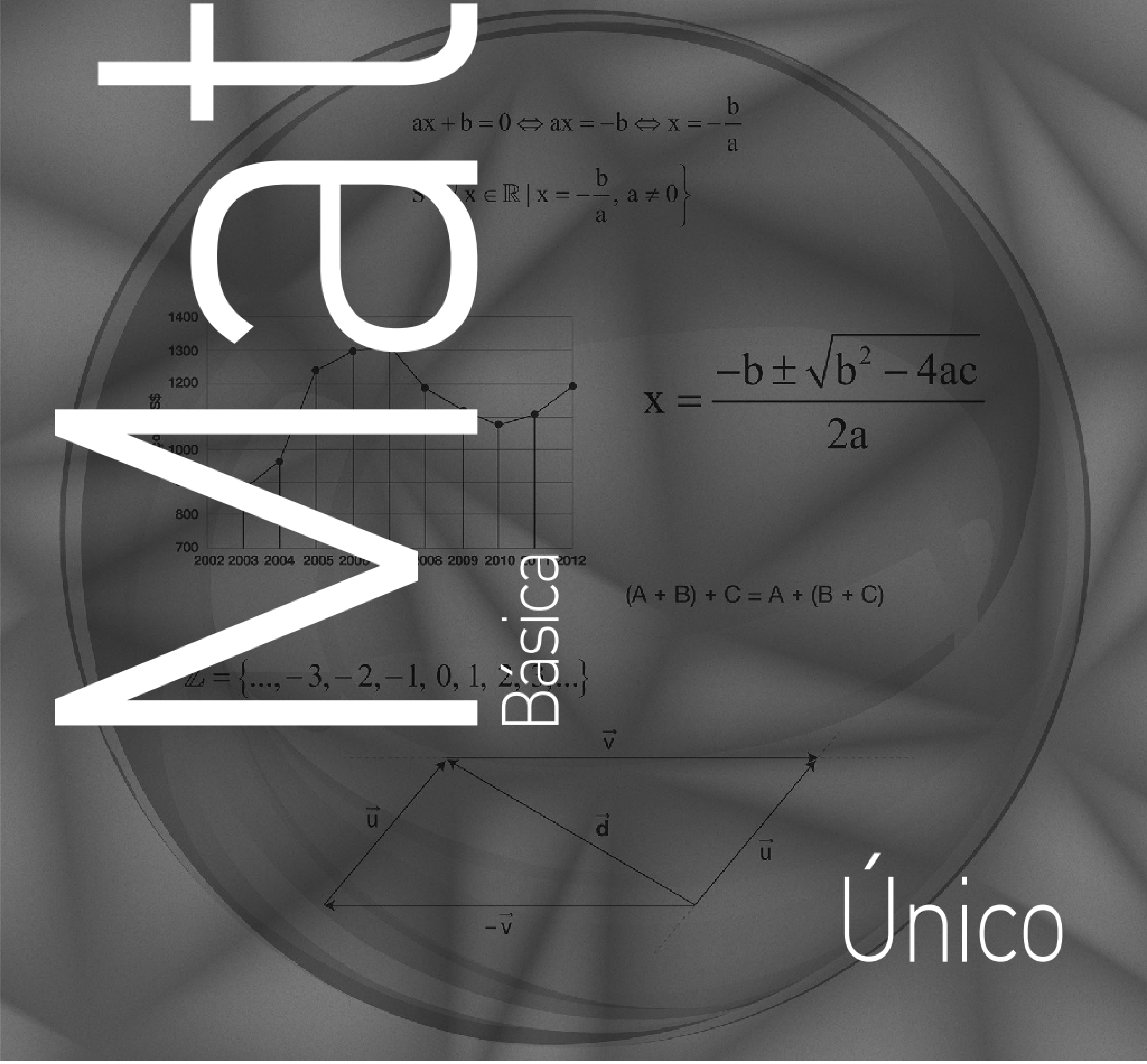


Único

Pré-vestibular Matemática Básica

SISTEMA DE ENSINO
POLIEDRO

Autoria: Renato Alberto Rodrigues.

Diretor executivo: Nicolau Arbex Sarkis.
Gerência editorial: João Carlos Puglisi.
Coordenação de edição técnica: Marília L. dos Santos G. Ribeiro.
Edição técnica: Everton Perugini.
Coordenação de produção editorial: Lívia Scherrer dos Santos.
Analista de produção editorial: Claudia Moreno Fernandes.
Coordenação de edição: Michelle Silva da Mata e Vivian Plascak Jorge.
Edição: Equipes de edição da Editora Poliedro.
Coordenação de revisão: Mariana Castelo Queiroz.
Revisão: Carla Vieira C. Egidio, Natália Cavalcante Borba e Nely Kemi Tanisho.
Coordenação de arte: Antonio Domingues e Kleber S. Portela.
Diagramação: Elaine S. Faria Torres e Francisco Cláudio M. da Silva.
Ilustrações: Elaine S. Faria Torres e Fernanda de Lima Bernardes.
Coordenação de licenciamento: Ana Rute A. M. Perugini.
Licenciamento: Equipe de licenciamento da Editora Poliedro.
Projeto gráfico: Fernanda de Lima Bernardes e Kleber S. Portela.
Projeto gráfico da capa: Bruno Torres e Varão Monteiro Junior.
Coordenador de PCP: Anderson Flávio Correia.
Impressão e acabamento: nywgraf Editora Gráfica Ltda.

Crédito: contracapa Martina Vaculikova/Shutterstock.

SISTEMA DE ENSINO
POLIEDRO

São José dos Campos – SP
ISBN: 978-85-7901-036-1
Telefax: (12) 3924-1616
editora@sistemapoliedro.com.br
www.sistemapoliedro.com.br

SUMÁRIO

Introdução **5**

Capítulo 1 – Aritmética 6

Capítulo 2 – Álgebra 17

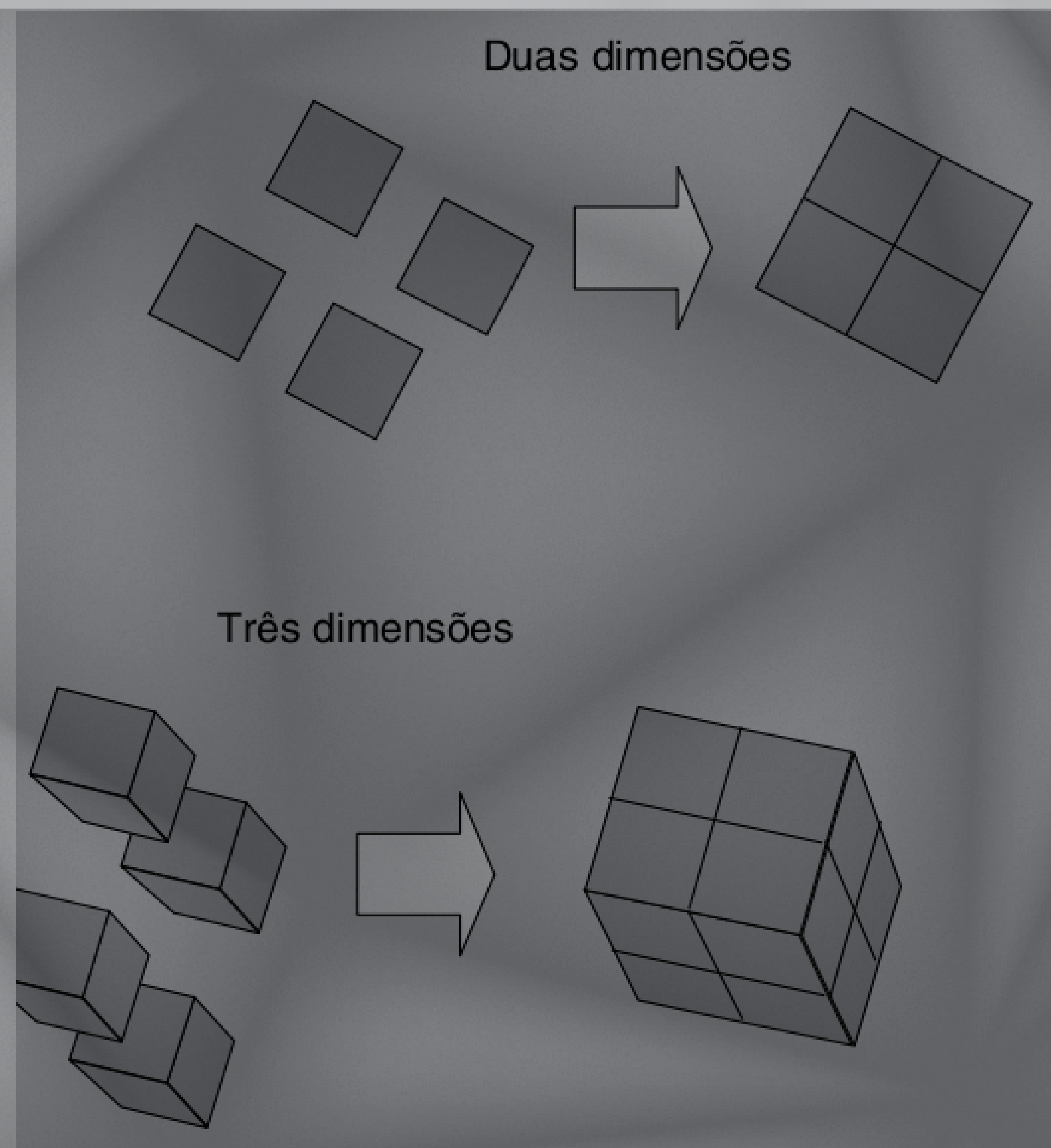
Capítulo 3 – Geometria 27

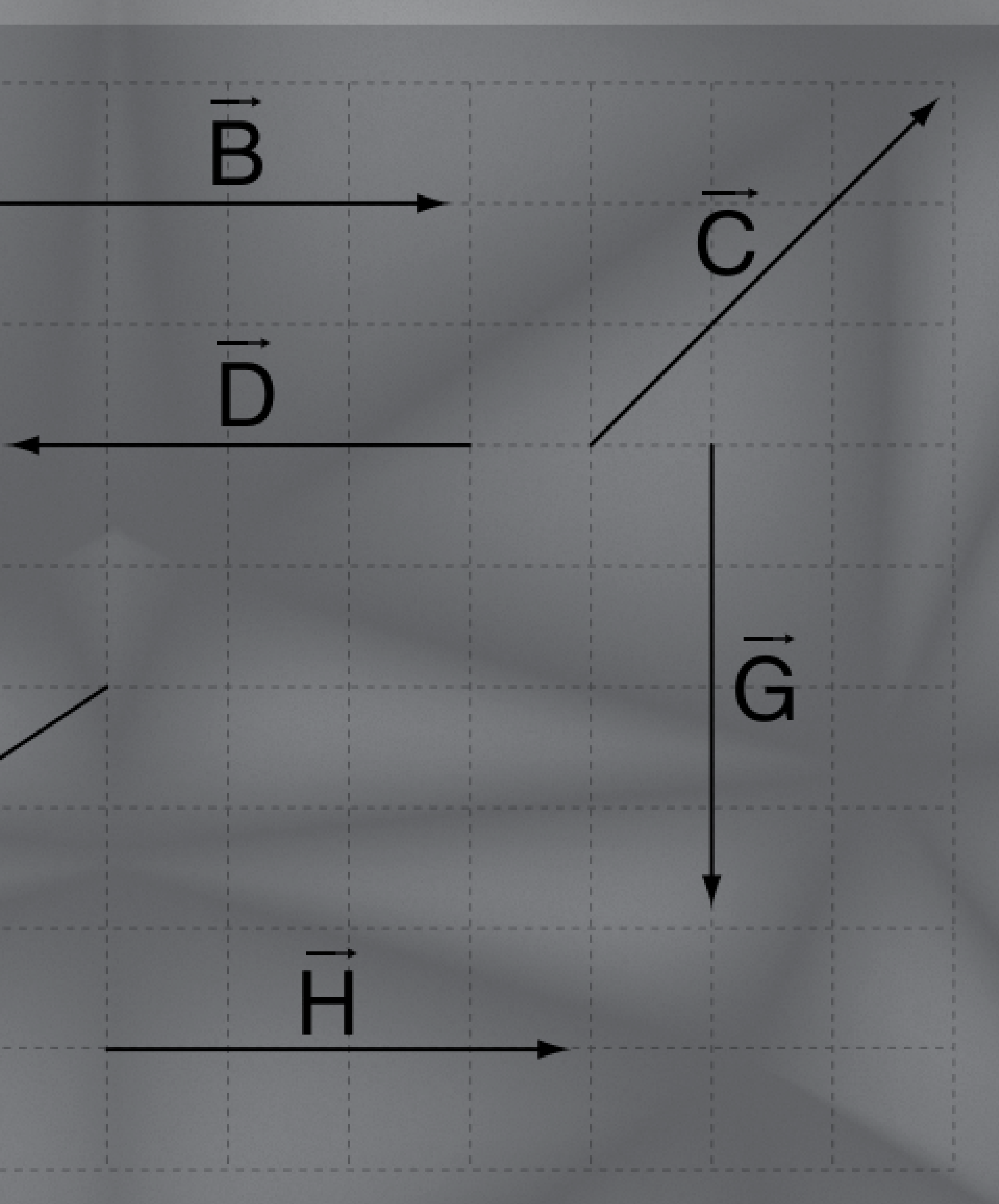
Capítulo 4 – Álgebra x Geometria 37

Capítulo 5 – A Matemática no estudo da Física 50

Gabarito **61**

Matemática Básica





INTRODUÇÃO

Inicialmente, é importante ressaltar que Matemática Básica não quer dizer matemática fácil. Esse livro foi elaborado tanto para os estudantes do Ensino Médio que estão ingressando no terceiro ano como para aqueles que já concluíram essa etapa dos estudos e se preparam para os vestibulares.

Nos estudos de Matemática que são feitos nessa fase, você usará um material que proporciona uma forte revisão dos assuntos que lhes foram apresentados a partir do primeiro ano do Ensino Médio. Dessa forma, o livro de Matemática Básica foi elaborado para preencher as possíveis lacunas do conhecimento matemático adquirido durante o Ensino Fundamental.

Os primeiros capítulos deste livro abordam, de forma mais aprofundada, alguns dos principais assuntos que são estudados até o nono ano do Ensino Fundamental. Assuntos estes que são pré-requisitos para o bom aprendizado das teorias que serão vistas já nas primeiras aulas das frentes de Matemática.

Sendo assim, recomenda-se a leitura atenta das teorias apresentadas e dos exercícios resolvidos de cada capítulo e que faça todas as atividades propostas antes do início das aulas regulares de Matemática.

1 Aritmética

Operações diretas no universo natural

O universo dos números naturais é abordado de duas formas distintas: a abordagem ordinal, em que os numerais designam posições, e a abordagem cardinal, em que os numerais designam quantidades. A distinção entre essas abordagens é tão intrínseca na concepção dos números que não se sabe qual delas é a mais antiga. No entanto, não há dúvidas quanto à importância dessa distinção quando observamos que as palavras usadas para designar os ordinais e os cardinais são diferentes.

Os numerais ordinais $\mathbb{N}^*$ são designados por palavras como *primeiro*, *segundo*, *terceiro*, *vigésimo* etc.

Os numerais cardinais $\mathbb{N}$ são designados por palavras como *zero*, *um*, *dois*, *três*, *vinte* etc.

A formalização mais bem-sucedida do universo dos números naturais foi proposta pelo matemático Giuseppe Peano, no século XIX. Ele relacionou os dois conceitos estabelecendo uma ordem para as quantias.

A partir dos conceitos primitivos de *zero*, *número natural* e *sucessor*, Peano apresenta as seguintes regras:

- Zero é número natural ou, em linguagem simbólica:
$$0 \in \mathbb{N}$$
- Todo número natural possui um único sucessor.
- Zero não é sucessor de número natural algum.

Exercício

1 Responda às seguintes perguntas:

a) Qual é o primeiro número natural?
b) Qual é o décimo sexto número natural?
c) Qual é o sucessor do número novecentos e oitenta e nove?
d) Qual é o sucessor do oitavo número natural?
e) Qual é o antecessor do ducentésimo quadragésimo terceiro número natural?
f) Qual número natural não possui antecessor?

A **adição** é a primeira operação aritmética que devemos compreender no universo dos números naturais. Essa é uma operação que se aplica a dois ou mais números naturais (parcelas) e produz, em todos os casos, um único resultado que chamamos de **soma** ou **total**.

O símbolo gráfico que indica uma operação aritmética é chamado de operador aritmético, e o operador da adição (+) é mais conhecido como *sinal de mais*.

Primeira Lei da Adição (Lei do Elemento Neutro)

A soma do número **zero** com qualquer outro número natural **n** é igual ao número **n**.

Segunda Lei da Adição

O sucessor da soma de dois números naturais é igual à soma de um deles com o sucessor do outro.

A partir dessas duas leis, pode-se concluir que a adição apresenta duas importantes propriedades, válidas para quaisquer que sejam os números naturais **A**, **B** e **C**.

Propriedade comutativa da adição:

$$A + B = B + A$$

Propriedade associativa da adição:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Nesta última propriedade, os parênteses são usados para indicar a ordem das adições. O primeiro membro da igualdade indica a adição do número C ao resultado de A + B, enquanto o segundo membro indica a adição do número A ao resultado de B + C. Como os resultados são iguais, fica estabelecido que a adição de três ou mais parcelas não necessita de parênteses para indicar em que ordem elas devem ser executadas.

Exercício

2 Efetue as seguintes adições:

a) $0 + 2 =$
b) $2 + 0 =$
c) $(2 + 3) + 4 =$
d) $2 + (3 + 4) =$
e) $2 + 3 + 4 =$
f) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 =$
g) $2.000 + 900 + 30 + 8 =$
h) $798 + 654 =$
i) $123.456.789 + 987.654.321 =$
j) $2.468 + 3.579 + 7.536 =$

A **multiplicação** é a próxima operação aritmética que devemos compreender no universo natural. Essa também é uma operação que se aplica a dois ou mais números naturais, agora chamados de fatores, e também produz resultado único, o qual chamamos de **produto**.

O operador da multiplicação (×) é mais conhecido como *sinal de vezes*, mas para não ser confundido com a variável x no estudo da álgebra, esse símbolo é frequentemente substituído por um ponto (·).

Primeira Lei da Multiplicação

O produto do número **zero** com qualquer outro número natural **n** é igual ao número **zero**.

$$\mathbf{0 \,.\, n = 0}$$

Segunda Lei da Multiplicação (Lei do Elemento Neutro)

O produto do número **um** com qualquer outro número natural **n** é igual ao número **n**.

$$\mathbf{1 \,.\, n = n}$$

Terceira Lei da Multiplicação (distributiva)

Dados três números naturais **m**, **n** e **p**, temos que:

$$\mathbf{(m + n) \,.\, p = m \,.\, p + n \,.\, p}$$

As multiplicações entre números naturais maiores ou iguais a dois podem ser definidas como a adição de sucessivas parcelas iguais. O numeral à esquerda do operador (×) indica a quantidade de parcelas que devem ser somadas, enquanto o numeral à direita do operador indica o valor das parcelas.

Assim, temos que:

$3 \times 5 = 5 + 5 + 5$ e
$5 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$

A partir dessas três leis e do princípio da adição sucessiva, pode-se concluir que a multiplicação apresenta duas importantes propriedades, válidas para quaisquer que sejam os números naturais A, B e C.

Propriedade comutativa da multiplicação:

$$A \times B = B \times A$$

Propriedade associativa da multiplicação:

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

Exercício

3 Efetue as seguintes multiplicações:

a) $0 \times 3 =$
b) $3 \times 0 =$
c) $1 \times 5 =$
d) $7 \times 8 =$
e) $8 \times 7 =$
f) $(2 \times 3) \times 4 =$
g) $2 \times (3 \times 4) =$
h) $2 \times 3 \times 4 =$
i) $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 =$
j) $3 \times 5 \times 1 \times 4 \times 2 =$
k) $21 \times 43 =$
l) $568 \times 10 =$
m) $325 \times 76 =$
n) $407 \times 91 =$
o) $2.010 \times 481 =$

No universo natural, a **potenciação** pode ser definida por sucessivas multiplicações de fatores iguais. Ela é uma operação aplicada a dois números apenas, sendo que um deles (a base) indica o valor destes fatores enquanto o outro número (o expoente) indica a quantidade de vezes que devemos multiplicar o número 1 pela base.

Embora seja raramente usado, o operador da potenciação é o símbolo (^), sendo que o numeral escrito à esquerda é a base da potenciação e o numeral à direita é o expoente da potenciação. Mas, na prática, escrevemos o expoente um pouco acima da linha da base, e usamos a expressão *elevado a* para designar a operação.

Assim, temos que um número natural **b** elevado a um número natural **n** pode ser escrito como **b^n** ou $\mathbf{b^n}$, e para obter o resultado dessa operação (a potência), devemos multiplicar o número 1 pelo número **b** exatamente **n** vezes. Exemplos:

$$8 \wedge 4 = 8^4 = 1.8.8.8.8 = 4.096$$
$$8 \wedge 3 = 8^3 = 1.8.8.8 = 512$$
$$8 \wedge 2 = 8^2 = 1.8.8 = 64$$
$$8 \wedge 1 = 8^1 = 1.8 = 8$$
$$8 \wedge 0 = 8^0 = 1$$

A potenciação não possui propriedade associativa nem comutativa, o que a torna bem mais complexa que a adição e a multiplicação, além disso, as potências de expoentes dois e três costumam ser chamadas de quadrado e cubo, respectivamente, por estarem presentes nas expressões que calculam a área e o volume dessas figuras geométricas.

Exercício

4 Efetue as seguintes potenciações:

a) 5 ^ 3 =
b) 5 ^ 2 =
c) 5 ^ 1 =
d) 5 ^ 0 =
e) 5 ^ 4 =
f) 4 ^ 5 =
g) 2 ^ 4 =
h) 4 ^ 2 =
i) 1 ^ 6 =
j) 6 ^ 1 =
k) 0 ^ 7 =
l) 7 ^ 0 =
m) 1 ^ 0 =
n) 0 ^ 1 =
o) 1 ^ 1 =
p) 0 ^ 0 =
q) $64^1 =$
r) $8^2 =$
s) $4^3 =$
t) $2^6 =$

Se uma expressão aritmética envolve adições, multiplicações e potenciações, essas operações devem ser efetuadas necessariamente na seguinte ordem: primeiro as potenciações, depois as multiplicações e, finalmente, as adições.

Veja como mudam os resultados das expressões aritméticas efetuadas com os números 5, 4, 3 e 2 quando permutamos os operadores (+), (×) e (^).

$5 + 4 \times 3 \wedge 2 = 5 + 4 \times 3^2 = 5 + 4 \times 9 = 5 + 36 = 41$

$5 \times 4 + 3 \wedge 2 = 5 \times 4 + 3^2 = 5 \times 4 + 9 = 20 + 9 = 29$

$5 + 4 \wedge 3 \times 2 = 5 + 4^3 \times 2 = 5 + 64 \times 2 = 5 + 128 = 133$

$5 \times 4 \wedge 3 + 2 = 5 \times 4^3 + 2 = 5 \times 64 + 2 = 320 + 2 = 322$

$5 \wedge 4 + 3 \times 2 = 5^4 + 3 \times 2 = 625 + 3 \times 2 = 625 + 6 = 631$

$5 \wedge 4 \times 3 + 2 = 5^4 \times 3 + 2 = 625 \times 3 + 2 = 1.875 + 2 = 1.877$

Exercício

5 Calcule o valor numérico das seguintes expressões aritméticas:

a) 4 ^ 2 × 5 + 3 =
b) 4 ^ 2 + 5 × 3 =
c) 4 × 2 ^ 5 + 3 =
d) 4 × 2 + 5 ^ 3 =
e) 4 + 2 ^ 5 × 3 =
f) 4 + 2 × 5 ^ 3 =

Qualquer alteração na ordem da execução das operações de uma sentença aritmética que envolva duas ou mais operações distintas deve ser indicada com o uso do parêntese, do colchete ou de ambos. A única exceção a essa regra acontece no expoente da potenciação que, quando escrita na forma tradicional, dispensa o uso dos parênteses, por exemplo: $2^{3+4} = 2^7 = 128$. É como se o expoente tivesse um parêntese implícito, ou seja, tudo que se escreve acima de uma base faz parte do expoente da potenciação e deve ser calculado antes da potência em si:

$$3 \wedge (1 + 4) = 3^{1+4} = 3^5 = 243$$

Veja como mudam os resultados das expressões aritméticas efetuadas com o acréscimo desses símbolos mesmo quando os números operados são iguais:

$2 + 2 \times 2 \wedge 2 = 2 + 2 \times 2^2 = 2 + 2 \times 4 = 2 + 8 = 10$
$(2 + 2) \times 2 \wedge 2 = (2 + 2) \times 2^2 = 4 \times 4 = 16$
$2 + (2 \times 2) \wedge 2 = 2 + (2 \times 2)^2 = 2 + 4^2 = 2 + 16 = 18$
$(2 + 2 \times 2) \wedge 2 = (2 + 2 \times 2)^2 = (2 + 4)^2 = 6^2 = 36$
$[(2 + 2) \times 2] \wedge 2 = [(2 + 2) \times 2]^2 = [4 \times 2]^2 = 8^2 = 64$

Exercício

6 Calcule o valor numérico das seguintes expressões aritméticas:

a) $4 + 3 \,.\, 5^2 =$
b) $(4 + 3) \,.\, 5^2 =$
c) $4 + (3 \,.\, 5)^2 =$
d) $(4 + 3 \,.\, 5)^2 =$
e) $[(4 + 3) \,.\, 5]^2 =$
f) $4 \,.\, 3 + 5^2 =$
g) $4 \,.\, (3 + 5)^2 =$
h) $(4 \,.\, 3 + 5)^2 =$
i) $4 \,.\, (3 + 5^2) =$
j) $[4 \,.\, (3 + 5)]^2 =$
k) $5 \,.\, 2^3 + 4 =$
l) $5 \,.\, 2^{3+4} =$
m) $(5 \,.\, 2)^3 + 4 =$
n) $(5 \,.\, 2)^{3+4} =$
o) $5 \,.\, (2^3 + 4) =$

Operações básicas no universo inteiro

Inicialmente, vamos analisar a subtração no universo natural $\mathbb{N}$. Sendo **a** e **b** dois números naturais diferentes um do outro, então existe um outro número natural **d** que indica quanto falta para que o menor entre os números **a** e **b** alcance o maior deles. Assim, se **a** é o maior dos números, então **b + d = a**. Neste caso, dizemos que o número **d** é a diferença entre os números **a** e **b**.

Consideramos a subtração como a operação inversa da adição. Trata-se de uma operação aplicada a dois números apenas e, em todos os casos, produz um único resultado chamado resto ou diferença. O operador da subtração é o símbolo (–) conhecido como *sinal de menos*, e a expressão aritmética **a – b** indica que devemos subtrair **b** unidades (subtraendo) do número **a** (minuendo).

Portanto, a sentença **b + d = a**, com **b < a**, significa que **d = a – b**.

Exercício

7 Efetue as seguintes subtrações no universo natural:

a) $5 - 0 =$ b) $5 - 5 =$
c) $8 - 5 =$ d) $8 - 3 =$
e) $10 - 3 =$ f) $100 - 3 =$
g) $1.000 - 33 =$ h) $273 - 251 =$
i) $402 - 251 =$ j) $6.363 - 979 =$
k) $39.879 - 9.859 =$ l) $40.000 - 999 =$

Sob o aspecto cardinal, se temos uma dúzia de bananas, por exemplo, e comemos cinco delas, então ainda nos restam $12 - 5 = 7$ bananas. Já sob o aspecto ordinal, para que em uma corrida, por exemplo, um atleta que está em oitavo lugar termine a corrida em terceiro sem ser ultrapassado, ele deve ultrapassar exatamente $8 - 3 = 5$ adversários. Mas não podemos comer 20 bananas quando temos apenas uma dúzia delas e é impossível ultrapassar dez corredores sem ser ultrapassado quando estamos em oitavo lugar na corrida. Por isso, para que a subtração **a − b** tenha sentido, quando **a** é menor que **b**, devemos expandir nosso universo numérico.

Imagine uma fila tão grande que não há como saber onde ela começa ou termina. Para nos localizarmos em uma fila como essa, é necessário escolher um representante da fila como ponto de partida (origem) para a contagem de posições. Contagem esta que deve ser feita em dois sentidos diferentes. Assim, o representante da origem fica na posição indicada pelo número zero e seus vizinhos ficam nas posições representadas pelos números -1 e $+1$ do universo dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{ ..., -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, ... \}$.

A escolha da origem e dos sentidos que serão designados pelos sinais (+) e (–) é arbitrária, pois, neste caso, o aspecto considerado não é cardinal, ou seja, não nos interessa saber quantos elementos estão na fila. Um bom exemplo disso é a quilometragem da rodovia Presidente Dutra (BR 116), que liga as capitais dos estados de São Paulo e Rio de Janeiro. A origem da BR 116, ou seja, o quilômetro zero da rodovia, situa-se na divisa dos dois estados e as demais placas que indicam a quilometragem usam as siglas SP e RJ da mesma forma que os séculos do calendário cristão vem acompanhados das siglas A.C. e D.C. para indicar o sentido da contagem.

Na prática da aritmética, omitimos o sinal (+) dos números positivos e usamos o sinal (–) não como operador de subtração, mas sim para indicar o oposto de um número em relação à origem, ou seja, para qualquer número inteiro **a** temos que **–a** indica o número oposto de **a** em relação ao zero. Assim, a expressão **–(–a)** indica o oposto do oposto de **a** e, portanto, **–(–a) = a**. Então, a diferença $3 -(-2)$ fica sendo igual à soma $3 + 2$.

Além disso, pode-se considerar a subtração $8 - 5$ como a adição $8 +(-5)$ e proceder da seguinte maneira: a partir do número oito, conta-se cinco posições no sentido da origem chegando ao número 3 e, para efetuar $5 - 8$, deve-se partir do número cinco e contar oito posições no sentido da origem, ultrapassando-a, e chegando ao número -3.

Assim, quaisquer que sejam os números inteiros A, B e C, são válidas as seguintes propriedades:

$$A - B = -B + A$$
$$A - B - C = A - (B + C)$$
$$A - (B - C) = A - B + C$$

Exercício

8 Efetue as seguintes subtrações no universo inteiro:

a) $28 - 12 - 7 - 4 =$ b) $(28 - 12) - 7 - 4 =$
c) $28 - (12 - 7) - 4 =$ d) $28 - 12 - (7 - 4) =$
e) $28 - (12 - 7 - 4) =$ f) $15 - 13 - 19 =$
g) $15 - (13 - 19) =$ h) $-15 - 13 - 19 =$
i) $15 - (-13) - 19 =$ j) $15 - (-13 - 19) =$
k) $7 - 2 + 5 - 3 =$ l) $7 + 2 - 5 - 3 =$
m) $-7 + 2 + 5 - 3 =$ n) $7 - (-2 - 5 + 3) =$
o) $-7 - (2 + 5) - 3 =$ p) $(7 - 2) - (5 - 3) =$

A multiplicação no universo inteiro deve obedecer à seguinte regra de sinais: o produto entre dois números inteiros de mesmo sinal é positivo e o produto entre dois números inteiros de sinais opostos é negativo. Além disso, os fatores da multiplicação devem ser escritos entre parênteses para que os sinais dos números inteiros não sejam confundidos com os operadores de adição e subtração. Assim, temos que:

$(+3)\,.\,(+4) = +12 \qquad (-3)\,.\,(-4) = +12$
$(-3)\,.\,(+4) = -12 \qquad (+3)\,.\,(-4) = -12$

Um cuidado especial deve ser tomado para indicar o produto sucessivo de fatores negativos iguais como uma potenciação, pois todo número negativo resulta do produto entre o número -1 e um número positivo. Assim, o número -3, por exemplo, é na verdade o produto $-1\,.\,3$, em que omitimos o fator 1, e como a potenciação precede a multiplicação, temos que: $-3^2 = -1\,.\,3^2 = -1\,.\,3\,.\,3 = -9$.

Para indicar uma potência de base negativa, devemos fazer uso dos parênteses: $(-3)^2 = (-3)\,.\,(-3) = 9$.

Exercício

9 Efetue as seguintes operações aritméticas no universo inteiro:

a) $-2\,.\,8 + 2\,.\,(-8) =$ b) $2\,.\,(-8) - 8\,.\,(-2) =$
c) $-2\,.\,(-8 + 2)\,.\,(-8) =$ d) $-2\,.\,(-3)\,.\,(-4) =$
e) $-2\,.\,(-3)\,.\,(-4)\,.\,(-5) =$ f) $-2\,.\,(-3 - 4)\,.\,(-5) =$
g) $-5^2 =$ h) $(-5)^2 =$
i) $-5^3 =$ j) $(-5)^3 =$

A divisão no universo natural é uma operação aplicada a apenas dois números (dividendo e divisor) e que produz dois resultados chamados de quociente e resto. Sendo **N** e **d** dois números naturais, tais que **N** dividido por **d** produz um quociente **q** e um resto **r**, esses quatro números devem obedecer às seguintes condições:

$$\begin{cases} \mathbf{N} = \mathbf{q}\,.\,\mathbf{d} + \mathbf{r} \\ \mathbf{0} \le \mathbf{r} < \mathbf{d} \end{cases}$$

Assim, pode-se perceber que não existe divisão em que o divisor é zero, pois sendo $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, não existe número **r** que satisfaça à desigualdade $0 \le \mathbf{r} < 0$. Então, dados os números **N** e $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$, o quociente da divisão de **N** por **d** será o maior número natural **q**, tal que o produto **q.d** não ultrapasse o valor de **N**, e o resto dessa divisão é igual à diferença entre o dividendo **N** e o produto **q.d**. Por exemplo, para dividir o número 17 pelo número 5, no universo natural, deve-se verificar que $3\,.\,5 = 15$ é menor que 17 e que $4\,.\,5 = 20$ é maior que 17, então essa divisão produz quociente 3 e resto $17 - 15 = 2$.

Agora, no universo inteiro, o resto não pode ser negativo e o sinal do quociente obedece à mesma regra de sinais da multiplicação. Como o divisor **d** pode ser negativo, devemos ter: $\begin{cases} \mathbf{N} = \mathbf{q}\,.\,\mathbf{d} + \mathbf{r} \\ \mathbf{0} \le \mathbf{r} < |\mathbf{d}| \end{cases}$ em que a expressão $|\mathbf{d}|$ indica o valor absoluto do divisor, ou seja, o número **d** sem o seu sinal. Por exemplo, se $\mathbf{d} = -5$, então $|\mathbf{d}| = 5$.

- Dividindo-se $(+17)$ por (-5) obtemos quociente (-3) e resto $(+2)$, pois $17 = (-3)\,.\,(-5) + 2$ e $0 \le 2 < 5$.
- Dividindo-se (-17) por $(+5)$ obtemos quociente (-4) e resto $(+3)$, pois $-17 = (-4)\,.\,(+5) + 3$ e $0 \le 3 < 5$.
- Dividindo-se (-17) por (-5) obtemos quociente $(+4)$ e resto $(+3)$, pois $-17 = (+4)\,.\,(-5) + 3$ e $0 \le 3 < 5$.

Exercício

10 Determine, no universo inteiro, o quociente e o resto das divisões entre os números a seguir na ordem em que forem apresentados.

a) 28 e 7 b) 28 e 4
c) 28 e -7 d) -28 e 7
e) -28 e -7 f) 19 e 3
g) 19 e 5 h) 19 e -5
i) -19 e 5 j) -19 e -5
k) 72 e 10 l) 702 e 7
m) 7 e 13 n) 729 e 7
o) 62.408 e 6

Se na divisão de um número inteiro **N** por um número inteiro **d** o resto obtido for igual a zero, então dizemos que o número **N** é divisível pelo número **d** ou que **N** é múltiplo de **d**, e ainda que o número **d** é um divisor do número **N**. Em situações como essa, pode-se usar o operador (÷) ou (:) para indicar o quociente. Exemplos:

$12 \div 4 = 3$ $\quad$ $48 \div 8 \div 2 = 6 \div 2 = 3$

$12 \div 3 = 4$ $\quad$ $48 \div (8 \div 2) = 48 \div 4 = 12$

Exercício

11 Calcule o valor da seguinte expressão aritmética:
$(12 \div 3 + 4 \,.\, 5) \div (-6) + 72 \div 9 \div 2^2 + 2 =$

Há mais duas operações básicas no universo dos números inteiros que não são indicadas por operadores simbólicos como a adição ou a multiplicação, mas sim por siglas que designam seus significados. Essas operações são chamadas de mínimo múltiplo comum (**mmc**) e máximo divisor comum (**mdc**), podem ser aplicadas a dois ou mais números inteiros e têm propriedades associativa e comutativa.

Sendo **n** um número inteiro, considere os conjuntos **M(n)** e **D(n)** dos múltiplos e dos divisores positivos do número **n** respectivamente. Assim, temos, por exemplo, que:

M(6) = { 6, 12, 18, **24**, 30, ...}
M(8) = { 8, 16, **24**, 32, 40, ...}
D(6) = { 1, **2**, 3, 6}
D(8) = { 1, **2**, 4, 8}

Dados dois números inteiros **a** e **b** diferentes de zero, definimos o mínimo múltiplo comum desses números como sendo o menor elemento da interseção dos conjuntos **M(a)** e **M(b)**, e o máximo divisor comum desses números como sendo o maior elemento da interseção dos conjuntos **D(a)** e **D(b)**. Assim, temos que o mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum dos números 6 e 8 são, respectivamente, 24 e 2.

mmc(6, 8) = 24 $\quad$ **mdc(6, 8) = 2**

Os resultados das operações **mmc** e **mdc** serão positivos mesmo quando essas operações são aplicadas a números negativos. Assim, temos, por exemplo, que mmc(−6, 8) = 24 e mdc(−6, −8) = 2. A única exceção a essa regra é para o mínimo múltiplo comum entre o zero e outro número inteiro **n** qualquer:

mmc (0, n) = 0.

Exercício

12 Calcule:

a) mmc(5, 7) = $\quad$ b) mmc(−4, 12) =
c) mmc(12, 30) = $\quad$ d) mmc(6, 8, 10) =
e) mdc(5, 7) = $\quad$ f) mdc(−4, 12) =
g) mdc(12, 30) = $\quad$ h) mdc(6, 8, 10) =

Operações básicas no universo racional

Há muito tempo registramos quantidades, e os símbolos que usamos para fazê-lo evoluíram em diversas culturas. Palavras como *metade*, *percentual*, *centavos* ou *dízimo* surgiram transmitindo ideias de quantidades concretas. É inegável que R$ 100,00 ou $\frac{1}{4}$ são legítimas representações de quantidades, embora não compartilhem do mesmo sistema de representação.

O conjunto dos racionais positivos ($\mathbb{Q}_+$) é reconhecido pelo ser humano muito antes das primeiras manifestações em defesa da aceitação dos números inteiros negativos. O Brasil já havia sido descoberto e renomados matemáticos ainda chamavam os números negativos de números absurdos ou soluções falsas.

Quanto à notação das quantidades racionais, duas formas distintas, a fracionária e a decimal $\left(\frac{1}{4} = 0,25\right)$, consolidaram-se e são usadas atualmente. A fracionária deixa bastante claro como se deve obter a parte desejada da unidade, mas torna difícil identificar, por exemplo, qual entre os números $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{13}{20}$ e $\frac{31}{50}$ é o maior.

Já na forma decimal, a ordem crescente desses números se faz visível em pouco tempo:

$$0,60 < 0,62 < 0,625 < 0,65$$

É fato que depois da vírgula não é necessário escrever zeros à direita do último dígito decimal, como, por exemplo, o número 0,60 pode ser escrito na forma 0,6.

Mas, observe como a ordem crescente desses números fica mais clara quando usamos o mesmo número de casas decimais para representá-los:

$$0,600 < 0,620 < 0,625 < 0,650$$

Fixando-se certo número de casas decimais, fica estabelecida uma forma aproximada, mas bastante eficiente para o tratamento das partes de um inteiro, como em nossa atual notação monetária: R$ 0,60.

Exercício

13 Reescreva, em ordem crescente, cada uma das sequências a seguir.

a) (123; 12,3; 1,23; 0,123)

b) (0,05; 0,2; 0,008; 0,025)

c) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5}\right)$

d) $\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5}\right)$

As operações básicas de adição, subtração e multiplicação de números inteiros obedecem, no universo dos números racionais, às mesmas propriedades do universo dos números inteiros, uma vez que o universo racional abrange todo o universo inteiro, mas há uma diferença significativa na estrutura da divisão nesses dois universos.

No universo inteiro, a divisão de um número **N** por um número **d ≠ 0** produz dois resultados: o quociente e o resto. Já no universo racional, a divisão de dois números produz apenas o quociente, ou seja, não há resto em uma divisão entre dois números inteiros quando os consideramos no universo racional.

Para decidir qual desses universos deve ser considerado, é necessário conhecer o contexto do problema:

Problema 1: Um fazendeiro quer presentear seus quatro filhos com as trinta vacas que acabou de arrematar em um leilão de gado e quer que nenhum deles receba um presente maior que o dos outros. Como fazer essa divisão?

Problema 2: A esposa desse fazendeiro colheu trinta maçãs maduras do pomar e também quer distribuí-las igualmente para seus quatro filhos. Como fazer essa divisão?

As divisões solicitadas em cada um dos problemas devem ser consideradas em universos numéricos distintos: o fazendeiro deve presentear seus filhos com sete vacas cada um e ficar com as duas restantes, afinal não faz sentido cortar uma vaca ao meio. Mas isso não é problema para sua esposa, que pode distribuir sete maçãs e meia para cada filho.

A primeira competência que se deve adquirir para dominar os cálculos do universo racional é transitar de maneira eficiente entre as duas formas de escrever esses números. Assim, observe como devem ser escritos na forma decimal as frações cujo denominador é uma potência de 10. Também é interessante observar a extensão do conceito da potenciação nesse universo racional. Uma vez que os expoentes naturais de uma potência indicam o número de vezes que se deve multiplicar a unidade pela base da potência, os expoentes inteiros negativos indicam o número de vezes que se deve dividir a unidade pela base da potência. Essa competência é de grande importância para a manipulação da notação científica.

(um décimo): $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$

(um centésimo): $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$

(um milésimo): $10^{-3} = \frac{1}{1.000} = 0,001$

Exercício

14 Escreva na forma fracionária e na forma decimal os seguintes numerais:

a) Quatro décimos.
b) Doze centésimos.
c) Cento e vinte e três milésimos.
d) Quarenta e cinco décimos.
e) Sessenta centésimos.
f) Setenta e oito décimos de milésimo.

Sendo **N** e **d** números inteiros, tal que **N** não é múltiplo de **d**, para se obter o quociente **N ÷ d** no universo racional devemos primeiro executar a divisão no universo inteiro. Depois disso, escrevemos uma vírgula no quociente e acrescentamos zeros ao resto, continuando a divisão até que não haja resto ou que algum resto se repita. Nesse caso, a forma decimal do quociente é de uma dízima periódica, mas isso é assunto para ser discutido no decorrer do curso.

Exercício

15 Obter os seguintes quocientes na forma decimal:

a) $7 \div 2 =$ b) $10 \div 4 =$
c) $12 \div 5 =$ d) $15 \div 8 =$
e) $19 \div 20 =$ f) $121 \div 44 =$

Para se obter uma fração que representa um racional **x** com **n** casas decimais, escreve-se o número **x** sem a vírgula no numerador da fração e, no denominador, a potência 10^n.

Depois disso, pode-se simplificar a fração dividindo-se o numerador e o denominador pelo seu máximo divisor comum. Exemplos:

$$1{,}1 = \frac{11}{10} \qquad 0{,}34 = \frac{34}{100} = \frac{17}{50}$$

$$1{,}2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} \qquad 0{,}045 = \frac{45}{1.000} = \frac{9}{200}$$

Exercício

16 Obter a fração mais simples que representa cada número decimal a seguir.

a) $3{,}5 =$ b) $2{,}5 =$
c) $2{,}4 =$ d) $2{,}75 =$
e) $0{,}95 =$ f) $1{,}875 =$

Adições e subtrações de números racionais na forma decimal devem ser executadas alinhando-se os termos dessas operações pela vírgula e, se os termos não apresentarem o mesmo número de casas decimais, deve-se acrescentar zeros à direita da última casa decimal a fim de que todos os termos fiquem com o mesmo número de casas decimais. Exemplos:

$$0{,}12 + 0{,}3 = 0{,}42 \qquad 34{,}5 - 12{,}34 = 22{,}16$$

$$\begin{array}{r} 0{,}12 \\ +\ 0{,}30 \\ \hline 0{,}42 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 34{,}50 \\ -\ 12{,}34 \\ \hline 22{,}16 \end{array}$$

Já na forma fracionária, as adições e subtrações de números racionais são executadas apenas entre seus numeradores quando todas têm o mesmo denominador. Assim, sendo **a**, **b** e **d** inteiros, com $\mathbf{d \neq 0}$, temos que:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{d}} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a+b}}{\mathbf{d}} \qquad \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{d}} - \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a-b}}{\mathbf{d}}$$

Como não acontece sempre de as frações terem o mesmo denominador, deve-se, antes de operar os numeradores, reescrevê-las com um denominador comum. Há diversas opções para esse denominador. Uma delas é usar o produto dos denominadores e, neste caso, sendo **a**, **b**, **c** e **d** inteiros, com $\mathbf{c\,.\,d \neq 0}$, temos que:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a.d + b.c}}{\mathbf{c.d}} \qquad \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} - \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a.d - b.c}}{\mathbf{c.d}}$$

Outra opção, bem mais usada, é: no lugar do produto **c . d** usar o mínimo múltiplo comum dos denominadores das frações operadas, e assim teremos:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a.d' + b.c'}}{\mathbf{m}} \text{ e } \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} - \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a.d' - b.c'}}{\mathbf{m}}$$

em que **c'** e **d'** são, respectivamente, os quocientes **(m ÷ d)** e **(m ÷ c)**, nos quais **m = mmc(c, d)**. Assim, pode-se efetuar a adição entre as frações que designam, por exemplo, os números três quartos e cinco sextos, de duas formas diferentes, pois mmc (4, 6) = 12 é diferente de 24 = 4 . 6. Veja:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{3.6 + 5.4}{4.6} = \frac{18+20}{24} = \frac{38}{24}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{3.\frac{12}{4} + 5.\frac{12}{6}}{12} = \frac{3.3 + 5.2}{12} = \frac{9+10}{12} = \frac{19}{12}$$

Observe que as frações $\frac{38}{24}$ e $\frac{19}{12}$ representam o mesmo quociente, pois mdc (38, 24) = 2 e dividindo-se ambos os termos da fração $\frac{38}{24}$ por 2 obtém-se a fração $\frac{19}{12}$.

Exercício

17 Efetue a adição dos numerais mencionados em cada item.

a) meio e um terço.
b) dois terços e menos meio.
c) três décimos e oito décimos.
d) doze décimos e quinze centésimos.
e) dez sétimos e menos sete décimos.
f) doze décimos e menos um terço.

Multiplicações de números racionais na forma decimal pedem ser executadas ignorando-se a vírgula de todos os fatores. Depois, é só decidir onde colocar a vírgula no produto, e o número de casas decimais do produto é igual à soma do número de casas decimais dos fatores. Assim, para multiplicar, por exemplo, o número 0,15 (duas casas decimais) pelo número 2,4 (uma casa decimal), basta efetuar $15 \times 24 = 360$, e considerar essa cifra com três casas decimais, ou seja, $0,15 \times 2,4 = 0,360$, que pode ser escrito de forma mais simples pela cifra 0,36.

No caso das multiplicações de números racionais na forma fracionária, basta multiplicarmos os numeradores e os denominadores dos fatores. Assim, sendo **a**, **b**, **c** e **d** inteiros, com $\mathbf{c} \,.\, \mathbf{d} \neq \mathbf{0}$, temos que:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} \times \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{\mathbf{c}.\mathbf{d}}$$

Exercício

18 Efetue a multiplicação dos numerais mencionados em cada item.

a) meio e um terço.
b) dois terços e menos meio.
c) três décimos e oito décimos.
d) doze décimos e quinze centésimos.
e) dez sétimos e sete décimos.
f) doze décimos e menos um terço.

Divisões de números racionais na forma decimal pedem ser executadas igualando-se o número de casas decimais do dividendo e do divisor. Depois disso, executamos a divisão dos números inteiros que se obtém, ignorando-se as vírgulas do dividendo e do divisor. Assim, para dividir, por exemplo, o número 0,15 (duas casas decimais) pelo número 2,4 (uma casa decimal) primeiro consideramos suas cifras com o mesmo número de casas decimais, ou seja: 0,15 e 2,40. Depois, basta efetuar $15 : 240 = 0,0625$.

No caso das divisões de números racionais na forma fracionária, basta multiplicarmos a fração do dividendo pela fração inversa do divisor. Assim, sendo **a**, **b**, **c** e **d** inteiros, com $\mathbf{b} \,.\, \mathbf{c} \,.\, \mathbf{d} \neq \mathbf{0}$, temos que:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} \div \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} \times \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{b}}$$

Exercício

19 Efetue a divisão dos numerais mencionados em cada item.

a) meio por um terço.
b) dois terços por menos meio.
c) três décimos por oito décimos.
d) doze décimos por quinze centésimos.
e) dez sétimos por sete décimos.
f) doze décimos por menos um terço.

Radiciação

A origem da radiciação é geométrica, por isso estamos acostumados com os termos *raiz quadrada* e *raiz cúbica* que indicamos com os símbolos ($\sqrt{}$) e ($\sqrt[3]{}$). Esses símbolos surgiram para designar a medida do lado de um quadrado e da aresta de um cubo a partir dos respectivos valores da área do quadrado e do volume do cubo. Da mesma forma que as expressões: *elevado ao quadrado* e *elevado ao cubo* são usadas para designar a segunda e a terceira potência de uma base. Isso acontece porque para calcular a área de um quadrado de lado ℓ, bem como o volume de um cubo de aresta ℓ, deve-se elevar a medida ℓ à segunda e à terceira potência respectivamente.

Assim, se um quadrado tem área **A** e seu lado tem medida ℓ, temos que $\ell^2 = \mathbf{A}$ e que $\ell = \sqrt{\mathbf{A}}$. E se um cubo de aresta ℓ tem volume **V**, então temos que $\ell^3 = \mathbf{V}$ e que $\ell = \sqrt[3]{\mathbf{V}}$.

Exercício

20 Determine quanto mede:

a) a área de um quadrado de lado 7 m.
b) o volume de um cubo de aresta 7 cm.
c) o lado de um quadrado de área 121 cm^2.
d) a aresta de um cubo de volume 64 m^3.
e) a área de um quadrado de lado $\sqrt{10}$ m.
f) o volume de um cubo de aresta $\sqrt[3]{10}$ m.
g) o lado de um quadrado de área 11 m^2.
h) a aresta de um cubo de volume 11 cm^3.

Além da interpretação geométrica, a radiciação pode ser considerada uma operação aritmética aplicada a dois números apenas e que produz um único resultado.

O operador da radiciação é o símbolo radical ($\sqrt{\ }$) e os termos da radiciação são: o *índice do radical*, que varia no universo ordinal e deve ser escrito no canto superior esquerdo do radical como na notação da raiz cúbica e o *radicando*, cuja variação depende da paridade do índice e deve ser escrito à direita (dentro) do radical.

Assim, na expressão $\sqrt[n]{a} = b$ temos que **n** é o índice do radical e **a** é o radicando e o resultado **b** é chamado de raiz enésima do número **a**.

Como a variação do índice é ordinal, os radicais $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[5]{\ }$ e $\sqrt[6]{\ }$, que não têm origem geométrica, são respectivamente designados pelos termos raiz quarta, raiz quinta e raiz sexta.

Uma vez que **n** $\in \{1, 2, 3, 4, 5,...\}$ pode-se definir a radiciação de forma discreta, separando-a em casos:

I. Se **n = 1** não é necessário indicar a radiciação, pois para todo número **a** temos que: $\sqrt[1]{a} = a$.

   Exemplos: $\sqrt[1]{2} = 2$ $\quad\quad$ $\sqrt[1]{-5} = -5$

II. Se **n = 2** não é necessário escrever o índice do radical, ou seja, $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$. Além disso, na expressão $\sqrt{a} = b$ os números **a** e **b** devem ser necessariamente não negativos e tais que $\mathbf{b^2 = a}$. Exemplos:

   $\sqrt{4} = 2$, pois 2 e 4 são positivos e $2^2 = 4$.

   $\sqrt{64} = 8$, pois 64 e 8 são positivos e $8^2 = 64$.

É muito importante atentar ao fato de que embora os números negativos -2 ou -8 satisfaçam, nos exemplos anteriores, à sentença $\mathbf{b^2 = a}$, pois $(-2)^2 = 4$ e $(-8)^2 = 64$, nenhum deles deve ser admitido como resultado das operações $\sqrt{4}$ e $\sqrt{64}$ evitando-se, dessa forma, contrariar a concepção geométrica do símbolo radical.

Assim, temos que a expressão $\sqrt{9} = \pm 3$ é **falsa** e exemplifica um dos erros mais cometidos em toda prática aritmética. Um bom estudante deve acostumar-se, o quanto antes, com o fato de que a raiz quadrada do número nove é o número três, somente o número três e nada além do número três.

Além disso, não existe, no universo real, resultado para $\sqrt{-9}$ por exemplo, pois nesse universo não há número cuja segunda potência seja negativa.

III. Se **n** é par, então na expressão $\sqrt[n]{a} = b$ os números **a** e **b** são necessariamente não negativos e tais que $\mathbf{b^n = a}$. Exemplos:

   $\sqrt[4]{81} = 3$ $\quad$ $\sqrt[6]{64} = 2$ $\quad$ $\sqrt[8]{1} = 1$ $\quad$ $\sqrt[10]{1.024} = 2$

IV. Se **n** é ímpar, então na expressão $\sqrt[n]{a} = b$ os números **a** e **b** têm o mesmo sinal e também são tais que $\mathbf{b^n = a}$. Exemplos:

   $\sqrt[3]{64} = 4$ $\quad$ $\sqrt[3]{-64} = -4$ $\quad$ $\sqrt[5]{32} = 2$ $\quad$ $\sqrt[5]{-32} = -2$

A linha que parte do radical traçada sobre o radicando serve como um parêntese implícito no caso de expressões compostas por mais de uma operação. Exemplos:

$$\sqrt[3]{8} + 19 = 2 + 19 = 21 \qquad \sqrt[3]{8+19} = \sqrt[3]{27} = 3$$

Exercício

21 Efetue as seguintes radiciações:

a) $\sqrt[1]{7} =$ $\quad\quad$ b) $\sqrt{49} =$

c) $\sqrt[3]{-125} =$ $\quad\quad$ d) $\sqrt[4]{16} =$

e) $\sqrt[5]{243} =$ $\quad\quad$ f) $\sqrt[6]{1.000.000} =$

g) $\sqrt[7]{-1} =$ $\quad\quad$ h) $\sqrt[8]{0} =$

Encontrar a raiz quadrada de um número inteiro não é uma tarefa simples. Ela costuma ser encontrada por meio de tentativas, elevando-se à segunda potência (ao quadrado) uma série de números até que se encontre o radicando, por isso aconselhamos que seja memorizado um bom repertório de quadrados perfeitos.

Chamamos de quadrados perfeitos os números que resultam da segunda potência dos números naturais como, por exemplo, os números 0, 1, 4, 9 e 16, pois: $0 = 0^2$, $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$ e $16 = 4^2$.

Dessa forma, temos que: $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$ e $\sqrt{16} = 4$.

Mas para encontrar a raiz quadrada de números que não são quadrados perfeitos como 2, 3 e 5, por exemplo, temos que fazer essas tentativas com os números decimais. Acontece que não existem números racionais cujos quadrados resultem em 2, 3 ou 5. E isso significa que os resultados de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ são números com infinitas casas decimais que não caracterizam dízimas periódicas.

Mesmo assim, existe uma técnica razoavelmente simples para aproximar esses valores com uma casa decimal que parte do fato de que a radiciação tem propriedade distributiva em relação à divisão.

Observe como pode-se encontrar o valor aproximado de $\sqrt{2}$ e de $\sqrt{10}$.

Primeiro escrevemos os números 2 e 10 como sendo frações centesimais, ou seja, na forma $\dfrac{200}{100}$ e $\dfrac{1.000}{100}$, depois aplicamos a propriedade distributiva da radiciação sobre essas frações. Veja:

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{200}{100}} = \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{200}}{10}$$

$$\sqrt{10} = \sqrt{\frac{1.000}{100}} = \frac{\sqrt{1.000}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{1.000}}{10}$$

Agora, por meio de tentativas, encontramos os quadrados perfeitos que mais se aproximam dos números 200 e 1.000 para depois dividi-los por dez.

Como $14^2 = 14.14 = 196$ e $15^2 = 15.15 = 225$, temos que 196 é o quadrado perfeito mais próximo de 200 e, dessa forma, temos que $\sqrt{200}$ é um número próximo de 14. Logo, $\sqrt{2}$ vale, aproximadamente, 1,4.

Como $31^2 = 961$ e $32^2 = 1.024$, temos que 1.024 é o quadrado perfeito mais próximo de 1.000 e, dessa forma, temos que $\sqrt{1.000}$ é um número próximo de 32. Logo, $\sqrt{10}$ vale, aproximadamente, 3,2.

Exercício

22 Encontre valores aproximados para as seguintes raízes quadradas:

a) $\sqrt{3} \approx$ b) $\sqrt{5} \approx$

c) $\sqrt{7} \approx$ d) $\sqrt{11} \approx$

É também possível aproveitar a propriedade distributiva da radiciação em relação à multiplicação para simplificar algumas raízes quadradas. Para isso, basta decompor o radicando em fatores tais que um deles seja quadrado perfeito e o outro não. Depois aplicamos a propriedade distributiva da radiciação, extraímos a raiz quadrada do fator que é quadrado perfeito e deixamos indicada a raiz quadrada do outro fator. Exemplos:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16.3} = \sqrt{16}.\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\sqrt{52} = \sqrt{4.13} = \sqrt{4}.\sqrt{13} = 2\sqrt{13}$$

$$\sqrt{175} = \sqrt{25.7} = \sqrt{25}.\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$$

$$\sqrt{200} = \sqrt{100.2} = \sqrt{100}.\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

Exercício

23 Simplifique as seguintes raízes quadradas:

a) $\sqrt{8} =$ b) $\sqrt{12} =$

c) $\sqrt{18} =$ d) $\sqrt{50} =$

e) $\sqrt{20} =$ f) $\sqrt{75} =$

Da mesma forma, podemos simplificar algumas raízes cúbicas, mas nesse caso deve-se decompor o radicando em fatores tais que um deles seja cubo perfeito e o outro não. Depois aplicamos a propriedade distributiva da radiciação e extraímos a raiz cúbica do fator que é cubo perfeito deixando indicada a raiz cúbica do outro fator. Exemplos:

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8.2} = \sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{-375} = \sqrt[3]{-125.3} = \sqrt[3]{-125}.\sqrt[3]{3} = -5\sqrt[3]{3}$$

Uma importante relação entre a raiz quadrada e a raiz cúbica que permite simplificar rapidamente alguns radicais compostos pelas duas é que para todo número real não negativo **a** temos $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt{a}$.

Isso pode ser rapidamente verificado elevando-se ao cubo a raiz quadrada do número **a**. Veja:

$$\left(\sqrt{a}\right)^3 = \sqrt{a}.\sqrt{a}.\sqrt{a} = \left(\sqrt{a}.\sqrt{a}\right).\sqrt{a} = a.\sqrt{a}$$

Portanto, $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt{a}$, para todo $a \geq 0$.

Exercício

24 Simplifique as seguintes raízes cúbicas:

a) $\sqrt[3]{54} =$ b) $\sqrt[3]{500} =$

c) $\sqrt[3]{320} =$ d) $\sqrt[3]{6.000} =$

e) $\sqrt[3]{-81} =$ f) $\sqrt[3]{7\sqrt{7}} =$

Álgebra

2

Equações do primeiro grau

Equação do primeiro grau é toda sentença algébrica aberta em uma única variável que apresenta apenas as operações de adição, subtração ou multiplicação. Temos o hábito de representar a variável por uma das últimas letras do alfabeto como x, y ou z. Exemplos:

$5x - 10 = 0 \qquad -2y + 9 = y \qquad 5(z - 1) = 2z + 7$

Chamamos de solução de uma equação os valores numéricos que atribuídos às variáveis da equação geram sentenças aritméticas verdadeiras. Assim, temos que:

O número 2 é solução da equação $5x - 10 = 0$, pois a sentença $5 . 2 - 10 = 0$ é verdadeira.

O número 3 não é solução da equação $5x - 10 = 0$, pois a sentença $5 . 3 - 10 = 0$ é falsa.

O número 3 é solução da equação $-2y + 9 = y$, pois a sentença $-2 . 3 + 9 = 3$ é verdadeira.

O número 4 não é solução da equação $-2y + 9 = y$, pois a sentença $-2 . 4 + 9 = 4$ é falsa.

O número 4 é solução da equação $5(z - 1) = 2z + 7$, pois a sentença $5(4 - 1) = 2 . 4 + 7$ é verdadeira.

Toda equação do primeiro grau admite solução única.

O símbolo ($\Leftrightarrow$) serve para indicar que duas equações admitem a mesma solução e, neste caso, dizemos que essas equações são equivalentes. Veja alguns exemplos:

$$5x - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5x = 10$$
$$-2y + 9 = y \quad \Leftrightarrow \quad 9 = 3y$$
$$5(z - 1) = 2z + 7 \quad \Leftrightarrow \quad 3z - 12 = 0$$

Uma equação que apresenta apenas uma variável deve ser interpretada como sendo uma pergunta, e essa pergunta é: quais valores numéricos da variável tornam a sentença verdadeira?

A pergunta é feita no plural, pois equações de grau superior podem admitir mais de uma solução.

A equação $x^3 = 16x$, por exemplo, apresenta três soluções distintas: –4, 0 e 4.

Por ter o caráter de pergunta, a variável de uma equação também costuma ser chamada de *incógnita*, que significa o valor desconhecido que devemos encontrar, e como há equações que admitem várias soluções (não é o caso das equações de primeiro grau), respondemos a cada uma dessas perguntas escrevendo um conjunto numérico que é chamado de *conjunto-verdade* ou *conjunto-solução* da equação; costuma ser indicado pela letra S, também é relacionado à sua equação pelo símbolo ($\Leftrightarrow$) e deve conter todas as soluções da equação. Assim:

$$x^3 = 16x \quad \Leftrightarrow \quad S = \{-4, 0, 4\}$$

É curioso, mas a sentença matemática $x = 4$ ainda é uma equação, pois tem caráter de pergunta e deve ser respondida. De maneira formal, resolver uma equação é escrever seu conjunto-solução:

$$x = 4 \Leftrightarrow S = \{4\}$$

Para estudar de forma genérica certos tipos de equações, o matemático François Viète introduziu, no século XVI, o conceito de parâmetro, que libertou a matemática do estudo de casos particulares. Os parâmetros também são representados por letras, mas são usados para representar valores supostamente conhecidos e não os valores procurados. Para diferenciar essas ideias algébricas, os parâmetros costumam ser representados pelas primeiras letras do alfabeto como **a**, **b** ou **c**.

Toda equação do primeiro grau é equivalente a uma sentença matemática do tipo $\mathbf{ax + b = 0}$, em que o parâmetro **a** é chamado de coeficiente principal e pode assumir qualquer valor real diferente de zero. Já o parâmetro **b** é chamado de termo independente e pode assumir qualquer valor real.

Uma vez escrita na forma $ax + b = 0$, com $a \neq 0$, toda equação do primeiro grau pode ser resolvida subtraindo-se o termo independente de ambos os membros, obtendo a equação equivalente $ax = -b$, que pode ser dividida pelo coeficiente principal, que não é nulo, chegando-se à solução $x = \dfrac{-b}{a}$.

$$ax + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S = \left\{\frac{-b}{a}\right\}$$

Não são consideradas equações de primeiro grau as sentenças do tipo $ax + b = 0$ quando $a = 0$, mas isso não nos impede de responder às perguntas que essas sentenças caracterizam.

Se $b = 0$, então qualquer número que seja atribuído à variável x faz da equação uma sentença verdadeira e, dessa forma, o conjunto-solução da equação é igual ao conjunto dos números reais:

$$0x + 0 = 0 \Leftrightarrow S = \mathbb{R}$$

E, nos casos em que $b \neq 0$, não há número algum que possa ser atribuído à variável que faça da equação uma sentença verdadeira e, sendo assim, o conjunto-solução da equação é vazio. Exemplo:

$$0x + 5 = 0 \Leftrightarrow S = \varnothing$$

Exercício

1 Resolva as seguintes equações:

a) $x - 7 = 0$ b) $2x - 6 = 0$
c) $2x + 8 = 0$ d) $3x - 1 = 0$
e) $7x + 12 = 0$ f) $-6x + 12 = 0$
g) $-3x - 4 = 0$ h) $0x - 1 = 0$
i) $0x = 0$

Note que embora não esteja expressa na forma $ax + b = 0$, a equação $5(x - 1) + 7 = 2(3x + 7) - 4x$ também é de primeiro grau, por isso devemos dominar os processos algébricos que permitem obter equações equivalentes escritas em formas que possibilitem identificar sua solução. O primeiro passo, neste caso, é executar a propriedade distributiva da multiplicação em relação às operações de adição e subtração:

$$5(x-1)+7=2(3x+7)-4x \quad \Leftrightarrow \quad 5x-5+7=6x+14-4x$$

Depois, obtemos uma equação equivalente tal que os termos que apresentam a variável fiquem todos no primeiro membro da equação e os termos independentes da variável fiquem todos no segundo membro. Para excluir um termo de um dos membros da equação, devemos reescrevê-lo no membro oposto e com o sinal oposto:

$$5x - 5 + 7 = 6x + 14 - 4x \Leftrightarrow 5x - 6x + 4x = 14 + 5 - 7$$

Agora, basta efetuar as adições e subtrações expressas em cada um dos membros para obter uma equação equivalente bem simples e cuja solução é igual ao quociente obtido dividindo-se o termo independente da variável encontrado no segundo membro pelo número que multiplica a variável x no primeiro membro da equação:

$$5x - 6x + 4x = 14 + 5 - 7 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow S = \{4\}$$

Também podemos encadear equações equivalentes omitindo o símbolo ($\Leftrightarrow$) se as escrevermos uma abaixo da outra alinhadas pela relação de igualdade (=):

$$\begin{aligned} 5(x-1)+7 &= 2(3x+7)-4x \\ 5x-5+7 &= 6x+14-4x \\ 5x-6x+4x &= 14+5-7 \\ 3x &= 12 \quad \Leftrightarrow \quad S=\{4\} \end{aligned}$$

Exercício

2 Resolva as seguintes equações:

a) $2x + 5 = x + 10$
b) $x - 7 = 5 - x$
c) $2(x - 6) = -x$
d) $2(-x + 8) + 3 = x + 1 - 4(x + 2)$
e) $10x - 7 = 3x + 7 (x - 3)$
f) $5(2 - 3x) + 8x = 10(1 - x) + 3x$

Chamamos de proporção toda relação de igualdade entre duas frações. Algumas equações de primeiro grau que surgem de problemas da Geometria, da Física e da Química apresentam-se sob a forma de uma proporção. O primeiro passo para resolver uma equação desse tipo é efetuar o produto cruzado, ou seja, igualar os produtos entre o numerador de uma fração e o denominador da outra. Assim, sendo a, b, c e d reais, tais que $b \neq 0$ e $d \neq 0$, temos:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \Leftrightarrow \mathbf{a} \,.\, \mathbf{d} = \mathbf{b} \,.\, \mathbf{c}$$

É muito importante estar atento ao fato de que não existe divisão por zero. Então, se a variável de uma equação apresentar-se no denominador de alguma fração, todo número encontrado na resolução deve ser substituído nas expressões que representam os denominadores, a fim de verificar se algum deles fica igual a zero. E se isso acontecer, esse número deve ser excluído do conjunto-solução da equação.

Exercício

3 Resolva as seguintes equações apresentadas na forma de proporção:

a) $\frac{1}{7}=\frac{2}{x}$ b) $\frac{x}{3}=\frac{8}{5}$

c) $\frac{x-7}{2}=\frac{4}{3}$ d) $\frac{x-6}{5}=\frac{2+x}{7}$

e) $\frac{3}{2}=\frac{4x+5}{x}$ f) $\frac{5}{x-3}=\frac{8}{6-2x}$

Se uma equação apresentar adição ou subtração de frações, o primeiro passo deve ser encontrar o mínimo múltiplo comum dos denominadores de todas essas frações e efetuar as adições e subtrações entre as frações de cada membro da equação, obtendo uma equação equivalente na forma de uma proporção cujo denominador do primeiro membro é igual ao denominador do segundo membro e, então, podemos simplesmente cancelá-lo.

Por exemplo, na equação $\frac{1}{6}-\frac{x-1}{4}=\frac{x+5}{5}+\frac{3}{2}$ temos que MMC(6, 4, 2, 5) = 60. Então, dividimos este MMC pelo denominador de cada fração e indicamos as multiplicações dos quocientes obtidos pelos respectivos numeradores.

Dessa forma, obtemos a equação equivalente $\frac{10.1-15(x-1)}{60}=\frac{12(x+5)+30.3}{60}$ cujos denominadores podem ser cancelados. Recomenda-se deixar as multiplicações indicadas para evitar erros de sinal no caso das distributivas.

Depois de cancelados os denominadores, efetuamos as multiplicações e procedemos como no exemplo anterior:

$$10-15x+15=12x+60+90$$
$$-12x-15x=60+90-10-15$$
$$-27x=125 \Leftrightarrow S=\left\{-\frac{125}{27}\right\}$$

Exercício

4 Resolva as seguintes equações:

a) $\frac{x}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ b) $\frac{x}{3}-\frac{x-3}{5}=\frac{x-6}{2}+\frac{2}{3}$

c) $\frac{x}{6}+1=\frac{2x}{3}+\frac{2-x}{2}$ d) $\frac{x}{5}+\frac{x+1}{4}=\frac{x}{2}+\frac{4-x}{20}$

Desigualdades

Para estudarmos as inequações do primeiro grau, devemos antes aprimorar nossa compreensão do conceito de desigualdade numérica designado pelo símbolo ($\neq$), cujo significado é contrário ao do símbolo (=). Assim, sendo x e y dois números quaisquer, a sentença $x \neq y$ informa que o número x é diferente do número y.

A relação de igualdade (=) possui as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva:

Reflexiva	Simétrica	Transitiva
a = a	$a = b \Leftrightarrow b = a$	$\left.\begin{matrix} a=b \\ b=c \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow a=c$

Já a relação de desigualdade admite a propriedade simétrica: $\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{b} \neq \mathbf{a}$, mas não admite a propriedade reflexiva, uma vez que $\mathbf{a} \neq \mathbf{a}$ é falso, nem a propriedade transitiva, pois se $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} \neq \mathbf{c}$, é bem possível que tenhamos $\mathbf{a} = \mathbf{c}$.

Separamos as desigualdades em dois casos e usamos os símbolos (<) e (>) para representá-los. Esses novos símbolos são comumente chamados de *menor que* (<) e *maior que* (>). Eles designam, respectivamente, as relações estritas de ordem crescente e decrescente entre números reais distintos.

Eis alguns números reais postos em ordem crescente: $-5<-3<0<\frac{1}{2}<1<\sqrt{2}<2$.

Princípio da tricotomia

Sendo x e y dois números reais quaisquer, o princípio da tricotomia nos garante que: $x<y$ ou $x=y$ ou $x>y$.

As relações de ordem (<) e (>) são combinadas em uma propriedade semelhante à propriedade simétrica da igualdade, mas que é chamada de propriedade antissimétrica: $\mathbf{a} < \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{b} > \mathbf{a}$. Assim, o princípio da tricotomia pode ser enunciado somente com os símbolos (=) e (<) da seguinte maneira: $x < y$ ou $x = y$ ou $y < x$.

Além disso, as relações de ordem (<) e (>) são transitivas, pois se $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} < \mathbf{c}$, então temos que $\mathbf{a} < \mathbf{c}$, e se $\mathbf{a} > \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} > \mathbf{c}$, temos que $\mathbf{a} > \mathbf{c}$. Mas não são reflexivas, pois tanto $\mathbf{a} < \mathbf{a}$ quanto $\mathbf{a} > \mathbf{a}$ são sentenças falsas.

As negações dessas relações são indicadas pelos símbolos mistos (≤) e (≥) que combinam a relação de igualdade com uma das relações de ordem.

Assim, sendo x e y dois números reais, é possível recorrer ao princípio da tricotomia para indicar, por exemplo, que **x não é maior que y** escrevendo (**$x \leq y$**) que costuma ser lido como "x é menor ou igual a y". E para indicar que **x não é menor que y** escrevemos $x \geq y$, que costuma ser lido como "x é maior ou igual a y". Veja algumas leituras que podem facilitar a interpretação das sentenças matemáticas desse tipo:

$x \leq 2 \Leftrightarrow$ x é um número menor ou igual a 2;
$x \leq 2 \Leftrightarrow$ x não é maior que 2;
$x \leq 2 \Leftrightarrow$ o valor máximo de x é 2;

$x \geq 7 \Leftrightarrow$ x é um número maior ou igual a 7;
$x \geq 7 \Leftrightarrow$ x não é menor que 7;
$x \geq 7 \Leftrightarrow$ o valor mínimo de x é 7.

Deve-se atentar para o fato de que sendo x um número real ou racional, uma sentença como $x < 4$ não significa $x \leq 3$. Isso só é verdade nos universos inteiro e natural, pois existem números racionais como 3,56 ou irracionais como a raiz quadrada de 10, que mesmo sendo menores que o número 4, são ambos maiores que o número 3. Então, deve-se saber o que representa a variável x em cada problema. Afinal, se x representa um número de pessoas, temos que $x < 4$ significa $x \leq 3$, mas se x representa o preço de um produto ou o lado de um triângulo, então $x < 4$ e $x \leq 3$ têm significados diferentes.

Exercício

5 Assinale verdadeiro (V) ou falso (F).

a) ☐ Dividindo-se, no universo racional, o número 123 pelo número 4, obtém-se quociente 3,75.

b) ☐ No universo natural, o quociente da divisão do número 123 pelo número 4 é dez vezes o resíduo da divisão.

c) ☐ $2 + 2 . 5 = 6 + 6$

d) ☐ $10 - 6 - 2 = 1 + 1$

e) ☐ $10 \div 3 \neq 33 \div 10$

f) ☐ $4^2 \neq 2^4$

g) ☐ $3^5 \neq 5^3$

h) ☐ $\frac{3}{5} < \frac{2}{3}$

i) ☐ $0{,}12 > 0{,}4$

j) ☐ $-2 < -3$

k) ☐ $-0{,}12 > -0{,}4$

l) ☐ $0 \leq 1$

m) ☐ $1 \leq 1$

n) ☐ $2 \leq 1$

o) ☐ Se x é um número real, tal que $x > 9$, então podemos concluir que $x \geq 10$.

p) ☐ Se x é um número natural, tal que $x < 8$, então podemos concluir que $x \leq 7$.

q) ☐ Sendo x um número real, tal que $x < 5$ e $x > 3$, podemos concluir que $x = 4$.

r) ☐ Sendo x um número real, tal que $x \geq 5$ e $x \leq 5$, podemos concluir que $x = 5$.

s) ☐ Sendo x um número inteiro, tal que $x < -3$ e $x > -5$, podemos concluir que $x = -4$.

t) ☐ Sendo x e y números reais, tais que $x < y$, podemos concluir que $2x < 2y$.

u) ☐ Sendo x e y números reais, tais que $x < y$, podemos concluir que $-3x < -3y$.

v) ☐ Sendo a um número negativo, x e y números reais, tais que $x > y$, podemos concluir que $a . x < a . y$.

Inequações do primeiro grau

Chamamos de inequação do primeiro grau toda sentença matemática aberta em uma única variável real que pode ser escrita nas formas $ax + b \neq 0$ ou $ax + b > 0$ ou $ax + b < 0$, nas quais os parâmetros **a** e **b** são números reais, sendo que **a** é diferente de zero.

No caso das inequações do tipo $ax + b \neq 0$, com $a \neq 0$, há apenas um número real que não torna a sentença verdadeira, e esse número é expresso pela razão $\frac{-b}{a}$. Então, de maneira formal, pode-se escrever o conjunto-solução de uma inequação desse tipo de duas maneiras:

$$S = \mathbb{R} - \left\{-\frac{b}{a}\right\} \text{ ou } S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{b}{a}\right\}$$

Mas, para resolver as inequações do tipo $ax + b > 0$ ou $ax + b < 0$ com $a \neq 0$, é necessário conhecer o sinal do coeficiente principal **a**, porque toda desigualdade expressa por relação de ordem tem essa relação invertida se for multiplicada ou divida por um número negativo. Veja alguns exemplos:

- Dividindo-se os membros da relação decrescente $6 > -8$ pelo número -2, obtém-se a relação crescente $-3 < 4$.
- Multiplicando-se os membros da relação crescente $-5 < 2$ por -3, obtém-se a relação decrescente $15 > -6$.
- Dividindo-se os membros da relação $7 > 0$ pelo número -7, obtém-se a relação $-1 < 0$.
- Multiplicando-se os membros da relação $0{,}4 < 0{,}5$ pelo número -10, obtém-se a relação $-4 > -5$.
- Dividindo-se os membros da relação $-10 > -15$ pelo número -5, obtém-se a relação $2 < 3$.
- Multiplicando-se os membros da relação $-7 < -4$ pelo número -1, obtém-se a relação $7 > 4$.

Então, os processos de resolução das inequações de primeiro grau, expressas por relação de ordem, devem ser estudados separadamente em dois casos:

Se o coeficiente principal é positivo (**a > 0**), então subtraímos o termo independente de ambos os membros e dividimos a relação obtida pelo coeficiente principal sem alterar a relação de ordem original da inequação.

$$ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x > -\frac{b}{a}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{b}{a}\right\}$$

$$ax + b < 0 \iff ax < -b \iff x < -\frac{b}{a}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{b}{a}\right\}$$

Seja dada, por exemplo, a inequação $2x + 6 > 0$.
Subtraindo 6 dos dois membros, temos: $2x > -6$.
Dividindo essa relação por 2, temos: $x > -3$.

Assim, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$

Seja dada, por exemplo, a inequação $4x - 8 < 0$.
Somando 8 aos dois membros, temos: $4x < 8$.
Dividindo essa relação por 4, temos: $x < 2$.

Assim, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

Mas, se o coeficiente principal for negativo (**a < 0**), então subtraímos o termo independente de ambos os membros e dividimos a relação obtida pelo coeficiente principal invertendo a relação de ordem original da inequação.

$$ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x < -\frac{b}{a}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{b}{a}\right\}$$

$$ax + b < 0 \iff ax < -b \iff x > -\frac{b}{a}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{b}{a}\right\}$$

Seja dada, por exemplo, a inequação $-2x + 6 > 0$.
Subtraindo 6 dos dois membros, temos: $-2x > -6$.
Dividindo essa relação por -2, temos: $x < 3$.

Assim, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

Seja dada, por exemplo, a inequação $-4x - 8 < 0$.
Somando 8 aos dois membros, temos: $-4x < 8$.
Dividindo essa relação por -4, temos: $x > -2$.

Assim, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

Exercício

6 Resolva as seguintes inequações do primeiro grau:

a) $3x - 15 > 0$

b) $7x + 14 < 0$

c) $-x + 6 < 0$

d) $-5x + 10 \geq 0$

e) $-2x - 16 \leq 0$

f) $5(x-1) < 3x + 4$

g) $\frac{x}{2} - 1 \geq 3 - \frac{x}{2}$

h) $\frac{2x}{5} - x \geq 3$

i) $\frac{3x}{2} - 5 \leq \frac{2x}{3} + 5$

j) $\frac{1-3x}{2} - x > \frac{x-1}{3} - 1$

k) $x + \frac{5-x}{6} > \frac{4x+4}{3} - \frac{x}{2}$

l) $\frac{x}{2} + \frac{x-1}{3} \leq x - \frac{x}{6}$

No estudo da trigonometria e da teoria dos conjuntos, surgem algumas inequações com três membros, em ordem crescente ou decrescente, e com a variável x no membro central. Veja como resolver um exemplo desse tipo:

É dada a inequação: $3 < \frac{5x-4}{2} < 8$.

Multiplicando-se os três membros pelo número 2, temos:

$$6 < 5x - 4 < 16.$$

Somando-se o número 4 aos três membros, temos:

$$10 < 5x < 20.$$

Dividindo-se toda essa relação pelo número 5, temos:

$$2 < x < 4.$$

$$\text{Assim, } S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$$

Exercício

7 Resolva as inequações do primeiro grau a seguir.

a) $0 < 6x - 21 < 3$

b) $5 < 7 - 2x < 11$

c) $-3 \leq \frac{4x+1}{5} < 0$

d) $3 < \frac{-5x-9}{7} < 8$

Sistemas de equações do primeiro grau

Muitos dos problemas da Matemática e da Física são modelados por relações de igualdade (equações) entre duas ou mais variáveis. E, se o número de equações disponíveis for igual ao número de variáveis, pode-se, em alguns casos, determinar os valores dessas variáveis. Há três métodos distintos bem eficientes para resolver sistemas com equações do primeiro grau que apresentem as mesmas variáveis.

Método da eliminação por substituição

Elimina-se o valor de uma das variáveis de uma das equações como se as outras fossem parâmetros conhecidos, e depois substitui-se a sentença que expressa essa variável em todas as outras equações, obtendo um sistema com uma equação e uma variável a menos. Procede-se dessa maneira até obtermos uma única equação com apenas uma variável. Exemplos:

1

$$\begin{cases} x + 3y = 5 & \textbf{(I)} \\ 2x - y = 3 & \textbf{(II)} \end{cases}$$

Isolando a variável x na equação **I**, temos:

$$x = 5 - 3y \ \textbf{(III)}$$

Substituindo essa expressão na equação **II**, temos:

$$\begin{aligned} 2(5 - 3y) - y &= 3 \\ 10 - 6y - y &= 3 \\ -7y &= -7 \iff y = 1 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de y na equação **III**, temos:

$$x = 5 - 3 \cdot 1 = 2$$

Portanto: $S = \{(2, 1)\}$

2

$$\begin{cases} x + y - z = 8 & \textbf{(I)} \\ 2x - 3y + 2z = 0 & \textbf{(II)} \\ 3x - 2y - 4z = 3 & \textbf{(III)} \end{cases}$$

Isolando a variável x na equação **I**, temos:

$$x = 8 - y + z \ \textbf{(IV)}$$

Substituindo nas equações **II** e **III**, temos:

$$\begin{cases} 2(8 - y + z) - 3y + 2z = 0 \\ 3(8 - y + z) - 2y - 4z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y - 4z = 16 & \textbf{(V)} \\ 5y + z = 21 & \textbf{(VI)} \end{cases}$$

Isolando a variável z na expressão **VI**, temos:

$$z = 21 - 5y \ \textbf{(VII)}$$

Substituindo essa expressão na equação **V**, temos:

$$5y - 4(21 - 5y) = 16 \Leftrightarrow y = 4$$

Substituindo o valor de y na equação **VII**, temos:

$$z = 21 - 5 \cdot 4 = 1$$

Substituindo os valores de y e z na equação **IV**:

$$x = 8 - 4 + 1 = 5$$

Portanto: $S = \{(5, 4, 1)\}$

Método da eliminação por comparação

Tira-se, em cada equação do sistema, o valor de uma mesma variável em função de todas as outras para depois igualar as expressões obtidas. Exemplo:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 1 & \textbf{(I)} \\ 2x + y = 13 & \textbf{(II)} \end{cases}$$

Isolando a variável x nas equações **I** e **II**, temos:

$$x = \frac{1 + 2y}{5} \ \text{ e } \ x = \frac{13 - y}{2} \ \textbf{(III)}$$

Igualando as expressões obtidas, temos:

$$\frac{1 + 2y}{5} = \frac{13 - y}{2}$$

Efetuando o produto cruzado, temos:

$$\begin{aligned} 2(1 + 2y) &= 5(13 - y) \\ 2 + 4y &= 65 - 5y \\ 9y &= 63 \Leftrightarrow y = 7 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de y na equação **III**, temos:

$$x = \frac{13 - 7}{2} = 3$$

Portanto: $S = \{(3, 7)\}$

Método da eliminação por redução ao mesmo coeficiente

Escolhe-se uma das variáveis e multiplica-se cada equação pelo coeficiente da variável escolhida na outra equação. Depois as equações obtidas são somadas ou subtraídas a fim de eliminar a variável escolhida.

No exemplo a seguir, escolhemos, para eliminação, a variável x, cujos coeficientes nas equações **I** e **II** são, respectivamente, os números 4 e 3. Então, multiplicamos equação **I** pelo número 3 e a equação **II** pelo número 4:

$$\begin{cases} 4x + 7y = 9 & \textbf{(I)} \\ 3x - 8y = 20 & \textbf{(II)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 7y = 9 & \times(3) \\ 3x - 8y = 20 & \times(4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 21y = 27 & \textbf{(III)} \\ 12x - 32y = 80 & \textbf{(IV)} \end{cases}$$

Subtraindo-se as equações **III** e **IV**, temos: $53y = -53 \Leftrightarrow y = -1$

Substituindo o valor de y na equação **I**, temos: $4x + 7(-1) = 9 \Leftrightarrow 4x = 16 \Leftrightarrow x = 4$

Portanto: $S = \{(4,-1)\}$

Exercício

8 Resolva os seguintes sistemas de equações:

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7x + 13y = 0 \\ 14x - 23y = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 6x - 4y = 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{6} = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \dfrac{x - 2y}{4} = 3 \\ \dfrac{x + y}{3} = x - 9 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x + z = 7 \\ y + z = 9 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + 4z = 7 \\ 5x + 3y + 2z = 4 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ 5x + 6y + 7z = 0 \\ 7x + 9y - z = 0 \end{cases}$

Equações do segundo grau

Chamamos de equação do segundo grau toda sentença matemática expressa por relação de igualdade que pode ser escrita $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Nessa sentença, temos os seguintes parâmetros reais:

a (coeficiente principal)
b (coeficiente secundário)
c (termo independente)

Uma equação do segundo grau pode apresentar até duas soluções distintas, que podem ser obtidas, em todos os casos, pela fórmula de Bhaskara.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como essa fórmula apresenta uma radiciação, as soluções das equações do segundo grau também são chamadas de raízes da equação, e costumam ser representadas separadamente por x_1 e x_2:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A expressão dentro do radical da fórmula de Bhaskara é chamada de discriminante e é representada pela letra grega delta maiúscula (Δ). Ela determina o número de soluções da equação no universo real:

- Se o discriminante for positivo ($\Delta > 0$), então a equação admite duas soluções reais distintas.
- Se o discriminante for nulo ($\Delta = 0$), então a equação admite apenas uma solução real.
- Se o discriminante for negativo ($\Delta < 0$), então a equação **não** admite solução real.

No primeiro caso ($\Delta > 0$), também costuma ser dito que a equação possui duas raízes reais distintas.

Já no segundo caso ($\Delta = 0$), também se pode dizer que a equação admite duas raízes reais e iguais, pois uma vez que $\sqrt{0} = 0$, os valores de x_1 e x_2 serão ambos iguais a $\dfrac{-b}{2a}$.

E, no terceiro caso ($\Delta < 0$), dizemos que a equação não possui raízes reais. Isso se deve ao fato de que as raízes quadradas dos números negativos não são números reais. Deve-se ter bastante cuidado para não confundir o termo *raiz de uma equação* com o termo *raiz quadrada*.

Para ganhar tempo na resolução de uma equação do segundo grau, recomenda-se que o valor do discriminante seja obtido antes da montagem completa da fórmula de Bhaskara.

Assim, dada uma equação do segundo grau completa $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$, podemos resolvê-la em duas etapas distintas:

O primeiro passo é obter o valor do discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Se o valor do discriminante for maior ou igual a zero, então executamos o segundo passo, que consiste em efetuar os cálculos aritméticos da expressão simplificada: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Mas se o valor do discriminante for negativo, então não há como efetuar esses cálculos no universo real e, assim, evitamos o segundo passo, pois o conjunto-solução da equação é vazio. Exemplos:

1

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = -3 \end{cases}$$

1º passo ($\Delta = b^2 - 4ac$):

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \,.\, 2 \,.\, (-3) = 25 + 24 = 49$$

2º passo ($x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$):

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2\,.\,2} = \frac{5 \pm 7}{4} \begin{array}{l} \nearrow \; x_1 = \dfrac{12}{4} = 3 \\ \searrow \; x_2 = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{array}$$

$$S = \left\{3, -\frac{1}{2}\right\}$$

2

$$9x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = -6 \\ c = 1 \end{cases}$$

1º passo ($\Delta = b^2 - 4ac$):

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \,.\, 9 \,.\, 1 = 36 - 36 = 0$$

2º passo ($x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$):

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2\,.\,9} = \frac{6 \pm 0}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

3

$$x^2 + 4x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases}$$

1º passo ($\Delta = b^2 - 4ac$):

$$\Delta = 4^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, 2 = 16 - 8 = 8$$

2º passo ($x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$):

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2\,.\,1} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

Observe que o denominador 2, da última fração, divide tanto o termo -4 quanto o termo $\pm 2\sqrt{2}$.

$$S = \{-2 + \sqrt{2},\ -2 - \sqrt{2}\}$$

4

$$x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

1º passo ($\Delta = b^2 - 4ac$):

$$\Delta = 1^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, 2 = 1 - 8 = -7$$

Como o valor do discriminante é negativo, não há como executar o segundo passo no universo real.

Portanto, temos que:

$$S = \varnothing$$

Exercício

9 Resolva as seguintes equações do segundo grau:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
b) $x^2 + 5x + 6 = 0$
c) $x^2 - 5x - 6 = 0$
d) $x^2 + 5x - 6 = 0$
e) $x^2 - 6x + 5 = 0$
f) $x^2 + 6x + 5 = 0$
g) $5x^2 - 6x + 1 = 0$
h) $6x^2 - 5x + 1 = 0$
i) $2x^2 - 7x + 5 = 0$
j) $x^2 - x - 1 = 0$
k) $x^2 - 4x + 1 = 0$
l) $x^2 - 10x + 15 = 0$
m) $x^2 - 4x + 4 = 0$
n) $4x^2 + 12x + 9 = 0$
o) $x^2 + 4x + 5 = 0$
p) $2x^2 - 3x + 8 = 0$

As equações do segundo grau do tipo $ax^2 + bx = 0$ e do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$, são chamadas de equações incompletas e, embora possam ser resolvidas pela fórmula de Bhaskara, considerando $c = 0$ no primeiro tipo e $b = 0$ no segundo, há maneiras mais eficientes de se obter suas soluções.

Toda equação na variável x que não apresenta termo independente admite $x = 0$ como solução, pois se todos os termos dependem da variável, então quando essa variável é nula, todos os termos também serão. Esse raciocínio pode ser aplicado em equações de qualquer grau.

Veja como $x = 0$ torna verdadeira cada uma das sentenças a seguir.

$$6x^2 - 5x = 0$$
$$x^3 + 7x^2 - 2x = 0$$
$$x^5 + 2x^4 + 8x^3 - x^2 + 9x = 0$$

Assim, temos que $x = 0$ é uma das soluções de qualquer equação do segundo grau incompleta da forma $ax^2 + bx = 0$, com $a \neq 0$. Então, fatorando-se o primeiro membro da equação, pode-se chegar rapidamente à conclusão de que a outra solução é dada por $x = \frac{-b}{a}$.

$$ax^2 + bx = 0 \iff S = \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$$

Exemplos:

$$5x^2 + 2x = 0 \iff S = \left\{0, -\frac{2}{5}\right\}$$
$$x^2 + 5x = 0 \iff S = \{0, -5\}$$
$$3x^2 - 12x = 0 \iff S = \{0, 4\}$$
$$x^2 - 9x = 0 \iff S = \{0, 9\}$$

Exercício

10 Escreva o conjunto-solução de cada uma das equações do segundo grau a seguir.

a) $2x^2 + 6x = 0$
b) $3x^2 - 5x = 0$
c) $x^2 - 7x = 0$
d) $x^2 + 2x = 0$
e) $x^2 - x = 0$
f) $x^2 + x = 0$

As equações do segundo grau incompletas da forma $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$, só admitem solução se os coeficientes **a** e **c** tiverem sinais opostos, ou seja, quando um deles for positivo e o outro negativo. Nesse caso, temos duas soluções opostas $x_1 = -x_2$. Veja o exemplo:

$$4x^2 - 36 = 0 \iff 4x^2 = 36 \iff x^2 = 9$$

Nesse ponto, devemos nos lembrar de que existem dois números reais que elevados à segunda potência resultam no número 9. São eles os números 3 e −3. Portanto, $x^2 = 9 \iff S = \{-3, 3\}$.

Agora, no caso de os coeficientes **a** e **c** terem o mesmo sinal, o conjunto-solução da equação será vazio. Isso acontece porque para uma soma ser igual a zero, uma parcela deve ser positiva e a outra negativa. Então, como x^2 não é negativo, qualquer que seja o número real x, temos que uma equação como $4x^2 + 36 = 0$, que não admite solução real, ou seja, $4x^2 + 36 = 0 \iff S = \varnothing$ no universo dos reais.

Exercício

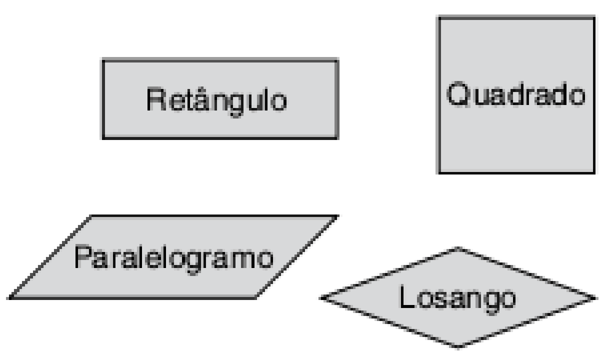
11 Escreva o conjunto-solução de cada uma das equações do segundo grau a seguir.

a) $3x^2 - 12 = 0$
b) $2x^2 + 6 = 0$
c) $x^2 - 49 = 0$
d) $x^2 + 9 = 0$
e) $x^2 - 1 = 0$
f) $x^2 - 2 = 0$

3 Geometria

Paralelogramos e triângulos

Entre os quadriláteros mais importantes estão os paralelogramos e entre os paralelogramos estão os quadrados, os retângulos e os losangos:



Paralelogramo é o nome dado a qualquer quadrilátero que apresente dois pares de lados paralelos. Sendo assim, o quadrado, o retângulo e o losango são também paralelogramos.

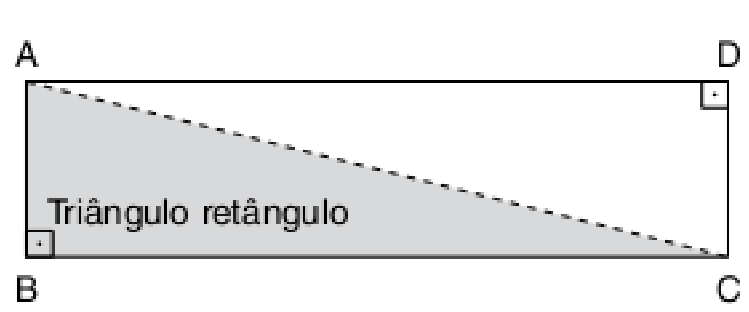
Losango é o nome dado a um paralelogramo que tenha os quatro lados com a mesma medida.

Retângulo é o nome dado a um paralelogramo que tenha todos os ângulos retos.

Sendo assim, todo quadrado é losango e retângulo simultaneamente.

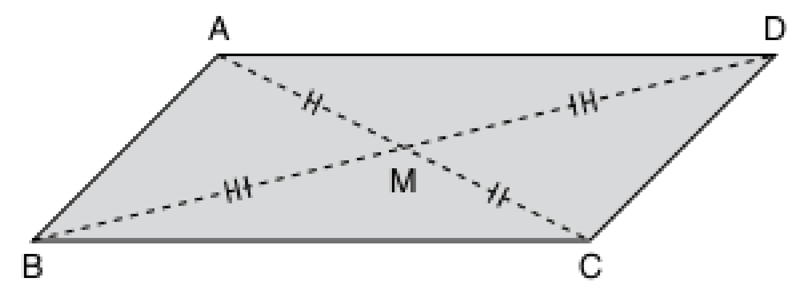
Se traçarmos a diagonal de um paralelogramo qualquer, obteremos dois triângulos idênticos (congruentes), e se esse paralelogramo for retângulo, então os triângulos obtidos serão chamados de triângulos retângulos.

Considere o triângulo retângulo ABC obtido pelo traçado da diagonal AC do retângulo ABCD.



Os dois lados do triângulo ABC, que também são lados do retângulo ABCD, são os catetos, e o lado do triângulo ABC, que é diagonal do retângulo ABCD, é a hipotenusa. Assim, AB e BC são os catetos do triângulo ABC e a hipotenusa desse triângulo é o lado AC.

Se traçarmos as duas diagonais de um paralelogramo qualquer, obteremos quatro pares de triângulos idênticos, em um total de oito triângulos. As relações de congruência entre dois triângulos são indicadas pelo símbolo ($\cong$).



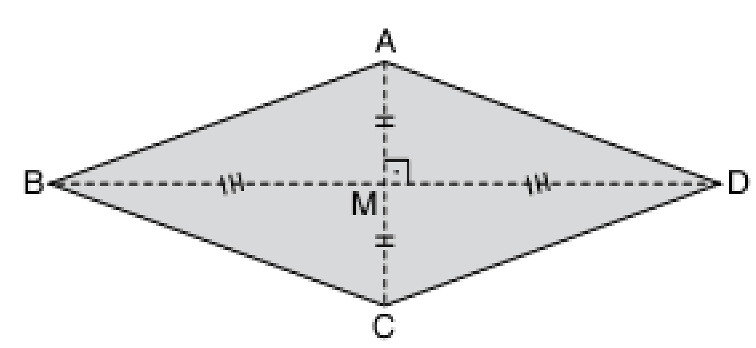
Também é importante observar que embora as diagonais do paralelogramo a seguir tenham tamanhos diferentes, elas dividem-se mutuamente ao meio, interceptando-se em seus respectivos pontos médios.

Relações de congruência entre os oito triângulos:

$$\Delta ABC \cong \Delta CDA \qquad \Delta ABD \cong \Delta CDB$$

$$\Delta AMB \cong \Delta CMD \qquad \Delta AMD \cong \Delta BMC$$

Mas se esse paralelogramo for losango, então quatro dos oito triângulos determinados serão triângulos isósceles e os outros quatro serão triângulos retângulos congruentes entre si. Isso se deve ao fato de que as diagonais de um losango são perpendiculares uma a outra.



Relações de congruência entre os quatro triângulos isósceles:

$$\Delta ABC \cong \Delta ADC \qquad \Delta ABD \cong \Delta CBD$$

Relações de congruência entre os quatro triângulos retângulos:

$$\Delta AMB \cong \Delta AMD \cong \Delta CMB \cong \Delta CMD$$

Exercícios

1 As afirmações a seguir são referentes ao conjunto dos quadriláteros. Assinale verdadeiro (V) ou falso (F).

a) ( ) Todo retângulo é paralelogramo.
b) ( ) Todo losango é paralelogramo.
c) ( ) Todo quadrado é paralelogramo.
d) ( ) Todo paralelogramo é losango.
e) ( ) Todo retângulo é losango.
f) ( ) Todo quadrado é losango.
g) ( ) Todo retângulo é quadrado.
h) ( ) Todo quadrilátero é paralelogramo.

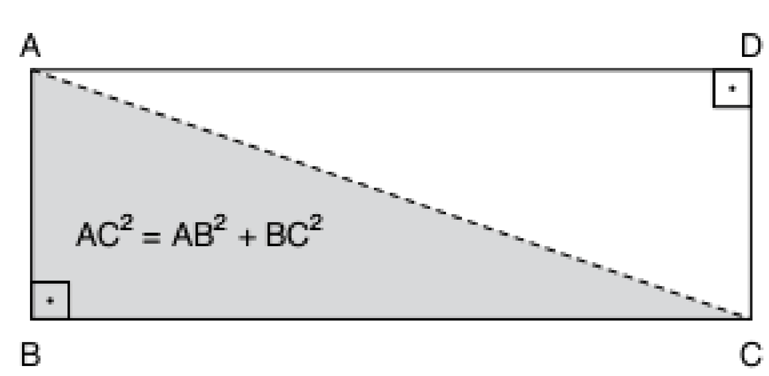
2 As afirmações a seguir são referentes às propriedades dos quadriláteros. Assinale verdadeiro (V) ou falso (F).

a) ( ) Se um quadrilátero tem todos os lados com o mesmo comprimento, então esse quadrilátero é um quadrado.
b) ( ) Se um quadrilátero tem todos os ângulos com a mesma medida, então esse quadrilátero é um retângulo.
c) ( ) Se um quadrilátero tem diagonais com a mesma medida, então esse quadrilátero é um retângulo.
d) ( ) Se um paralelogramo tem diagonais com a mesma medida, então esse paralelogramo é um retângulo.
e) ( ) As diagonais de um paralelogramo têm o mesmo comprimento.
f) ( ) As diagonais de um losango têm o mesmo comprimento.
g) ( ) As diagonais de um retângulo têm o mesmo comprimento.
h) ( ) As diagonais de um paralelogramo são perpendiculares entre si.
i) ( ) As diagonais de um losango são perpendiculares entre si.
j) ( ) As diagonais de um retângulo são perpendiculares entre si.
k) ( ) As diagonais de um quadrado têm o mesmo comprimento.
l) ( ) As diagonais de um quadrado são perpendiculares entre si.
m) ( ) Os lados do losango são hipotenusas dos triângulos retângulos determinados pelo traçado de suas diagonais.
n) ( ) Os lados do retângulo são catetos dos triângulos retângulos determinados pelo traçado de uma de suas diagonais.
o) ( ) Os oito triângulos determinados pelo traçado das duas diagonais de um quadrado são triângulos retângulos.

Teorema de Pitágoras

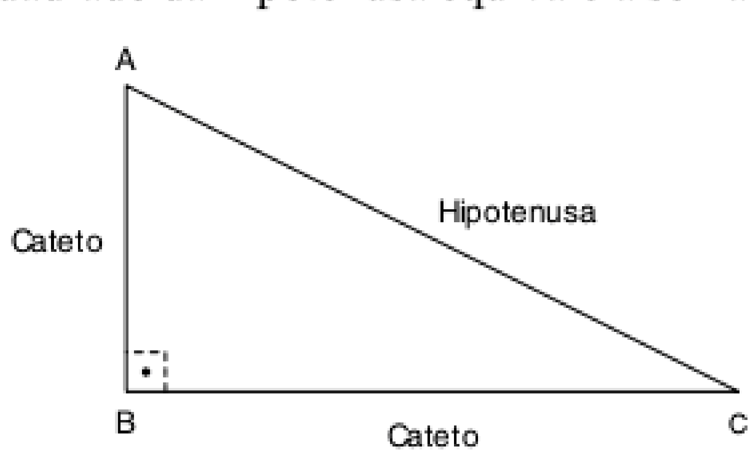
O Teorema de Pitágoras diz que: "O quadrado da hipotenusa equivale à soma dos quadrados dos catetos".

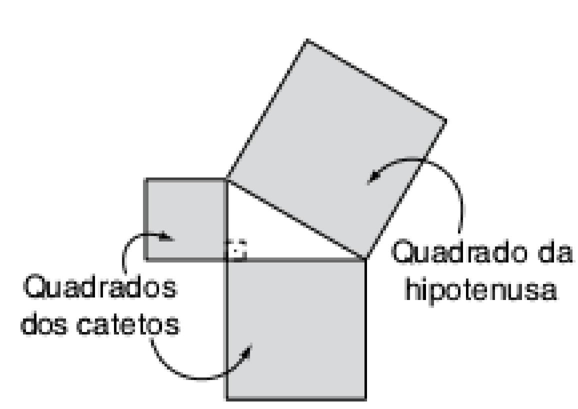
Desse teorema temos, em um triângulo ABC, obtido do traçado da diagonal AC de um retângulo ABCD, que:



O Teorema de Pitágoras é, essencialmente, uma afirmação que se refere às áreas de três quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo. E pode ser enunciado como:

"A área do quadrado da hipotenusa equivale à soma das áreas dos quadrados dos catetos".

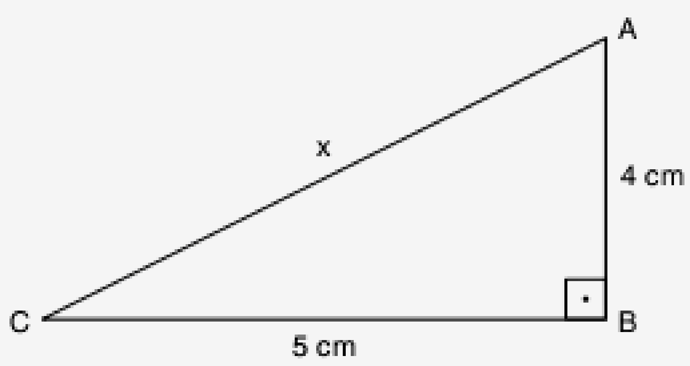




A relação entre os números que expressam as medidas do lado e da área de um mesmo quadrado é muito simples: sabendo a medida do lado de um quadrado, elevamos esse número à segunda potência (ao quadrado) e assim obtemos o número que expressa a área desse quadrado. E sabendo o valor da área de um quadrado, a segunda raiz deste número (a raiz quadrada) expressa o valor do lado desse quadrado.

Assim, para determinar a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo conhecendo-se as medidas dos dois catetos do triângulo em uma mesma unidade, basta somar os valores das áreas dos quadrados desses catetos e extrair a raiz quadrada do resultado. O valor obtido dessa radiciação será igual à medida da hipotenusa do triângulo, na mesma unidade em que estão as medidas dos catetos. Exemplo:

Determine a medida da hipotenusa do triângulo ABC, retângulo em B, sabendo que seus catetos AB e BC medem, respectivamente, 4 e 5 centímetros.



Adição das áreas:

$$\begin{array}{r} 25\,cm^2 \\ +\ 16\,cm^2 \\ \hline 41\,cm^2 \end{array}$$

As áreas dos quadrados dos catetos são:

$$AB^2 = 16\ cm^2 \text{ e } AC^2 = 25\ cm^2$$

Do Teorema de Pitágoras, temos:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$x^2 = 16\ cm^2 + 25\ cm^2,\ x > 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{41}\ cm$

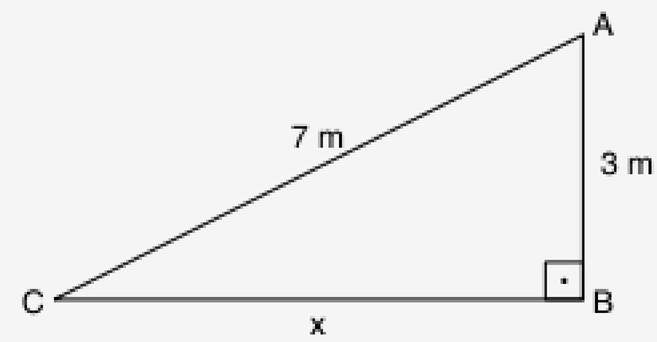
Exercício

3 Determine a medida das hipotenusas dos triângulos retângulos cujos catetos medem:

a) 1 cm e 1 cm
b) 1 cm e 2 cm
c) 1 cm e 3 cm
d) 2 dm e 2 dm
e) 2 dm e 3 dm
f) 1 dm e 4 dm
g) 2 km e 4 km
h) 3 km e 4 km
i) 3 km e 5 km
j) 2 m e 5 m
k) 5 m e 12 m
l) 6 m e 8 m

Para determinar a medida de um cateto de um triângulo retângulo conhecendo-se, em uma mesma unidade, a medida da hipotenusa e a medida do outro cateto do triângulo, basta subtrair o valor da área do quadrado do cateto conhecido do valor da área do quadrado da hipotenusa e depois extrair a raiz quadrada dessa diferença. Exemplo:

Determine a medida do cateto BC do triângulo ABC, retângulo em B, sabendo que a hipotenusa AC e o cateto AB medem, respectivamente, 7 e 3 metros.



Subtração das áreas:

$$\begin{array}{r} 49\,m^2 \\ -\ 9\,m^2 \\ \hline 40\,m^2 \end{array}$$

A área do quadrado da hipotenusa é: $AC^2 = 49\ m^2$.

A área do quadrado do cateto AB é: $AB^2 = 9\ m^2$.

Do Teorema de Pitágoras, temos:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

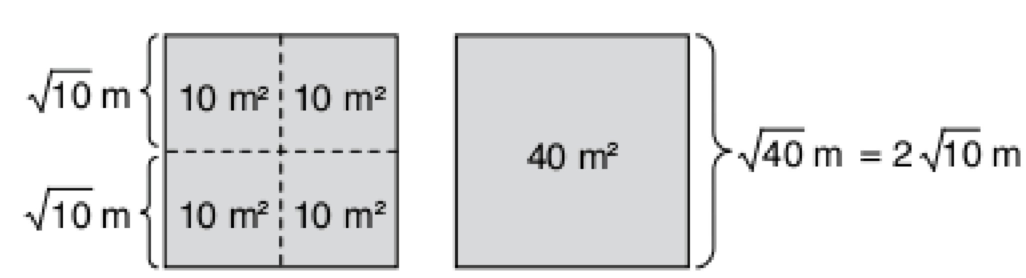
$$49\ m^2 = 9\ m^2 + x^2,\ x > 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{40}\ m$$

Nesse exemplo, o resultado obtido $x = \sqrt{40}$ m informa que o cateto BC é lado de um quadrado cuja área é igual a 40 metros quadrados. Mas, como o número 40 é igual ao produto entre os números 4 e 10, podemos usar a propriedade distributiva da radiciação em relação à multiplicação para simplificar este resultado.

Assim, temos que:

$\sqrt{40} = \sqrt{4 . 10} = \sqrt{4} . \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$. Então, pode-se afirmar que o cateto BC mede $2\sqrt{10}$ m.

Observe, na figura a seguir, como a sentença matemática fechada $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ informa que o lado de um quadrado com quarenta unidades de área é igual ao dobro do lado de um quadrado com apenas dez unidades de área:

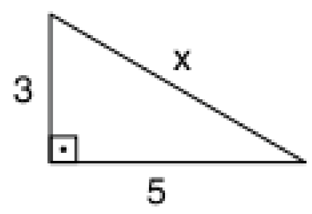


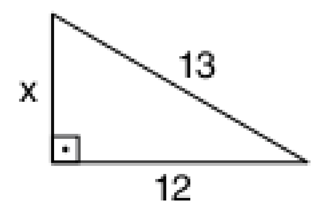
Exercícios

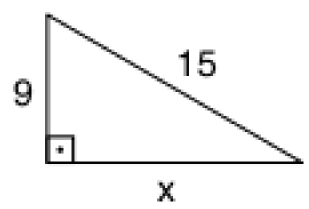
4 Em cada item a seguir, são dadas, de um mesmo triângulo retângulo, as medidas da hipotenusa e de um cateto. Determine a medida do outro cateto.

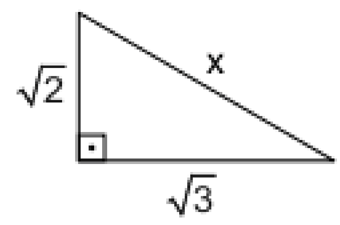
a) 2 cm e 1 cm
b) 3 cm e 1 cm
c) 3 cm e 2 cm
d) 4 dm e 1 dm
e) 4 dm e 2 dm
f) 4 dm e 3 dm
g) 5 km e 2 km
h) 5 km e 3 km
i) 5 km e 4 km
j) 6 m e 5 m
k) 7 m e 4 m
l) 13 m e 5 m

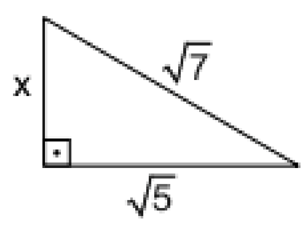
5 Determine o valor x da medida do lado de cada triângulo retângulo a seguir, nos quais os ângulos retos estão indicados com a marca característica, supondo que todas as medidas dadas estão em uma mesma unidade.

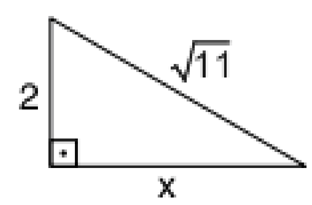
a) 

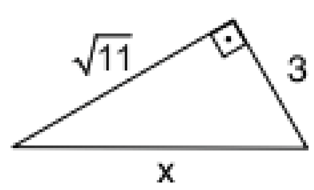
b) 

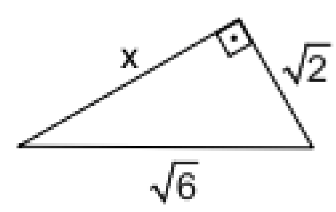
c) 

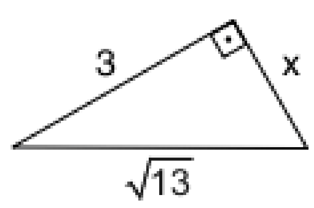
d) 

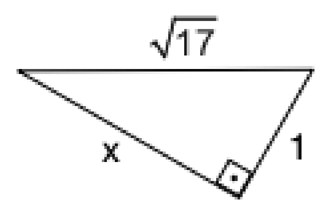
e) 

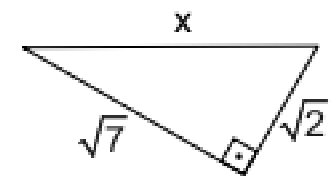
f) 

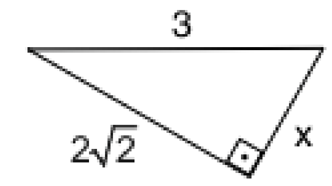
g) 

h) 

i) 

j) 

k) 

l) 

6 Responda às seguintes perguntas:

a) Quanto mede a diagonal de um retângulo cujos lados medem 30 m e 40 m?

b) Quanto mede a diagonal de um quadrado cujo lado mede 10 m?

c) Quanto mede o lado de um quadrado cuja diagonal mede10 m?

d) Quanto mede o lado de um losango cujas diagonais medem 6 m e 8 m?

e) Quanto mede o raio da circunferência que passa pelos vértices de um quadrado de lado 2 m?

f) Quanto mede o raio da circunferência que passa pelos vértices de um triângulo retângulo de catetos 24 m e 32 m?

Relações trigonométricas no triângulo retângulo

No estudo da Geometria plana, chamamos os ângulos que medem 90º de ângulos retos, e os ângulos que medem menos do que 90º de ângulos agudos. Sabe-se que as medidas, em graus, dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180º. Esse fato é conhecido como teorema angular de Tales.

Como um dos ângulos internos de um triângulo retângulo é reto, ou seja, mede 90º, pode-se concluir que os outros dois ângulos são agudos e que suas medidas somam 90º. Por esse motivo, as medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo são chamadas de *complementares*.

Sendo AB a hipotenusa de um triângulo ABC, temos que o ponto C é o vértice do ângulo reto, pois fica oposto a essa hipotenusa. Assim, sendo α e β as medidas em graus dos ângulos internos de vértices A e B deste triângulo, temos que: $\alpha + \beta = 90°$.
Na figura a seguir, temos que:

AB é a hipotenusa do triângulo.

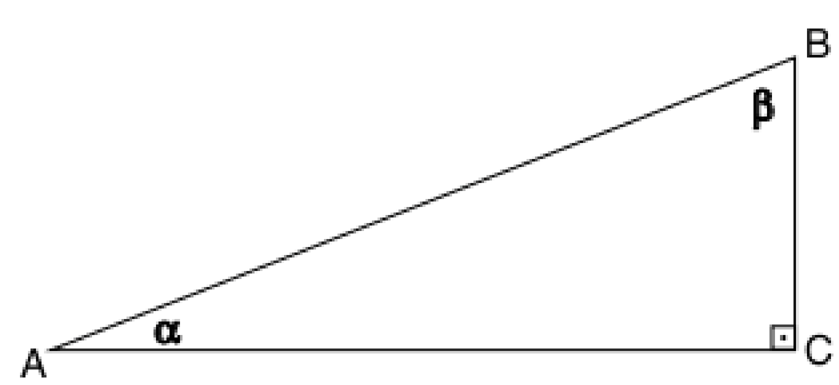
AC é o cateto **adjacente** ao ângulo de medida α.

BC é o cateto **oposto** ao ângulo de medida α.

Não obstante, também temos que:

AC é o cateto **oposto** ao ângulo de medida β.

BC é o cateto **adjacente** ao ângulo de medida β.



As três principais razões trigonométricas são chamadas de seno (**sen**), cosseno (**cos**) e tangente (**tg**), e são definidas da seguinte maneira:

$$\text{seno} = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\text{cosseno} = \frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\text{tangente} = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}}$$

Assim, em relação ao ângulo interno de medida α da figura, temos que:

$$\text{sen}\alpha = \frac{BC}{AB} \qquad \cos\alpha = \frac{AC}{AB} \qquad \text{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}$$

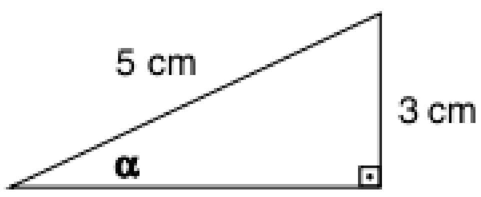
E, em relação ao ângulo interno de medida β dessa mesma figura, temos que:

$$\text{sen}\beta = \frac{AC}{AB} \qquad \cos\beta = \frac{BC}{AB} \qquad \text{tg}\beta = \frac{AC}{BC}$$

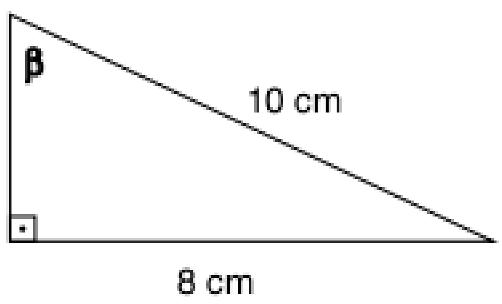
Exercício

7 Nos triângulos retângulos a seguir, determine os valores dos senos, cossenos e tangentes dos ângulos agudos indicados e escreva os resultados com aproximação de duas casas decimais.

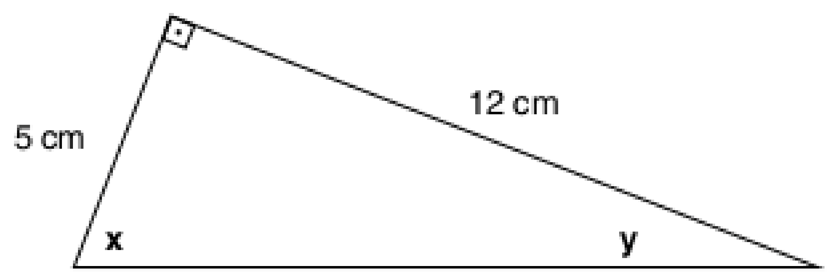
a)



b)



c)



Se dois ângulos têm medidas complementares, então o seno de um deles é igual ao cosseno do outro e, além disso, o produto dos valores de suas tangentes é unitário. Observe, por exemplo, no item **c** do exercício 7, que:

$$x + y = 90^{o} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\, x = \cos y \\ \text{sen}\, y = \cos x \\ \text{tg}\, x \,.\, \text{tg}\, y = 1 \end{cases}$$

Outro fato importante sobre as razões trigonométricas é que seus valores não dependem do tamanho do triângulo retângulo do qual são extraídas. As razões trigonométricas dependem apenas das medidas dos ângulos internos desses triângulos.

Exercício

8 As medidas aproximadas, em graus, dos ângulos internos α e β marcados nos itens **a** e **b** do exercício 7 são, respectivamente, 37º e 53º. Anote esses valores nos respectivos triângulos do exercício, depois calcule as medidas dos outros ângulos agudos de cada triângulo e você perceberá que os dois triângulos possuem as mesmas medidas angulares.

Há muito tempo, o ser humano tem o hábito de colecionar razões trigonométricas como funções de medidas angulares para aplicá-la em triângulos retângulos de diversos tamanhos. Essas razões são anotadas em listas conhecidas como *tábuas trigonométricas*.

Consultando uma dessas tábuas, pode-se encontrar, por exemplo, a sentença sen(37°) ≈ 0,60. Essa sentença matemática afirma que todo triângulo retângulo que possui um ângulo interno de 37º tem o cateto oposto com 60% da medida da hipotenusa.

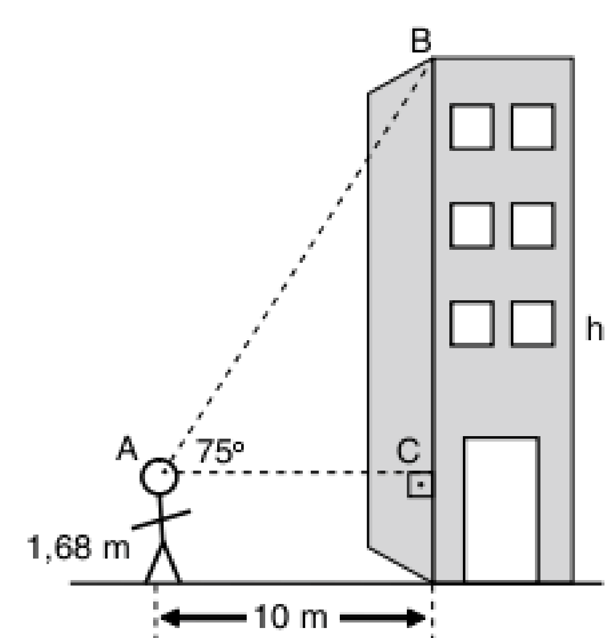
Na prática, a razão trigonométrica mais usada é a tangente, pois ela permite calcular alturas de edifícios sem que seja necessário subir nele.

Para fazer um cálculo dessa natureza, uma pessoa deve possuir um instrumento capaz de medir ângulos de observação (teodolito). Então, essa pessoa deve posicionar-se a uma determinada distância da entrada do edifício e medir o ângulo de observação do topo do edifício.

A figura a seguir mostra o exemplo de uma pessoa com 1 metro e 68 centímetros de altura, que está afastada 10 metros de um edifício e observa seu topo sob um ângulo de 75º.

Assim, sendo **h** a medida da altura do edifício, no triângulo ABC, temos:

$$\text{tg}(75^{o}) = \frac{\text{h} - 1{,}68\ \text{m}}{10\ \text{m}}$$



Eis uma coleção de valores aproximados das tangentes de alguns ângulos agudos:

tg(50°) ≈ 1,192	tg(55°) ≈ 1,428
tg(60°) ≈ 1,732	tg(65°) ≈ 2,145
tg(70°) ≈ 2,747	tg(75°) ≈ 3,732
tg(80°) ≈ 5,671	tg(85°) ≈ 11,430

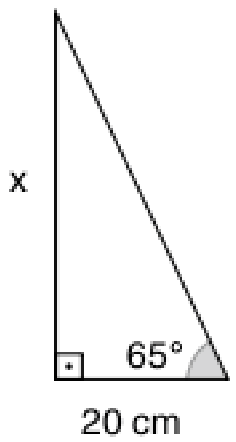
Então, tomando-se dessa tabela o valor 3,732 para a tangente de 75º, obtemos a seguinte equação:

$$3{,}732 = \frac{\mathbf{h} - 1{,}68\ \text{m}}{10\ \text{m}} \Leftrightarrow 37{,}32\ \text{m} = \text{h} - 1{,}68\,\text{m} \Leftrightarrow \text{h} = 39\,\text{m}$$

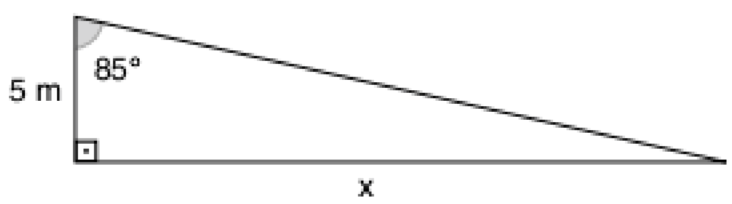
Exercícios

9 Usando os valores das tangentes fornecidos no exemplo anterior, determine as medidas aproximadas dos catetos indicados em cada um dos triângulos retângulos a seguir.

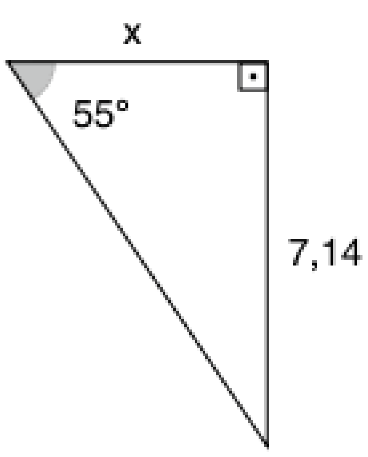
a)



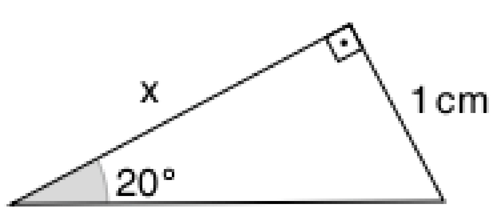
b)



c)



d)

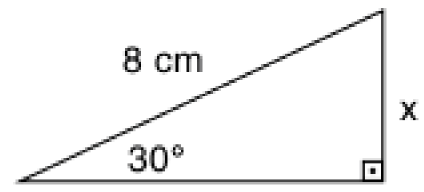


Embora as razões trigonométricas dos ângulos de 30º, 45º e 60º possam ser obtidas geometricamente, recomenda-se memorizar a seguinte tabela:

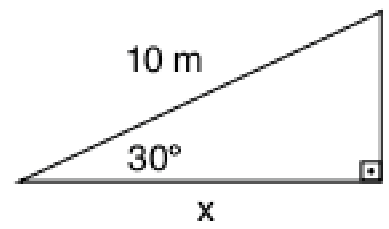
	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

10 Usando os valores fornecidos na tabela dada, determine as medidas dos lados indicados em cada um dos triângulos retângulos a seguir.

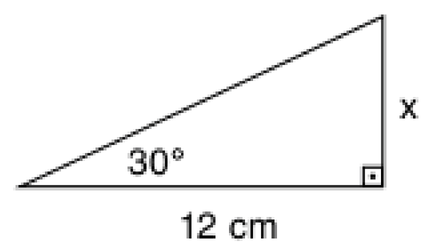
a)



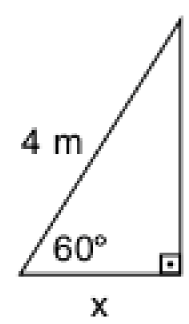
b)



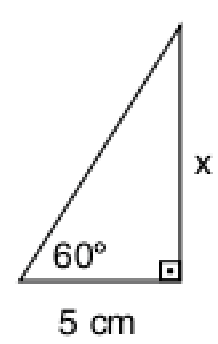
c)



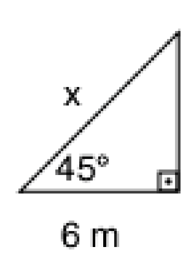
d)



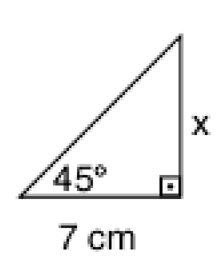
e)



f)



g)

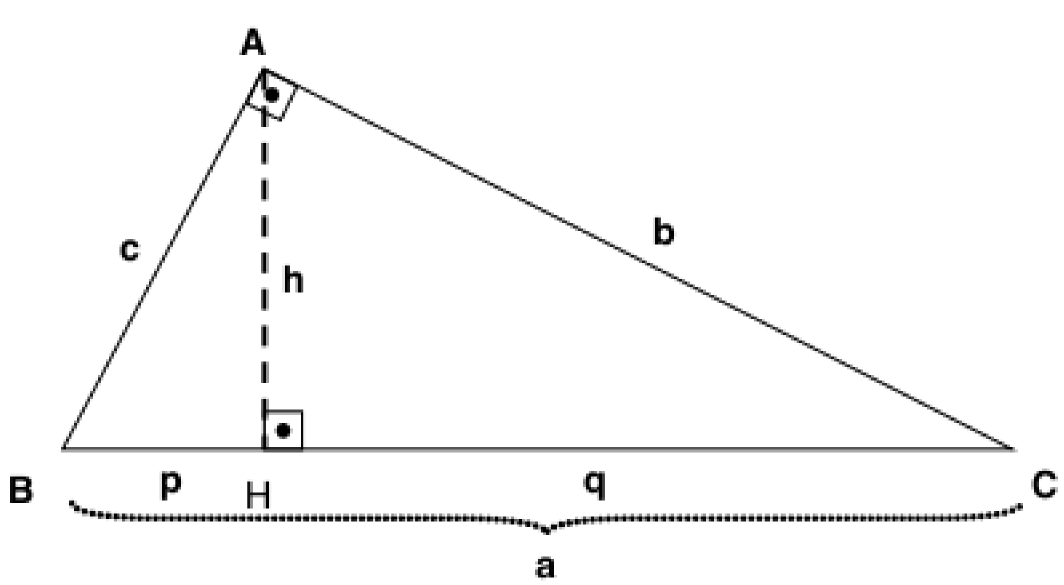


Relações métricas no triângulo retângulo

Ao traçarmos a altura AH relativa à hipotenusa BC de um triângulo ABC, dividimos essa hipotenusa em dois segmentos BH e CH que são chamados de *projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa* ou, simplesmente, *projeções*.

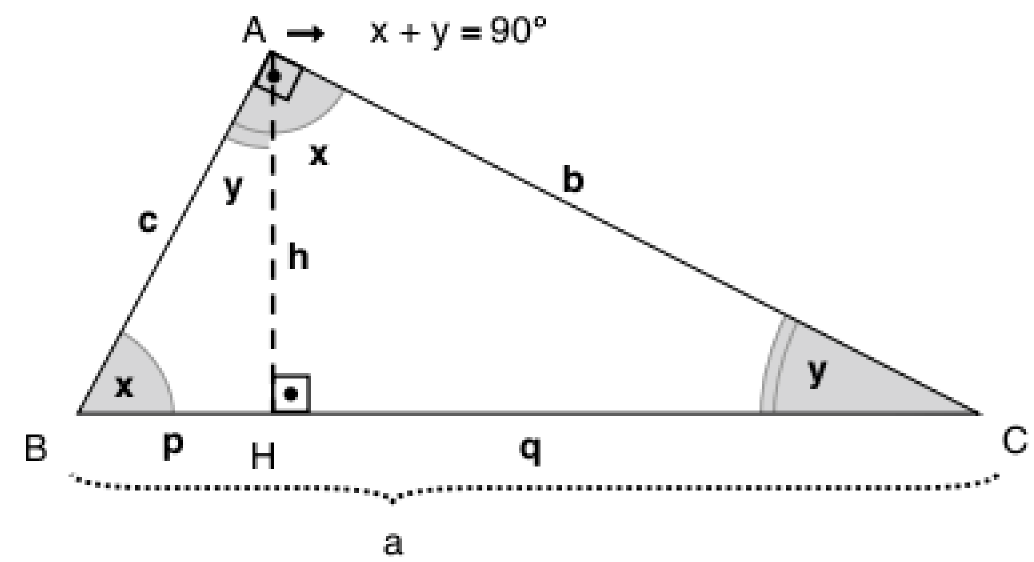
No estudo das relações métricas do triângulo retângulo, temos o hábito de designar as medidas dos segmentos envolvidos usando letras minúsculas e, no caso dos lados do triângulo original, costumamos usar as mesmas letras que batizam os vértices opostos. O uso da letra **h** para designar a medida da altura de uma figura geométrica vem do inglês *height*. Assim, no triângulo ABC da figura a seguir, temos que:

- A medida da hipotenusa desse triângulo é **BC = a**.
- As medidas dos catetos desse triângulo são **AB = c** e **AC = b**.
- As medidas das projeções dos catetos desse triângulo sobre a sua hipotenusa são **BH = p** e **CH = q**.
- A medida da hipotenusa é igual à soma das medidas das projeções: **a = p + q**.
- BH é a projeção do cateto AB.
- CH é a projeção do cateto AC.
- A altura relativa à hipotenusa desse triângulo é **AH = h**.



Sendo **x** a medida do ângulo interno de vértice B do triângulo ABC e **y** a medida do ângulo interno de vértice C do mesmo triângulo, temos que x + y = 90°. A altura AH determina, na região interna do triângulo ABC, dois outros triângulos HAB e HAC que são também retângulos, ambos no vértice H. Outro fato sobre a altura AH é que ela divide o ângulo reto A, do triângulo ABC, em dois outros ângulos que também medem **x** e **y**.

As principais relações métricas do triângulo retângulo podem ser obtidas comparando-se as razões trigonométricas extraídas de cada um dos triângulos: ABC, HBA e HAC, pois todos eles têm ângulos internos com as mesmas três medidas: (90º, x, y).



		ΔABC		ΔHBA		ΔHAC
sen x	=	$\frac{b}{a}$	=	$\frac{h}{c}$	=	$\frac{q}{b}$
cos x	=	$\frac{c}{a}$	=	$\frac{p}{c}$	=	$\frac{h}{b}$
tg x	=	$\frac{b}{c}$	=	$\frac{h}{p}$	=	$\frac{q}{h}$

Efetuando os produtos cruzados indicados na tabela, obtemos, respectivamente, as seguintes relações métricas:

(I) $\rightarrow$ $b^2 = a \cdot q$
(II) $\rightarrow$ $c^2 = a \cdot p$
(III) $\rightarrow$ $h^2 = p \cdot q$

Como p + q = a, somando-se as relações **I** e **II**, teremos a demonstração do Teorema de Pitágoras:

$$b^2 + c^2 = a \cdot p + a \cdot q \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a \cdot (p + q) \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

Há outra relação métrica importante que surge do produto cruzado entre as duas primeiras razões da tabela:

(IV) $\rightarrow$ $a \cdot h = b \cdot c$

Não recomendamos que memorize as fórmulas que designam as relações métricas, pois as letras usadas para designar os elementos do triângulo retângulo podem variar de um exercício para outro, causando confusão. Por isso, recomendamos que as relações métricas no triângulo retângulo sejam memorizadas a partir da nomenclatura de seus elementos. Assim:

(I e II) $\rightarrow$ **"O quadrado de um cateto equivale ao produto entre sua projeção e a hipotenusa".**
(III) $\rightarrow$ **"O quadrado da altura equivale ao produto das projeções".**
(IV) $\rightarrow$ **"O produto entre a hipotenusa e a altura equivale ao produto dos catetos".**

Exercício

11 Sobre um triângulo retângulo cujos catetos medem 60 cm e 80 cm, responda às seguintes perguntas:

a) Quanto mede, em metros, a hipotenusa desse triângulo?

b) Quanto mede, em centímetros, a altura relativa à hipotenusa desse triângulo?

c) Quanto mede, em centímetros, a projeção ortogonal do menor cateto sobre a hipotenusa desse triângulo?

d) Quanto mede, em centímetros, a projeção ortogonal do maior cateto sobre a hipotenusa desse triângulo?

e) Quanto vale a área de um quadrado cujo lado tem a mesma medida da altura calculada no item b?

f) Quanto vale a área de um retângulo cujos lados têm as medidas das projeções calculadas nos itens c e d?

A Geometria é uma ciência que não depende da opinião das pessoas, mesmo assim, apropria-se de palavras do cotidiano para designar propriedades específicas. Um único conceito de igualdade, como o que aplicamos aos números, é pouco.

As principais preocupações da Geometria são: a forma (**F**), o tamanho (**T**) e a posição (**P**). Por isso, há diversos níveis de igualdade no estudo da Geometria e somente um desses níveis é designado pelo termo *igualdade*.

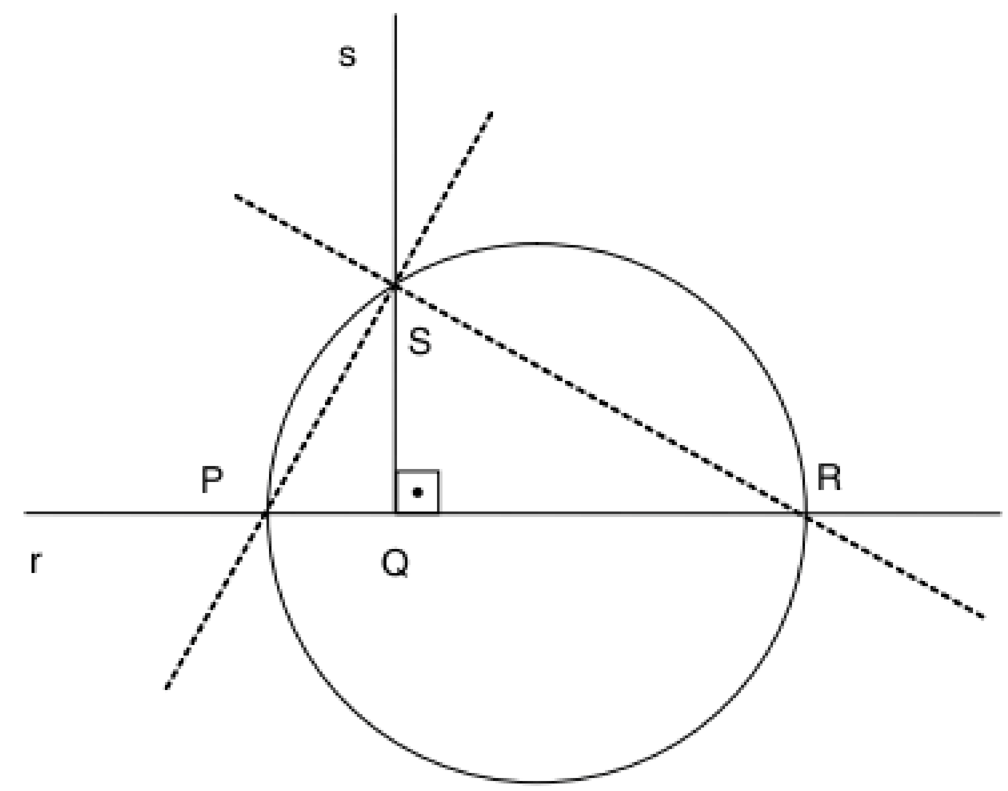
Eis a nomenclatura usada para a comparação das figuras geométricas nos seus diferentes níveis:

- Igualdade significa mesma forma, tamanho e posição **(F, T, P)**.
- Congruência significa mesma forma e tamanho **(F, T)**.
- Semelhança significa mesma forma **(F)**.
- Equivalência significa mesmo tamanho (**T**).

Exercícios

12 Dois quadriláteros foram mencionados nos últimos itens do exercício anterior. Qual deve ser o termo geométrico para designar o que esses quadriláteros têm em comum?

13 Na figura a seguir, são dados, em uma reta r, os pontos: P, Q e R. Além deles, há uma circunferência de diâmetro PR, e uma semirreta s cuja origem é o ponto Q, e que é perpendicular à reta r. O ponto S é obtido da interseção entre a circunferência e semirreta.



Sabendo que os segmentos PQ e QR medem, respectivamente, 8 cm e 18 cm, responda às seguintes perguntas e justifique suas respostas:

a) Qual é, em centímetros, a distância entre os pontos P e R?

b) Quanto mede, em centímetros, o raio da circunferência?

c) Quanto mede, em graus, o ângulo formado pelas retas pontilhadas PS e SR?

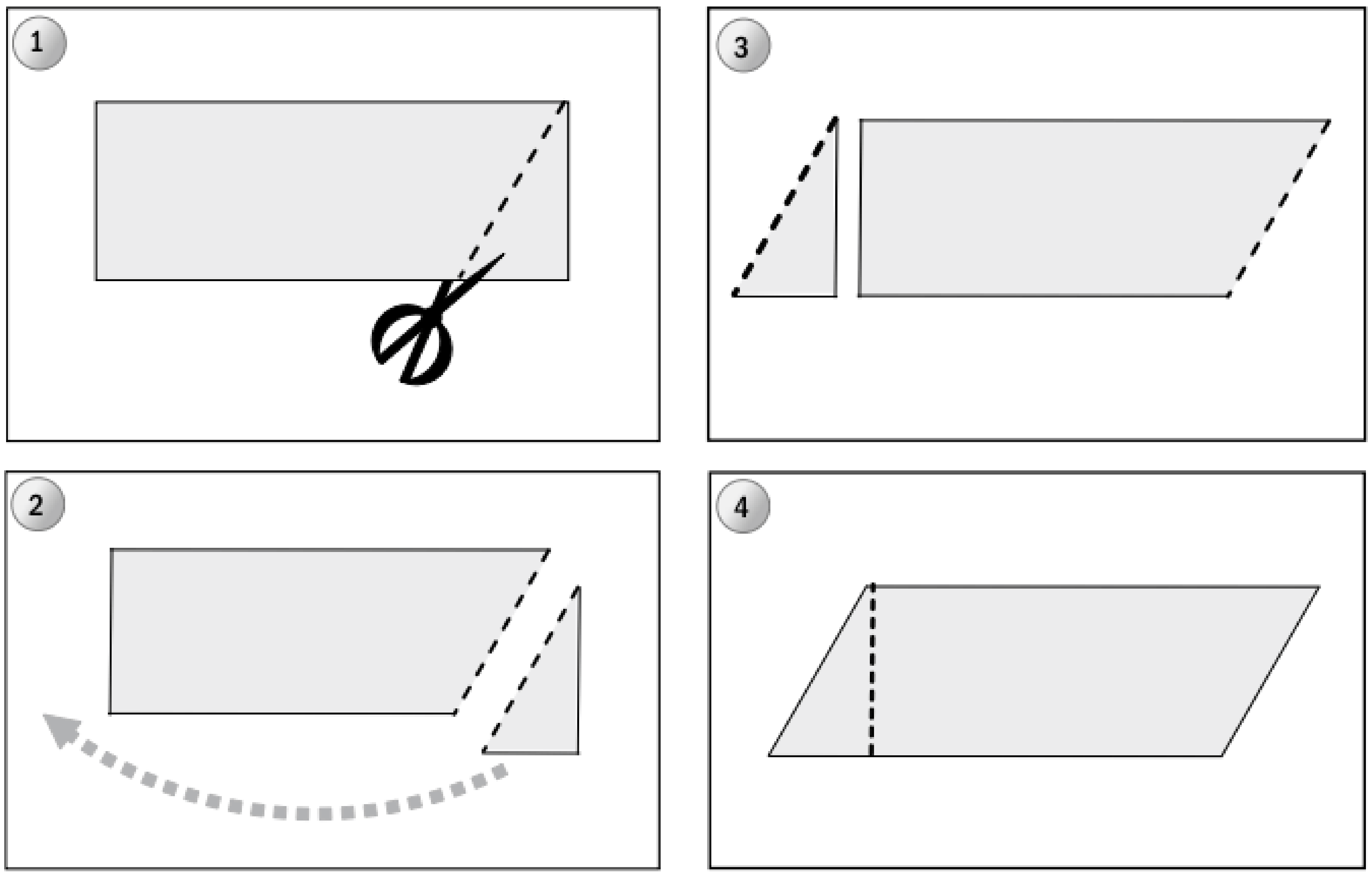
d) Qual é o comprimento, em centímetros, da altura SQ do triângulo PSR?

e) Quanto mede, em centímetros, o segmento PS?

f) Quanto mede, em centímetros, o segmento SR?

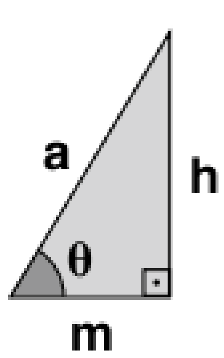
Teorema dos cossenos

A sequência de figuras a seguir mostra como construir um paralelogramo a partir de um pedaço de papel com a forma de um retângulo de base **b** e altura **h**.



O primeiro passo é traçar, de um ponto da base do retângulo, uma linha reta até um de seus vértices. Depois recortamos do retângulo um pedaço triangular que será recolocado e emendado do outro lado do retângulo.

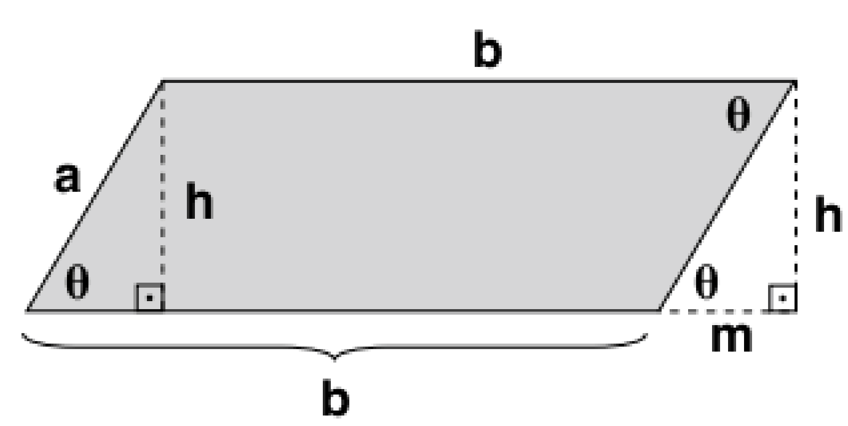
O triângulo retirado é um triângulo retângulo tal que um de seus catetos tem a medida **h** da altura do retângulo original. Sendo **m** o comprimento do outro cateto, **a** o comprimento da hipotenusa e **θ** a medida do ângulo agudo determinado na base do retângulo pelo recorte, temos:



$$m^2 + h^2 = a^2$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$\cos\theta = \frac{m}{a} \Rightarrow m = a \cdot \cos\theta$$



Assim, as medidas dos lados do paralelogramo obtido nesse procedimento são a e b, e a medida dos seus ângulos agudos é θ.

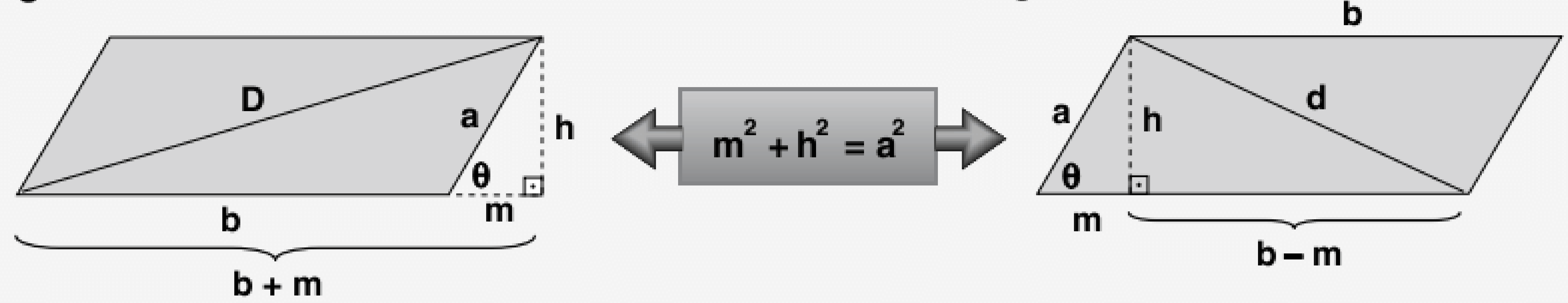
A área do retângulo original é dada pelo produto **b · h**, e como o paralelogramo obtido é equivalente ao retângulo original, temos que sua área também é dada pelo produto **b · h**.

Como **h = a · sen**θ, podemos expressar a área do paralelogramo em função das medidas de seus dois lados e do seu ângulo agudo pela fórmula:

$$A_{\text{paralelogramo}} = \mathbf{a \cdot b \cdot sen}\theta$$

Agora, para calcular o comprimento de suas diagonais, devemos observar que cada uma delas é hipotenusa de um triângulo retângulo diferente.

Diagonal maior **Diagonal menor**



Do Teorema de Pitágoras, temos que:

$$\mathbf{D^2 = (b + m)^2 + h^2}$$

Efetuando-se o produto notável, temos:

$$\mathbf{D^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot m + m^2 + h^2}$$

Substituindo-se $m^2 + h^2$ por a^2, temos:

$$\mathbf{D^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot m + a^2}$$

Substituindo-se m por $a \cdot \cos\theta$, temos:

$$\mathbf{D^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot a \cdot \cos\theta + a^2}$$

Reorganizando os termos do segundo membro:

$$\mathbf{D^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\theta}$$

Do Teorema de Pitágoras, temos que:

$$\mathbf{d^2 = (b - m)^2 + h^2}$$

Efetuando-se o produto notável, temos:

$$\mathbf{d^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot m + m^2 + h^2}$$

Substituindo-se $m^2 + h^2$ por a^2, temos:

$$\mathbf{d^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot m + a^2}$$

Substituindo-se m por $a \cdot \cos\theta$, temos:

$$\mathbf{d^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot a \cdot \cos\theta + a^2}$$

Reorganizando os termos do segundo membro:

$$\mathbf{d^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\theta}$$

As duas expressões obtidas são conhecidas como *Teorema dos cossenos*. Note que a diferença entre elas é apenas no sinal da última parcela. Então, para que não haja confusão, basta lembrarmos que, para calcular a diagonal maior, usamos o sinal (+) e para calcular a diagonal menor, usamos o sinal (−). Resumindo, dado um paralelogramo de lados a e b, ângulo agudo θ, área A e diagonais D e d, temos:

Área: $\mathbf{A = a \cdot b \cdot sen\theta}$

Diagonal maior: $D = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\theta}$

Diagonal menor: $d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\theta}$

Exercícios

14 Calcule o valor da área de um paralelogramo de lados 4 cm e 5 cm que formam um ângulo de 30º.

15 Calcule o valor da área de um losango de lado 10 cm que possui um ângulo interno de 45º.

16 Calcule a medida da diagonal maior do paralelogramo de lados 6 cm e 10 cm que formam um ângulo de 60º.

17 Calcule a medida da diagonal menor do paralelogramo de lados 5 cm e 8 cm que formam um ângulo de 60º.

Álgebra x Geometria

4

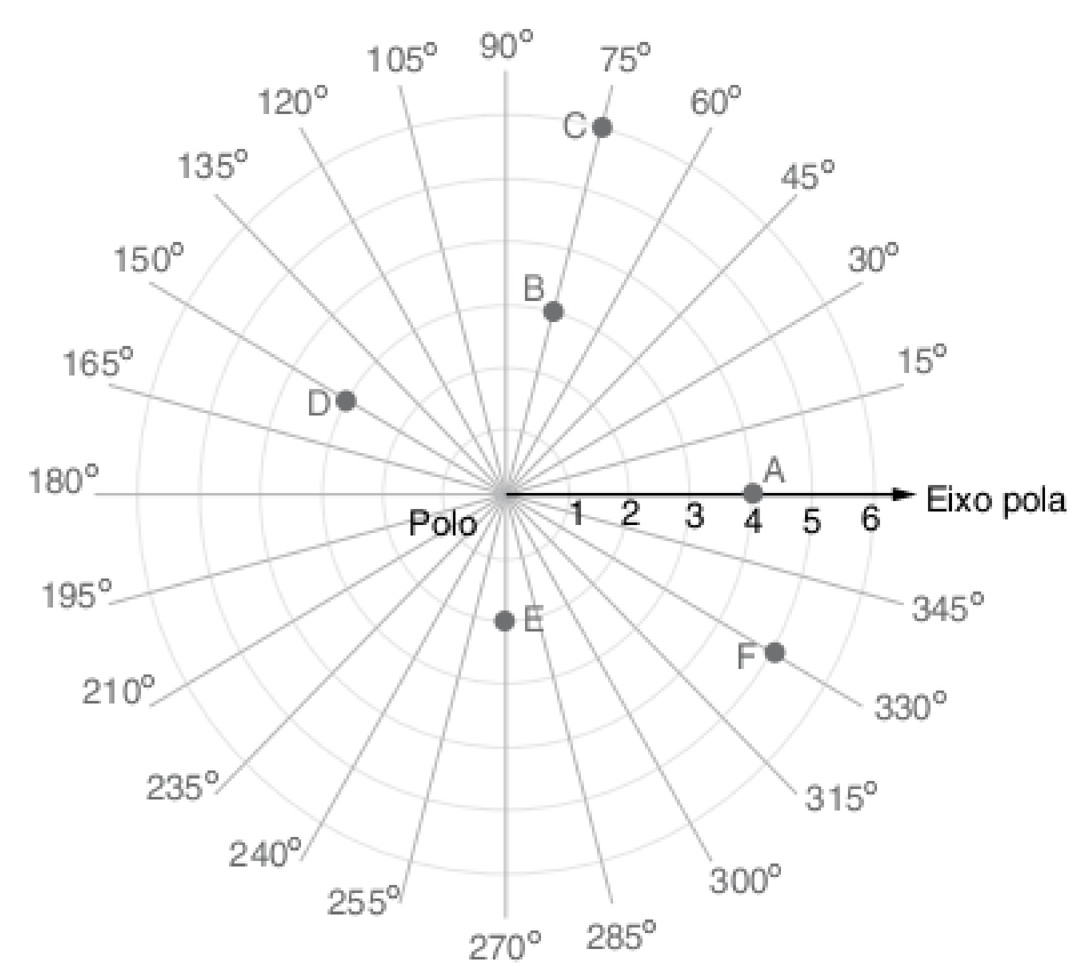
Sistemas de coordenadas

Há diversas maneiras de se representar posições de pontos em uma superfície ou no espaço, usando duas ou três informações coordenadas. Como exemplos, a posição de uma cidade no globo terrestre pode ser expressa pelo par latitude e longitude, mas para expressar a posição de um satélite em órbita do planeta, é necessária uma terceira informação, que é o raio da órbita.

Sistema polar

O sistema polar de coordenadas no plano já era usado no século II a.C. pelo astrônomo Hiparco e por Aristóteles para descrever as curvas espirais. Esse sistema parte de um ponto denominado polo, que é a origem de uma escala métrica chamada *eixo polar*, e de um arco de circunferência que tenha centro no polo e uma extremidade sobre o eixo polar. O raio da circunferência e a medida do arco variam.

O eixo polar é geralmente representado na horizontal e orientado para a direita, de forma que os arcos de circunferência partam do eixo polar e cresçam no sentido anti-horário. A figura a seguir apresenta uma grade de pontos em um sistema de coordenadas polares cujo eixo polar segue uma escala de unidade igual a 0,5 cm e cujos arcos seguem uma escala de 15º em 15º.



Com exceção do polo, todos os pontos dessa grade podem ser designados em coordenadas polares, usando um par ordenado (r, θ), em que **r** indica o raio da circunferência que contém o ponto e θ, a medida do arco que parte do eixo polar e chega até o ponto seguindo o sentido anti-horário.

Na figura anterior, o ponto **A** é o único situado sobre o eixo polar e, por isso, não há arco de circunferência para ser considerado. Nesse caso, a medida θ é nula e as coordenadas polares do ponto **A** são: **(4, 0º)**. As demais coordenadas polares dos pontos marcados na figura são:

B = (3, 75º) C = (6, 74º) D = (3, 150º)

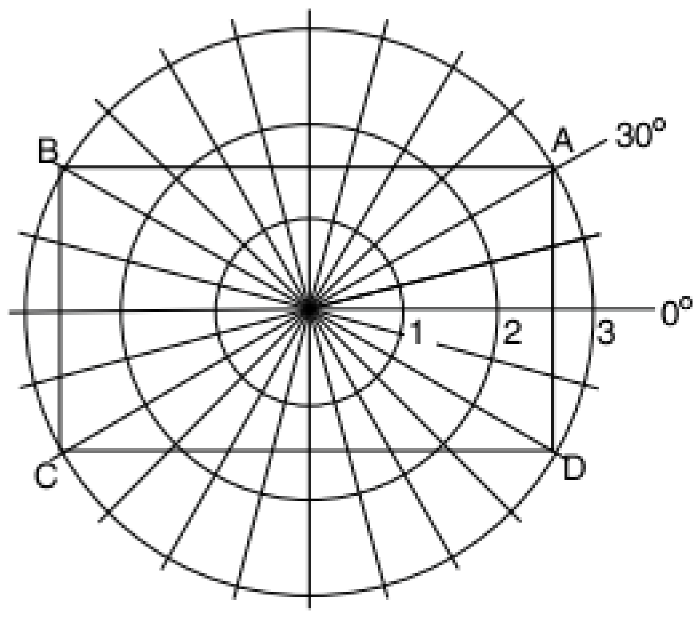
E = (2, 270º) F = (5, 330º)

Exercícios

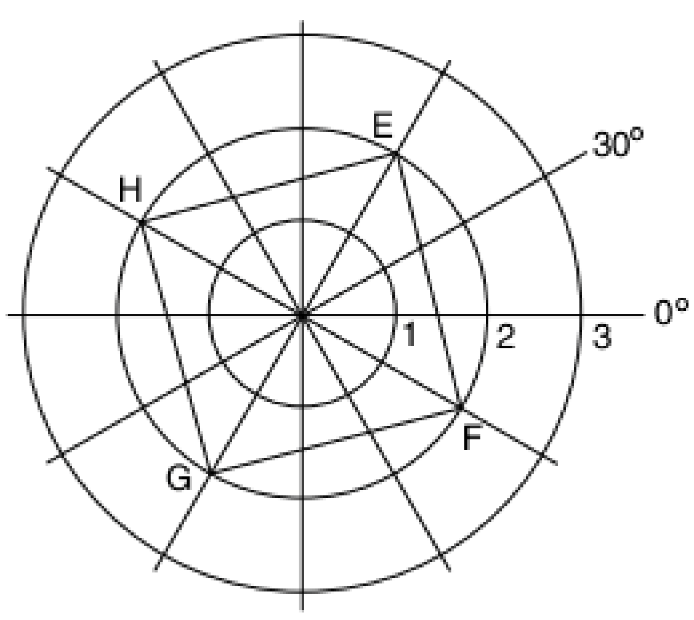
1 Marque na grade anterior os pontos de coordenadas polares: P = (3, 45º), Q = (5, 90º), R = (4, 120º), S = (3, 135º) e T = (6, 300º).

2 Escreva as coordenadas polares de cada vértice dos polígonos a seguir:

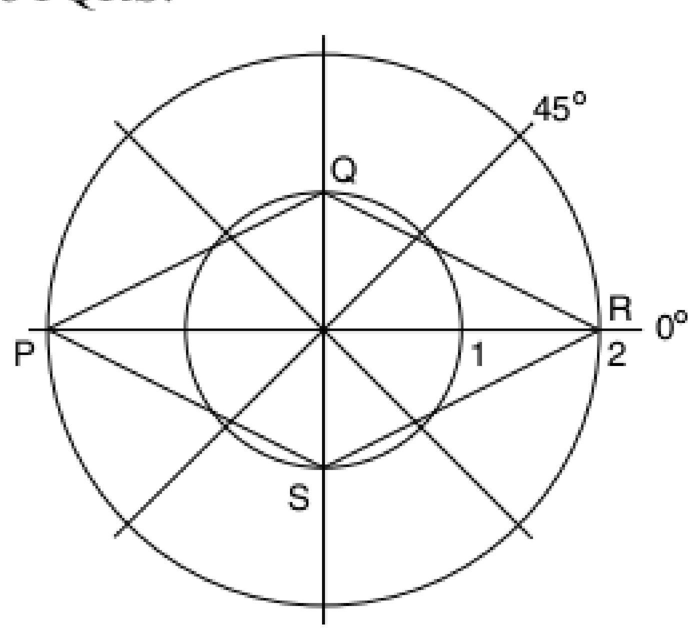
a) Retângulo ABCD.



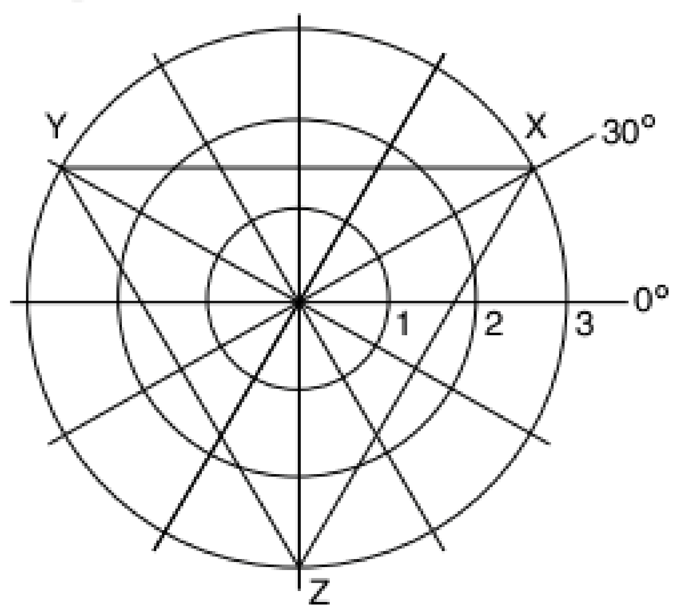
b) Quadrado EFGH.



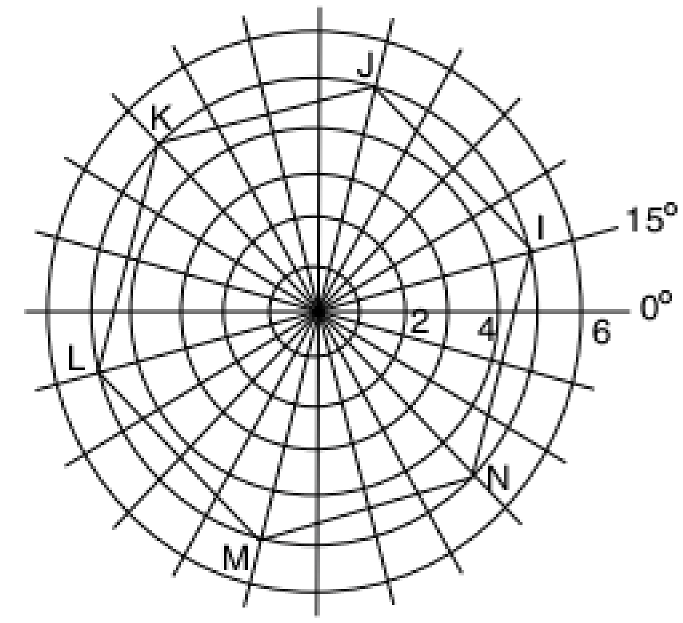
c) Losango PQRS.



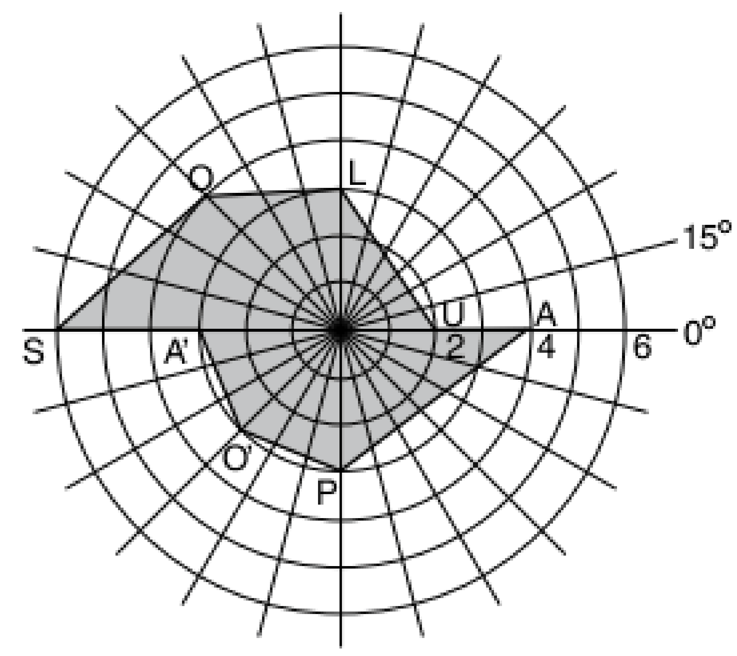
d) Triângulo equilátero XYZ.



e) Hexágono regular IJKLMN.

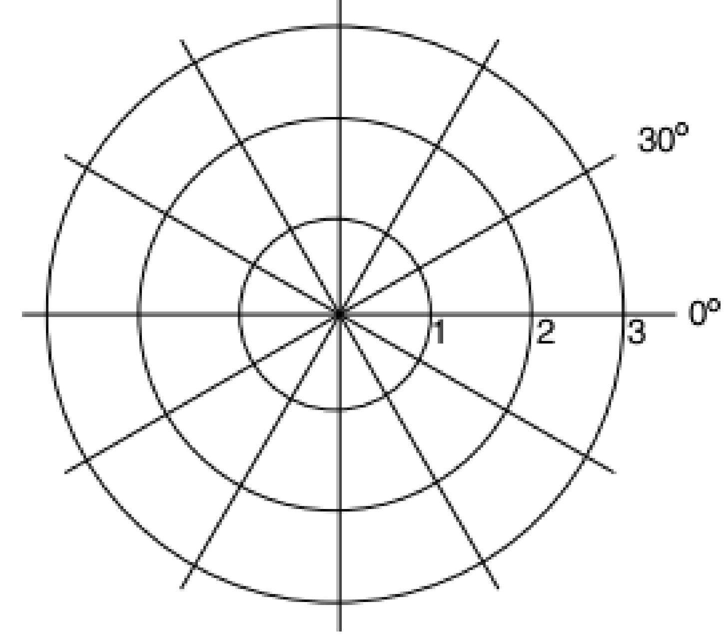


f) O octógono côncavo SA’O’PAULO.

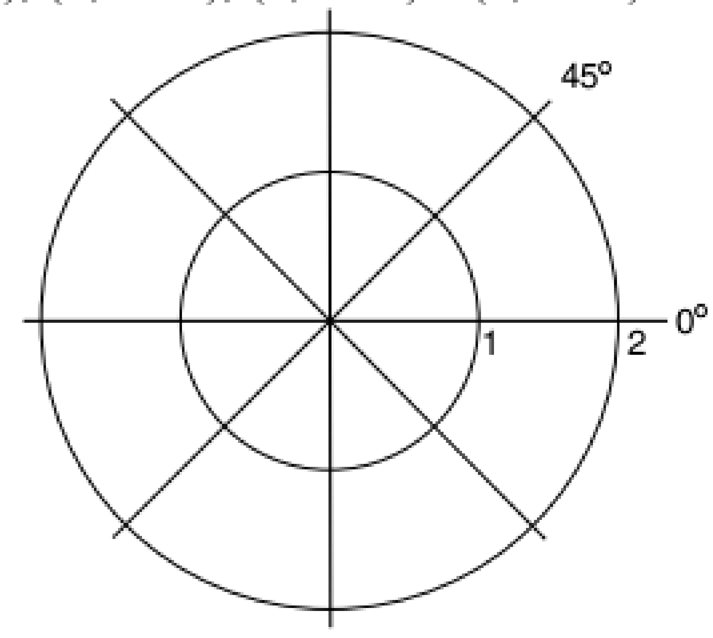


3 Esboce, em cada grade, o polígono cujos vértices são pontos solicitados, em coordenadas polares, e identifique os polígonos de acordo com a nomenclatura geométrica.

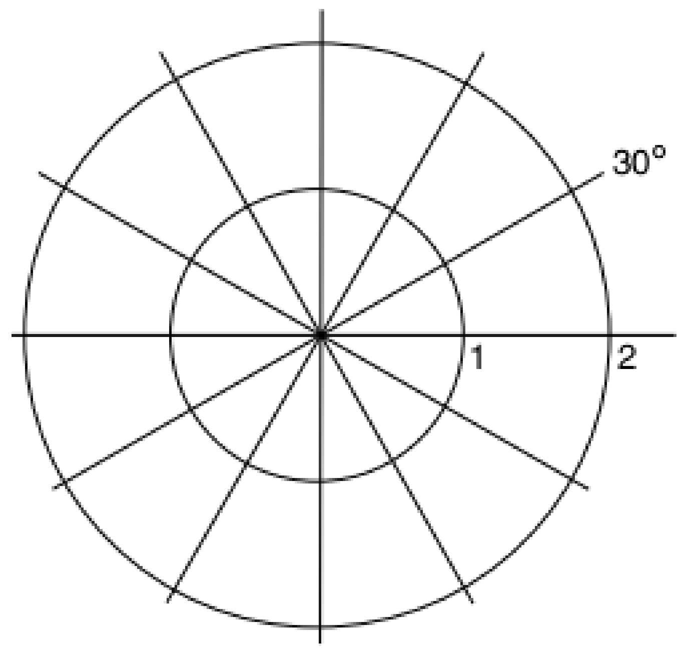
a) (2, 0º), (3, 90º), (2, 180º) e (3, 270º)



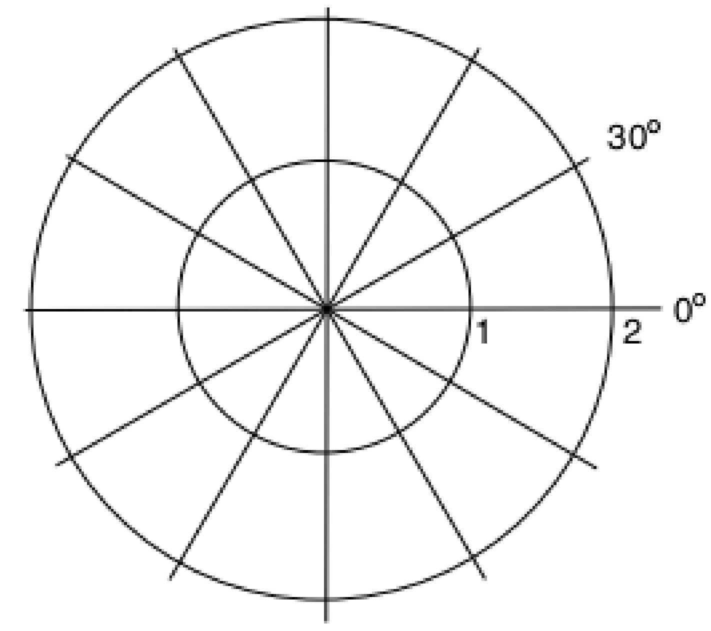
b) (1, 45º), (1, 135º), (1, 225º) e (1, 315º)



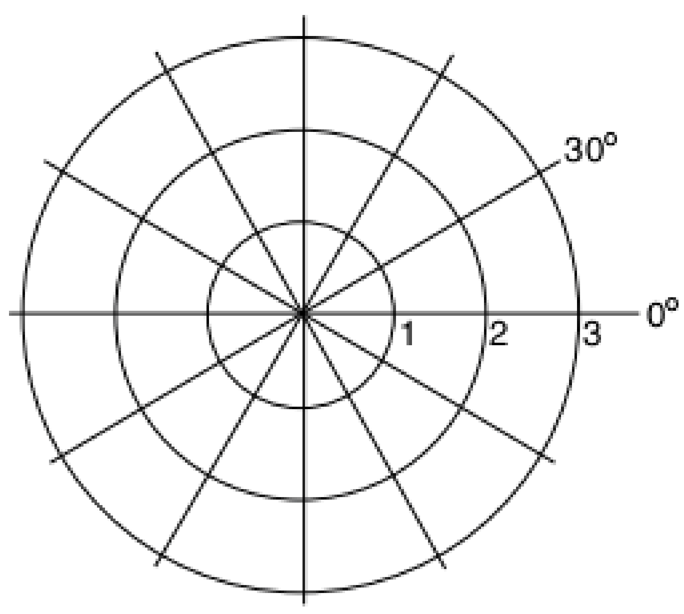
c) (2, 60º), (2, 90º) e (2, 300º)



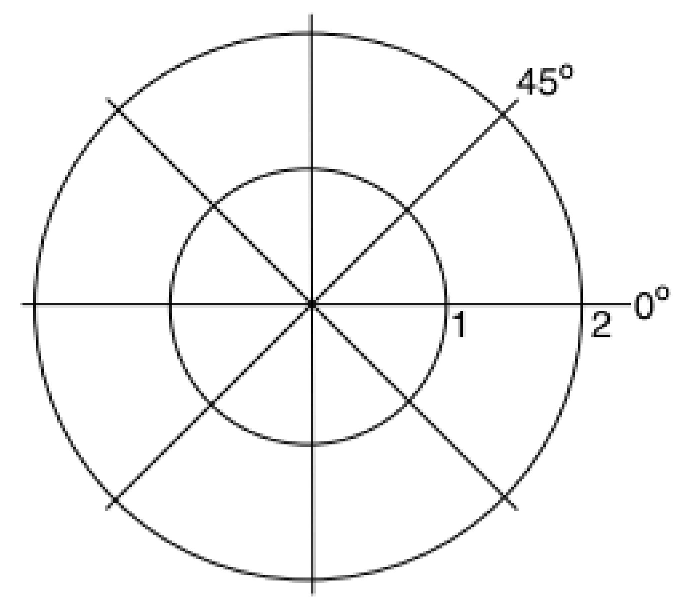
e) (1, 60º), (1, 120º), (1, 240º) e (1, 300º)



d) (2, 60º), (2, 120º), (3, 210º) e (3, 330º)

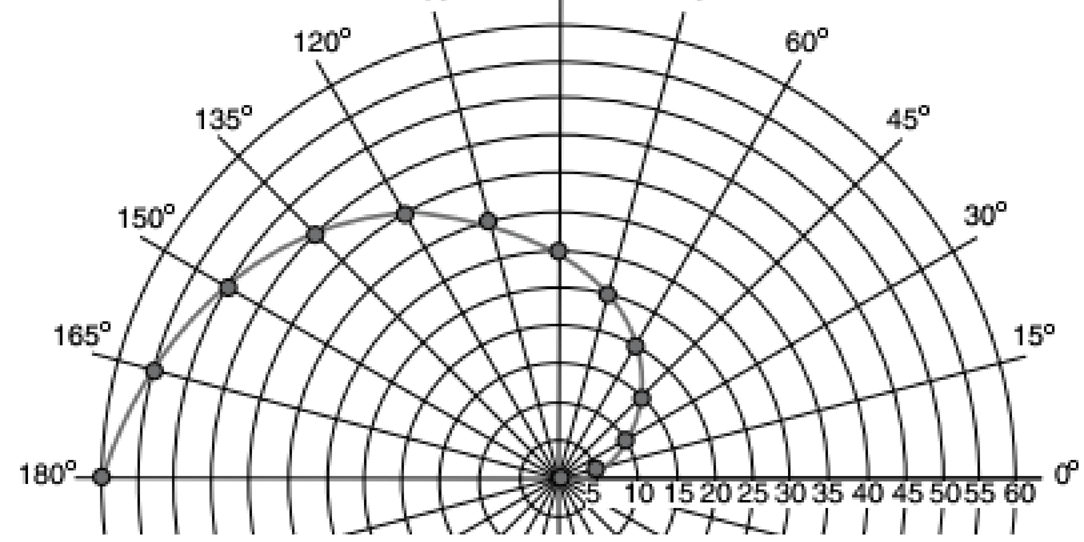


f) (2, 45º), (2, 225º) e (1, 270º)



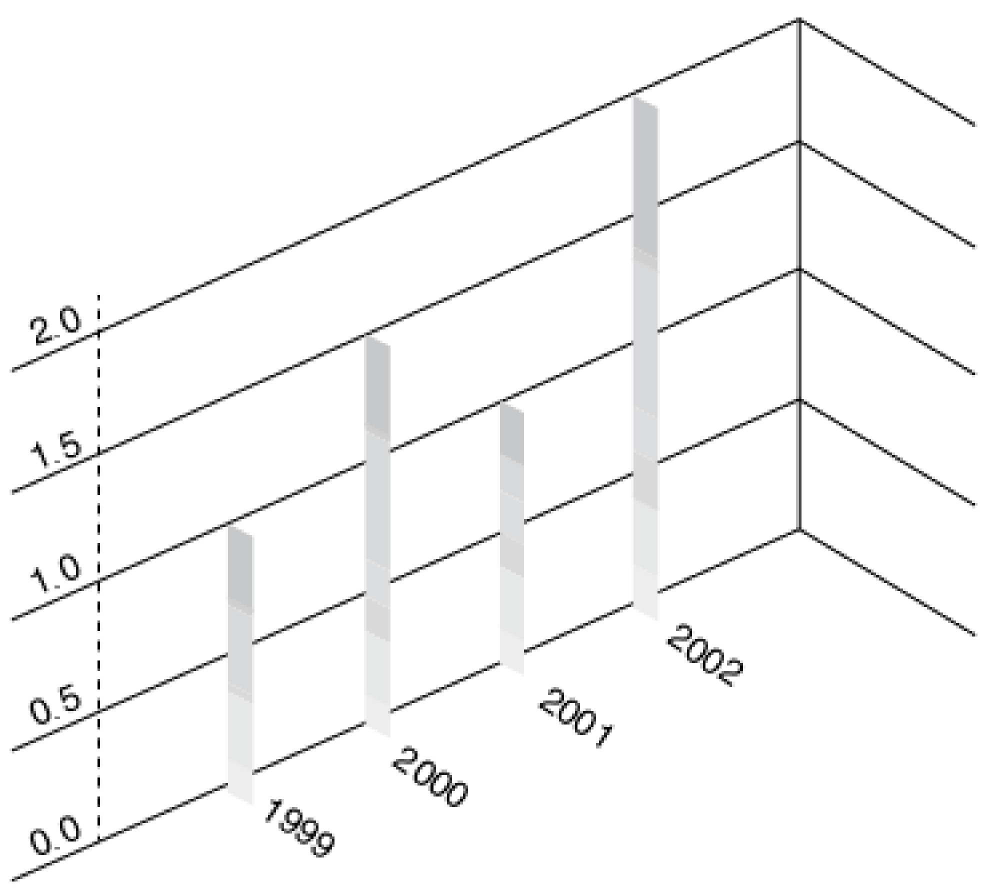
Uma vez estabelecido um sistema de coordenadas geométricas, como o sistema polar, alguns lugares geométricos podem ser definidos por meio de equações cujas variáveis são as coordenadas dos pontos. Esses lugares geométricos são figuras formadas por pontos selecionados de acordo com propriedades interessantes para um determinado estudo. Assim, as duas ciências (Álgebra e Geometria) saem ganhando, uma vez que algumas expressões algébricas, como as equações e inequações, adquirem interpretação geométrica. Em contrapartida, os sistemas de coordenadas permitem que algumas figuras geométricas sejam representadas por equações ou inequações algébricas.

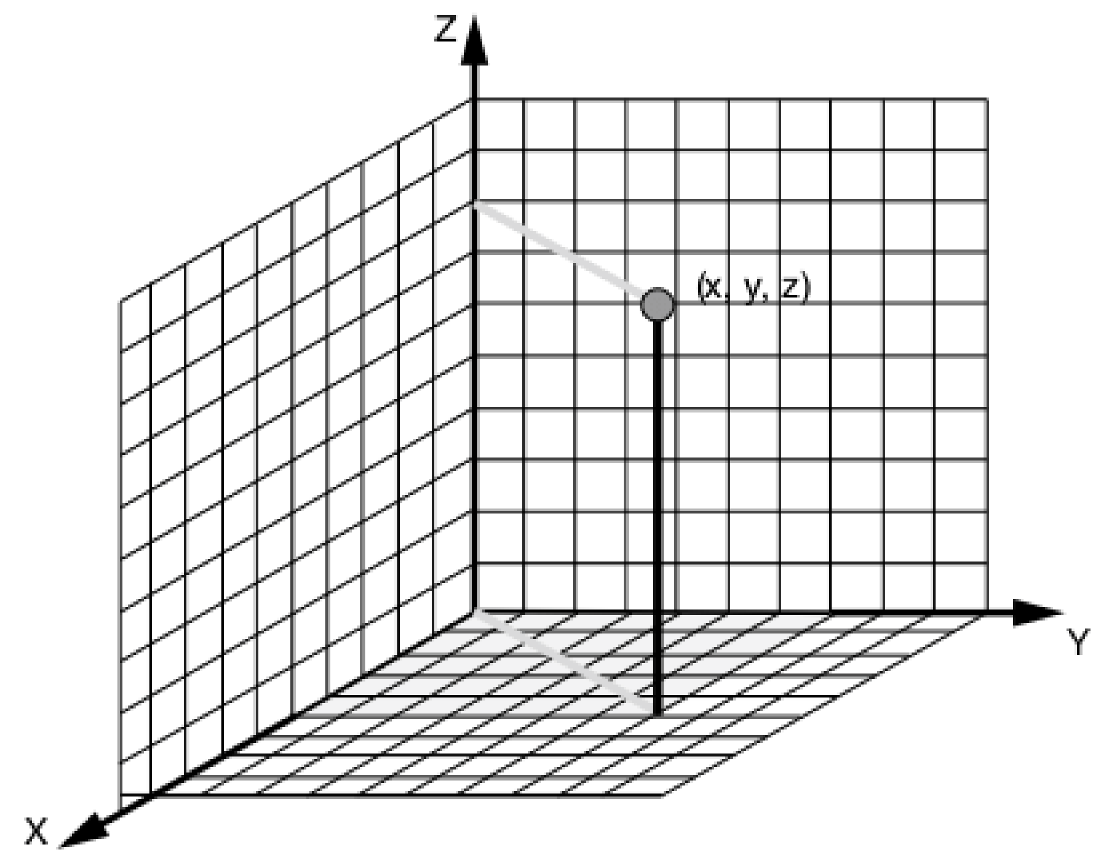
As espirais de Arquimedes, por exemplo, são lugares geométricos determinados pelos pontos de um plano cujas coordenadas polares **r** e **θ** são diretamente proporcionais como, por exemplo, a espiral da figura a seguir, que apresenta uma grade polar na qual estão destacados os pontos cujas coordenadas (**r**, **θ**) satisfazem a equação **θ = 3r**, com **θ** em graus e **r** em milímetros.



Espiral de Arquimedes de equação θ = 3r

Os sistemas cartesianos de coordenadas definem a posição dos pontos de um plano por meio de duas escalas numéricas chamadas de eixo das abscissas e eixo das ordenadas. As abscissas dos pontos são geralmente representadas em uma reta horizontal e as ordenadas em uma reta vertical. Mas há exceções, como as representações em perspectiva, em que os eixos não são sequer perpendiculares:





Sistema cartesiano

A perspectiva pode ser usada como recurso de estilo para os gráficos de barras, também chamados de histogramas (figura 1), mas é absolutamente necessária para a representação de pontos no espaço tridimensional (figura 2) e, nesse caso, há uma terceira escala numérica envolvida, que é chamada de eixo das cotas. Os pontos de coordenadas cartesianas espaciais (**x**, **y**, **z**) têm: abscissa **x**, ordenada **y** e cota **z**.

Os sistemas cartesianos que apresentam dois eixos perpendiculares são chamados de sistemas de coordenadas retangulares ou sistema de coordenadas ortogonais. Nesses sistemas, não é necessário que os eixos estejam na mesma escala ou que interceptem um ao outro no ponto zero de cada um. Afinal, os sistemas cartesianos usados para representação de funções no estudo de outras matérias admitem eixos que não representam escalas métricas, mas escalas de grandezas como o tempo, a velocidade, a pressão, a temperatura etc.

O sistema cartesiano em que ambos os eixos representam escalas métricas de mesma unidade, interceptam-se em suas respectivas origens e são perpendiculares entre si, são chamados de *sistema de coordenadas ortonormais*. O sistema ortonormal é absolutamente necessário para o estudo da Geometria analítica.

O plano cartesiano

O sistema de coordenadas ortonormais define a posição de cada ponto do plano cartesiano usando um único par de números reais **a** e **b**. Esse par deve ser ordenado de forma que: se **a** ≠ **b**, então (**a**, **b**) ≠ (**b**, **a**). Isso significa que o ponto de coordenadas (**a**, **b**) não é o mesmo que o ponto de coordenadas (**b**, **a**), a não ser que os números **a** e **b** sejam iguais.

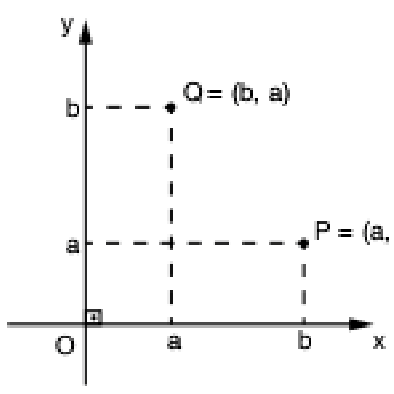
- O primeiro número no par ordenado é a abscissa do ponto e o segundo número é a ordenada do ponto.
- O eixo das abscissas é representado por uma reta horizontal e orientado da esquerda para a direita (→).
- O eixo das ordenadas é representado por uma reta vertical e orientado de baixo para cima (↑).

Como os eixos de um sistema ortonormal interceptam-se na origem de ambos, esse ponto de interseção é chamado de *origem do sistema*, e geralmente é indicado pela letra **O**.

Além disso, tanto no estudo da Geometria analítica quanto das funções algébricas y = f(x), as variáveis **x** e **y** são geralmente usadas para designar valores nos eixos das abscissas e das ordenadas respectivamente. Por isso, esses eixos costumam ser designados pelas siglas Ox e Oy respectivamente.

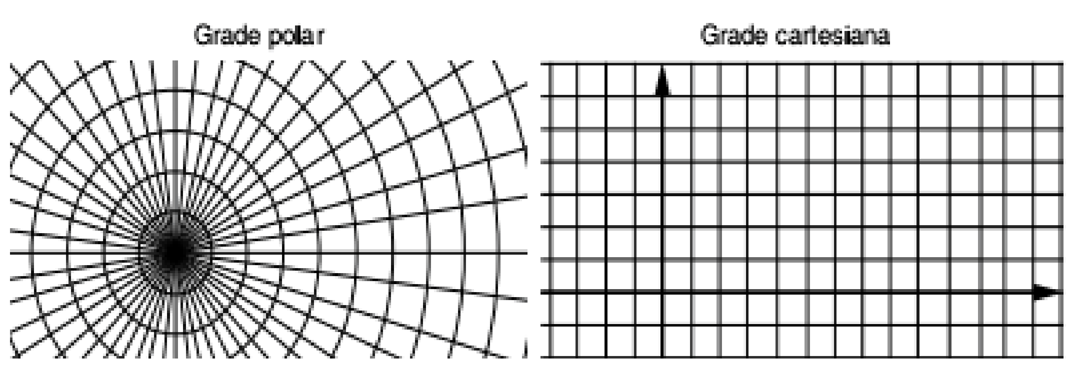
Assim, sendo a < b dois números reais e positivos, temos que os pontos P = (a, b) e Q = (b, a) são tais que:

- a abscissa do ponto P é o número a. ⇔ $(x_P = a)$
- a ordenada do ponto P é o número b. ⇔ $(y_P = b)$
- a abscissa do ponto Q é o número b. ⇔ $(x_Q = b)$
- a ordenada do ponto Q é o número b. ⇔ $(y_Q = a)$



$(\overset{x}{\underbrace{\text{abscissa do ponto}}_{\text{posição horizontal}}}, \overset{y}{\underbrace{\text{ordenada do ponto}}_{\text{posição vertical ou altura do ponto}}})$

Diferente do sistema polar criado na Antiguidade, cuja grade é formada por círculos, o plano cartesiano é um sistema retangular. Sua grade é quadriculada com linhas paralelas aos eixos. As linhas da grade cartesiana ajudam a visualizar os valores das abscissas e ordenadas dos pontos do plano:

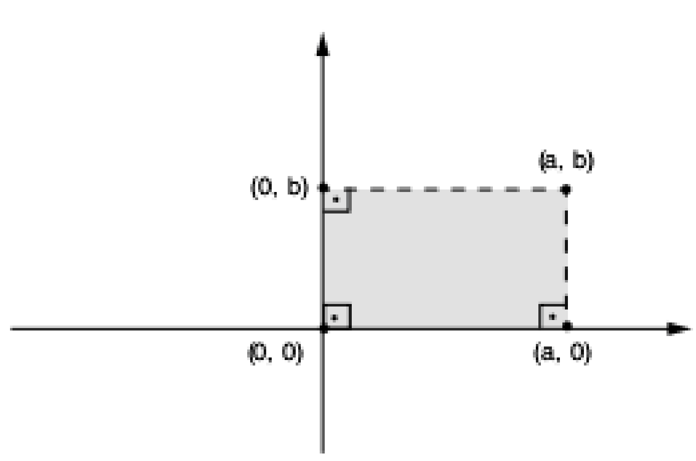


O plano cartesiano também é chamado de sistema de coordenadas retangulares, pois as coordenadas (a, b) de um ponto representam um vértice de um retângulo com lados contidos nos eixos, sempre que a e b são diferentes de zero. Os outros vértices desse retângulo são os pontos de coordenadas: (0, b), (0, a) e (0, 0).

O ponto de coordenadas (0, b) pertence ao eixo das ordenadas (↑), pois tem abscissa zero.

O ponto de coordenadas (a, 0) pertence ao eixo das abscissas (→), pois tem ordenada zero.

O ponto (0, 0) é chamado de origem do sistema de coordenadas, pois indica a origem de ambos os eixos.



Exercícios

4 Esboce um sistema cartesiano de coordenadas, identifique os pontos: A(1, 1), B(–1, 1), C(–1, –1), D(1, –1) e trace o quadrado ABCD.

5 Esboce um sistema cartesiano de coordenadas, identifique os pontos: P(1, 0), P'(–1, 0), Q(0, –1), Q'(0, 1) e trace o quadrado PQP'Q'.

6 Determine a razão entre as áreas dos quadrados obtidos nos exercícios 4 e 5, e determine também a razão entre as medidas de seus lados.

7 Sendo a e b números reais, tais que a > b > 0, considere em um sistema ortonormal de coordenadas cartesianas os quadriláteros **I**, **II**, **III**, **IV** e **V** cujos vértices são dados pelas coordenadas a seguir:

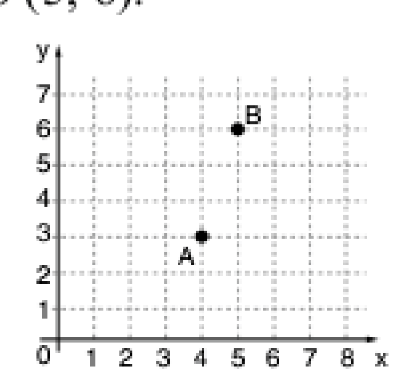
I → (a, b), (−a, b), (−a, −b) e (a, −b)
II → (a, 0), (0, b), (−a, 0) e (0, −b)
III → (a, b), (b, a), (−a, b) e (−b, a)
IV → (a, b), (−b, a), (−a, −b) e (b, −a)
V → (b, b), (−b, b), (a, –b) e (–b, –b)

Com essas informações, classifique cada um dos quadriláteros como: losango, retângulo, quadrado, trapézio isósceles ou trapézio retângulo.

8 Considere os pontos A(1, 2), B(3, 2), C(3, 1), D(2, 1) e E(2, 2) e a figura geométrica formada pelos segmentos de reta AB, BC, CD e DE, todos no primeiro quadrante de um plano cartesiano. Se todos os pontos dessa figura sofrerem uma rotação de 90º em torno da origem (0, 0) no sentido anti-horário, obteremos uma figura similar a uma letra do alfabeto latino. Qual é essa letra?

a) q b) b c) o d) d e) p

9 No plano cartesiano a seguir estão representadas as extremidades do cateto AB de um triângulo retângulo e isósceles ABC. As coordenadas do vértice A são (4, 3) e as do vértice B são (5, 6).

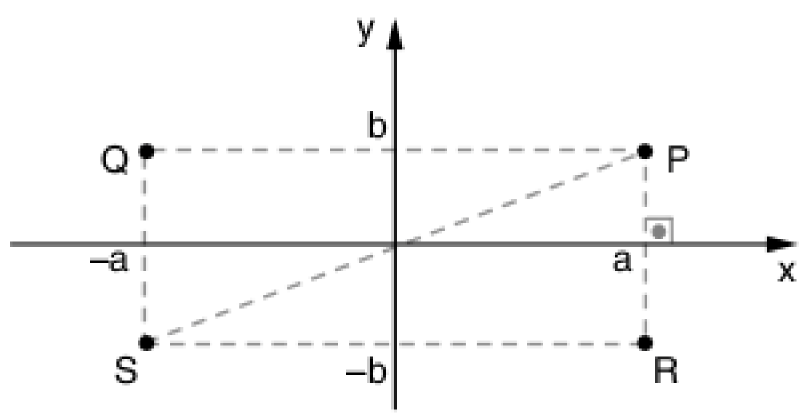


Determine todas as possíveis coordenadas (x, y) do terceiro vértice deste triângulo sabendo que:

a) AB é um dos catetos do triângulo.
b) AB é a hipotenusa do triângulo.

Simetrias no plano cartesiano

O plano cartesiano apresenta diversos tipos de simetria que podem ser úteis tanto na modelagem de um problema geométrico, quanto na análise do comportamento das variáveis de certas funções.



P(a, b) e **Q(–a, b)** são simétricos em relação ao eixo das ordenadas: **Oy**.

P(a, b) e **R(a, –b)** são simétricos em relação ao eixo das abscissas: **Ox**.

P(a, b) e **S(–a, –b)** são simétricos em relação à origem do plano cartesiano: **O**.

Exercícios

10 Determine os valores de m e n reais para os quais os pontos P(m – 1, 2m + 1) e Q(2n, 2 – n) sejam:

a) simétricos em relação ao eixo das abscissas.
b) simétricos em relação ao eixo das ordenadas.
c) simétricos em relação à origem.

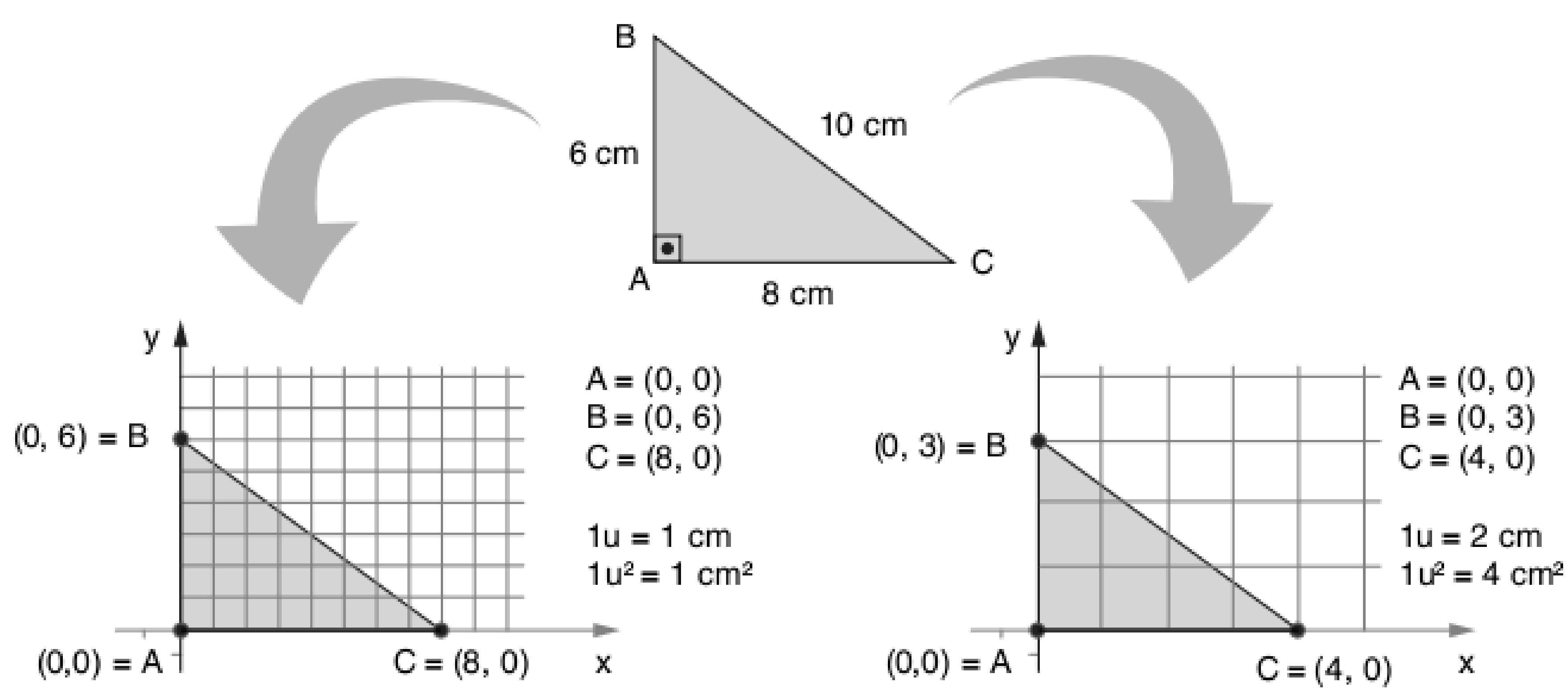
11 Se os pontos A e B são simétricos em relação ao eixo das abscissas, e as coordenadas dos pontos B e C são formadas pelos mesmos números, mas em ordens diferentes, então sabendo que A = (2, –3) pode-se concluir que a distância entre os pontos A e B é igual a:

a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt{5}$
c) $\sqrt{10}$
d) 4
e) 6

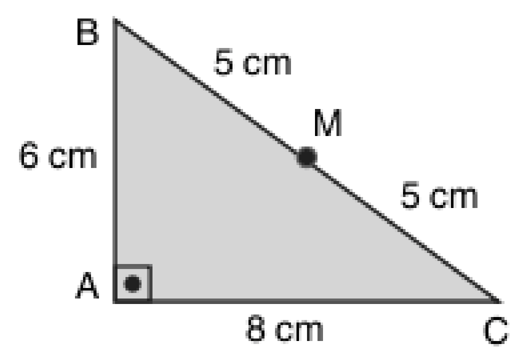
Os sistemas de coordenadas criados para a análise de figuras geométricas podem ser adotados de diversas maneiras. Pode-se decidir qual ponto da figura será a origem do sistema, quais serão as direções e os sentidos dos eixos, e também qual será a unidade métrica (u) do sistema.

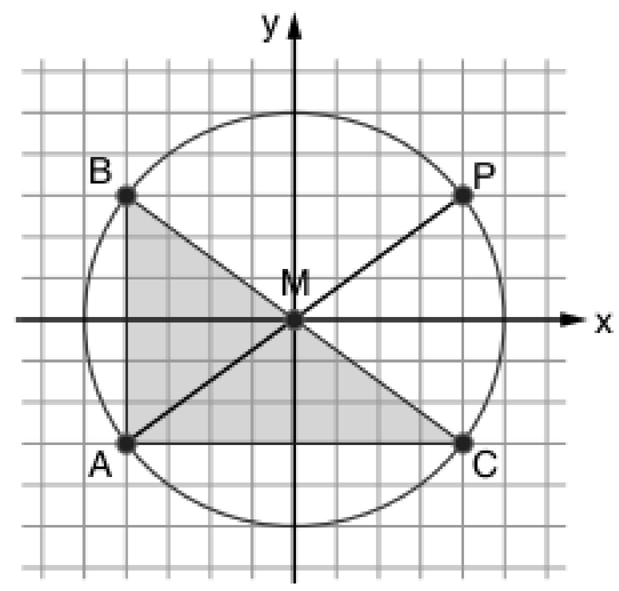
Considere um triângulo retângulo ABC com hipotenusa BC = 10 cm e catetos AB = 8 cm e AC = 6 cm.

Adotando-se um sistema ortonormal de coordenadas com origem no ponto A, de modo que cada semieixo positivo contenha um dos catetos, então, se a unidade cartesiana (**u**) for de 1 cm, as posições dos vértices desse triângulo poderão ser representadas pelas coordenadas A(0, 0), B(0, 6) e C(8, 0). Mas se a unidade cartesiana adotada tiver 2 cm de comprimento (**1 u = 2 cm**), então essas coordenadas serão A(0, 0), B(0, 3) e C(4, 0).



Mas para aproveitar as simetrias do plano cartesiano é necessário adotar uma origem adequada como o ponto médio da hipotenusa do triângulo. Fazendo isso, os vértices B e C ficam simétricos em relação à origem e se, além disso, os eixos coordenados forem paralelos aos catetos, então todos os vértices desse triângulo serão simétricos de alguma forma:





M = (0, 0)
P = (+4, +3)
A = (–4, –3)
B = (–4, +3)
C = (+4, –3)

Observando-se também o ponto P, simétrico de A em relação à origem M, pode-se perceber alguns fatos interessantes sobre os triângulos retângulos, por exemplo:

I. suas áreas são iguais à metade do produto de seus catetos.
II. são inscritíveis em semicircunferências cujo centro é o ponto médio da hipotenusa.
III. suas medianas relativas à hipotenusa têm a metade do comprimento da própria hipotenusa.

Observe também na figura que a hipotenusa BC do triângulo analisado é diagonal do retângulo ABPC e diâmetro de uma circunferência de centro M.

Exercício

12 Responda às seguintes perguntas.

a) Quanto mede a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos vértices estão todos em uma circunferência com 1 metro de raio?
b) Quanto mede o diâmetro da circunferência que passa pelos vértices de um triângulo retângulo cuja hipotenusa tem 2 centímetros de comprimento?
c) Quanto mede a diagonal de um retângulo inscrito em uma circunferência com 10 centímetros de raio?
d) Quanto mede a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo que está inscrito em uma circunferência cujo raio tem 20 metros de comprimento?

Representação algébrica de curvas cartesianas

Cada solução de uma relação – equação ou inequação – entre duas variáveis apresenta-se na forma de par ordenado. Então, essas soluções podem ser interpretadas como pontos no plano cartesiano e quando desenhamos estes pontos obtemos uma curva.

Relação **R** entre x e y
↓
Soluções: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$ ⟶ Pontos no plano cartesiano
↑
Curva representativa da relação **R**

Qualquer conjunto de pontos do plano cartesiano é uma curva cartesiana e cada curva cartesiana é a representação gráfica do conjunto-solução ou conjunto-verdade de alguma relação entre duas variáveis.

As curvas representativas das relações:

$(R): \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$ e (S): $|x| + |y| \le$, por exemplo, são formadas pelos pontos dos quadrados desenhados, respectivamente, nos exercícios 1 e 2 deste capítulo.

Propriedade I – Um ponto pertence a uma curva se, e somente se quando as variáveis da relação são substituídas pelas coordenadas do ponto, obtém-se uma sentença verdadeira.

Seja, por exemplo, λ a curva de equação $x^2 - x \cdot y = 4$, então o ponto $(4, 3) \in \lambda$, pois: $4^2 - 4 \cdot 3 = 4$ é uma sentença verdadeira, e o ponto $(3, 2) \notin \lambda$, pois: $3^2 - 3 \cdot 2 = 4$ é uma sentença falsa.

Exercício

13 Verifique quais dos pontos O(0, 0), P(1, 0), P'(–1, 0), Q(0, 1), A(1, 1), B(–2, 3), C(3, –4) e D(5, 6) pertencem a cada uma das curvas a seguir:

a) Reta $y = x + 1$
b) Parábola $y = x^2 - 1$
c) Circunferência $x^2 + y^2 = 25$
d) Círculo $x^2 + y^2 \leq 25$

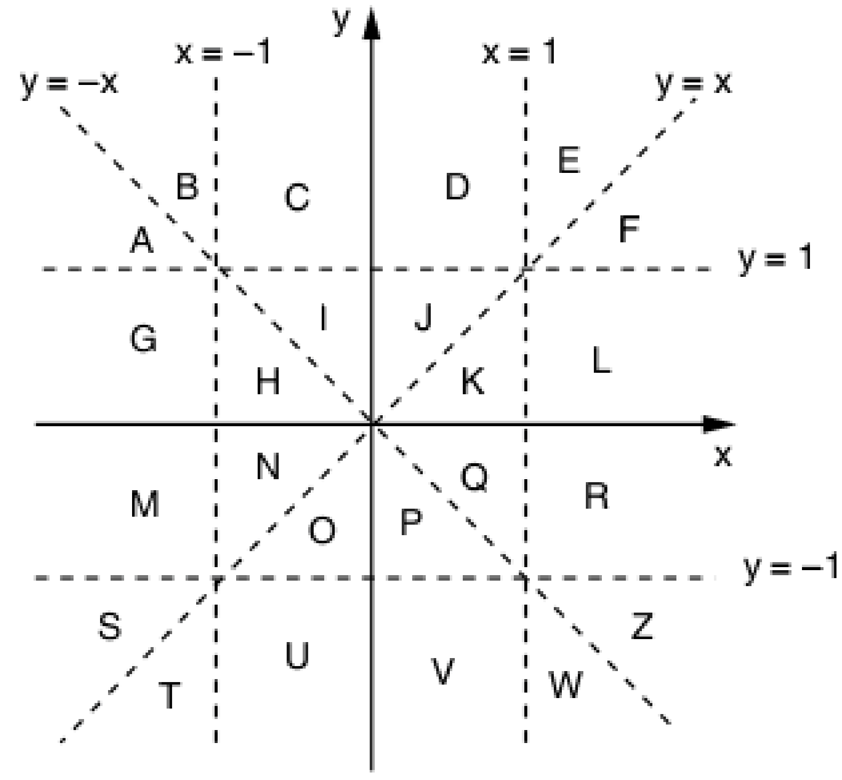
Propriedade II – Se um ponto pertence a duas ou mais curvas distintas, então suas coordenadas satisfazem as relações algébricas de cada uma dessas curvas. Assim, para determinar as coordenadas dos pontos de interseção de duas curvas deve-se resolver o sistema formado pelas relações algébricas das duas curvas.

Exercícios

14 Determine os pontos de interseção da reta $x + y = 5$ com as seguintes curvas:

a) reta $y = x + 1$
b) parábola $y = x^2 - 1$
c) circunferência $x^2 + y^2 = 25$
d) hipérbole $x \cdot y = 4$

15 Considere as regiões de A a Z delimitadas, no plano cartesiano, pelos eixos coordenados e as retas de equações: $y = x$, $y = -x$, $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$ e $y = -1$, conforme a figura.
Sendo a e b números reais tais que $0 < a < 1$ e $b < -2$, determine a região em que estão situados os pontos cujas coordenadas são:

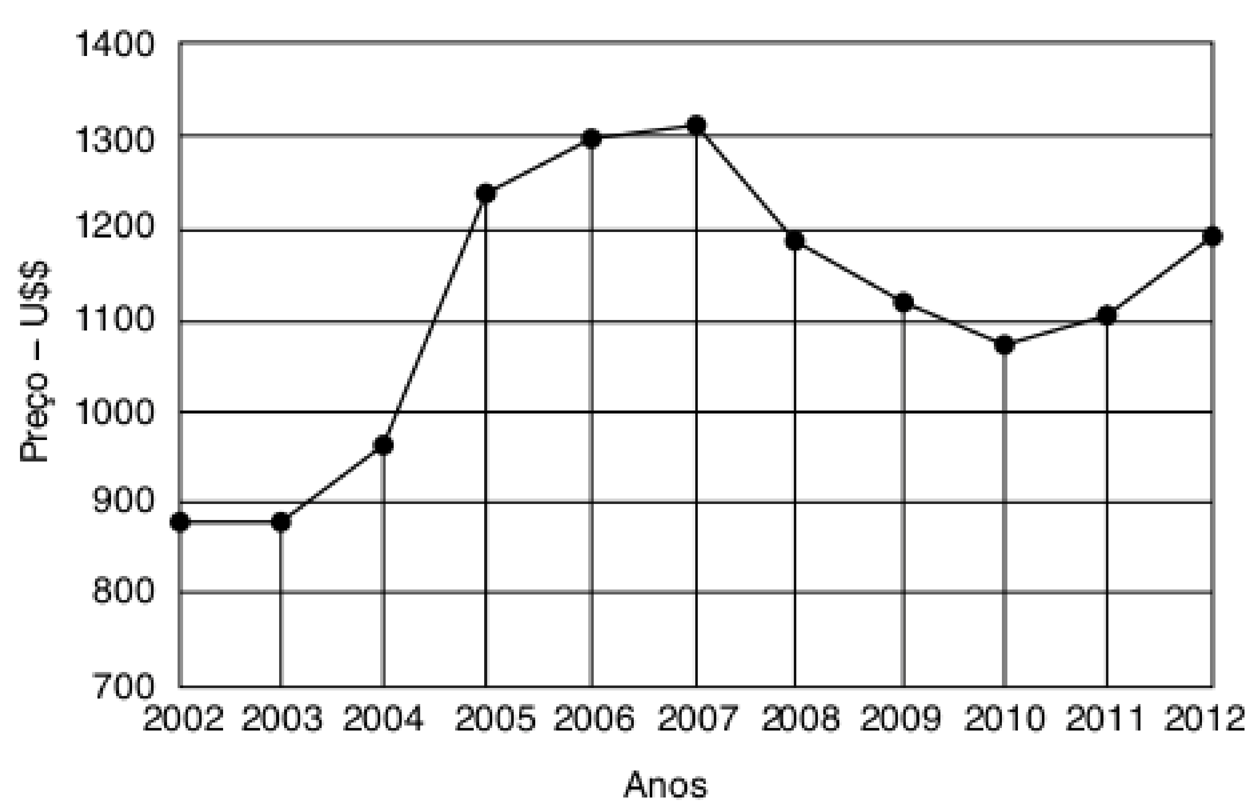


a) (a, b)
b) (b, a)
c) $(a, -b)$
d) $(b, -a)$
e) $(-a, -b)$
f) $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$
g) $(a - b, a + b)$
h) $(b^2, a - 1)$

Interpretação gráfica

No estudo das funções contínuas, o sistema cartesiano de coordenadas permite a visualização do comportamento simultâneo das variáveis de uma ou mais funções, e para esse tipo de estudo não é necessário que os eixos estejam na mesma escala, nem que se interceptem no ponto de coordenadas (0, 0).

Veja, por exemplo, o gráfico a seguir que apresenta a evolução do preço de uma determinada mercadoria em um período de dez anos. Nele, o eixo das abscissas é uma escala de tempo, em anos, que vai de 2002 até 2012, e o eixo das ordenadas é uma escala de preço, em dólares, que vai de 700 a 1.400. Sendo assim, os eixos coordenados interceptam-se no ponto de coordenadas (2002, 700), que não é a origem de eixo algum.

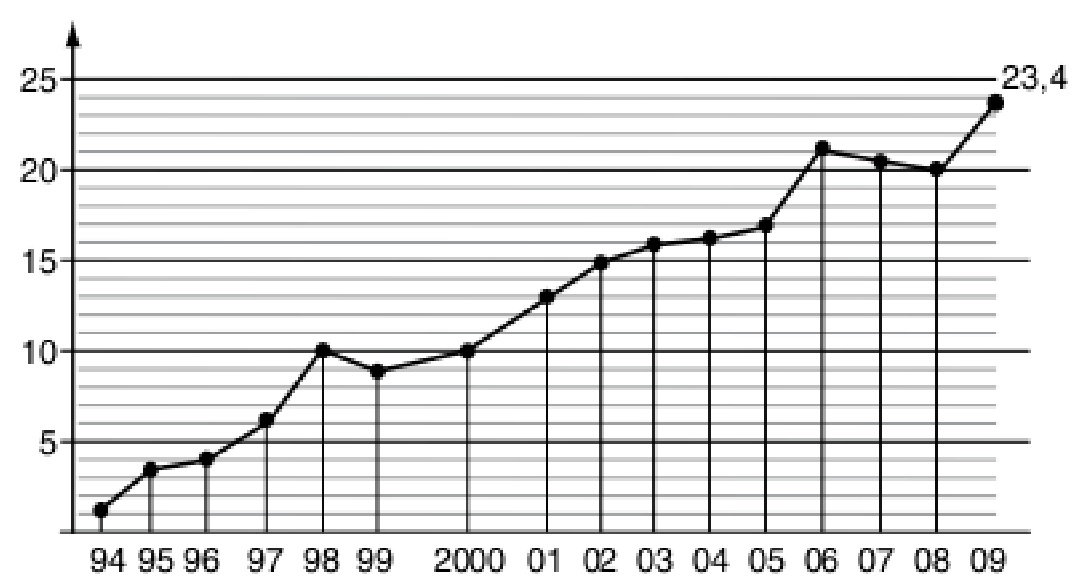


Nesse gráfico, pode-se observar que de 2002 para 2003, o preço da mercadoria manteve-se praticamente constante em um valor pouco abaixo de 900 dólares e, a partir de 2003, começou a crescer até ultrapassar a marca de 1.300 dólares em 2007, sendo que o maior aumento registrado em um ano, nesse período, foi de 2004 para 2005. Depois disso, o preço dessa mercadoria esteve em queda até 2010, quando ficou abaixo de 1.100 dólares, e voltou a crescer nos dois últimos anos.

A interpretação de gráficos como esse é uma competência bastante solicitada em praticamente todas as provas aplicadas para a seleção dos candidatos que ingressarão nas universidades nacionais. As questões que envolvem esse assunto apresentam diversos níveis de dificuldade, e estão presentes tanto nas provas de Matemática, quanto nas provas de outras disciplinas como Física, Química, Biologia e Geografia. Os exercícios a seguir foram propostos para que essa habilidade seja adquirida e praticada.

Exercícios

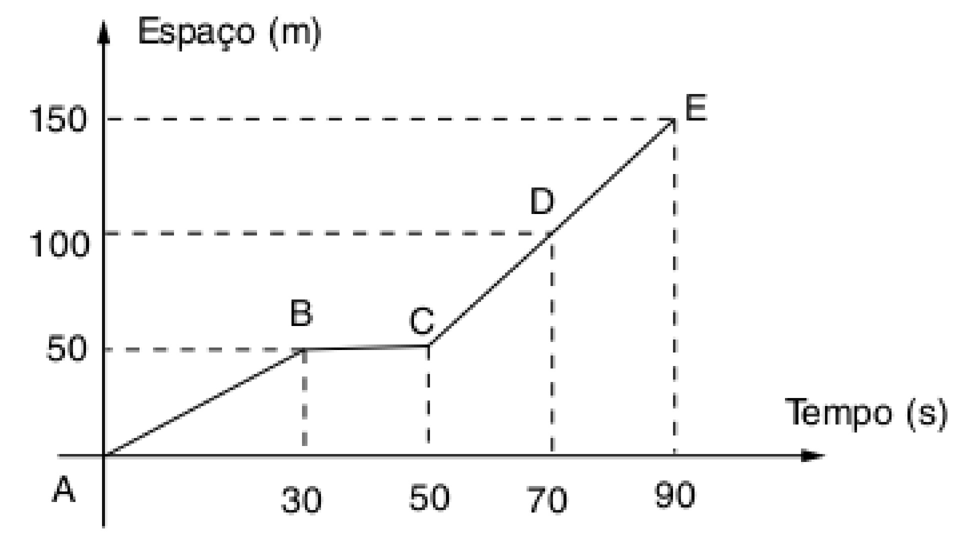
16 O gráfico a seguir mostra a evolução do "calote" no Brasil desde o início do ano de 1994. Nesse gráfico, o eixo das ordenadas apresenta o número de cheques devolvidos para cada mil compensados entre janeiro e maio de cada ano.



Sobre o gráfico, responda às seguintes perguntas.

a) Quantos cheques foram devolvidos, para cada mil cheques compensados, no ano de 2008?
b) Em quais anos foram devolvidos 10 cheques para cada mil compensados?
c) Em que ano o "calote" brasileiro ultrapassou a marca de 20 cheques devolvidos para cada mil compensados?
d) Em qual período, apresentado pelo gráfico, o "calote" brasileiro manteve-se crescente por mais tempo?
e) Em quais períodos, apresentados pelo gráfico, o "calote" brasileiro registrou queda?
f) Supondo que dois bilhões de cheques foram compensados em 2002, determine a quantidade de cheques que foram devolvidos naquele ano?

17 João saiu de casa para ir caminhando até a padaria. O gráfico a seguir mostra, em um sistema cartesiano, o espaço percorrido, em metros, por João desde o momento em que saiu de casa até o momento em que chegou à padaria, associado ao tempo de caminhada em segundos. O ponto **A** representa a origem do sistema cartesiano.



Assinale verdadeiro (V) ou falso (F).

a) ☐ O trecho AB do gráfico representa que nos primeiros 30 segundos de caminhada, João subiu uma ladeira de 50 metros de comprimento.

b) ☐ O trecho AB do gráfico representa que nos primeiros 30 segundos de caminhada, João subiu uma ladeira de 50 metros de altura.

c) ☐ O trecho BC do gráfico representa que, durante 20 segundos, João percorreu uma trajetória plana.

d) ☐ O trecho BC do gráfico representa que João parou de caminhar por 20 segundos.

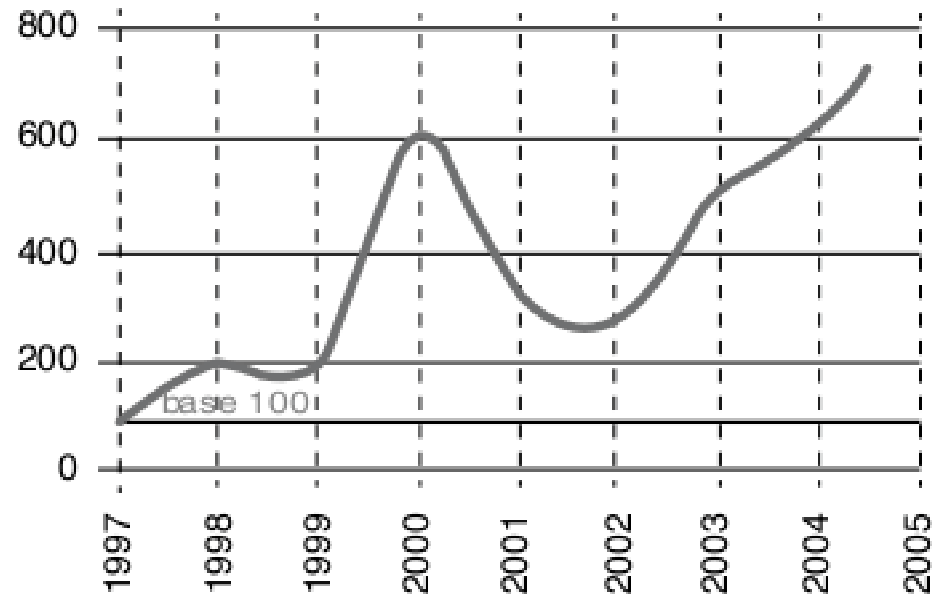
e) ☐ O ponto D do gráfico representa que, 70 segundos após o momento em que saiu de casa, João havia caminhado 100 metros.

f) ☐ O trecho CD do gráfico representa que João andou 100 metros em 20 segundos.

g) ☐ O trecho CE do gráfico representa que João andou 100 metros em 40 segundos.

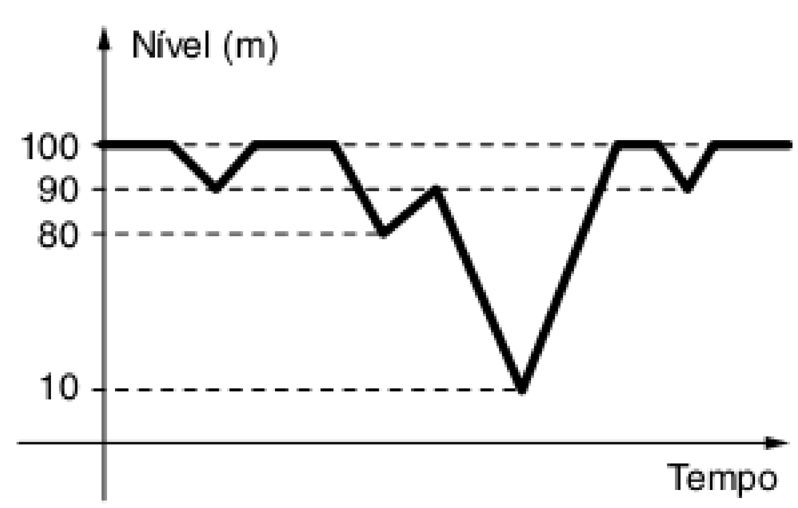
h) ☐ A diferença entre as inclinações dos trechos CE e AB do gráfico indicam que, nos últimos 30 segundos de seu passeio, João caminhou mais rápido que nos primeiros 30 segundos.

18 O gráfico a seguir mostra a valorização de uma obra de arte em pontos percentuais no período de 1997 a 2005.



Analisando o gráfico, podemos afirmar que a maior valorização no período de 1 ano aconteceu:
a) de 2004 para 2005.
b) de 2003 para 2004.
c) de 2002 para 2003.
d) de 1999 para 2000.
e) de 1997 para 1998.

19 **UFPE** No gráfico a seguir temos o nível da água armazenada em uma barragem, ao longo de três anos.



O nível de 40 m foi atingido quantas vezes nesse período?
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

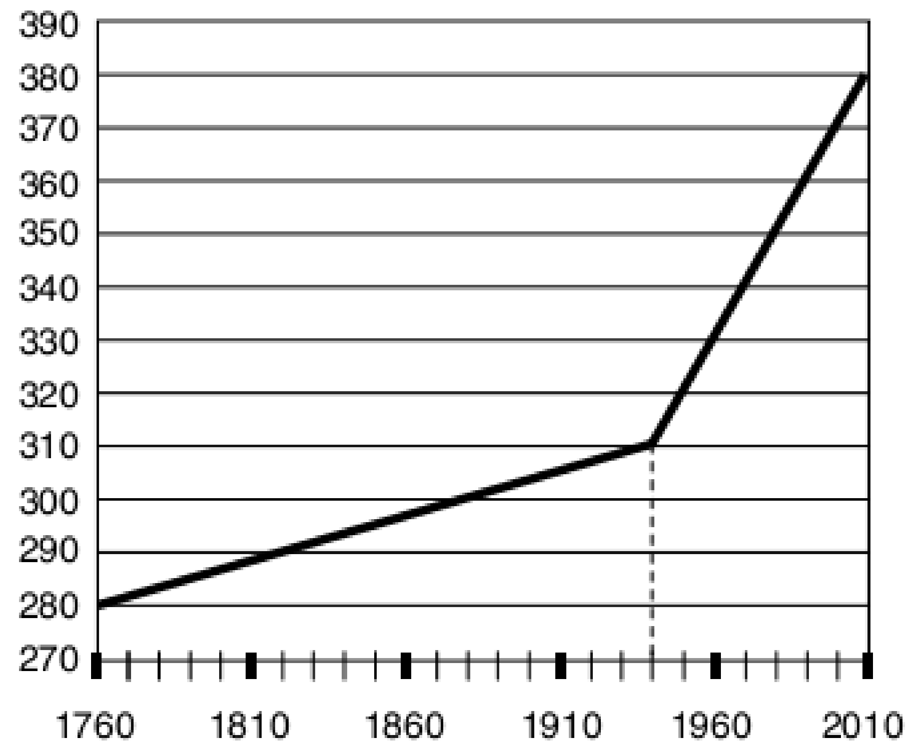
20 **Enem** O tempo que um ônibus gasta para ir do ponto inicial ao ponto final de uma linha varia, durante o dia, conforme as condições do trânsito, demorando mais nos horários de maior movimento. A empresa que opera essa linha forneceu, no gráfico a seguir, o tempo médio de duração da viagem conforme o horário de saída do ponto inicial, no período da manhã.

De acordo com as informações do gráfico, um passageiro que necessita chegar até as 10h30min ao ponto final dessa linha, deve tomar o ônibus no ponto inicial, no máximo, até as:
a) 9h20min
b) 9h30min
c) 9h00min
d) 8h30min
e) 8h50min

21 **Enem** João e Antônio utilizam os ônibus da linha mencionada na questão anterior para ir trabalhar, no período considerado no gráfico, nas seguintes condições:
- trabalham vinte dias por mês;
- João viaja sempre no horário em que o ônibus faz o trajeto no menor tempo;
- Antônio viaja sempre no horário em que o ônibus faz o trajeto no maior tempo;
- na volta do trabalho, ambos fazem o trajeto no mesmo tempo de percurso.

Considerando-se a diferença de tempo de percurso, Antônio gasta, por mês, em média:
a) 05 horas a mais que João.
b) 10 horas a mais que João.
c) 20 horas a mais que João.
d) 40 horas a mais que João.
e) 60 horas a mais que João.

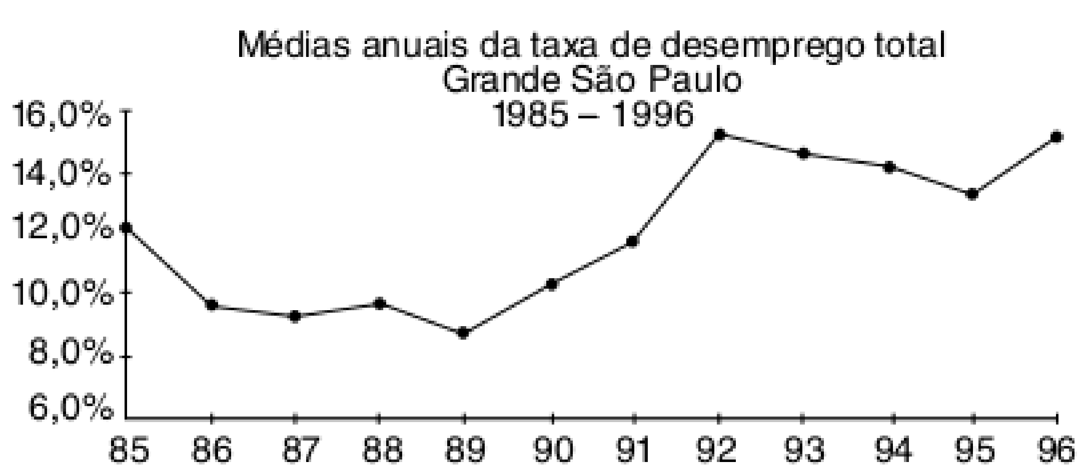
22 O gráfico a seguir apresenta a concentração de gás carbônico na atmosfera em ppm (partes por milhão) desde 1760 até hoje.



Com base nas informações contidas no gráfico, responda às seguintes perguntas.

a) Qual era a concentração de CO_2 na atmosfera em 1820?
b) Em que década, do século XIX, a concentração de CO_2 na atmosfera atingiu a marca da 300 ppm?
c) Quanto aumentou a concentração de CO_2 na atmosfera no período de 1760 a 1940?
d) Qual era o valor da taxa anual do aumento da concentração de CO_2 na atmosfera neste período?
(A unidade desta taxa é ppm/ano e para encontrá-la, basta dividir o aumento absoluto da concentração, encontrado no item c, pelo período considerado).
e) Segundo as informações desse gráfico, qual é o valor da taxa anual de aumento da concentração de CO_2 na atmosfera, na atualidade?

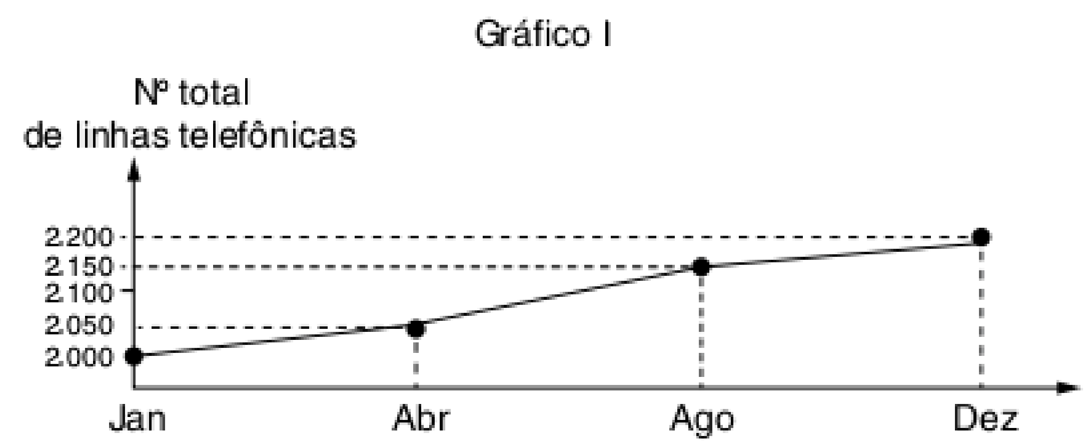
23 **Enem** Um estudo sobre o problema do desemprego na Grande São Paulo, no período 1985-1996, realizado pelo Seade-Dieese, apresentou o seguinte gráfico sobre a taxa de desemprego.

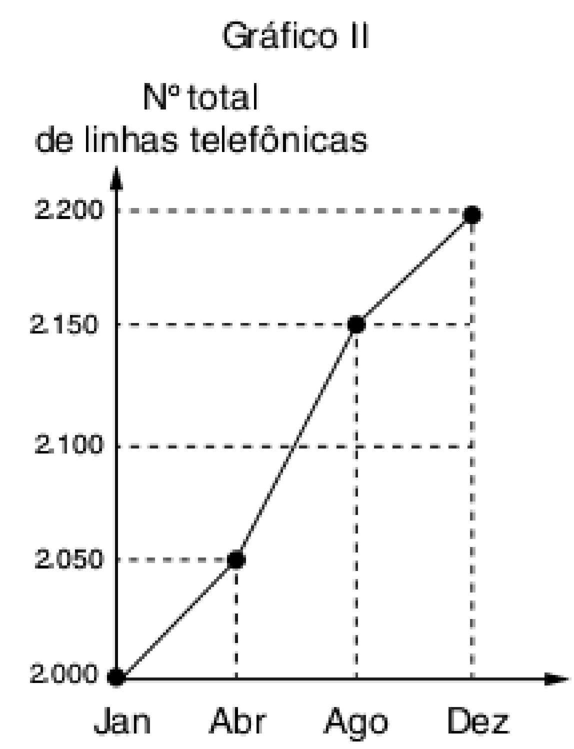


Pela análise do gráfico, é correto afirmar que, no período considerado:

a) a maior taxa de desemprego foi de 14%.
b) a taxa de desemprego no ano de 1995 foi a menor do período.
c) a partir de 1992, a taxa de desemprego foi decrescente.
d) no período 1985-1996, a taxa de desemprego esteve entre 8% e 16%.
e) a taxa de desemprego foi crescente no período compreendido entre 1988 e 1991.

24 **Enem** Para convencer a população local da ineficiência da Companhia Telefônica Vilatel na expansão da oferta de linhas, um político publicou no jornal local o gráfico I, representado a seguir. A Companhia Vilatel respondeu publicando dias depois o gráfico II, onde pretende justificar um grande aumento na oferta de linhas. O fato é que, no período considerado, foram instaladas, efetivamente, 200 novas linhas telefônicas.

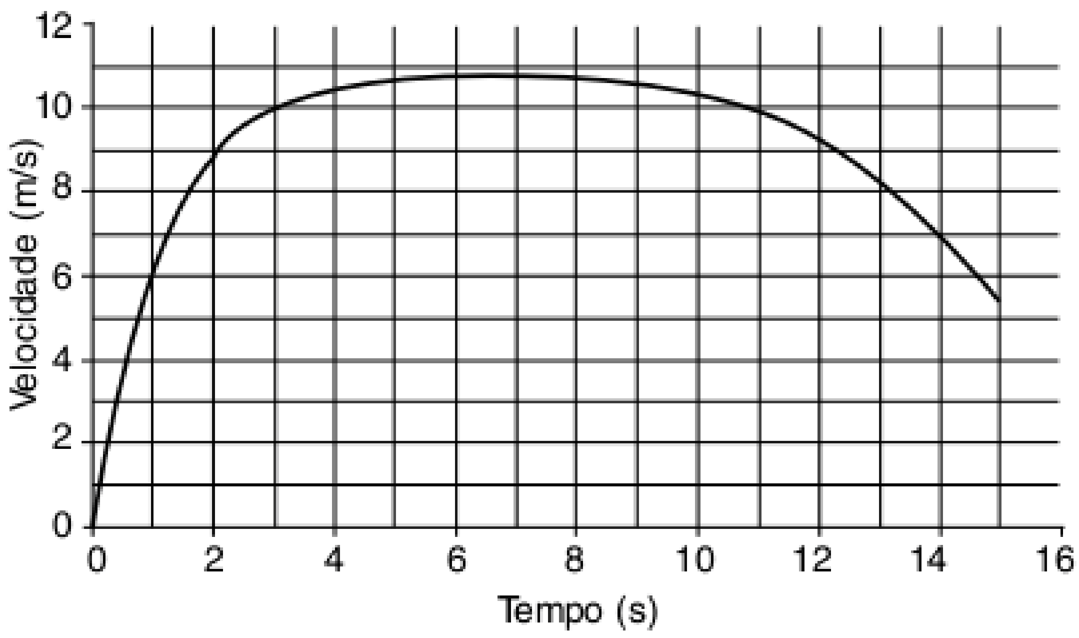




Analisando os gráficos, pode-se concluir que:

a) o gráfico II representa um crescimento real maior do que o do gráfico I.
b) o gráfico I apresenta o crescimento real, sendo o II incorreto.
c) o gráfico II apresenta o crescimento real, sendo o gráfico I incorreto.
d) a aparente diferença de crescimento nos dois gráficos decorre da escolha das diferentes escalas.
e) os dois gráficos são incomparáveis, pois usam escalas diferentes.

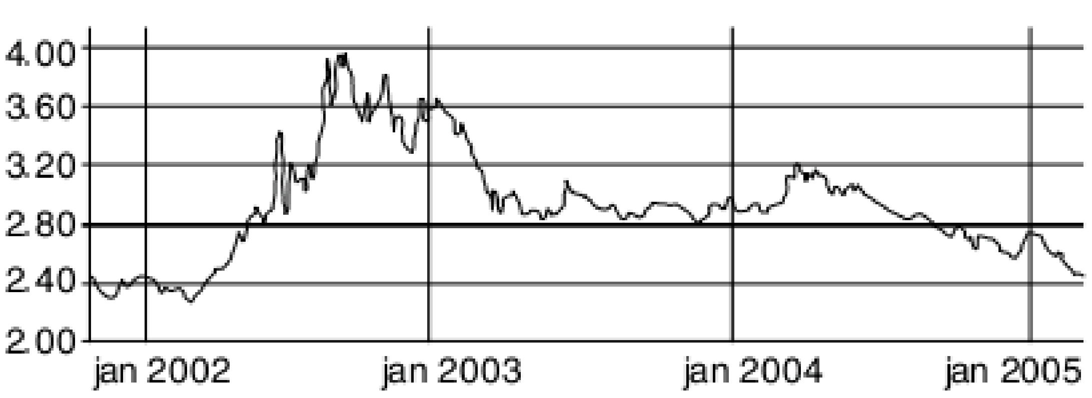
25 **Enem** Em uma prova de 100 m rasos, o desempenho típico de um corredor padrão é representado pelo gráfico a seguir:



Baseado no gráfico, em que intervalo de tempo a velocidade do corredor é aproximadamente constante?

a) Entre 0 e 1 segundo.
b) Entre 1 e 5 segundos.
c) Entre 5 e 8 segundos.
d) Entre 8 e 11 segundos.
e) Entre 12 e 15 segundos.

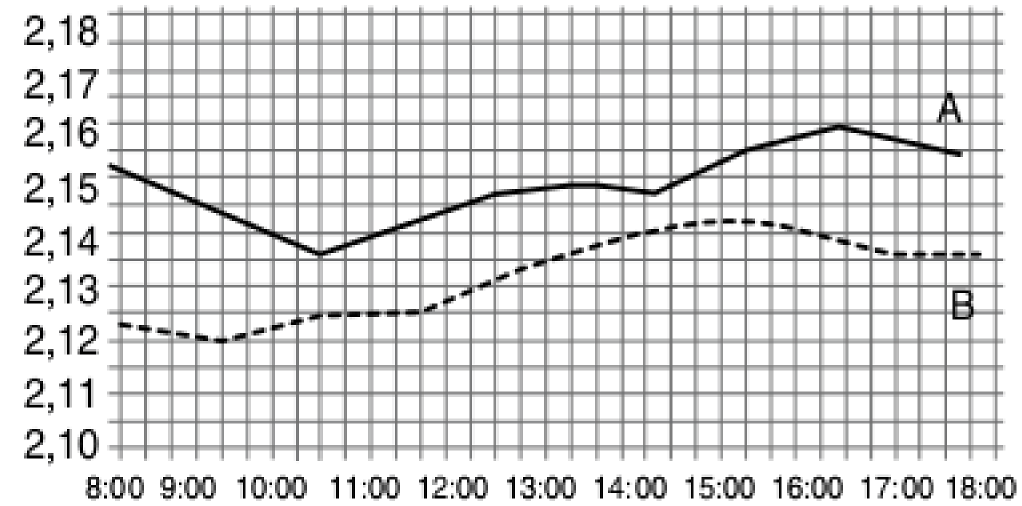
26 **Enem** No gráfico abaixo, mostra-se como variou o valor do dólar, em relação ao real, entre o final de 2001 e o início de 2005. Por exemplo, em janeiro de 2002, um dólar valia cerca de R$ 2,40.



Durante esse período, a época em que o real esteve mais desvalorizado em relação ao dólar foi no:

a) final de 2001
b) final de 2002
c) início de 2003
d) final de 2004
e) início de 2005

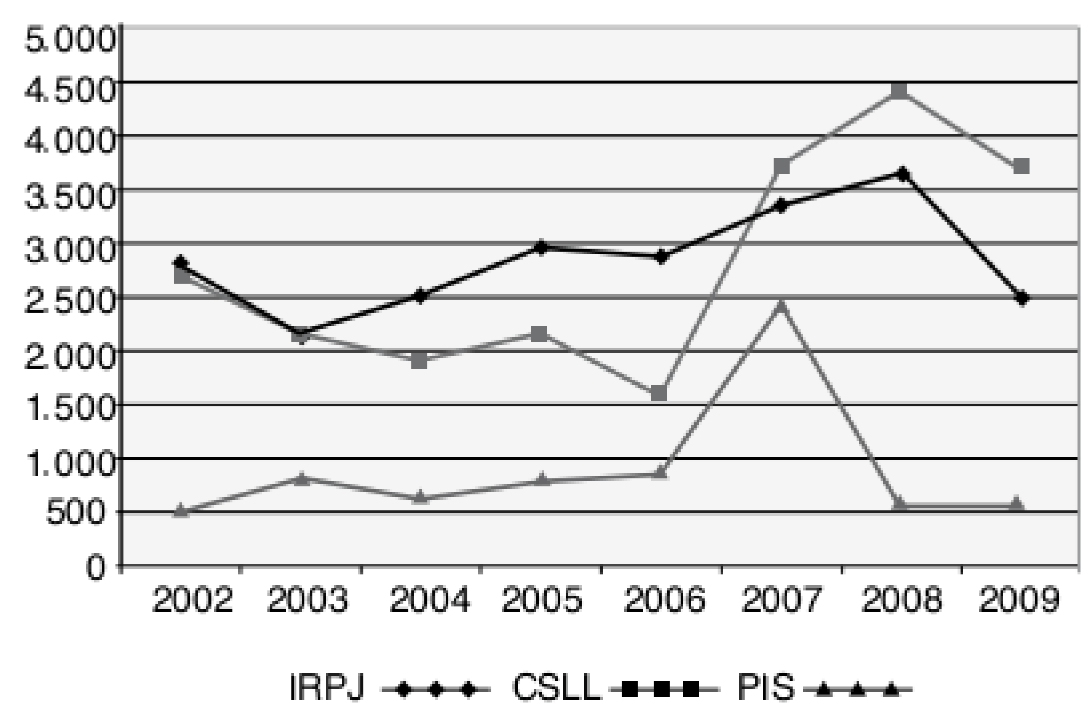
27 O gráfico a seguir mostra a variação, em reais, dos valores das ações de duas empresas **A** e **B** na Bovespa, durante o período de um único dia.



Com base no gráfico podemos afirmar que o melhor momento para um investidor vender ações da empresa **B** para comprar ações da empresa **A** ocorreu entre:

a) 9 e 10 horas
b) 10 e 11 horas
c) 11 e 12 horas
d) 13 e 14 horas
e) 14 e 15 horas

28 O gráfico a seguir apresenta, em milhões de reais, os valores totais arrecadados pela União, no período de 2002 a 2009, devido à cobrança de três impostos distintos: o IRPJ (Imposto de Renda sobre Pessoa Jurídica), o CSLL (Contribuição Social sobre o Lucro Líquido) que também incide sobre pessoas jurídicas e o PIS (Programa de Integração Social) que cobra uma taxa do faturamento bruto das empresas.

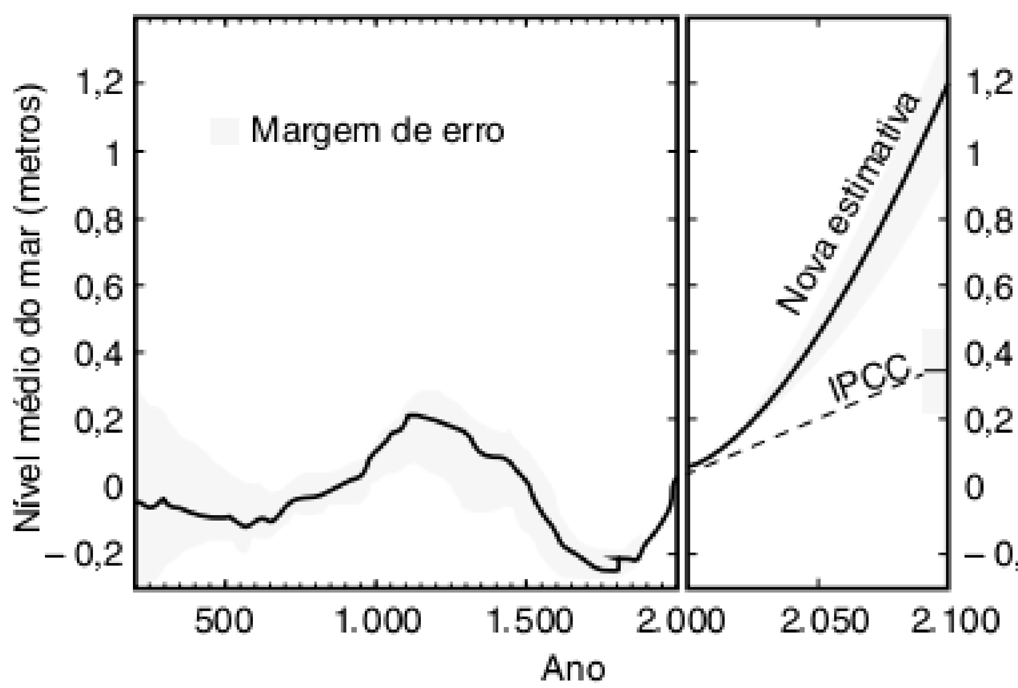


De acordo com as informações deste gráfico é correto afirmar, que o período de 2006 para 2007:

a) foi o único que registrou aumento na arrecadação dos três impostos.
b) foi o único em que a arrecadação do IRPJ ultrapassou a arrecadação do CSLL.
c) foi quando a arrecadação do PIS ultrapassou a arrecadação do CSLL
d) registrou um aumento na arrecadação total, dos três impostos, inferior a 5 milhões de reais.
e) registrou um aumento na arrecadação total, dos três impostos, superior a 4 bilhões de reais.

29 Tomando como referência o nível do mar igual a zero em 1997, o Painel Intergovernamental sobre Mudanças Climáticas (IPCC) publicou, no ano de 2007, uma estimativa para o aumento do nível do mar prevendo um aumento médio de 40 cm até 2100.

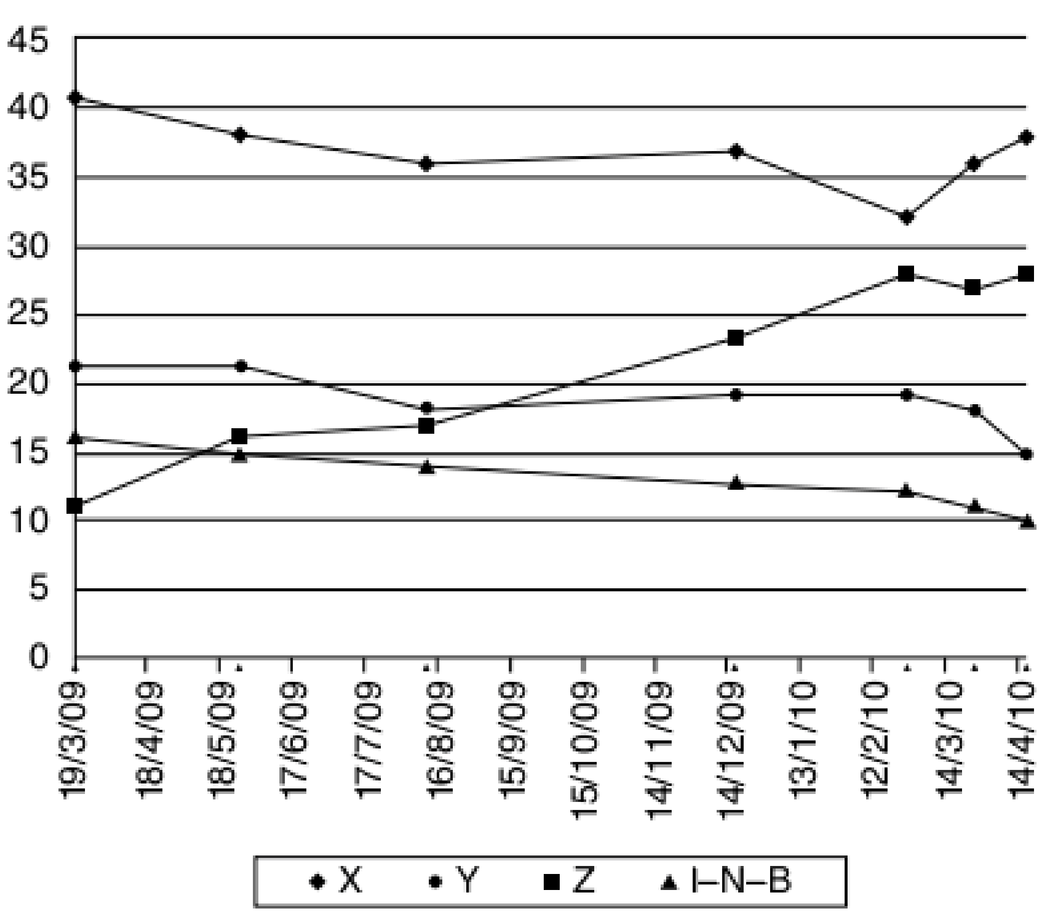
Mas, em 2010, outra pesquisa foi feita pela ONU, que apresentou uma nova e alarmante estimativa. Veja o gráfico a seguir:



Segundo esta nova estimativa, quanto tempo levará para que o nível médio do mar alcance a marca prevista para 2100 pelo IPCC?

30 O gráfico a seguir mostra os resultados das pesquisas feitas no período de 19/3/09 a 13/4/10 sobre as intenções de voto para uma eleição presidencial.

Nele, observa-se a evolução dos candidatos X, Y e Z, bem como dos indecisos, bem como das intenções de votos nulos e brancos.

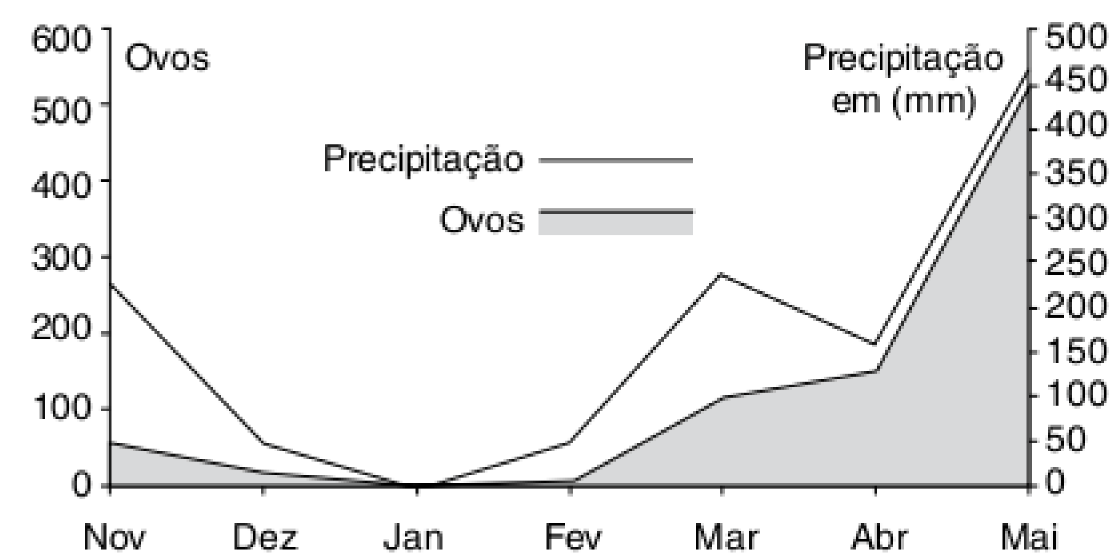


De acordo com o gráfico, quantos dias se passaram, aproximadamente, desde que o candidato Z subiu para a segunda posição até o momento em que esteve mais próximo do candidato X?

a) 170
b) 190
c) 210
d) 230
e) 250

31 Devido ao elevado índice de incidência de dengue, o bairro de Mecejana na cidade de Boa Vista, capital de Roraima, foi escolhido para uma pesquisa cujo objetivo era de relacionar a presença do vírus em formas larvais de *Aedes aegypti* com o índice pluviométrico.

Para isso, entre novembro de 2006 e maio de 2007, dezenas de armadilhas de ovos foram distribuídas nos domicílios do bairro e recolhidas depois de uma semana. O gráfico a seguir apresenta o número médio de ovos por armadilha e o índice pluviométrico verificados no período:



Com base nas informações contidas no gráfico, responda às seguintes perguntas:

a) Quantas vezes, durante o período considerado, o índice pluviométrico atingiu a marca de 200 mm?
b) Em quais meses isto aconteceu?
c) Em qual destes meses foi verificada a menor quantidade média de ovos por armadilha?
d) Qual foi a quantidade aproximada de ovos por armadilha verificada quando o índice pluviométrico atingiu, pela primeira vez, a marca de 200 mm no ano de 2007?

5 A Matemática no estudo da Física

Notação científica

O ser humano dominou aos poucos a capacidade de contar. Com os algarismos I, V, X, L, C, D e M, os romanos podiam controlar o número de soldados de suas tropas. Mas, o maior número que esses algarismos podem anotar é MMMCMXCIX (três mil novecentos e noventa e nove: 3.999). Um número muito pequeno para controlar, por exemplo, a economia de uma nação.

Para anotar números maiores, os romanos usavam barras horizontais sobre os algarismos, tornando-os mil vezes maior.

Assim: $\overline{\mathrm{M}}$ designa um milhão (10^6), $\overline{\overline{\mathrm{M}}}$ designa um bilhão (10^9) e $\overline{\overline{\overline{\mathrm{M}}}}$ designa um trilhão (10^{12}).

Mas, depois disso, tanto a notação numérica romana quanto a que usamos nos dias de hoje deixa muito a desejar.

Considere os números 75.720.496.285.083.422, 497.572.028.580.342 e 258.083.422.497.572.548, por exemplo, e tente responder rapidamente as seguintes perguntas:

- Qual deles é o maior?
- Qual é o nome do menor dos três?
- Quantas linhas de uma coluna de jornal são necessárias para se escrever, por extenso, o primeiro desses números?

Setenta e cinco quatrilhões, setecentos e vinte trilhões, quatrocentos e noventa e seis bilhões, duzentos e oitenta e cinco milhões, oitenta e três mil, quatrocentos e vinte e dois. Esse número possui 17 algarismos, o que já é quantidade grande o suficiente para dificultar seu reconhecimento e, consequentemente, a compreensão de sua grandeza.

Para informar a ordem de grandeza de um número não há necessidade de escrevê-lo por inteiro. Por exemplo, o número de fios de cabelo na cabeça humana está entre 160 mil e 170 mil, enquanto o número de células do corpo humano é estimado em 50 trilhões.

Note como o uso combinado de algarismos e palavras (numerais) torna mais inteligível a comparação dessas quantias.

Nesses casos, há certamente um prejuízo na exatidão do número. Mas esse prejuízo é superado pela facilidade prática adquirida para efetuar as operações aritméticas com estes números.

Se aproximarmos um número como, por exemplo, 5.275.913.442 para 5,3 bilhões estamos admitindo um erro inferior a 0,5% do seu valor exato.

Mesmo assim, esse sistema é limitado. Por isso, ciências como a Química, a Física e a Astronomia usam uma notação específica para esse tipo de comparação.

A notação científica consiste em apresentar medidas ou quantidades estimadas na forma de uma expressão aritmética que envolve as operações de multiplicação e potenciação, tal que o primeiro fator seja um número racional entre 1 e 10, representado na forma decimal, e o segundo fator seja uma potência de base 10 e expoente inteiro.

Assim, sendo **x** o valor atribuído a uma grandeza qualquer. Para escrever o número **x** em notação científica, deve-se encontrar um número racional α, tal que $\mathbf{1 \le \alpha < 10}$, e um número inteiro **n** tais que:

$$\mathbf{x = \alpha \cdot 10^n}$$

Uma vez representado em notação científica, a ordem de grandeza do número **x** é definida da seguinte maneira:

$$\textbf{Ordem de grandeza} = \begin{cases} 10^n & \text{se } \alpha < \sqrt{10} \\ 10^{n+1} & \text{se } \alpha > \sqrt{10} \end{cases}$$

Por tratar-se de um número racional, não existe o caso em que o fator α, dessa notação, seja igual à raiz quadrada de 10.

$$\sqrt{10} = 3{,}162277660...$$

É importante observar que o número de casas decimais do fator α não é arbitrário.

Por exemplo, sendo **x** o número de fios de cabelo na cabeça humana, temos:

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{160\ mil} & < \mathbf{x} < & \mathbf{170\ mil} \\ \mathbf{160.000} & < \mathbf{x} < & \mathbf{170.000} \\ \mathbf{16 \cdot 10^4} & < \mathbf{x} < & \mathbf{17 \cdot 10^4} \\ \mathbf{1{,}6 \cdot 10^5} & < \mathbf{x} < & \mathbf{1{,}7 \cdot 10^5} \end{array}$$

Se o propósito for o de informar uma estimativa, é razoável afirmar que $x = 1{,}65 \times 10^5$ e, neste caso, temos o fator α, com duas casas decimais, obtido da média aritmética entre os números 1,6 e 1,7.

Os três algarismos usados na representação do fator α são chamados de algarismos significativos, sendo que o último deles é chamado de algarismo duvidoso.

Sem nenhuma informação sobre o erro cometido em uma estimativa, não faz diferença escrever o fator α como 1,64 ou 1,67, pois em todos os casos só temos certeza de que estão corretos os algarismos que formam o número 1,6.

Mas, se os limites da medição são conhecidos, pode-se informar a ordem de grandeza do erro usando-se a notação $x = (1{,}65 \pm 0{,}05) \times 10^5$.

Dessa forma, a expressão $y = (5{,}3 \pm 0{,}1) \times 10^9$, por exemplo, significa que o número y está compreendido entre 5,2 bilhões e 5,4 bilhões, ao passo que se $y = (5{,}37 \pm 0{,}01) \times 10^9$, então o número y está entre 5,36 bilhões e 5,38 bilhões.

As medidas físicas estão limitadas pela precisão dos instrumentos usados para fazê-las, bem como pelo procedimento de medição (erro sistemático) e por eventuais distrações do observador.

No entanto, como nenhuma medida deve ser apresentada com mais de um algarismo duvidoso, devemos estar cientes da diferença relativa à precisão que há, por exemplo, entre as grandezas 5,2 km e 5,20 km.

Também é comum abrir mão do rigor da notação científica para representar um número, quando isso facilitar sua compreensão. Acontece que as primeiras potências de dez, com expoentes múltiplos de três, têm nomes específicos:

Mil	$\rightarrow 10^3$	Milésimos	$\rightarrow 10^{-3}$
Milhão	$\rightarrow 10^6$	Milionésimos	$\rightarrow 10^{-6}$
Bilhão	$\rightarrow 10^9$	Bilionésimos	$\rightarrow 10^{-9}$
Trilhão	$\rightarrow 10^{12}$	Trilionésimos	$\rightarrow 10^{-12}$

Então, para apresentar a quantia de vinte milhões, por exemplo, pode-se optar pela notação 20×10^6 em vez da notação científica formal 2×10^7.

Além disso, para efetuar uma adição de números expressos em notação científica como $7 \times 10^9 + 5 \times 10^8$ é necessário reescrever a menor parcela usando a mesma potência de dez da parcela maior, ou seja, escrever o número 5×10^8 (quinhentos milhões) na forma $0{,}5 \times 10^9$ (meio bilhão).

Assim, podemos efetuar essa adição colocando-se em evidência a potência comum às duas parcelas:

$$7 \times 10^9 + 0{,}5 \times 10^9 = (7 + 0{,}5) \times 10^9 = 7{,}5 \times 10^9$$

Embora seja bastante comum escrever números na forma $\alpha \times 10^n$ usando um fator α fora do intervalo de 1 a 10, essa não é a notação científica formal e, por isso, o expoente **n**, usado nestes casos, não deve ser tomado para determinar a ordem de grandeza do número representado.

Para representar números muito pequenos em notação científica, utilizamos expoentes negativos para as potências de dez. Exemplos:

0,004 $= 4 \times 10^{-3}$ (quatro milésimos)

0, 0000001 $= 1 \times 10^{-7}$ (um décimo de milionésimo)

Não são considerados algarismos significativos os zeros à esquerda de um número desse tipo. Por exemplo, o número 0,087 tem apenas dois algarismos significativos, pois escrevendo esse número em notação científica temos a cifra $8{,}7 \times 10^{-2}$, em que o fator α é igual a 8,7.

Exercícios

1 Escreva os seguintes números em notação científica:

a) 2.000	b) 5.000.000
c) 7.800.000.000	d) 0,008
e) 0,000005	f) 0,000000034
g) 3	h) 45
i) 678	j) 500×10^4
k) $0{,}006 \times 10^{12}$	l) 780.000×10^{-9}

2 Determine a ordem de grandeza e a quantidade de algarismos significativos dos números a seguir.

a) 1,23	b) 12,3
c) 123	d) 123,0
e) $1{,}23 \times 10^4$	f) 6×10^4
g) $6{,}0 \times 10^{15}$	h) $6{,}02 \times 10^{23}$
i) 600×10^2	j) $0{,}002 \times 10^8$
k) 2.500×10^{-8}	l) $0{,}052 \times 10^{-7}$

3 Efetue a adição $5 \times 10^4 + 3 \times 10^5 + 80 \times 10^3$.

Dados dois números **x** e **y** escritos em notação científica, temos $\mathbf{x = \alpha \times 10^m}$ e $\mathbf{y = \beta \times 10^n}$, em que os expoentes **m** e **n** são números inteiros e os fatores α e β são números reais maiores ou iguais a 1 e menores do que 10.

Dessa forma, o produto entre os números x e y pode ser obtido multiplicando-se os fatores α e β entre si e depois pela potência de dez com expoente igual à soma m + n. Assim:

$$\mathbf{x \cdot y = (\alpha \cdot \beta) \times 10^{m+n}}$$

E, se y ≠ 0, então para determinar a razão entre os números x e y, dividimos o fator α pelo fator β e multiplicando o quociente obtido pela potência de dez com expoente igual à diferença m-n. Assim:

$$\mathbf{\frac{x}{y} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \times 10^{m-n}}$$

Os resultados obtidos dessas expressões não estão, necessariamente, em notação científica, pois é possível que tanto o produto α . β quanto a razão $\frac{\alpha}{\beta}$ escapem do intervalo real compreendido entre os números 1 e 10. Assim, se $x = 4 \times 10^9$ e $y = 8 \times 10^5$, por exemplo, temos que:

$$x \cdot y = (4 \cdot 8) \times 10^{9+5} = 32 \times 10^{14} = 3{,}2 \times 10^{15}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{8} \times 10^{9-5} = 0{,}5 \times 10^4 = 5 \times 10^3$$

Exercício

4 Sendo $x = 3{,}6 \times 10^5$, $y = 1{,}2 \times 10^4$ e $z = 5 \times 10^{-3}$, efetue as operações a seguir e escreva seus resultados em notação científica.

a) $x \cdot y$

b) $x \cdot y \cdot z$

c) $(x - y) \cdot z$

d) $\frac{x \cdot z}{y}$

e) $\frac{x + y}{z}$

f) $\frac{x \cdot y}{z^2}$

Grandezas escalares

Chamamos de grandeza física tudo aquilo que possa ser medido, e medir significa comparar a grandeza a um padrão. As medidas das grandezas escalares ficam perfeitamente definidas quando apresentamos um número seguido da unidade.

Ao dizer que uma aula do Sistema de Ensino Poliedro dura cinquenta minutos ou que João comprou um terreno de mil e duzentos metros quadrados, estamos definindo perfeitamente o tempo de duração da aula e o tamanho do terreno de João.

As operações feitas com grandezas escalares seguem o padrão tradicional das operações aritméticas. Assim, três aulas consecutivas do Sistema de Ensino Poliedro duram cento e cinquenta minutos.

$$3 \times 50 \text{ min} = 150 \text{ min}$$

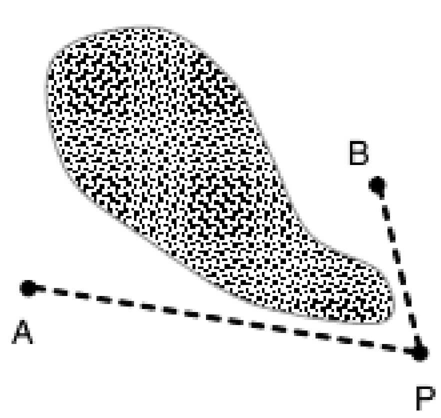
E, se por acaso, João adquirir um terreno, vizinho ao seu, com quinhentos metros quadrados, então ele será proprietário de um terreno total com mil e setecentos metros quadrados.

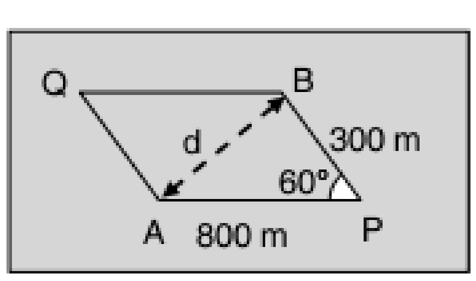
$$1.200 \text{ m}^2 + 500 \text{ m}^2 = 1.700 \text{ m}^2$$

Entre os propósitos do estudo da Geometria está o de se avaliar tamanhos.

Com o auxílio de instrumentos como a trena e o teodolito, os topógrafos medem distâncias e ângulos, de maneira direta, e a partir das grandezas obtidas podem determinar os valores de outras grandezas como áreas e volumes de maneira indireta.

Uma situação comum na prática da topografia é ter de determinar a distância entre os pontos A e B que estão situados em lados diferentes de uma lagoa, por exemplo. Para isso, o topógrafo percorre e mede as distâncias de A e B até um mesmo ponto P, como mostra a figura, e depois, usando o teodolito, mede a inclinação relativa entre as trajetórias percorridas.





Supondo que as medidas obtidas pelo topógrafo foram, por exemplo, de 800 m para o comprimento AP, 300 m para o comprimento PB e 60º para a inclinação relativa, considere o triângulo APB como parte de um paralelogramo APBQ.

Do Teorema dos cossenos, a diagonal menor do paralelogramo é expressa por:

$$\mathbf{d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \,.\, a \,.\, b \,.\, \cos\theta}}$$

As grandezas obtidas foram: a = 800 m, b = 300 m e θ = 60º. Então, substituindo-se esses valores na expressão e efetuando os cálculos aritméticos e trigonométricos, podemos medir, de maneira indireta, a distância **d** entre os pontos A e B.

Exercício

5 Quanto mede a distância entre os pontos A e B mencionados na situação apresentada no texto?

O sistema métrico decimal foi proposto em 1792 e evoluiu para o Sistema Internacional de Unidades (S.I.) proposto em 1960. Ele considera o metro como padrão de comprimento, o quilograma como padrão de massa e o segundo como padrão de tempo.

A vantagem do sistema métrico decimal é que ele admite como unidade de medida alguns múltiplos e submúltiplos do padrão, de acordo com a ordem de grandeza do que está sendo medido.

Indicados por prefixos juntos à unidade padrão temos, além do metro para medir comprimentos, o quilômetro, o centímetro e o milímetro; bem como para medir massa, além do quilograma, temos o grama e o miligrama. Esses são exemplos de prefixos bem conhecidos, mas há diversos outros que devem ser estudados, pois as mudanças de unidade facilitam os cálculos aritméticos.

Representado pelo símbolo *h*, o prefixo *hecto* significa *uma centena de*. Assim, por exemplo, um hectograma equivale a uma centena de gramas (1 hg = 100 g), bem como um hectômetro equivale a uma centena de metros (1 hm = 100 m).

Exercícios

6 Considerando, em hectômetros, as grandezas a e b do problema anterior, temos a = 8 e b = 3. Calcule, em hectômetros, a distância entre os pontos A e B.

7 Verifique se o resultado obtido no exercício 6, convertido em metros, coincide com o resultado obtido no exercício 5.

Os prefixos usados no Sistema Internacional para os múltiplos das unidades são:

(tera) **T** ↔ 10^{12} (trilhões de)
(giga) **G** ↔ 10^{9} (bilhões de)
(mega) **M** ↔ 10^{6} (milhões de)
(quilo) **k** ↔ 10^{3} (milhares de)
(hecto) **h** ↔ 10^{2} (centenas de)
(deca) **da** ↔ 10^{1} (dezenas de)

E os prefixos usados para os submúltiplos são:

(deci) **d** ↔ 10^{-1} (décima parte de)
(centi) **c** ↔ 10^{-2} (centésima parte de)
(mili) **m** ↔ 10^{-3} (milésima parte de)
(micro) μ ↔ 10^{-6} (milionésima parte de)
(nano) **n** ↔ 10^{-9} (bilionésima parte de)

Exercícios

8 Converter para metro as seguintes medidas de comprimento:

a) 18,6 km b) 2,5 cm
c) 350 cm d) 30 mm

9 Converter para quilograma as seguintes medidas de massa:

a) 500 g
b) 25 g
c) 18.700 mg

As grandezas físicas de comprimento, massa e tempo, bem como algumas outras, são chamadas de grandezas primárias. Com exceção da unidade de tempo, todas as unidades de grandezas primárias do Sistema Internacional têm múltiplos e submúltiplos que obedecem à norma de prefixos do sistema decimal.

A unidade de medida do tempo tem origem no sistema sexagesimal (base 60) babilônico e já estavam extremamente consagradas quando o Sistema Internacional foi proposto, por isso foram mantidas.

Um minuto (**min**) equivale a sessenta segundos (**s**), e uma hora (**h**) equivale a 60 minutos.

1 min = 60 s
1 h = 60 min = 3.600 s

Mesmo assim, os submúltiplos do segundo obedecem ao sistema decimal, ou seja, um segundo é subdividido em décimos, centésimos e milésimos de segundo.

Exercício

10 Converter as unidades de tempo solicitadas:

a) 2 horas e meia em minutos.
b) 20 minutos em segundos.
c) 240 minutos em horas.
d) 90 minutos em horas.
e) 3.000 segundos em minutos.
f) 1 milhão e 800 mil segundos em horas.

As operações de adição e subtração de grandezas escalares só estão definidas para grandezas do mesmo tipo e são efetuadas da maneira usual, definida no estudo da aritmética, apenas quando expressas em uma mesma unidade. É possível, por exemplo, somar as massas de 5 kg e de 200 g, mas para obter o resultado correto, não podemos somar os números 5 e 200, pois esses números expressam massas em unidades diferentes. Então, devemos converter uma dessas grandezas para a unidade em que está a outra, antes de efetuar a adição dos numerais.

Como 5 kg equivalem a 5.000 g, temos que:

$$5 \text{ kg} + 200 \text{ g} = 5.000 \text{ g} + 200 \text{ g} = 5.200 \text{ g}$$

Por outro lado, 200 g equivalem a 0,2 kg e, dessa forma, temos que:

$$5 \text{ kg} + 200 \text{ g} = 5 \text{ kg} + 0,2 \text{ kg} = 5,2 \text{ kg}$$

Tanto o produto quanto a razão entre duas grandezas escalares primárias geram grandezas escalares compostas. Nenhuma grandeza composta tem o mesmo significado das grandezas que foram operadas. Exemplos:

- O produto entre duas medidas de comprimento resulta numa medida de área, e o produto entre três medidas de comprimento resulta em uma medida de volume.
- Dividindo-se uma medida de comprimento por uma medida de tempo, temos como resultado uma medida de velocidade.
- Dividindo-se a medida de massa pela medida do volume de um corpo, obtemos sua densidade.

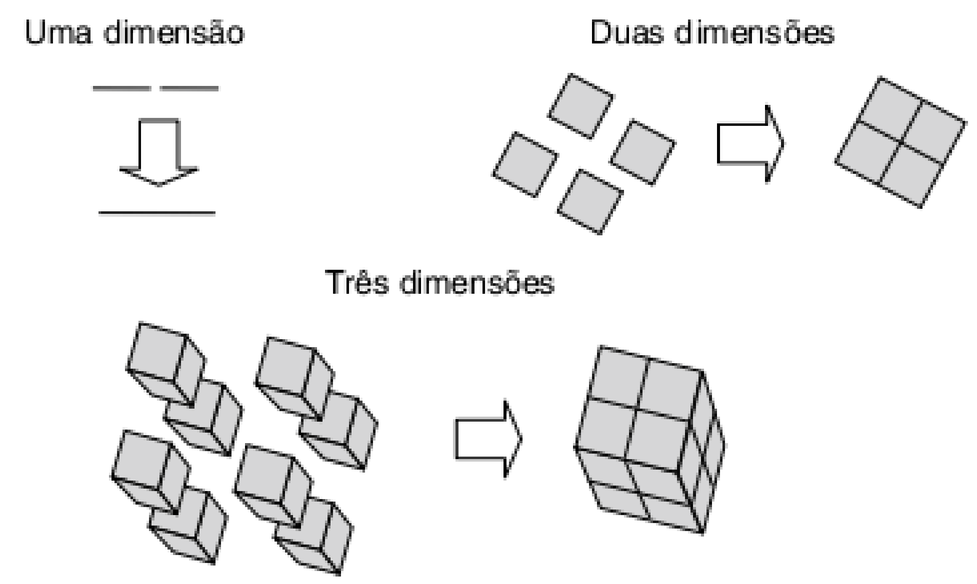
Algumas unidades de grandezas compostas são apresentadas na forma de operações entre unidades primárias, sendo que essas operações são as mesmas que definem a grandeza composta. A unidade de área, por exemplo, é apresentada como **m²** (metro quadrado), pois resulta do produto entre duas grandezas medidas em metros ($m.m = m^2$), ao passo que a unidade de volume é o **m³** (metro cúbico).

As conversões de unidades compostas são bem mais delicadas e exigem atenção especial.

- 1 m^2 designa a superfície ocupada por um quadrado cujo lado tem um metro de comprimento.
- 1 m^3 designa o espaço ocupado por um cubo cuja aresta tem um metro de comprimento.

A natureza geométrica e dimensional dessas grandezas impõe uma característica especial na maneira de se efetuar as conversões entre suas unidades.

Afirmamos que um segmento de reta tem **2** metros de comprimento se nele cabem **dois** segmentos de reta com um metro cada, mas em um quadrado com **2** metros de lado cabem **quatro** outros quadrados com um metro de lado cada, ao passo que em um cubo com **2** metros de aresta cabem **oito** cubos com um metro de aresta cada.



Na prática, os múltiplos e submúltiplos do metro mais usados são o quilômetro, o centímetro e o milímetro. E nesse sistema métrico temos, por exemplo, que 1 metro tem 100 centímetros. Mas 1 metro quadrado mede 100^2 centímetros quadrados:

$$\mathbf{1\ m^2 = 1 . (100\ cm)^2 = 100^2\ cm^2 = 10.000\ cm^2}$$

Enquanto um metro cúbico tem 100^3 centímetros cúbicos, ou seja, um milhão de centímetros cúbicos:

$$\mathbf{1\ m^3 = 1 . (100\ cm)^3 = 100^3\ cm^3 = 1.000.000\ cm^3}$$

Um recipiente como a caixa de leite vendida em padarias, por exemplo, cerca um espaço cujo volume vale 0,001 m^3 ou 1.000 cm^3. Como em ambos os casos a grandeza geométrica precisa ser representada com quatro dígitos, temos o hábito de avaliar espaços desse tamanho com uma grandeza física chamada capacidade, cuja unidade é o **litro**.

Embora o decímetro (dez centímetros) não seja uma unidade de uso frequente, é importante saber que o litro equivale ao decímetro cúbico.

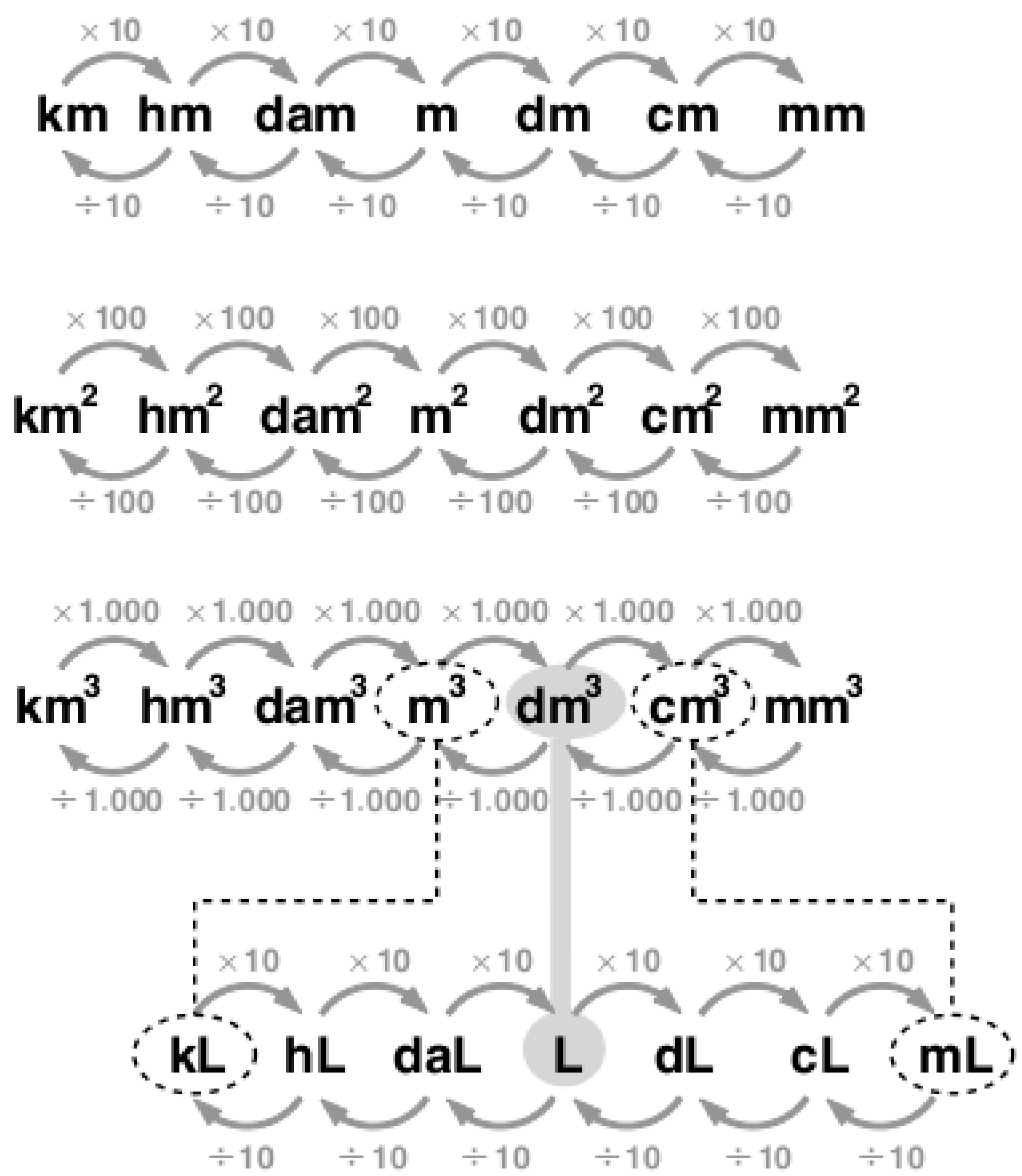
$$\mathbf{1\ L \leftrightarrow 1\ dm^3}$$

Dessa forma, temos que em um metro cúbico cabem mil litros e em um litro cabem mil centímetros cúbicos.

A capacidade é uma grandeza escalar primária e, portanto, obedece à norma de prefixos do sistema decimal. Ou seja, um litro equivale a dez decilitros e a mil mililitros. Assim, um mililitro equivale a um centímetro cúbico.

$$\mathbf{1\ mL \leftrightarrow 1\ cm^3}$$

Veja como transitar entre os múltiplos e submúltiplos das unidades de comprimento, área, volume e capacidade do Sistema Internacional:



Exercícios

11 Converta as áreas para m²:

a) 50 cm²

b) 0,2 km²

c) 8.000 mm²

12 Converta os volumes para m³:

a) 50 cm³

b) 0,2 km³

c) 800.000 mm³

13 Determine a capacidade em litros equivalente a cada um dos seguintes volumes:

a) 250 cm³

b) 0,05 m³

c) 80.000 mm³

14 Determine, em centímetros cúbicos, o volume equivalente a cada uma das seguintes capacidades:

a) 0,5 L

b) 30 L

c) 800 mL

Já a unidade de medida de velocidade do Sistema Internacional é apresentada como **m/s** (metro por segundo) indicando assim que a velocidade é obtida do quociente entre uma medida de comprimento e uma medida de tempo.

O valor de 1 m/s designa a velocidade necessária para um móvel percorrer uma distância igual a um metro em um único segundo.

Embora, no Sistema Internacional, a velocidade seja medida em metros por segundo, há outras unidades frequentemente usadas para se medir velocidades. Aqui no Brasil, os limites de velocidades nas vias públicas são expressos em quilômetros por hora **(km/h)**.

Para efetuar a conversão entre essas unidades de medida de velocidade recomenda-se memorizar o fator **3,6**.

$$1\ \text{km/h} = \frac{1\ \text{km}}{1\ \text{h}} = \frac{1.000\ \text{m}}{3.600\ \text{s}} = \frac{1}{3{,}6}\ \text{m/s}$$

Assim, temos que 1 m/s equivale a 3,6 km/h, dessa forma, pode-se converter velocidades expressas em m/s para a unidade km/h multiplicando-se o numeral da grandeza dada pelo fator 3,6.

E, para a conversão contrária, basta dividir o numeral da grandeza dada por 3,6.

Exercícios

15 Converta as velocidades dadas para km/h:

a) 100 m/s

b) 2 m/s

c) 0,5 m/s

16 Converta as velocidades dadas para m/s:

a) 18 km/h

b) 144 km/h

c) 900 km/h

Grandezas vetoriais

Observando dois veículos A e B movendo-se em uma mesma via de mão única, pode-se perceber qual deles é o mais veloz, mesmo sem conhecer os valores de suas velocidades escalares.

Suponha que, inicialmente, o veículo B esteja à frente do veículo A e que suas velocidades não se alterem durante a observação.

Se o veículo A for mais veloz que o veículo B, observando-os durante algum tempo, veremos A aproximando-se de B até ultrapassá-lo e, então, veremos A afastando-se de B.

Mas, se em uma via de mão dupla dois veículos estivessem se movendo em sentidos opostos, veríamos sua aproximação em uma velocidade maior que a de cada um, dificultando a percepção de qual é o mais veloz.

A velocidade de aproximação, ou afastamento, entre dois objetos móveis é chamada de *velocidade relativa* e pode muito bem ser percebida, por exemplo, pelo motorista do veículo A.

Para calcular a velocidade relativa entre dois móveis, devemos considerar características que vão além dos valores das velocidades de cada um, pois, nesse caso, a orientação de seus movimentos interfere na maneira de calculá-las.

As grandezas com essas características são chamadas de grandezas vetoriais.

A velocidade é uma grandeza física que se manifesta de forma tanto escalar quanto vetorial.

Considere, por exemplo, que o elevador de um edifício esteja descendo a uma velocidade de 1,5 m/s. O numeral **1,5** acompanhado da unidade **m/s** caracteriza apenas a velocidade escalar do elevador.

Mas, para definir a velocidade vetorial desse veículo, é necessário, além da velocidade escalar, duas outras informações sobre a orientação espacial do movimento.

Toda grandeza vetorial apresenta três informações distintas: **intensidade**, **direção** e **sentido**.

Assim, sobre a velocidade vetorial do elevador, temos:

Intensidade: 1,5 m/s
Direção: vertical
Sentido: de cima para baixo

No estudo da Geometria, a palavra *direção* designa a característica comum a todas as retas que são paralelas umas às outras. Assim, cada direção apresenta dois sentidos que são opostos um ao outro.

Em uma sentença matemática, as variáveis que designam grandezas vetoriais são escritas com uma seta sobre elas. Isso é feito para distingui-las das grandezas escalares. Assim, temos que **x** representa uma grandeza escalar, enquanto $\vec{x}$ representa uma grandeza vetorial. A intensidade de uma grandeza vetorial também é chamada de módulo dessa grandeza. Assim, em termos algébricos, temos que:

$$x = |\vec{x}|$$

Além disso, devemos considerar o conceito geométrico e distinguir as palavras *direção* e *sentido* usadas aqui.

Voltemos aos exemplos dos veículos A e B, mas agora considerando que suas velocidades escalares sejam $V_A = 60$ km/h e $V_B = 50$ km/h, respectivamente.

Esses valores representam apenas as intensidades e suas velocidades vetoriais. Agora, quanto à orientação espacial dessas grandezas, temos, nesse exemplo, que:

Os dois móveis, A e B, movimentam-se em uma mesma direção, e essa direção é determinada pela via em que se movem.

No primeiro caso, os movimentos de A e B têm o mesmo sentido, mas no segundo caso, A e B movimentam-se em sentidos opostos.

Em particular, se duas grandezas vetoriais têm a mesma direção, só é necessário diferenciar seus sentidos, e fazemos isso usando os sinais (+) e (–) junto aos valores de suas intensidades.

Assim, se os veículos A e B movem-se no **mesmo sentido**, usamos o **mesmo sinal** para suas velocidades vetoriais:

$$V_A = +60 \text{ km/h} \text{ e } V_B = +50 \text{ km/h}$$

A velocidade escalar relativa entre dois móveis é dada pelo módulo da diferença entre velocidades vetoriais dos móveis. Então, sendo **v** a velocidade de aproximação entre A e B, temos que:

$$\mathbf{v} = |V_A - V_B| = |(+60) - (+50)| = 10 \text{ km/h}$$

Já, no segundo caso, como A e B movem-se em **sentidos opostos**, usamos **sinais diferentes** para suas velocidades vetoriais:

$$V_A = +60 \text{ km/h} \text{ e } V_B = -50 \text{ km/h}$$

Assim, a velocidade relativa entre os móveis, nesse caso, é:

$$\mathbf{v} = |V_A - V_B| = |(+60) - (-50)| = 110 \text{ km/h}$$

Agora, imagine um terceiro caso em que os veículos A e B transitem em vias perpendiculares entre si: um deles em uma via norte-sul e o outro em uma via leste-oeste, por exemplo.

Para calcular a velocidade relativa entre A e B, nesse caso, vamos considerar uma outra grandeza vetorial chamada de **deslocamento vetorial**.

Considere que os veículos A e B partiram de um mesmo ponto com velocidades escalares constantes de 40 km/h e 30 km/h, respectivamente, mas que um deles seguiu para o norte e o outro para o leste.

Considerando-se também que tenha se passado uma hora desde que os veículos partiram, pode-se presumir que os veículos A e B tenham percorrido distâncias de 40 km e 30 km, respectivamente.

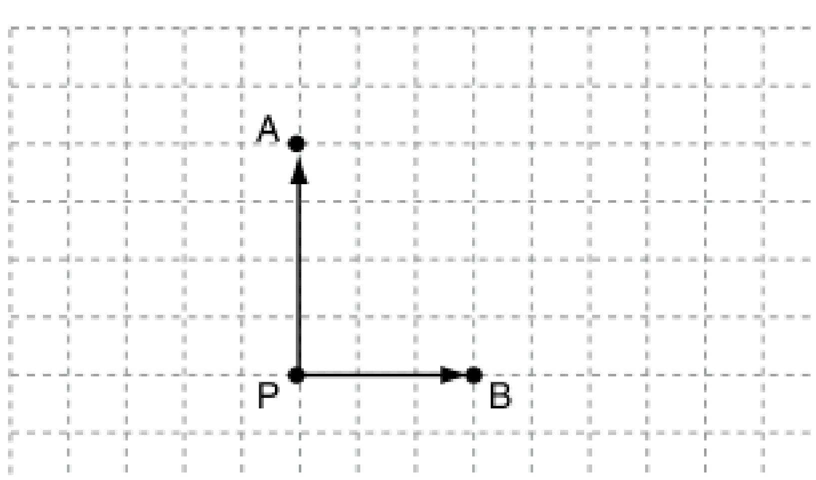
Os deslocamentos vetoriais desses veículos A e B podem ser representados por setas com as seguintes características:

I. Seus comprimentos devem ser proporcionais às distâncias percorridas.

II. Estejam contidas em retas perpendiculares que representam as direções dos movimentos.

III. Cada seta deve apontar para um único sentido da direção que a contém.

Na figura a seguir, os quadradinhos tem lados cotados em 10 km cada, P representa o ponto de partida dos veículos, os vetores-deslocamento dos veículos A e B são, respectivamente, representados pelas setas $\overline{\mathbf{PA}}$ e $\overline{\mathbf{PB}}$.



Dessa forma, temos que:

$$\left|\overline{\mathbf{PA}}\right| = 40\text{ km} \quad \text{e} \quad \left|\overline{\mathbf{PB}}\right| = 30\text{ km}$$

Determinamos a distância entre os pontos A e B usando o Teorema de Pitágoras:

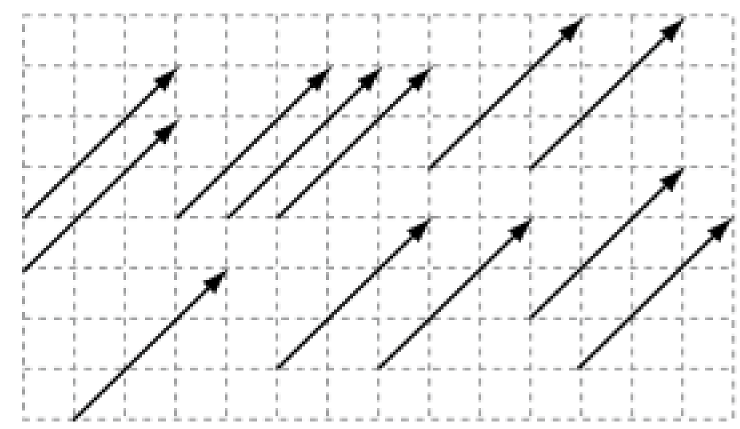
$$AB^2 = (40\text{ km})^2 + (30\text{ km})^2 \Leftrightarrow AB = 50\text{ km}$$

Logo, a velocidade escalar relativa entre os móveis A e B é, neste caso, de 50 km/h.

Equipolência (igualdade de vetores)

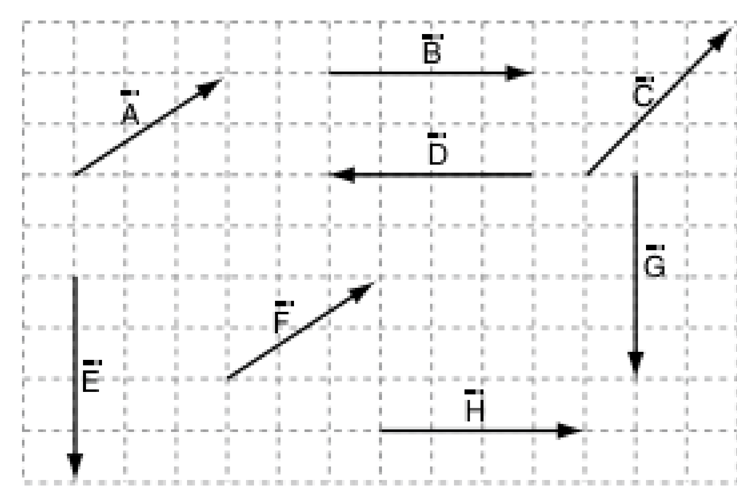
Um vetor é a classe dos segmentos de reta orientados (setas) que tenham mesmo comprimento, mesma direção, ou seja, que estejam contidos em retas paralelas, e que apontem para o mesmo sentido.

Assim, pode-se dizer que todas as setas da figura a seguir representam o mesmo vetor:



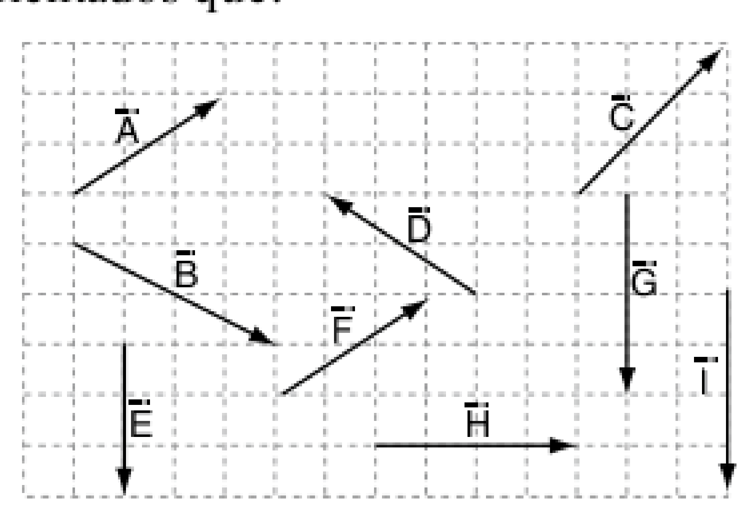
Exercícios

17 No quadriculado a seguir, temos alguns segmentos de reta orientados representando alguns vetores. Dos vetores representados, quais deles:



a) têm mesmo módulo?
b) têm mesma direção?
c) têm mesmo sentido?
d) Quais segmentos orientados representam o mesmo vetor?
e) Quantos vetores estão representados pelos segmentos orientados?

18 Observe a figura a seguir e determine quais os segmentos orientados que:



a) têm a mesma direção.
b) têm o mesmo sentido.
c) têm o mesmo comprimento.
d) são iguais.

19 Assinale a alternativa correta. Para que uma grandeza vetorial fique completamente caracterizada, precisamos conhecer:

a) apenas a sua intensidade.
b) apenas sua intensidade e direção.
c) apenas sua direção e sentido.
d) apenas seu sentido.
e) apenas seu módulo, direção e sentido.

20 Assinale a alternativa correta. Considere as seguintes grandezas físicas mecânicas: tempo, massa, força, deslocamento e temperatura. Entre elas, têm caráter vetorial apenas:

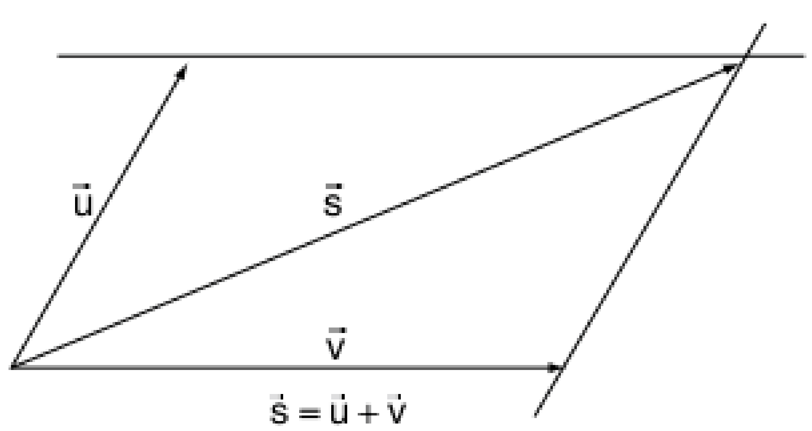
a) força e deslocamento.
b) massa e força.
c) tempo e massa.
d) deslocamento e temperatura.
e) tempo e temperatura.

Vetor soma

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, definimos $\vec{s}$ como sendo o vetor resultante da soma dos vetores obedecendo ao que chamamos de *regra do paralelogramo*.

Para obter a seta que representa o vetor soma, tomamos duas setas com uma origem comum tais que cada uma delas represente um dos vetores a serem somados. Em seguida, pela extremidade de cada um dos vetores representados, traçamos uma reta paralela ao outro vetor obtendo a figura geométrica de um paralelogramo.

Assim, o vetor soma é representado pela seta sobre a diagonal do paralelogramo. Veja a figura:



Os lados do paralelogramo têm medidas u e v diretamente proporcionais às intensidades dos vetores que representam, da mesma forma que a intensidade do vetor soma é proporcional à medida **s** da diagonal deste paralelogramo. Ou seja:

$$|\vec{u}| = u \qquad |\vec{v}| = v \qquad |\vec{s}| = s$$

Assim, sendo o ângulo agudo do paralelogramo, no caso em que o vetor soma é representado pela diagonal **maior** do paralelogramo, temos que a intensidade desse vetor soma é dada por:

$$s = \sqrt{u^2 + v^2 + 2.\,u.\,v.\cos\theta}$$

E, no caso em que o vetor soma é representado pela diagonal **menor** do paralelogramo, temos que a intensidade desse vetor soma é dada por:

$$s = \sqrt{u^2 + v^2 - 2.\,u.\,v.\cos\theta}$$

Todo paralelogramo tem ângulos internos de duas medidas distintas, uma menor que 90º e outra maior que 90º, mas sendo α e β as medidas desses ângulos, temos que $\alpha + \beta = 180º$. Assim, se um determinado exercício fornecer o ângulo obtuso entre as direções dos vetores, por exemplo, 135º, devemos tomar o ângulo θ nas fórmulas das diagonais do paralelogramo (Teorema dos cossenos) como sendo o suplemento do ângulo dado, ou seja:

$$\theta = 180º - 135º = 45º$$

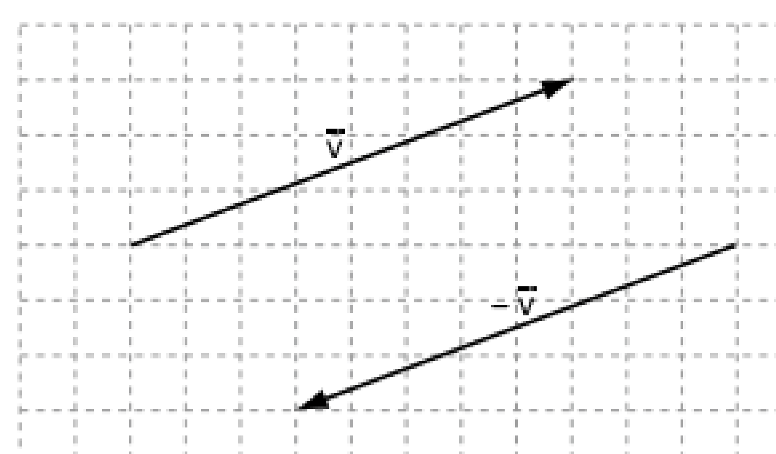
Dessa forma, evitamos a análise de sinal da função cosseno.

Vetor oposto

Dado um vetor $\vec{v}$, definimos $-\vec{v}$ como sendo o vetor oposto ao vetor dado.

Vetores opostos são representados por setas de mesmo comprimento, paralelas entre si, mas tais que cada uma aponta num sentido diferente.

Veja a figura:



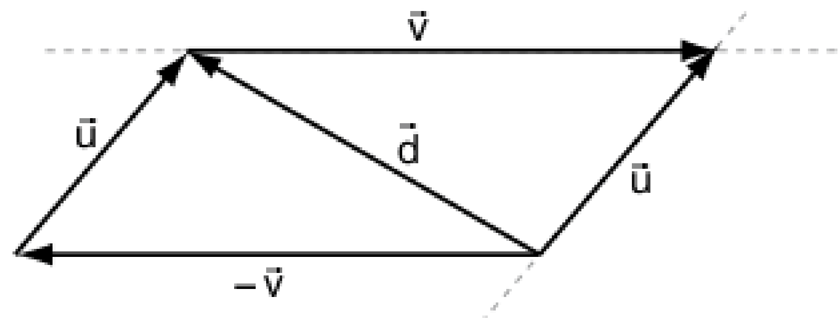
A soma de dois vetores opostos é chamada de vetor nulo, e a intensidade de um vetor nulo é zero:

$$-\vec{v} + \vec{v} = \vec{0} \quad \text{e} \quad |\vec{0}| = 0$$

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, definimos $\vec{d}$ como sendo o vetor diferença entre os vetores dados da seguinte maneira:

$$\vec{d} = \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

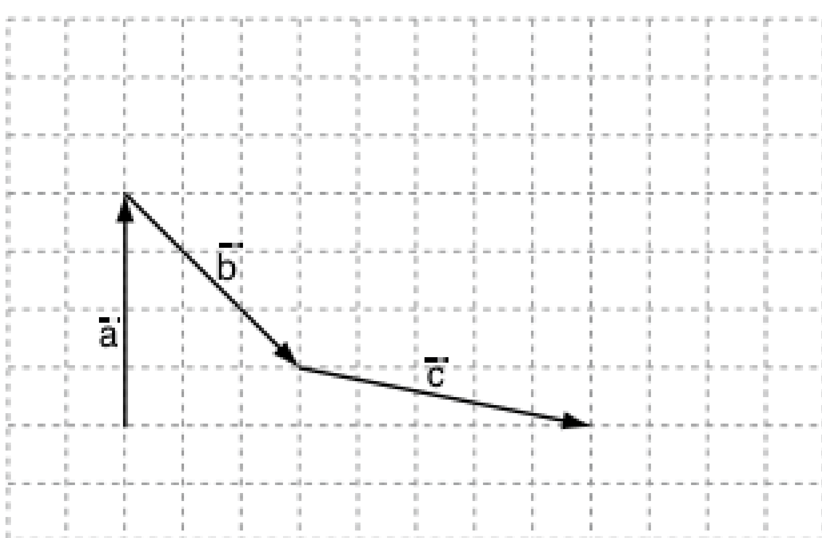
Ou seja, subtrair dois vetores significa somar um deles ao vetor oposto do outro. Assim, da regra do paralelogramo, temos que:



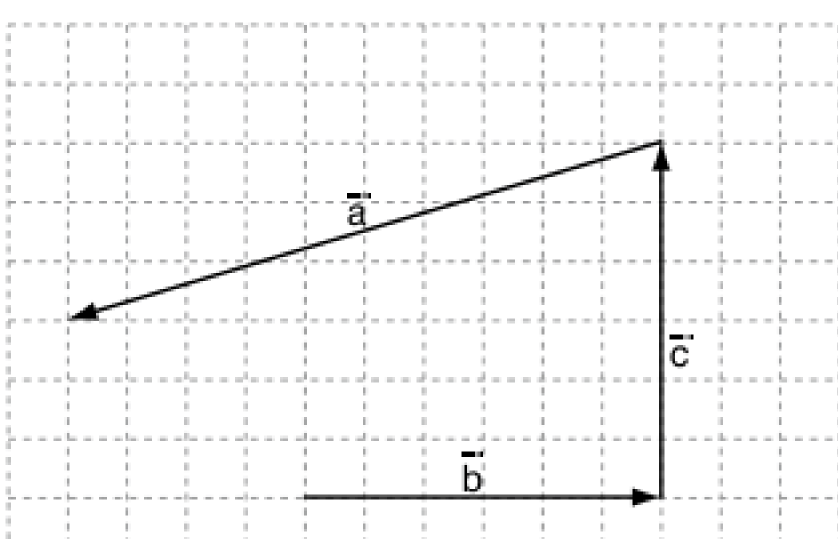
Exercícios

21 Determine, em cada caso, o módulo do vetor $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, considerando que o lado de cada quadrícula vale 1 cm.

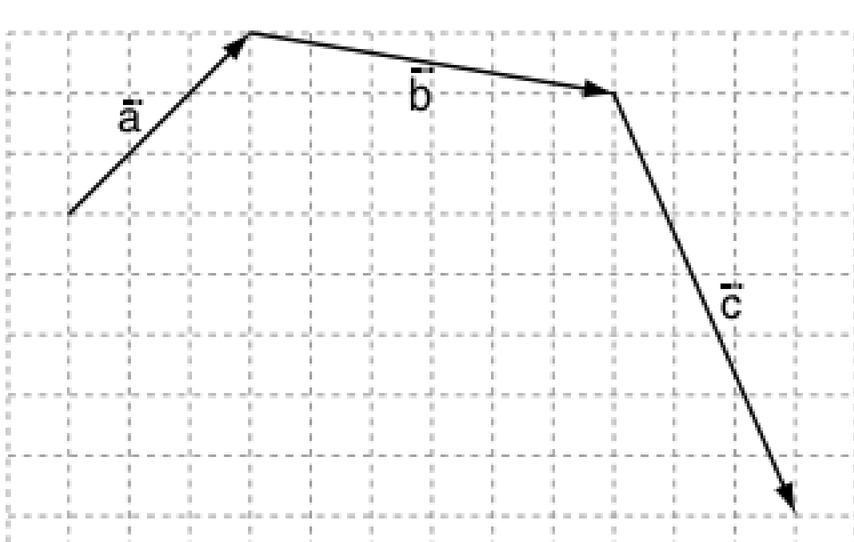
a)



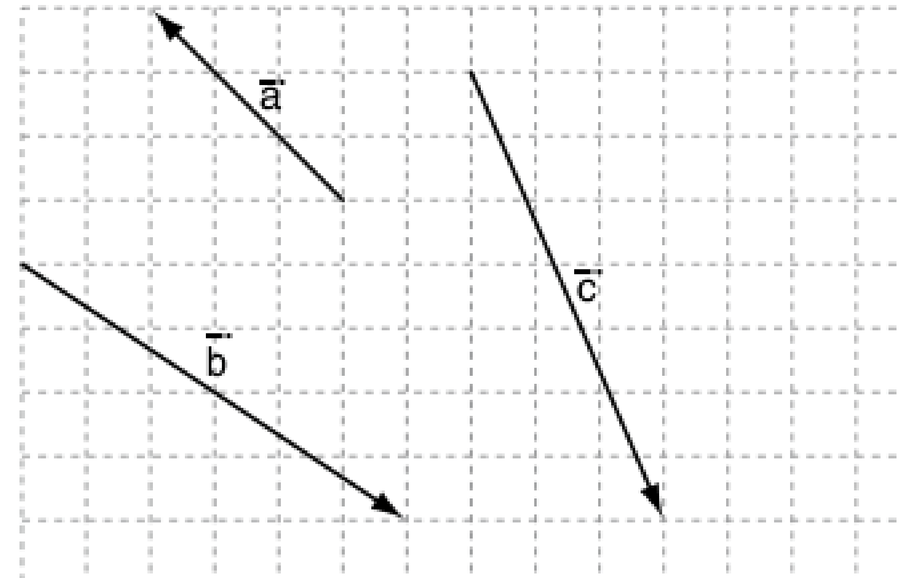
b)



c)



d)



22 **UCS** Uma pessoa sai de sua casa e percorre as seguintes distâncias em qualquer ordem possível:

I. 30 metros para leste;
II. 20 metros para norte;
III. 30 metros para oeste.

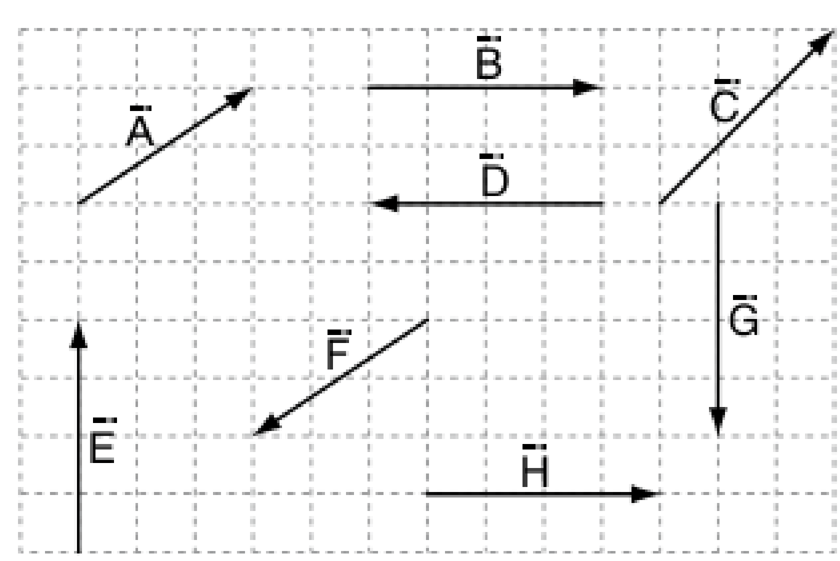
No final das três caminhadas, a distância a que ela se encontra do ponto de partida é:

a) 80 m
b) 50 m
c) 20 m
d) 40 m
e) 60 m

23 **UEL-PR** Um navio sofre deslocamentos sucessivos de 6,0 km de norte para sul e de 8,0 km de leste para oeste. O deslocamento vetorial do navio tem módulo:

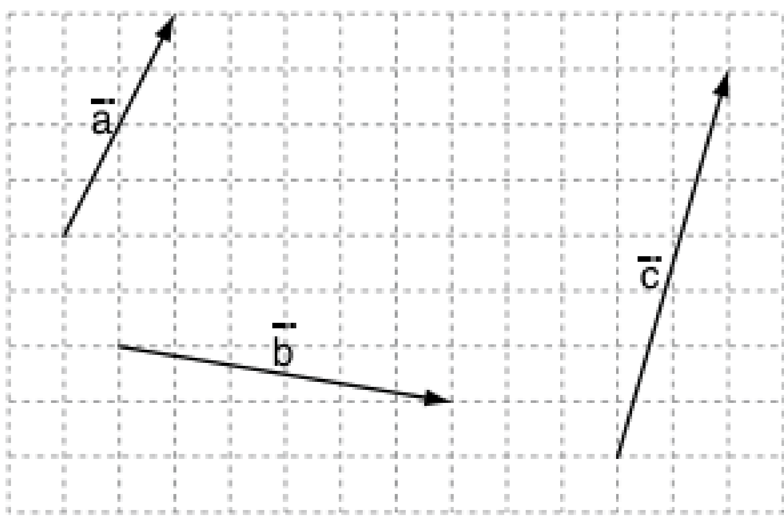
a) 2,0 km
b) 7,0 km
c) 10 km
d) 14 km
e) 48 km

24 Na figura seguinte, estão representados vários vetores. Identifique os pares de vetores que são opostos.

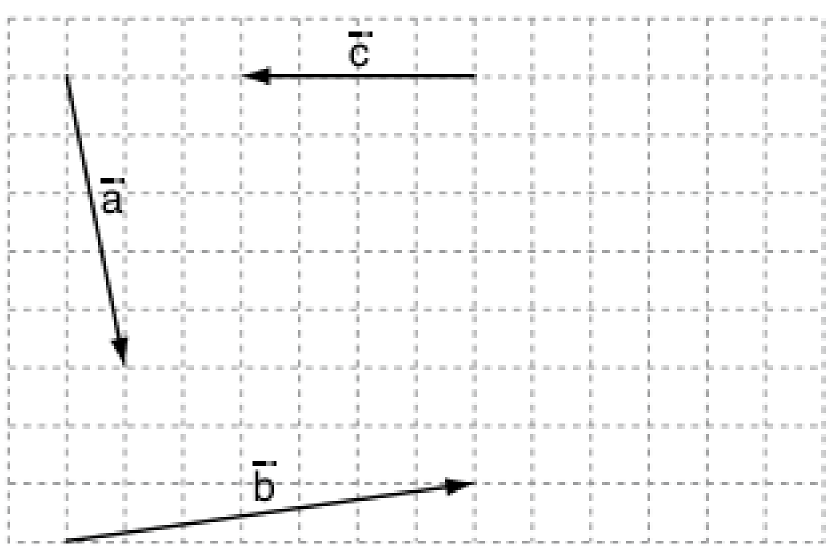


25 Efetue as operações vetoriais seguintes e determine o módulo do vetor $\vec{s}$ em cada caso, considerando o lado de cada quadrícula 1 cm.

a) $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

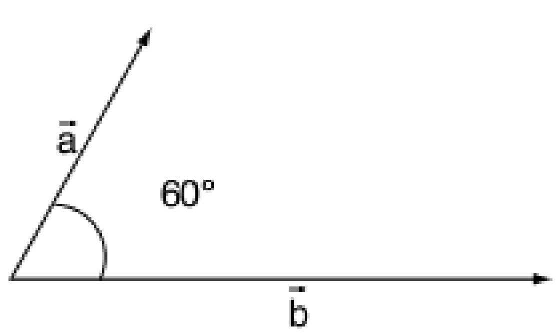


b) $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

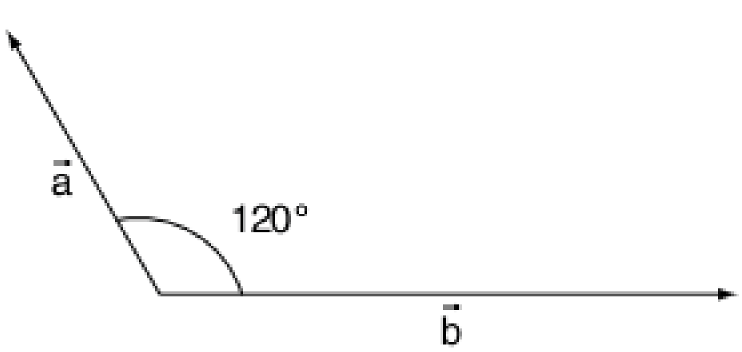


26 Determine o módulo do vetor soma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ · nos seguintes casos:

a) a = 9 ; b = 15



b) a = 3; b = 8



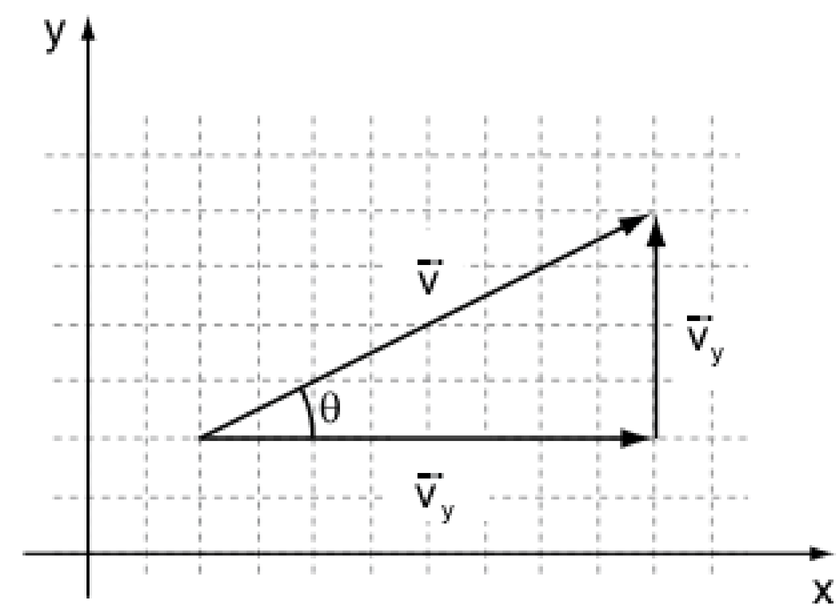
Decomposição cartesiana de um vetor

Dado um vetor $\vec{v}$ representado num plano cartesiano, existem dois outros vetores $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$ paralelos aos respectivos eixos coordenados tais que:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

Os componentes $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$ do vetor $\vec{v}$ também são chamados de projeções horizontal e vertical do vetor $\vec{v}$ e costumam ser indicados por:

$$\mathbf{Proj}_x(\vec{v}) \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{Proj}_y(\vec{v})$$



Do Teorema de Pitágoras, temos:

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{v}_x|^2 + |\vec{v}_y|^2$$

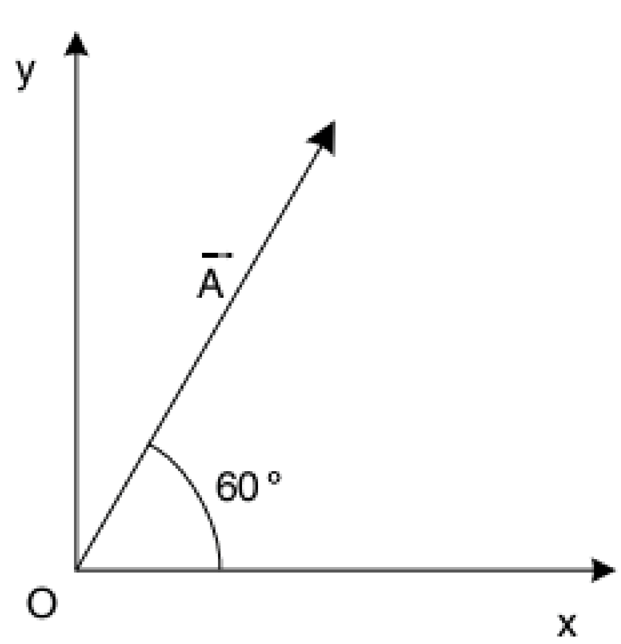
E, sendo θ o ângulo de inclinação do vetor $\vec{v}$ em relação ao eixo das abscissas (horizontal), temos que:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v}_x|}{|\vec{v}|} \Leftrightarrow |\vec{v}_x| = |\vec{v}|.\cos\theta$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{|\vec{v}_y|}{|\vec{v}|} \Leftrightarrow |\vec{v}_y| = |\vec{v}|.\,\text{sen}\,\theta$$

Exercício

27 O vetor $\vec{A}$ a seguir tem módulo 20 cm. Obtenha suas projeções nas direções dos eixos Ox e Oy.



Gabarito

1 Aritmética

Operações diretas no universo natural

1. a) Zero.
b) Quinze.
c) Novecentos e noventa.
d) Oito.
e) Duzentos e quarenta e um.
f) Zero.

2. a) 2
b) 2
c) 9
d) 9
e) 9
f) 55
g) 2.938
h) 1.452
i) 1.111.111.110
j) 13.583

3. a) 0
b) 0
c) 5
d) 56
e) 56
f) 24
g) 24
h) 24
i) 120
j) 120
k) 903
l) 5.680
m) 24.700
n) 37.037
o) 966.810

4. a) 125
b) 25
c) 5
d) 1
e) 625
f) 1.024
g) 16
h) 16
i) 1
j) 6
k) 0
l) 1
m) 1
n) 0
o) 1
p) 1
q) 64
r) 64
s) 64
t) 64

5. a) 83
b) 31
c) 131
d) 133
e) 100
f) 254

6. a) 79
b) 175
c) 229
d) 361
e) 1.225
f) 37
g) 256
h) 289
i) 112
j) 1.024
k) 44
l) 640
m) 1.004
n) 10.000.000
o) 60

Operações básicas no universo inteiro

7. a) 5
b) 0
c) 3
d) 5
e) 7
f) 97
g) 967
h) 22
i) 151
j) 5.384
k) 30.020
l) 39.001

8. a) 5
b) 5
c) 19
d) 13
e) 27
f) –17
g) 21
h) –47
i) 9
j) 47
k) 7
l) 1
m) –3
n) 11
o) –17
p) 3

9. a) –32
b) 0
c) –96
d) –24
e) 120
f) –70
g) –25
h) 25
i) –125
j) –125

10. a) 4 e 0
b) 7 e 0
c) –4 e 0
d) –4 e 0
e) 4 e 0
f) 6 e 1
g) 3 e 4
h) –3 e 4
i) –4 e 1
j) 4 e 1
k) 7 e 2
l) 100 e 2
m) 0 e 7
n) 104 e 1
o) 10.401 e 2

11. 0

12. a) 35
b) 12
c) 60
d) 120
e) 1
f) 4
g) 6
h) 2

Operações básicas no universo racional

13. a) (0,123; 1,23; 12,3; 123)
b) (0,008; 0,025; 0,05; 0,2)
c) $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$
d) $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}\right)$

14. a) $\frac{4}{10} = 0,4$
b) $\frac{12}{100} = 0,12$
c) $\frac{123}{1.000} = 0,123$
d) $\frac{45}{10} = 4,5$
e) $\frac{60}{100} = 0,60$
f) $\frac{78}{10.000} = 0,0078$

15. a) 3,5
b) 2,5
c) 2,4
d) 1,875
e) 0,95
f) 2,75

16. a) $\frac{7}{2}$
b) $\frac{5}{2}$
c) $\frac{12}{5}$
d) $\frac{11}{4}$
e) $\frac{19}{20}$
f) $\frac{15}{8}$

17. a) cinco sextos.
b) um sexto.
c) onze décimos.
d) cento e trinta e cinco cem avos.
e) cinquenta e um setenta avos.
f) treze quinze avos.

18. a) um sexto.
b) menos um terço.
c) vinte e quatro centésimos.
d) 0,18
e) 1
f) –0,4

19. a) três meios.
b) menos quatro terços.
c) 0,375
d) 8
e) $\frac{100}{49}$
f) –3,6

Radiciação

20. a) 49 m²
b) 343 cm³
c) 11 cm
d) 4 m
e) 10 m²
f) 10 m³
g) $\sqrt{11}$ m
h) $\sqrt[3]{11}$ cm

21. a) 7
b) 7
c) –5
d) 2
e) 3
f) 10
g) –1
h) 0

22. a) 1,7
b) 2,2
c) 2,6
d) 3,3

23. a) $2\sqrt{2}$
b) $2\sqrt{3}$
c) $3\sqrt{2}$
d) $5\sqrt{2}$
e) $2\sqrt{5}$
f) $5\sqrt{3}$

24. a) $3\sqrt[3]{2}$
b) $5\sqrt[3]{4}$
c) $4\sqrt[3]{5}$
d) $10\sqrt[3]{6}$
e) $-3\sqrt[3]{3}$
f) $\sqrt{7}$

2 Álgebra

Equações do primeiro grau

1. a) $S = \{7\}$
b) $S = \{3\}$
c) $S = \{-4\}$
d) $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$
e) $S = \left\{-\frac{12}{7}\right\}$
f) $S = \{2\}$
g) $S = \left\{-\frac{4}{3}\right\}$
h) $S = \varnothing$
i) $S = \mathbb{R}$

2. a) $S = \{5\}$
b) $S = \{6\}$
c) $S = \{4\}$
d) $S = \{-26\}$
e) $S = \varnothing$
f) $S = \mathbb{R}$

3. a) $S = \{14\}$
b) $S = \left\{\frac{24}{5}\right\}$
c) $S = \left\{\frac{29}{3}\right\}$
d) $S = \{26\}$
e) $S = \{-2\}$
f) $S = \varnothing$

4. a) $S = \{1\}$
b) $S = \{8\}$
c) $S = \mathbb{R}$
d) $S = \varnothing$

5. a) F
b) V
c) V
d) V
e) V
f) F
g) V
h) V
i) F
j) F
k) V
l) V
m) V
n) F
o) F
p) V
q) F
r) V
s) V
t) V
u) F
v) V

Inequações do primeiro grau

6. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le 2\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge -8\}$
f) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{9}{2}\right\}$
g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 4\}$
h) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le -5\}$
i) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le 12\}$
j) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{11}{17}\right\}$
k) $S = \varnothing$
l) $S = \mathbb{R}$

7. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3{,}5 < x < 4\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$
c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -\frac{1}{4}\right\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -13 < x < -6\}$

Sistemas de equações do primeiro grau

8. a) $S = \{(0, 1)\}$
b) $S = \left\{\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)\right\}$
c) $S = \{(2,1)\}$
d) $S = \{(0, 0)\}$
e) $S = \varnothing$
f) $S = \{(6, 9)\}$
g) $S = \{(14, 1)\}$
h) $S = \{(2, 4, 5)\}$
i) $S = \{(3, -5, 2)\}$
j) $S = \{(0, 0, 0)\}$

Equações do segundo grau

9. a) $S = \{2, 3\}$
b) $S = \{-2, -3\}$
c) $S = \{6, -1\}$
d) $S = \{1, -6\}$
e) $S = \{1, 5\}$
f) $S = \{-1, -5\}$
g) $S = \left\{1, \frac{1}{5}\right\}$
h) $S = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$
i) $S = \left\{1, \frac{5}{2}\right\}$
j) $S = \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$
k) $S = \left\{2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}\right\}$
l) $S = \left\{5+\sqrt{10}, 5-\sqrt{10}\right\}$
m) $S = \{2\}$
n) $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$
o) $S = \varnothing$
p) $S = \varnothing$

10. a) $S = \{0, -3\}$
b) $S = \left\{0, \frac{5}{3}\right\}$
c) $S = \{0, 7\}$
d) $S = \{0, -2\}$
e) $S = \{0, 1\}$
f) $S = \{0, -1\}$

11. a) $S = \{-2, 2\}$
b) $S = \varnothing$
c) $S = \{-7, 7\}$
d) $S = \varnothing$
e) $S = \{-1, 1\}$
f) $S = \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$

3 Geometria

Paralelogramos e triângulos retângulos

1. a) V
b) V
c) V
d) F
e) F
f) V
g) F
h) F

2. a) F
b) V
c) F
d) V
e) F
f) F
g) V
h) F
i) V
j) F
k) V
l) V
m) V
n) V
o) V

Teorema de Pitágoras

3. a) $\sqrt{2}$ cm
b) $\sqrt{5}$ cm
c) $\sqrt{10}$ cm
d) $2\sqrt{2}$ dm
e) $\sqrt{13}$ dm
f) $\sqrt{17}$ dm
g) $2\sqrt{5}$ km
h) 5 km
i) $\sqrt{34}$ km
j) $\sqrt{29}$ m
k) 13 m
l) 10 m

4. a) $\sqrt{3}$ cm
b) $2\sqrt{2}$ cm
c) $\sqrt{5}$ cm
d) $\sqrt{15}$ dm
e) $2\sqrt{3}$ dm
f) $\sqrt{7}$ dm
g) $\sqrt{21}$ km
h) 4 km
i) 3 km
j) $\sqrt{11}$ m
k) $\sqrt{33}$ m
l) 12 m

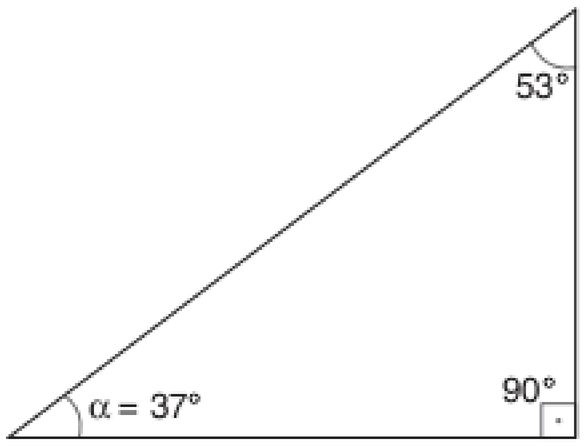
5. a) $\sqrt{34}$
b) 5
c) 12
d) $\sqrt{5}$
e) $\sqrt{2}$
f) $\sqrt{7}$
g) $2\sqrt{5}$
h) 2
i) 2
j) 4
k) 3
l) 1

6. a) 50 m
b) $10\sqrt{2}$ m
c) $5\sqrt{2}$ m
d) 5 m
e) $\sqrt{2}$ m
f) 20 m

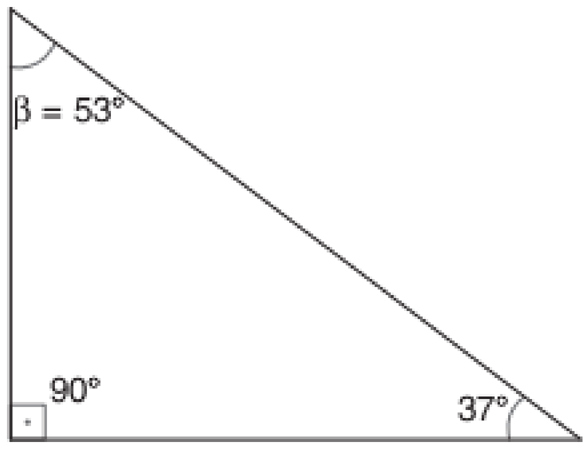
Relações trigonométricas no triângulo retângulo

7. a) $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$
$\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$
$\text{tg } \alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$
b) $\text{sen } \beta = \frac{8}{10} = 0{,}8$
$\cos \beta = \frac{6}{10} = 0{,}6$
$\text{tg } \beta = \frac{4}{3} = 1{,}33$
c) $\text{sen } x = \frac{12}{13} = 0{,}92$
$\cos x = \frac{5}{13} = 0{,}38$
$\text{tg } x = \frac{12}{5} = 2{,}4$
$\text{sen } y = \frac{5}{13} = 0{,}38$
$\cos y = \frac{12}{13} = 0{,}92$
$\text{tg } y = \frac{5}{12} = 0{,}42$

8. a)



b)



9. a) 42,9 cm c) 5 m
b) 57,15 m d) 2,747 cm

10. a) 4 cm
b) $5\sqrt{3}$ m
c) $4\sqrt{3}$ cm
d) 2 m
e) $5\sqrt{3}$ cm
f) $6\sqrt{2}$ m
g) 7 cm

Relações métricas no triângulo retângulo

11. a) 1 metro
b) 48 centímetros
c) 36 cm
d) 64 cm
e) 2.304 cm²
f) 2.304 cm²

12. Equivalentes.

13. a) PR = PQ + QR = 8 cm + 18 cm = 26 cm

b) Como PR é diâmetro da circunferência, pode-se concluir que o raio dessa circunferência mede 13 cm.

c) O triângulo PSQ está inscrito numa semicircunferência, logo se trata de um triângulo retângulo, cuja hipotenusa coincide com o diâmetro da circunferência. Portanto, o ângulo entre as retas PS e SR mede 90°.

d) Como o triângulo PSQ é retângulo, podemos concluir que os segmentos PQ e QR são as projeções ortogonais dos catetos PS e RS sobre a hipotenusa PR.
Entre as relações métricas no triângulo retângulo temos uma que diz:
"**o quadrado da altura equivale ao produto das projeções**".
Assim:

$SQ^2 = PQ \,.\, QR = 8\text{ cm} \,.\, 18\text{ cm} = 144\text{ cm}^2$

Logo, $SQ = \sqrt{144}\text{ cm} = 12\text{ cm}$

e) Outra das relações métricas no triângulo retângulo diz que:
"**O quadrado de um cateto equivale ao produto entre sua projeção e a hipotenusa**".
Assim:

$PS^2 = PQ \,.\, PR = 8\text{ cm} \,.\, 26\text{ cm} = 208\text{ cm}^2$

Logo, $PS = \sqrt{208}\text{ cm} = 4\sqrt{13}\text{ cm}$

f) Da mesma relação métrica, temos:

$SR^2 = QR \,.\, PR = 18\text{ cm} \,.\, 26\text{ cm} = 468\text{ cm}$

Logo, $SR = \sqrt{468}\text{ cm} = 6\sqrt{13}\text{ cm}$

Área do paralelogramo e diagonais do paralelogramo (Teorema dos cossenos)

14. 10 cm²

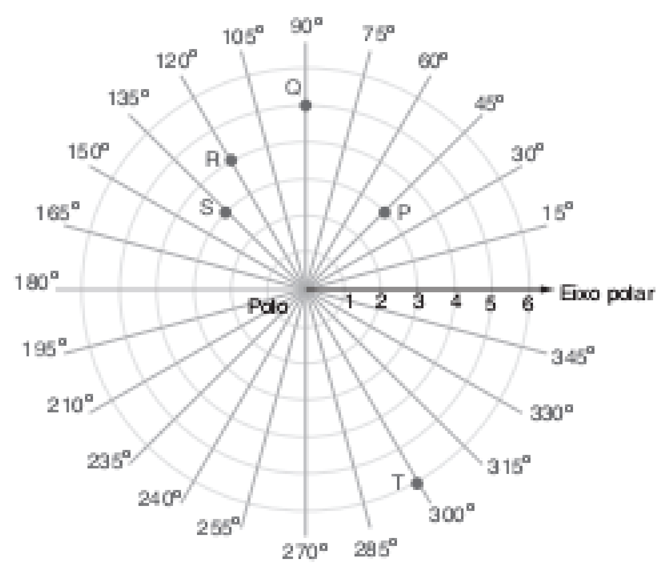
15. $50\sqrt{2}\text{ cm}^2$

16. 14 cm

17. 7 cm

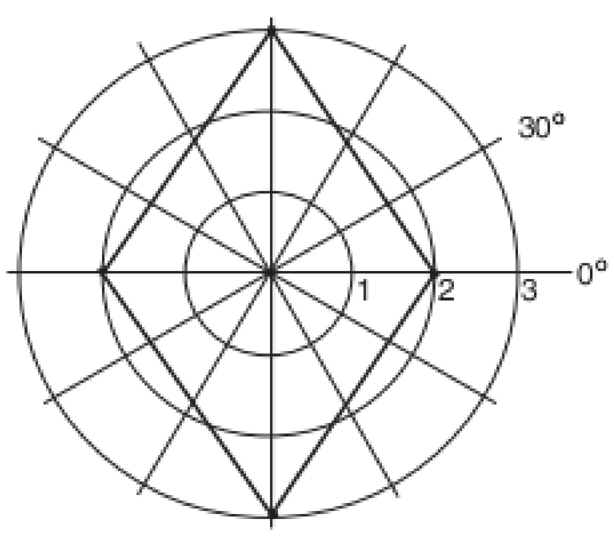
4 Álgebra x Geometria

1.

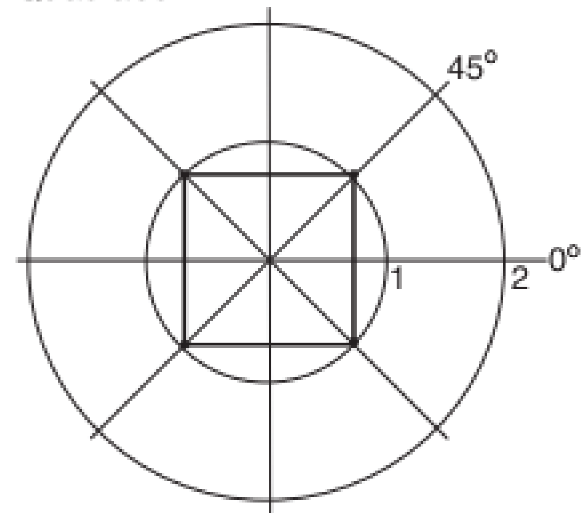


2. a) A(3, 30°) B(3, 150°) C(3, 210°)
D(3, 330°)
b) E(2, 60°) F(2, 330°) G(2, 240°)
H(2, 150°)
c) P(2, 180°) Q(1, 90°) R(2, 0°)
S(1, 270°)
d) X(3, 30°) Y(3, 150°) Z(3, 270°)
e) I(5, 15°) J(5, 75°) K(5, 135°)
L(5, 195°) M(5, 255°) N(5, 315°)
f) S(6, 180°) A'(3, 180°) O'(3, 225°)
P(3, 270°) A(4, 0°) U(2, 0°)
L(3, 90°) O(4, 135°)

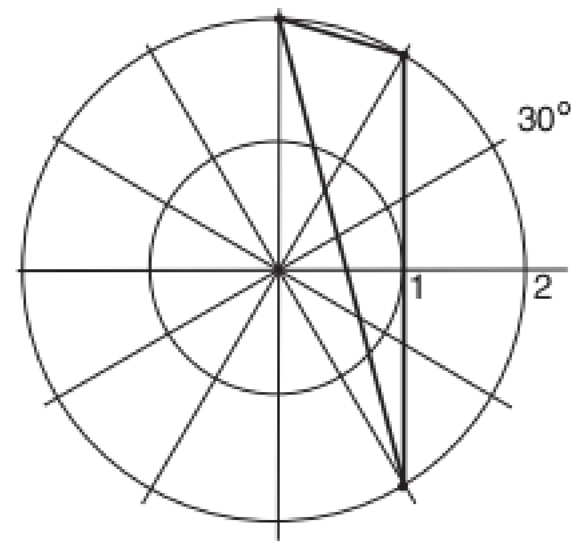
3. a) Losango



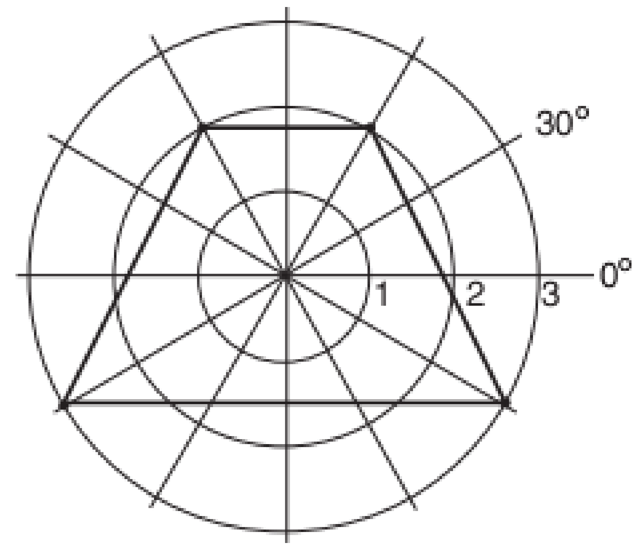
b) Quadrado



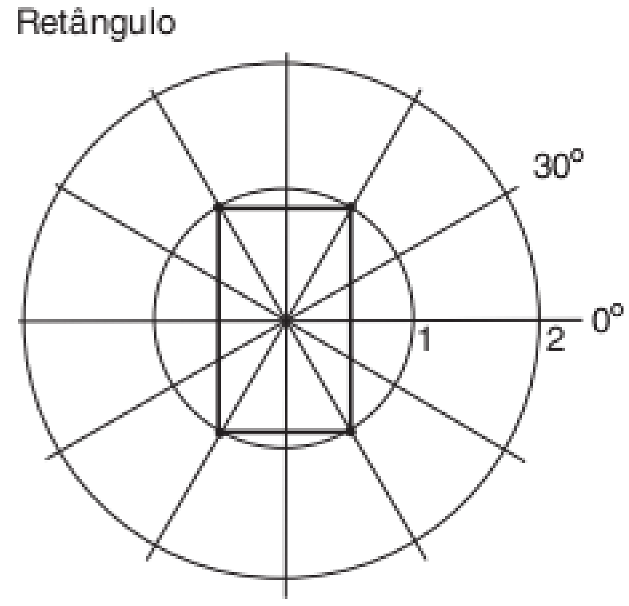
c) Triângulo escaleno



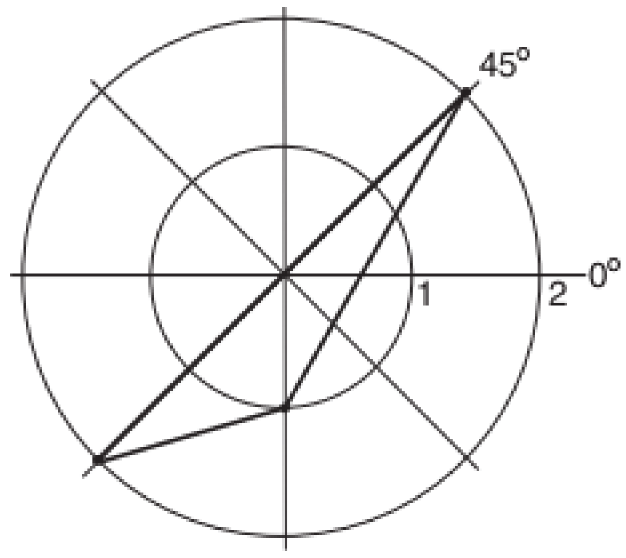
d) Trapézio isósceles



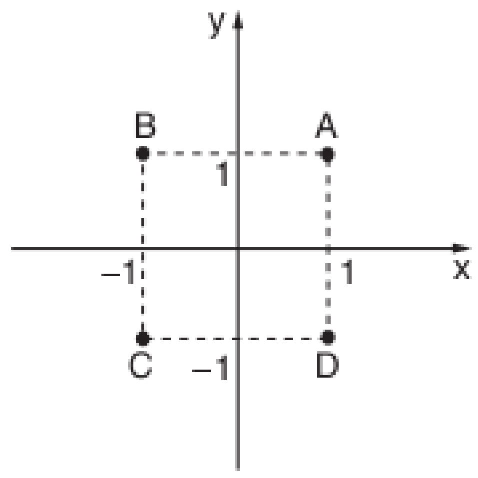
e) Retângulo



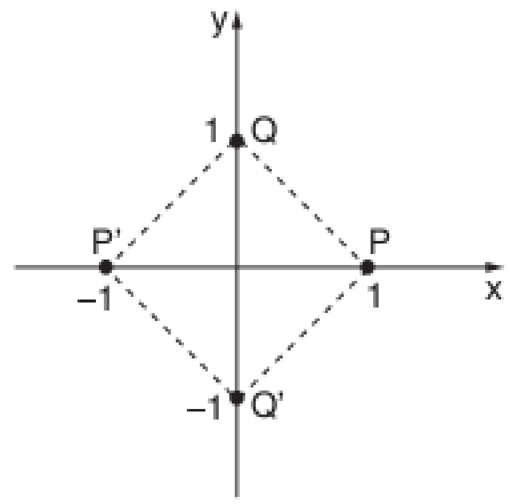
f) Triângulo obtusângulo



4.



5.



6. Razão entre as áreas $= \frac{2}{1}$

Razão entre os lados $= \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{1}$

7. I. Retângulo
II. Losango
III. Trapézio isósceles
IV. Quadrado
V. Trapézio retângulo

8. E

9. a) As possibilidades são: (1, 4), (2, 7), (7, 2) ou (8, 5).
b) As possibilidades são: (3, 5) ou (6, 4).

10. a) $m = -\frac{7}{3}$ e $n = -\frac{5}{3}$
b) $m = n = \frac{1}{3}$
c) $m = -1$ e $n = 1$

11. A

12. a) 2 m
b) 2 cm
c) 20 cm
d) 20 m

13. a) P', Q e D
b) P, P' e B
c) C
d) O, P, P', Q, A, B e C

14. a) (2, 3)
b) (2, 3) e (–3, 8)
c) (0, 5) e (5, 0)
d) (1, 4) e (4, 1)

15. a) $(a, b) \in$ Região V
b) $(b, a) \in$ Região G
c) $(a, -b) \in$ Região D
d) $(b, -a) \in$ Região M
e) $(-a, -b) \in$ Região C
f) $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) \in$ Região R
g) $(a - b, a + b) \in$ Região W ou Z
h) $(b^2, a - 1) \in$ Região R

16. a) 20
b) 1998 e 2000
c) 2006
d) De 1999 a 2006.
e) De 1998 a 1999 e de 2006 a 2008.
f) 30 milhões

17. a) F
b) F
c) F
d) V
e) V
f) F
g) V
h) V

18. D

19. B

20. E

21. C

22. a) 290 ppm
b) Na década de 70.
c) 30 ppm
d) $\frac{1}{6}$ ppm/ano = 0,1667 ppm/ano
e) 1ppm/ano

23. D

24. D

25. C

26. B

27. E

28. E

29. Cerca de 30 anos.

30. A

31. a) 4 vezes.
b) Dezembro, fevereiro, março e abril.
c) Fevereiro.
d) 100

5 A Matemática no estudo da Física

Notação científica

1. a) 2×10^3
b) 5×10^6
c) $7,8 \times 10^8$
d) 8×10^{-3}
e) 5×10^{-6}
f) $3,4 \times 10^{-8}$
g) 3×10^0
h) $4,5 \times 10^1$
i) $6,78 \times 10^2$
j) 5×10^6
k) 6×10^9
l) $7,8 \times 10^{-4}$

2. a) 10^0 e 3
b) 10^1 e 3
c) 10^2 e 3
d) 10^2 e 4
e) 10^4 e 3
f) 10^5 e 1
g) 10^{16} e 2
h) 10^{24} e 3
i) 10^5 e 3
j) 10^5 e 1
k) 10^{-5} e 4
l) 10^{-8} e 2

3. $4,3 \times 10^5$

4. a) $4,32 \times 10^9$
b) $2,16 \times 10^7$
c) $1,74 \times 10^3$
d) $1,5 \times 10^{-1}$
e) $7,44 \times 10^7$
f) $1,728 \times 10^{14}$

Grandezas escalares

5. 700 m

6. 7 hm

7. 7 hm = 7 . 10^2 m = 7 . 100 m = 700 m

8. a) 18.600 m
b) 0,025 m
c) 3,5 m
d) 0,03 m

9. a) 0,5 kg
b) 0,025 kg
c) 0,0187 kg

10. a) 150 minutos (150 min)
b) 1.200 segundos (1.200 s)
c) 4 horas (4 h)
d) 1 hora e meia (1,5 h)
e) 50 minutos (50 min)
f) 500 horas (500 h)

11. a) 0,005 m^2
b) 200.000 m^2
c) 0,008 m^2

12. a) 0,00005 m^3
b) 200.000.000 m^3
c) 0,0008 m^3

13. a) 0,25 L
b) 50 L
c) 0,08 L

14. a) 500 cm^3
b) 30.000 cm^3
c) 800 cm^3

15. a) 360 km/h
b) 7,2 km/h
c) 1,8 km/h

16. a) 5 m/s
b) 40 m/s
c) 250 m/s

Grandezas vetoriais

17. a) $\vec{B}, \vec{D}, \vec{E}, \vec{G}$ e $\vec{H}$ (módulo 4)
$\vec{A}$ e $\vec{F}$ (módulo $\sqrt{13}$)
b) $\vec{B}, \vec{D}$ e $\vec{H}$; $\vec{A}$ e $\vec{F}$; $\vec{E}$ e $\vec{G}$
c) $\vec{B}$ e $\vec{H}$; $\vec{E}$ e $\vec{G}$; $\vec{A}$ e $\vec{F}$
d) $\vec{B}$ e $\vec{H}$; $\vec{A}$ e $\vec{F}$; $\vec{E}$ e $\vec{G}$
e) 5 vetores.

18. a) $\vec{A}$ e $\vec{F}$; $\vec{E}, \vec{G}$ e $\vec{I}$
b) $\vec{A}$ e $\vec{F}$; $\vec{E}, \vec{G}$ e $\vec{I}$
c) $\vec{A}, \vec{F}$ e $\vec{D}$; $\vec{G}, \vec{H}$ e $\vec{I}$
d) $\vec{A}$ e $\vec{F}$; $\vec{G}$ e $\vec{I}$

19. E

20. A

21. a) 8 cm
b) 5 cm
c) 13 cm
d) 10 cm

22. C

23. C

24. $\vec{B}$ e $\vec{D}$; $\vec{H}$ e $\vec{D}$; $\vec{E}$ e $\vec{G}$; $\vec{A}$ e $\vec{F}$

25. a) $2\sqrt{13}$ cm
b) $4\sqrt{10}$ cm

26. a) 21
b) 7

27. $A_x = 10$ cm e $A_y = 10\sqrt{3}$ cm