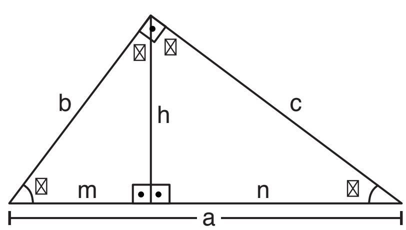
Relações Métricas no Triângulo Retângulo e Relações Trigonométricas

Relações Métricas no Triângulo Retângulo



Em que:

- **a** é a medida da hipotenusa;
- **b** e **c** são as medidas dos catetos;
- **h** é a altura relativa à hipotenusa;
- **m** é a medida da projeção do cateto **b** na hipotenusa **a**;
- **n** é a medida da projeção do cateto **c** na hipotenusa **a**.

Em qualquer triângulo retângulo (triângulo que tem um ângulo de 90°), existe uma relação fundamental entre os catetos e a hipotenusa. Tal relação é conhecida como **Teorema de Pitágoras**: $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$. A recíproca de tal teorema é verdade, ou

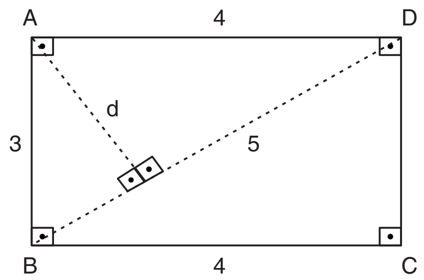
o triângulo é retângulo.

Observações:

- Todas as relações métricas são obtidas por semelhança de triângulos, pois todos os três triângulos são semelhantes.
- As três alturas desse triângulo são **b**, **c** e **h**, em que **h** é a menor das alturas.

Exemplo:

Calcule a distância entre o vértice A e a diagonal BD.



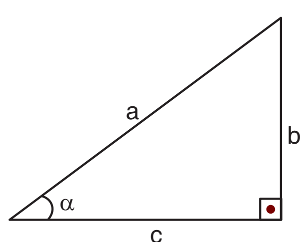
Como podemos perceber, temos três triângulos semelhantes entre si, pois, escolhendo quaisquer dois triângulos, ambos têm os três ângulos internos iguais. Utilizando a expressão b.c = a.h no triângulo ABD, em que BD = 5 tem-se que:

5.d = 3.4

d = 12/5

4 - Razões Trigonométricas

Em todo triângulo retângulo, temos que:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

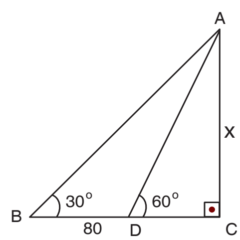
$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{b}{c}$$

Existem três ângulos que são chamados de notáveis (30º, 45º e 60º), cujos valores de sen, cos e tg são importantes de serem guardados.

	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exemplo: Calcule x:



$$\operatorname{sen}60^\circ = \frac{x}{80};\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{80} \Rightarrow x = 40\sqrt{3}$$

Observações:

- Em todo Δ retângulo de ângulo 30º, 60º e 90º, o cateto oposto ao ângulo de 30º é metade da hipotenusa e o cateto oposto ao ângulo de 60º é metade da hipotenusa vezes $\sqrt{3}$.
- Em todo Δ retângulo isósceles, a hipotenusa é o cateto vezes $\sqrt{2}$.

QUESTÕES DE RELAÇÕES MÉTRICAS

1. (IFAL-2011) Num triângulo retângulo, as projeções dos catetos sobre a hipotenusa medem 4 m e 1 m, respectivamente.

   CALCULE a área desse triângulo.

   A) 5 cm^2

   B) 50 cm^2

   C) 50.000 cm^2

   D) 50 dm^2

   E) 5 dm^2

2. (IFE-2011) A altura, baixada sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo, mede 12 cm, e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa diferem de 7 cm. Os lados do triângulo são, em centímetros, iguais a

   A) 10, 15 e 20

   B) 12, 17 e 22

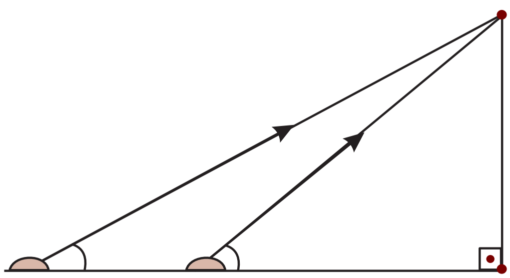
   C) 15, 20 e 25

   D) 16, 21 e 26

   E) 18, 23 e 28

QUESTÕES DE RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

1. (FUVEST) Para se calcular a altura de uma torre, utilizou- se o seguinte procedimento ilustrado na figura: um aparelho (de altura desprezível) foi colocado no solo, a uma certa distância da torre, e emitiu um raio em direção ao ponto mais alto da torre. O ângulo determinado entre o raio e o solo foi de $\alpha = \frac{p}{3}$ radianos. A seguir, o aparelho foi deslocado 4 metros em direção à torre e o ângulo então obtido foi de β radianos, com $\text{tg}\ \beta = 3\sqrt{3}$.



É CORRETO afirmar que a altura da torre, em metros, é

A) $4\sqrt{3}$

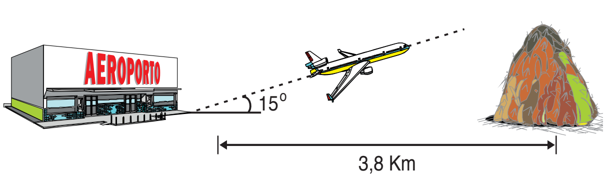
B) $5\sqrt{3}$

C) $6\sqrt{3}$

D) $7\sqrt{3}$

E) $8\sqrt{3}$

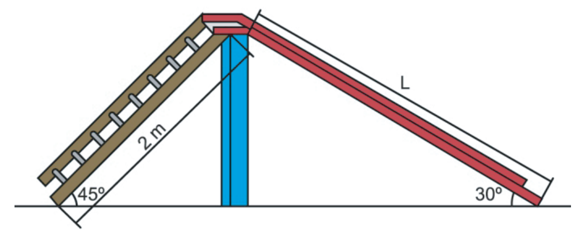
2. (UNICAMP/2013) Ao decolar, um avião deixa o solo com um ângulo constante de 15°. A 3,8 km da cabeceira da pista existe um morro íngreme. A figura a seguir ilustra a decolagem, fora de escala.



Podemos concluir que o avião ultrapassa o morro a uma altura, a partir da sua base, de

A) 3,8 tan (15°) km
B) 3,8 sen (15°) km
C) 3,8 cos (15°) km
D) 3,8 sec (15°) km

3. (UFPB/2010) Em parques infantis, é comum encontrar um brinquedo, chamado escorrego, constituído de uma superfície plana inclinada e lisa (rampa), por onde as crianças deslizam, e de uma escada que dá acesso à rampa. No parque de certa praça, há um escorrego, apoiado em um piso plano e horizontal, cuja escada tem 2m de comprimento e forma um ângulo de 45º com o piso; e a rampa forma um ângulo de 30º com o piso, conforme ilustrado na figura a seguir.



De acordo com essas informações, é CORRETO afirmar que o comprimento (L) da rampa é de

A) $\sqrt{2}\,m$

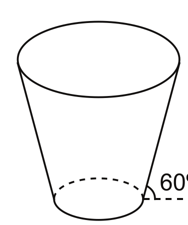
B) $2\sqrt{2}\,m$

C) $3\sqrt{2}\,m$

D) $4\sqrt{2}\,m$

E) $5\sqrt{2}\,m$

4. (ENEM-2009/ Cancelado) Uma empresa precisa comprar uma tampa para o seu reservatório, que tem a forma de um tronco de cone circular reto, conforme mostrado na figura.



Considere que a base do reservatório tenha raio $r = 2\sqrt{3}$ e que sua lateral faça um ângulo de 60° com o solo. Se a altura do reservatório é 12 m, a tampa a ser comprada deverá cobrir uma área de

A) $12\pi\ m^2$

B) $108\pi\ m^2$

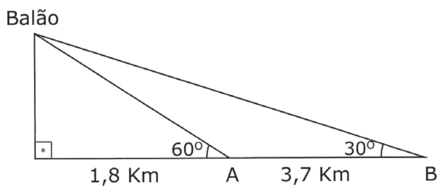
C) $\left(12 + 2\sqrt{3}\right)\pi\ m^2$

D) $300\pi\ m^2$

E) $\left(24 + 2\sqrt{3}\right)\pi\ m^2$

5. (ENEM-2010) *Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.*

Disponível em: <http://www.correiodobrasil.com.br>.
Acesso em: 02 maio 2010.



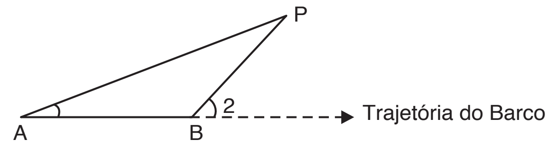
Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30°. Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

A) 1,8 km B) 1,9 km

C) 3,1 km D) 3,7 km

E) 5,5 km

6. (ENEM/2011) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α, fazendo mira em um ponto fixo T da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto T de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:



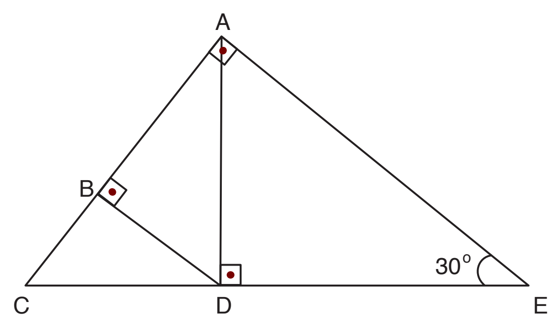
Suponha que o navegante tenha medido o ângulo α = 30° e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância AB = 2 000 m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será

A) 1.000m B) $1.000\sqrt{3}$ m

C) $2.000\frac{\sqrt{3}}{3}$ m D) 2.000 m

E) $2.000\sqrt{3}$ m

7. (UFMG-1997) Observe a figura.



Se a medida de CE é 80, o comprimento de BC é

A) 20 B) 10 C) 8 D) 5

GABARITO

Questões de Relações Métricas

1	2
C	C

Questões de Relações Trigonométricas

1	2	3	4	5	6	7
C	A	B	B	C	B	B