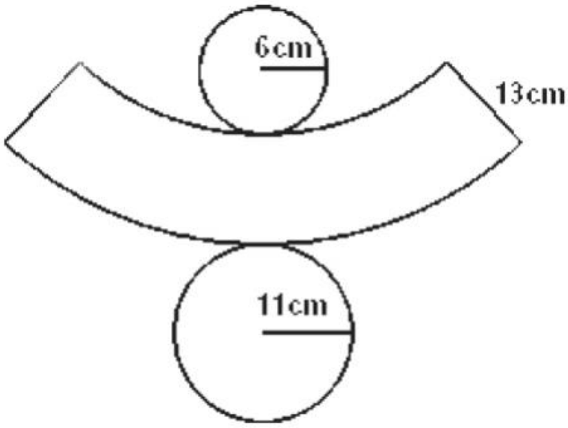
c) $\frac{1}{4}h$

d) $\frac{1}{5}h$

e) $\frac{1}{6}h$

18. (EsPCEx/2010)

A figura abaixo representa a planificação de um tronco de cone reto com a indicação das medidas dos raios das circunferências das bases e da geratriz.



Desenho fora de escala

A medida da altura desse tronco de cone é

a) 13 cm

b) 12 cm

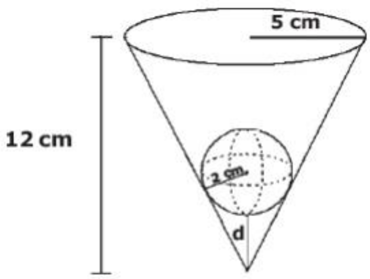
c) 11 cm

d) 10 cm

e) 9 cm

19. (EsPCEx/2008)

Uma esfera de $2\ cm$ de raio é colocada no interior de um vaso cônico, conforme a figura a seguir.



Desenho Fora de Escala

O vaso tem $12\ cm$ de altura e sua abertura é uma circunferência com $5\ cm$ de raio. Nessas condições, a menor distância (d) entre a esfera e o vértice do cone é

a) $3,0\ cm$

b) $3,2\ cm$

c) $3,4\ cm$

d) $3,6\ cm$

e) $3,8\ cm$

20. (EsPCEx/2006)

Um tonel, em forma de cilindro circular reto, tem $60\ cm$ de altura. Uma miniatura desse tonel tem $20\ cm$ de altura e raio diretamente proporcional à altura. Se a miniatura tem $100\ ml$ de volume, então o volume do tonel original é de

a) $30\ l$

b) $27\ l$

c) $2,7\ l$

d) $3\ l$

e) $300\ ml$

21. (EsPCEx/2004)

Se a área lateral e a área total de um cilindro reto são $2\pi A$ e $2\pi S$ respectivamente, então, o volume deste sólido é igual a:

a) $\pi A\sqrt{S-A}$

b) $\pi S\sqrt{S-A}$

c) $\pi A\sqrt{S+A}$

d) $\pi S\sqrt{S+A}$

e) $\pi\sqrt{S+A}$

22. (EsPCEx/2003)

Uma lata cilíndrica está completamente cheia de um líquido que deve ser distribuído totalmente em potes iguais entre si, também cilíndricos. A altura de cada pote é igual a $\frac{2}{5}$ da altura da lata e o diâmetro de sua base é $\frac{1}{3}$ do diâmetro da base da lata. Para tal distribuição, a quantidade mínima de potes a serem utilizados é

a) 22

b) 23

c) 24

d) 25

e) 26

23. (EsPCEx/2002)

Dois recipientes, um em forma de cilindro e o outro, de paralelepípedo, cujas bases estão num mesmo plano, são unidos por uma tubulação com uma válvula no meio. Inicialmente, a válvula está fechada, o paralelepípedo está vazio e o cilindro é ocupado, em parte, por um líquido cujo volume é de 2000π litros, atingindo uma altura de 2 metros. A válvula é aberta e, após certo tempo, verifica-se que os dois recipientes têm o mesmo nível do líquido. Considerando desprezível o volume da tubulação que une os dois reservatórios e sabendo que a área da base do paralelepípedo é de $1,5\pi\ m^2$, o volume final, em litros, de líquido no paralelepípedo é

a) 600π

b) 800π

c) 1000π

d) 1200π

e) 1500π

24. (EsPCEx/2001)

Denomina-se rolamento a um dispositivo mecânico constituído por dois anéis em forma de casca cilíndrica e um conjunto de esferas. Desejando obter o volume de uma das esferas de aço que compõe o rolamento dado na $figura\ 1$, sem desmontá-lo, e não dispondo de todos os instrumentos necessários para executar as medições, um estudante executou os seguintes procedimentos:

a. Com os instrumentos de que dispunha, mediu o anel interno, em forma de casca cilíndrica, obtendo $3,46\ cm$ para o diâmetro interno, $4\ cm$ para o diâmetro externo e $1\ cm$ para altura;

b. Repetiu as operações para o anel externo, anotou as medidas e calculou o volume, obtendo $3,8\ cm^3$;

c. Lembrando o princípio de Arquimedes, que afirma que o volume de um objeto imerso num recipiente com líquido corresponde à variação do volume do líquido, colocou água numa proveta graduada em cm^3, conforme a $figura\ 2$, mergulhou o rolamento na água e obteve a leitura indicada na $figura\ 3$.

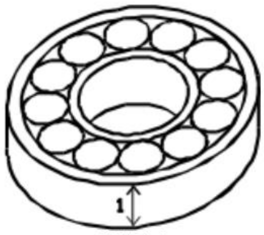


FIGURA 1

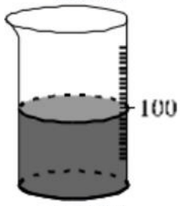


FIGURA 2

FIGURA 3

Nessas condições pode-se afirmar que o valor que mais se aproxima do volume de cada esfera, em cm^3, é (aproximações aceitas: $1,73^2 \approx 3,\ \ 3,46^2 \approx 12,\ \ \pi \approx 3,1$):

a) 3,4

b) 4,6

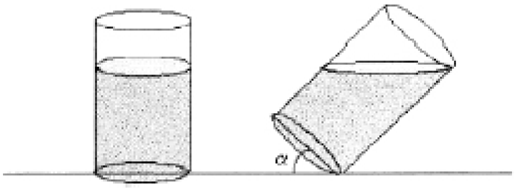
c) 3,8

d) 4,2

e) 5,0

25. (EsPCEx/2000)

Num recipiente em forma de cilindro circular reto, com raio da base $2\ cm$ e altura $6\sqrt{3}\ cm$ (dimensões internas), há um volume de água de $16\sqrt{3}\pi\ cm^3$. O maior ângulo a que o plano da base do cilindro pode fazer com a horizontal para que a água não derrame ao se inclinar o cilindro é de, aproximadamente:



(considere: $tg\ 30° = 0,58$, $tg\ 40° = 0,84$, $tg\ 50° = 1,19$, $tg\ 60° = 1,73$ e $tg\ 70° = 2,75$)

a) $30°$

b) $40°$

c) $50°$

d) $60°$

e) $70°$

GABARITO

1. d
2. a
3. e
4. a
5. a
6. d
7. e
8. e
9. e
10. e
11. c
12. b
13. d
14. a
15. b
16. a
17. a
18. b
19. b
20. c
21. a
22. b
23. d
24. d
25. d

RESOLUÇÃO

1. **(ESA/2017)**

A geratriz de um cone circular reto de altura 8cm é10cm, então a área da base desse cone é:

a) $64\pi\ cm^2$

b) $9\pi\ cm^2$

c) $16\pi\ cm^2$

d) $36\pi\ cm^2$

e) $25\pi\ cm^2$

Comentários

Sabemos que a geratriz de um cone é a hipotenusa dos catetos que correspondem ao raio e à altura do cone circular reto.

Portanto, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$g^2 = r^2 + h^2$$
$$10^2 = r^2 + 8^2$$
$$r^2 = 10^2 - 8^2$$
$$r^2 = 36$$
$$r = 6$$

Como o raio da base é $r = 6$, temos que a área da base é:

$$A_b = \pi r^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$$

Gabarito: "d".

---

2. **(ESA/2016)**

Duas esferas de raios $3cm$ e $\sqrt[3]{51}cm$ fundem-se para formar uma esfera maior. Qual é o raio da nova esfera?

a) $\sqrt[3]{78}$

b) $\sqrt[3]{36}$

c) $\sqrt[3]{68}$

d) $\sqrt[3]{104}$

e) $\sqrt[3]{26}$

Comentários

Temos que na fusão das esferas a única propriedade que se mantem é o volume das mesmas, portanto, temos a relação:

$$V_1 + V_2 = V_{1+2}$$

Sabemos que o volume de uma esfera é:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

Logo:

$$\cancel{\frac{4}{3}\pi} \cdot 3^3 + \cancel{\frac{4}{3}\pi} \cdot \left(\sqrt[3]{51}\right)^3 = \cancel{\frac{4}{3}\pi} \cdot r^3$$
$$3^3 + 51 = r^3$$
$$r^3 = 78$$
$$r = \sqrt[3]{78}$$

Gabarito: "a".

---

3. (ESA/2015)

Em uma pirâmide reta de base quadrada, de $4m$ de altura, uma aresta da base mede 6m. A área total dessa pirâmide, em m^2, é

a) 144

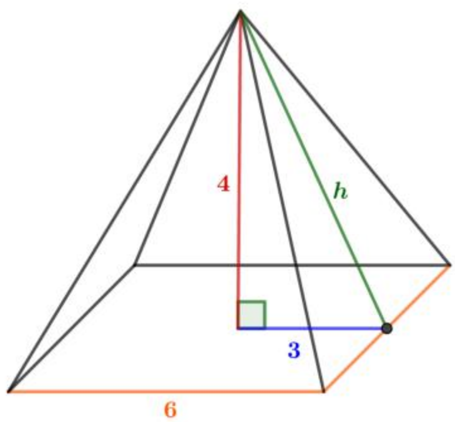
b) 84

c) 48

d) 72

e) 96

Comentários



Sabemos que a base quadrada de aresta de $6\ m$ tem a área de:

$$A_b = 6 \cdot 6 = 36$$

Do triângulo retângulo da figura, temos:

$$h^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow h = 5$$

Assim, as laterais triangulares da pirâmide têm área de:

$$A_l = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Logo, a área total da pirâmide é:

$$A_t = A_b + 4 \cdot A_l$$
$$A_t = 36 + 4 \cdot 15 = 36 + 60$$
$$A_t = 96$$

Gabarito: "e".

---

4. **(ESA/2014)**

Dobrando o raio da base de um cone e reduzindo sua altura à metade, seu volume:

a) $\boldsymbol{dobra}$

b) $\boldsymbol{Quadriplica}$

c) $\boldsymbol{não\ se\ altera}$

d) $\boldsymbol{reduz - se\ à\ metade\ do\ volume\ original.}$

e) $\boldsymbol{reduz - se\ a\ um\ quarto\ do\ volume\ original.}$

Comentários

Sabemos que o volume de um cone é obtido pela seguinte equação:

$$V_c = \frac{\pi \cdot r_b^2 \cdot h}{3}$$

Portanto, temos que se dobramos o raio da base $r_b' = 2r_b$ e reduzimos a altura pela metade $h' = \frac{h}{2}$, obtemos:

$$V_c' = \frac{\pi \cdot {r_b'}^2 \cdot h'}{3}$$
$$V_c' = \frac{\pi \cdot (2r_b)^2 \cdot \left(\frac{h}{2}\right)}{3}$$
$$V_c' = \frac{2\,\pi \cdot r_b^2 \cdot h}{3}$$
$$V_c' = 2\,V_c$$

Logo, o volume duplica.

Gabarito: "a".

---

5. **(ESA/2012)**

Duas esferas de aço de raio 4cm e $\sqrt[3]{61}\ cm$ fundem-se para formar uma esfera maior. Considerando que não houve perda de material das esferas durante o processo de fundição, a medida do raio da nova esfera é de:

a) $5\ cm$

b) $5,5\ cm$

c) $4,5\ cm$

d) $6\ cm$

e) $7\ cm$

Comentários

Temos que na fusão das esferas a única propriedade que se mantém é o volume das mesmas, portanto, temos a relação:

$$V_1 + V_2 = V_{1+2}$$

Sabemos que o volume de uma esfera é:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

Logo:

$$\cancel{\frac{4}{3}\pi} \cdot 4^3 + \cancel{\frac{4}{3}\pi} \cdot \left(\sqrt[3]{61}\right)^3 = \cancel{\frac{4}{3}\pi} \cdot r^3$$
$$4^3 + 61 = r^3$$
$$r^3 = 125$$
$$r = \sqrt[3]{125}$$
$$r = 5$$

Gabarito: "a".

---

6. **(ESA/2012)**

Dobrando-se a altura de um cilindro circular reto e triplicando o raio de sua base, pode-se afirmar que seu volume fica multiplicado por:

a) 6

b) 9

c) 12

d) 18

e)36

Comentários

Sabemos que o volume de um cilindro é obtido pela seguinte equação:

$$V_c = \pi \cdot r_b^2 \cdot h$$

Portanto, temos que se triplicamos o raio da base $r_b' = 3r_b$ e dobramos a altura $h' = 2h$, obtemos então:

$$V_c' = \pi \cdot {r_b'}^2 \cdot h'$$
$$V_c' = \pi \cdot (3r_b)^2 \cdot (2h)$$
$$V_c' = 18\,\pi \cdot r_b^2 \cdot h$$

$$V_c' = 18\,V_c$$

Logo, o volume duplica.

Gabarito: "d".

---

7. **(ESA/2011)**

Um tanque subterrâneo tem a forma de um cone invertido. Esse tanque está completamente cheio com$8dm^3$ de água e $56dm^3$ de petróleo. Petróleo e água não se misturam, ficando o petróleo na parte superior do tanque e a água na parte inferior. Sabendo que o tanque tem12m de profundidade, a altura da camada de petróleo é:

a) $10m$

b) $9m$

c) $8m$

d) $7m$

e) $6m$

Comentários

Como o cone é invertido e a água fica na parte inferior e também por estar trabalhando com quantidades volumétricas, temos a seguinte proporção, sendo x altura de água:

$$\frac{8}{8+56} = \left(\frac{x}{12}\right)^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{64}} = \frac{x}{12}$$

$$x = \frac{12}{\sqrt[3]{8}}$$

$$x = 6$$

Logo, a altura da coluna de petróleo é $12 - 6 = 6$.

Gabarito: "e".

---

8. **(ESA/2010)**

Um cone reto, de altura H e área da base B, é seccionado por um plano paralelo à base. Consequentemente, um novo cone com altura$\frac{H}{3}$ é formado. Qual a razão entre os volumes do maior e o do menor cone, o de altura H e o de altura$\frac{H}{3}$?

a) 3

b) 6

c) 9

d) 18

e) 27

Comentários

Sejam V_t e V_1 os volumes dos cones de altura H e $H/3$, respectivamente.

$$\frac{V_t}{V_1} = \left(\frac{H}{\frac{H}{3}}\right)^3$$

$$V_1 = V_t \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$V_1 = \frac{V_t}{27}$$

Gabarito: “e”.

---

9. (EsPCEx/2017)

A angioplastia é um procedimento médico caracterizado pela inserção de um cateter em uma veia ou artéria com o enchimento de um pequeno balão esférico localizado na ponta desse cateter. Considerando que, num procedimento de angioplastia, o raio inicial do balão seja desprezível e aumente a uma taxa constante de $0,5mm/s$ até que o volume seja igual a $500\ mm^3$, então o tempo, em segundos, que o balão leva para atingir esse volume é

a) 10

b) $10\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$

c) $10\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$

d) $10\sqrt[3]{\pi}$

e) $10\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$

Comentários

A função que representa a variação do raio em função do tempo é dada por:

$$r(t) = 0{,}5 \cdot t$$

A função que representa o volume em função do raio é dada por:

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad V(t) = \frac{4}{3}\pi(0{,}5t)^3 = \frac{1}{6}\pi t^3$$

Queremos t tal que $V(t) = 500$. Então

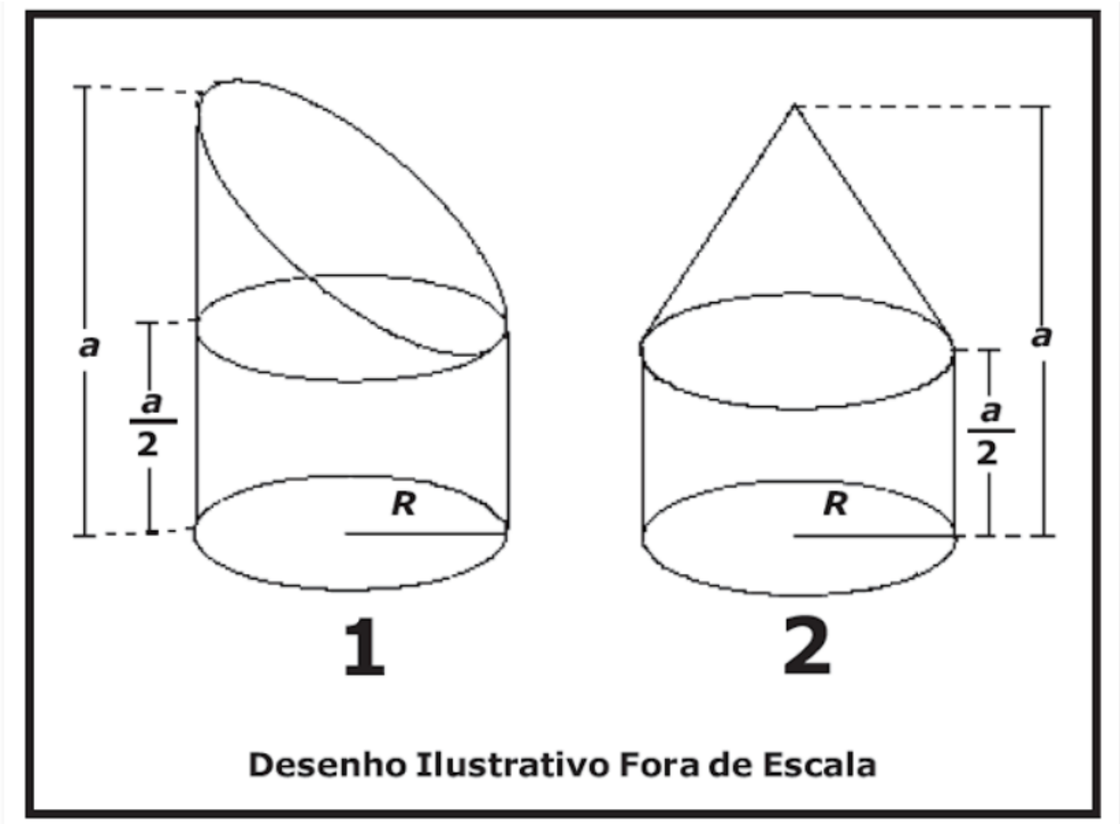
$$500 = \frac{1}{6}\pi t^3 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 500}{\pi}} = 10\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$$

$$t = 10\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}\ s$$

Gabarito: "e".

10. (EsPCEx/2017)

O valor da altura de um cilindro reto de raio R, cujo volume é a soma dos volumes dos sólidos 1 e 2 é



a) $\frac{13}{12}a$

b) $\frac{7}{6}a$

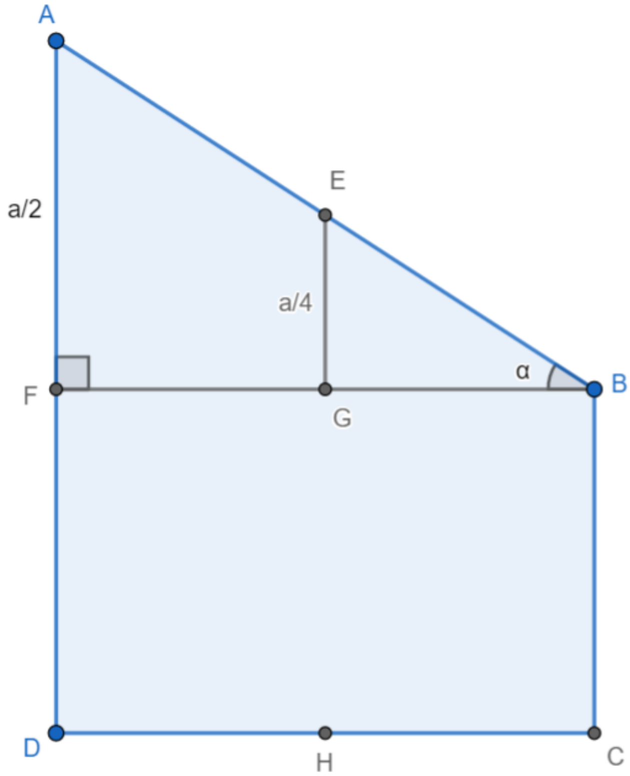
c) $\frac{5}{4}a$

d) $\frac{4}{3}a$

e) $\frac{17}{12}a$

Comentários

Fazendo a seção meridiana do sólido 1, obtemos:



Sendo o ponto E o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, percebemos que a semelhança dos triângulos ABC e EBG permite-nos concluir que $\overline{EG}$ mede $\frac{a}{4}$. Sendo assim a altura do ponto E em relação ao segmento $\overline{CD}$ é dada por:

$$\frac{a}{2}+\frac{a}{4}=\frac{3a}{4}$$

O volume do cilindro é definido com a altura sendo a distância entre o centro de suas bases. Então o comprimento do segmento $\overline{EH}$ representa a altura do cilindro, sendo $\overline{EH}=\frac{3a}{4}$.

$$V_1=B\cdot h=\pi R^2\cdot\frac{3a}{4}=\frac{3aR^2\pi}{4}$$

O solido 2 pode ser dividido em um cilindro de raio R e altura $\frac{a}{2}$ e um cone de raio R e altura $\frac{a}{2}$. Sendo assim:

$$V_2=\pi R^2\cdot\frac{a}{2}+\frac{1}{3}\cdot\pi R^2\cdot\frac{a}{2}=\frac{2aR^2\pi}{3}$$

Então, sendo $V_1+V_2=V_3=\pi R^2 h$, temos que:

$$V_1+V_2=\frac{3aR^2\pi}{4}+\frac{2aR^2\pi}{3}=\frac{17aR^2\pi}{12}=\pi R^2 h$$

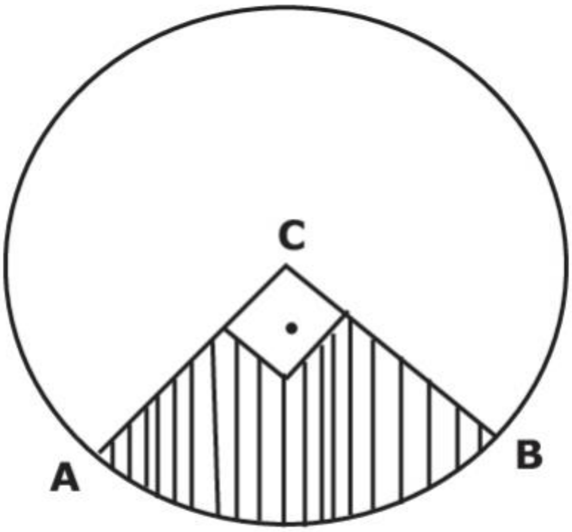
$$\Rightarrow\quad h=\frac{17a}{12}$$

Gabarito: “e”.

---

11. (EsPCEx/2016)

Corta-se de uma circunferência de raio 4 cm, um setor circular de ângulo $\frac{\pi}{2}\,rad$ (ver desenho ilustrativo), onde o ponto C é o centro da circunferência. Um cone circular reto é construído a partir desse setor circular ao se juntar os raios $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$. O volume desse cone, em cm^3, é igual a:



desenho ilustrativo-fora de escala

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

b) $\frac{\sqrt{3}}{5}\pi$

c) $\frac{\sqrt{15}}{3}\pi$

d) $\frac{\sqrt{15}}{5}\pi$

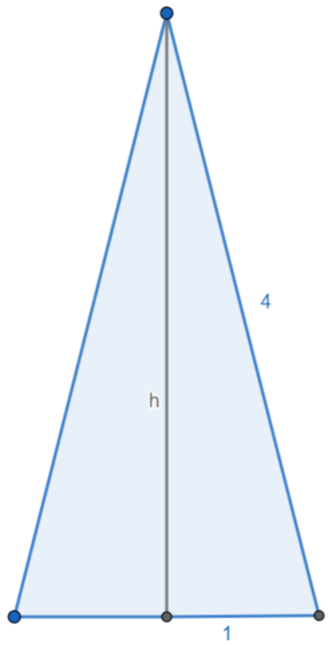
e) $\frac{\sqrt{5}}{5}\pi$

Comentários

No cone formado, o raio da circunferência se tornará a geratriz do novo cone e o arco definido por AB será o perímetro da base. Logo:

$$\frac{\pi}{2}R = 2\pi r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

O raio do cone mede $1\ cm$ e a geratriz do cone mede $4\ cm$, conforme a figura ilustra:



Aplicando Pitágoras, descobrimos que $h = \sqrt{4^2 - (1)^2} = \sqrt{15}$

Portanto o volume do novo cone é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi(1)^2 \cdot \left(\sqrt{15}\right) = \frac{\sqrt{15}}{3}\pi$$

Gabarito: "c".

---

12. (EsPCEx/2015)

Um recipiente cilíndrico, cujo raio da base tem medida R, contém água até uma certa altura. Uma esfera de aço é mergulhada nesse recipiente ficando totalmente submersa, sem haver transbordamento de água. Se a altura da água subiu $\frac{9}{16}R$, então o raio da esfera mede

a) $\frac{2}{3}R$

b) $\frac{3}{4}R$

c) $\frac{4}{9}R$

d) $\frac{1}{3}R$

e) $\frac{9}{16}R$

Comentários

O volume da esfera é responsável pelo ΔV causado no nível da água do cilindro

Volume inicial: $V_i = \pi R^2 h_i$

Volume final: $V_f = \pi R^2 h_f$

Variação do volume: $\Delta V = V_f - V_i = \pi R^2\left(h_f - h_i\right) = \pi R^2 \cdot \Delta h = \pi R^2 \cdot \left(\frac{9}{16}R\right)$

Mas, o volume da esfera é igual ao volume do ΔV, então:

$$V_e = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{9}{16}\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{27}{64}R^3} = \frac{3}{4}R$$

$$r = \frac{3}{4}R$$

Gabarito: "b".

---

13. (EsPCEx/2014)

Um cone de revolução tem altura $4\ cm$ e está circunscrito a uma esfera de raio $1\ cm$. O volume desse cone (em cm^3) é igual a

a) $\frac{1}{3}\pi$

b) $\frac{2}{3}\pi$

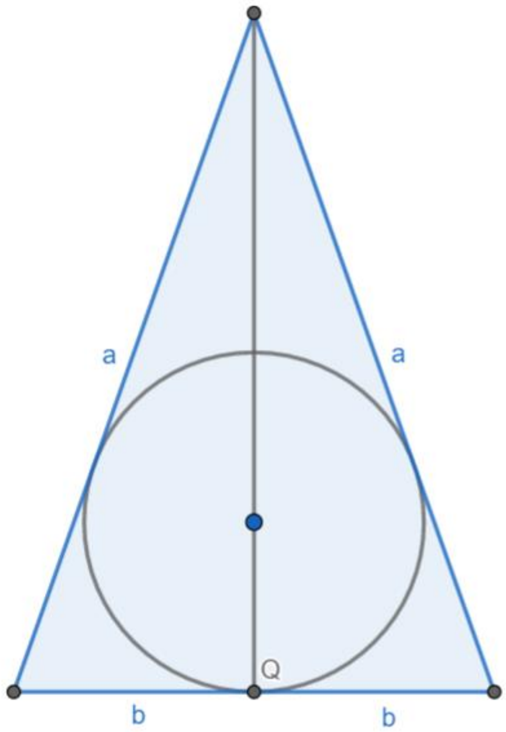
c) $\frac{4}{3}\pi$

d) $\frac{8}{3}\pi$

e) 3π

Comentários

Efetuando a secção meridiana do cone, obtemos:



Do enunciado sabemos que a altura do cone mede $4\ cm$, então: $4 = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$a^2 - b^2 = 16 \qquad (eq. 1)$$

Mas também possuímos a medida do raio da circunferência inscrita, que pode ser obtido a partir da área S e do semi-perímetro p do triângulo.

$$r = \frac{S}{p}$$

Sendo $S = \frac{1}{2} \cdot B \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (2b) \cdot (4) = 4b$, e $p = \frac{1}{2} \cdot (a + a + b + b) = a + b$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{4b}{a+b} = 1 \quad \Rightarrow \quad a + b = 4b \quad \Rightarrow \quad a = 3b$$

Substituindo em $eq. 1$

$$(3b)^2 - b^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad 8b^2 = 16 \Rightarrow \quad b^2 = 2$$

O volume do cone pode então ser calculado, segundo:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi b^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi(2) \cdot (4) = \frac{8}{3}\pi$$

Gabarito: “d”.

---

14. (EsPCEx/2013)

Considere que uma laranja tem a forma de uma esfera de raio $4\ cm$, composta de 12 gomos exatamente iguais. A superfície total de cada gomo mede

a) $\frac{4^3\pi}{3}\ cm^2$

b) $\frac{4^3\pi}{9}\ cm^2$

c) $\frac{4^2\pi}{3}\ cm^2$

d) $\frac{4^2\pi}{9}\ cm^2$

e) $4^3\pi\ cm^2$

Comentários

A superfície lateral de cada gomo será composta de 3 regiões. Duas regiões laterais - simétricas entre si - terão cada uma delas área correspondente a uma semicircunferência de raio $4\ cm$. A terceira região corresponderá a $\frac{1}{12}$ da área superficial de uma esfera de raio $4\ cm$.

Sendo assim:

$$S_t = 2 \cdot S_1 + \frac{1}{12} \cdot S_2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \pi r^2\right) + \frac{1}{12} \cdot (4\pi r^2) = \frac{4}{3}\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi(4)^2 = \frac{64}{3}\pi$$

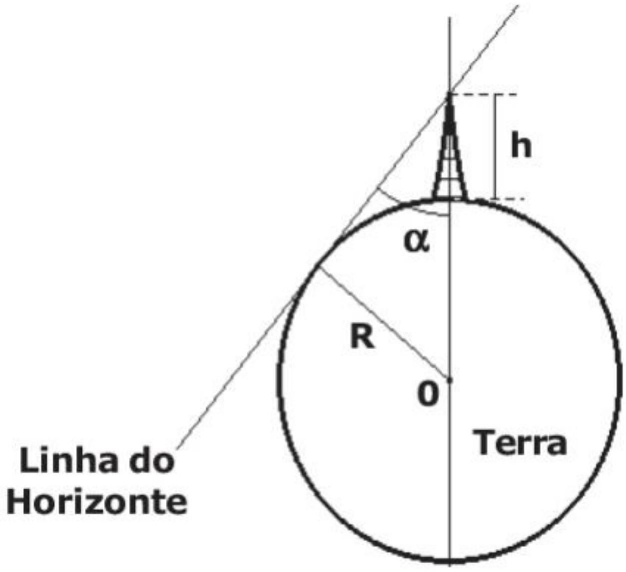
$$S_t = \frac{4^3}{3}\pi\ cm^2$$

Gabarito: “a”.

---

15. (EsPCEx/2012)

Em uma das primeiras tentativas de determinar a medida do raio da Terra, os matemáticos da antiguidade observavam, do alto de uma torre ou montanha de altura conhecida, o ângulo sob o qual se avistava o horizonte, tangente à Terra, considerada esférica, conforme mostra a figura. Segundo esse raciocínio, o raio terrestre em função do ângulo α é dado por:



a) $R = \frac{sen(\alpha h)}{1 - sen\,\alpha}$

b) $R = \frac{h\,sen\,\alpha}{1 - sen\,\alpha}$

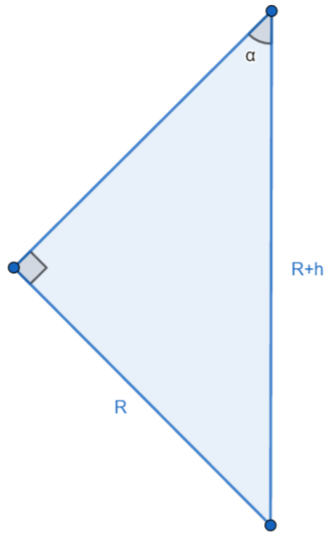
c) $R = \frac{h\,sen\,\alpha}{sen\,\alpha - 1}$

d) $R = \frac{1 - sen\,\alpha}{h\,sen\,\alpha}$

e) $R = \frac{1 + sen\,\alpha}{h\,sen\,\alpha}$

Comentários

Primeiramente, o ângulo de uma reta tangente à circunferência mede $90°$, sendo assim temos o seguinte triângulo:



Aplicando a definição de seno no ângulo α, obtemos:

$$sen\,\alpha = \frac{R}{R+h} \Rightarrow sen\,\alpha \cdot (R+h) = R \Rightarrow h \cdot sen\,\alpha = R - R \cdot sen\,\alpha = R \cdot (1 - sen\,\alpha)$$

$$\Rightarrow R = \frac{h \cdot sen\,\alpha}{1 - sen\,\alpha}$$

Gabarito: "b".

---

16. (EsPCEx/2012)

Um recipiente em forma de cone circular reto, com raio da base R e altura h, está completamente cheio com água e óleo. Sabe-se que a superfície de contato entre os líquidos está inicialmente na metade da altura do cone. O recipiente dispõe de uma torneira que permite escoar os líquidos de seu interior, conforme indicado na figura.

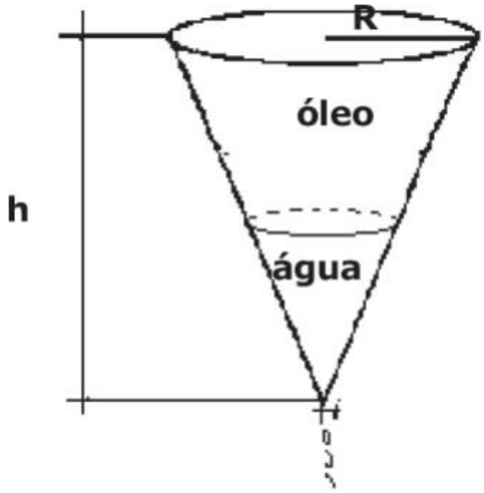


Figura fora de escala

Se essa torneira for aberta, exatamente até o instante em que toda água e nenhum óleo escoar, a altura do nível do óleo, medida a partir do vértice será

a) $\frac{\sqrt[3]{7}}{2}h$

b) $\frac{\sqrt[3]{7}}{3}h$

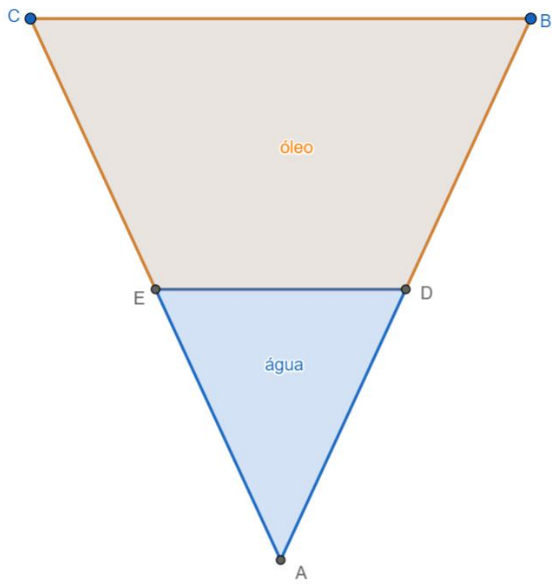
c) $\frac{\sqrt[3]{12}}{2}h$

d) $\frac{\sqrt[3]{23}}{2}h$

e) $\frac{\sqrt[3]{23}}{3}h$

Comentários

Fazendo a seção meridiana do cone, obtemos:



Segundo a semelhança entre os triângulos ABC e ADE obtemos que a razão das medidas é de $2:1$. Sendo assim, a razão dos volumes será de $2^3:1^3$, sendo de $8:1$. Logo:

$$\frac{V_{água+óleo}}{V_{água}} = \frac{8}{1} \Rightarrow V_{água+óleo} = 8 \cdot V_{água} = V_{óleo} + V_{água} \Rightarrow V_{óleo} = 7 \cdot V_{água}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{óleo}}{V_{água}} = \frac{7}{1}$$

Após a evasão da água haverá uma nova semelhança de triângulos somente com o óleo no cone. Comparando a seção meridiana do cone preenchido somente com óleo e o cone de água da situação inicial, podemos obter uma nova semelhança de triângulos em que a razão entre as medidas é dada por: $\sqrt[3]{7}:\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{7}:1$

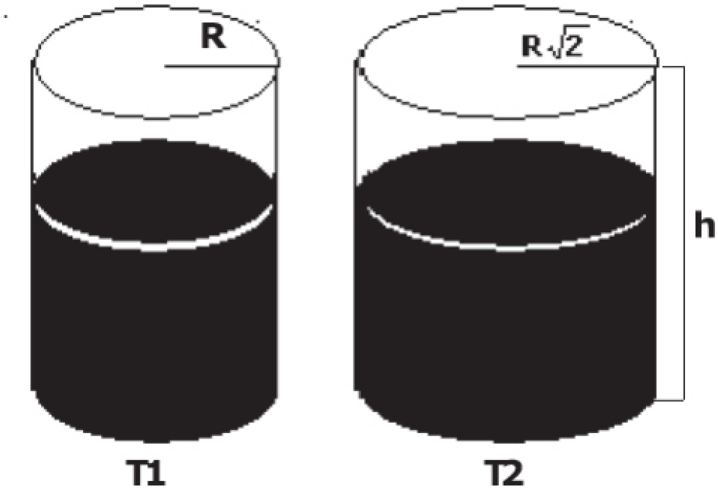
Portanto a altura é calculada:

$$\frac{h_{óleo}}{h_{água}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{1} = \frac{h_{óleo}}{\left(\frac{h}{2}\right)} = \sqrt[3]{7} \Rightarrow h_{óleo} = \frac{\sqrt[3]{7}}{2} \cdot h$$

Gabarito: “a”.

17. (EsPCEx/2011)

A figura abaixo representa dois tanques cilíndricos, $T1$ e $T2$, ambos com altura h, e cujos raios das bases medem R e $R\sqrt{2}$, respectivamente. Esses tanques são usados para armazenar combustível e a quantidade de combustível existente em cada um deles é tal que seu nível corresponde a $\frac{2}{3}$ da altura.



O tanque $T1$ contém gasolina pura e o tanque $T2$ contém uma mistura etanol-gasolina, com 25% de etanol.

Deseja-se transferir gasolina pura do tanque $T1$ para $T2$ até que o teor de etanol na mistura em $T2$ caia para 20%. Nessas condições, ao final da operação, a diferença entre a altura dos níveis de $T1$ e $T2$ será

a) $\frac{1}{2}h$

b) $\frac{1}{3}h$

c) $\frac{1}{4}h$

d) $\frac{1}{5}h$

e) $\frac{1}{6}h$

Comentários

Iremos trabalhar com os volumes dos tanques:

$$V_1 = \pi R^2 \cdot \frac{2}{3}h \quad e \quad V_2 = \pi\left(R\sqrt{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}h = 2V_1$$

Volume de gasolina V_g e volume de álcool V_a em T_2:

$$V_a + V_g = V_2 \; ; \; \frac{V_a}{V_2} = 0{,}25 \;\; \Rightarrow V_a = \frac{V_2}{4} \quad \therefore \quad V_g = \frac{3}{4}V_2$$

Queremos transferir V_t de gasolina para T_2 a fim de que haja 20% de etanol, logo:

$$\frac{V_a}{V_2+V_t}=0{,}20 \quad \Rightarrow \quad V_a=\frac{V_2}{4}=\frac{V_2+V_t}{5} \quad \therefore \quad V_t=\frac{1}{4}V_2=\frac{1}{2}V_1$$

Logo, o novo volume de T_1 será

$$V_1-V_t=V_1-\frac{1}{2}V_1=\frac{1}{2}V_1=\frac{1}{2}\left(\pi R^2\cdot\frac{2}{3}h\right)=\pi R^2\cdot\frac{1}{3}h$$

Logo T_1 terá altura final medindo $\frac{1}{3}h$

E T_2 terá novo volume

$$V_2+V_t=V_2+\frac{1}{4}V_1=\frac{5}{4}V_2=\frac{5}{4}\left(\pi\left(R\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{2}{3}h\right)=\pi\left(R\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{5}{6}h$$

Logo T_2 terá altura final medindo $\frac{5}{6}h$

Portanto:

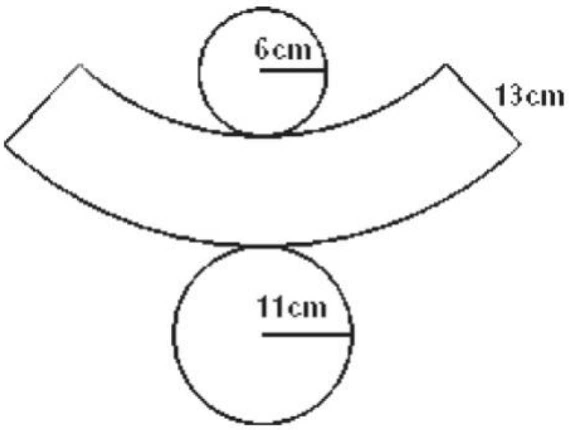
$$\Delta h=\frac{5}{6}h-\frac{1}{3}h=\frac{3}{6}h=\frac{1}{2}h$$

Gabarito: "a".

---

18. (EsPCEx/2010)

A figura abaixo representa a planificação de um tronco de cone reto com a indicação das medidas dos raios das circunferências das bases e da geratriz.



Desenho fora de escala

A medida da altura desse tronco de cone é

a) 13 cm

b) 12 cm

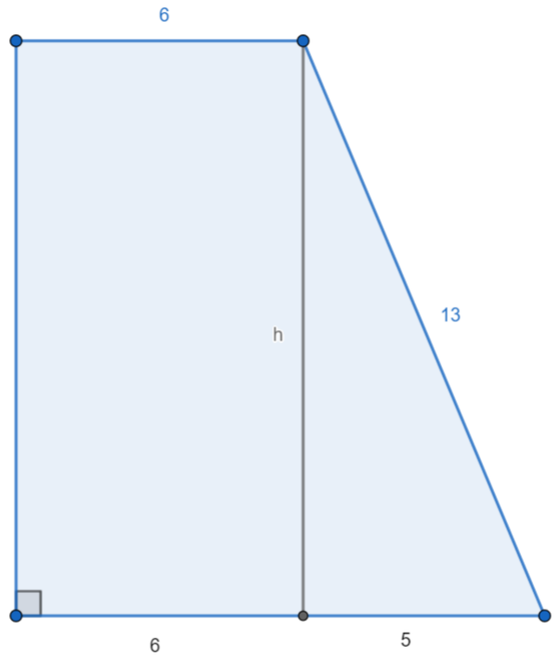
c) 11 cm

d) 10 cm

e) 9 cm

Comentários

Após montar o tronco de cone e fazer a seção meridiana do mesmo obtemos o seguinte:



Aplicando Pitágoras no triângulo retângulo formado, obtemos:

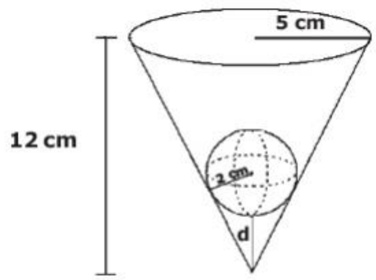
$$h = \sqrt{(13)^2 - (5)^2} = 12\ cm$$

Gabarito: "b".

---

19. (EsPCEx/2008)

Uma esfera de $2\ cm$ de raio é colocada no interior de um vaso cônico, conforme a figura a seguir.



Desenho Fora de Escala

O vaso tem $12\ cm$ de altura e sua abertura é uma circunferência com $5\ cm$ de raio. Nessas condições, a menor distância (d) entre a esfera e o vértice do cone é

a) $3,0\ cm$

b) $3,2\ cm$

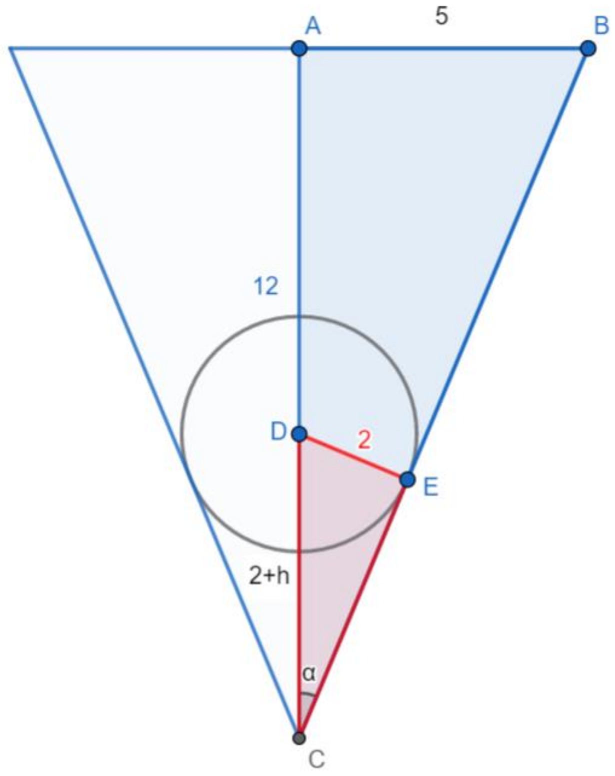
c) $3,4\ cm$

d) $3,6\ cm$

e) $3,8\ cm$

Comentários

Fazendo a seção meridiana e observando as relações trigonométricas, obtemos:



Perceba que aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC obtemos que $\overline{BC} = 13\ cm$.

Utilizando a semelhança entre os triângulos retângulo ABC e CDE

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DC}}$$

$$\frac{5}{13} = \frac{2}{2+h}$$

$$\Rightarrow \quad 10 + 5h = 26$$

$$\Rightarrow \quad h = 3{,}2\ cm$$

Gabarito: “b”.

---

20. (EsPCEx/2006)

Um tonel, em forma de cilindro circular reto, tem $60\ cm$ de altura. Uma miniatura desse tonel tem $20\ cm$ de altura e raio diretamente proporcional à altura. Se a miniatura tem $100\ ml$ de volume, então o volume do tonel original é de

a) $30\ l$

b) $27\ l$

c) $2,7\ l$

d) $3\ l$

e) $300\ ml$

Comentários

Aplicando as devidas proporções nas medidas dos cilindros:

$$\frac{r}{h} = \frac{R}{H} \Rightarrow \frac{r}{20} = \frac{R}{60} \Rightarrow \frac{R}{r} = 3$$

Segundo o enunciado, os cilindros possuem proporção linear nas medidas, sendo assim, haverá uma proporção cúbica nos volumes. Tal que:

$$\frac{V}{v} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 = 3^3 = 27 \Rightarrow V = 27 \cdot v$$

$$V = 27 \cdot 100 = 2700\ ml = 2{,}7\ l$$

Gabarito: "c".

---

21. (EsPCEx/2004)

Se a área lateral e a área total de um cilindro reto são $2\pi A$ e $2\pi S$ respectivamente, então, o volume deste sólido é igual a:

a) $\pi A\sqrt{S - A}$

b) $\pi S\sqrt{S - A}$

c) $\pi A\sqrt{S + A}$

d) $\pi S\sqrt{S + A}$

e) $\pi\sqrt{S + A}$

Comentários

A área lateral de um cilindro reto é dada por:

$$A_l = 2\pi Rh = 2\pi A \quad \therefore \quad A = hR \quad \boldsymbol{eq.1}$$

A área total de um cilindro reto é dada por:

$$A_t = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(R + h) = 2\pi S \quad \therefore \quad S = R^2 + hR \quad \boldsymbol{eq.2}$$

De $\boldsymbol{eq.1}$ em $\boldsymbol{eq.2}$, obtemos:

$$S = R^2 + A \Rightarrow R^2 = S - A \quad \boldsymbol{eq.3}$$

De $\boldsymbol{eq.3}$ em $\boldsymbol{eq.2}$, obtemos:

$$A = h \cdot \sqrt{S - A} \Rightarrow h = \frac{A}{\sqrt{S - A}}$$

Portando o volume do cilindro é dado por:

$$V = \pi R^2 h = \pi(S - A)\left(\frac{A}{\sqrt{S - A}}\right) = \pi A\sqrt{S - A}$$

Gabarito: "a".

---

22. (EsPCEx/2003)

Uma lata cilíndrica está completamente cheia de um líquido que deve ser distribuído totalmente em potes iguais entre si, também cilíndricos. A altura de cada pote é igual a $\frac{2}{5}$ da altura da lata e o diâmetro de sua base é $\frac{1}{3}$ do diâmetro da base da lata. Para tal distribuição, a quantidade mínima de potes a serem utilizados é

a) 22

b) 23

c) 24

d) 25

e) 26

Comentários

Seja n a quantidade de cilindros, V o volume da lata e V_c o volume dos cilindros

$$V = n \cdot V_c$$

$$V = \frac{\pi D^2}{4} \cdot H = n \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot h = n \cdot \frac{\pi\left(\frac{1}{3}D\right)^2}{4} \cdot \left(\frac{2}{5}h\right) = \frac{2}{45}n \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot H = \frac{2}{45}n \cdot V$$

$$V = \frac{2}{45}n \cdot V \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{45}n = 1 \quad \therefore n = 22{,}5$$

Mas n deve ser um número natural, logo, a menor quantidade de potes que comporta o líquido deve ser 23 potes.

Gabarito: "b".

---

23. (EsPCEx/2002)

Dois recipientes, um em forma de cilindro e o outro, de paralelepípedo, cujas bases estão num mesmo plano, são unidos por uma tubulação com uma válvula no meio. Inicialmente, a válvula está fechada, o paralelepípedo está vazio e o cilindro é ocupado, em parte, por um líquido cujo volume é de 2000π litros, atingindo uma altura de 2 metros. A válvula é aberta e, após certo tempo, verifica-se que os dois recipientes têm o mesmo nível do líquido. Considerando desprezível o volume da tubulação que une os dois reservatórios e sabendo que a área da base do paralelepípedo é de $1,5\pi\ m^2$, o volume final, em litros, de líquido no paralelepípedo é

a) 600π

b) 800π

c) 1000π

d) 1200π

e) 1500π

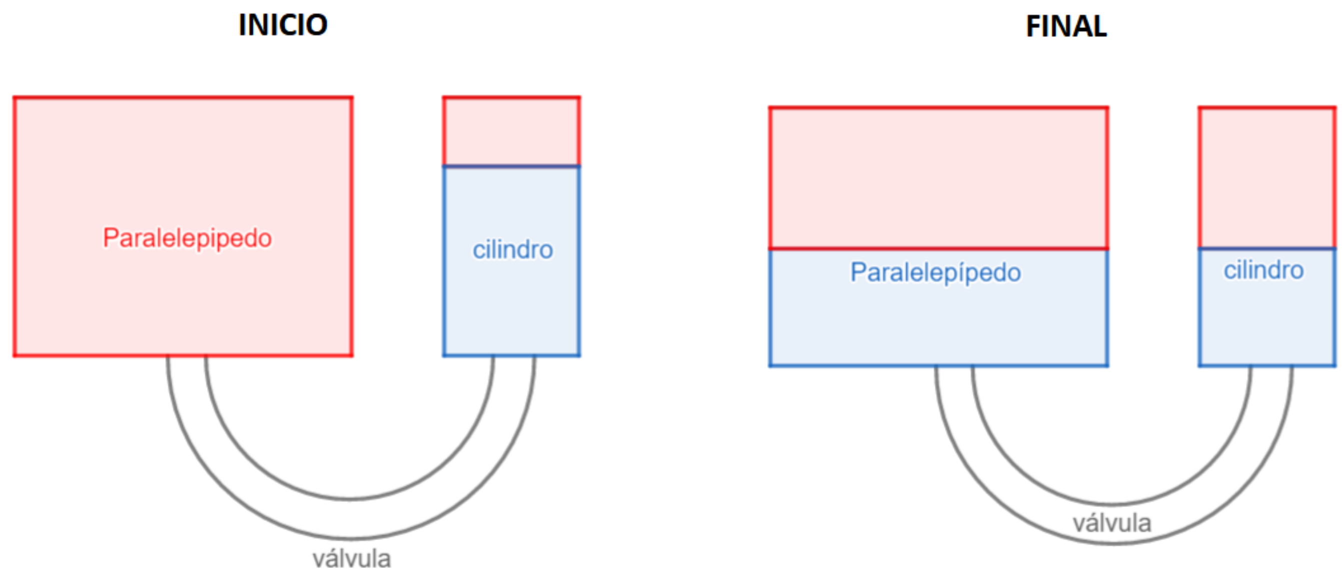
Comentários

Primeiramente vamos uniformizar as unidades transformando os volumes em litros para m^3.

$$V_{cil}^{ini} = 2000\pi\ l = 2\pi\ m^3$$

Sabemos que $V_{cil} = \pi R^2 h = \pi R^2 \cdot 2 = 2\pi \quad \Rightarrow \quad R = 1\ m$ sendo R o raio do cilindro.

Considere as figuras abaixo para representar as situações do problema:



A altura final do líquido é igual em ambos os recipientes, sendo assim:

$$V_{cil}^{ini} = V_{cil}^{fim} + V_{paral}^{fim} \quad \Rightarrow \quad 2\pi = \pi R^2 \cdot h + A_{base} \cdot h =$$

$$= h \cdot (\pi(1)^2 + 1{,}5\pi) = 2{,}5\pi \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2}{2{,}5} = \frac{4}{5} = 0{,}8\ m$$

A altura final do líquido é de $h = 0{,}8\ m$, sendo assim:

$$V_{paral}^{fim} = A_{base} \cdot h = 1{,}5\pi \cdot 0{,}8 = 1{,}2\pi\ m^3 = 1200\pi\ litros$$

Gabarito: "d".

---

24. (EsPCEx/2001)

Denomina-se rolamento a um dispositivo mecânico constituído por dois anéis em forma de casca cilíndrica e um conjunto de esferas. Desejando obter o volume de uma das esferas de aço que compõe o rolamento dado na $figura\ 1$, sem desmontá-lo, e não dispondo de todos os

instrumentos necessários para executar as medições, um estudante executou os seguintes procedimentos:

a. Com os instrumentos de que dispunha, mediu o anel interno, em forma de casca cilíndrica, obtendo $3,46\ cm$ para o diâmetro interno, $4\ cm$ para o diâmetro externo e $1\ cm$ para altura;

b. Repetiu as operações para o anel externo, anotou as medidas e calculou o volume, obtendo $3,8\ cm^3$;

c. Lembrando o princípio de Arquimedes, que afirma que o volume de um objeto imerso num recipiente com líquido corresponde à variação do volume do líquido, colocou água numa proveta graduada em cm^3, conforme a $figura\ 2$, mergulhou o rolamento na água e obteve a leitura indicada na $figura\ 3$.

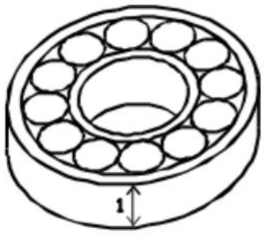


FIGURA 1

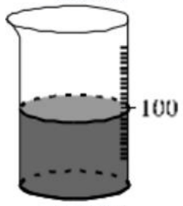


FIGURA 2

FIGURA 3

Nessas condições pode-se afirmar que o valor que mais se aproxima do volume de cada esfera, em cm^3, é (aproximações aceitas: $1,73^2 \approx 3,\quad 3,46^2 \approx 12,\quad \pi \approx 3,1$):

a) 3,4

b) 4,6

c) 3,8

d) 4,2

e) 5,0

Comentários

Primeiramente calcularemos o volume da casca cilíndrica menor como a diferença entre dois cilindros

$$V_{c.menor} = \frac{\pi D^2}{4}h - \frac{\pi d^2}{4}h = \frac{\pi h}{4}(R^2 - r^2) = \frac{3,1 \cdot 1}{4} \cdot ((4)^2 - (3,46)^2) = 3,1\ cm^3$$

O volume que o nível do líquido variou corresponde ao volume do rolamento, sendo assim:

$$\Delta V = 157,3 - 100 = 57,3\ cm^3$$

Agora, o volume do rolamento é a soma dos volumes das cascas cilíndricas e os volumes das 12 esferas

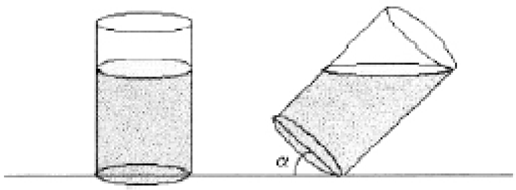
$$57,3 = 12V_{esf} + 3,8 + 3,1 \quad \Rightarrow \quad 12V_{esf} = 50,4 \quad \therefore \quad V_{esf} = 4,2\ cm^3$$

Gabarito: "d".

---

25. (EsPCEx/2000)

Num recipiente em forma de cilindro circular reto, com raio da base $2\ cm$ e altura $6\sqrt{3}\ cm$ (dimensões internas), há um volume de água de $16\sqrt{3}\pi\ cm^3$. O maior ângulo a que o plano da base do cilindro pode fazer com a horizontal para que a água não derrame ao se inclinar o cilindro é de, aproximadamente:



(considere: $tg\ 30° = 0,58$, $tg\ 40° = 0,84$, $tg\ 50° = 1,19$, $tg\ 60° = 1,73$ e $tg\ 70° = 2,75$)

a) $30°$

b) $40°$

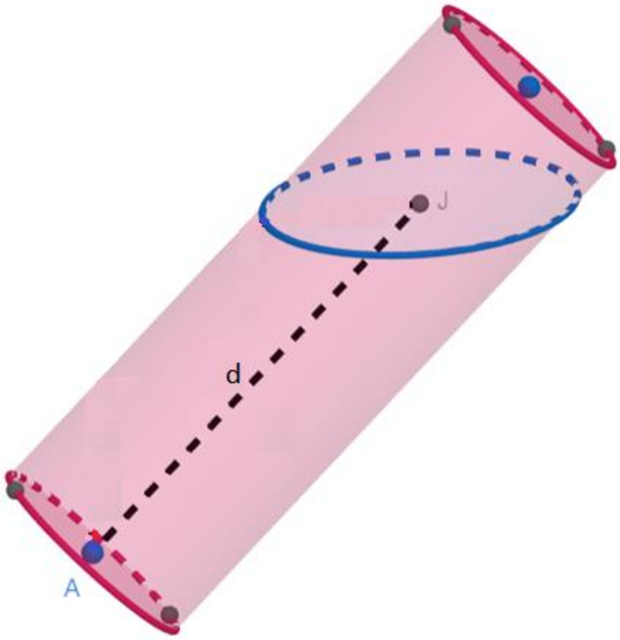
c) $50°$

d) $60°$

e) $70°$

Comentários

O volume do tronco de cilindro é baseado no raio do cilindro e no valor de altura média - que é a distância entre os centros das faces de suas bases - logo, com esta generalização, podemos obter facilmente o volume do líquido na situação inclinada, conforme:



$$V_{liq} = \pi R^2 \cdot d$$

Posto isso, façamos a seção meridiana do segundo cilindro já supondo a situação limite de derramamento.

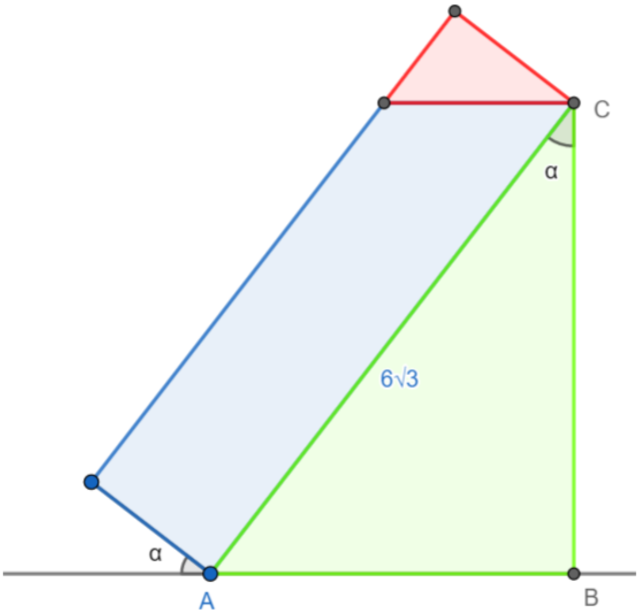


FIGURA 1

Na figura 1 depreende-se que $\overline{BC} = 6\sqrt{3} \cdot cos\alpha$

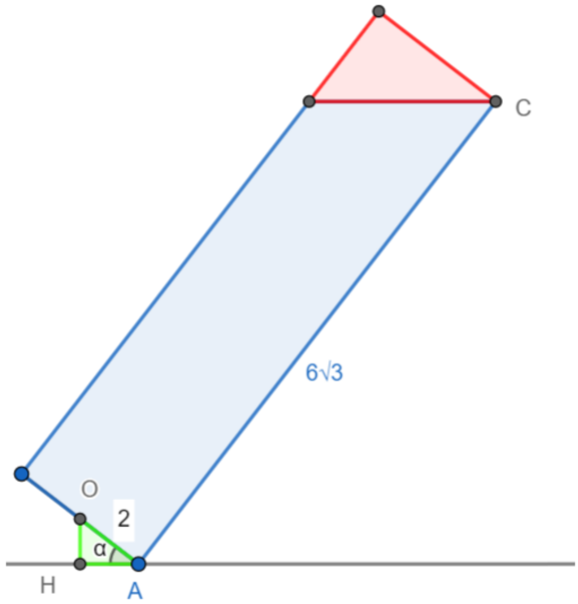


FIGURA 2

Na figura 2 depreende-se que $\overline{HO} = 2 \cdot sen\alpha$

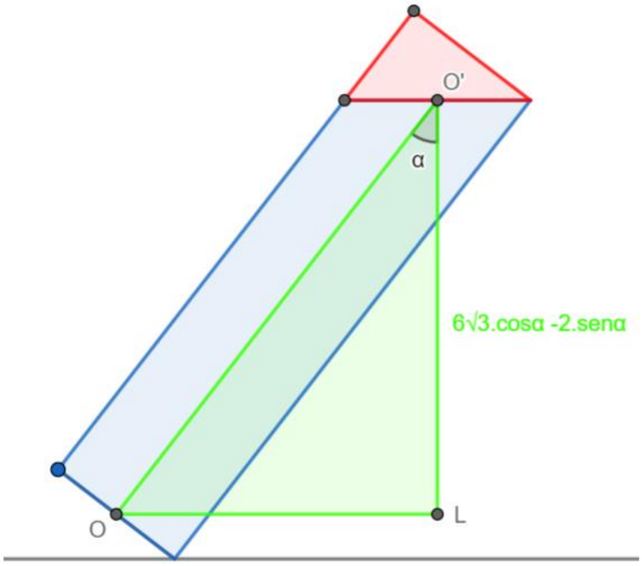


FIGURA 3

Considerando o obtido nas figuras 1 e 2, na figura 3 depreende-se que

$$\overline{O'L} = 6\sqrt{3} \cdot \cos\alpha - 2 \cdot sen\ \alpha$$

Sendo assim, temos que $\overline{O'L} = \overline{OO'} \cdot \cos\alpha$

$$\overline{OO'} = 6\sqrt{3} - 2 \cdot tg\ \alpha$$

O volume inicial e final do líquido no cilindro se mantém, portanto:

$$V_{ini} = V_{fim} \quad \Rightarrow \quad V_{ini} = \pi R^2 d$$

$$16\sqrt{3}\pi = \pi(2)^2 \cdot (6\sqrt{3} - 2 \cdot tg\ \alpha)$$

$$6\sqrt{3} - 2 \cdot tg\ \alpha = 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad tg\ \alpha = \sqrt{3}$$

O ângulo α cuja tangente vale $\sqrt{3}$ é o ângulo de $60°$.

Gabarito: "d".

5. QUESTÕES NÍVEL 2

26. (AFA/2021)

Sejam as curvas $\lambda: x^2 + y^2 = r^2$ e $\beta: y^2 - x^2 = 4$ tangentes em dois pontos distintos do plano cartesiano.

Considere S o conjunto de pontos $P(x, y)$ tais que $x^2 + y^2 \leq r^2$.

Se for realizada uma rotação de $90°$ dos pontos de S em torno de uma das assíntotas de β, então o sólido formado tem uma superfície cuja área total, em unidade de área, mede

a) $\frac{16\pi}{3}$

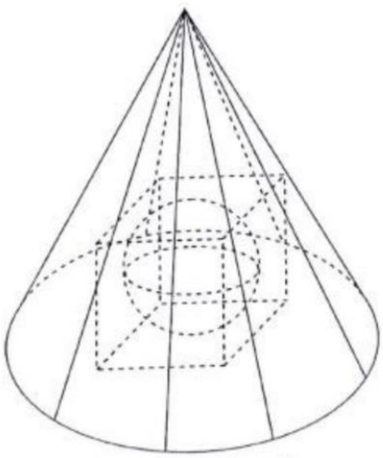
b) 8π

c) 12π

d) 16π

27. (AFA/2021)

Considere a figura a seguir.



Desenho fora de escala

Nela está representada a inscrição de uma esfera num cubo que, por sua vez, está inscrito num cone equilátero, de tal forma que uma de suas faces está apoiada na base do cone e os vértices da face oposta estão na lateral do cone.

A projeção ortogonal do vértice do cone à sua base contém dois pontos de tangência da esfera com o cubo.

Se R e r são, respectivamente, as medidas do raio da base do cone e do raio da esfera, em cm, então

a) $\frac{R}{r} = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{r}{R} = \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{R}{r} = \frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{3}$

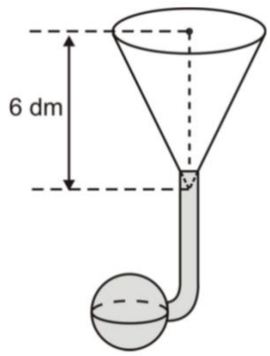
d) $\frac{r}{R} = \frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}$

28. (AFA/2020)

Um sistema de irrigação para plantas é composto por uma caixa d'água, em formato de cone circular reto, interligada a 30 esferas, idênticas.

O conteúdo da água chega até as esferas por encanamentos cuja capacidade de armazenamento é desprezível.

O desenho a seguir ilustra a ligação entre a caixa d'água e uma das 30 esferas, cujo raio interno mede $r = \pi^{-\frac{1}{3}}\ dm$.



Se a caixa d'água está cheia e as esferas, bem como os encanamentos, estão vazios, então, no momento em que todas as 30 esferas ficarem cheias, restará, no cone, apenas a metade de sua capacidade total.

Assim, a área lateral de um cone equilátero cujo raio da base é congruente ao da caixa d'água, em dm^2**, é igual a**

a) 80

b) 40

c) 20

d) 10

29. (AFA/2018)

Considere o sólido geométrico obtido pela rotação de 360° do triângulo ABC em torno da reta que passa por C e é paralela ao lado $\overline{AB}$.

Sabe-se que este triângulo é isósceles, com $\overline{AC} \equiv \overline{BC} = R\sqrt{2}m$, $\overline{AB} = 2R\,m$ (sendo R uma constante real não nula), e que o volume do sólido obtido é $V = 4\pi\sqrt{3}m^3$.

A medida de R, em metros, é igual a

a) $\sqrt[6]{3}$

$b)$ $\sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt[3]{9}$

d) $\sqrt{3}$

30. (AFA/2017)

Se uma pirâmide hexagonal regular está inscrita num cone equilátero cujo volume é igual a $\frac{10\sqrt{3}}{7}\pi\ cm^3$, então o volume dessa pirâmide, em cm^3, é igual a

a) $\frac{45}{7}$

b) $\frac{15\sqrt{3}}{7}$

c) $\frac{30\sqrt{3}}{7}$

d) $\frac{135}{7}$

31. (AFA/2016)

Considere a região E do plano cartesiano dada por

$$E = \begin{cases} \frac{y}{3} + \frac{x}{3} \le 1 \\ y + x \ge 1 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

O volume do sólido gerado, se E efetuar uma rotação de $270°$ em torno do eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ em unidades de volume, é igual a

a) $\frac{26\pi}{3}$

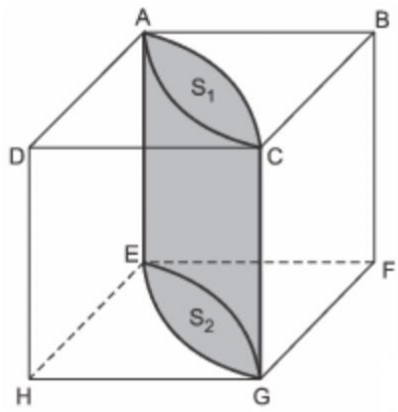
b) 26π

c) $\frac{13\pi}{2}$

d) $\frac{13\pi}{3}$

32. (AFA/2015)

Na figura abaixo, tem-se um cubo cuja aresta mede k centímetros; as superfícies S_1 e S_2, contidas nas faces desse cubo, são limitadas por arcos de circunferências de raio k centímetros e centros em, respectivamente, D e B, H e F.



O volume do sólido formado por todos os segmentos de reta com extremidades em S_1 e S_2, paralelos a $\overline{CG}$ e de bases S_1 e S_2, é, em cm^3, igual a

a) $\frac{k^3(\pi-1)}{2}$

b) $\frac{k^3(\pi-2)}{2}$

c) $\frac{k^3(\pi-1)}{4}$

d) $\frac{k^3(\pi-2)}{4}$

33. (AFA/2013)

Uma caixa cúbica, cuja aresta mede $0,4$ metros, está com a água até $\frac{7}{8}$ de sua altura.

Dos sólidos geométricos abaixo, o que, totalmente imerso nessa caixa, NÃO provoca transbordamento de água é

a) uma esfera de raio $\sqrt[3]{2}\ dm$.

b) uma pirâmide quadrangular regular, cujas arestas da base e altura meçam $30\ cm$.

c) um cone reto, cujo raio da base meça $\sqrt{3}\ dm$ e a altura $3\ dm$.

d) um cilindro equilátero, cuja altura seja $20cm$.

34. (AFA/2011)

Uma vinícola armazena o vinho produzido em um tanque cilíndrico (reto) com sua capacidade máxima ocupada. Esse vinho será distribuído igualmente em barris idênticos também cilíndricos (retos) e vendidos para vários mercados de uma cidade.

Sabe-se que cada mercado receberá 2 barris de vinho, com altura igual a $\frac{1}{5}$ da altura do tanque e com diâmetro da base igual a $\frac{1}{4}$ do diâmetro da base do tanque. Nessas condições, a quantidade x de mercados que receberão os barris (com sua capacidade máxima ocupada) é tal que x pertence ao intervalo

a) $0 < x < 20$

b) $20 \leq x < 40$

c) $40 \leq x < 60$

d) $60 \leq x < 80$

35. (AFA/2010)

Considere uma chapa de aço circular de espessura desprezível e raio $15\ cm$. Recortando-se, dessa chapa, dois setores circulares de ângulo $\frac{2\pi}{3} rad$ cada, e juntando-se em cada um desses setores os lados de mesma medida, sem perda de material, obtém-se dois objetos em forma de cone. Unindo-se as bases desses cones, obtém-se um objeto A. Dentro desse objeto A foram inseridas esferas de ferro cuja área da superfície, de cada uma, é $9\pi\ cm^2$. Sabendo-se que foram inseridas a maior quantidade possível dessas esferas dentro do objeto A, o espaço vago dentro desse objeto, é tal que, seu volume é, em cm^3, igual a

Dado: $\sqrt{2} = 1,41$

a) 2π

b) π

c) $\frac{\pi}{2}$

d) $\frac{\pi}{4}$

36. (EFOMM/2020)

Seja a esfera de raio R inscrita na pirâmide quadrangular regular de aresta base 2 cm e aresta lateral $\sqrt{38}$ cm. Sabendo-se que a esfera tangencia todas as faces da pirâmide, o valor de R, em cm, é

a) $\frac{\sqrt{37}+1}{6}$

b) $\frac{\sqrt{39}-1}{38}$

c) $\frac{6\sqrt{38}+12}{17}$

d) $\frac{\sqrt{37}-1}{6}$

e) $\frac{6\sqrt{38}-12}{17}$

37. (EFOMM/2020)

Considere um recipiente cúbico W de aresta 2. Suponha que possamos colocar 8 esferas de raio R e uma de raio $2R$ dentro de W dispostas do seguinte modo: a esfera de raio $2R$ tem seu centro coincidindo com o centro de W e cada uma das demais esferas são tangentes a três faces e à esfera maior. Assinale a opção que apresenta o intervalo ao qual R pertença.

Dados: $\sqrt{2} = 1.4$, $\sqrt{3} = 1.7$ e $\sqrt{5} = 2.2$

a) $\frac{1}{6} < R < \frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{3} < R < \frac{2}{5}$

c) $\frac{3}{7} < R < \frac{1}{2}$

d) $\frac{2}{3} < R < \frac{4}{5}$

e) $\frac{4}{5} < R < \frac{9}{10}$

38. (EFOMM/2016)

Seja uma esfera de raio R e um cubo de aresta A, ambos com a mesma área de superfície. A razão entre o volume do cubo e o volume da esfera é igual a

a) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

b) $\sqrt{\frac{\pi}{12}}$

c) $\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$

d) $\sqrt{\frac{\pi}{3}}$

e) $\sqrt{\frac{\pi}{6}}$

39. (EFOMM/2015)

Um tanque em forma de cone circular de altura h encontra-se com vértice para baixo e com eixo na vertical. Esse tanque, quando completamente cheio, comporta 6000 litros de água. O volume de água, quando o nível está a $1/4$ da altura, é igual a

a) 1500 litros.

b) 3500 litros.

c) 3375 litros.

d) 3000 litros.

e) 1250 litros.

40. (EFOMM/2015)

Um astronauta, em sua nave espacial, consegue observar em certo momento exatamente $1/6$ da superfície de um planeta. Determine a que distância ele está da superfície desse planeta. Considere o raio do planeta igual a $12800\ km$.

a) $1300\ km$.

b) $1500\ km$.

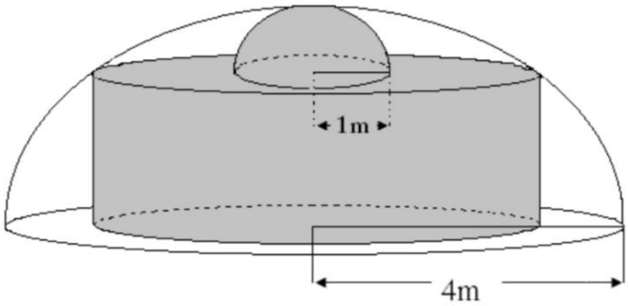
c) $1600\ km$.

d) $3200\ km$.

e) $6400\ km$.

41. (EFOMM/2013)

Constrói um depósito, na forma de um sólido V, dentro de uma semiesfera de raio $4m$. O depósito é formado por uma semiesfera de raio $1m$ sobreposta a um cilindro circular dispostos conforme a figura. Então a área da superfície total de V em m^2 é igual a:



a) $(20 + 14\sqrt{2})\pi$.
b) $(17 + 4\sqrt{10})\pi$
c) $(8 + 4\sqrt{7})\pi$.
d) $(21 + 7\sqrt{6})\pi$.
e) $(15 + 6\sqrt{7})\pi$.

42. (EFOMM/2013)

Um cone foi formado a partir de uma chapa de aço, no formato de um setor de $12cm$ de raio e ângulo central de $120°$. Então, a altura do cone é:

a) $2\sqrt{2}$.
b) $4\sqrt{2}$.
c) $6\sqrt{2}$.
d) $8\sqrt{2}$.
e) $12\sqrt{2}$.

43. (EFOMM/2010)

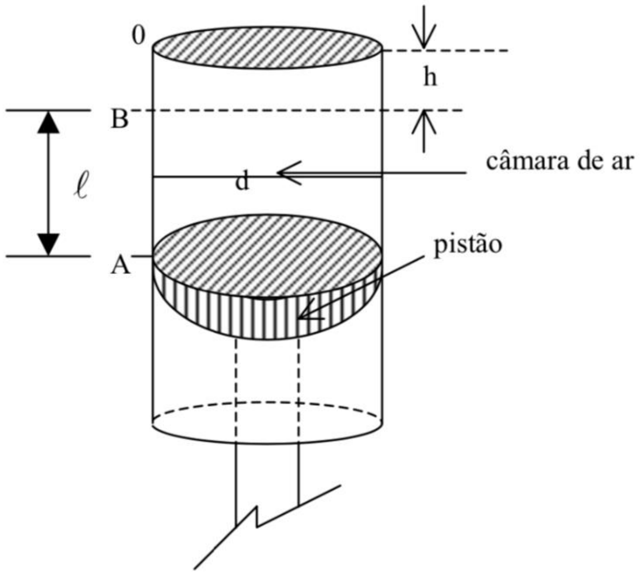
Um recipiente tem a forma de um paralelepípedo retângulo com altura h e base quadrada. Ele está com uma certa quantidade de água até uma altura h_1. Duas esferas, ambas com diâmetros iguais a $2\ dm$, foram colocadas dentro do recipiente, ficando esse recipiente com o nível de água até a borda (altura h). Considerando que o volume do paralelepípedo retângulo é de 40 litros, pode - se afirmar que a razão $\frac{h_1}{h}$, utilizando $\pi = 3$, vale:

a) $\frac{4}{5}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{8}$
d) $\frac{1}{5}$
e) $\frac{2}{5}$

44. (EFOMM/2005)

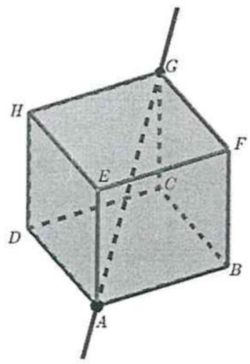
A figura abaixo representa um cilindro de motor de combustão, cujo pistão se desloca entre A e B, comprimindo o ar em seu interior. Se a relação de compressão de ar, entre os volumes máximo e

mínimo é de $10:1$ e o volume mínimo é de $0,5l$, então o diâmetro do pistão, em cm será (considere $\pi = 3$)



a) $\frac{600}{AB}$
b) $\frac{20\sqrt{15AB}}{AB}$
c) $200\sqrt{AB}$
d) $20,8\sqrt{AB}$
e) $12,5\sqrt{15AB}$

45. (Escola Naval/2018)
Observe a figura abaixo



O cubo $ABCDEFGH$, de aresta $3\ cm$, é rotacionado em torno de sua diagonal AG, gerando um sólido de revolução de volume V. Dessa forma, pode-se afirmar que o valor de V, em cm^3, é tal que:
a) $V < 17$
b) $17 < V < 27$
c) $36 < V < 55$
d) $27 < V < 36$
e) $55 < V < 74$

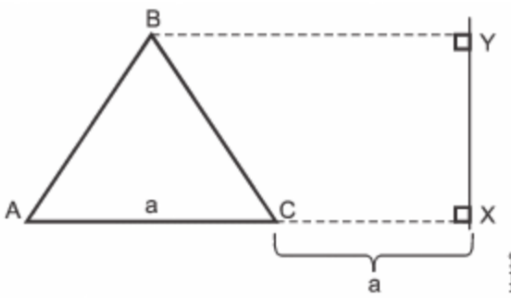
46. (Escola Naval/2014)

Sabendo-se que um cilindro de revolução de raio igual a $20\ cm$, quando cortado por um plano paralelo ao eixo de revolução, a uma distância de $12\ cm$ desse eixo, apresenta secção retangular com área igual à área da base do cilindro. O volume desse cilindro, em centímetros cúbicos é

a) $6.000\pi^2$
b) $5.000\pi^2$
c) $4.000\pi^2$
d) $3.000\pi^2$
e) $2.000\pi^2$

47. (Escola Naval/2014)

A área da superfície de revolução gerada pela rotação do triangulo equilátero ABC em torno do eixo XY na figura abaixo, em unidade de área é



a) $9\pi a^2$
b) $9\sqrt{2}\pi a^2$
c) $9\sqrt{3}\pi a^2$
d) $6\sqrt{3}\pi a^2$
e) $6\sqrt{2}\pi a^2$

48. (Escola Naval/2013)

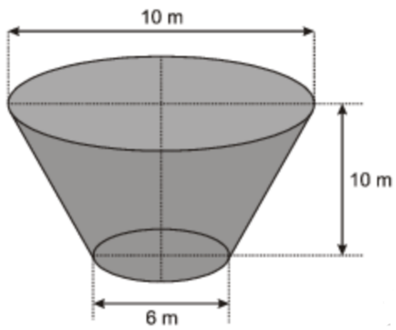
Um astronauta, em sua nave espacial, consegue observar, em certo momento, exatamente $\frac{1}{10}$ da superfície da Terra.

Que distância ele está do nosso planeta? Considere o raio da Terra igual a $6400\ km$.

a) $1200\ km$
b) $1280\ km$
c) $1600\ km$
d) $3200\ km$
e) $4200\ km$

49. (Escola Naval/2013)

A Marinha do Brasil comprou um reservatório para armazenar combustível com o formato de um tronco de cone conforme figura abaixo. Qual é a capacidade em litros desse reservatório?



a) $\frac{40}{3} \cdot 10^2\pi$
b) $\frac{19}{2} \cdot 10^5\pi$
c) $\frac{49}{3} \cdot 10\pi$
d) $\frac{49}{3} \cdot 10^4\pi$
e) $\frac{19}{3} \cdot 10^3\pi$

50. (Escola Naval/2012)

Uma lata de querosene tem a forma de um cilindro circular reto cuja base tem raio R. Colocam-se três moedas sobre a base superior da lata, de modo que estas são tangentes entre si e tangentes à borda da base, não existindo folga. Se as moedas têm raio a e encontram-se presas, então o valor de R em função de a, vale

a) $\frac{(1+2\sqrt{3})a}{3}$
b) $\frac{(3+2\sqrt{3})a}{3}$
c) $\frac{(3+\sqrt{3})a}{3}$
d) $(1+2\sqrt{3})a$
e) $(3+2\sqrt{3})a$

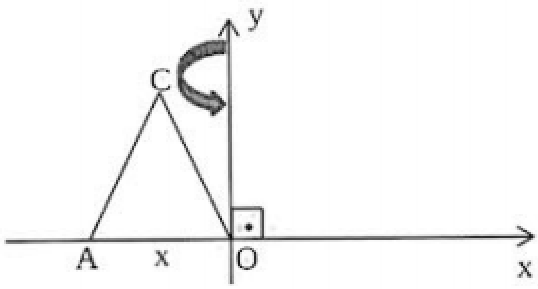
51. (Escola Naval/2012)

Uma esfera confeccionada em aço é usada em um rolamento de motor de um navio da Marinha do Brasil. Se o raio da esfera mede $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3}}}}} \ldots cm$, então seu volume vale

a) $45 \cdot 10^{-3}\pi\ dm^3$
b) $0,45 \cdot 10^{-3}\pi\ dm^3$
c) $60 \cdot 10^{-3}\pi\ dm^3$
d) $0,15 \cdot 10^3\pi\ dm^3$
e) $60 \cdot 10^3\pi\ dm^3$

52. (EFOMM/2021)

Ao rotacionar o triângulo equilátero AOC em torno do eixo y, conforme ilustra a figura a seguir, obteremos um sólido. Assinale a alternativa que representa o volume desse sólido, em unidades de volume, sabendo que o vértice O do triângulo AOC sobrepõe-se à origem dos eixos.



a) $\frac{\pi x^3\sqrt{3}}{6}$

b) $\frac{\pi x^3\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{\pi x^3\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\pi x^3\sqrt{3}}{24}$

e) $\frac{7\pi x^3\sqrt{3}}{24}$

GABARITO

26. d
27. b
28. a
29. d
30. a
31. c
32. b
33. d
34. c
35. Anulada
36. d
37. b
38. e
39. Anulada
40. e

41. e
42. d
43. a
44. b
45. c
46. b
47. a
48. c
49. d
50. b
51. c
52. b

RESOLUÇÃO

26. (AFA/2021)

Sejam as curvas $\lambda: x^2 + y^2 = r^2$ e $\beta: y^2 - x^2 = 4$ tangentes em dois pontos distintos do plano cartesiano.

Considere S o conjunto de pontos $P(x, y)$ tais que $x^2 + y^2 \leq r^2$.

Se for realizada uma rotação de $90°$ dos pontos de S em torno de uma das assíntotas de β, então o sólido formado tem uma superfície cuja área total, em unidade de área, mede

a) $\frac{16\pi}{3}$

b) 8π

c) 12π

d) 16π

Comentários

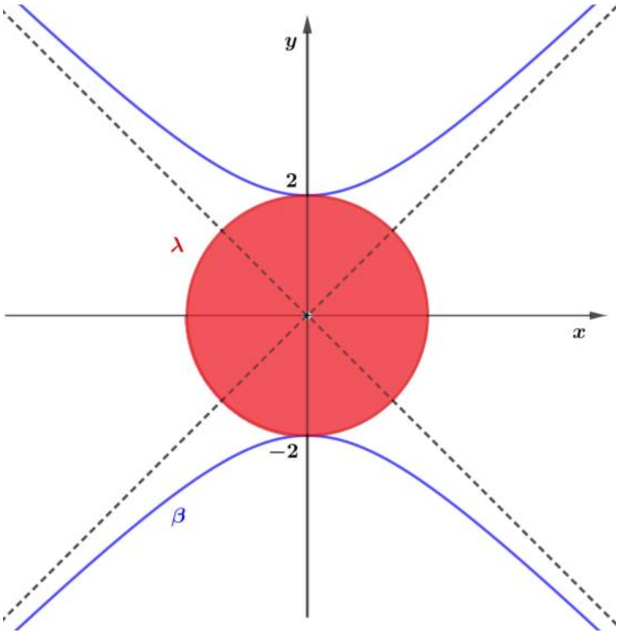
β é uma hipérbole equilátera com eixos de medidas $a^2 = b^2 = 4 \Rightarrow a = b = 2$.

$$\beta: \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$$

Note que o eixo real é vertical. Como λ e β são tangentes em dois pontos distintos, temos que a única possibilidade é $r = 2$:

Veja que as assíntotas da hipérbole são dadas por:

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 0 \Rightarrow (y - x)(y + x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$$



Veja que o conjunto S é formado pelos pontos interiores do círculo vermelho. Assim, quando rotacionamos essa figura em torno de uma das assíntotas de β, o sólido formado será equivalente a 2 cunhas esféricas com ângulos de $90°$ e um eixo comum. A área da superfície do sólido é:

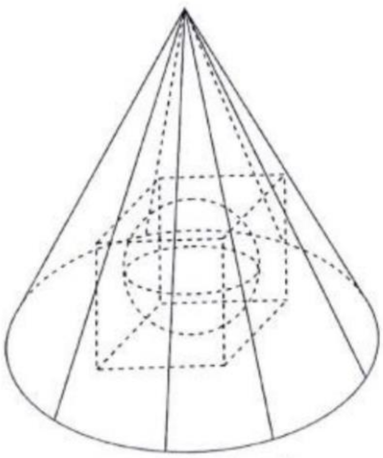
$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(4\pi R^2)}_{\text{área de meia esfera}} + 4\underbrace{\left(\frac{1}{2}\pi R^2\right)}_{\text{área de 1 semicírculo}} = 2\pi(2)^2 + 2\pi(2)^2 = 16\pi$$

Gabarito: D

---

27. (AFA/2021)

Considere a figura a seguir.


Desenho fora de escala

Nela está representada a inscrição de uma esfera num cubo que, por sua vez, está inscrito num cone equilátero, de tal forma que uma de suas faces está apoiada na base do cone e os vértices da face oposta estão na lateral do cone.

A projeção ortogonal do vértice do cone à sua base contém dois pontos de tangência da esfera com o cubo.

Se R e r são, respectivamente, as medidas do raio da base do cone e do raio da esfera, em cm, então

a) $\frac{R}{r} = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$

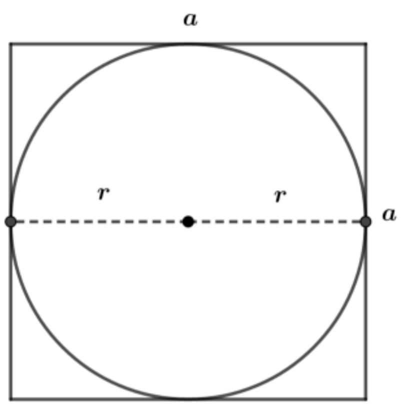
b) $\frac{r}{R} = \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{R}{r} = \frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{3}$

d) $\frac{r}{R} = \frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}$

Comentários

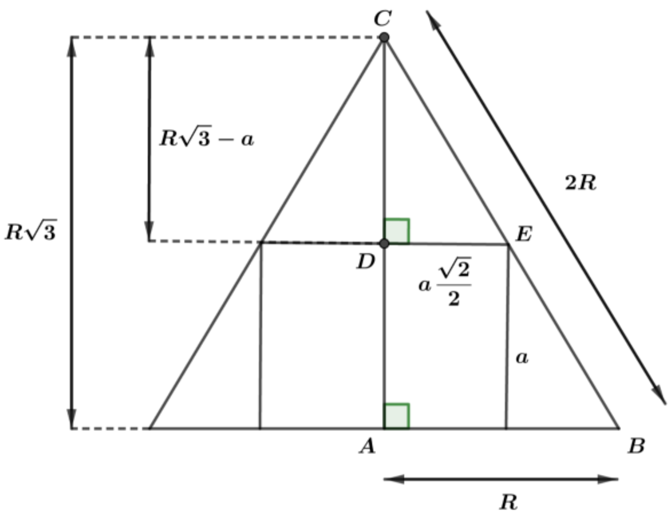
Seja a a medida da aresta do cubo. Vamos encontrar r e R em função de a. Da esfera inscrita no cubo, temos a seguinte figura:



Temos

$$2r = a \Rightarrow r = \frac{a}{2}$$

Do cubo inscrito no cone equilátero, vamos tomar um plano que passa pela diagonal da face superior do cubo:



Note que DE é a metade da diagonal da face superior do cubo. Temos que $\Delta CDE \sim \Delta CAB$, logo:

$$\frac{CD}{AC}=\frac{DE}{AB}$$

$$\frac{R\sqrt{3}-a}{R\sqrt{3}}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{R}\Rightarrow R\sqrt{3}-a=\frac{a\sqrt{6}}{2}\Rightarrow R\sqrt{3}=\frac{a\sqrt{6}+2a}{2}$$

$$R=\frac{a\sqrt{6}+2a}{2\sqrt{3}}=\frac{3a\sqrt{2}+2a\sqrt{3}}{6}$$

Assim, temos:

$$\frac{r}{R}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{3a\sqrt{2}+2a\sqrt{3}}{6}}=\frac{3}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=\frac{3(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{18-12}=\frac{9\sqrt{2}-6\sqrt{3}}{6}=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2}$$

Gabarito: B

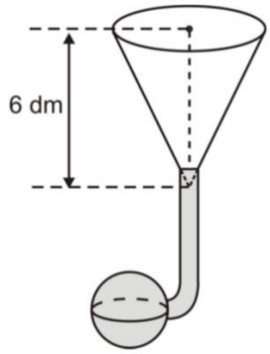
---

28. (AFA/2020)

Um sistema de irrigação para plantas é composto por uma caixa d'água, em formato de cone circular reto, interligada a 30 esferas, idênticas.

O conteúdo da água chega até as esferas por encanamentos cuja capacidade de armazenamento é desprezível.

O desenho a seguir ilustra a ligação entre a caixa d'água e uma das 30 esferas, cujo raio interno mede $r=\pi^{-\frac{1}{3}}\,dm$.



Se a caixa d'água está cheia e as esferas, bem como os encanamentos, estão vazios, então, no momento em que todas as 30 esferas ficarem cheias, restará, no cone, apenas a metade de sua capacidade total.

Assim, a área lateral de um cone equilátero cujo raio da base é congruente ao da caixa d'água, em dm^2, é igual a

a) 80

b) 40

c) 20

d) 10

Comentários

O enunciado afirma que inicialmente a caixa d'água cônica está cheia e as esferas vazias. No final do enchimento completo das 30 esferas, resta a metade do volume inicial do cone. Chamando de V o volume do cone, sabendo que o volume que saiu do cone foi o volume que encheu as 30 esferas:

$$V-\frac{V}{2}=30\cdot V_{esfera}=30\cdot\frac{4}{3}\pi R_{esfera}^3\Rightarrow\frac{V}{2}=40\pi\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^3$$

$$\Rightarrow\frac{V}{2}=40\pi\cdot\frac{1}{\pi}=40\Rightarrow V=80\ dm^3$$

Portanto, o volume do cone é 80 dm³. Assim, sabendo que a altura do cone mede 6 dm, chamando o raio de sua base de R:

$$V=\frac{1}{3}\cdot Área_{base}\cdot h\Rightarrow 80=\frac{1}{3}\cdot\pi R^2\cdot 6\Rightarrow\boxed{\pi R^2=40}$$

O enunciado agora afirma que deseja a área lateral de um cone que possui o mesmo raio R acima, mas sendo um cone equilátero. Um cone equilátero possui a geratriz igual ao diâmetro da base, pois possui um perfil de triângulo equilátero. Dessa maneira, chamando g a geratriz desse cone equilátero, temos:

$$g=2R\ (*)$$

Sabemos que a área lateral de um cone é dada por:

$$Área_{lateral}=\pi Rg$$

Portanto:

$$Área_{lateral} = \pi R g = 2\pi R^2 = 2 \cdot 40 = 80\ dm^2$$

Gabarito: "a".

---

29. (AFA/2018)

Considere o sólido geométrico obtido pela rotação de 360° do triângulo ABC em torno da reta que passa por C e é paralela ao lado $\overline{AB}$.

Sabe-se que este triângulo é isósceles, com $\overline{AC} \equiv \overline{BC} = R\sqrt{2}m$, $\overline{AB} = 2R\ m$ (sendo R uma constante real não nula), e que o volume do sólido obtido é $V = 4\pi\sqrt{3}m^3$.

A medida de R, em metros, é igual a

a) $\sqrt[6]{3}$

b) $\sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt[3]{9}$

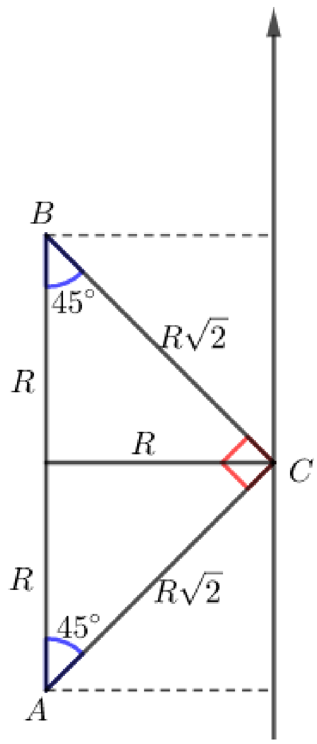
d) $\sqrt{3}$

Comentários

Primeiramente, veja que os lados de ABC satisfazem o teorema de Pitágoras para a hipotenusa AB:

$$AB^2 = 4R^2 = \left(R\sqrt{2}\right)^2 + \left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2 + 2R^2 = AB^2 + BC^2$$

Portanto, o ângulo $\angle ACB = 90°$ e os demais ângulos internos são iguais a 45°, pois os catetos $AC\ e\ BC$ são iguais. Assim, vamos analisar o que vai ser rotacionado para podermos calcular o volume desse sólido em função de R:



Veja que a altura de C relativa à hipotenusa BA também mede R, pois ABC é isósceles. Assim, o sólido que será gerado ao rotacionar o triângulo ABC em torno dessa reta paralela à AB passando por C será:

Um cilindro de raio R e altura $2R$ vazado por dois cones de raio de base R e altura R. Esses cones terão as mesmas bases do cilindro, sendo a geratriz de um o segmento BC e a geratriz do outro o segmento AC. Assim, o volume do sólido gerado pode ser calculado por:

$$V_{sólido} = V_{cilindro} - 2 \cdot V_{cone} = \pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R\right) = 2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$\Rightarrow 4\pi\sqrt{3} = \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow R^3 = 3\sqrt{3} = \sqrt{3^3} \Rightarrow R^3 = \left(\sqrt{3}\right)^3$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \sqrt{3}}$$

Gabarito: "d".

30. (AFA/2017)

Se uma pirâmide hexagonal regular está inscrita num cone equilátero cujo volume é igual a $\frac{10\sqrt{3}}{7}\pi\ cm^3$, então o volume dessa pirâmide, em cm^3, é igual a

a) $\frac{45}{7}$

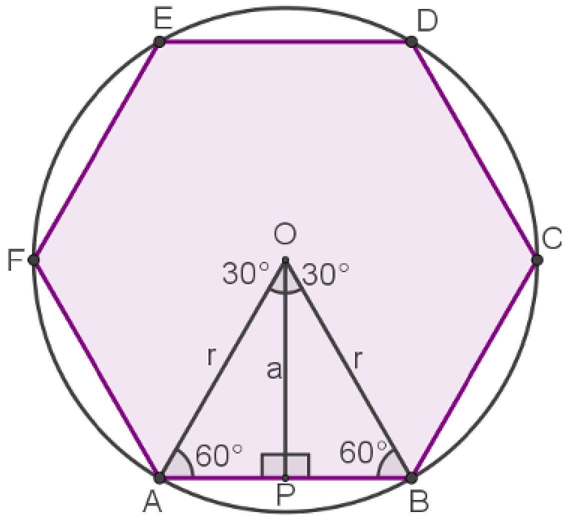
b) $\frac{15\sqrt{3}}{7}$

c) $\frac{30\sqrt{3}}{7}$

d) $\frac{135}{7}$

Comentários

Sabemos que numa pirâmide hexagonal, a base é um hexágono regular, que é formada por 6 triângulos equiláteros que possuem os lados em comum com o hexágono. Sabe-se também que, como o hexágono está inscrito na circunferência da base do cone, então temos:



Portanto, o raio da circunferência circunscrita r é igual ao lado do triângulo equilátero $(l = r)$. Assim, podemos calcular a área da base hexagonal:

$$Área_{triânguloEquilátero} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

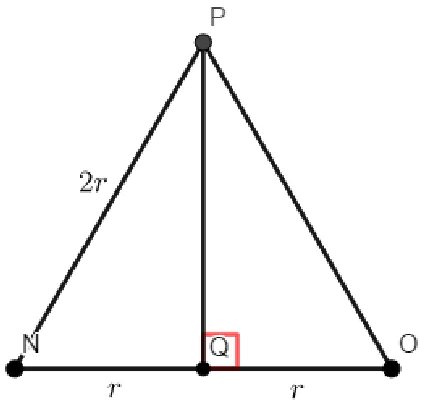
$$Área_{hexágonoRegular} = 6 \cdot Área_{triânguloEquilátero} = \frac{6l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow Área_{hexágonoRegular} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$$

O volume do cone é dado:

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{10\sqrt{3}}{7}\pi$$

Onde h é a altura do cone relativa à base. Como o cone é equilátero, então o triângulo formado pelo vértice do cone, e por dois pontos diametralmente opostos na circunferência da sua base formam um triângulo equilátero. Dessa maneira, a geratriz do cone equilátero mede igual ao diâmetro da base:



Na imagem acima, P é o vértice do cone equilátero e NO é um diâmetro da base. Veja que PNO é triângulo equilátero e PQ é altura do triângulo, também do cone. Assim, aplicando Pitágoras no triângulo PQN:

$$PN^2 = PQ^2 + QN^2 \Rightarrow 4r^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow h = 3r^2 \Rightarrow \boxed{h = r\sqrt{3}}$$

Assim, o volume do cone é:

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^3\sqrt{3} = \frac{10\sqrt{3}}{7}\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{r^3 = \frac{30}{7}}$$

Como o cone e a pirâmide possuem a mesma altura, o volume da pirâmide é:

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot Área_{hexágonoRegular} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{3r^2\sqrt{3}}{2} \cdot r\sqrt{3} = \frac{3r^3}{2}$$

$$V_{pirâmide} = \frac{3r^3}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{30}{7} = \frac{45}{7}$$

Gabarito: “a”.

---

31. (AFA/2016)

Considere a região E do plano cartesiano dada por

$$E = \begin{cases} \frac{y}{3} + \frac{x}{3} \le 1 \\ y + x \ge 1 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

O volume do sólido gerado, se E efetuar uma rotação de $270°$ em torno do eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ em unidades de volume, é igual a

a) $\frac{26\pi}{3}$

b) 26π

c) $\frac{13\pi}{2}$

d) $\frac{13\pi}{3}$

Comentários

Vamos primeiramente identificar a região E:

$$\frac{y}{3} + \frac{x}{3} \le 1 \Leftrightarrow y + x - 3 \le 0$$

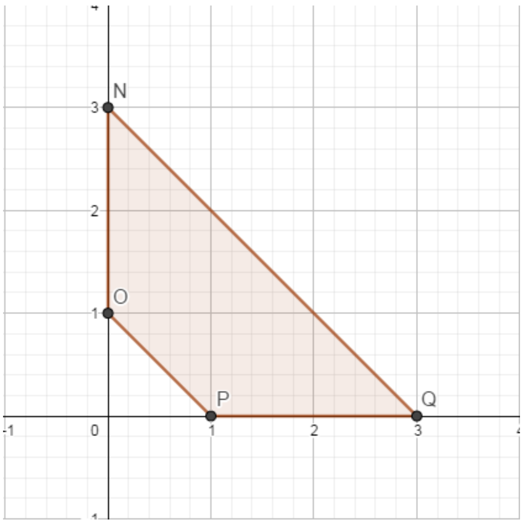
Essa região acima se refere a todos os pontos do $\mathbb{R}^2$ que estão abaixo da (ou inclusos na) reta $y + x - 3 = 0$.

$$y + x \ge 1 \Rightarrow y + x - 1 \ge 0$$

A região acima caracteriza todos os pontos do plano cartesiano que estão acima (ou inclusos) da reta $y + x - 1 = 0$.

$$x \ge 0 \; e \; y \ge 0$$

A região acima nada mais é do que os pontos do primeiro quadrante. Portanto, a interseção dessas regiões no plano cartesiano, teremos a seguinte região E:



Vamos rotacionar de 270° a região acima e queremos o volume do sólido gerado. Observe, porém, que se girarmos 360° em torno do eixo x estaremos formando um cone de altura 3 e raio da base 3 (geratriz na NQ na figura) vazado na base por outro cone de altura 1 e raio da base 1 (geratriz OP na figura). Assim, como 270° representa 3/4 de 360°, multiplicaremos o volume achado para 360° por 3/4, e obteríamos o resultado desejado:

$$V_{E-270^\circ} = \frac{3}{4} \cdot V_{E-360^\circ}$$

$$V_{E-360^\circ} = V_{coneMaior} - V_{coneVazado} = \frac{1}{3} \cdot \pi 3^2 \cdot 3 - \frac{1}{3}\pi 1^2 \cdot 1 = \frac{26\pi}{3}$$

Portanto:

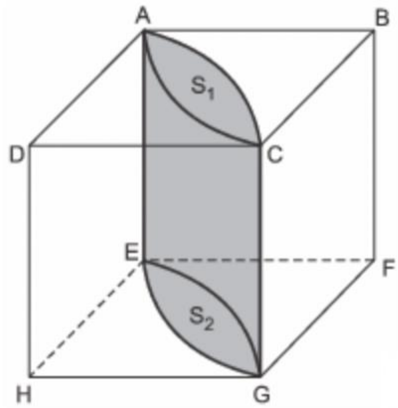
$$V_{E-270^\circ} = \frac{3}{4} \cdot V_{E-360^\circ} = \frac{3}{4} \cdot \frac{26\pi}{3} = \frac{13\pi}{2}$$

Gabarito: "c".

---

32. (AFA/2015)

Na figura abaixo, tem-se um cubo cuja aresta mede k centímetros; as superfícies S_1 e S_2, contidas nas faces desse cubo, são limitadas por arcos de circunferências de raio k centímetros e centros em, respectivamente, D e B, H e F.



O volume do sólido formado por todos os segmentos de reta com extremidades em S_1 e S_2, paralelos a $\overline{CG}$ e de bases S_1 e S_2, é, em cm^3, igual a

a) $\frac{k^3(\pi-1)}{2}$

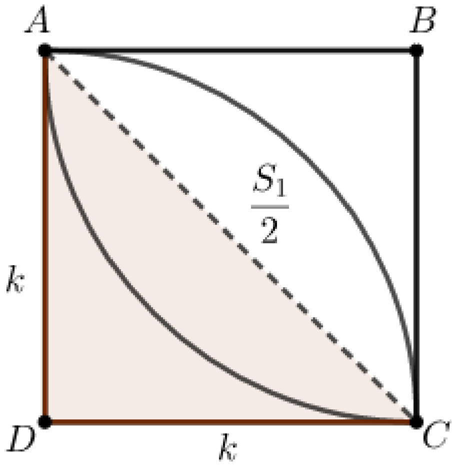
b) $\frac{k^3(\pi-2)}{2}$

c) $\frac{k^3(\pi-1)}{4}$

d) $\frac{k^3(\pi-2)}{4}$

Comentários

Veja que, para calcular o volume do sólido formado acima, basta calcularmos a área da base dele e multiplicar pela altura, que é a medida do lado do cubo (k). Assim, vejamos o desenho da base desse cubo:



Perceba que a região S_1 está dividida pela metade na figura acima, pela simetria. Vemos que a área $\frac{S_1}{2}$ é igual à subtração da área da seção circular de 90° ADC de arco AC e raio k pela área do triângulo retângulo ADC:

$$\frac{S_1}{2} = \frac{\pi k^2}{4} - \frac{k^2}{2} \Rightarrow S_1 = \frac{\pi k^2}{2} - k^2 \Rightarrow S_1 = \frac{k^2}{2}(\pi - 2)$$

Portanto, o volume desse sólido é:

$$V_{sólido} = S_1 \cdot k = \frac{k^3}{2}(\pi - 2)$$

Gabarito: "b".

---

33. (AFA/2013)

Uma caixa cúbica, cuja aresta mede $0,4$ metros, está com a água até $\frac{7}{8}$ de sua altura.

Dos sólidos geométricos abaixo, o que, totalmente imerso nessa caixa, NÃO provoca transbordamento de água é

a) uma esfera de raio $\sqrt[3]{2}\ dm$.

b) uma pirâmide quadrangular regular, cujas arestas da base e altura meçam $30\ cm$.

c) um cone reto, cujo raio da base meça $\sqrt{3}\ dm$ e a altura $3\ dm$.

d) um cilindro equilátero, cuja altura seja $20cm$.

Comentários

O sólido que não provoca o transbordamento é aquele que tiver volume menor ou igual ao volume vazio inicial da caixa cúbica (faltando para completar). Como a água está a 7/8 de sua altura total (0,4m), então o vazio equivale a 1/8 da altura:

$$V_{vazio} = \left(Área_{base} \cdot \frac{1}{8} \cdot altura\right) = 0,4^2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 0,4 \Rightarrow V_{vazio} = (0,2)^3\ m^3 = 8 \cdot 10^{-3} m^3 = 8dm^3$$

Portanto, desejamos que o volume do sólido procurado seja menor ou igual a esse volume vazio da caixa cúbica, já que serão totalmente submergidos. Vejamos as alternativas:

a) Esfera de raio $\sqrt[3]{2}\ dm$:

$$V_{esfera} = \frac{4\pi}{3} \cdot R^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = \frac{8\pi}{3}\ dm^3 > 8\ dm^3$$

Veja que o volume achado para esfera é maior que o vazio, pois $\pi > 3$. Assim, alternativa falsa.

b) Pirâmide quadrangular regular, com aresta da base e altura medindo 30cm:

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 30^2 \cdot 30\ cm^3 = 9000\ cm^3 = 9dm^3 > 8dm^3$$

Portanto, também é falsa.

c) Calculando volume do cone:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 = 3\pi\ dm^3 > 9dm^3 > 8dm^3$$

Portanto, também é falsa.

d) Um cilindro equilátero é aquele em que a altura é igual ao diâmetro da base. Assim, se a altura mede 20 cm, então o diâmetro também: $2r = 20 \Rightarrow r = 10\ cm$. Assim, calculando o volume:

$$\Rightarrow V_{cilindro} = Área_{base} \cdot altura = \pi 10^2 \cdot 20 = 2000\pi\ cm^3 = 2\pi\ dm^3 < 8\ dm^3$$

Veja que a desigualdade acima é verdadeira pois $\pi < 4$. Assim, encontramos um sólido que, submerso, não causará transbordamento da caixa.

Gabarito: "d".

34. (AFA/2011)

Uma vinícola armazena o vinho produzido em um tanque cilíndrico (reto) com sua capacidade máxima ocupada. Esse vinho será distribuído igualmente em barris idênticos também cilíndricos (retos) e vendidos para vários mercados de uma cidade.

Sabe-se que cada mercado receberá 2 barris de vinho, com altura igual a $\frac{1}{5}$ da altura do tanque e com diâmetro da base igual a $\frac{1}{4}$ do diâmetro da base do tanque. Nessas condições, a quantidade x de mercados que receberão os barris (com sua capacidade máxima ocupada) é tal que x pertence ao intervalo

a) $0 < x < 20$

b) $20 \leq x < 40$

c) $40 \leq x < 60$

d) $60 \leq x < 80$

Comentários

Se x é a quantidade de mercados que receberão os barris, e cada mercado vai receber 2 barris, então serão distribuídos, no total, $2x$ barris de vinho. Como os volumes desses $2x$ barris, somados, têm que dar igual à quantidade de vinho total armazenada no tanque inicial, temos:

$$V_{tanque} = 2 \cdot x \cdot V_{barril}$$

$$V_{tanque} = Área_{base} \cdot altura = \pi R^2 \cdot H$$

É dito que o barril pequeno possui um quinto da altura do tanque ($h = H/5$) e possui um diâmetro da base igual a um quarto do diâmetro da base do tanque ($2r = \frac{2R}{4} \Rightarrow r = R/4$). Assim:

$$V_{barril} = \pi r^2 \cdot h = \pi \left(\frac{R}{4}\right)^2 \cdot \frac{H}{5}$$

Assim:

$$V_{tanque} = 2 \cdot x \cdot V_{barril}$$

$$\Rightarrow \pi R^2 \cdot H = 2x \cdot \pi \left(\frac{R}{4}\right)^2 \cdot \frac{H}{5}$$

$$\Rightarrow \pi R^2 H = 2x \cdot \frac{\pi R^2 H}{80} \Rightarrow 1 = \frac{2x}{80} \Rightarrow 2x = 80 \Rightarrow \boxed{x = 40}$$

Logo, $40 \leq x < 60$.

Gabarito: “c”.

---

35. (AFA/2010)

Considere uma chapa de aço circular de espessura desprezível e raio $15\ cm$. Recortando-se, dessa chapa, dois setores circulares de ângulo $\frac{2\pi}{3} rad$ cada, e juntando-se em cada um desses setores os lados de mesma medida, sem perda de material, obtém-se dois objetos em forma de cone. Unindo-se as bases desses cones, obtém-se um objeto A. Dentro desse objeto A foram inseridas esferas de ferro cuja área da superfície, de cada uma, é $9\pi\ cm^2$. Sabendo-se que foram inseridas a maior quantidade possível dessas esferas dentro do objeto A, o espaço vago dentro desse objeto, é tal que, seu volume é, em cm^3, igual a

Dado: $\sqrt{2} = 1,41$

a) 2π

b) π

c) $\frac{\pi}{2}$

d) $\frac{\pi}{4}$

Comentários

Para sabermos quantas esferas caberiam em A, calcularíamos o volume de A, e em seguida dividiríamos pelo volume de uma esfera. A parte inteira dessa divisão nos daria o máximo número de esferas que poderíamos colocar dentro do objeto A, formado por dois cones.

O volume de A calcularemos primeiro achando o seu raio da base e a sua altura por meio das informações dadas. Como ele é formado por dois cones advindos de seções circulares de $2\pi/3$, e de raio 15 (que será geratriz do cone), então o comprimento do arco da seção circular é igual ao perímetro da base do cone:

$$2\pi R_{cone} = 15 \cdot \frac{2\pi}{3} \Rightarrow R_{cone} = 5$$

Como a geratriz do cone é 15 e seu raio é 5, podemos achar a altura do cone:

$$g^2 = R_{cone}^2 + H^2 \Rightarrow 15^2 = 5^2 + H^2 \Rightarrow H^2 = 225 - 25 = 200 \Rightarrow \boxed{H = 10\sqrt{2}}$$

Portanto, o volume da região A é igual à soma dos volumes desses dois cones idênticos:

$$V_A = 2V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi R_{cone}^2 \cdot H = \frac{2\pi}{3} \cdot 25 \cdot 10\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{V_A = \frac{500\pi\sqrt{2}}{3}}$$

Agora, a questão fala que a área superficial de cada esfera é 9π:

$$\Rightarrow 4\pi R_{esfera}^2 = 9\pi \Rightarrow R_{esfera}^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \boxed{R_{esfera} = \frac{3}{2}}$$

Portanto, o volume de uma esfera:

$$V_{esf} = \frac{4}{3}\pi R_{esfera}^3 = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot 27}{8} = \frac{9\pi}{2}$$

Assim, se dividirmos:

$$\frac{V_A}{V_{esf}} = \frac{500\pi\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2}{9\pi} \approx \frac{1410}{27} = 52{,}22$$

Portanto, nesse caso, caberiam 52 esferas destas. Assim, o espaço vago seria:

$$V_{vago} = V_A - 52 \cdot V_{esf} = \frac{500\pi\sqrt{2}}{3} - 52 \cdot \frac{9\pi}{2} \approx \frac{705\pi}{3} - \frac{468\pi}{2}$$

$$\Rightarrow V_{vago} = \frac{705\pi}{3} - \frac{468\pi}{2} = 235\pi - 234\pi = \pi$$

A alternativa que a banca inicialmente considerou correta foi, portanto, a letra b. Entretanto, a questão foi anulada pois o argumento utilizado para afirmar que cabiam 52 esferas foi apenas considerando o volume. Entretanto existem aspectos geométricos não considerados (as esferas são todas indeformáveis), e difíceis de analisar numa prova como esta, que impossibilitam espacialmente a alocação dessas 52 esferas nesse espaço, pois as esferas são, no máximo, tangentes entre si.

Resumindo: não há como garantir que as 52 esferas realmente estão todas dentro de A apenas pelo fato da soma de seu volume ser menor que o volume total de A. Portanto, a questão foi anulada.

Gabarito: Anulada.

---

36. (EFOMM/2020)

Seja a esfera de raio R inscrita na pirâmide quadrangular regular de aresta base 2 cm e aresta lateral $\sqrt{38}$ cm. Sabendo-se que a esfera tangencia todas as faces da pirâmide, o valor de R, em cm, é

a) $\frac{\sqrt{37}+1}{6}$

b) $\frac{\sqrt{39}-1}{38}$

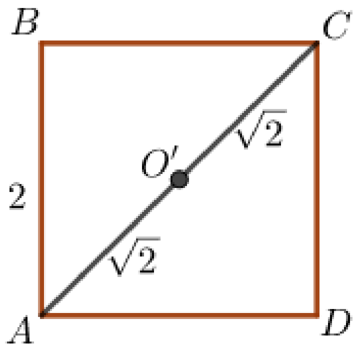
c) $\frac{6\sqrt{38}+12}{17}$

d) $\frac{\sqrt{37}-1}{6}$

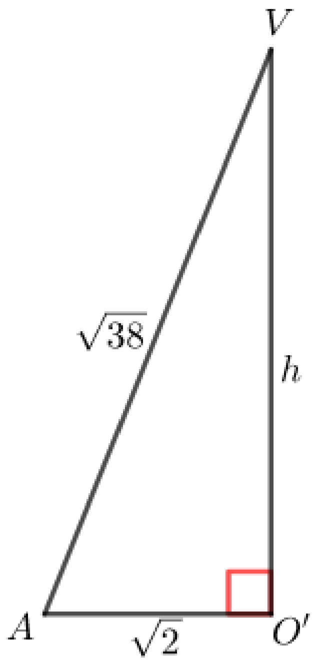
e) $\frac{6\sqrt{38}-12}{17}$

Comentários

Sabemos que, se a esfera está inscrita na pirâmide regular, então a projeção do centro da esfera e do vértice da pirâmide coincidem com o centro do quadrado.



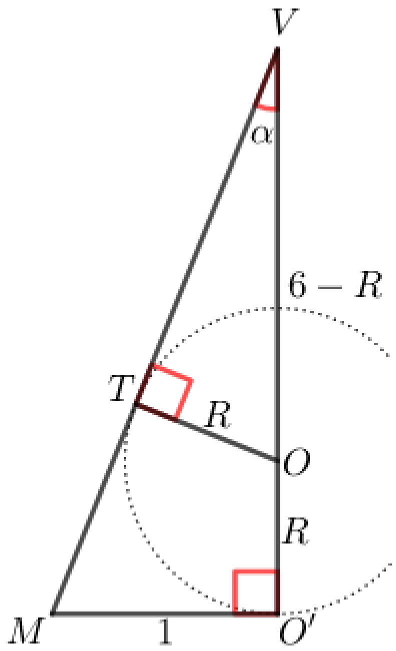
Desenho do quadrado da base. Veja como a diagonal do quadrado é dividida na metade pelo centro O'. Assim, olhando primeiramente para o triângulo formado pelo vértice do prisma V, por um vértice da base A e pelo centro do quadrado O', teremos:



Assim, calculando a altura da pirâmide:

$$AV^2 = AO'^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 38 - 2 = 36 \Rightarrow \boxed{h = 6}$$

Assim, agora olhando para o triângulo $VO'M$, em que M é o ponto médio do lado AB, por exemplo, é fácil ver que um dos pontos de tangência da esfera com a pirâmide está sobre o lado VM, o qual é a altura do triângulo VAB, tudo isso pela simetria do problema. Portanto, no $\Delta VO'M$:



Veja que T é o ponto de tangência entre a esfera e a pirâmide na reta VM. Assim, olhando para o ângulo α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{MO'}{VO'} = \frac{1}{6} \Rightarrow cotg\ \alpha = 6$$

Sabemos que $cotg^2\alpha + 1 = cossec^2\alpha \Rightarrow 36 + 1 = cossec^2\alpha = 37 \Rightarrow sen\ \alpha = \frac{\sqrt{37}}{37}$

Assim, no triângulo VTO:

$$sen\ \alpha = \frac{R}{6-R} \Rightarrow R(1 + sen\ \alpha) = 6\ sen\alpha \Rightarrow R = \frac{6\ sen\ \alpha}{1 + sen\ \alpha} = \frac{6}{cossec\ \alpha + 1} = \frac{6}{\sqrt{37}+1}$$

$$\Rightarrow R = \frac{6}{\sqrt{37}+1} \cdot \frac{\sqrt{37}-1}{\sqrt{37}-1} = \frac{\sqrt{37}-1}{6}$$

Gabarito: D

---

37. (EFOMM/2020)

Considere um recipiente cúbico W de aresta 2. Suponha que possamos colocar 8 esferas de raio R e uma de raio $2R$ dentro de W dispostas do seguinte modo: a esfera de raio $2R$ tem seu centro coincidindo com o centro de W e cada uma das demais esferas são tangentes a três faces e à esfera maior. Assinale a opção que apresenta o intervalo ao qual R pertença.

Dados: $\sqrt{2} = 1.4$, $\sqrt{3} = 1.7$ e $\sqrt{5} = 2.2$

a) $\frac{1}{6} < R < \frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{3} < R < \frac{2}{5}$

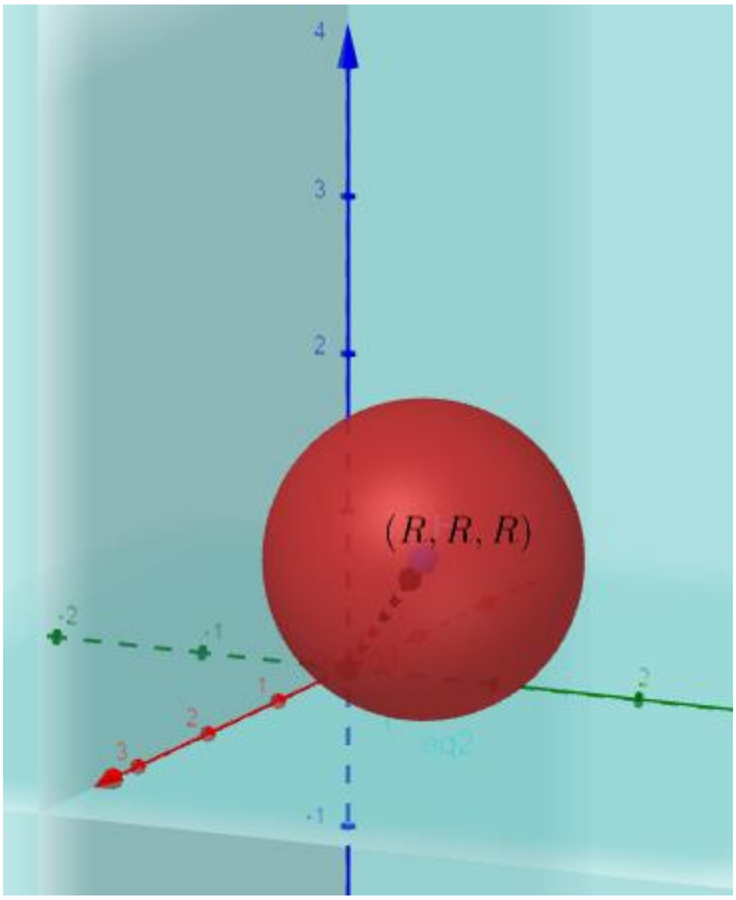
c) $\frac{3}{7} < R < \frac{1}{2}$

d) $\frac{2}{3} < R < \frac{4}{5}$

e) $\frac{4}{5} < R < \frac{9}{10}$

Comentários

Observe que nessa configuração, teremos três esferas alinhadas com diagonal do cubo, duas de raio R e a do meio de raio $2R$. As esferas que estão tangentes às três faces possuem o seu centro a uma distância de $R\sqrt{3}$ do vértice mais próximo, pois:



Observe que, numa "quina", a esfera que tangencia todos os planos desse triedro dista R de cada plano. Portanto, sua coordenada é (R, R, R), que dista $R\sqrt{3}$ da origem.

Assim, a diagonal do cubo será:

$$D = R\sqrt{3} + R + 4R + R + R\sqrt{3} = 2R(3 + \sqrt{3})$$

Mas sabemos que a diagonal do cubo de lado L é dada por $L\sqrt{3}$. No nosso caso $L = 2$, logo:

$$2\sqrt{3} = 2R(3 + \sqrt{3}) \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3} + 1}$$

Considerando $\sqrt{3} = 1.7$:

$$R \approx \frac{1}{2{,}7} \approx 0{,}37$$

Portanto: $\frac{1}{3} < R < \frac{2}{5}$, pois $0{,}333 \ldots < 0{,}37 < 0{,}4$.

Gabarito: "b".

38. (EFOMM/2016)

Seja uma esfera de raio R e um cubo de aresta A, ambos com a mesma área de superfície. A razão entre o volume do cubo e o volume da esfera é igual a

a) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

b) $\sqrt{\frac{\pi}{12}}$

c) $\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$

d) $\sqrt{\frac{\pi}{3}}$

e) $\sqrt{\frac{\pi}{6}}$

Comentários

A área superficial de uma esfera de raio R é:

$$A_1 = 4\pi R^2$$

A área superficial de um cubo de aresta A é igual à soma das áreas das seis faces quadrangulares de lado A:

$$A_2 = 6 \cdot A^2$$

O enunciado afirma que essas áreas são iguais:

$$A_1 = A_2 \Rightarrow 4\pi R^2 = 6A^2 \Rightarrow \boxed{\frac{A}{R} = \sqrt{\frac{4\pi}{6}}}$$

Queremos a razão r entre o volume do cubo (A^3) e o volume da esfera $\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$:

$$r = \frac{A^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{4\pi} \cdot \left(\frac{A}{R}\right)^3 = \frac{3}{4\pi} \cdot \left(\sqrt{\frac{4\pi}{6}}\right)^3 = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{4\pi}{6}\sqrt{\frac{4\pi}{6}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{4\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow r = \frac{2}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{6}} = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$$

Gabarito: "e".

---

39. (EFOMM/2015)

Um tanque em forma de cone circular de altura h encontra-se com vértice para baixo e com eixo na vertical. Esse tanque, quando completamente cheio, comporta 6000 litros de água. O volume de água, quando o nível está a $1/4$ da altura, é igual a

a) 1500 litros.

b) 3500 litros.

c) 3375 litros.

d) 3000 litros.

e) 1250 litros.

Comentários

O volume de um tanque em formato de cone de altura h e raio da base R é:

$$V_{total} = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot h = 6000$$

Entretanto, é pedido o volume quando o tanque está a um quarto da altura h. Nessa situação, como o cone de água menor, que possui altura $h/4$, é semelhante ao maior, então seu raio da base segue a mesma proporção de semelhança de sua altura. Portanto:

$$h_{menor} = \frac{h}{4} \underbrace{\Rightarrow}_{POR\ SEMELHANÇA} R_{menor} = \frac{R}{4}$$

Portanto, o volume do tanque a um quarto da altura é:

$$V_{1/4} = \frac{1}{3} \cdot \pi R_{menor}^2 \cdot h_{menor} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi R^2}{16} \cdot \frac{h}{4} = \frac{1}{64} \cdot \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{1}{64} \cdot 6000 = 93{,}75L$$

Portanto, a questão não possui alternativa correta e foi anulada pela banca.

Gabarito: “ANULADA”.

---

40. (EFOMM/2015)

Um astronauta, em sua nave espacial, consegue observar em certo momento exatamente $1/6$ da superfície de um planeta. Determine a que distância ele está da superfície desse planeta. Considere o raio do planeta igual a $12800\ km$.

a) $1300\ km$.

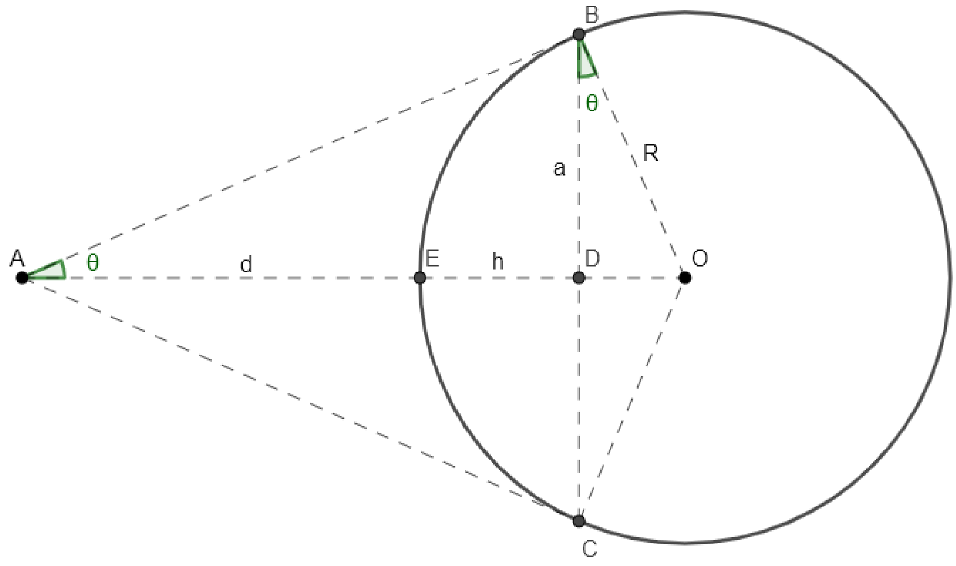
b) $1500\ km$.

c) $1600\ km$.

d) $3200\ km$.

e) $6400\ km$.

Comentários



Vamos determinar d em função da fração $f = \frac{1}{6}$ da área do planeta vista pelo astronauta localizado em A e do raio R do planeta. A fórmula para a área da calota esférica é $S_{cal} = 2\pi Rh$.

$$d = AE = AO - EO = R \cdot \operatorname{cossec}\theta - R = R \cdot (\operatorname{cossec}\theta - 1).$$

$$f = \frac{S_{cal}}{S_{esf}} = \frac{2\pi Rh}{4\pi R^2} = \frac{h}{2R} = \frac{ED}{2R} = \frac{EO - DO}{2R} = \frac{R - R \cdot \operatorname{sen}\theta}{2R} = \frac{1 - \operatorname{sen}\theta}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 1 - 2f.$$

$$\Rightarrow d = R \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} - 1\right) = R \cdot \left(\frac{1}{1 - 2f} - 1\right) = \frac{2fR}{1 - 2f}.$$

Fazendo as contas:

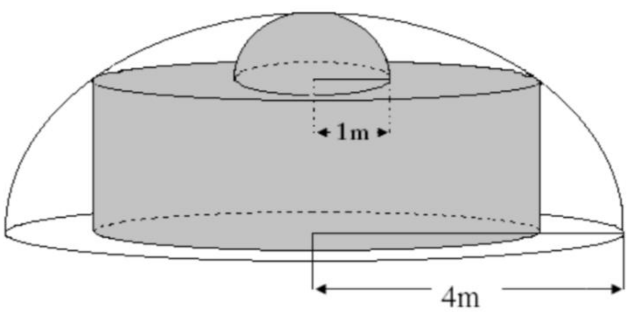
$$d = \frac{2 \cdot \frac{1}{6} \cdot (12800\ km)}{1 - 2 \cdot 1/6} = 6400\ km.$$

Gabarito: "e"

---

41. (EFOMM/2013)

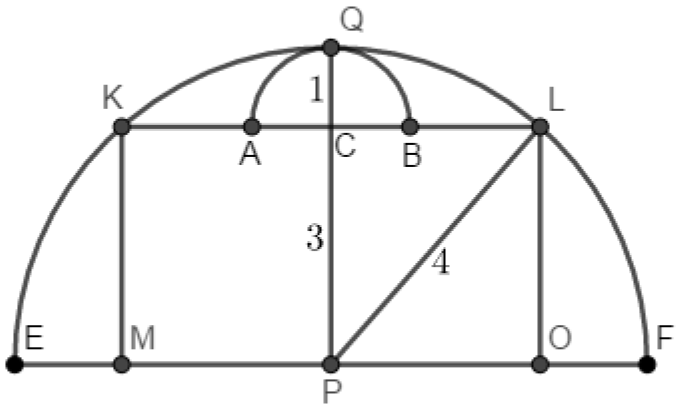
Constrói um depósito, na forma de um sólido V, dentro de uma semiesfera de raio $4m$. O depósito é formado por uma semiesfera de raio $1m$ sobreposta a um cilindro circular dispostos conforme a figura. Então a área da superfície total de V em m^2 é igual a:



a) $(20 + 14\sqrt{2})\pi$.
b) $(17 + 4\sqrt{10})\pi$
c) $(8 + 4\sqrt{7})\pi$.
d) $(21 + 7\sqrt{6})\pi$.
e) $(15 + 6\sqrt{7})\pi$.

Comentários

Desenhando a projeção num plano perpendicular à base passando pelo centro da semiesfera:



Veja que como $PQ = 4$ e $CQ = 1$ são raios, então a altura do cilindro é $PC = PQ - CQ = 3$. No triângulo retângulo PLO, então:

$$PL^2 = LO^2 + PO^2 \Rightarrow 16 = 9 + PO^2 \Rightarrow PO = \sqrt{7}$$

Assim, o raio da base do cilindro é $\sqrt{7}$. Portanto, a área total do sólido V é igual a soma da área da base inferior mais a área lateral do cilindro, mais a área da base do cilindro menos a área da base circular da semiesfera de raio 1, mais a área superficial da semiesfera de raio 1:

$$\acute{A}rea_V = \underbrace{\pi\sqrt{7}^2}_{BASE\ CILINDRO} + \underbrace{2\pi\sqrt{7}\cdot 3}_{LATERAL\ CILINDRO} + \underbrace{\pi\sqrt{7}^2 - \pi\cdot 1^2}_{BASE\ CILINDRO-BASE\ SEMIESFERA} + \underbrace{2\pi\cdot 1^2}_{SUPERFÍCIE\ SEMIESFERA}$$

$$\Rightarrow \acute{A}rea_V = 15\pi + 6\sqrt{7}\pi = (15 + 6\sqrt{7})\pi$$

Gabarito: "e".

---

42. (EFOMM/2013)

Um cone foi formado a partir de uma chapa de aço, no formato de um setor de $12cm$ de raio e ângulo central de $120°$. Então, a altura do cone é:

a) $2\sqrt{2}$.
b) $4\sqrt{2}$.
c) $6\sqrt{2}$.
d) $8\sqrt{2}$.
e) $12\sqrt{2}$.

Comentários

Sabemos que o raio do setor circular que gera um cone é igual à geratriz deste, então $g = 12$. Além disso, sabemos que o comprimento do arco do setor circular é igual ao comprimento da base circular do cone:

$$\Rightarrow \frac{120°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 12 = 2\pi R \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 12 = R \Rightarrow R = 4$$

Assim, para calcular a altura do cone, basta usar a relação:

$$g^2 = R^2 + H^2 \Rightarrow 12^2 = 4^2 + H^2 \Rightarrow H^2 = 128 \Rightarrow H = 8\sqrt{2}$$

A relação acima vem do fato da geratriz, a altura e o raio do cone reto formarem um triângulo retângulo.

Gabarito: "d".

---

43. (EFOMM/2010)

Um recipiente tem a forma de um paralelepípedo retângulo com altura h e base quadrada. Ele está com uma certa quantidade de água até uma altura h_1. Duas esferas, ambas com diâmetros iguais a $2\ dm$, foram colocadas dentro do recipiente, ficando esse recipiente com o nível de água até a borda (altura h). Considerando que o volume do paralelepípedo retângulo é de 40 litros, pode - se afirmar que a razão $\frac{h_1}{h}$, utilizando $\pi = 3$, vale:

a) $\frac{4}{5}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{8}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{2}{5}$

Comentários

O volume do paralelepípedo retângulo de base quadrada é dado por:

$$V = l^2 \cdot h = 40 \Rightarrow l^2 = \frac{40}{h}$$

Em que l é o lado da base quadrada. É dado que, para um nível de água h_1, quando adicionamos duas esferas de 1 dm de raio, o volume se completa (altura h). Então:

$$40 = l^2 h_1 + 2 \cdot \frac{4}{3}\pi 1^3$$

Considerando $\pi = 3$:

$$40 = \frac{40}{h} \cdot h_1 + 8 \Rightarrow 32 = 40 \cdot \frac{h_1}{h} \Rightarrow \boxed{\frac{h_1}{h} = \frac{4}{5}}$$

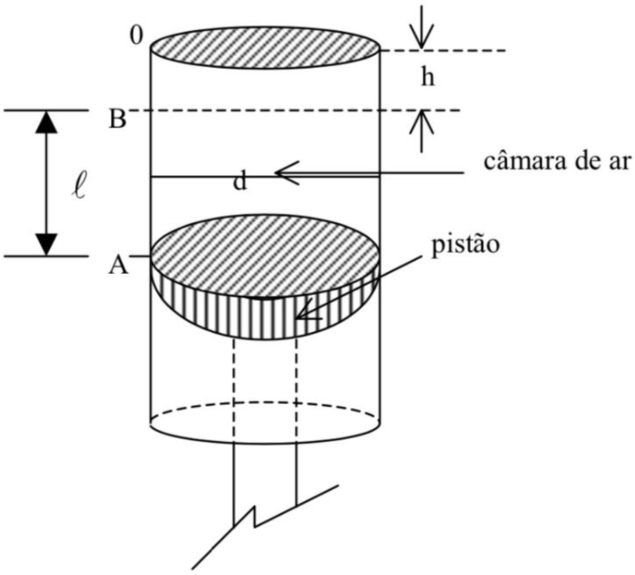
Gabarito: "a".

---

44. (EFOMM/2005)

A figura abaixo representa um cilindro de motor de combustão, cujo pistão se desloca entre A e B, comprimindo o ar em seu interior. Se a relação de compressão de ar, entre os volumes máximo e

mínimo é de $10:1$ e o volume mínimo é de $0,5l$, então o diâmetro do pistão, em cm será (considere $\pi = 3$)



a) $\frac{600}{AB}$
b) $\frac{20\sqrt{15AB}}{AB}$
c) $200\sqrt{AB}$
d) $20,8\sqrt{AB}$
e) $12,5\sqrt{15AB}$

Comentários

A razão entre os volumes máximo e mínimo é 10:1, sendo que o volume mínimo mede $0{,}5L = 500\ cm^3$ Portanto:

$$\frac{V_{Max}}{V_{Min}} = \frac{10}{1} \Rightarrow V_{Max} = 10V_{Min} = 10 \cdot 500 = 5000cm^3$$

Entretanto, o volume máximo é igual ao volume do cilindro de diâmetro d (do pistão) e altura AB somado ao volume mínio (0,5L):

$$V_{Max} = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot AB + 500$$

Considerando $\pi = 3$:

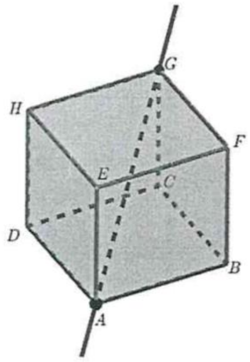
$$5000 = 3 \cdot \frac{d^2}{4} \cdot AB + 500 \Rightarrow \frac{3d^2AB}{4} = 4500 \Rightarrow d^2AB = \frac{18000}{3} = 6000 \Rightarrow d = \sqrt{\frac{6000}{AB}}$$

$$\Rightarrow d = \frac{20\sqrt{15}}{\sqrt{AB}} = \frac{20\sqrt{15AB}}{AB}$$

Gabarito: "b".

45. (Escola Naval/2018)

Observe a figura abaixo



O cubo $ABCDEFGH$, de aresta $3\ cm$, é rotacionado em torno de sua diagonal AG, gerando um sólido de revolução de volume V. Dessa forma, pode-se afirmar que o valor de V, em cm^3, é tal que:

a) $V < 17$

b) $17 < V < 27$

c) $36 < V < 55$

d) $27 < V < 36$

e) $55 < V < 74$

Comentários

Veja que as alternativas não requerem o valor exato do volume solicitado. Seria impossível calculá-lo em tempo útil de prova. Portanto, vamos separar o cálculo em duas partes:

Veja que podemos calcular o volume do sólido formado pela rotação do tetraedro $ADEB$, de vértice A que é igual ao tetraedro $GHCF$, de vértice G. A igualdade vem da simetria do problema. Assim, vamos calcular o volume de $ADEB$:

Veja que no $ADEB$, os lados do triângulo da base DEB são as diagonais das faces quadradas, isto é, medem todos $3\sqrt{2}$ e, portanto, é um triângulo equilátero. A projeção de A no plano DEB, portanto, se dá no centro do triângulo equilátero, e está contida na reta AG. O giro desse tetraedro vai gerar um cone de raio da base igual à distância do centro de DEB a um de seus vértices. Sabemos que num triângulo equilátero isso equivale a dois terços de sua altura. Assim:

$$R_{cone} = \frac{2}{3} \cdot \left(3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{6}$$

A altura podemos calcular pela relação com a geratriz do cone (a aresta do cubo) e o raio do cone, que formam um triângulo retângulo:

$$g^2 = R^2 + H^2 \Rightarrow 3^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2 + H^2 \Rightarrow H^2 = 3 \Rightarrow H = \sqrt{3}$$

Assim, o volume do sólido gerado ao rotacionar o tetraedro $ADEB$ em torno do eixo AG é o cone:

$$V_{ADEB} = \frac{1}{3} \cdot \pi\left(\sqrt{6}\right)^2 \cdot \sqrt{3} \approx 10{,}883$$

Assim, como $ADEB = GHCF \Rightarrow V_{GHCF} \approx 10{,}883$

Portanto, o volume formado pela rotação desses dois tetraedros são:

$$V_{tetraedros} \approx 21{,}76$$

O restante do sólido (cubo subtraído dos dois tetraedros) nós vamos aproximar de um cilindro de raio da base igual ao raio do cone anterior, e altura igual à subtração da diagonal pelas alturas dos cones anteriores:

$$R_{cilindro} = R_{cone} = \sqrt{6}$$

$$Altura_{cilindro} = AG - 2 \cdot altura_{cone} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

Portanto, o volume desse cilindro, que com certeza é maior do que o real causado pela rotação do cubo menos os dois tetraedros, é:

$$V_{cilindro} = \pi R_{cilindro}^2 altura_{cilindro} = \pi \cdot 6 \cdot \sqrt{3} \approx 32{,}65$$

Portanto, sabemos que:

$$V < V_{tetraedros} + V_{cilindro} \approx 54{,}04$$

$$\Rightarrow V < 54{,}04 < 55$$

Por outro lado, o volume restante (cubo menos os dois tetraedros) é menor que o cilindro de raio igual à metade da diagonal da face quadrada (basta ver o plano que passa pela metade do cubo, paralelo à base) e altura igual à do cilindro anterior:

$$V_{cilindro2} = \pi \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3} \approx 24{,}48$$

Portanto:

$$V > V_{tetraedros} + V_{cilindro2} = 21{,}76 + 24{,}48 \approx 46{,}24 > 36$$

Assim:

$$36 < V < 55$$

Gabarito: "c".

---

46. (Escola Naval/2014)

Sabendo-se que um cilindro de revolução de raio igual a $20\ cm$, quando cortado por um plano paralelo ao eixo de revolução, a uma distância de $12\ cm$ desse eixo, apresenta secção retangular com área igual à área da base do cilindro. O volume desse cilindro, em centímetros cúbicos é

a) $6.000\pi^2$

b) $5.000\pi^2$

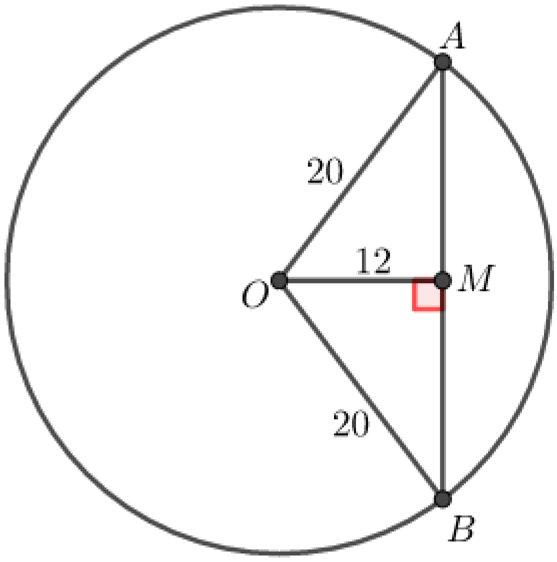
c) $4.000\pi^2$

d) $3.000\pi^2$

e) $2.000\pi^2$

Comentários

Esse plano paralelo ao eixo de revolução do cilindro (eixo que passa pelos centros das bases) vai cortar as bases circulares formando uma corda que dista 12cm do centro da base. O comprimento dessa corda é igual à base da seção retangular citada. Fazendo o desenho da base cortada pelo plano:



Como $OA = OA = R = 20$, então o triângulo OAB é isósceles e sua altura OM é também mediana, o que torna M ponto médio de AB. Assim, no triângulo retângulo OMB:

$$OB^2 = OM^2 + MB^2 \Rightarrow 20^2 = 12^2 + MB^2 \Rightarrow MB^2 = 400 - 144 = 256 \Rightarrow MB = 16$$

$$MB = \frac{AB}{2} \Rightarrow \boxed{AB = 32}$$

A área dessa seção retangular de base AB e altura h igual à altura do cilindro é igual à área da base do cilindro. Então:

$$AB \cdot h = \pi R^2 \Rightarrow 32h = 20^2\pi = 400\pi \Rightarrow h = \frac{400\pi}{32} = \frac{25\pi}{2}$$

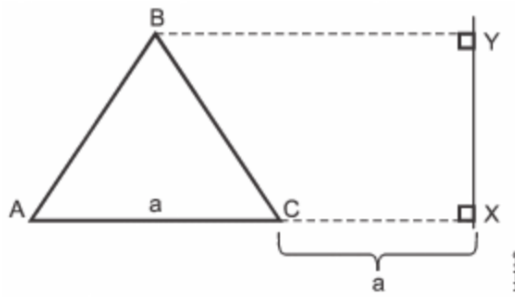
Assim, o volume do cilindro é:

$$V_{cilindro} = \pi R^2 h = 400 \cdot \frac{25\pi^2}{2} = 5000\pi^2$$

Gabarito: “b”.

47. (Escola Naval/2014)

A área da superfície de revolução gerada pela rotação do triangulo equilátero ABC em torno do eixo XY na figura abaixo, em unidade de área é



a) $9\pi a^2$
b) $9\sqrt{2}\pi a^2$
c) $9\sqrt{3}\pi a^2$
d) $6\sqrt{3}\pi a^2$
e) $6\sqrt{2}\pi a^2$

Comentários

A área desejada é a mesma gerada pela rotação de $AB, BC\ e\ AC$ em torno de XY. O teorema de Pappus nos fornece essas áreas superficiais causadas pelas rotações desses segmentos:

$$A_{AB} = 2\pi \cdot r_{AB} \cdot AB = 2\pi r_{AB} a$$

Onde r_{AB} é a distância do ponto médio de AB ao eixo de rotação XY. Se adotarmos um eixo x positivo para esquerda na figura acima, r_{AB} será a coordenada em x do ponto médio de AB, logo, veja que:

$$x_A = 2a\ e\ x_B = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$$

$$\Rightarrow r_{AB} = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{7a}{4}$$

$$\Rightarrow A_{AB} = 2\pi \cdot \frac{7a^2}{4} = \frac{7}{2}\pi a^2$$

De modo análogo:

$$A_{AC} = 2\pi \cdot r_{AC} \cdot AC = 2\pi r_{AC} a$$

$$r_{AC} = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2a + a}{2} = \frac{3a}{2}$$

$$\Rightarrow A_{AC} = 2\pi \cdot \frac{3a}{2} \cdot a = 3\pi a^2$$

Por fim:

$$A_{BC} = 2\pi \cdot r_{BC} \cdot BC = 2\pi r_{BC} a$$

$$r_{BC} = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{\frac{3a}{2} + a}{2} = \frac{5a}{4}$$

$$\Rightarrow A_{BC} = 2\pi \cdot \frac{5a^2}{4} = \frac{5\pi a^2}{2}$$

Assim, a área desejada é a soma dessas três áreas de revolução acima:

$$A = \frac{7}{2}\pi a^2 + 3\pi a^2 + \frac{5}{2}\pi a^2 = 9\pi a^2$$

Gabarito: “a”.

---

48. (Escola Naval/2013)

Um astronauta, em sua nave espacial, consegue observar, em certo momento, exatamente $\frac{1}{10}$ da superfície da Terra.

Que distância ele está do nosso planeta? Considere o raio da Terra igual a $6400\ km$.

a) $1200\ km$

b) $1280\ km$

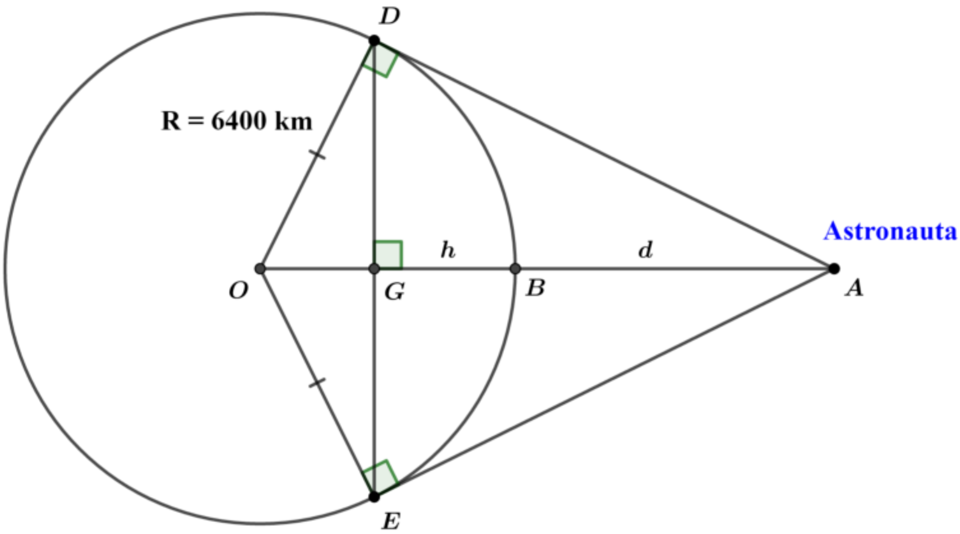
c) $1600\ km$

d) $3200\ km$

e) $4200\ km$

Comentários

De acordo com enunciado, temos a seguinte ilustração:



Sabemos que o cálculo da área de uma calota qualquer, pode ser feito por $A_c = 2\pi Rh$, portanto, o astronauta enxerga uma área A da superfície terrestre igual a:

$$A = A_c = 2\pi Rh$$

Por outro lado, o astronauta pode enxergar $\frac{1}{10}$ da superfície solar, portanto temos que:

$$A = \frac{1}{10}A_t = \frac{1}{10}4\pi R^2$$

Portanto, temos que:

$$2\pi Rh = \frac{1}{10}4\pi R^2$$
$$h = \frac{1}{10}2R$$
$$h = \frac{1}{5}R$$

Temos do triângulo retângulo AOE:

$$OE^2 = OA \cdot OG$$
$$R^2 = OA \cdot OG$$
$$R^2 = OA \cdot \left(R - \frac{1}{5}R\right)$$
$$R^2 = OA \cdot \frac{4}{5}R$$
$$R \cdot \frac{5}{4} = OA$$

Assim, temos que

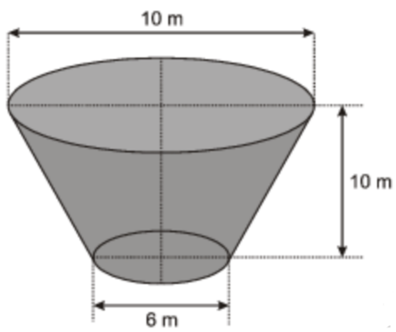
$$d = OA - OB = OA - R = \frac{1}{4}R$$
$$d = \frac{1}{4}R$$
$$d = \frac{6400}{4}Km = 1600Km$$

Gabarito: "c".

---

49. (Escola Naval/2013)

A Marinha do Brasil comprou um reservatório para armazenar combustível com o formato de um tronco de cone conforme figura abaixo. Qual é a capacidade em litros desse reservatório?



a) $\frac{40}{3} \cdot 10^2\pi$
b) $\frac{19}{2} \cdot 10^5\pi$
c) $\frac{49}{3} \cdot 10\pi$
d) $\frac{49}{3} \cdot 10^4\pi$

e) $\frac{19}{3} \cdot 10^3\pi$

Comentários

Sabemos que, para um tronco de cone de área da base menor A_b, área da base maior A_B e altura h, seu volume é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(A_B + \sqrt{A_B A_b} + A_b\right) \cdot h$$

Como o raio da base maior é 5m, da base menor é 3m e a altura é 10, então:

$$A_B = \pi 5^2 = 25\pi$$

$$A_b = \pi 3^3 = 9\pi$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\left(25\pi + \sqrt{25\pi \cdot 9\pi} + 9\pi\right) \cdot 10 = \frac{490\pi}{3}\ m^3 = \frac{49}{3} \cdot 10^4\pi\ Litros$$

Gabarito: “d”.

---

50. (Escola Naval/2012)

Uma lata de querosene tem a forma de um cilindro circular reto cuja base tem raio R. Colocam-se três moedas sobre a base superior da lata, de modo que estas são tangentes entre si e tangentes à borda da base, não existindo folga. Se as moedas têm raio a e encontram-se presas, então o valor de R em função de a, vale

a) $\frac{(1+2\sqrt{3})a}{3}$

b) $\frac{(3+2\sqrt{3})a}{3}$

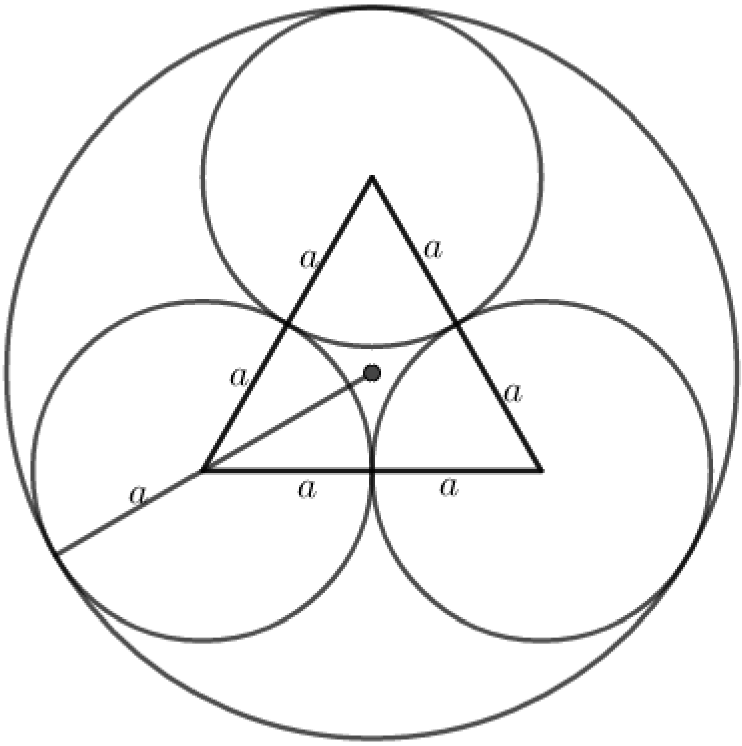
c) $\frac{(3+\sqrt{3})a}{3}$

d) $\left(1 + 2\sqrt{3}\right)a$

e) $(3 + 2\sqrt{3})a$

Comentários

Fazendo o desenho de três esferas idênticas, de raio a, tangentes entre si, e todas elas tangentes a uma maior, sem folga, temos:



Os centros dos círculos formam um triângulo equilátero de lado igual ao dobro do raio de cada círculo. Isso porque o ponto de tangência está alinhado com os centros dos círculos que se tangenciam, pertencendo esses três pontos à reta perpendicular à reta tangente naquele ponto.

Assim, veja que R pedido é igual à distância do centro do triângulo equilátero de lado $2a$ acima até o seu vértice, somado de a, que é o raio de uma das moedas. Sabemos que a distância do centro de um triângulo equilátero até o seu vértice é igual ao raio do seu circuncentro, que obedece à seguinte relação:

$$S = \frac{abc}{4r} \Rightarrow r = \frac{abc}{4S} \Rightarrow r = \frac{(2a)^3}{4 \cdot \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Em que S é a área do triângulo e $a, b\ e\ c$ são os seus lados. Portanto o R que queremos é:

$$R = r + a = \frac{2a\sqrt{3}}{3} + a \Rightarrow \boxed{R = \frac{a\left(3 + 2\sqrt{3}\right)}{3}}$$

Gabarito: "b".

---

51. (Escola Naval/2012)

Uma esfera confeccionada em aço é usada em um rolamento de motor de um navio da Marinha do Brasil. Se o raio da esfera mede $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3}}}}}\ldots cm$, então seu volume vale

a) $\mathbf{45 \cdot 10^{-3}\pi\ dm^3}$

b) $\mathbf{0,45 \cdot 10^{-3}\pi\ dm^3}$

c) $\mathbf{60 \cdot 10^{-3}\pi\ dm^3}$

d) $0,15 \cdot 10^3\pi\ dm^3$

e) $60 \cdot 10^3\pi\ dm^3$

Comentários

O raio mede:

$$R = \sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3}\ldots}}}}$$

Como segue uma sequência infinita e convergente (seu valor converge para um raio), podemos analisar que:

$$R = \sqrt{3\sqrt{5\underbrace{\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3}\ldots}}}_{R}}} \Rightarrow R = \sqrt{3\sqrt{5R}}$$

$$\Rightarrow R^2 = 3\sqrt{5R} \Rightarrow R^4 = 9 \cdot 5R \Rightarrow \boxed{R^3 = 45}\ cm^3$$

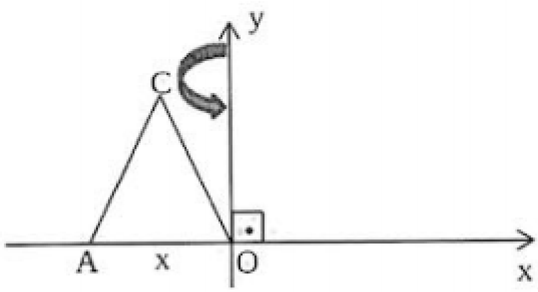
Portanto, o volume da esfera é:

$$V_{esf} = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot 45 = 60\pi\ cm^3 = 60\pi \cdot 10^{-3}\ dm^3$$

Gabarito: "c".

52. (EFOMM/2021)

Ao rotacionar o triângulo equilátero AOC em torno do eixo y, conforme ilustra a figura a seguir, obteremos um sólido. Assinale a alternativa que representa o volume desse sólido, em unidades de volume, sabendo que o vértice O do triângulo AOC sobrepõe-se à origem dos eixos.



a) $\frac{\pi x^3\sqrt{3}}{6}$

b) $\frac{\pi x^3\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{\pi x^3\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\pi x^3\sqrt{3}}{24}$

e) $\frac{7\pi x^3\sqrt{3}}{24}$

Comentários

Vamos aplicar o teorema de Pappus-Guldin. O volume de revolução é dado por:

$$V = 2\pi\overline{x}A$$

Em que $\overline{x}$ é a distância do centro de gravidade do triângulo ao eixo y e A é a área do triângulo equilátero de lado x.

Como o triângulo é equilátero e AO pertence ao eixo x, temos que $\overline{x} = x/2$. A área é dada por:

$$A = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

Substituindo:

$$V = 2\pi\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi x^3\sqrt{3}}{4}$$

Gabarito: B

---

6. QUESTÕES NÍVEL 3

53. (ITA/2021)

Seja $\boldsymbol{P}$ uma pirâmide regular com base quadrada. Suponha que os centros das esferas inscrita e circunscrita a $\boldsymbol{P}$ coincidam. Determine a razão entre as áreas das esferas circunscrita e inscrita a $\boldsymbol{P}$.

54. (ITA/2020)

Considere uma pirâmide reta P cuja base é um hexágono regular de lado l. As faces laterais dessa pirâmide formam um ângulo diedro de $75°$ com a base da própria pirâmide. Sabendo que P está inscrita em uma esfera, determine o raio dessa esfera.

55. (ITA/2017)

Um triângulo retângulo com hipotenusa $c = 2(1 + \sqrt{6})$ está circunscrito a um círculo de raio unitário. Determine a área total da superfície do cone obtido ao girar o triângulo em torno do seu maior cateto.

56. (ITA/2016)

Uma esfera S_1, de raio $R > 0$, está inscrita num cone circular reto K. Outra esfera, S_2, de raio r, com $0 < r < R$, está contida no interior de K e é simultaneamente tangente à esfera S_1 e à superfície lateral de K. O volume de K é igual a

a) $\frac{\pi R^5}{3r(R-r)}$

b) $\frac{2\pi R^5}{3r(R-r)}$

c) $\frac{\pi R^5}{r(R-r)}$

d) $\frac{4\pi R^5}{3r(R-r)}$

e) $\frac{5\pi R^5}{3r(R-r)}$

57. (ITA/2016)

Em um cone circular reto de altura 1 e raio da base 1 inscreve-se um tetraedro regular com uma de suas faces paralela à base do cone, e o vértice oposto coincidindo com o centro da base do cone. Determine o volume do tetraedro.

58. (ITA/2015)

Uma taça em forma de cone circular reto contém um certo volume de um líquido cuja superfície dista h do vértice do cone. Adicionando-se um volume idêntico de líquido na taça, a superfície do líquido, em relação à original, subirá de

a) $\sqrt[3]{2} - h$

b) $\sqrt[3]{2} - 1$

c) $\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)h$

d) h

e) $\frac{h}{2}$

59. (ITA/2014)

Um cilindro reto de altura $h = 1\ cm$ tem sua base no plano xy definida por $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 < 0$. Um plano, contendo a reta $y - x = 0$ e paralelo ao eixo do cilindro, o secciona em dois sólidos. Calcule a área total da superfície do menor sólido.

60. (ITA/2014)

Três circunferências C_1, C_2 e C_3 são tangentes entre si, duas a duas, externamente. Os raios r_1, r_2 e r_3 destas circunferências constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $1/3$. A soma dos comprimentos de C_1, C_2 e C_3 é igual a $26\pi\ cm$. Determine:

a) a área do triângulo cujos vértices são os centros de C_1, C_2 e C_3.

b) o volume do sólido de revolução obtido pela rotação do triângulo em torno da reta que contém o maior lado.

61. (ITA/2014)

Seis esferas de mesmo raio R são colocadas sobre uma superfície horizontal de tal forma que seus centros definam os vértices de um hexágono regular de aresta $2R$. Sobre estas esferas é colocada uma sétima esfera de raio $2R$ que tangencia todas as demais. Determine a distância do centro da sétima esfera à superfície horizontal.

62. (ITA/2014)

Considere o sólido de revolução obtido pela rotação de um triângulo isósceles ABC em torno de uma reta paralela à base $\overline{BC}$ que dista $0,25\ cm$ do vértice A e $0,75\ cm$ da base $\overline{BC}$. Se o lado $\overline{AB}$ mede $\frac{\sqrt{\pi^2+1}}{2\pi}\ cm$, o volume desse sólido, em cm^3, é igual a

a) $9/16$

b) $13/96$

c) $7/24$

d) $9/24$

e) $11/96$

63. (ITA/2013)

No sistema xOy os pontos $A = (2, 0), B = (2, 5)$ e $C = (0, 1)$ são vértices de um triângulo inscrito na base de um cilindro circular reto de altura 8. Para este cilindro, a razão $\frac{volume}{\text{área total da superfície}}$, em unidade de comprimento, é igual a

a) 1

b) $\frac{100}{105}$

c) $\frac{10}{11}$

d) $\frac{100}{115}$

e) $\frac{5}{6}$

64. (ITA/2012)

A superfície lateral de um cone circular reto é um setor circular de $120°$ e área igual a $3\pi\ cm^2$. A área total e o volume deste cone medem, em cm^2 e cm^3, respectivamente

a) 4π e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$

b) 4π e $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$

c) 4π e $\pi\sqrt{2}$

d) 3π e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$

e) π e $2\pi\sqrt{2}$

65. (ITA/2012)

Em um plano estão situados uma circunferência ω de raio $2\ cm$ e um ponto P que dista $2\sqrt{2}\ cm$ do centro de ω. Considere os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ tangentes a ω nos pontos A e B, respectivamente. Ao girar a região fechada delimitada pelos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ e pelo arco menor AB em torno de um eixo passando pelo centro de ω e perpendicular ao segmento $\overline{PA}$, obtém-se um sólido de revolução. Determine:

a) A área total da superfície do sólido.

b) O volume do sólido.

66. (ITA/2012)

Um cone circular reto de altura 1 cm e geratriz $2\sqrt{3}/3$ é interceptado por um plano paralelo à sua base, sendo determinado, assim, um novo cone. Para que este novo cone tenha o mesmo volume de um cubo de aresta $\left(\frac{\pi}{243}\right)^{\frac{1}{3}}$ cm, é necessário que a distância do plano à base do cone original seja, em cm, igual a

a) $1/4$

b) $1/3$

c) $1/2$

d) $2/3$

e) ¾

67. (ITA/2011)

Considere uma esfera Ω com centro em C e raio $r = 6$ cm e um plano Σ que dista 2 cm de C. Determine a área da intersecção do plano Σ com uma cunha esférica de $30°$ em Ω que tenha aresta ortogonal a Σ.

68. (ITA/2011)

Uma esfera está inscrita em uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 12 cm e a aresta da base mede $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ cm. Então o raio da esfera, em cm, é igual a

a) $\frac{10}{3}\sqrt{3}$

b) $\frac{13}{3}$

c) $\frac{15}{4}$

d) $2\sqrt{3}$

e) $\frac{10}{3}$

69. (ITA/2010)

As superfícies de duas esferas se interceptam ortogonalmente (isto é, em cada ponto da intersecção os respectivos planos tangentes são perpendiculares). Sabendo que os raios destas esferas medem 2 cm e $3/2$ cm, respectivamente, calcule

a) a distância entre os centros das duas esferas.

b) a área da superfície do sólido obtido pela intersecção das duas esferas.

70. (ITA/2010)

Um cilindro reto de altura $\sqrt{6}/3$ cm está inscrito num tetraedro regular e tem sua base em uma das faces do tetraedro. Se as arestas do tetraedro medem 3 cm. o volume do cilindro, em cm^3, é igual a

a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$

b) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

c) $\frac{\pi\sqrt{6}}{6}$

d) $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$

e) $\frac{\pi}{3}$

71. (ITA/2008)

Um diedro mede $120°$. A distância da aresta do diedro ao centro de uma esfera de volume $4\sqrt{3}\pi\ \mathrm{cm}^3$ que tangencia as faces do diedro é, em cm, igual a

a) $3\sqrt{3}$

b) $3\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{3}$

d) $2\sqrt{2}$

e) 2

72. (ITA/2008)

Seja C uma circunferência de raio r e centro O e AB um diâmetro de C. Considere o triângulo equilátero BDE inscrito em C. Traça-se a reta s passando pelos pontos O e E até interceptar em F a reta t tangente à circunferência C no ponto A. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pelo arco AE e pelos segmentos AF e EF em torno do diâmetro AB.

73. (ITA/2006)

As medidas, em metros, do raio da base, da altura e da geratriz de um cone circular reto formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão 2 metros. Calcule a área total deste cone em m^2.

74. (ITA/2005)

Um dos catetos de um triângulo retângulo mede $\sqrt[3]{2}$ cm. O volume do sólido gerado pela rotação deste triângulo em tomo da hipotenusa é $\pi\ \mathrm{cm}^3$. Determine os ângulos deste triângulo.

75. (ITA/2005)

Uma esfera de raio r é seccionada por n planos meridianos. Os volumes das respectivas cunhas esféricas contidas em uma semiesfera formam uma progressão aritmética de razão $\pi r^3/45$. Se o volume da menor cunha for igual a $\pi r^3/18$, então n é igual a

a) 4.

b) 3.

c) 6.

d) 5.

e) 7.

76. (ITA/2005)

A circunferência inscrita num triângulo equilátero com lados de 6 cm de comprimento é a interseção de uma esfera de raio igual a 4 cm com o plano do triângulo. Então, a distância do centro da esfera aos vértices do triângulo é (em cm)

a) $3\sqrt{3}$.

b) 6.

c) 5.

d) 4.

e) $2\sqrt{5}$.

77. (ITA/2004)

Considere um cilindro circular reto, de volume igual a $360\pi\ \text{cm}^3$, e uma pirâmide regular cuja base hexagonal está inscrita na base do cilindro. Sabendo que a altura da pirâmide é o dobro da altura do cilindro e que a área da base da pirâmide é de $54\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, então, a área lateral da pirâmide mede, em cm^2,

a) $18\sqrt{427}$

b) $27\sqrt{427}$

c) $36\sqrt{427}$

d) $108\sqrt{3}$

e) $45\sqrt{427}$

78. (ITA/2004)

A área total da superfície de um cone circular reto, cujo raio da base mede R cm, é igual à terça parte da área de um círculo de diâmetro igual ao perímetro da seção meridiana do cone. O volume deste cone, em cm^3, é igual a

a) πR^3

b) $\pi\sqrt{2}R^3$

c) $\pi/\sqrt{2}R^3$

d) $\pi\sqrt{3}R^3$

e) $\pi/\sqrt{3}R^3$

79. (ITA/2003)

Quatro esferas de mesmo raio R > 0 são tangentes externamente duas a duas, de forma que seus centros formam um tetraedro regular com arestas de comprimento 2R. Determine, em função de R, a expressão do volume do tetraedro circunscrito às quatro esferas.

80. (ITA/2003)

Considere o triângulo isósceles OAB, com lados OA e OB de comprimento $\sqrt{2}R$ e lado AB de comprimento $2R$. O volume do sólido, obtido pela rotação deste triângulo em torno da reta que passa por O e é paralela ao lado AB, é igual a:

a) $\pi R^3/2$

b) πR^3

c) $\frac{4\pi R^3}{3}$

d) $\sqrt{2}\pi R^3$

e) $\sqrt{3}\pi R^3$

81. (ITA/2002)

Seja S a área total da superfície de um cone circular reto de altura h, e seja m a razão entre as áreas lateral e da base desse cone. Obtenha uma expressão que forneça h em função apenas de S e m.

82. (ITA/2002)

Considere a região do plano cartesiano xy definida pela desigualdade

$$x^2 + 4x + y^2 - 4y - 8 \leq 0.$$

Quando esta região rodar um ângulo de $\pi/6$ radianos em tomo da reta $x + y = 0$, ela irá gerar um sólido de superfície externa total com área igual a

a) $128\pi/3$

b) $128\pi/4$

c) $128\pi/5$

d) $128\pi/6$

e) $128\pi/7$

83. (ITA/2001)

O raio da base de um cone circular reto é igual à média aritmética da altura e a geratriz do cone. Sabendo-se que o volume do cone é $128\pi\ \mathrm{m}^3$, temos que o raio da base e a altura do cone medem, respectivamente, em metros:

a) 9 e 8

b) 8 e 6

c) 8 e 7

d) 9 e 6

e) 10 e 8

84. (ITA/2000)

Um cilindro circular reto é seccionado por um plano paralelo ao seu eixo. A secção fica a 5 cm do eixo e separa na base um arco de 120°. Sendo de $30\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$ a área da secção plana retangular, então o volume da parte menor do cilindro seccionado mede, em cm^3,

a) $30\pi - 10\sqrt{3}$

b) $30\pi - 20\sqrt{3}$

c) $20\pi - 10\sqrt{3}$

d) $50\pi - 25\sqrt{3}$

e) $100\pi - 75\sqrt{3}$

85. (ITA/2000)

Um cone circular reto com altura de $\sqrt{8}$ cm e raio da base de 2 cm está inscrito numa esfera que, por sua vez, está inscrita num cilindro. A razão entre as áreas das superfícies totais do cilindro e do cone é igual a

a) $\frac{3(\sqrt{2}-1)}{2}$

b) $\frac{9(\sqrt{2}-1)}{4}$

c) $\frac{9(\sqrt{6}-1)}{4}$

d) $\frac{27(\sqrt{3}-1)}{8}$

e) $\frac{9(\sqrt{2}-1)}{16}$

86. (ITA/1999)

Num cone circular reto, a altura é a média geométrica entre o raio da base e a geratriz. A razão entre a altura e o raio da base é:

a) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

b) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{-1+\sqrt{5}}}{2}$

d) $\frac{-1+\sqrt[3]{5}}{3}$

e) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

87. (ITA/1998)

Considere um cone circular reto cuja geratriz mede $\sqrt{5}$ cm e o diâmetro da base mede 2 cm. Traçam-se n planos paralelos à base do cone, que o seccionam determinando n+1 cones, incluindo o original, de modo que a razão entre os volumes do cone maior e do cone menor é 2. Os volumes destes cones formam uma progressão aritmética crescente cuja soma é igual a 2π. Então, o volume, em cm^3, do tronco de cone determinado por dois planos consecutivos é igual a:

a) $\frac{\pi}{33}$

b) $\frac{2\pi}{33}$

c) $\frac{\pi}{9}$

d) $\frac{2\pi}{15}$

e) π

88. (ITA/1997)

A altura e o raio da base de um cone de revolução medem 1 cm e 5 cm respectivamente. Por um ponto do eixo do cone situado a d cm de distância do vértice, traçamos um plano paralelo à base, obtendo um tronco de cone. O volume deste tronco é a média geométrica entre os volumes do cone dado e do cone menor formado. Então d é igual a

a) $\frac{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}}{3}$

b) $\frac{\sqrt[3]{3-\sqrt{5}}}{2}$

c) $\frac{\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{3}$

89. (ITA/1995)

O raio de um cilindro de revolução mede 1,5 m. Sabe-se que a área da base do cilindro coincide com a área da secção determinada por um plano que contém o eixo do cilindro. Então, a área total do cilindro, em m^2, vale:

a) $3\pi^2/4$

b) $9\pi(2+\pi)/4$

c) $\pi(2+\pi)$

d) $\pi^2/2$

e) $3\pi(\pi+1)/2$

90. (ITA/1995)

Um cone circular reto tem altura 12 cm e raio da base 5 cm. O raio da esfera inscrita neste cone mede, em cm:

a) 10/3

b) 7/4

c) 12/5

d) 3

e) 2

91. (IME/2020)

Em um cubo regular de aresta a, os pontos M, N e L pertencentes às três arestas distintas que partem do vértice A estão a uma distância x de A tal que $0 < x \leq \frac{a}{2}$. Para que plano MNL seja tangente à esfera inscrita no cubo, o valor de x é:

a) $\frac{a}{2}(\sqrt{3}-1)$

b) $\frac{a}{2}(3-\sqrt{3})$

c) $\frac{a}{2}(2-\sqrt{3})$

d) $\frac{a}{2}(4-2\sqrt{3})$

e) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

92. (IME/2019)

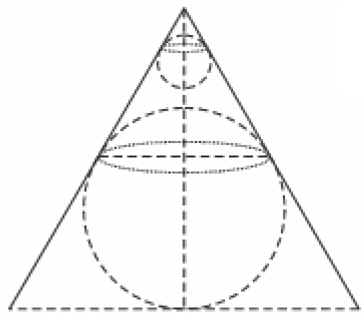
Um cubo com diagonal principal $\overline{AG}$ é interceptado pelo plano α, perpendicular à $\overline{AG}$, formando uma seção hexagonal regular. Calcule, em função da aresta a do cubo:

a) o apótema dessa seção hexagonal;

b) o raio da esfera que é tangente a essa seção e às faces do cubo que contém o vértice A.

93. (IME/2017)

Em um cone equilátero são inscritas duas esferas de raios $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}R$ e R, conforme a figura abaixo. Um plano secante ao cone é traçado de forma que este seja tangente às duas esferas. Determine em termos de R o maior segmento possível que une dois pontos da curva formada pela interseção do referido plano com o cone.



94. (IME/2016)

Um cone é inscrito em um cubo ABCDEFGH de forma que a base do cone é o círculo inscrito na base ABCD. O vértice do cone é o centro da face oposta do cubo. A projeção do vértice H na base ABCD coincide com o vértice D. Determine a área da seção do cone pelo plano ABH em função de a, a medida da aresta do cubo.

95. (IME/2010)

Sejam ABC um triângulo equilátero de lado 2 cm e r uma reta situada no seu plano, distante 3 cm do seu baricentro. Calcule a área da superfície gerada pela rotação deste triângulo em torno da reta r.

a) $8\pi\ \text{cm}^2$

b) $9\pi\ \text{cm}^2$

c) $12\pi\ \text{cm}^2$

d) $16\pi\ \text{cm}^2$

e) $36\pi\ \text{cm}^2$

GABARITO

53. $3 + 2\sqrt{2}$
54. $R = l \cdot \left(\frac{14\sqrt{3}-3}{12}\right)$
55. $S_{total} = \pi \cdot \left(18 + 2\sqrt{6}\right)$
56. b
57. $V_{tetraedro} = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \left(5\sqrt{2} - 7\right)$
58. c
59. $S_{sólido} = \sqrt{2} + \pi - 1\ cm^2$
60. a) $S = 3\sqrt{39}\ cm^2$ b) $V = 39\pi\ cm^3$
61. $R\left(1 + \sqrt{5}\right)$
62. c
63. b
64. a
65. a) $S = 20\pi\ cm^2$ b) $V = \frac{8\pi}{3}\ cm^3$
66. d
67. $S = \frac{8\pi}{3}\ cm^2$
68. e
69. a) $O_1O_2 = \frac{5}{2}\ cm$ b) $\frac{17\pi}{5}\ cm^2$
70. d
71. e
72. $\frac{2\pi r^3}{3}$
73. $S_{total} = 108\pi\ m^2$
74. $30°$, $60°$ e $90°$.
75. c
76. c
77. a

78. e

79. $\left(1+\sqrt{6}\right)^3 \cdot \frac{2\sqrt{2}R^2}{3}$

80. c

81. $h = \sqrt{\frac{S\cdot(m-1)}{\pi}}$

82. a

83. b

84. e

85. d

86. e

87. c

88. b

89. b

90. a

91. anulada

92. a) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ b) $R = \frac{a(3-\sqrt{3})}{4}$

93. $2a = \left(3-\sqrt{3}\right)R$

94. $S_{seção} = \frac{\sqrt{6}\pi\cdot a}{18}$

95. e

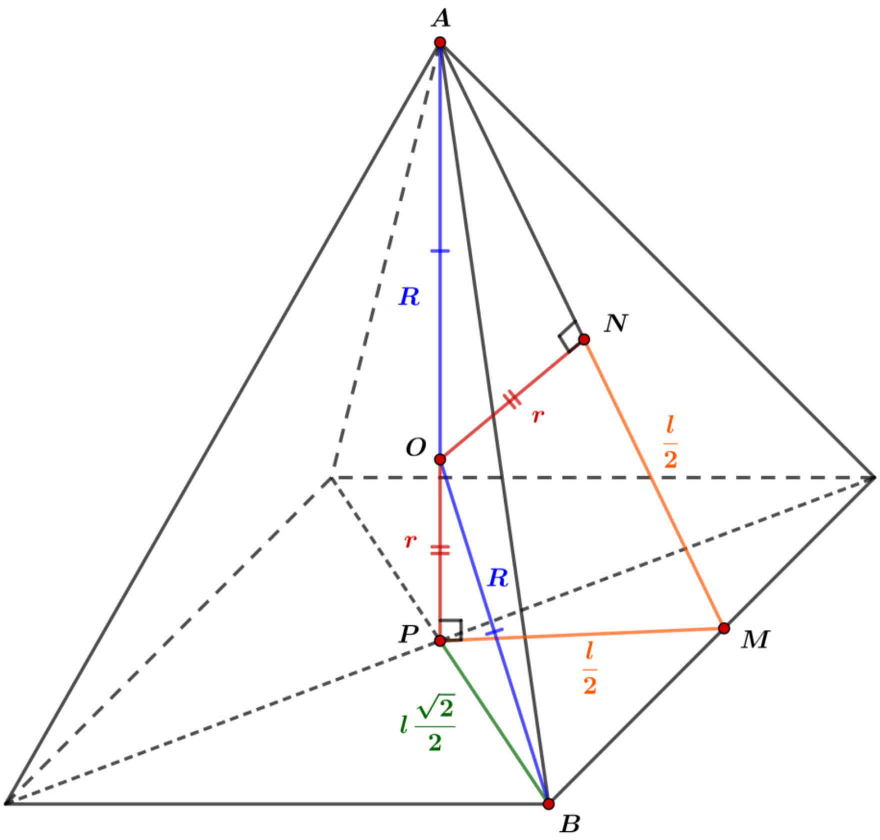
RESOLUÇÃO

53. (ITA/2021)

Seja P uma pirâmide regular com base quadrada. Suponha que os centros das esferas inscrita e circunscrita a P coincidam. Determine a razão entre as áreas das esferas circunscrita e inscrita a P.

Comentários

Sejam r e R os raios das esferas inscrita e circunscrita à pirâmide, respectivamente. Assim, temos a seguinte figura:



Note que $PM = l/2$ é metade do lado do quadrado de lado l e $PB = l\sqrt{2}/2$ é metade da diagonal do quadrado. Além disso, temos que MN e PM são segmentos de retas tangentes à esfera inscrita, logo $MN = PM$.

Queremos calcular a razão entre as áreas das esferas:

$$\frac{A_{circunscrita}}{A_{inscrita}} = \frac{4\pi R^2}{4\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

Por semelhança de triângulos retângulos $\Delta AON \sim \Delta AMP$, temos:

$$\frac{AO}{AM} = \frac{ON}{PM} \Rightarrow \frac{R}{AM} = \frac{r}{\frac{l}{2}} \Rightarrow AM = \left(\frac{R}{r}\right) \cdot \frac{l}{2}$$

$$\frac{AN}{AP} = \frac{ON}{PM} \Rightarrow \frac{AM - MN}{AP} = \frac{ON}{PM} \Rightarrow \frac{\left(\frac{R}{r}\right) \cdot \frac{l}{2} - \frac{l}{2}}{R + r} = \frac{r}{\left(\frac{l}{2}\right)} \Rightarrow \left(\frac{l}{2}\right)^2 \left(\frac{R}{r} - 1\right) = r(R + r)$$

$$\Rightarrow l^2 = \frac{4r^2(R + r)}{R - r}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔOPB:

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{l\sqrt{2}}{2}\right)^2 = r^2 + \frac{l^2}{2}$$

$$R^2 = r^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4r^2(R+r)}{R-r}$$

$$R^2 - r^2 = \frac{2r^2(R+r)}{R-r}$$

Dividindo a equação por r^2 e reescrevendo-a em função de R/r, obtemos:

$$\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1 = \frac{2\left(\left(\frac{R}{r}\right) + 1\right)}{\left(\frac{R}{r}\right) - 1}$$

Fazendo $k = R/r$:

$$k^2 - 1 = \frac{2(k+1)}{k-1}$$

$$(k-1)(k+1) = \frac{2(k+1)}{k-1}$$

Como $k > 0$, temos:

$$k - 1 = \frac{2}{k-1} \Rightarrow (k-1)^2 = 2 \Rightarrow k - 1 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow k = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$k > 0 \Rightarrow k = 1 + \sqrt{2}$$

Queremos

$$\left(\frac{R}{r}\right)^2 = k^2 = \left(1+\sqrt{2}\right)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

Gabarito: $3 + 2\sqrt{2}$

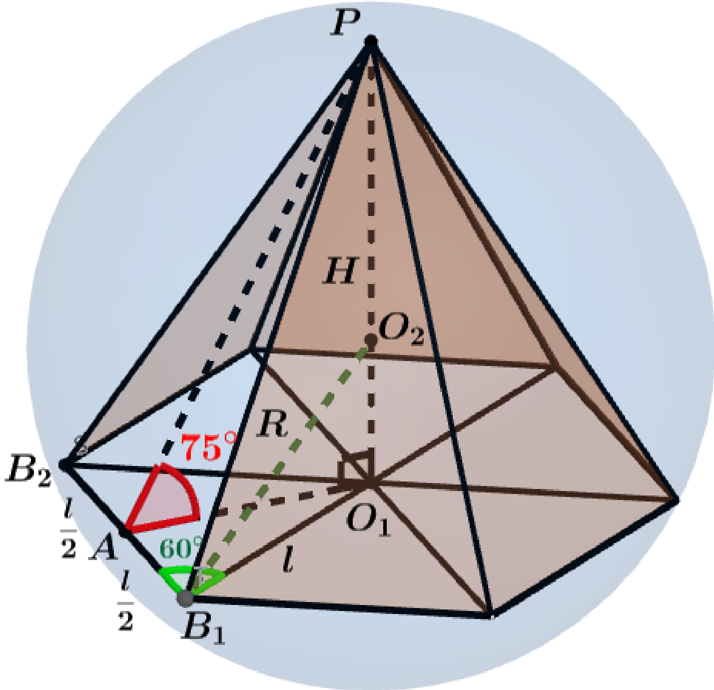
---

54. (ITA/2020)

Considere uma pirâmide reta P cuja base é um hexágono regular de lado l. As faces laterais dessa pirâmide formam um ângulo diedro de $75°$ com a base da própria pirâmide. Sabendo que P está inscrita em uma esfera, determine o raio dessa esfera.

Comentários

Espacialmente, temos os seguinte problema:



De acordo com a figura, pela tangente de 75° no triângulo AO_1P, vem:

$$tg(75°) = \frac{O_1P}{AO_1}$$

Em que:

$$AO_1 = O_1B_1 \cdot sen(60°)$$

$$AO_1 = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo:

$$tg(75°) = \frac{H}{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$tg(45° + 30) = \frac{H}{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{tg45° + tg30°}{1 - tg30° \cdot tg45°} = \frac{H}{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{H}{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{H}{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$H = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right)$$

$$H = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{6}$$

$$H = l \cdot \frac{\sqrt{3}\left(12 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}\right)}{12}$$

$$H = l \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $B_1O_1O_2$, vem:

$$R^2 = (l)^2 + (H - R)^2$$

$$R^2 = l^2 + H^2 - 2 \cdot H \cdot R + R^2$$

$$0 = l^2 + l^2 \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot l \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right) \cdot R$$

$$R = l \cdot \left(\frac{1 + \left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right)^2}{2\sqrt{3} + 3}\right)$$

$$R = l \cdot \left(\frac{1 + 3 + 3 \cdot \sqrt{3} + \frac{9}{4}}{2\sqrt{3} + 3}\right)$$

$$R = \frac{l}{4} \cdot \left(\frac{25 + 12\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 3}\right)$$

$$R = \frac{l}{4} \cdot \left(\frac{25 + 12\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 3}\right) \cdot \frac{\left(2\sqrt{3} - 3\right)}{\left(2\sqrt{3} - 3\right)}$$

$$\boxed{R = l \cdot \left(\frac{14\sqrt{3} - 3}{12}\right)}$$

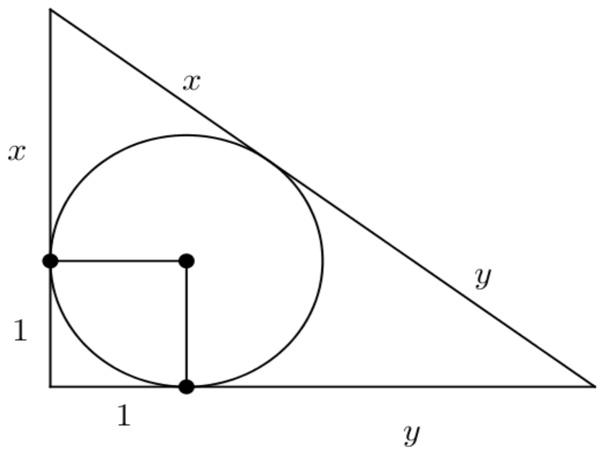
Gabarito: $\boldsymbol{R = l \cdot \left(\frac{14\sqrt{3}-3}{12}\right)}$

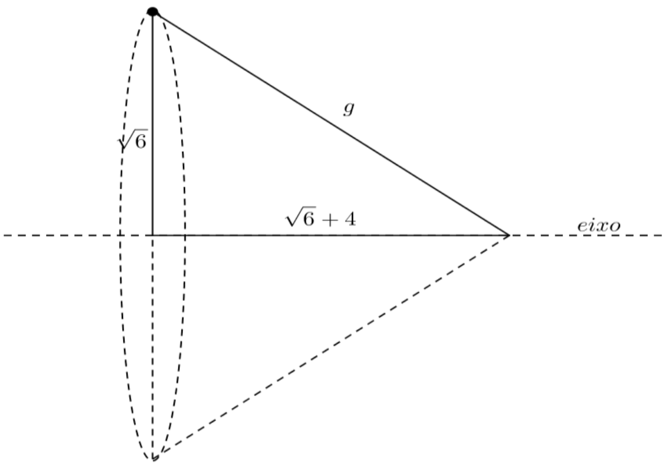
---

55. (ITA/2017)

Um triângulo retângulo com hipotenusa $c = 2\left(1 + \sqrt{6}\right)$ está circunscrito a um círculo de raio unitário. Determine a área total da superfície do cone obtido ao girar o triângulo em torno do seu maior cateto.

Comentários





Note que:

$$x + y = 2(1 + \sqrt{6}) \therefore y = 2(1 + \sqrt{6}) - x \text{ (I)}$$

Por Pitágoras, temos:

$$(x + y)^2 = 4(1 + \sqrt{6})^2 = (x + 1)^2 + (y + 1)^2 \text{ (II)}$$

Agora, substituindo (I) em (II), então:

$$4(7 + 2\sqrt{6}) = (x + 1)^2 + (2 + 2\sqrt{6} - x + 1)^2 \therefore$$

$$x^2 + 2x + 1 + (3 + 2\sqrt{6})^2 - 2x(3 + 2\sqrt{6}) + x^2 = 28 + 8\sqrt{6} \therefore$$

$$x^2 - 2x(1 + \sqrt{6}) + (3 + 2\sqrt{6}) = 0 \begin{cases} x_1 = \sqrt{6} - 1 \therefore y_1 = \sqrt{6} + 3 \\ e\ vice - versa; \end{cases}$$

Com isso,

$$S_{total} = \pi \cdot \sqrt{6} \cdot (\sqrt{6} + g),$$

Onde:

$$g^2 = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{6} + 4)^2 = 4(7 + 2\sqrt{6}) \therefore g = 2(1 + \sqrt{6});$$

Logo,

$$S_{total} = \pi \cdot \sqrt{6} \cdot (\sqrt{6} + 2 + 2\sqrt{6}) \therefore \boldsymbol{S_{total} = \pi \cdot (18 + 2\sqrt{6})}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S_{total} = \pi \cdot (18 + 2\sqrt{6})}$

---

56. (ITA/2016)

Uma esfera S_1, de raio $R > 0$, está inscrita num cone circular reto K. Outra esfera, S_2, de raio r, com $0 < r < R$, está contida no interior de K e é simultaneamente tangente à esfera S_1 e à superfície lateral de K. O volume de K é igual a

a) $\frac{\pi R^5}{3r(R-r)}$

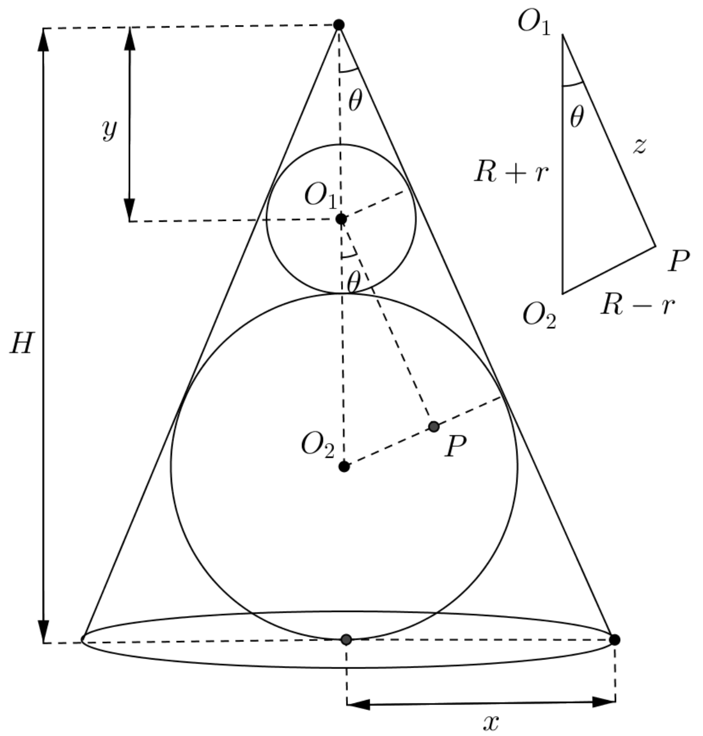
b) $\frac{2\pi R^5}{3r(R-r)}$

c) $\frac{\pi R^5}{r(R-r)}$

d) $\frac{4\pi R^5}{3r(R-r)}$

e) $\frac{5\pi R^5}{3r(R-r)}$

Comentários



Por Pitágoras no ΔPO_1O_2, temos:

$$(R+r)^2 = (R-r)^2 + z^2 \therefore z = 2\sqrt{Rr};$$

Note que:

$$y = r\csc\theta = r \cdot \frac{R+r}{R-r} \therefore H = 2R + r + y \therefore H = \frac{2R^2}{R-r};$$

$$\tan\theta = \frac{R-r}{2\sqrt{Rr}} = \frac{x}{H} = \therefore x = \left(\frac{2R^2}{R-r}\right)\cdot\left(\frac{R-r}{2\sqrt{Rr}}\right) \therefore x = \frac{R^2}{\sqrt{Rr}};$$

Logo,

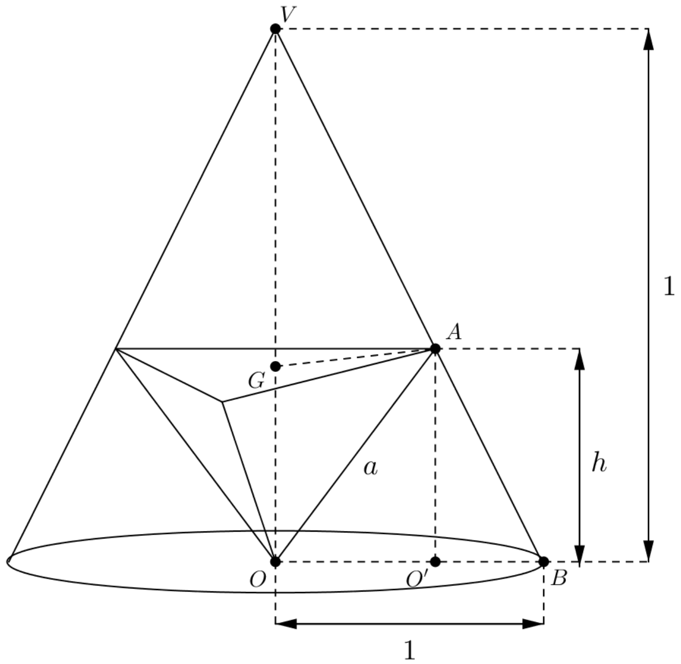
$$V = \frac{1}{3}\cdot(\pi x^2)\cdot(H) = \frac{1}{3}\cdot\left(\pi\cdot\frac{R^4}{Rr}\right)\cdot\left(\frac{2R^2}{R-r}\right) \therefore \boldsymbol{V} = \boldsymbol{\frac{2\pi R^5}{3r(R-r)}}$$

Gabarito: “b”

57. (ITA/2016)

Em um cone circular reto de altura 1 e raio da base 1 inscreve-se um tetraedro regular com uma de suas faces paralela à base do cone, e o vértice oposto coincidindo com o centro da base do cone. Determine o volume do tetraedro.

Comentários



Note que $\Delta AO'B \sim \Delta VOB \Rightarrow \frac{1}{h} = \frac{1}{O'B}$ e $O'B = 1 - GA$. Como G é o baricentro de uma das faces do tetraedro regular de aresta $a \Rightarrow GA = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow O'B = 1 - \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = 1 - \frac{a}{\sqrt{3}}$

Agora, apliquemos Pitágoras no $\Delta OO'A$:

$$a^2 = h^2 + OO'^2 \therefore a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 \therefore h^2 = \frac{2a^2}{3} \therefore h = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot a \therefore 1 - \frac{a}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot a$$

$$\therefore a = \sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)$$

Finalmente,

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{3} \cdot S_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)\right)^2 \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)\right) \therefore$$

$$\boldsymbol{V_{tetraedro} = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \left(5\sqrt{2} - 7\right)}$$

Gabarito: $\boldsymbol{V_{tetraedro} = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \left(5\sqrt{2} - 7\right)}$

---

58. (ITA/2015)

Uma taça em forma de cone circular reto contém um certo volume de um líquido cuja superfície dista h do vértice do cone. Adicionando-se um volume idêntico de líquido na taça, a superfície do líquido, em relação à original, subirá de

a) $\sqrt[3]{2} - h$

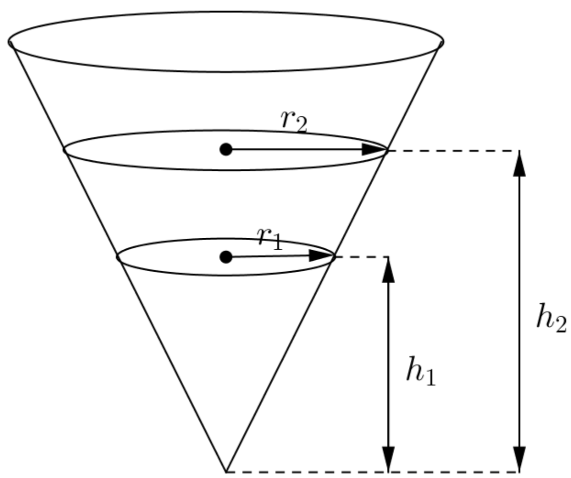
b) $\sqrt[3]{2} - 1$

c) $(\sqrt[3]{2} - 1)h$

d) h

e) $\frac{h}{2}$

Comentários



Dado que $V_2 = 2V_1 \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \pi {r_2}^2 \cdot h_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi {r_1}^2 \cdot h_1$. Como os cones 1 e 2 são semelhantes, temos:

$$r_2 = r_1 \cdot \frac{h_2}{h_1} \therefore \left(r_1 \cdot \frac{h_2}{h_1}\right)^2 \cdot h_2 = 2 \cdot {r_1}^2 \cdot h_1 \therefore h_2 = \sqrt[3]{2} \cdot h_1$$

Logo,

$$\Delta h = h_2 - h_1 \therefore \Delta \boldsymbol{h} = \boldsymbol{h_1} \cdot (\sqrt[3]{\mathbf{2}} - \mathbf{1})$$

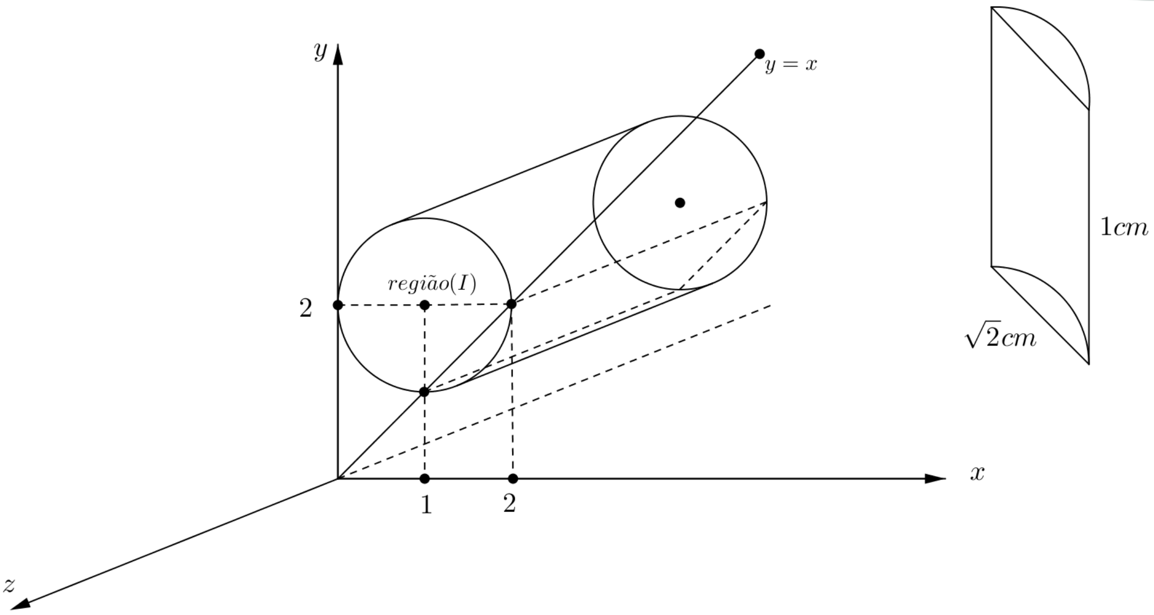
Gabarito: "c"

---

59. (ITA/2014)

Um cilindro reto de altura $h = 1\ cm$ tem sua base no plano xy definida por $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 < 0$. Um plano, contendo a reta $y - x = 0$ e paralelo ao eixo do cilindro, o secciona em dois sólidos. Calcule a área total da superfície do menor sólido.

Comentários



$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 < 0 \therefore (x-1)^2 + (y-2)^2 < 1 \longleftarrow \text{Região circular (I)}$$

Pela figura acima, note que:

$$S_{sólido} = S_{retangular}^{face} + S_{bases} + S_{circular}^{face}$$

Com isso, calculemos cada umas três áreas acima necessárias, como segue abaixo:

$$S_{retangular}^{face} = \sqrt{2}\ cm^2$$

$$S_{base} = S_{arco} - S_{triângulo} \therefore S_{base} = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} - \frac{1 \cdot 1}{2} \therefore S_{base} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) cm^2$$

$$S_{circular}^{face} = \frac{90°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 1 \cdot 1 \therefore S_{circular}^{face} = \frac{\pi}{2}\ cm^2$$

Logo,

$$S_{sólido} = \sqrt{2} + 2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \therefore \boldsymbol{S_{sólido} = \sqrt{2} + \pi - 1\ cm^2}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S_{sólido} = \sqrt{2} + \pi - 1\ cm^2}$

---

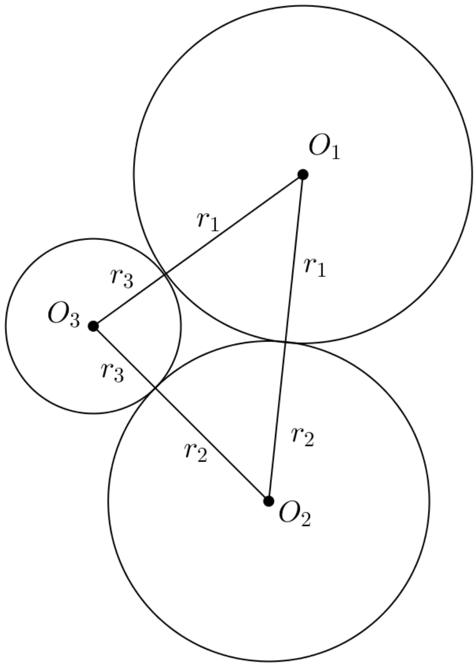
60. (ITA/2014)

Três circunferências C_1, C_2 e C_3 são tangentes entre si, duas a duas, externamente. Os raios r_1, r_2 e r_3 destas circunferências constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $1/3$. A soma dos comprimentos de C_1, C_2 e C_3 é igual a $26\pi\ cm$. Determine:

a) a área do triângulo cujos vértices são os centros de C_1, C_2 e C_3.

b) o volume do sólido de revolução obtido pela rotação do triângulo em torno da reta que contém o maior lado.

Comentários



a)

Os lados do $\Delta O_1O_2O_3$ são $O_1O_2 = r_1 + r_2$; $O_2O_3 = r_2 + r_3$; $O_1O_3 = r_1 + r_3$. Dado que r_1, r_2, r_3 estão, nessa ordem, em uma P.G. de razão $q = \frac{1}{3}$ e que $2\pi \cdot (r_1 + r_2 + r_3) = 26\ cm$, então:

$$r_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) = 13\ cm \Rightarrow r_1 \cdot \frac{13}{9} = 13$$

$$\therefore r_1 = 9\ cm; r_2 = 3\ cm; r_3 = 1\ cm$$

Logo, os lados do $\Delta O_1O_2O_3$ são $4\ cm$, $10\ cm$ e $12\ cm$.

Finalmente, pela fórmula de Heron, temos:

$$S = \sqrt{p\big(p - (r_1 + r_2)\big)\big(p - (r_1 + r_3)\big)\big(p - (r_2 + r_3)\big)}$$

$$p = \frac{(r_1 + r_2) + (r_1 + r_3) + (r_2 + r_3)}{2} = r_1 + r_2 + r_3$$

$$S = \sqrt{(r_1 + r_2 + r_3)(r_1)(r_2)(r_3)} = \sqrt{(9 + 3 + 1)(9)(3)(1)} \therefore \boldsymbol{S = 3\sqrt{39}\ cm^2}$$

b)

Pelo teorema de Pappus-Guldin, chega-se a:

$$V = 2\pi \cdot S \cdot \overline{x}$$

$$V = 2\pi \cdot 3\sqrt{39} \cdot \underbrace{\left(\frac{h_{O_3}}{3}\right)}_{distância\ do\ baricentro\ ao\ eixo\ de\ rotação}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot h_{O_3} \cdot (r_1 + r_2) \Rightarrow h_{O_3} = \frac{2S}{r_1 + r_2}$$

$$V = 2\pi \cdot 3\sqrt{39} \cdot \frac{2 \cdot 3\sqrt{39}}{12 \cdot 3} \therefore \boldsymbol{V = 39\pi\ cm^3}$$

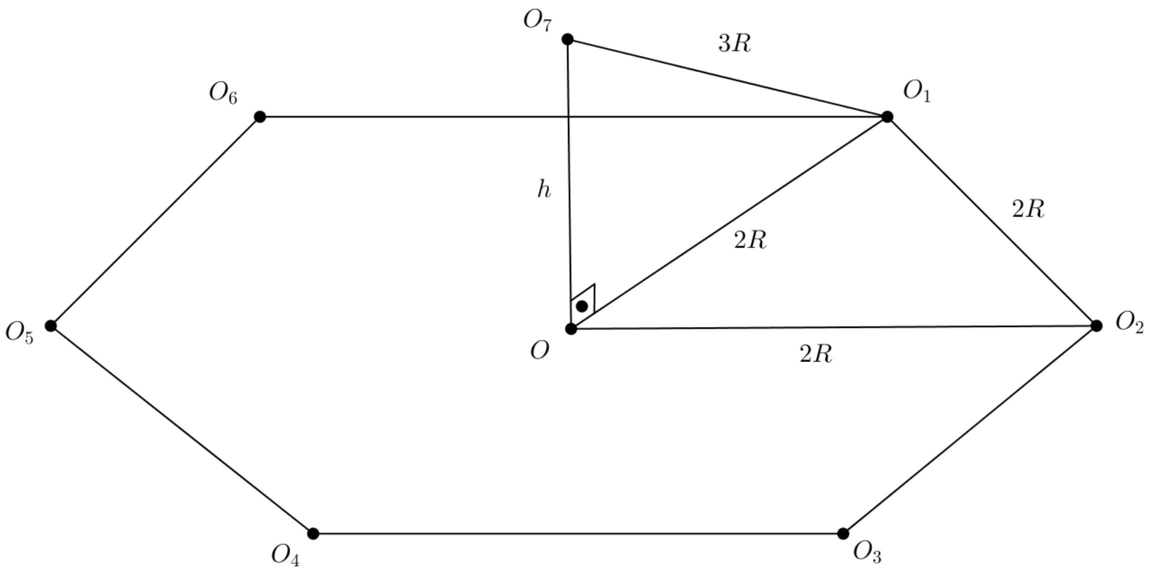
Gabarito: a) $S = 3\sqrt{39}\ cm^2$ b) $V = 39\pi\ cm^3$

---

61. (ITA/2014)

Seis esferas de mesmo raio R são colocadas sobre uma superfície horizontal de tal forma que seus centros definam os vértices de um hexágono regular de aresta $2R$. Sobre estas esferas é colocada uma sétima esfera de raio $2R$ que tangencia todas as demais. Determine a distância do centro da sétima esfera à superfície horizontal.

Comentários



Por Pitágoras no ΔOO_1O_7, temos:

$$h^2 = (3R)^2 - (2R)^2 \therefore h = \sqrt{5}R$$

Logo,

A distância de O_7 à superfície é $\boldsymbol{R\left(1 + \sqrt{5}\right)}$

Gabarito: $R\left(1 + \sqrt{5}\right)$

---

62. (ITA/2014)

Considere o sólido de revolução obtido pela rotação de um triângulo isósceles ABC em torno de uma reta paralela à base $\overline{BC}$ que dista $0,25\ cm$ do vértice A e $0,75\ cm$ da base $\overline{BC}$. Se o lado $\overline{AB}$ mede $\frac{\sqrt{\pi^2+1}}{2\pi}\ cm$, o volume desse sólido, em cm^3, é igual a

a) $9/16$

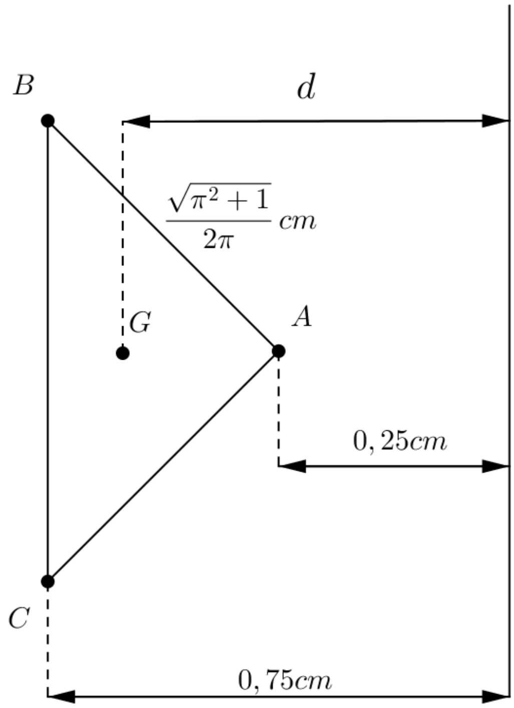
b) $13/96$

c) $7/24$

d) $9/24$

e) $11/96$

Comentários



Pelo teorema de Pappus-Guldin, o volume do sólido obtido pela revolução do triângulo em torno da reta é dado por:

$$V = 2\pi S_{\Delta ABC} d$$

Podemos escrever d como segue abaixo:

$$d = AG + 0{,}25 \therefore d = \frac{2}{3} \cdot h_A + 0{,}25$$

Onde: $h_A = (0{,}75 - 0{,}25)\ cm \therefore h_A = 0{,}5\ cm$

Logo,

$$d = \frac{7}{12}\ cm$$

O lado BC pode ser obtido por Pitágoras, como segue abaixo:

$$\left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\pi^2+1}}{2\pi}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \therefore BC = \frac{1}{\pi}\ cm$$

Com isso,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot h_A}{2} = \frac{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2}}{2} \therefore$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{4\pi}\ cm^2$$

Finalmente,

$$V = 2\pi \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{7}{12} \therefore \boldsymbol{V = \frac{7}{24}\ cm^3}$$

Gabarito: "c"

---

63. (ITA/2013)

No sistema xOy os pontos $A = (2, 0), B = (2, 5)$ e $C = (0, 1)$ são vértices de um triângulo inscrito na base de um cilindro circular reto de altura 8. Para este cilindro, a razão $\frac{volume}{área\ total\ da\ superfície}$, em unidade de comprimento, é igual a

a) 1

b) $\frac{100}{105}$

c) $\frac{10}{11}$

d) $\frac{100}{115}$

e) $\frac{5}{6}$

Comentários

Para o triângulo de vértices $A, B\ e\ C$, temos:

$$\begin{cases} AB = \sqrt{(2-2)^2 + (5-0)^2} = 5 \\ AC = \sqrt{(0-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5} \\ BC = \sqrt{(0-2)^2 + (1-5)^2} = 2\sqrt{5} \end{cases}$$

Com isso,

$$\frac{5 \cdot \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{4R} = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right\| = S_{ABC} \Rightarrow R = \frac{5}{2}$$

Onde R é o raio da base circular do cilindro.

Logo,

$$\frac{volume}{área\ total\ da\ superfície} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot 8}{2\pi \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{5}{2} + 8\right)} \therefore \boldsymbol{\frac{volume}{área\ total\ da\ superfície} = \frac{20}{21} = \frac{100}{105}}$$

Gabarito: "b"

---

64. (ITA/2012)

A superfície lateral de um cone circular reto é um setor circular de $120°$ e área igual a $3\pi\ cm^2$. A área total e o volume deste cone medem, em cm^2 e cm^3, respectivamente

a) 4π e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$

b) 4π e $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$

c) 4π e $\pi\sqrt{2}$

d) 3π e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$

e) π e $2\pi\sqrt{2}$

Comentários

A área lateral do cone é dada por:

$$S_{lateral} = \pi \cdot r \cdot g$$

Onde r é o raio da base e g a geratriz do cone.

Logo,

$$S_{lateral} = 3\pi = \pi r g \therefore rg = 3(I)$$

Por outro lado, o ângulo θ do setor circular do cone segue a seguinte relação:

$$\theta(rad) = \frac{2\pi r}{g} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi r}{g} \therefore 3r = g(II)$$

Por (I) e (II), então:

$$\begin{cases} r = 1\ cm \\ g = 3\ cm \end{cases}$$

Finalmente,

$$S_{total} = \pi r \cdot (r + g) \Rightarrow S_{total} = \pi \cdot 1 \cdot 4 \therefore \boldsymbol{S_{total} = 4\pi\ cm^2}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1 \cdot h \Rightarrow V = \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{3^2 - 1^2} \therefore \boldsymbol{V = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\ cm^3}$$

Gabarito: "a"

---

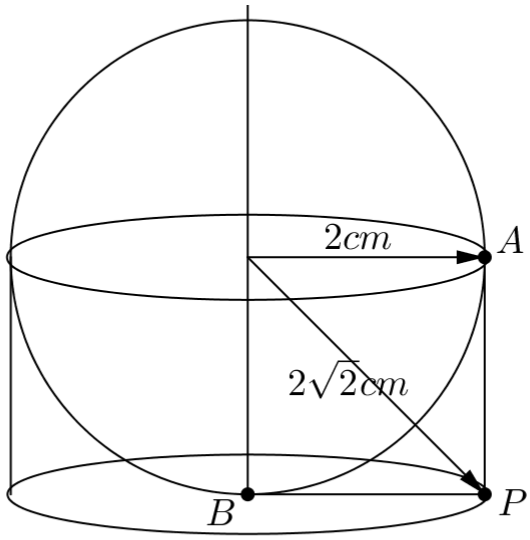
65. (ITA/2012)

Em um plano estão situados uma circunferência ω de raio $2\ cm$ e um ponto P que dista $2\sqrt{2}\ cm$ do centro de ω. Considere os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ tangentes a ω nos pontos A e B, respectivamente. Ao girar a região fechada delimitada pelos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ e pelo arco menor AB em torno de um eixo passando pelo centro de ω e perpendicular ao segmento $\overline{PA}$, obtém-se um sólido de revolução. Determine:

a) A área total da superfície do sólido.

b) O volume do sólido.

Comentário:



a) A área da superfície do sólido obtido pela rotação é igual à metade da área superficial da esfera de raio 2 cm mais as áreas da base e lateral do cilindro de raio e altura iguais a 2 cm.

Logo,

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4\pi 2^2 + \pi \cdot 2^2 + 2\pi \cdot 2 \cdot 2 \therefore \boldsymbol{S = 20\pi\ cm^2}$$

b) O volume desse sólido é dado pela diferença entre o volume do cilindro de raio e altura iguais a 2 cm e a metade da esfera de raio 2 cm.

Logo,

$$V = \pi \cdot 2^2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 \therefore \boldsymbol{V = \frac{8\pi}{3}\ cm^3}$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{S = 20\pi\ cm^2}$ b) $\boldsymbol{V = \frac{8\pi}{3}\ cm^3}$

---

66. (ITA/2012)

Um cone circular reto de altura 1 cm e geratriz $2\sqrt{3}/3$ é interceptado por um plano paralelo à sua base, sendo determinado, assim, um novo cone. Para que este novo cone tenha o mesmo volume de um cubo de aresta $\left(\frac{\pi}{243}\right)^{\frac{1}{3}}$ cm, é necessário que a distância do plano à base do cone original seja, em cm, igual a

a) $1/4$

b) $1/3$

c) $1/2$

d) $2/3$

e) $3/4$

Comentários

Sendo R e H as medidas do raio e da altura, respetivamente, do cone formado pela intersecção do plano, temos:

$$\frac{H}{R} = \frac{H_i}{R_i}$$

Onde $H_i = 1\ cm$ e $R_i = \sqrt{g^2 - {H_i}^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 1^2} \therefore R_i = \frac{1}{\sqrt{3}}\ cm$

$$R = \frac{H}{\sqrt{3}} (I)$$

Além disso,

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot H = V_{cubo} = \frac{\pi}{243}\ cm^3 \therefore R^2 H = \frac{1}{81}\ cm^3 (II)$$

Por (I) e (II), então:

$$H = \frac{1}{3}\ cm$$

Finalmente,

$$D_{plano\ a\ base} = H_i - H \therefore \boldsymbol{D_{plano\ a\ base} = \frac{2}{3}\ cm}$$

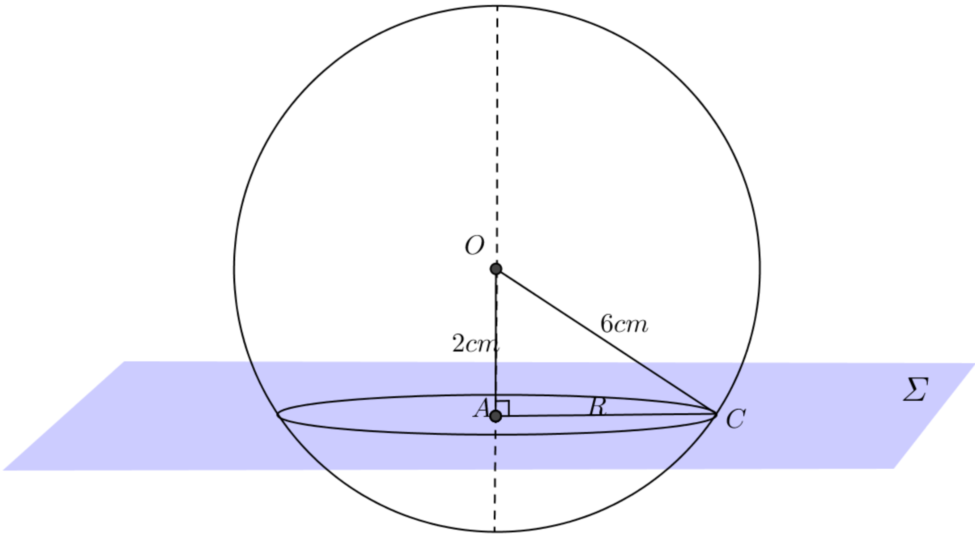
Gabarito: "d"

---

67. (ITA/2011)

Considere uma esfera Ω com centro em C e raio $r = 6$ cm e um plano Σ que dista 2 cm de C. Determine a área da intersecção do plano Σ com uma cunha esférica de $30°$ em Ω que tenha aresta ortogonal a Σ.

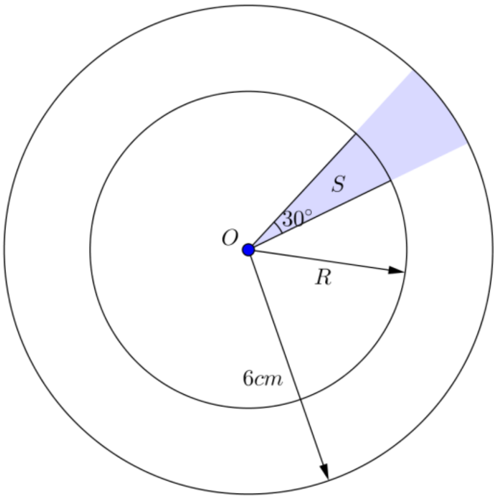
Comentários



Por Pitágoras no ΔOAC, temos:

$$R^2 = 6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32 \therefore R = 4\sqrt{2}\ cm$$

A área determinada por uma cunha esférica de 30° no plano Σ pode ser observada na figura abaixo:



Com isso, a área acima representada, é dada por:

$$S = \frac{30°}{360°} \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot \left(4\sqrt{2}\right)^2 \therefore \boldsymbol{S = \frac{8\pi}{3}\ cm^2}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \frac{8\pi}{3}\ cm^2}$

68. (ITA/2011)

Uma esfera está inscrita em uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 12 cm e a aresta da base mede $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ cm. Então o raio da esfera, em cm, é igual a

a) $\frac{10}{3}\sqrt{3}$

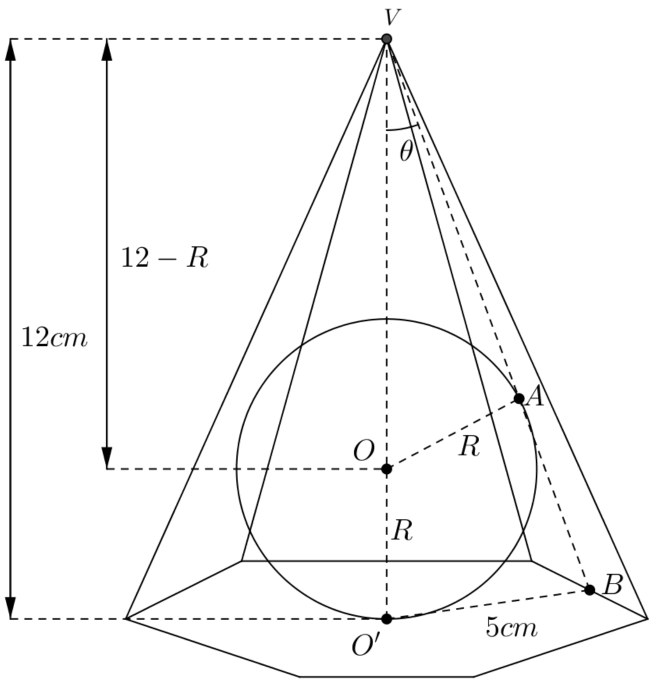
b) $\frac{13}{3}$

c) $\frac{15}{4}$

d) $2\sqrt{3}$

e) $\frac{10}{3}$

Comentários



Dada a semelhança $\Delta VAO \sim \Delta VO'B$, temos:

$$\frac{R}{12-R} = \frac{O'B}{VB}$$

Sendo $O'B = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$, onde a a aresta da base hexagonal, então:

$$O'B = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{10}{\sqrt{3}} \therefore O'B = 5\ cm$$

Por Pitágoras no $\Delta VO'B$, chega-se a:

$$VB^2 = 5^2 + 12^2 \therefore VB = 13\ cm$$

Logo,

$$\frac{R}{12-R} = \frac{5}{13} \therefore R = \frac{10}{3}\ cm$$

Gabarito: “e”

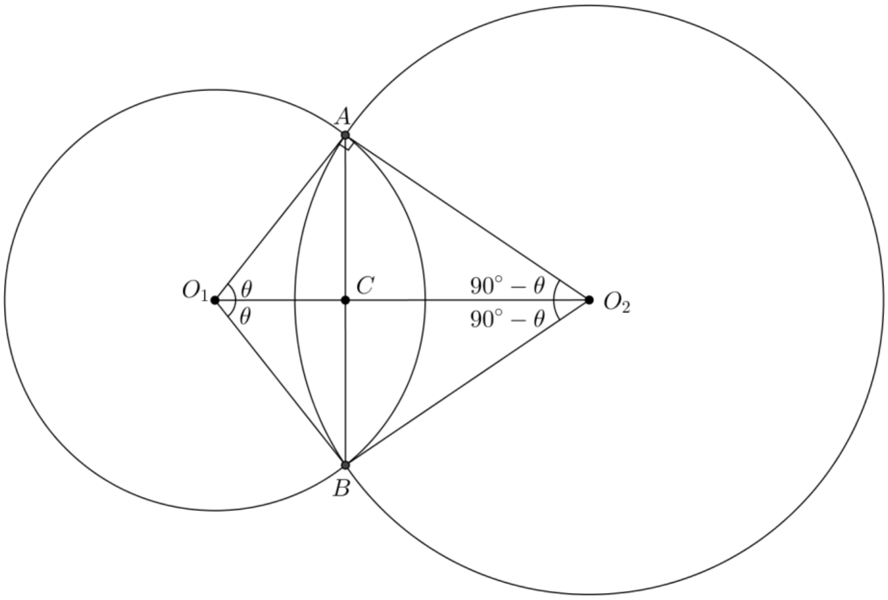
69. (ITA/2010)

As superfícies de duas esferas se interceptam ortogonalmente (isto é, em cada ponto da intersecção os respectivos planos tangentes são perpendiculares). Sabendo que os raios destas esferas medem 2 cm e $3/2$ cm, respectivamente, calcule

a) a distância entre os centros das duas esferas.

b) a área da superfície do sólido obtido pela intersecção das duas esferas.

Comentários



a) Por Pitágoras no ΔO_1O_2A, chega-se a:

$$(O_1O_2)^2 = 2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \therefore \boldsymbol{O_1O_2 = \frac{5}{2}\ cm}$$

b) Atente para as relações:

$$A_{sólido}^{intersecção} = A_{calota\ O_1} + A_{calota\ O_2}$$

Lembrando que a área do segmento esférico é dada por:

$$A = 2\pi Rh$$

Temos:

$$A_{calota\ O_1} = 2\pi \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - O_1C\right)$$

$$A_{calota\ O_2} = 2\pi \cdot 2 \cdot (2 - O_2C)$$

Utilizando Pitágoras no ΔO_1AC e no ΔO_2AC, temos:

$$\begin{cases} O_1C^2 = O_1A^2 - AC^2 \\ O_2C^2 = O_2A^2 - AC^2 \end{cases}$$

Sendo $AC = \frac{O_1A \cdot O_2A}{O_1O_2}$, então:

$$AC = \frac{2\cdot\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} \therefore AC = \frac{6}{5}\ cm$$

$$O_1C^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{5}\right)^2 \therefore O_1C = \frac{9}{10}\ cm;$$

$$O_2C^2 = 2^2 - \left(\frac{6}{5}\right)^2 \therefore O_2C = \frac{8}{5}\ cm;$$

Daí,

$$A_{calota\ O_1} = 2\pi\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{9}{10}\right) = \frac{9\pi}{5}\ cm^2$$

$$A_{calota\ O_2} = 2\pi\cdot 2\cdot\left(2-\frac{8}{5}\right) = \frac{8\pi}{5}\ cm^2$$

Finalmente,

$$A_{sólido}^{intersecção} = \frac{9\pi}{5} + \frac{8\pi}{5} \therefore \boldsymbol{A_{sólido}^{intersecção} = \frac{17\pi}{5}\ cm^2}$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{O_1O_2 = \frac{5}{2}\ cm}$ b) $\boldsymbol{\frac{17\pi}{5}\ cm^2}$

---

70. (ITA/2010)

Um cilindro reto de altura $\sqrt{6}/3$ cm está inscrito num tetraedro regular e tem sua base em uma das faces do tetraedro. Se as arestas do tetraedro medem 3 cm. o volume do cilindro, em cm^3, é igual a

a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$

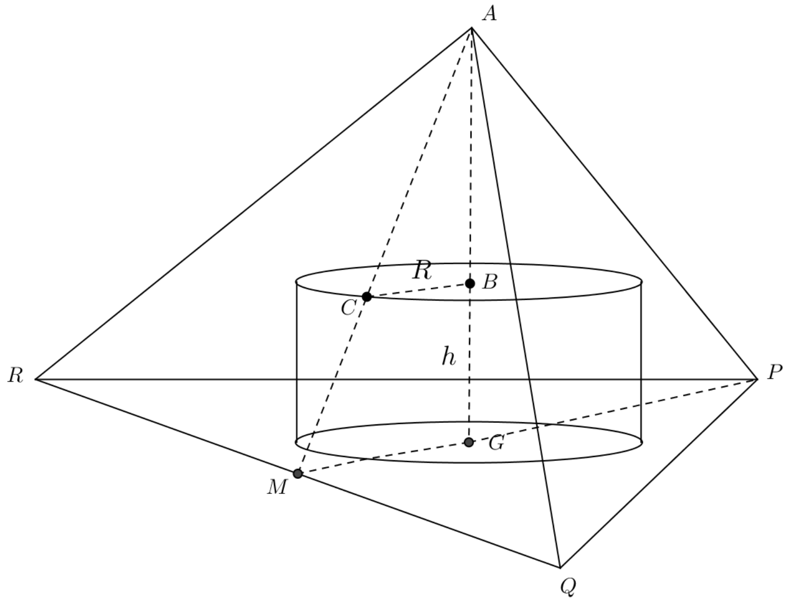
b) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

c) $\frac{\pi\sqrt{6}}{6}$

d) $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$

e) $\frac{\pi}{3}$

Comentários



Pela figura $\Delta ABC \sim \Delta AGM$, logo:

$$\frac{BC}{GM} = \frac{AB}{AG}$$

Como G é o centro do ΔPQR equilátero, temos:

$$GM = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 3 \therefore GM = \frac{\sqrt{3}}{2}\ cm$$

E, sendo AG a altura do tetraedro, por Pitágoras no ΔAGP, então:

$$AG = \sqrt{3^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3\right)^2} \therefore AG = \sqrt{6}\ cm$$

Logo, substituindo esses valores na relação de semelhança, obtemos:

$$\frac{R}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{6} - \frac{\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{6}} \therefore R = \frac{\sqrt{3}}{3}\ cm$$

Finalmente,

$$V_{cilindro} = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \therefore \boldsymbol{V = \frac{\pi\sqrt{6}}{9}\ cm^3}$$

Gabarito: “d”

71. (ITA/2008)

Um diedro mede $120°$. A distância da aresta do diedro ao centro de uma esfera de volume $4\sqrt{3}\pi\ \text{cm}^3$ que tangencia as faces do diedro é, em cm, igual a

a) $3\sqrt{3}$

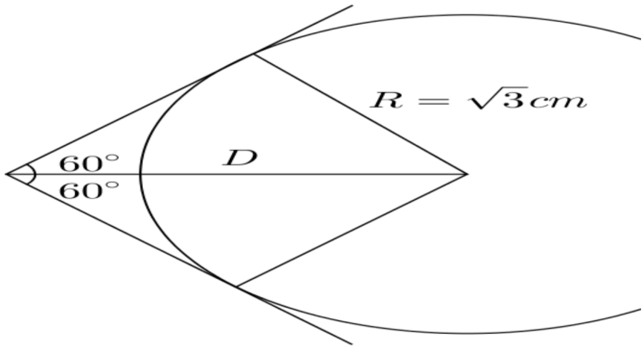
b) $3\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{3}$

d) $2\sqrt{2}$

e) 2

Comentários



O raio da esfera pode ser calculado como segue abaixo:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \Rightarrow 4\sqrt{3}\pi = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \therefore R = \sqrt{3}\ cm$$

Logo,

$$D = \frac{R}{\operatorname{sen} 60°} \Rightarrow \boldsymbol{D = 2\ cm}$$

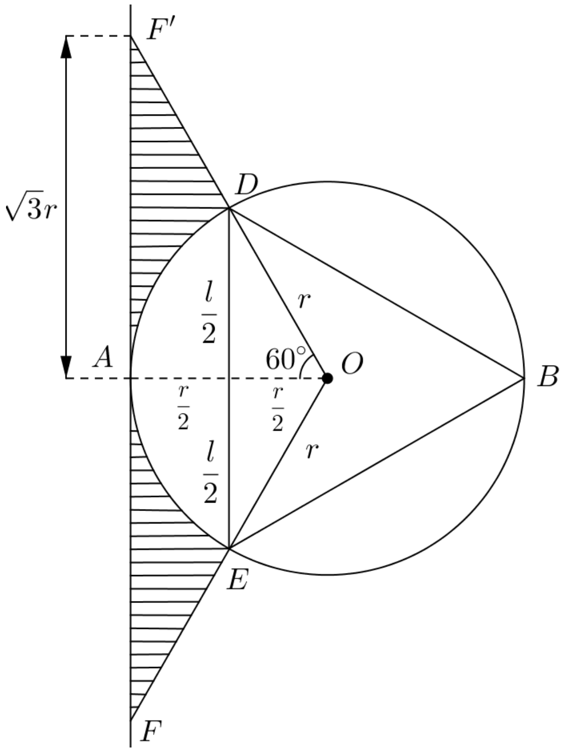
Gabarito: "e"

---

72. (ITA/2008)

Seja C uma circunferência de raio r e centro O e AB um diâmetro de C. Considere o triângulo equilátero BDE inscrito em C. Traça-se a reta s passando pelos pontos O e E até interceptar em F a reta t tangente à circunferência C no ponto A. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pelo arco AE e pelos segmentos AF e EF em torno do diâmetro AB.

Comentários



Como bem representado acima, o volume do sólido de revolução é dado pela diferença entre o volume do tronco de cone $DEFF'$ e a calota esférica ADE, logo:

$$V_{sólido} = V_{tronco} - V_{calota}$$

Sendo de $h = \frac{r}{2}$ a altura do tronco e $\frac{l}{2}$ e $\sqrt{3}r$ as medidas dos raios da base do tronco de cone, respectivamente, em que l é o lado do triângulo equilátero ΔBDE, e sabendo que:

$$V_{tronco} = \frac{h}{3} \cdot \left(S_{base}^{inferior} + S_{base}^{superior} + \sqrt{S_{base}^{inferior} S_{base}^{superior}} \right)$$

Calculemos o V_{tronco} como segue abaixo:

$$V_{tronco} = \frac{r}{3} \cdot \left(\pi(\sqrt{3}r)^2 + \pi\left(\frac{\sqrt{3}r}{2}\right)^2 + \sqrt{\pi(\sqrt{3}r)^2 \cdot \pi\left(\frac{\sqrt{3}r}{2}\right)^2} \right) \therefore$$

$$V_{tronco} = \frac{21\pi r^3}{24}$$

Agora, sabendo-se que:

$$V_{calota} = \frac{\pi h^2}{3} \cdot (3r - h);$$

$$h = \frac{r}{2};$$

Calculemos o V_{calota}:

$$V_{calota} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2}{3} \cdot \left(3r - \frac{r}{2}\right) \therefore V_{calota} = \frac{5\pi r^3}{24}$$

Finalmente,

$$V_{sólido} = \frac{21\pi r^3}{24} - \frac{5\pi r^3}{24} \therefore \boldsymbol{V_{sólido} = \frac{2\pi r^3}{3}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{\frac{2\pi r^3}{3}}$

---

73. (ITA/2006)

As medidas, em metros, do raio da base, da altura e da geratriz de um cone circular reto formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão 2 metros. Calcule a área total deste cone em m^2.

Comentário:

(R, H, g) estão em P.A de razão 2. Logo, chamando $R = H - 2$ e $g = H + 2$, por Pitágoras, temos:

$$g^2 = R^2 + H^2 \therefore (H+2)^2 = (H-2)^2 + H^2 \therefore H = 8\,m$$

$$R = 6\ m;$$

$$g = 10\,m;$$

Assim,

$$S_{total} = \pi R \cdot (R + g) = \pi \cdot 6 \cdot (8 + 10) \therefore \boldsymbol{S_{total} = 108\pi\ m^2}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S_{total} = 108\pi\ m^2}$

---

74. (ITA/2005)

Um dos catetos de um triângulo retângulo mede $\sqrt[3]{2}$ cm. O volume do sólido gerado pela rotação deste triângulo em tomo da hipotenusa é $\pi\ \mathrm{cm}^3$. Determine os ângulos deste triângulo.

Comentários

Chamando de θ o ângulo adjacente ao lado de medida $\sqrt[3]{2}\,m$, a área do triângulo S e a sua altura relativa à hipotenusa h serão dadas por:

$$S = \frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 \cdot \tan\theta}{2};$$

$$h = \sqrt[3]{2} \cdot \operatorname{sen}\theta\,;$$

Agora, pelo teorema de Pappus-Guldin, calculemos o volume do sólido de revolução em função de θ:

$$V = \pi = 2\pi \cdot \left(\frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 \cdot \tan\theta}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \therefore \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{2} \Rightarrow \theta = 60°;$$

Portanto, os ângulos desse triângulo retângulo são: $\boldsymbol{30°}$, $\boldsymbol{60°}$ e $\boldsymbol{90°}$.

Gabarito: $\boldsymbol{30°}$**,** $\boldsymbol{60°}$ **e** $\boldsymbol{90°}$**.**

---

75. (ITA/2005)

Uma esfera de raio r é seccionada por n planos meridianos. Os volumes das respectivas cunhas esféricas contidas em uma semiesfera formam uma progressão aritmética de razão $\pi r^3/45$. Se o volume da menor cunha for igual a $\pi r^3/18$, então n é igual a

a) 4.

b) 3.

c) 6.

d) 5.

e) 7.

Comentários

Na esfera há n planos meridianos que a cortam. Esses planos determinam $2n$ cunhas, pois cada plano meridiano pertence a 2 cunhas simétricas em relação ao diâmetro da esfera, sendo assim, na semiesfera há n cunhas, logo:

$$V_{semiesfera} = \frac{2\pi r^3}{3} = \sum_{i=1}^{n} V_{i-ésima}^{cunha}$$

Onde $\sum_{i=1}^{n} V_{i-ésima}^{cunha}$ se trata da soma de n termos de uma P.A. de razão $\pi r^3/45$ e primeiro termo $\pi r^3/18$.

Logo,

$$V_{semiesfera} = \frac{2\pi r^3}{3} = n \cdot \frac{\left(\frac{\pi r^3}{18} + \left(\frac{\pi r^3}{18} + (n-1) \cdot \frac{\pi r^3}{45}\right)\right)}{2} \therefore 2 = \frac{n}{6} + \frac{n^2}{30} - \frac{n}{30} \therefore \frac{n^2}{30} + \frac{2n}{15} - 2 = 0$$

$$\therefore n = 6 \text{ ou } n = -10(\text{Não convém}) \Rightarrow \boldsymbol{n = 6}$$

Gabarito: "c"

---

76. (ITA/2005)

A circunferência inscrita num triângulo equilátero com lados de 6 cm de comprimento é a interseção de uma esfera de raio igual a 4 cm com o plano do triângulo. Então, a distância do centro da esfera aos vértices do triângulo é (em cm)

a) $3\sqrt{3}$.

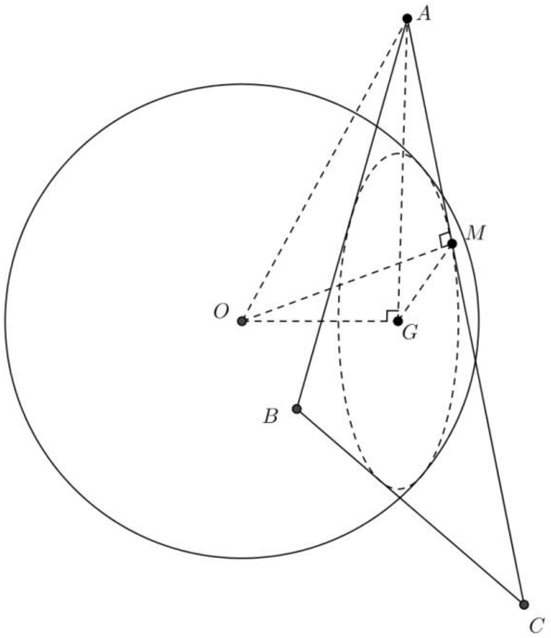
b) 6.

c) 5.

d) 4.

e) $2\sqrt{5}$.

Comentários



No ΔOGM, por Pitágoras, temos:

$$OM^2 = OG^2 + GM^2$$

A medida GM é o inraio do ΔABC equilátero, já que G é o centro desse triângulo, e a medida OM é o raio da esfera.

Logo,

$$OG = \sqrt{OM^2 - GM^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 6\right)^2} = \sqrt{13} \therefore OG = \sqrt{13}\,cm$$

Finalmente, por Pitágoras no ΔOGA, temos:

$$OA^2 = OG^2 + GA^2 \therefore OA = \sqrt{\left(\sqrt{13}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 6\right)^2} \therefore \boldsymbol{OA = 5\,cm}$$

Gabarito: "c"

---

77. (ITA/2004)

Considere um cilindro circular reto, de volume igual a $360\pi\ \mathrm{cm}^3$, e uma pirâmide regular cuja base hexagonal está inscrita na base do cilindro. Sabendo que a altura da pirâmide é o dobro da altura do cilindro e que a área da base da pirâmide é de $54\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$, então, a área lateral da pirâmide mede, em cm^2,

a) $18\sqrt{427}$

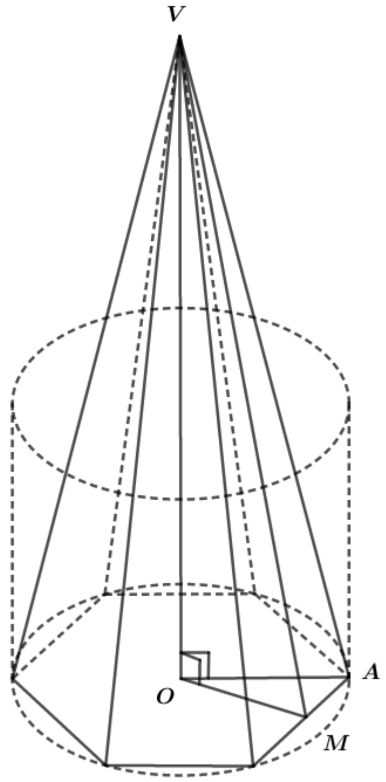
b) $27\sqrt{427}$

c) $36\sqrt{427}$

d) $108\sqrt{3}$

e) $45\sqrt{427}$

Comentários



Dado que $S_{base\ hexagonal} = 54\sqrt{3}\ cm^2$, então:

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a = 54\sqrt{3} \therefore a = 6\ cm$$

Onde a é a aresta do hexágono;

Dado que $V_{cilindro} = 360\pi\ cm^2$, temos:

$$\pi a^2 \cdot H = 360\pi \therefore H = 10\ cm$$

Onde H é a altura do cilindro;

Por Pitágoras no ΔOMV, temos:

$$MV^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a\right)^2 + (2H)^2 \therefore MV = \sqrt{\left(3\sqrt{3}^2\right) + 20^2} \therefore MV = \sqrt{427}\ cm$$

Finalmente, como $S_{lateral\ pirâmide} = 6 \cdot \frac{a \cdot MV}{2}$, chega-se a:

$$S_{lateral\ pirâmide} = 6 \cdot \frac{6 \cdot \sqrt{427}}{2} \therefore \boldsymbol{S_{lateral\ pirâmide} = 18\sqrt{427}\ cm^2}$$

Gabarito: “a”

78. (ITA/2004)

A área total da superfície de um cone circular reto, cujo raio da base mede R cm, é igual à terça parte da área de um círculo de diâmetro igual ao perímetro da seção meridiana do cone. O volume deste cone, em cm^3, é igual a

a) πR^3

b) $\pi\sqrt{2}R^3$

c) $\pi/\sqrt{2}R^3$

d) $\pi\sqrt{3}R^3$

e) $\pi/\sqrt{3}R^3$

Comentários

Sendo $D = 2r$ o diâmetro igual ao perímetro da seção meridional do cone, temos:

$$D = 2r = 2 \cdot (R + g) \therefore r = R + g$$

Onde g é a geratriz do cone;

Com isso,

$$S_{total} = \pi \cdot R \cdot (R + g) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (R + g)^2 \therefore 3R = R + g \therefore g = 2R$$

Sendo $H = \sqrt{g^2 - R^2} = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = \sqrt{3}R$, então:

$$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{3} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \sqrt{3}R}{3} \therefore$$

$$\boldsymbol{V = \frac{\pi R^3}{\sqrt{3}}\ cm^3}$$

Gabarito: “e”

79. (ITA/2003)

Quatro esferas de mesmo raio R > 0 são tangentes externamente duas a duas, de forma que seus centros formam um tetraedro regular com arestas de comprimento 2R. Determine, em função de R, a expressão do volume do tetraedro circunscrito às quatro esferas.

Comentários

Por simetria o tetraedro com vértices nos centros das esferas e o tetraedro tangente externamente às esferas possuem o mesmo centro, sendo assim, calculemos a distância de uma das faces de cada um dos tetraedros ao centro, para assim, achar à razão de semelhança entre eles, e, portanto, a relação entre os volumes deles, já que o volume do primeiro é conhecido e dado por:

$$V_1 = \frac{2\sqrt{2}R^2}{3}$$

Logo,

Para o tetraedro de aresta conhecida, é sabido que tal distância é dada por:

$$d_1 = \frac{R}{\sqrt{6}};$$

Já para o tetraedro tangente externamente às esferas, basta notar que a distância de uma de suas faces ao centro é igual a $d_2 = d_1 + R$.(Para perceber isso pense que o tetraedro menor está se expandindo, mantendo seu centro fixo, até se tornar o tetraedro maior, e, portanto, as faces dos 2 tetraedros são paralelas 2 a 2. Sendo assim, a distância entre as faces deles se torna R, já que o plano determinado por uma certa face parte de uma região em que o centro da esfera está contido nele até uma região em que tal plano é tangente à essa esfera)

Logo,

$$d_2 = d_1 + R = \frac{R}{\sqrt{6}} + R;$$

$$k = \frac{\frac{R}{\sqrt{6}} + R}{\frac{\sqrt{6}}{6}R} \therefore k = 1 + \sqrt{6}$$

Onde k é a razão de semelhança entre os tetraedros.

Finalmente,

$$V_2 = V_1 \cdot k^3 \therefore \boldsymbol{V_2 = \left(1 + \sqrt{6}\right)^3 \cdot \frac{2\sqrt{2}R^2}{3}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{\left(1 + \sqrt{6}\right)^3 \cdot \frac{2\sqrt{2}R^2}{3}}$

---

80. (ITA/2003)

Considere o triângulo isósceles OAB, com lados OA e OB de comprimento $\sqrt{2}R$ e lado AB de comprimento $2R$. O volume do sólido, obtido pela rotação deste triângulo em torno da reta que passa por O e é paralela ao lado AB, é igual a:

a) $\boldsymbol{\pi R^3/2}$

b) $\boldsymbol{\pi R^3}$

c) $\boldsymbol{\frac{4\pi R^3}{3}}$

d) $\boldsymbol{\sqrt{2}\pi R^3}$

e) $\boldsymbol{\sqrt{3}\pi R^3}$

Comentários

Pelo teorema de Pappus-Guldin:

$$V = 2\pi S_{\Delta OAB} \cdot \bar{d}$$

Onde $\bar{d}$ é a distância entre o baricentro do triângulo e a reta à qual o triângulo gira;

Logo,

$$V = 2\pi \cdot \left(\frac{2R \cdot h}{2}\right) \cdot \left(\frac{2h}{3}\right), \text{ sendo } h = \sqrt{\left(\sqrt{2}R\right)^2 - R^2} \therefore h = R$$

$$\boldsymbol{V = \frac{4\pi R^3}{3}}$$

Gabarito: "c"

---

81. (ITA/2002)

Seja S a área total da superfície de um cone circular reto de altura h, e seja m a razão entre as áreas lateral e da base desse cone. Obtenha uma expressão que forneça h em função apenas de S e m.

Comentários

Sejam g a geratriz e R o raio da base do cone.

Com isso, por Pitágoras, temos:

$$h^2 + R^2 = g^2 \therefore h = \sqrt{g^2 - R^2}$$

Dado que $S_{lateral} = m \cdot S_{base} \therefore \pi R g = m \cdot (\pi R^2) \therefore g = mR$, então:

$$h = \sqrt{(mR)^2 - R^2} \therefore h = \sqrt{m^2 - 1} \cdot R$$

Mas,

$$S = \pi R \cdot (R + g) = \pi R \cdot (R + mR) \therefore S = \pi R^2 \cdot (m + 1) \therefore$$

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi(m+1)}};$$

Portanto,

$$h = \sqrt{m^2 - 1} \cdot \sqrt{\frac{S}{\pi(m+1)}} \therefore \boldsymbol{h = \sqrt{\frac{S \cdot (m-1)}{\pi}}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{h = \sqrt{\frac{S \cdot (m-1)}{\pi}}}$

---

82. (ITA/2002)

Considere a região do plano cartesiano xy definida pela desigualdade

$$\boldsymbol{x^2 + 4x + y^2 - 4y - 8 \leq 0.}$$

Quando esta região rodar um ângulo de $\pi/6$ radianos em tomo da reta $x + y = 0$, ela irá gerar um sólido de superfície externa total com área igual a

a) $128\pi/3$

b) $128\pi/4$

c) $128\pi/5$

d) $128\pi/6$

e) $128\pi/7$

Comentários

$$x^2 + 4x + y^2 - 4y - 8 \leq 0 \therefore$$
$$(x^2 + 4x + 2^2) + (y^2 - 4y + 2^2) \leq 4^2 \therefore$$
$$(x+2)^2 + (y-2)^2 \leq 4^2 \longleftarrow \text{círculo de centro } (-2{,}2) \text{ e raio } 4$$

Como o centro dessa circunferência está na reta $x + y = 0$, o sólido obtido se dá pela rotação desse círculo em torno de seu diâmetro e se trata de 2 cunhas meridionais, cujo ângulo de abertura de cada uma delas é de 30°.

Com isso,

$$S_{externa\ total} = S_{cunhas\ meridionais} = 2 \cdot \left(\frac{\hat{a}ngulo\ de\ abertura}{360°} \cdot 4\pi R^2 + \pi R^2\right)$$

Onde R é o raio da esfera.

Finalmente,

$$S_{externa\ total} = S_{cunhas\ meridionais} = 2 \cdot \left(\frac{30°}{360°} \cdot 4\pi \cdot 4^2 + \pi \cdot 4^2\right) = 2 \cdot \left(\frac{16\pi}{3} + 16\pi\right) \therefore$$

$$\boldsymbol{S_{externa\ total} = \frac{128\pi}{3}}$$

Gabarito: "a"

---

83. (ITA/2001)

O raio da base de um cone circular reto é igual à média aritmética da altura e a geratriz do cone. Sabendo-se que o volume do cone é $128\pi\ \mathrm{m}^3$, temos que o raio da base e a altura do cone medem, respectivamente, em metros:

a) 9 e 8

b) 8 e 6

c) 8 e 7

d) 9 e 6

e) 10 e 8

Comentários

É dado que $R = \frac{h+g}{2} \Rightarrow g = (2R - h)$, onde R,h,g são o raio da base, a altura e a geratriz de um cone, respectivamente. Somado a isso, por Pitágoras, $g^2 = R^2 + h^2$.

Logo,

$$(2R-h)^2 = R^2 + h^2 \therefore 4R^2 - 4Rh = R^2 \therefore 3R = 4h \therefore h = \frac{3R}{4}$$

Finalmente, usando o fato de que $V = 128\pi \text{ m}^3$, temos:

$$V = 128\pi = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot h \therefore 384 = R^2 \cdot \left(\frac{3R}{4}\right) \therefore R^3 = 512 \therefore \boldsymbol{R = 8\, m \Rightarrow h = 6\, m}$$

Gabarito: "b"

---

84. (ITA/2000)

Um cilindro circular reto é seccionado por um plano paralelo ao seu eixo. A secção fica a 5 cm do eixo e separa na base um arco de 120°. Sendo de $30\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ a área da secção plana retangular, então o volume da parte menor do cilindro seccionado mede, em cm^3,

a) $30\pi - 10\sqrt{3}$

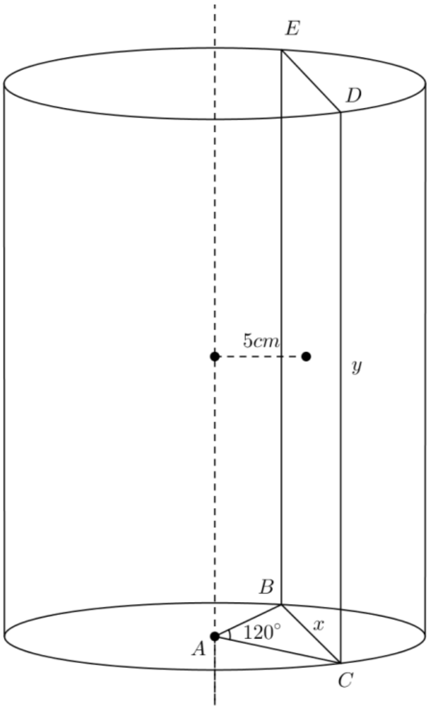
b) $30\pi - 20\sqrt{3}$

c) $20\pi - 10\sqrt{3}$

d) $50\pi - 25\sqrt{3}$

e) $100\pi - 75\sqrt{3}$

Comentários



Sendo h a altura relativa ao vértice A do ΔABC, ou seja, $h = 5\ cm$, note que:

$$\tan 60° = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)}{h} \therefore x = 2h \tan 60° \therefore x = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} \therefore x = 10\sqrt{3}\ cm$$

Dado que $S = xy = 30\sqrt{3}\ cm^2$, temos:

$$y = \frac{30\sqrt{3}}{10\sqrt{3}} \therefore y = 3\ cm$$

Com isso, sendo R o raio da base circular do cilindro, chega-se a:

$$R = \frac{h}{\cos 60°} = \frac{5}{\left(\frac{1}{2}\right)} \therefore R = 10\ cm$$

$$V_{sólido\ menor} = (S_{arco\ \widehat{BC}} - S_{\Delta ABC}) \cdot y = \left[(\pi \cdot 10^2) \cdot \frac{120°}{360°} - \frac{10\sqrt{3} \cdot 5}{2}\right] \cdot 3 \therefore$$

$$\boldsymbol{V_{sólido\ menor} = 100\pi - 75\sqrt{3}\ cm^3}$$

Gabarito: "e"

85. (ITA/2000)

Um cone circular reto com altura de $\sqrt{8}$ cm e raio da base de 2 cm está inscrito numa esfera que, por sua vez, está inscrita num cilindro. A razão entre as áreas das superfícies totais do cilindro e do cone é igual a

a) $\frac{3(\sqrt{2}-1)}{2}$

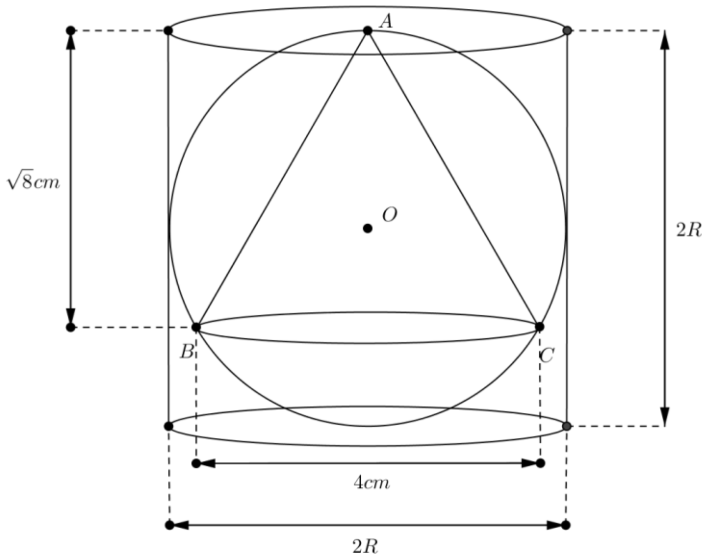
b) $\frac{9(\sqrt{2}-1)}{4}$

c) $\frac{9(\sqrt{6}-1)}{4}$

d) $\frac{27(\sqrt{3}-1)}{8}$

e) $\frac{9(\sqrt{2}-1)}{16}$

Comentários



A área do cone S_{cone} é dada por $S_{cone} = \pi r(r + g)$.

Como $g = \sqrt{r^2 + h^2} \therefore g = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{8}\right)^2} = \sqrt{12} \therefore g = 2\sqrt{3}\ cm$, então:

$$S_{cone} = \pi \cdot 2 \cdot \left(2 + 2\sqrt{3}\right) \therefore S_{cone} = 4\pi\left(1 + \sqrt{3}\right)\ cm^2$$

Pela figura acima, note que a altura do cilindro é igual ao diâmetro de sua base, sendo R o circunraio do ΔABC, que, por sua vez, possui lados $4\ cm, a, a$, sendo $AB = AC = a$. Diante disso, pela fórmula da área do ΔABC em função do circunraio, chega-se a:

$$S = \frac{4 \cdot \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \cdot a \cdot a}{4R} \therefore R = \frac{a^2}{2\sqrt{8}} = \frac{a^2}{4\sqrt{2}}$$

Agora, relacionemos, por Pitágoras, a medida a com a altura do ΔABC, como segue abaixo:

$$a^2 = 4^2 + \left(\sqrt{8}\right)^2 \therefore a^2 = 12\ cm^2$$

Daí,

$$R = \frac{12}{4\sqrt{2}} \therefore R = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}\ cm$$

Com isso,

$$S_{cilindro} = 2\pi R(R + 2R) = 6\pi R^2 = 6\pi \cdot \left(\frac{9}{2}\right) \therefore S_{cilindro} = \frac{54\pi}{2}\ cm^2$$

Finalmente,

$$\frac{S_{cilindro}}{S_{cone}} = \frac{54\pi}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\left(1 + \sqrt{3}\right)} \therefore \boldsymbol{\frac{S_{cilindro}}{S_{cone}} = \frac{27\left(\sqrt{3} - 1\right)}{8}}$$

Gabarito: “d”

---

86. (ITA/1999)

Num cone circular reto, a altura é a média geométrica entre o raio da base e a geratriz. A razão entre a altura e o raio da base é:

a) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

b) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{-1+\sqrt{5}}}{2}$

d) $\frac{-1+\sqrt[3]{5}}{3}$

e) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Comentários

Sendo h, r e g a altura, o raio da base e a geratriz, respectivamente, temos:

$$h = \sqrt{r \cdot g} \therefore h^2 = r \cdot g$$

Mas,

$$g^2 = r^2 + h^2 \therefore g = \sqrt{(r^2 + h^2)}$$

Logo,

$$h^2 = r \cdot \sqrt{(r^2 + h^2)} \therefore \left(\frac{h}{r}\right)^2 = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2\right)}$$

Chamando $x = \frac{h}{r}$, então:

$$x^2 = \sqrt{1 + x^2} \therefore x^4 = 1 + x^2 \therefore x^4 - x^2 - 1 = 0$$

Por fim, a solução viável para a equação biquadrada é:

$$x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \therefore \boldsymbol{x} = \sqrt{\frac{\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}}$$

Gabarito: "e"

---

87. (ITA/1998)

Considere um cone circular reto cuja geratriz mede $\sqrt{5}$ cm e o diâmetro da base mede 2 cm. Traçam-se n planos paralelos à base do cone, que o seccionam determinando n+1 cones, incluindo o original, de modo que a razão entre os volumes do cone maior e do cone menor é 2. Os volumes destes cones formam uma progressão aritmética crescente cuja soma é igual a 2π. Então, o volume, em cm^3, do tronco de cone determinado por dois planos consecutivos é igual a:

a) $\frac{\pi}{33}$

b) $\frac{2\pi}{33}$

c) $\frac{\pi}{9}$

d) $\frac{2\pi}{15}$

e) π

Comentários

Sendo r a razão da P.A. formada pelos volumes de cones formados, temos:

$$\frac{V_{n+1}}{V_1} = \frac{V_1 + nr}{V_1} = 2 \therefore V_1 = nr$$

Dado que a soma dos $n + 1$ termos dessa P.A. é 2π, então:

$$V_1 + \cdots + V_{n+1} = \frac{(V_1 + V_{n+1})}{2} \cdot (n+1) = \frac{(V_1 + V_1 + nr)}{2} \cdot (n+1)$$

$$= \frac{nr + nr + nr}{2} \cdot (n+1) = \frac{3nr \cdot (n+1)}{2} = 2\pi \therefore$$

$$n(n+1) = \frac{4\pi}{3r} (I)$$

Mas, são fornecidos a geratriz g e o diâmetro da base $2r$ do cone.

Logo,

$$V_{n+1} = \frac{\pi r^2 \cdot \sqrt{g^2 - r^2}}{3} = V_1 + nr \therefore \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} = V_1 + nr = 2nr \therefore n = \frac{\pi}{3r} (II)$$

Por $(I)\ e\ (II)$, então:

$$\frac{\pi}{3r}\left(\frac{\pi}{3r} + 1\right) = \frac{4\pi}{3r} \therefore \frac{\pi}{3r} + 1 = 4 \therefore \boldsymbol{r = \frac{\pi}{9}\ cm^3}$$

Gabarito: “c”

---

88. (ITA/1997)

A altura e o raio da base de um cone de revolução medem 1 cm e 5 cm respectivamente. Por um ponto do eixo do cone situado a d cm de distância do vértice, traçamos um plano paralelo à base, obtendo um tronco de cone. O volume deste tronco é a média geométrica entre os volumes do cone dado e do cone menor formado. Então d é igual a

a) $\frac{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}}{3}$

b) $\frac{\sqrt[3]{3-\sqrt{5}}}{2}$

c) $\frac{\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{3}$

Comentários

Seja r o raio do cone menor formado, por semelhança entre os dois cones, temos:

$$\frac{1}{d} = \frac{5}{r} \therefore r = 5d$$

Logo,

$$V_{cone\ menor} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot d = \frac{1}{3} \cdot \pi (5d)^2 \cdot d = \frac{25\pi d^3}{3}$$

$$V_{cone\ maior} = \frac{1}{3} \cdot \pi 5^2 \cdot 1 = \frac{25\pi}{3}\ cm^3$$

$$V_{tronco} = V_{cone\ maior} - V_{cone\ menor} = \frac{25\pi}{3} \cdot (1 - d^3)$$

Dado que $V_{tronco} = \sqrt{V_{cone\ menor} \cdot V_{cone\ maior}}$, então:

$$\frac{25\pi}{3} \cdot (1 - d^3) = \sqrt{\frac{25\pi d^3}{3} \cdot \frac{25\pi}{3}} \therefore (1 - d^3) = \sqrt{d^3} \therefore (1 - d^3)^2 = d^3 \therefore d^6 - 3d^3 + 1 = 0$$

As soluções reais para tal equação são $d = \sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\ cm$ e $d = \sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\ cm$, como $d < 1\ cm$, conclui-se que:

$$\boldsymbol{d = \sqrt[3]{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}}$$

Gabarito: “b”

---

89. (ITA/1995)

O raio de um cilindro de revolução mede 1,5 m. Sabe-se que a área da base do cilindro coincide com a área da secção determinada por um plano que contém o eixo do cilindro. Então, a área total do cilindro, em m^2, vale:

a) $3\pi^2/4$

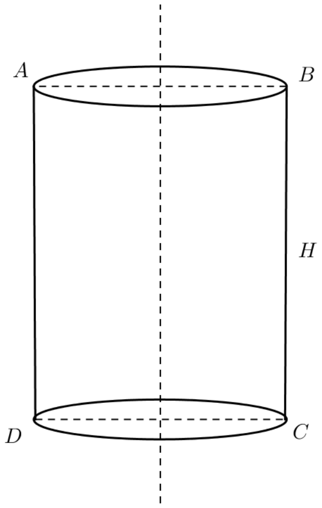
b) $9\pi(2 + \pi)/4$

c) $\pi(2 + \pi)$

d) $\pi^2/2$

e) $3\pi(\pi + 1)/2$

Comentários



Seja H a altura do cilindro, dado que a área da base S_{base} é igual à área da secção $ABCD$, então:

$$(2 \cdot 1{,}5) \cdot H = \pi \cdot 1{,}5^2 \therefore H = \frac{1{,}5\pi}{2}\ m$$

Logo,

$$S_{total} = 2\pi \cdot 1{,}5 \cdot (1{,}5 + H) = 3\pi \cdot \left(1{,}5 + \frac{1{,}5\pi}{2}\right) \therefore S_{total} = 3\pi \cdot \left(\frac{9}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) \therefore$$

$$\boldsymbol{S_{total} = \frac{9\pi}{4} \cdot (2 + \pi)\ m^2}$$

Gabarito: "b"

90. (ITA/1995)

Um cone circular reto tem altura 12 cm e raio da base 5 cm. O raio da esfera inscrita neste cone mede, em cm:

a) 10/3

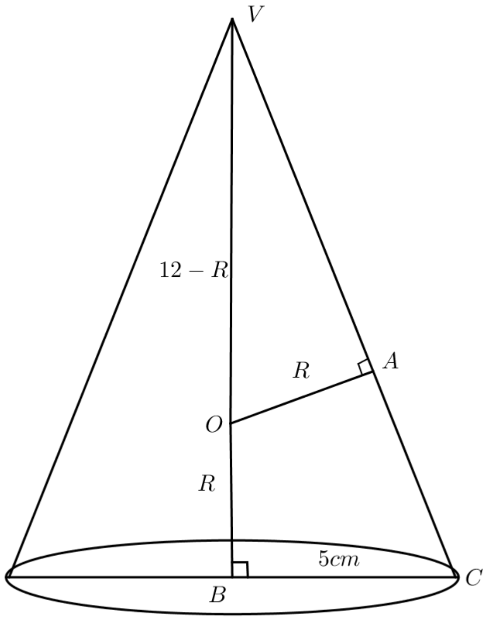
b) 7/4

c) 12/5

d) 3

e) 2

Comentários



Sendo O o centro da esfera inscrita no cone, note que $\Delta VAO \sim \Delta VBC$.

Com isso,

$$\frac{VO}{OA} = \frac{VC}{BC} \therefore \frac{12-R}{R} = \frac{VC}{5}$$

Por Pitágoras no ΔVBC, temos:

$$VC = \sqrt{5^2 + 12^2} \therefore VC = 13\ cm$$

Logo,

$$\frac{12-R}{R} = \frac{13}{5} \therefore 60 - 5R = 13R \therefore 18R = 60 \therefore \boldsymbol{R = \frac{10}{3}\ cm}$$

Gabarito: "a"

---

91. (IME/2020)

Em um cubo regular de aresta a, os pontos M, N e L pertencentes às três arestas distintas que partem do vértice A estão a uma distância x de A tal que $0 < x \leq \frac{a}{2}$. Para que plano MNL seja tangente à esfera inscrita no cubo, o valor de x é:

a) $\frac{a}{2}(\sqrt{3}-1)$

b) $\frac{a}{2}(3-\sqrt{3})$

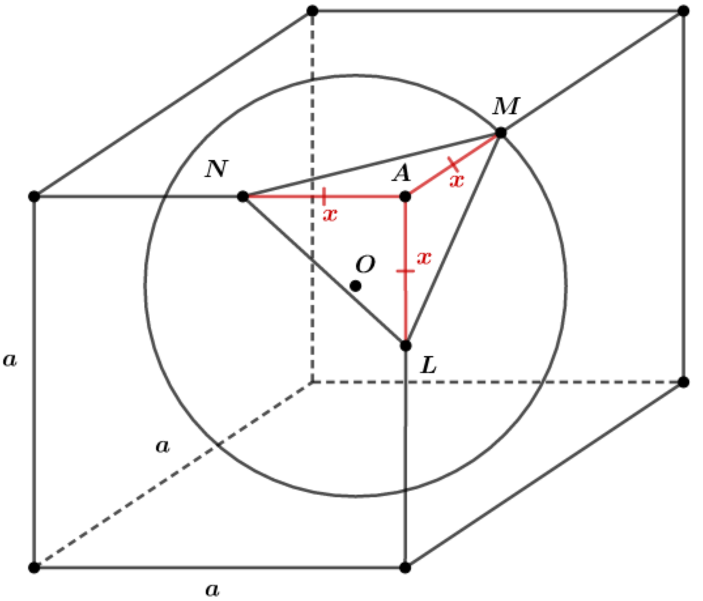
c) $\frac{a}{2}(2-\sqrt{3})$

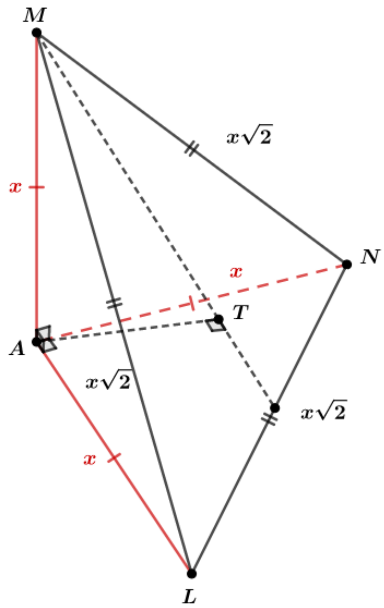
d) $\frac{a}{2}(4-2\sqrt{3})$

e) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Comentários

Desenhando a figura do enunciado, temos:





$AMNL$ é uma pirâmide triangular. Como $AM = AN = AL = x$ e A é o vértice de um cubo, temos pelo teorema de Pitágoras que:

$$MN = NL = ML = x\sqrt{2}$$

Logo, MNL é um triângulo equilátero.

AT é a altura da pirâmide $AMNL$. Para que MNL seja tangente à esfera inscrita, a soma do raio da esfera com a altura AT deve ser igual à metade da diagonal do cubo, ou seja,

$$R + AT = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

O raio da esfera inscrita ao cubo é igual à metade da aresta do cubo:

$$R = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{AT = \frac{a}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)}$$

Para encontrar x em função de a, vamos calcular o volume da pirâmide de duas formas:

$$V_{AMNL} = \frac{1}{6}x^3 \ (pois\ é\ trirretângulo\ no\ vértice\ A)$$

$$V_{AMNL} = \frac{1}{3}AT \cdot S_{MNL} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right) \cdot \frac{1}{2}\left(x\sqrt{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{ax^2\left(3 - \sqrt{3}\right)}{12}$$

Igualando as expressões de volume:

$$\frac{1}{6}x^3 = \frac{ax^2\left(3 - \sqrt{3}\right)}{12} \therefore \boxed{x = \frac{a}{2}\left(3 - \sqrt{3}\right)}$$

Um detalhe é que a questão restringiu os valores de x:

$$0 \leq x \leq \frac{a}{2}$$

Mas

$$\frac{a}{2}\left(3-\sqrt{3}\right) \cong \frac{a}{2}(3-1{,}7) = \frac{a}{2}(1{,}3) > \frac{a}{2}$$

Assim, o gabarito da questão não condiz com as restrições do problema e, por isso, foi anulada.

Gabarito: anulada

---

92. (IME/2019)

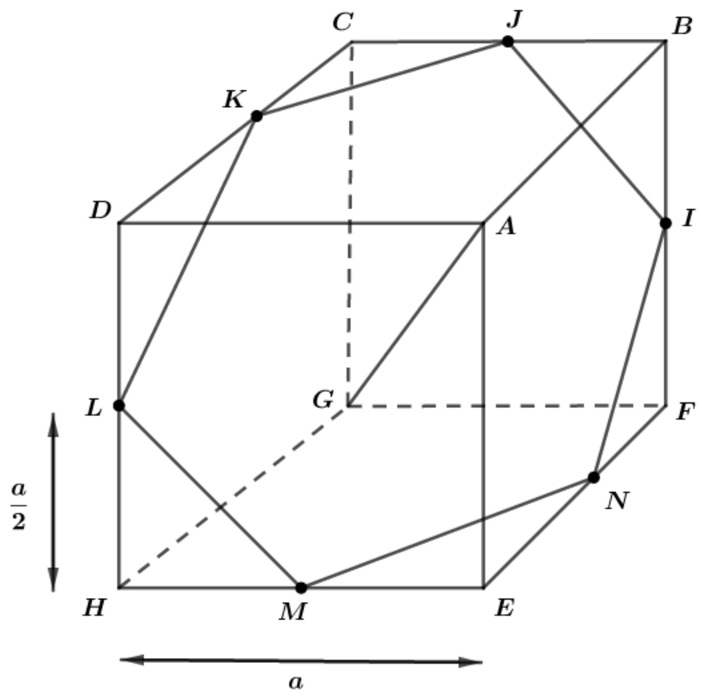
Um cubo com diagonal principal $\overline{AG}$ é interceptado pelo plano α, perpendicular à $\overline{AG}$, formando uma seção hexagonal regular. Calcule, em função da aresta a do cubo:

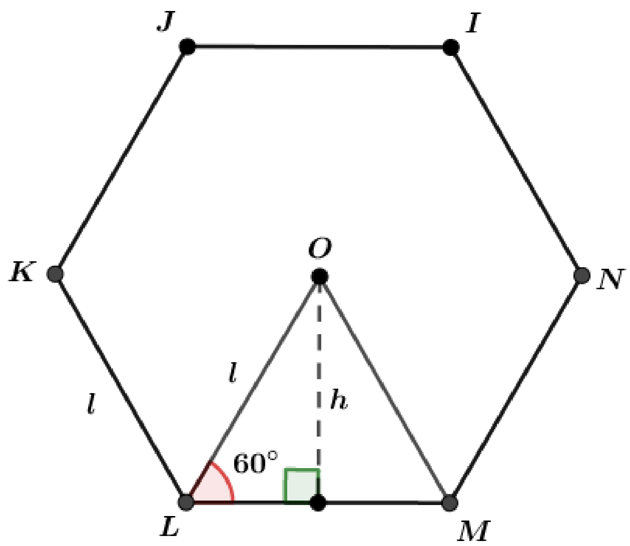
a) o apótema dessa seção hexagonal;

b) o raio da esfera que é tangente a essa seção e às faces do cubo que contém o vértice A.

Comentários

A dificuldade nessa questão está em ter a visão geométrica para desenhar a situação. A questão afirma que o plano α forma uma seção hexagonal regular no cubo, logo, devido à simetria do cubo, temos um hexágono regular cujos vértices são os pontos médios da aresta do cubo.





a) Seja l o lado do hexágono formado, então, seu apótema é dado pela medida de h:

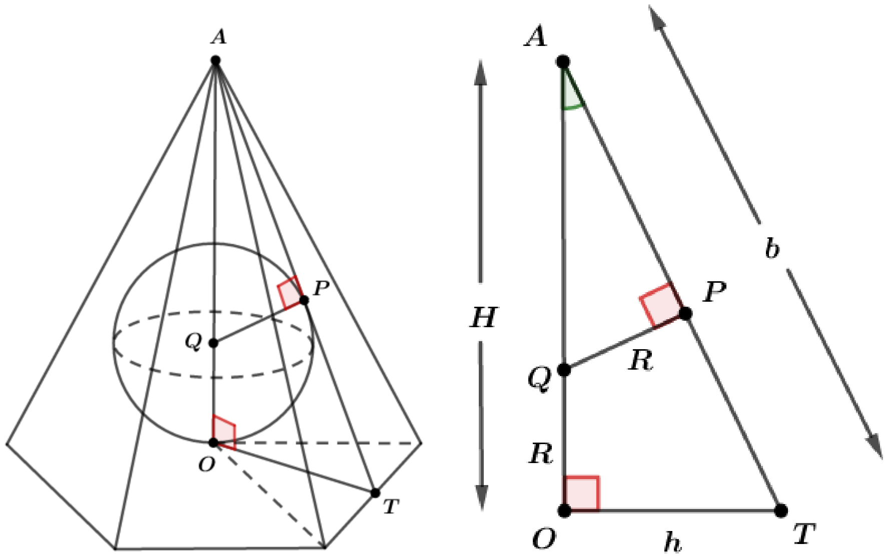
$$h = l \cdot sen(60°) = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Sabendo que os vértices do hexágono são os pontos médios das arestas do cubo, temos:

$$l \cdot sen(45°) = \frac{a}{2} \Rightarrow l = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{a\sqrt{6}}{4}}$$

b) A esfera tangente às faces do cubo e à seção hexagonal é uma esfera inscrita na pirâmide hexagonal regular.



O centro O do hexágono é o ponto médio da diagonal principal $\overline{AG}$, logo, a altura H é igual à metade da diagonal principal do cubo:

$$H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Sabemos o valor de h, podemos aplicar o teorema de Pitágoras para calcular b:

$$b^2 = h^2 + H^2 \Rightarrow b^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow b = \frac{3\sqrt{2}a}{4}$$

Perceba que $\Delta APQ \sim \Delta AOT$, desse modo:

$$\frac{AQ}{QP} = \frac{AT}{OT} \Rightarrow \frac{H-R}{R} = \frac{b}{h} \Rightarrow \frac{H}{R} - 1 = \frac{b}{h} \Rightarrow R = \frac{hH}{b+h}$$

Substituindo os valores, encontramos:

$$R = \frac{\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{a\cdot 3\sqrt{2}}{4} + \frac{a\sqrt{6}}{4}} = a \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2\left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}$$

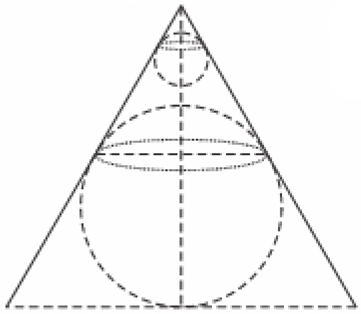
$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{a\left(3-\sqrt{3}\right)}{4}}$$

Gabarito: a) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ b) $R = \frac{a(3-\sqrt{3})}{4}$

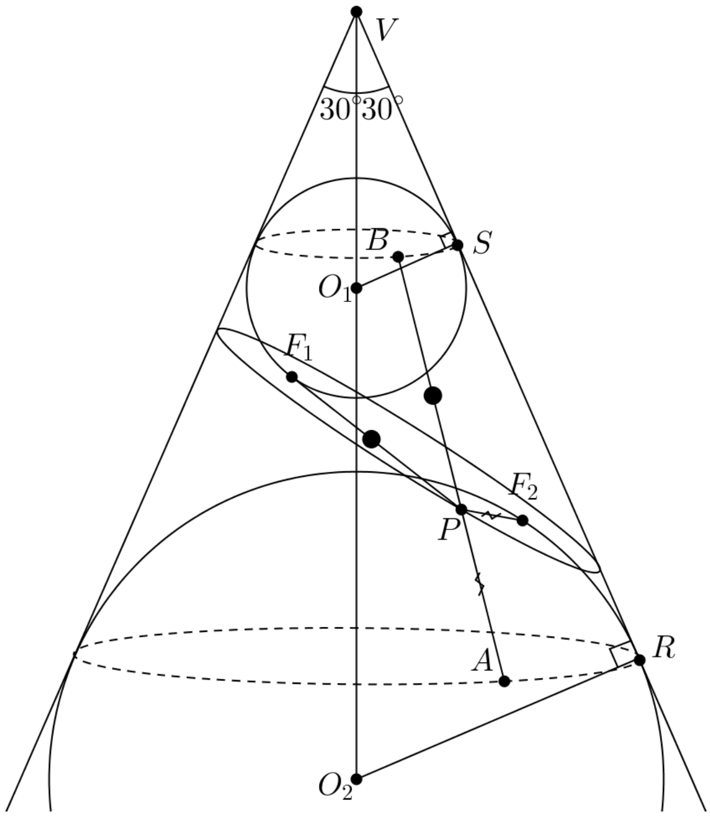
---

93. (IME/2017)

Em um cone equilátero são inscritas duas esferas de raios $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}R$ e R, conforme a figura abaixo. Um plano secante ao cone é traçado de forma que este seja tangente às duas esferas. Determine em termos de R o maior segmento possível que une dois pontos da curva formada pela interseção do referido plano com o cone.



Comentários



Na figura acima, note que o plano secante ao cone e tangente às esferas define uma curva elíptica de focos F_1 e F_2.

Para comprovar isso, basta provar que para um ponto genérico P da curva, $(PF_1 + PF_2)$ é constante.

Para isso, note que as retas PF_1 e PB são ambas tangentes à esfera de centro O_1, ou seja, possuem mesma medida.

Daí,

$$PF_1 = PB$$

Analogamente, as retas PF_2 e PA são ambas tangentes à esfera de centro O_2.

Daí,

$$PF_2 = PA$$

Logo,

$$(PF_1 + PF_2) = PA + PB = AB$$

Como AB é constante, já que os círculos definidos pelas duas esferas no cone são únicos, tal curva é uma elipse de fato.

Sabendo-se disso, o segmento solicitado no enunciado se trata do eixo maior da elipse $2a$.

Mas, atentando-se à figura acima, temos:

$$AB = RS = 2a.$$

$$2a = RS = RV - SV = O_2R \cdot \cot 30° - O_1S \cdot \cot 30° = (O_2R - O_1S) \cdot \cot 30°$$

Sendo $O_2R = R$ e $O_1S = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}R$, então:

$$2a = \left(R - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}R\right) \cdot \cot 30° = \frac{2\sqrt{3}R}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\sqrt{3}R}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} \therefore \boldsymbol{2a = \left(3 - \sqrt{3}\right)R}$$

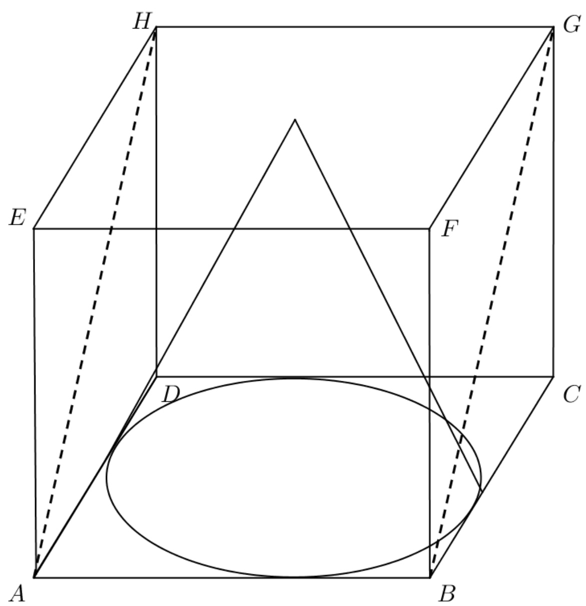
Gabarito: $\boldsymbol{2a = \left(3 - \sqrt{3}\right)R}$

---

94. (IME/2016)

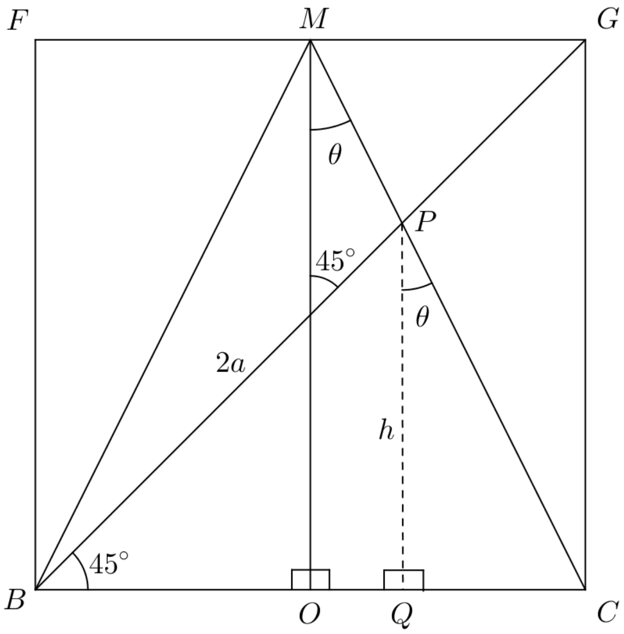
Um cone é inscrito em um cubo ABCDEFGH de forma que a base do cone é o círculo inscrito na base ABCD. O vértice do cone é o centro da face oposta do cubo. A projeção do vértice H na base ABCD coincide com o vértice D. Determine a área da seção do cone pelo plano ABH em função de a, a medida da aresta do cubo.

Comentários



A área correspondente à intersecção do plano ABH no cone se trata de uma elipse, que é a curva formada pela intersecção de um plano oblíquo sem passar pela base a um cone.

A fim de calcular a área dessa elipse, seja a figura de uma face lateral do cubo abaixo:



Note que o segmento BP corresponde ao eixo maior da elipse $2a'$.

Assim, no ΔBPQ e ΔCPQ, temos:

$$h = BQ \cdot \operatorname{tg} 45° = QC \cdot \operatorname{cotg} \theta \therefore BQ = QC \cdot \operatorname{cotg} \theta$$

Mas, sendo $\operatorname{cotg} \theta = \frac{MO}{CO} = \frac{2a}{a} = 2$, chega-se a:

$$QC = \frac{BQ}{2}$$

Como $BQ + QC = BC = a$, temos:

$$BQ = \frac{2a}{3}$$

Com isso,

$$2a' = \frac{BQ}{\cos 45°} \therefore 2a' = \frac{2\sqrt{2}a}{3} \therefore a' = \frac{\sqrt{2}a}{3} \ (I)$$

Agora, façamos uso da seguinte relação, onde e é a excentricidade da elipse, para encontrar o valor do eixo menor $2b'$:

$$e = \frac{\cos 45°}{\cos \theta}$$

Como $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, então:

$$e = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \therefore e = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$e = \frac{\sqrt{a'^2 - b'^2}}{a'} = \frac{\sqrt{10}}{4} \therefore a'^2 - b'^2 = \left(\frac{10}{16}\right) a'^2 \therefore b'^2 = a'^2 \cdot \frac{3}{8} = \left(\frac{\sqrt{2}a}{3}\right)^2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{12} = \frac{3a^2}{36} \therefore$$

$$b' = \frac{\sqrt{3}a}{6}\ (II)$$

Finalmente, sendo a área de uma elipse dada por $S = \pi a' b'$, chega-se a:

$$S_{elipse} = S_{seção} = \pi \cdot \frac{\sqrt{2}a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{6} \therefore \boldsymbol{S_{seção} = \frac{\sqrt{6}\pi \cdot a}{18}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S_{seção} = \frac{\sqrt{6}\pi \cdot a}{18}}$

---

95. (IME/2010)

Sejam ABC um triângulo equilátero de lado 2 cm e r uma reta situada no seu plano, distante 3 cm do seu baricentro. Calcule a área da superfície gerada pela rotação deste triângulo em torno da reta r.

a) $8\pi\ \text{cm}^2$

b) $9\pi\ \text{cm}^2$

c) $12\pi\ \text{cm}^2$

d) $16\pi\ \text{cm}^2$

e) $36\pi\ \text{cm}^2$

Comentários

Utilizando o Teorema de Pappus-Guldin, como segue abaixo, temos:

$$S_{sólido} = 2\pi \bar{x} L;$$

Onde:

$\bar{x}$: distância da reta r ao centro de massa do ΔABC;

L: perímetro do ΔABC;

$$S_{sólido} = 2\pi \cdot 3 \cdot 6 \therefore \boldsymbol{S_{sólido} = 36\pi\ cm^2}$$

Gabarito: "e"

---

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA

Chegamos ao final do curso. Ao longo da lista de exercícios, você deve ter percebido que a maioria dos problemas de geometria espacial podem ser resolvidas por geometria plana. A grande dificuldade nas questões de geometria espacial é ter uma boa imaginação para conseguir imaginar os objetos descritos nos enunciados. Por meio da resolução de diversas questões, conseguimos melhorar isso.

Lembre-se! O melhor caminho para aprender Matemática é resolvendo questões! Vimos todos os temas que podem ser cobrados na prova. Agora, você está pronto para enfrentar as provas! Boa sorte e espero ver seu nome na lista de aprovados!

Quaisquer dúvidas, você pode entrar em contato conosco pelo fórum de dúvidas ou caso prefira:

FALE COMIGO

/profvictorso

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Iezzi, Gelson. Fundamentos de matemática elementar, 10: geometria espacial. 7. ed. Atual, 2013. 472p.

[2] Netto, Sergio. A Matemática no Vestibular do IME. 1 ed. Vestseller, 2011. 696p.

[3] Lidski, V.B.; Ovsianikov, L.V.; Tulaikov, A.N.; Shabunin, M.I. Problemas de Matemática Elementar. 1 ed. Vestseller, 2014. 477p.

[4] Carvalho, Paulo. Introdução à Geometria Espacial. 4 ed. SBM, 2005. 93p.