PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

É possível simplificar o cálculo dos determinantes com o emprego de certas propriedades.

P1. MATRIZ TRANSPOSTA

Se M é uma matriz de ordem n e M^t a sua transposta, então:

EXEMPLO 1:

Seja $M = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, calcule $\det M^t$.

P2. FILA NULA

Se os elementos de uma fila qualquer de uma matriz M de ordem n forem todos *nulos*, então $\det M = 0$.

EXEMPLO 2:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ x & 0 \end{vmatrix} =$$

P3. MULTIPLICAÇÃO DE UMA FILA POR UMA CONSTANTE

Se multiplicarmos uma fila qualquer de uma matriz M de ordem n por um número k, teremos uma nova matriz M'. Poderemos afirmar que:

NOTA:

Se M é uma matriz de ordem n, então:

EXEMPLO 3:

a) $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

b) Seja A uma matriz quadrada de ordem 3 e $\det A = 5$. Determine o valor x, sabendo que $\det 2A = 10 + x$.

P4. TROCA DE FILAS PARALELAS

Se trocarmos de posição duas *filas paralelas* de uma matriz M de ordem n, teremos uma nova matriz M'. Dessa forma:

EXEMPLO 4:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} =$

b) Se $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5$, calcule $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ x & y & 3z \\ 2a & 2b & 6c \end{vmatrix}$.

P5. FILAS PARALELAS IGUAIS OU PROPORCIONAIS

Se uma matriz M de ordem n possui duas filas paralelas *iguais* ou *proporcionais*, então $\det M = 0$.

EXEMPLO 5:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & a \\ 2 & y & 7 \\ 1 & x & a \end{vmatrix} =$

b) $\begin{vmatrix} 1 & x & 3x \\ 2 & y & 3y \\ 3 & z & 3z \end{vmatrix} =$

P6. COMBINAÇÃO LINEAR DE FILAS PARALELAS

Se uma matriz M de ordem n possui uma fila que é *combinação linear* de outras filas paralelas, então $\det M = 0$.

EXEMPLO 6:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

P7. MATRIZ TRIANGULAR

O determinante de uma *matriz triangular* é o produto dos elementos da diagonal principal.

EXEMPLO 7:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & a \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 0 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} =$

P8. TEOREMA DE BINET

Se A e B são matrizes quadradas de ordem n, então:

EXEMPLO 8:

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, determine $\det(3A \cdot B^2)$.

P9. TEOREMA DA MATRIZ INVERSA

Se M é uma matriz quadrada de ordem n e é *inversível*, então:

EXEMPLO 9:

Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, calcule $\det A^{-1}$.

P10. TEOREMA DE JACOBI

Adicionando a uma fila de uma matriz M, de ordem n, uma outra fila paralela, previamente multiplicada por uma constante, obteremos uma nova matriz M', tal que $\det M = \det M'$.

EXEMPLO 10:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 \\ 2 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$