Análise Combinatória

Fatorial de um número (!) = n . (n – 1) . (n – 2) . ... . 3 . 2 . 1
Ex: 7! = 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 5040

Princípio Fundamental da contagem (PFC) = a . b . c . ... . z

Permutação simples: n . (n – 1) . (n – 2) . ... . 3 . 2 . 1

Obs: anagramas são exemplos de permutação. Permutar significa reordenar, trocar a ordem.

Arranjo (quando a ORDEM IMPORTA) = $\frac{n!}{(n-p)!}$, onde n é o número de ELEMENTOS e p é o número de posições.

Combinação (quando a ORDEM NÃO IMPORTA) = $\frac{n!}{(n-p)!.p!}$

Exercícios:

1. Um anagrama de uma palavra é uma reordenação qualquer de suas letras. Por exemplo, ROMA e AMRO são anagramas da palavra AMOR. A palavra SADIO tem a seguinte quantidade de anagramas:

a) 60
b) 64
c) 72
d) 100
e) 120

Resolução:

n! = 5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120
(alternativa E)

2. O produto 20 . 18 . 16 . 14 . ... . 6 . 4 . 2 é equivalente a:

a) $\frac{20!}{2}$
b) 2 . 10!
c) $20!/2^{10}$
d) 2^{10} . 10!
e) $\frac{20!}{10!}$

Resolução:

Colocando o 2 em evidência:
2 . (10 . 9 . 8 . 7 . ... . 3 . 2 . 1) = 2 . 10!
(alternativa B)

3. Quantos anagramas da palavra JUROS começam pela letra J?

a) 12
b) 24

c) 60
d) 80
e) 120

Resolução:

Como tem que começar com J, só há uma possibilidade de letra para a primeira posição:
J _ _ _ _ = 1 . 4! = 1 . 4 . 3 . 2 . 1 = 24
(alternativa D)

4. Considere a equação abaixo:
$\frac{6 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 24 \ldots\ldots 300}{50!} = 216^n$
O valor de n, real, que verifica essa igualdade é:

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{3}{2}$
c) $\frac{15}{2}$
d) $\frac{25}{3}$
e) $\frac{50}{3}$

Resolução:

Colocando o 6 em evidência:
$\frac{6 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots 50)}{50!} = 216^n$
$\frac{6 \cdot 50!}{50!} = 216^n$
$6 = 216^n$
$6 = 6^{3n}$

$1 = 3n$
$n = 1/3$
(alternativa A)

5. Quantos são os anagramas da palavra TEORIA que começam com T e terminam com A?

a) 720
b) 360
c) 120
d) 24
e) 20

Resolução:

Como tem que começar com T e terminar com A, essas duas letras estão fixas. Isto significa que só há 1 possibilidade de letra para começar e 1 possibilidade de letra para terminar.
T _ _ _ _ A = 1 . 4! . 1 = 1 . 4 . 3 . 2 . 1 . 1 = 24
(alternativa D)

6. Um professor, desejando apresentar as características que diferenciam problemas que envolvem agrupamentos simples (Permutação, Arranjo e Combinação), propôs as seguintes situações para análise:

Situação I : Dividir os 40 alunos da turma em 5 grupos.

Situação II : Dispor todos os 40 alunos da turma numa única fila.

Situação III : Formar, entre todos os alunos da turma, uma comissão de 4 alunos que ocuparão 4 cargos distintos para representar a sala.

Situação IV : Formar um grupo, com todos os alunos da turma, para representar a sala numa gincana escolar.

A partir dessas informações, é correto afirmar que as situações I, II, III e IV constituem exemplos de agrupamentos simples que representam, respectivamente:

a) Permutação, Combinação, Permutação e Arranjo.
b) Combinação, Permutação, Arranjo e Combinação.
c) Combinação, Permutação, Arranjo e Permutação.
d) Arranjo, Permutação, Combinação e Arranjo.

Resolução:

Situação I: Em formação de grupos, a ordem não importa: Combinação
Situação II: n = 40 e p = 40, onde os alunos só estão trocando de lugar: Permutação
Situação III: Os cargos distintos têm importância: Arranjo
Situação IV: Em formação de grupos, a ordem não importa: Combinação
(alternativa B)

7. Qual é o número de anagramas da palavra TRANSPETRO em que as letras PETRO ficam juntas e nessa ordem?

a) $\frac{6!}{2!.2!}$
b) 6!
c) 6! . 5!
d) $\frac{10!}{2!.2!}$
e) 10!

Resolução:

Vão permutar:
T
R
A
N
S
PETRO (por estarem juntos, ao invés de considerarmos como 5 elementos, consideraremos como 1 "elemento")

Ou seja, são seis itens que irão permutar: 6! (alternativa B)

8. Niterói é uma excelente opção para quem gosta de fazer turismo ecológico. Segundo dados da prefeitura, a cidade possui oito pontos turísticos dessa natureza. Um certo hotel da região oferece de brinde a cada hóspede a possibilidade de escolher três dos oito pontos turísticos ecológicos para visitar durante sua estada. O número de modos diferentes com que um hóspede pode escolher, aleatoriamente, três destes locais, independentemente da ordem escolhida, é:

a) 8
b) 24
c) 56
d) 112
e) 336

Resolução:

Combinação: $\frac{8!}{(8-5)!\,.5!} = \frac{8\,.7\,.6.5!}{3!.5!} = 56$
(alternativa C)

9. Numa primeira fase de um campeonato de xadrez cada jogador joga uma vez contra todos os demais. Nessa fase foram realizados 78 jogos. Quantos eram os jogadores?

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

Resolução:

Cada partida é disputada por dois jogadores.

Combinação: $\frac{n!}{(n-2)!\,.2!} = 78$

$\frac{n\,.(n-1).(n-2)!}{(n-2)!} = 78\ .\ 2$

n . (n – 1) = 156

$n^2 - n - 156 = 0$
$\Delta = 625$

$n = \frac{-(-1)\pm\sqrt{625}}{2.1}$

$n_1 = 13$ $n_2 = -12$ (não serve)

(alternativa D)

10. Em determinada seção, há 3 profissionais de nível superior, 5 de nível médio e 4 de nível fundamental. Deseja-se formar uma comissão de 3 profissionais, sendo um presidente, um secretário e um membro. Quantas comissões são possíveis de se formar?

a) 1.320
b) 1.300
c) 1260
d) 1230

Resolução:

Total de elementos = 3 + 4 + 5 = 12
Arranjo = $\frac{12!}{(12-3)!}$ = $\frac{12.11.10.9!}{9!}$ = 12 . 11 . 10 = 1320
(alternativa A)

11**.** O total de números naturais de 7 algarismos tal que o produto dos seus algarismos seja 14 é

a) 14
b) 28
c) 35
d) 42
e) 49

Resolução

Como o número 14 é dado pelo produto de dois algarismo primos (2 e 7), tem–se que os números naturais de 7 algarismos cujo o produto de seus algarismos resulta em 14 devem necessariamente apresentar : cinco algarismos 1, um algarismo 2 e algarismo 7.
Exemplos : 1111127 ; 2117111 ; 7121111

Permutação com repetição: $\frac{7!}{5!} = \frac{7\ .\ 6\ .\ 5}{5!}$ = 7 . 6 = 42
(Alternativa D)

12**.** De quantas maneiras diferentes podemos escolher seis pessoas, incluindo pelo menos duas mulheres, de um grupo composto de sete homens e quatro mulheres?

a) 210
b) 250
c) 371
d) 462
e) 756

Resolução

Formas diferentes de escolha

2 mulheres e 4 homens
$C_{4,2}\ .\ C_{7,4} = \frac{4!}{2!\ .\ 2!} = \frac{7!}{4!\ .\ 3!}$

$6 \cdot 35 = 210$
3 mulheres e 3 homens
$C_{4,3} \cdot C_{7,4} = \frac{4!}{3!\,.\,1!} = \frac{7!}{3!\,.\,4!}$
$4 \cdot 35 = 140$

4 mulheres e 2 homens
$C_{4,4} \cdot C_{7,2} = \frac{4!}{4!\,.\,0!} = \frac{7!}{2!\,.\,5!}$
$1 \cdot 21 = 21$

$210 + 140 + 21 = 371$

(Alternativa C)

13. Para cuidar da saúde, muitas pessoas buscam atendimento em cidades maiores onde há centros médicos especializados e hospitais mais equipados. Muitas vezes, o transporte até essas cidades é feito por *vans* disponibilizadas pelas prefeituras.
Em uma *van* com 10 assentos, viajarão 9 passageiros e o motorista. De quantos modos distintos os 9 passageiros podem ocupar suas poltronas na *van?*

a) 4.032.
b) 36.288.
c) 40.320.
d) 362.880.
e) 403.200.

Resolução

9 pessoas para 9 lugares distintos.

$P_9 = 9!$
$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362.880$

(Alternativa D)

14. Um ovo de brinquedo contém no seu interior duas figurinhas distintas, um bonequinho e um docinho. Sabe-se que na produção desse brinquedo, há disponível para escolha 20 figurinhas, 10 bonequinhos e 4 docinhos, todos distintos. O número de maneiras que se pode compor o interior desse ovo de brinquedo é

a) 15.200
b) 7.600
c) 3.800
d) 800
e) 400

Resolução

Há 20 figurinhas onde 2 delas serão selecionadas. Como a ordem não importa

Combinação = $\frac{n!}{p!(n-p)!}$

$$\frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20!}{2!\,.\,18!} = \frac{20\,.19\,.18!}{2\,.\,18!} = \frac{380}{2} = 190$$

Somente um dos 10 bonequinhos e um dos 4 docinhos é que serão selecionados.

Peincipio multiplicativo
190 . 10 .4 = 7.600

(Alternativa B)

15. Certo departamento de uma empresa tem como funcionários exatamente oito mulheres e seis homens. A empresa solicitou ao departamento que enviasse uma comissão formada por três mulheres e dois homens para participar de uma reunião. O departamento pode atender à solicitação de ______ maneiras diferentes.

a) 840
b) 720
c) 401
d) 366
e) 71

Resolução

Como a ordem não importa : Combinação = $\frac{n!}{p!(n-p)!}$

Mulheres : $\frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8\,.\,7\,\,.\,6\,.\,5!}{3\,.\,2\,.\,1\,\,.\,5!}$ = 56

Homens : $\frac{6!}{2!(\,6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6\,.\,5\,.\,4!}{2\,\,.\,1\,.\,4!} = 15$

56 . 15 = 840 maneiras diferentes
(Alternativa A)

16. Na comemoração de suas Bodas de Ouro, Sr. Manuel e D. Joaquina resolveram registrar o encontro com seus familiares através de fotos. Uma delas sugerida pela família foi dos avós com seus 8 netos. Por sugestão do fotógrafo, na organização para a foto, todos os netos deveriam ficar entre os seus avós.
De quantos modos distintos Sr. Manuel e D. Joaquina podem posar para essa foto com os seus netos?

a) 100
b) 800
c) 40 320
d) 80 640
e) 3 628 800

Resolução

Supondo que todas as pessoas organizadas lado a lado na foto, o número de posições é 10. Entretanto, os netos devm estar jutos e entre os avós. Portanto :

_ . [_ . _ ._ . _ . _ . _ . _ . _] . _

Como os netos ficarão no meio
_ . [8 . 7 . 6 .5 . 4 . 3 . 2 . 1] ._

Como os avós ficarão aos extremos

2 . [8 . 7 . 6 .5 . 4 . 3 . 2 . 1] . 1 =

2 . 40320 = 80640

(Alternativa D)

17. Lucas possui 6 livros diferentes e Milton possui 8 revistas diferentes. Os dois pretendem fazer uma troca de 3 livros por 3 revistas. O total de possibilidades distintas para que essa troca possa ser feita é igual a

a) 1. 040
b) 684
c) 980
d) 1.120
e) 364

Resolução

Livros

$C_{6,3} = \frac{6!}{3!\ \ 3!} = \frac{6\,.5\,.\,4}{3\ .\ 2} = 20$

Revistas

$C_{8,3} = \frac{8!}{3!\,.\,5!} = \frac{8\,.7\,.\,6}{3\,.\,2} = 56$

Total = 20 . 56 = 1120

(Alternativa D)

18. Para ir da cidade A para a cidade D, Álvaro obrigatoriamente passa pelas cidades B e C, nessa ordem. Sabendo que existem cinco estradas diferentes de A para B, quatro estradas diferentes de B para C e três estradas diferentes de C para D, quantos trajetos diferentes existem de A para D ?

a) 12
b) 15
c) 30
d) 60

e) 120

Resolução

Multiplicando o número de estradas diferentes entre as cidades, saberemos a quantidade de caminhos diferentes.
A e B = possui cinco estradas diferentes
B e C = possui quatro estradas
C e D = possui três estradas

Calculando os trajetos

T = 5 . 4 . 3 = 60

De A para D temos 60 trajetos

(Alternativa D)

19. O jogo da Mega Sena consiste no sorteio de 6 números distintos de 1 a 60. Um apostador, depois de vários anos de análise, deduziu que, no próximo sorteio, os 6 números sorteados estariam entre os 10 números que tinha escolhido.
Sendo assim, com a intenção de garantir seu prêmio na Sena, ele resolveu fazer todos os possíveis jogos com 6 números entre os 10 números escolhidos.
Quantos reais ele gastará para fazê-los, sabendo que cada jogo com 6 números custa R$ 2,00?

a) R$ 540,00.
b) R$ 302.400,00.
c) R$ 420,00.
d) R$ 5.040,00.

Resolução

Normalmente, na Mega Sena seis números são selecionados dentre 60 possibilidades. Entretanto, o apostador limita suas apostas para 10 possibilidades com a ordem dos números sorteados não importa :

Combinação = $\frac{n!}{p!(n-p)}$

$$\frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{10 \,.\, 9 .8 .\, 7 .6!}{6! .\, 4 \,.\, 3.\, 2 \,.\, 1} = \frac{5040}{24} = 210$$

Número de bilhetes = 210
Como cada bilhete custa R$ = 2,00

210 . 2 = 420

(Alternativa C)

20. O número de anagramas da palavra TAXISTA, que começam com a letra X, é

a) 180.
b) 240.
c) 720.
d) 5040.
e) 10080.

Resolução

A letra A aparece 2 vezes e a letra T também aparece 2 vezes.
Permutação com repetição

$P_6^{2,2} = \frac{6!}{2!\ .\ 2!} = 180$

(Alternativa A)

21. Os alunos do curso de Computação Gráfica do campus Olinda estão desenvolvendo um vídeo com todos os anagramas da palavra CARNAVAL. Se cada anagrama é mostrado durante 0,5 s na tela, a animação completa dura

a) menos de 1 minuto.
b) menos de 1 hora.
c) menos de meia hora.
d) menos de 10 minutos.
e) mais de 1 hora.

Resolução:

Como na palavra CARNAVAL a letra A se repete 3 vezes (permutação com repetição):
$P = \frac{8!}{3!} = \frac{8.7.6.5.4.3!}{3!} = 6720$

Como cada anagrama é mostrado a cada 0,5 s:
6720 . 0,5 = 3360.
1 hora tem 3600. $3360 < 3600$. (menos de 1 hora)

(alternativa B)

22. A prova final de Geografia de uma escola é composta de 10 itens com alternativas do tipo "verdadeiro ou falso". De quantas maneiras diferentes um estudante poderá responder esta prova, de forma que ele só assinale apenas uma alternativa em cada questão?

a) 20
b) 64
c) 256
d) 512
e) 1024

Resolução:

Para cada item da prova há 2 possibilidades (verdadeiro ou falso).
Pelo Princípio Multiplicativo:
2 .2 .2 .2 .2 .2 .2 .2 .2 .2 = 1024

(alternativa E)

23. Em uma civilização antiga, o alfabeto tinha apenas três letras. Na linguagem dessa civilização, as palavras tinham de uma a quatro letras. Quantas palavras existiam na linguagem dessa civilização?

a) 4.
b) 12.
c) 16.
d) 40.
e) 120.

Resolução:

Quantidade de palavras com uma letra: 3
Quantidade de palavras com duas letras: 3 . 3 = 9
Quantidade de palavras com 3 letras: 3 . 3 . 3 = 27
Quantidade de palavras com quatro letras: 3 . 3 . 3 . 3 = 81
3 + 9 + 27 + 81 = 120

(alternativa E)

24. Cinco pessoas devem ficar em pé, uma ao lado da outra, para tirar uma fotografia, sendo que duas delas se recusam a ficar lado a lado. O número de posições distintas para as cinco pessoas serem fotografadas juntas é igual a

a) 48
b) 72
c) 96
d) 120

Resolução:

Faremos a questão por complementar.
Permutação das 5 pessoas: 5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120

Considerando as duas pessoas juntas, como se fossem um único elemento, teremos a permutação de “quatro elementos”: 4! = 4 . 3 . 2 . 1 = 24
Porém, as duas pessoas podem permutar entre si: 2! = 2 . 1 = 2
24 . 2 = 48
120 - 48 = 72

(alternativa B)

25.

SCHULZ, Charles. *Peanuts e a Álgebra*. Uol notícias. Disponível em: <https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/tirinhas-na-aula-matematica.htm>. Acesso: 28 set. 2018 (adaptado).

Ajude a Paty Pimentinha a resolver o problema para a educação dela "desencalhar" e marque a única alternativa que seja a resposta para o problema lido pela personagem.

a) 15 formas.
b) 12 formas.
c) 60 formas.
d) 18 formas.
e) 20 formas.

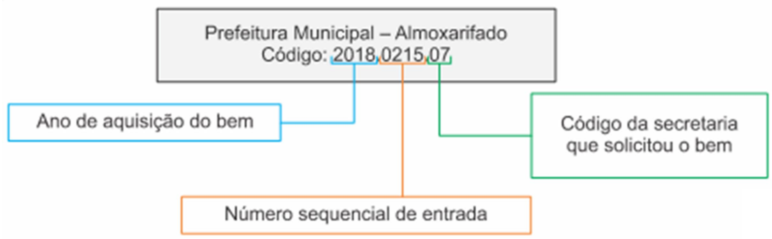
Resolução:

De A para B: 4 caminhos
De B para C: 3 caminhos
De C para D: 5 caminhos

Pelo princípio multiplicativo: 4 . 3 . 5 = 60

(alternativa C)

26. O almoxarifado de uma prefeitura utiliza chapas metálicas para identificar bens materiais adquiridos por uma das 8 secretarias municipais. Nas chapas são gravados códigos com 10 dígitos numéricos, a fim de identificar o bem em questão. O esquema apresenta um exemplo dessas chapas.



Dado que o número sequencial de entrada é composto por 4 dígitos e iniciado em 0001 para cada uma das secretarias, o sistema de codificação permite a essa prefeitura, considerando as 8 secretarias, ao longo de um ano, a codificação de, no máximo,

a) 8.000 bens
b) 7.992 bens.
c) 80.000 bens.
d) 989.901 bens.
e) 79.992 bens.

Resolução:

O número sequencial de entrada é composto por 4 dígitos, onde cada um vai de 0 até 9 (10 possibilidades para cada dígito). Portanto: 10 . 10 . 10 . 10 = 10000

Entretanto, o número sequencial de entrada começa no 0001 (excluindo o 0000). Logo há 9.999 possibilidades (10000 - 1).

Há 8 secretarias.
9999 . 8 = 79992

(alternativa E)

27. Desenvolvido em 1835, pelo pintor e inventor Samuel Finley Breese Morse, o Código Morse é um sistema binário de representação a distância de números, letras e sinais gráficos, utilizando-se de sons curtos e longos, além de pontos e traços para transmitir mensagens. Esse sistema é composto por todas as letras do alfabeto e todos os números. Os caracteres são representados por uma combinação específica de pontos e traços [...]

Fonte: FRANCISCO, Wagner de Cerqueira e. “Código Morse”; Brasil Escola.
Disponível em <http://brasilescola.uol.com.br/geografia/codigo-morse.htm>. Acesso em 03 de outubro de 2017.

Considerando o exposto no texto e um conjunto de sinais composto de 2 traços e 3 pontos, quantas mensagens podem ser representadas usando todos os elementos do conjunto?

a) 120 mensagens.
b) 10 mensagens.
c) 20 mensagens.
d) 200 mensagens.
e) 30 mensagens.

Resolução:

Pede-se todas as mensagens usando todos os elementos do conjunto que são 2 traços e 3 pontos (- - . . .). Como os elementos se repetem, trata-se de permutação com repetição.
P = $\frac{5!}{2!}$. 3! = $\frac{5.4.3!}{2.3!}$ = 10

(alternativa B)

28. Certa lanchonete possui 5 funcionários para atender os clientes durante os dias da semana. Em cada dia, pode trabalhar, no mínimo, 1 funcionário até todos os funcionários. Dentro desse princípio, quantos grupos de trabalho diário podem ser formados?

a) 5.
b) 15.
c) 16.
d) 31.
e) 32.

Resolução:

1 funcionário: $C_{5.1} = \frac{5!}{1!(5-1)!} = 5$
2 funcionários: $C_{5.2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$
3 funcionários: $C_{5.3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$
4 funcionários: $C_{5.4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = 5$
5 funcionários: $C_{5.5} = \frac{5!}{1!(5-5)!} = 1$

5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31

(alternativa D)

29. Cada banca de um determinado concurso é constituída de 3 examinadores, dos quais 1 é o presidente. Duas bancas são iguais somente se tiverem os mesmos membros e o mesmo presidente. Dispondo de 20 examinadores, a quantidade de bancas diferentes que podem ser formadas é

a) 800.
b) 1140.
c) 6840.
d) 600.
e) 3420

Resolução:

Inicialmente, iremos selecionar 3 examinadores dentre os 20 disponíveis.
$C_{20,3} = \frac{20!}{3!.17!} = \frac{20.19.18.17!}{6.17!} = 1140$

Como o presidente pode ser cada um de seus membros, o total de comissões será dado por:
3 . 1140 = 3420

(alternativa E)

30. O Sargento encarregado de organizar as escalas de missão de certa organização militar deve escalar uma comitiva composta por um capitão, dois tenentes e dois sargentos. Estão aptos para serem escalados três capitães, cinco tenentes e sete sargentos. O número de comitivas distintas que se pode obter com esses militares é igual a

a) 630.
b) 570.
c) 315.
d) 285.
e) 210.

Resolução:

Capitão (um dentre três)
$C_{3,1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} = 3$

Tenentes (dois dentre cinco)
$C_{5,2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5.4.3!}{2.3!} = 10$

Sargentos (dois dentre sete)
$C7,2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7.6.5!}{2.5!} = 21$

Pelo Princípio Multiplicativo : 3 . 10 . 21 = 630

(alternativa A)