Canguru 2009 – Nível J - Soluções

Problemas 3 pontos

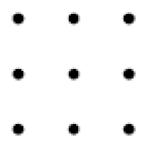
1. Qual dos números a seguir é múltiplo de 3?

(A) 2009 **(B)** 2 + 0 + 0 + 9 **(C)** (2 + 0) · (0 + 9) **(D)** 29 **(E)** 200 – 9

1. Alternativa C

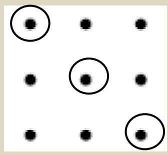
Um número é múltiplo de 3 quando a soma de seus algarismos é um múltiplo de 3. Outra informação: se um produto tem como fator um múltiplo de 3, então o resultado é um múltiplo de 3. No caso, $(2+0)(0+9)=2\times 9$ é múltiplo de 3.

2. Qual é o menor número de pontos que precisamos remover da figura ao lado de modo que entre os pontos restantes não haja três colineares?



(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 7

2. Alternativa C



As 8 retas contendo 3 pontos possuem pontos comuns. Cada vez que eliminamos esses pontos comuns, eliminamos um dos 3 pontos dessas retas. Devemos então procurar os pontos comuns que são intersecções do maior número possível de retas. O ponto central é intersecção de 4 retas: deve ser retirado. Restam agora somente pontos que são intersecções de duas retas. Eliminando dois deles, acabamos com todos os conjuntos de três pontos colineares. Logo, o menor número de pontos que deve ser removido é 3.

3. Participaram de uma corrida 2009 pessoas. O número de pessoas que João venceu é o triplo do número de pessoas que venceram João. Em que lugar João foi classificado na corrida?

(A) 503º **(B)** 501º **(C)** 500º **(D)** 1503º **(E)** 1507º

3. Alternativa A

Se x é o número de pessoas que venceram João, então $3x$ é o número de pessoas que João venceu. Assim, $1+x+3x=2009 \Leftrightarrow 4x+1=2009 \Leftrightarrow 4x=2008 \Leftrightarrow x=502$ e João foi classificado em 503º lugar.

4. Qual é o valor de $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{5}{6}$ de $\frac{6}{7}$ de $\frac{7}{8}$ de $\frac{8}{9}$ de $\frac{9}{10}$ de 1000?

(A) 250 **(B)** 200 **(C)** 100 **(D)** 50 **(E)** Nenhum dos anteriores.

4. Alternativa C

$\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{5}{6}$ de $\frac{6}{7}$ de $\frac{7}{8}$ de $\frac{8}{9}$ de $\frac{9}{10}$ de $1000 = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{6}{7}\times\frac{7}{8}\times\frac{8}{9}\times\frac{9}{10}\times 1000 =$
$\frac{1}{10}\times 1000 = 100.$

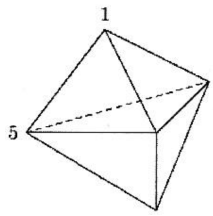
5. Uma longa sequência de algarismos compõe-se do número 2009 escrito 2009 vezes. A soma dos algarismos ímpares dessa sequência que são imediatamente seguidos por um algarismo par é igual a

(A) 2 **(B)** 9 **(C)** 4018 **(D)** 18072 **(E)** 18081

5. Alternativa D

O único algarismo ímpar da sequência que não é imediatamente seguido por um algarismo par é o último 9 da sequência 200920092009...20092009. A soma de 2008 algarismos 9 é igual a $2008\times 9 = 18072$.

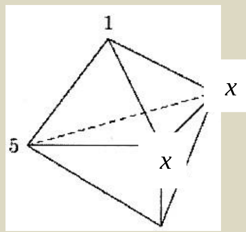
6. O sólido representado tem 6 faces triangulares, com um número em cada vértice. A soma dos números dos vértices em cada face é igual para todas as faces. Os números 1 e 5, conforme figura, são dois dos cinco números dos vértices. Qual é a soma desses cinco números?



(A) 9 **(B)** 12 **(C)** 17 **(D)** 18 **(E)** 24

6. Alternativa C

Seja x o número no vértice das duas faces com 1 e 5 nos vértices. Temos então $5+1+x = x+x+1 \Leftrightarrow x = 5$. Portanto, no 5º vértice deve estar o número 1. A soma dos números nos cinco vértices é 5 + 5 + 5 + 1 +1 =17.



7. Quantos inteiros positivos têm seus quadrados e seus cubos com o mesmo número de algarismos na sua representação decimal?

(A) 0 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 9 **(E)** Infinitos

7. Alternativa B

Observe que se $x \geq 10$, então $x^3 \geq 10x^2$, logo o cubo do número terá pelo menos um algarismo a mais que o seu quadrado. Portanto, basta testar os números de 1 a 9.

$1^2 = 1;\ 1^3 = 1$

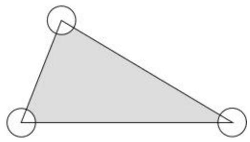
$2^2 = 4;\ 2^3 = 8$

$3^2 = 9;\ 3^3 = 27$

$4^2 = 16; 4^3 = 64$

Para *x* de 5 a 9, temos $25 \leq x^2 \leq 81$, enquanto que $x^3 \geq 125$, ou seja, o quadrado tem dois algarismos e o cubo tem pelo menos três algarismos. Logo, há apenas 3 números cujos cubos e quadrados têm o mesmo número de algarismos.

8. A área do triângulo da figura é 80 m^2 e o raio de cada um dos círculos com centro nos vértices é 2 m. Qual é a medida, em m^2, da área sombreada?



(A) 76 **(B)** $80 - 2\pi$ **(C)** $40 - 4\pi$ **(D)** $80 - \pi$ **(E)** 78π

8. Alternativa B

A região sombreada tem área igual à do triângulo menos as áreas dos três setores de raio 2 m, com centros nos vértices do triângulo. A soma das áreas desses três setores circulares é $\frac{\pi \cdot 2^2 \cdot \alpha}{360^O} + \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot \beta}{360^O} + \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot \gamma}{360^O} = \frac{\pi}{90^O}(\alpha + \beta + \gamma)$, onde α, β e γ são as medidas dos ângulos internos do triângulo. Assim, a soma das áreas dos três setores é $\frac{\pi}{90^O} \cdot 180^O = 2\pi$ e a medida da área sombreada é $80 - 2\pi$.

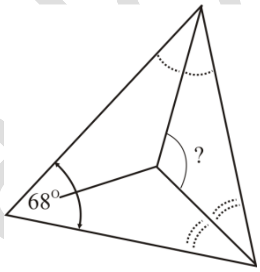
9. Leonardo escreveu uma sequência de números tal que cada número, a partir do terceiro, era a soma dos dois números anteriores na sequência. O quarto número era 6 e o sexto número era 15. Qual era o sétimo número dessa sequência?

(A) 9 **(B)** 16 **(C)** 21 **(D)** 22 **(E)** 24

9. Alternativa E

Como o sexto número é a soma do quarto com o quinto, temos que 15 é a soma de 6 com o quinto número, que é, portanto, 9. O sétimo número é a soma do quinto com o sexto, logo vale 9 mais 15, ou seja, 24.

10. Um triângulo tem um ângulo de 68^{o}. As três bissetrizes internas dos ângulos desse triângulo foram traçadas na figura. Qual é a medida do ângulo indicado pelo sinal de interrogação?



(A) 120º **(B)** 124º **(C)** 128º **(D)** 132º **(E)** 136º

10. Alternativa B

Seja *x* a medida do ângulo indicado e α e β as medidas dos outros dois ângulos internos do triângulo. Então

$$\left|\begin{array}{l} x+\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}=180^{O} \\ \alpha+\beta+68^{O}=180^{O} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x+\dfrac{\alpha+\beta}{2}=180^{O} \\ \alpha+\beta=180^{O}-68^{O} \end{array}\right. \Rightarrow x+\dfrac{180^{O}-68^{O}}{2}=180^{O}$$

$$\Leftrightarrow x=180^{O}-90^{O}+34^{O}=124^{O}.$$

Problemas 4 pontos

11. A pontuação de cada prova pode ser 0, 1, 2, 3, 4 ou 5. Em 4 provas, a média de Maria é 4. Uma das afirmações a seguir não pode ser verdadeira. Qual é essa afirmação?

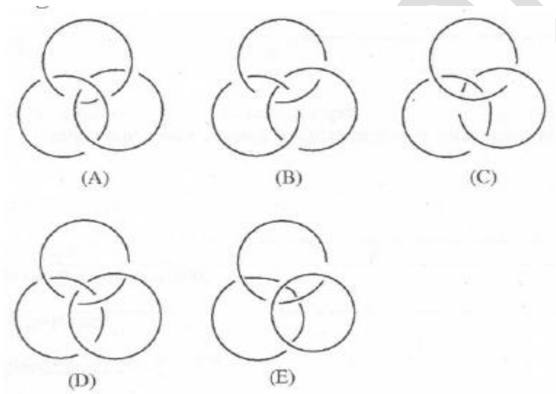
(A) Maria tirou 4 em todas as provas.
(B) Maria tirou 3 exatamente duas vezes.
(C) Maria tirou 3 exatamente três vezes.
(D) Maria tirou 1 exatamente uma vez.
(E) Maria tirou 4 exatamente duas vezes.

11. Alternativa C

Se a media aritmética em quatro provas é 4, então a soma dos pontos que Maria obteve nas provas é 16.

(A) pode ocorrer, pois $4 \times 4 = 16$
(B) pode ocorrer, pois 3 + 3 + 5 + 5 =16
(C) <u>não</u> pode ocorrer, pois 3 + 3 + 3 + x = 16 se, e somente se, x = 7, mas o maior valor possível para x é 5.
(D) pode ocorrer, pois 1 + 5 + 5 + 5 =16
(E) pode ocorrer, pois 4 + 4 + 5 + 3 = 16

12. Os anéis Borromeanos são formados por três anéis entrelaçados, que não podem ser separados, mas uma vez que um deles seja removido (não importa qual) os outros dois ficam livres. Qual das seguintes figuras mostra anéis Borromeanos?



12. Alternativa B

Em todos os conjuntos de anéis, exceto *B*, ao se retirar algum dos três anéis, os dois outros anéis permanecem entrelaçados, não podendo ser separados. No conjunto *B*, ao se remover qualquer um dos três anéis, verificamos que os outros dois ficam livres.

13. Na ilha dos verazes e mentirosos, 25 pessoas esperam numa fila. Todo mundo, exceto a primeira pessoa da fila, diz que a pessoa da frente é um mentiroso. O primeiro da fila disse que todos atrás dele são mentirosos. Quantos mentirosos há na fila? (os verazes sempre dizem a verdade, ao passo que os mentirosos sempre falam mentira)

(A) 0 **(B)** 12 **(C)** 13 **(D)** 24 **(E)** Impossível determinar

13. Alternativa C

Se o primeiro da fila é veraz, então todos atrás dele são mentirosos. Logo, o segundo da fila é mentiroso e de fato é, porque ele diz que o primeiro da fila é mentiroso. Mas o terceiro da fila, ao afirmar que a pessoa à sua frente é mentirosa, está dizendo a verdade. Isto contradiz a hipótese de que o primeiro da fila diz a verdade ao afirmar que todos atrás de si são mentirosos.
Portanto, o primeiro da fila mente, o segundo da fila diz a verdade, o terceiro da fila mente, e assim, por diante, até o 25º da fila, que mente. Portanto, há 13 mentirosos na fila (de 1 a 25 há 13 números ímpares).

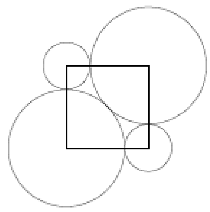
14. Se $a \square b = ab + a + b$ e $3 \square 5 = 2 \square x$, então x é igual a:
(A) 3 **(B)** 6 **(C)** 7 **(D)** 10 **(E)** 12

14. Alternativa C
De acordo com a regra apresentada,temos:

$$\begin{cases} 3 \square 5 = 3\times 5 + 3 + 5 = 23 \\ 2 \square x = 2x + 2 + x = 3x + 2 \end{cases}$$

Logo $3 \square 5 = 2 \square x \Leftrightarrow 3x + 2 = 23 \Leftrightarrow 3x = 21 \Leftrightarrow x = 7$

15. São desenhadas circunferências com centros nos vértices de um quadrado, sendo duas maiores e duas menores. As maiores são tangentes entre si e às duas menores. O raio de uma circunferência grande vale x vezes o raio de uma circunferência menor. Quanto vale x?



(A) $\frac{2}{9}$ **(B)** $\sqrt{5}$ **(C)** $1+\sqrt{2}$ **(D)** 2, 5 **(E)** 0, 8π

15. Alternativa C

As duas circunferências maiores tangenciam-se no centro do quadrado, ou seja, no ponto médio da diagonal do quadrado. Se ℓ é a medida do lado do quadrado, então o raio das circunferências maiores é $R = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$ e o raio das circunferências menores é $r = \ell - \frac{\ell\sqrt{2}}{2} = \frac{\ell}{2}\left(2-\sqrt{2}\right)$, pois de acordo com a figura $R + r = \ell$. Como $R = x \times r$ temos $x = \frac{R}{r} = \frac{\frac{\ell}{2}\sqrt{2}}{\frac{\ell}{2}\left(2-\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)}{2} = 1+\sqrt{2}$.

16. O módulo da diferença entre $\sqrt{n}$ e 10 é menor do que 1. Quantos inteiros n existem nessas condições?

(A) 19 **(B)** 20 **(C)** 39 **(D)** 40 **(E)** 41

16. Alternativa C

Ao calcular a diferença entre $\sqrt{n}$ e 10 devemos considerar $\sqrt{n}-10<1$ e $10-\sqrt{n}<1$.
Isto significa que $-1<\sqrt{n}-10<1 \Leftrightarrow 9<\sqrt{n}<11 \Leftrightarrow 81<n<121$. Em outras palavras, n pode assumir todos os valores inteiros de 82 a 120, o que dá um total de 120 – 82 + 1= 39 inteiros.

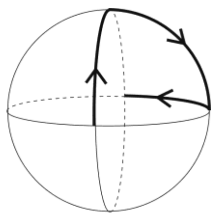
17. Sexta-Feira escreveu em fila vários números inteiros positivos diferentes e menores do que 11. Robinson Crusoé examinou os números e percebeu com satisfação que, para cada par de números vizinhos, um dos números é divisível pelo outro. No máximo, quantos números Sexta-Feira escreveu?

(A) 6 **(B)** 7 **(C)** 8 **(D)** 9 **(E)** 10

17. Alternativa D

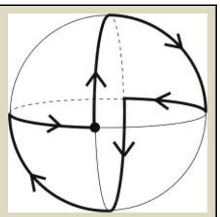
Sexta Feira poderia ter escrito **8, 4, 2, 10, 5, 1, 6, 3, 9**, não necessariamente nesta ordem. O número 7 é o único que não pode ser incluído, pois é múltiplo apenas de 1 e não tem um múltiplo maior que ele entre os números considerados. Portanto, a lista escrita por Sexta Feira tem 9 números.

18. Três aros circulares são soldados de modo que se intersectam formando ângulos retos, conforme mostrado na figura. Uma joaninha pousa numa intersecção qualquer e caminha por um aro da seguinte maneira: anda um quarto de um círculo e vira à direita 90º, anda um quarto de círculo e vira à esquerda 90º. Caminhando dessa forma, quantos quartos de círculo ela irá percorrer até voltar pela primeira vez ao ponto de partida?



(A) 6 **(B)** 9 **(C)** 12 **(D)** 15 **(E)** 18

18. Alternativa A



O desenho mostra o caminho percorrido pela Joaninha, desde sua partida até o primeiro retorno ao ponto de partida. Ela percorre 6 quartos de círculo.

19. Quantos zeros devem ser escritos no lugar de $*$ no numeral decimal $1,*1$ de modo a obter-se um número menor do que $\frac{2009}{2008}$ porém maior do que $\frac{20009}{20008}$?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

19. Alternativa C

Temos $\frac{2009}{2008}=1,00049...$ e $\frac{20009}{20008}=1,00004...$.
Como $\frac{20009}{20008}<1,00005<1,0001<1,00049<\frac{2009}{2008}$, concluímos que devemos colocar 3 zeros no lugar de * na fração decimal 1,*1, para obtermos $\frac{20009}{20008}<1,*1<\frac{2009}{2008}$.

20. Se $a=2^{25}, b=8^{8}$ e $c=3^{11}$, então

(A) $a < b < c$ **(B)** $b < a < c$ **(C)** $c < b < a$ **(D)** $c < a < b$ **(E)** $b < c < a$

20. Alternativa C

Temos $3^{11}<4^{11}=\left(2^{2}\right)^{11}=2^{22}$ e $8^{8}=\left(2^{3}\right)^{8}=2^{24}$. Portanto, $c=3^{11}<4^{11}=2^{22}<b=2^{24}<a=2^{25}$.

Problemas 5 pontos

21. Considere os números de dez algarismos, sendo eles 1, 2 ou 3, de modo que dois algarismos vizinhos diferem de 1. Quantos números assim formados existem?

(A) 16 **(B)** 32 **(C)** 64 **(D)** 80 **(E)** 100

21. Alternativa C

Podemos começar a escrever o número a partir da esquerda.
Começando com 1, o próximo algarismo só pode ser o 2; em seguida, podemos escrever 1 ou 3; o próximo, somente o 2; novamente, 1 ou 3; em seguida, somente o 2; novamente 1 ou 3; em seguida, somente o 2; mais uma vez, 1 ou 3; o último algarismo (o das unidades), somente o 2. Pelo princípio multiplicativo da contagem, podemos escrever $1\times1\times2\times1\times2\times1\times2\times1\times2\times1=16$ números diferentes. Começando com 3, ocorre o mesmo. Teremos, novamente, mais 16 números diferentes.
Se começarmos com o 2, o próximo é 1 ou 3; em seguida, 2, depois 1 ou 3, novamente 2, depois 1 ou 3, novamente 2, depois 1 ou 3, novamente 2, depois 1 ou 3 e, finalmente, o 1 ou 3 como algarismos das unidades. Pelo mesmo princípio, teremos $1\times2\times1\times2\times1\times2\times1\times2\times1\times2=32$ números diferentes. Portanto, no total teremos 16 + 16 + 32 = 64 números assim formados.

22. O jovem Canguru tem 2009 cubos $1\times1\times1$, formando um bloco retangular. Ele possui também 2009 cartões adesivos 1×1 que irá usar para colorir a superfície externa do bloco, sem superpor cartões. Terminada a tarefa, irão sobrar alguns cartões. Quantos?

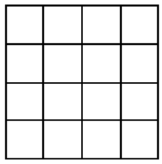
(A) Mais de 1000. **(B)** 763 **(C)** 476 **(D)** 49

(E) Faltarão cartões para ele terminar a tarefa.

22. Alternativa B

Os diferentes blocos retangulares que podem ser construídos com os 2009 cubinhos podem ser $1\times1\times2009$, $1\times7\times287$ ou $7\times7\times41$.
O número de adesivos 1×1 necessários para cobrir toda a superfície de um bloco é numericamente igual à área da superfície do bloco. No bloco $1\times1\times2009$ a área da superfície é $2(1\times1)+4(1\times2009)=8038$; no bloco $1\times7\times287$ a área da superfície é $2(1\times7)+2(1\times287)+2(7\times287)=4606$ e no bloco $7\times7\times41$ a área da superfície é $2(7\times7)+4(7\times41)=1246$. Como havia 2009 adesivos, o único bloco que poderia ser recoberto é este último, tendo sobrado 2009 – 1246 = 763 adesivos.

23. Roberto quer colocar peças nas casas de um tabuleiro 4 × 4 de modo que as quantidades totais de peças nas linhas e colunas sejam todas diferentes (nenhuma, uma ou mais peças podem ser colocadas em uma mesma casa). Qual é o menor número possível de peças que podem ser colocadas no tabuleiro?



A) 12 **(B)** 14 **(C)** 15 **(D)** 18 **(E)** 20

23. Alternativa B

0	1	0	0	→ 1
0	2	0	0	→ 2
0	0	4	0	→ 4
0	0	1	6	→ 7
↓ 0	↓ 3	↓ 5	↓ 6	

Para que o número de peças colocadas no tabuleiro seja o menor possível, a soma das quantidades de peças nas linhas, igual à soma das quantidades de peças nas colunas, deve ser a menor possível. Como são quatro linhas e quatro colunas, os oito números de peças (quatro linhas, quatro colunas) devem ser diferentes e a soma é a menor possível se esses números forem 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. De fato, é possível colocar as peças obtendo esses números. A figura mostra uma dessas configurações. Portanto, o menor número de peças é 1 + 2 + 4 + 7 = 0 + 3 + 5 + 6 = 14.

24. Algumas laranjas, pêssegos, maçãs e bananas foram dispostas em uma fila, de modo que qualquer tipo de fruta pode ser encontrado vizinho a qualquer um dos outros tipos de fruta, em algum ponto da fila. Qual é o menor número possível de frutas colocadas nessa fila?

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 8 **(D)** 11 **(E)** Essa situação é impossível.

24. Alternativa C

Cada fruta deve aparecer como vizinha de cada uma das outras 3 frutas. Se foram colocadas numa carreira, quer dizer, numa linha, uma fruta só pode ser vizinha de outras duas, a cada vez. Representando por L, P, M e B, laranjas, pêssegos, maçãs e bananas, podemos começar a carreira assim:
L P M B, isso não basta (não há nenhuma fruta vizinha das outras 3).
Vamos acrescentar uma fruta à direita (poderia ser à esquerda), então L P M B P (com isso, P já está OK)
Mais uma, à esquerda, B L P M B P (com isso, B também está OK).
Falta o L ser vizinho de M e vice-versa. Teremos que colocar mais duas frutas, M L B L P M B P.
Portanto, o menor número possível de frutas colocadas em linha é 8.

25. Qual é o menor inteiro n para o qual $(2^2-1)\cdot(3^2-1)\cdot(4^2-1)\cdot\ldots\cdot(n^2-1)$ é um quadrado perfeito?

(A) 6 **(B)** 8 **(C)** 16 **(D)** 27 **(E)** Outro valor.

25. Alternativa B

O produto é $3\times8\times15\times24\times\cdots\times\left(n^2-1\right)$. Podemos olhar para os fatores primos que compõem os fatores do produto, lembrando que este é um quadrado perfeito se, e somente se, os expoentes dos fatores primos são pares. A estratégia é ir escrevendo os fatores de cada vez, contabilizando os expoentes dos fatores primos empregados até o fator escrito. Assim:

$3\times8=3^1\times2^3$

$3\times8\times15=3^2\times2^3\times5^1$

$3\times8\times15\times24=3^3\times2^6\times5^1$

$3\times8\times15\times24\times35=3^3\times2^6\times5^2\times7^1$

$3\times8\times15\times24\times35\times48=3^4\times2^{10}\times5^2\times7^1$

$3\times8\times15\times24\times35\times48\times63=3^6\times2^{10}\times5^2\times7^2$

Concluímos, assim, que o menor inteiro para o qual o produto dado é um quadrado perfeito é $n = 8$.

26. Considere todos os divisores positivos do número inteiro positivo n, diferentes do próprio n e de 1. O maior desses divisores é igual a 45 vezes o menor deles. Quantos números n satisfazem a essa condição?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** Mais de 2. **(E)** Impossível determinar.

26. Alternativa C

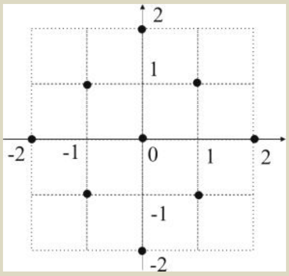
Seja p o menor divisor primo de n: então $45p$ é um divisor de n, menor do que n. Como $45=3^2\times5$, concluímos que 3 e 5 são divisores primos de n.
Se n for par, então $p = 2$ e $45p = 90$, logo $n=2\times90=180$.
Se n for ímpar, então $p = 3$ e $45p = 135$. Logo $n=3\times135=405$.
Portanto, somente dois números n satisfazem a condição dada.

27. Um canguru está sentado na origem do sistema cartesiano ortogonal . Ele pode saltar 1 unidade verticalmente, para cima ou para baixo, ou horizontalmente, para a direita ou para a esquerda. Quantos pontos distintos do plano o canguru pode atingir após 10 desses saltos?

(A) 121 **(B)** 100 **(C)** 400 **(D)** 441 **(E)** Nenhum dos valores anteriores.

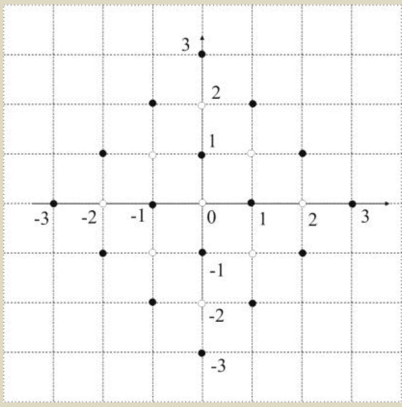
27. Alternativa A

Para ilustrar o raciocínio que iremos utilizar, imagine que o canguru dê apenas um salto. Ele poderá atingir 4 pontos distintos: $(1;0),(-1;0),(0;1),(0;-1)$, andando, respectivamente, para a direita, para a esquerda, para cima, para baixo. Observe que o ponto (0;0) não pode ser atingido, ou seja, o canguru não pode voltar a ele.



Para um salto, a soma das coordenadas do ponto final é ± 1.

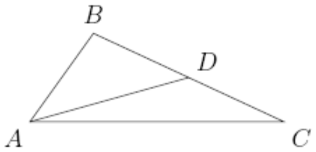
Com dois saltos, a soma das coordenadas do ponto final é 0 ou ± 2. Ele poderá atingir 9 pontos, conforme ilustrado acima.



Quando o canguru dá três saltos, ele somente pode atingir pontos cujas coordenadas, somadas, dão um número ímpar, ou seja, $\pm 1, \pm 3$. Isso totaliza 16 pontos.

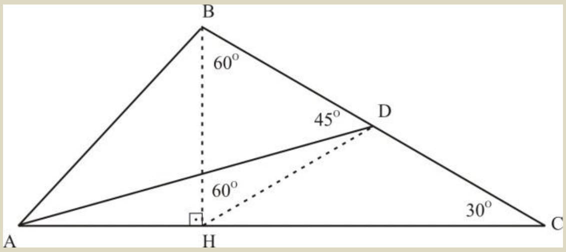
Indutivamente, chegamos à conclusão de que, com *n* saltos, o canguru atinge $(n+1)^2$ pontos. Logo, se ele dá 10 saltos, então poderá atingir $11^2 = 121$ pontos.

28. Seja AD uma mediana do triângulo ABC. O ângulo $A\hat{C}B$ mede 30º e o ângulo $A\hat{D}B$ mede 45º. Qual é a medida do ângulo $B\hat{A}D$?



(A) 45◦ **(B)** 30◦ **(C)** 25◦ **(D)** 20◦ **(E)** 15◦

28. Alternativa B



No triângulo ABC, no desenho, traçamos a altura $\overline{BH}$. Como $m\left(A\hat{C}B\right)=m\left(H\hat{C}B\right)=30^{O}$, no triângulo retângulo BHC, temos $m\left(C\hat{B}H\right)=90^{O}-30^{O}=60^{O}$. Como $\overline{HD}$ é a mediana relativa à hipotenusa $\overline{BC}$, concluímos que $HD=\dfrac{BC}{2}=BD$, logo o triângulo BDH é equilátero. Como $m\left(B\hat{D}H\right)=60^{O}$, temos $m\left(A\hat{D}H\right)=60^{O}-45^{O}=15^{O}$. No triângulo ACD, o ângulo $A\hat{D}B$ é externo, logo $m\left(D\hat{A}H\right)=45^{O}-30^{O}=15^{O}$. Assim, o triângulo ADH é isósceles e AH = HD. Mas HD = BH (lembre-se que o triângulo BDH é eqüilátero), logo AH = BH. Portanto, o triângulo retângulo AHB é isósceles e, dessa forma, $m\left(B\hat{A}H\right)=45^{O}$. Consequentemente,

$$m\left(B\hat{A}D\right)=45^{O}-15^{O}=30^{O}.$$

29. Qual é a menor quantidade de números que devem ser removidos do conjunto{1, 2, 3, . . . ,16} de modo que a soma de dois quaisquer dos números restantes não seja um quadrado perfeito?

(A) 8 **(B)** 9 **(C)** 11 **(D)** 13 **(E)** 14

29. Alternativa A

Dois dos números que restarem não podem somar 4, 9, 16, 25.
No conjunto {1, 2, ... , 16}, vejamos algumas das somas que não podem aparecer (as somas 1 e 4 são irrelevantes):

9:	1 + 8	2 + 7	3 + 6	4 + 5			
16:	1 + 15	2 + 14	3 + 13	4 + 12	5 + 11	6 + 10	7 + 9
25:	9 + 16	10 + 15	11 + 14	12 + 13			

Vemos que há 15 somas envolvendo 30 números. Os números 8 e 16 aparecem uma única vez. Cada um dos demais números aparece duas vezes (de fato, $30-2=28$ e $\dfrac{28}{2}=14$). Devemos apagar os números de modo que desapareça uma parcela de cada uma das somas. Como há 4 somas em cima e 4 somas em baixo, sem repetições de números, será inevitável apagar pelo menos 8 números. Vemos que isso é suficiente, apagando 1, 2, 3, 4 e 9, 10, 11, 12. Nesse caso o conjunto remanescente será {5,6,7,8, 13,14,15,16}.

30. Um número primo é chamado *estranho* se é um número primo de um algarismo ou se tem dois ou mais algarismos e os dois números que se obtêm, omitindo-se o primeiro ou o último algarismo do número, são também estranhos. Quantos números primos estranhos existem?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 11

30. Alternativa D

Há quatro estranhos, primos de um algarismo: 2, 3, 5 e 7. Há quatro estranhos, primos de dois algarismos: 23, 37, 53 e 73 (para obtê-los basta juntar dois estranhos de um algarismo e eliminar os que não são primos)
Para obter os estranhos de três algarismos, junte os estranhos de um algarismo aos estranhos de dois algarismos. Iremos obter somente um estranho: 373.
Juntando os estranhos de um algarismo ao estranho de três algarismos, não iremos obter nenhum novo estranho. Logo, não há estranhos de quatro ou mais algarismos. O número total de estranhos é 9.