Capítulo 4
Função afim

Para pensar

1. 100.000 − 2.000 = 98.000
São economizados 98.000 litros.

2. De acordo com o exercício 1, economizam-se 98.000 litros de água por tonelada de papel reciclado produzido. Portanto, podemos fazer:
$y = 98.000x$

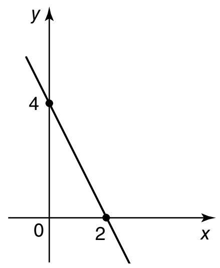
3. Para 1 tonelada de papel reciclado são consumidos 1,2 tonelada de papel usado. Desse modo, podemos fazer:
$q = 1{,}2p$

4. Resposta pessoal.

Exercícios propostos

1. a)

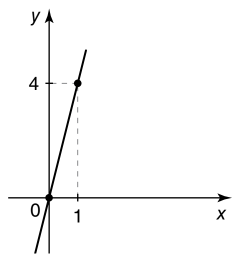
x	y
0	4
2	0



$D = \mathbb{R}$; $Im = \mathbb{R}$

b)

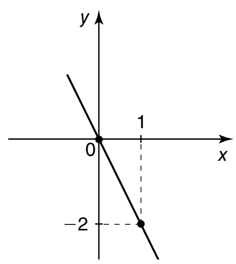
x	y
0	0
1	4



$D = \mathbb{R}$; $Im = \mathbb{R}$

c)

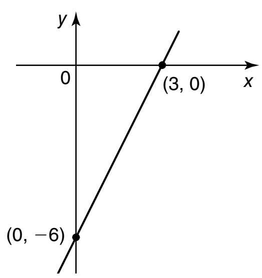
x	y
0	0
1	−2



$D = \mathbb{R}$; $Im = \mathbb{R}$

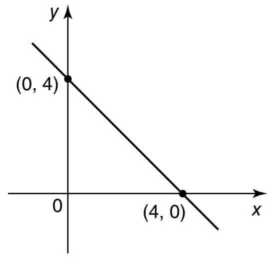
2. a)

x	y
0	−6
3	0



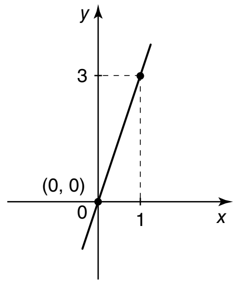
b)

x	y
0	4
4	0



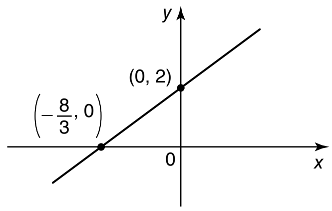
c)

x	y
0	0
1	3



d)

x	y
0	2
$-\frac{8}{3}$	0

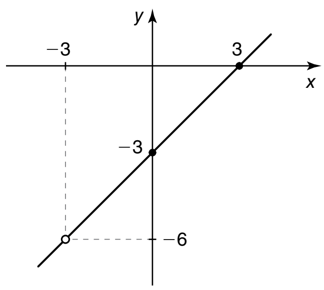


3. Para $y = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$, temos $x \neq -3$; assim:

$$y = \frac{x^2 - 9}{x + 3} \Rightarrow y = \frac{\cancel{(x+3)} \cdot (x - 3)}{\cancel{x+3}}$$

$\therefore\ y = x - 3$, com $x \neq -3$

x	y
0	−3
3	0



4. A lei é da forma $y = ax + b$, com a e b reais, e os pontos (0, −4) e (2, 6) pertencem ao gráfico;

logo: $\begin{cases} -4 = a \cdot 0 + b \quad \text{(I)} \\ 6 = a \cdot 2 + b \quad \text{(II)} \end{cases}$

De (I), obtém-se: $b = -4$
Substituindo b por −4 em (II), resulta:
$6 = 2a + (-4) \Rightarrow 2a = 10$
$\therefore\ a = 5$
Logo, $a = 5$ e $b = -4$.
Concluímos, então, que a lei de associação da função é $y = 5x - 4$.

5. a) A equação é da forma $y = ax + b$, com a e b reais, e o ponto (0, 32) pertence ao gráfico; logo:
$32 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 32$
Analogamente, o ponto (100, 212) pertence ao gráfico.
Então, $212 = a \cdot 100 + b$.
Como $b = 32$, resulta:

$212 = a \cdot 100 + 32 \Rightarrow a = \frac{9}{5}$

Portanto, a equação é $y = \frac{9x}{5} + 32$.

b) Se $y = -4$, temos: $-4 = \frac{9x}{5} + 32$

Assim:
$-20 = 9x + 160 \Rightarrow 9x = -180$
$\therefore x = -20$
Logo, a temperatura que corresponde a −4 °F é −20 °C.

6. **a)** A lei de associação entre x e y é da forma $y = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Assim, temos:

$$\begin{cases} 50.000 = a \cdot 0 + b \\ 59.000 = a \cdot 3 + b \end{cases} \Rightarrow a = 3.000 \text{ e } b = 50.000$$

Logo, $y = 3.000x + 50.000$

b) Fazendo $x = 11$ na equação obtida no item **a**, obtemos:
$y = 3.000 \cdot 11 + 50.000 \Rightarrow y = 83.000$
Logo, o valor do terreno em 1º de janeiro de 2022 será de R$ 83.000,00.

7. **a)** A lei de associação entre x e y é da forma $y = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Assim, temos:

$$\begin{cases} 27 = a \cdot 0 + b \\ 21 = a \cdot 100 + b \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{3}{50} \text{ e } b = 27$$

Logo, $y = -\frac{3x}{50} + 27$

b) Fazendo $x = 40$ na equação obtida no item **a**, obtemos:

$$y = -\frac{30 \cdot 40}{50} + 27 \Rightarrow y = 24{,}6\ °C$$

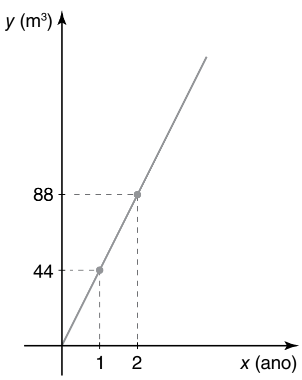
8. Dados:
$Q_o = -20 + 4P$
$Q_d = 46 - 2P$
O valor de equilíbrio é quando Q_o e Q_d se igualam, ou seja:
$Q_o = Q_d \Rightarrow -20 + 4P = 46 - 2P$
$\therefore p = 11$
Alternativa **b**.

9. **a)** Resposta pessoal.
b) $y = \frac{5x}{2}$

10. **a)** Em 1 ano são produzidos 44 m^3 de madeira por hectare e em 2 anos são produzidos 88 m^3. Como a produção de madeira corresponde a 44 m^3 por ano, considerando y a quantidade de madeira produzida em relação ao tempo x, em ano, podemos escrever:
$y = 44x$

b)

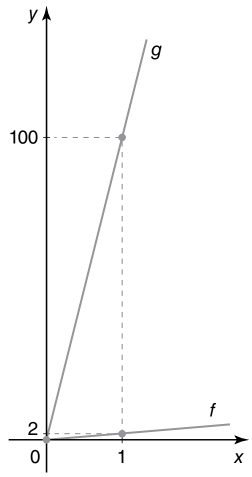
x	y
1	44
2	88



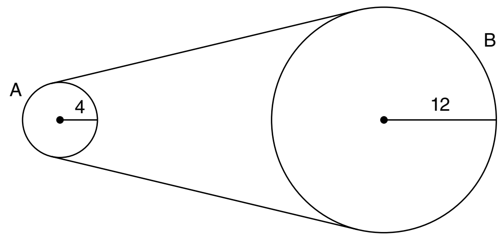
c) De acordo com o infográfico são consumidos 2 mil litros, na produção de 1 tonelada de papel reciclado. Considerando *f* como a quantidade de água consumida, em milhares de litros, e x a quantidade de papel reciclado, conclui-se que a lei da função é dada por:
$f(x) = 2x$
De acordo com o infográfico são consumidos 100 mil litros de água na produção de 1 tonelada de papel não reciclado. Considerando *g* como a quantidade de água consumida, em milhares de litros, e x a quantidade de papel não reciclado, conclui-se que a lei da função é dada por:
$g(x) = 100x$
Trata-se de duas funções lineares. Desse modo, podemos fazer:

x	f(x)
0	0
1	2

x	g(x)
0	0
1	100



11. **a)**

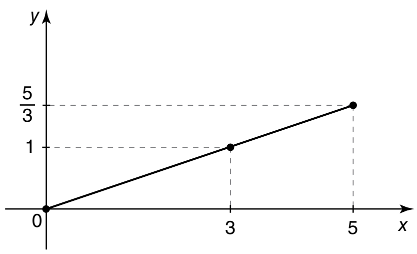


Sendo r_A e r_B os raios das polias A e B, respectivamente, temos:
$r_B = 3 \cdot r_A$
Logo, sendo C_A e C_B os comprimentos das circunferências das polias A e B, respectivamente, temos:
$C_B = 3 \cdot C_A$

Números de voltas da polia A	Números de voltas da polia B
3	1
x	y

$$\frac{3}{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{x}{3}$$

b)



c) Sim, pois:

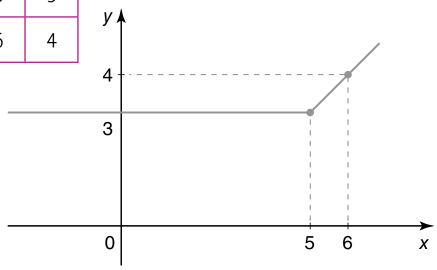
I. Se $x = 0$, então $y = 0$.

II. Se $x \neq 0$, então $\frac{y}{x} = k$, sendo k uma constante real $\left(\text{no caso, } k = \frac{1}{3}\right)$.

12. a) (I) $f(x) = 3$, se $x \leqslant 5$

(II) $f(x) = x - 2$, se $x > 5$

x	$f(x)$
5	3
6	4

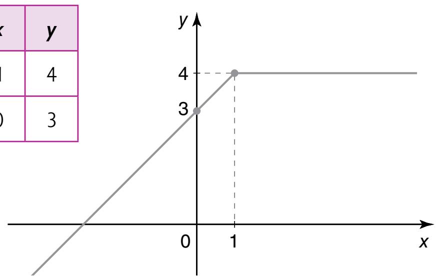


$D = \mathbb{R}$; $Im = \mathbb{R}$

b) (I) $f(x) = x + 3$, se $x \leqslant 1$

(II) $f(x) = 4$, se $x > 1$

x	y
1	4
0	3



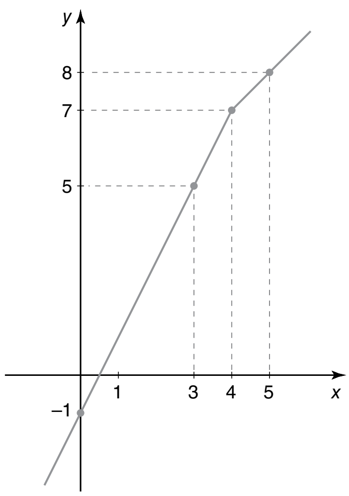
$D = \mathbb{R}$; $Im = \mathbb{R}$

c) (I) $f(x) = 2x - 1$, se $x \leqslant 4$

x	y
4	7
3	5

(II) $f(x) = x + 3$, se $x > 4$

x	y
4	7
5	8



$D = \mathbb{R}$; $Im = \mathbb{R}$

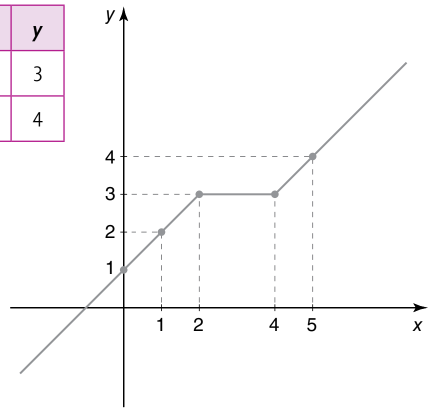
d) (I) $f(x) = x + 1$, se $x \leqslant 2$

x	y
2	3
1	2

(II) $f(x) = 3$, se $2 < x \leqslant 4$

(III) $f(x) = x - 1$, se $x > 4$

x	y
4	3
5	4



$D = \mathbb{R}$; $Im = \mathbb{R}$

13. a) Sabemos que 18 meses correspondem a 1,5 ano. A lei de associação entre x e y é da forma $y = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ para $0 \leqslant x \leqslant 3$. Como os pontos (0, 40) e (3, 20) pertencem ao gráfico, temos:

$$\begin{cases} 40 = a \cdot 0 + b \\ 20 = a \cdot 3 + b \end{cases} \Rightarrow b = 40 \text{ e } a = -\frac{20}{3}$$

Logo: $y = -\frac{20}{3}x + 40$, para $0 \leqslant x \leqslant 3$

Para $x = 1{,}5$, temos $y = 30$.

Portanto, o valor do automóvel 18 meses após a compra era de R$ 30.000,00.

b) Precisamos encontrar a lei de associação $y = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ para $3 \leqslant x \leqslant 8$. Como os pontos (3, 20) e (8, 15) pertencem ao gráfico, temos:

$$\begin{cases} 20 = a \cdot 3 + b \\ 15 = a \cdot 8 + b \end{cases} \Rightarrow a = -1 \text{ e } b = 23$$

Logo, $y = -x + 23$ para $3 \leqslant x \leqslant 8$

Para $x = 5$, temos:

$y = -5 + 23 \Rightarrow y = 18$

Portanto, o valor do automóvel 5 anos após a compra era de R$ 18.000,00.

c) Pelo gráfico, concluímos que o valor do automóvel foi constante entre 8 e 10 anos, num valor de R$ 15.000,00. Portanto, o valor do automóvel 9 anos após a compra era de R$ 15.000,00.

d) De acordo com os itens **a**, **b** e **c**, temos a seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{20}{3} + 40, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ -x + 23, \text{ se } 3 \leqslant x \leqslant 8 \\ 15, \text{ se } 8 \leqslant x \leqslant 10 \end{cases}$$

14. a) F, pois $b = 2$ e para $b \neq 0$ a proporcionalidade ocorre entre as variações correspondentes de y e x, e não entre os valores correspondentes de y e x.
b) V
c) V
d) V

15. a) 5
b) -7
c) $\frac{1}{3}$

16. a) Temos que a taxa de variação a é:

$$a = \frac{3 - 9}{1 - 3} = 3$$

Assim, a função tem a forma $y = 3x + b$. Como o ponto (3, 9) pertence ao gráfico dessa função, devemos ter:
$9 = 3 \cdot 3 + b \Rightarrow b = 0$
Logo, a função é $y = 3x$.

b) Temos que a taxa de variação a é:

$$a = \frac{6 - 1}{-3 - 2} = -1$$

Assim, a função tem a forma $y = -x + b$. Como o ponto (2, 1) pertence ao gráfico dessa função, devemos ter:
$1 = -1 \cdot 2 + b \Rightarrow b = 3$
Logo, a função é $y = -x + 3$.

17. Considerando a expectativa de vida y, em anos, em função do tempo x, em anos, temos no intervalo de 1980 a 2020 a aproximação $y = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Assim:

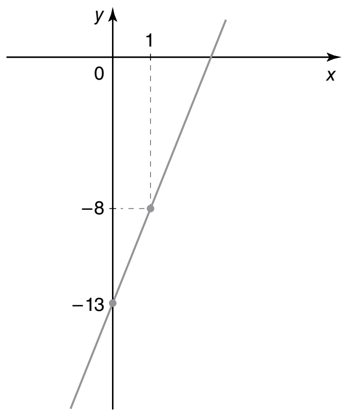
$$\begin{cases} 70{,}4 = a \cdot 2000 + b \\ 73{,}4 = a \cdot 2010 + b \end{cases} \Rightarrow a = 0{,}3 \text{ e } b = -529{,}6$$

Portanto, $y = 0{,}3x - 529{,}6$.
Para $x = 2020$, obtemos:
$y = 0{,}3 \cdot 2020 - 529{,}6 \Rightarrow y = 76{,}4$
Concluímos que, em 2020, a expectativa de vida do brasileiro será de 76,4 anos, aproximadamente.

18. a) A taxa de variação é igual à constante a, portanto, $a = 5$. Assim, a função afim tem a forma $y = 5x + b$.
Como o ponto A(2, -3) pertence ao gráfico dessa função, devemos ter:
$-3 = 5 \cdot 2 + b \Rightarrow b = -13$
Portanto: $a = 5$ e $b = -13$

b) $y = 5x - 13$

x	y
0	-13
1	-8



19. a) No período de esvaziamento do reservatório, a vazão do registro foi de 4 L por segundo. Portanto, em x segundos desse período foram vazados 4x L de água. Assim, a quantidade, em litros de água, contida no reservatório nesse período pode ser expressa por: $y = 400 - 4x$.
b) Em qualquer função afim, a taxa de variação é o coeficiente de x. Assim, na função afim do item **a**, a taxa de variação é -4.
c) A taxa indica que vazam 4 L de água por segundo do reservatório.

20. A reta que contém esse gráfico representa uma função afim, isto é, $y = ax + b$, em que a e b são constantes reais, com $a \neq 0$. Como esse gráfico passa pelos pontos (0, 8) e (8, 5), temos:

$$\begin{cases} 8 = a \cdot 0 + b \\ 5 = a \cdot 8 + b \end{cases} \Rightarrow b = 8 \text{ e } a = -\frac{3}{8}$$

Logo, a função afim é:

$$y = -\frac{3x}{8} + 8$$

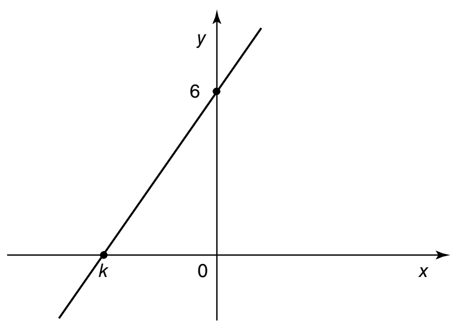
Para calcular o tempo, em ano, para que o volume de água remanescente na represa seja 2 mil m^3, basta atribuir o valor 2 à variável y, obtendo:

$$2 = -\frac{3x}{8} + 8 \Rightarrow x = 16$$

Portanto, após 16 anos da inauguração, o volume de água será 2 mil m^3.

21. a) crescente, pois $a > 0$ ($a = 9$)
b) decrescente, pois $a < 0$ ($a = -2$)
c) $y = -\frac{1 + x}{4} \Rightarrow y = -\frac{1}{4} - \frac{x}{4}$
Logo, a função é decrescente, pois: $a < 0 \left(a = -\frac{1}{4}\right)$.
d) crescente, pois $a > 0 \left(a = \frac{1}{5}\right)$.

22. Como o gráfico de f passa pelo ponto (0, 6) e a taxa de variação é positiva ($a > 0$), temos que f é uma função crescente. Assim, sendo (k, 0) o ponto de intersecção do gráfico com o eixo Ox, devemos ter $k < 0$:



Para que a área do triângulo limitado pelos eixos coordenados e pelo gráfico de f seja 12 unidades, devemos ter:

$$\frac{|k| \cdot 6}{2} = 12 \Rightarrow |k| = 4$$

$\therefore k = 4$ (não convém) ou $k = -4$
Logo, o gráfico da função $y = ax + b$ passa pelos pontos (0, 6) e (-4, 0); portanto:

$$\begin{cases} 6 = a \cdot 0 + b \\ 0 = a \cdot (-4) + b \end{cases} \Rightarrow b = 6 \text{ e } a = \frac{3}{2}$$

23. a) Como a função passa pelo ponto $(1, k^2)$, podemos fazer:

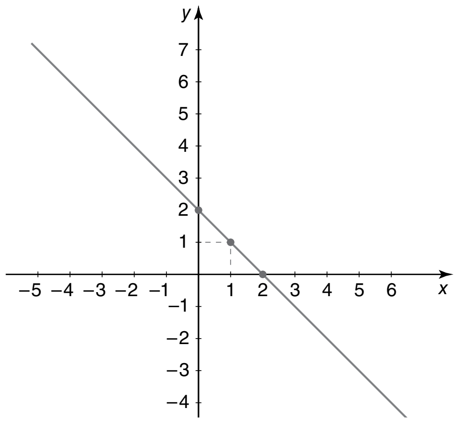
$k^2 = k \cdot 1 + 2 \Rightarrow k^2 - k - 2 = 0$

$\therefore\ k = 2$ ou $k = -1$

Como a função é decrescente, devemos ter $k < 0$. Portanto, concluímos que $k = -1$.

b) $f(x) = -x + 2$

x	y
0	2
1	1



24. recipiente A: $y = 30 + 2x$, $a > 0$, função crescente

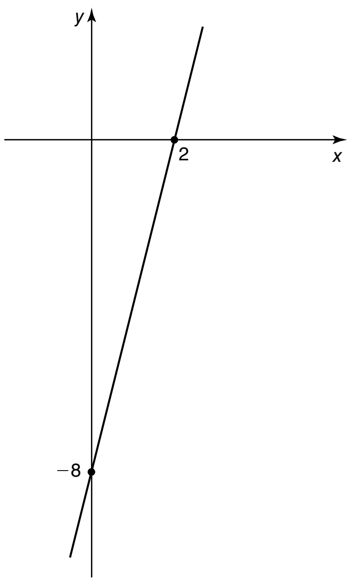
recipiente B: $y = 5 - 3x$, $a < 0$, função decrescente

Portanto, a temperatura da água do recipiente A aumenta em função do tempo e a temperatura da água no recipiente B diminui em função do tempo.

Alternativa **a**.

25. a) $f(x) = 4x - 8$

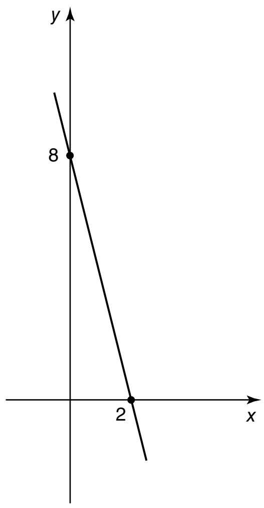
Graficamente:



- 2 é raiz da função f;
- f é crescente;
- para qualquer x real, com $x > 2$, temos $f(x) > 0$;
- para qualquer x real, com $x < 2$, temos $f(x) < 0$.

b) $f(x) = -4x + 8$

Graficamente:



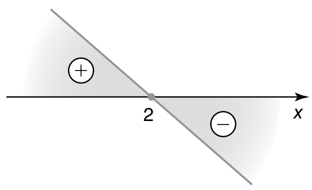
- 2 é raiz da função f;
- f é decrescente;
- para qualquer x real, com $x > 2$, temos $f(x) < 0$;
- para qualquer x real, com $x < 2$, temos $f(x) > 0$.

c) $y = -5x + 10$

Algebricamente:

- a raiz da função é dada por: $-5x + 10 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 2$
- os valores de x para os quais f é positiva são dados por: $-5x + 10 > 0 \Rightarrow x < 2$
- os valores de x para os quais f é negativa são dados por: $-5x + 10 < 0 \Rightarrow x > 2$

Podemos representar a variação do sinal dessa função pelo esquema:

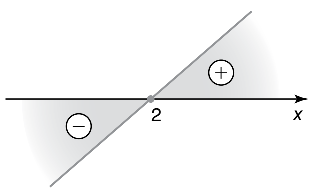


d) $y = 6x - 12$

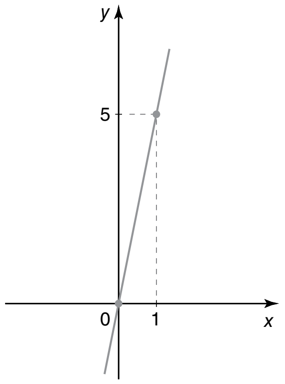
Algebricamente:

- a raiz da função f é dada por: $6x - 12 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 2$
- os valores de x para os quais f é positiva são dados por: $6x - 12 > 0 \Rightarrow x > 2$
- os valores de x para os quais f é negativa são dados por: $6x - 12 < 0 \Rightarrow x < 2$

Podemos representar a variação do sinal dessa função pelo esquema:

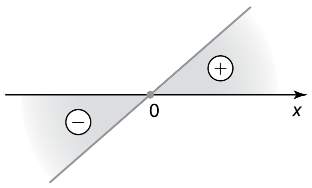


e) $f(x) = 5x$
Graficamente:

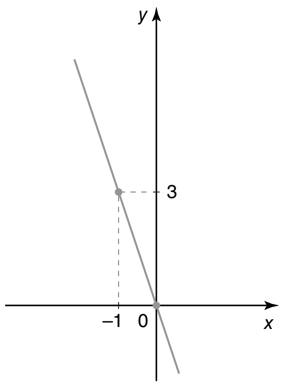


- 0 é raiz da função f;
- f é crescente;
- para qualquer x real, com $x > 0$, temos $f(x) > 0$;
- para qualquer x real, com $x < 0$, temos $f(x) < 0$.

Podemos representar a variação do sinal dessa função pelo esquema:

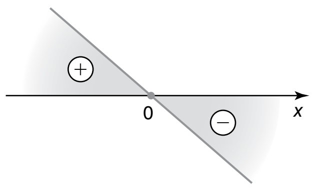


f) $f(x) = -3x$
Graficamente:

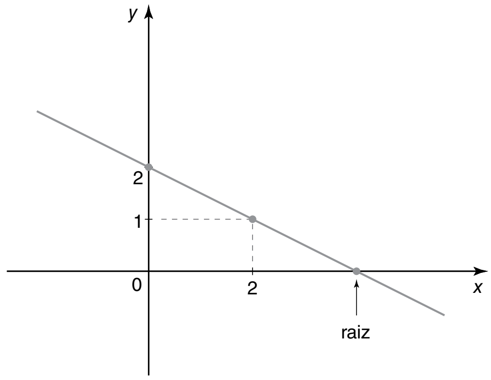


- 0 é raiz da função f;
- f é decrescente;
- para qualquer x real, com $x > 0$, temos $f(x) < 0$;
- para qualquer x real, com $x < 0$, temos $f(x) > 0$.

Podemos representar a variação do sinal dessa função pelo esquema:



26.



x	y
0	2
2	1

A equação da reta é da forma $y = ax + b$, em que

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-2}{2-0} = -\frac{1}{2}$

Quando $x = 0$, temos $y = 2$; então temos $b = 2$.

Logo, a equação da reta é $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

A raiz de f é dada por: $-\frac{1}{2}x + 2 = 0 \Rightarrow x = 4$

Sabendo que 4 é raiz de f, o gráfico nos informa que:

- f se anula para $x = 4$;
- f é positiva para $x < 4$;
- f é negativa para $x > 4$.

27. a) Para $y = 0$, temos:
$0 = 0{,}84 - 0{,}06x \Rightarrow x = 14$
Portanto, no 14º dia do mês.

b) Para $y > 0$, temos:
$0{,}084 - 0{,}06x > 0 \Rightarrow x < 14$
Portanto, o índice y foi positivo para o período do 1º ao 13º dias.

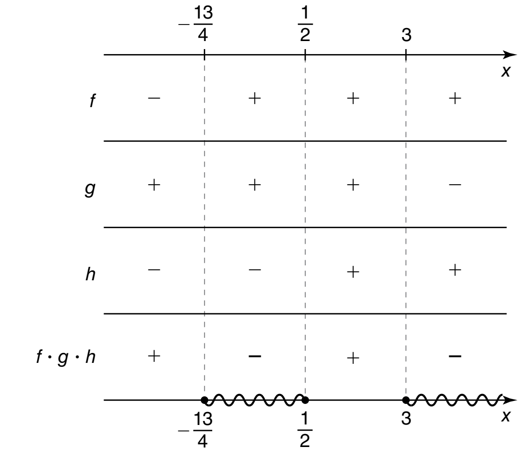
c) Para $y < 0$, temos:
$0{,}084 - 0{,}06x < 0 \Rightarrow x > 14$
Portanto, o índice y foi positivo para o período do 15º ao 30º dias.

28. a) Sendo $f(x) = 2x - 8$ e $g(x) = 2 - x$, temos:

	x < 2	2 < x < 4	x > 4
f	−	−	+
g	+	−	−
$f \cdot g$	−	+	−

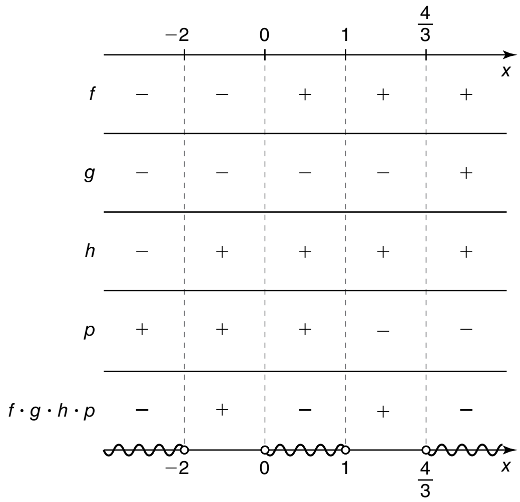
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$.

b) Sendo $f(x) = 4x + 13$, $g(x) = 3 - x$ e $h(x) = 2x - 1$, temos:



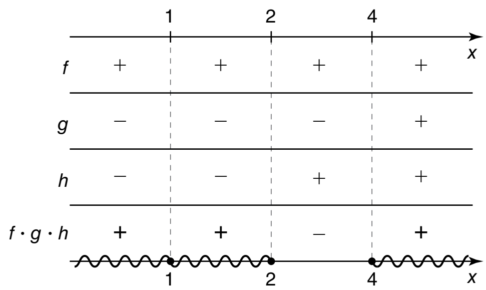
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{13}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \text{ ou } x \geqslant 3\right\}$.

c) Sendo $f(x) = x$, $g(x) = 3x - 4$, $h(x) = x + 2$ e $p(x) = 1 - x$, temos:



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } 0 < x < 1 \text{ ou } x > \frac{4}{3}\right\}$.

d) Sendo $f(x) = (x - 1)^6$, $g(x) = (2x - 8)^3$ e $h(x) = x - 2$, temos:



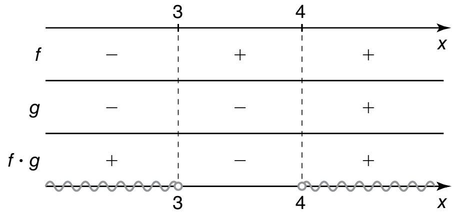
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2 \text{ ou } x \geqslant 4\}$.

29. a) A forma fatorada da expressão $x^2 - 7x + 12$ é: $(x - 3)(x - 4)$

Assim:

$x^2 - 7x + 12 > 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 4) > 0$

Sendo $f(x) = x - 3$ e $g(x) = x - 4$, temos:



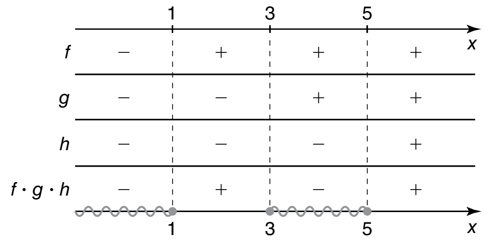
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \text{ ou } x > 4\}$.

b) A forma fatorada da expressão $x^2 - 4x + 3$ é: $(x - 1)(x - 3)$

Assim:

$(x^2 - 4x + 3)(x - 5) \leqslant 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 3)(x - 5) \leqslant 0$

Sendo $f(x) = x - 1$, $g(x) = x - 3$ e $h(x) = x - 5$, temos:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } 3 \leqslant x \leqslant 5\}$.

c) Para a expressão $x^3 + x^2 - 9x - 9$, temos:

$x^3 + x^2 - 9x - 9 = x^2(x + 1) - 9(x + 1) =$

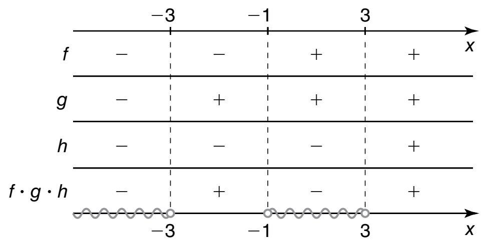
$= (x + 1)(x^2 - 9) = (x + 1)(x + 3)(x - 3)$

Logo, a forma fatorada da expressão $x^3 + x^2 - 9x - 9$ é: $(x + 1)(x + 3)(x - 3)$

Assim:

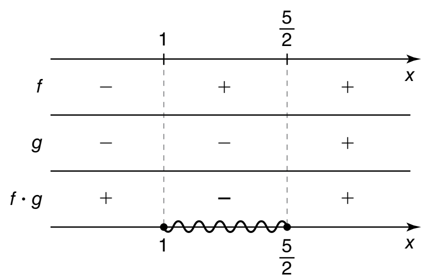
$x^3 + x^2 - 9x - 9 < 0 \Rightarrow (x + 1)(x + 3)(x - 3) < 0$

Sendo $f(x) = x + 1$, $g(x) = x + 3$ e $h(x) = x - 3$, temos:



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } -1 < x < 3\}$.

30. Sendo $f(x) = x - 1$ e $g(x) = 2x - 5$, temos:



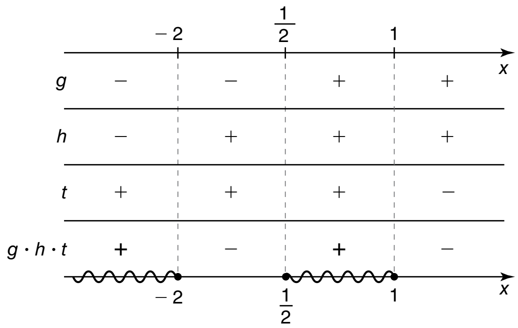
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\right\}$.

Portanto, o maior número inteiro x que satisfaz a desigualdade $(x - 1)(2x - 5) \leqslant 0$ é 2.

31. O domínio D da função f é formado por todos os números reais x tais que:

$$(2x - 1)(x + 2)(1 - x) \geqslant 0$$

Estudando a variação de sinal das funções $g(x) = 2x - 1$, $h(x) = x + 2$ e $t(x) = 1 - x$, obtemos:

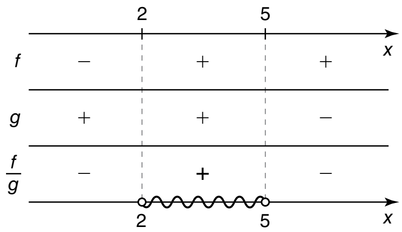


Assim, concluímos:

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1\right\}$$

32. a) Sendo $f(x) = 3x - 6$ e $g(x) = 5 - x$, temos:

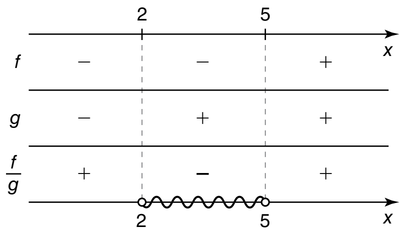
Condição de existência: $x \neq 5$



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$.

b) Sendo $f(x) = 2x - 10$ e $g(x) = 3x - 6$, temos:

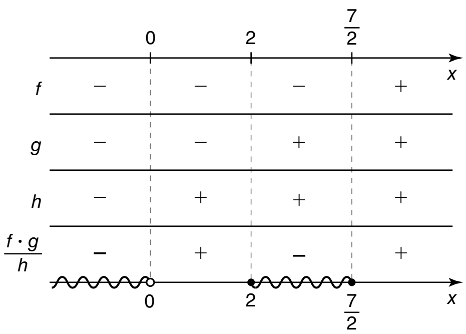
Condição de existência: $x \neq -2$



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$.

c) Sendo $f(x) = 2x - 7$, $g(x) = x - 2$ e $h(x) = x$, temos:

Condição de existência: $x \neq 0$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } 2 \leqslant x \leqslant \frac{7}{2}\right\}$.

33. a) Condição de existência: $x \neq 0$

$$\frac{x-2}{x} > 1 \Rightarrow \frac{x-2}{x} - 1 > 0$$

$$\therefore -\frac{2}{x} > 0$$

Como o numerador de $-\frac{2}{x}$ é negativo, a fração será positiva se, e somente se, o denominador for negativo, ou seja, $x < 0$.

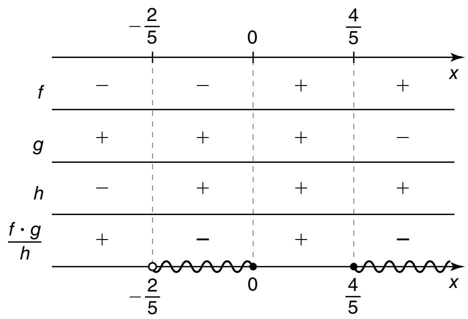
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$.

b) Condição de existência: $x \neq -\frac{2}{5}$

$$\frac{6x}{5x+2} \leqslant x \Rightarrow \frac{6x}{5x+2} - x \leqslant 0$$

$$\therefore \frac{x(4-5x)}{5x+2} \leqslant 0$$

Sendo $f(x) = x$, $g(x) = 4 - 5x$ e $h(x) = 5x + 2$, temos:



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{5} < x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant \frac{4}{5}\right\}$.

34. Temos:

$$50 - \frac{6}{x} < 49 - \frac{2}{x-1}$$

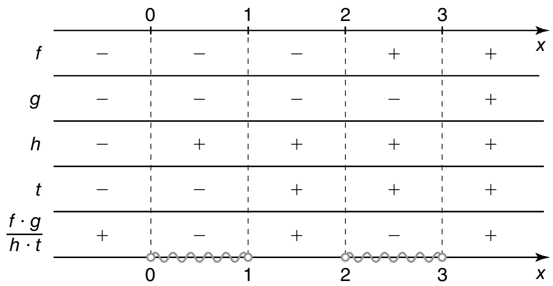
Condições de existência: $x \neq 0$ e $x \neq 1$

$$1 - \frac{6}{x} + \frac{2}{x-1} < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 5x + 6}{x(x-1)} < 0$$

Fatorando o numerador, obtemos:

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x(x-1)} < 0$$

Estudamos a variação de sinal das funções $f(x) = x - 2$, $g(x) = x - 3$, $h(x) = x$, $t(x) = x - 1$ e $\frac{fg}{ht}$ pelo quadro de sinais:



Portanto, $0 < x < 1$ ou $2 < x < 3$.

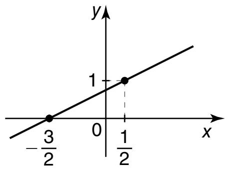
Concluímos, então, que o custo de produção do hectolitro de vinagre de vinho será menor que o custo do hectolitro de vinagre de maçã quando a produção diária for maior que 0 e menor que 1 hL ou maior que 2 hL e menor que 3 hL.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1. a)

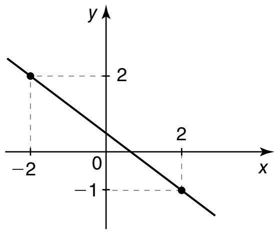
x	y
$-\frac{3}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1



$D = \mathbb{R}$; $Im = \mathbb{R}$

b)

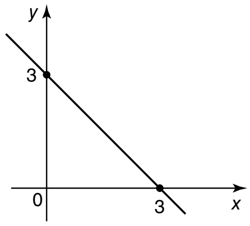
x	y
-2	2
2	-1



$D = \mathbb{R}$; $Im = \mathbb{R}$

c)

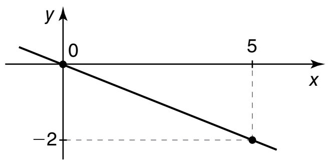
x	y
0	3
3	0



$D = \mathbb{R}$; $Im = \mathbb{R}$

d)

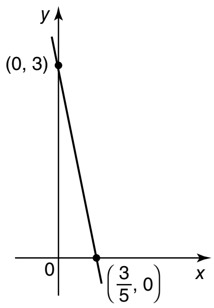
x	y
0	0
5	-2



$D = \mathbb{R}$; $Im = \mathbb{R}$

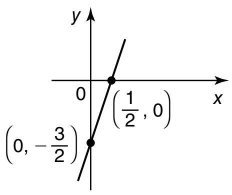
2. a)

x	y
0	3
$\frac{3}{5}$	0



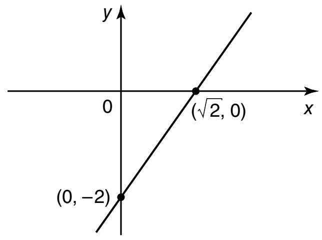
b)

x	y
0	$-\frac{3}{2}$
$\frac{1}{2}$	0



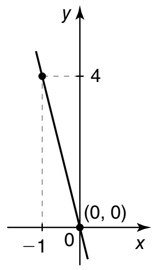
c)

x	y
0	-2
$\sqrt{2}$	0



d)

x	y
0	0
-1	4



3. Como o gráfico intercepta o eixo dos x no ponto de abscissa 4, temos que esse ponto tem coordenadas (4, 0). Portanto, o gráfico passa pelos pontos (4, 0) e (1, −3). Desse modo, temos:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 4 + b \\ -3 = a \cdot 1 + b \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = -4$$

Logo, $f(x) = x - 4$

Alternativa **b**.

4. A lei de associação de uma função polinomial do 1º grau é da forma $y = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.
Os pontos (1, 3) e (−1, −5) pertencem ao gráfico de $y = ax + b$; logo:

$$\begin{cases} 3 = a \cdot 1 + b \\ -5 = a \cdot (-1) + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ -a + b = -5 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtém-se: $a = 4$ e $b = -1$.
A lei de associação entre x e y é:
$y = 4x - 1$

- Intersecção do gráfico com o eixo Ox:
  $y = 0 \Rightarrow 4x - 1 = 0$
  $\therefore x = \frac{1}{4}$
- Intersecção do gráfico com o eixo Oy:
  $x = 0 \Rightarrow y = 4 \cdot 0 - 1$
  $\therefore y = -1$

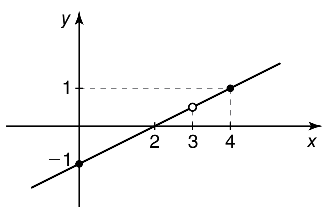
Portanto, os pontos de intersecção desse gráfico com os eixos coordenados são $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ e $(0, -1)$.

5. Para $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x - 6}$, temos $x \neq 3$; assim:

$$y = \frac{(x - 2) \cdot \cancel{(x - 3)}}{2 \cdot \cancel{(x - 3)}}$$

$y = \frac{x}{2} - 1$, com $x \neq 3$.

x	y
0	-1
4	1

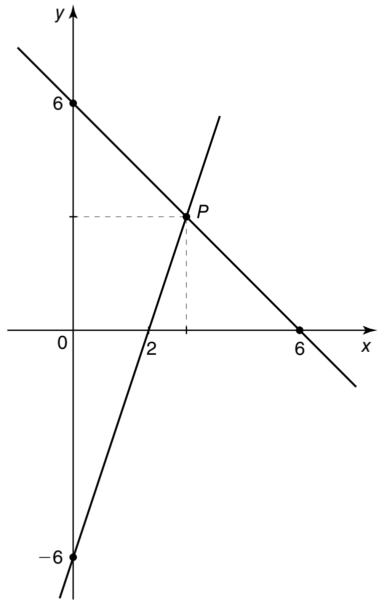


6. $y = 3x - 6$ (I)

x	y
0	-6
2	0

$y = -x + 6$ (II)

x	y
0	6
6	0



O ponto P, comum aos dois gráficos, é a solução do sistema:

$$\begin{cases} y = 3x - 6 \\ y = -x + 6 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ e } y = 3$$

Logo, $P(3, 3)$.

7. a) Como A e B são diretamente proporcionais, a razão $\frac{A}{B}$ é uma constante e, nesse caso, já sabemos que $\frac{A}{B} = \frac{2}{9}$. Podemos então fazer:

$\frac{2}{9} = \frac{0}{m} \Rightarrow m = 0$

$\frac{2}{9} = \frac{4}{n} \Rightarrow n = 18$

$\frac{2}{9} = \frac{15}{p} \Rightarrow p = \frac{135}{2}$

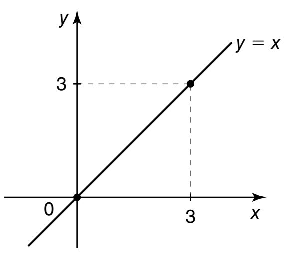
Logo, $m = 0$, $n = 18$ e $p = \frac{135}{2}$

b) $\frac{y}{x} = \frac{2}{9} \Rightarrow y = \frac{2x}{9}$

c) Sim, pois a função é do tipo $y = ax$ e para $x = 0$, temos $y = 0$, o que indica que a função passa pela origem do sistema.

8.

x	y
0	0
3	3



$D = \mathbb{R}$; $Im = \mathbb{R}$

9. $f(0) = 2 \cdot 0 \Rightarrow f(0) = 0$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

$f\left(\sqrt{12}\right) = 1 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} \Rightarrow f\left(\sqrt{12}\right) = -5$

Temos, então:

$f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\sqrt{12}\right) = 0 + 1 - (-5) = 6$

Alternativa **d**.

10. a) I. $t(x) = -x + 1$, se $x \leqslant 3$

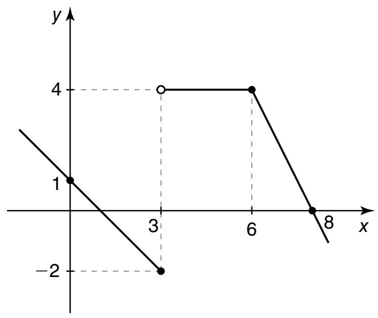
x	y
0	1
3	-2

II. $t(x) = 4$, se $3 < x \leqslant 6$

III. $t(x) = -2x + 16$, se $x > 6$

Embora a variável x não possa assumir o valor 6 para esta parte do gráfico, atribuímos a ela esse valor para obter o extremo aberto do gráfico:

x	y
6	4
8	0



b) I. $s(x) = -2x + 2$, se $x \leqslant 2$

x	y
0	2
2	-2

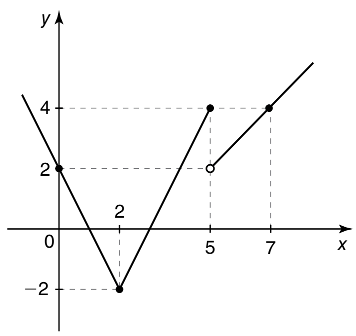
II. $s(x) = 2x - 6$, se $2 < x \leqslant 5$

x	y
2	-2
5	4

III. $s(x) = x - 3$, se $x > 5$

Embora a variável x não possa assumir o valor 5 para esta parte do gráfico, atribuímos a ela esse valor para obter o extremo aberto do gráfico:

x	y
5	2
7	4



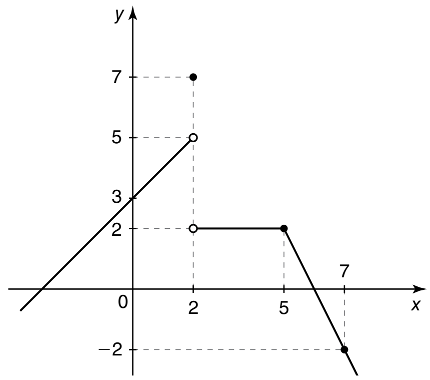
c) **I.** $q(x) = x + 3$, se $x < 2$

x	y
0	3
2	5

II. $q(x) = 7$, se $x = 2$

III. $q(x) = 2$, se $2 < x \leqslant 5$

IV. $q(x) = -2x + 12$, se $x > 5$



11. Para a função $f(x)$, temos:

(I) $f(x) = \dfrac{2x}{5} + 6$ se $0 \leqslant x \leqslant 5$

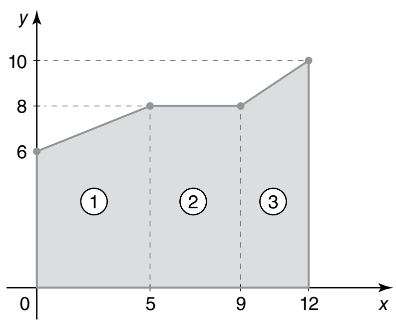
x	y
0	6
5	8

(II) $f(x) = 8$, se $5 < x \leqslant 9$

(III) $f(x) = \dfrac{2x}{3} + 2$, se $9 < x \leqslant 12$

x	y
9	8
12	10

Construindo o gráfico, temos:



Calculando a área da região 1:

$$A_1 = \frac{(8 + 6) \cdot 5}{2} = 35$$

Calculando a área da região 2:

$A_2 = (9 - 5) \cdot 8 = 32$

Calculando a área da região 3:

$$A_3 = \frac{(10 + 8) \cdot (12 - 9)}{2} = 27$$

Logo, a área dessa região será 35 + 32 + 27 unidades de área, ou seja, 94 unidades de área.
Alternativa **c**.

12. $\begin{cases} y = ax + b \\ a = -2 \quad \text{(taxa de variação)} \end{cases}$

Então, $y = -2x + b$

Como o ponto $A(-4, 8)$ pertence à reta s, temos:

$8 = -2 \cdot (-4) + b \Rightarrow b = 0$

Logo, a reta s tem equação $y = -2x$.

13. a) • $a = \dfrac{1 - (-1)}{4 - 1} = \dfrac{2}{3}$; $y = \dfrac{2}{3}x + b$

• $A(1, -1)$ pertence ao gráfico; então:

$-1 = \dfrac{2}{3} \cdot 1 + b \Rightarrow b = -\dfrac{5}{3}$

Logo, $y = \dfrac{2x}{3} - \dfrac{5}{3}$.

b) • $a = \dfrac{-2 - 2}{\frac{1}{3} - 1} = 6$; $y = 6x + b$

• $A(1, 2)$ pertence ao gráfico; então:

$2 = 6 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -4$

Logo, $y = 6x - 4$.

14. Para uma função afim, $y = ax + b$, ser crescente, a deve ser positivo. Assim, temos que k^2 é positivo para qualquer valor real não nulo de k. Portanto, $y = k^2x + 2$ é crescente para qualquer valor real não nulo de k.
Alternativa **c**.

15. Se $a < 0$, a função é decrescente, ou seja:

$x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Para $x = 0$, temos $y = b$.

Logo, a função passa pelo par $(0, b)$, sendo $b > 0$.
Alternativa **a**.

16. a) V, pois:

$$a_{AB} = \frac{f(6) - 2}{6 - (-4)} = \frac{f(6) - 2}{10}$$

$$a_{AC} = \frac{g(6) - 2}{6 - (-4)} = \frac{g(6) - 2}{10}$$

Como $f(6) > g(6)$, resulta que $a_{AB} > a_{AC}$.

b) F, pois, escolhendo $p = -4$ e $q = 8$, temos: $A(-4, 2)$, $B(8, 12)$, $C(-4, 2)$ e $D(8, 6)$.

Então: $a_{AB} = \dfrac{12 - 2}{8 - (-4)} = \dfrac{5}{6}$ e

$a_{CD} = \dfrac{6 - 2}{8 - (-4)} = \dfrac{1}{3}$

Logo, $a_{AB} > a_{CD}$.

c) V, pois a maior taxa de variação possível ocorre quando $k = 8$; então:

$f(k) = f(8) = 12$

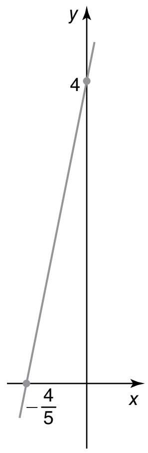
$\therefore a = \dfrac{12 - 2}{8 - (-4)} = \dfrac{5}{6}$

d) F, pois a menor taxa de variação possível ocorre quando $k = -4$; então:

$g(k) = g(-4) = 2$

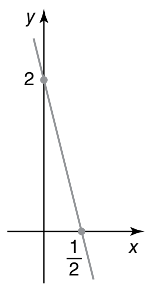
$\therefore a = \dfrac{12 - 2}{8 - (-4)} = \dfrac{5}{6} \neq 3$

17. a) $f(x) = 5x + 4$



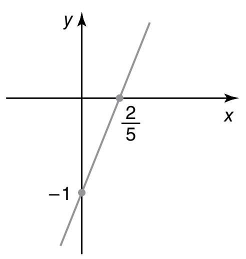
- $-\frac{4}{5}$ é raiz da função f;
- f é crescente;
- para qualquer x real, com $x > -\frac{4}{5}$, temos $f(x) > 0$;
- para qualquer x real, com $x < -\frac{4}{5}$, temos $f(x) < 0$.

b) $f(x) = -4x + 2$



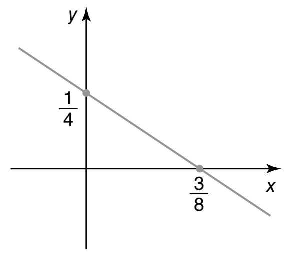
- $\frac{1}{2}$ é raiz da função f;
- f é decrescente;
- para qualquer x real, com $x > \frac{1}{2}$, temos $f(x) < 0$;
- para qualquer x real, com $x < \frac{1}{2}$, temos $f(x) > 0$.

c) $f(x) = \frac{5x}{2} - 1$



- $\frac{2}{5}$ é raiz da função f;
- f é crescente;
- para qualquer x real, com $x > \frac{2}{5}$, temos $f(x) > 0$;
- para qualquer x real, com $x < \frac{2}{5}$, temos $f(x) < 0$.

d) $f(x) = -\frac{2x}{3} + \frac{1}{4}$



- $\frac{3}{8}$ é raiz da função f;
- f é decrescente;
- para qualquer x real, com $x > \frac{3}{8}$, temos $f(x) < 0$;
- para qualquer x real, com $x < \frac{3}{8}$, temos $f(x) > 0$.

18. a) raiz de $f(x)$: $6x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{6}$

$f(x) > 0$: $6x + 5 > 0 \Rightarrow x > -\frac{5}{6}$

$f(x) < 0$: $6x + 5 < 0 \Rightarrow x < -\frac{5}{6}$

b) raiz de $f(x)$: $-3x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$

$f(x) > 0$: $-3x + 8 > 0 \Rightarrow x < \frac{8}{3}$

$f(x) < 0$: $-3x + 8 < 0 \Rightarrow x > \frac{8}{3}$

c) raiz de $f(x)$: $\frac{2x}{5} - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

$f(x) > 0$: $\frac{2x}{5} - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{5}{2}$

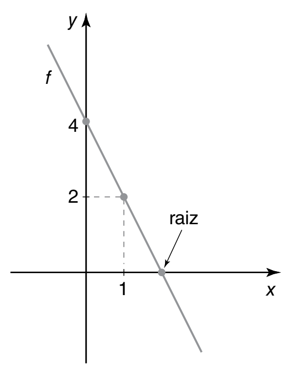
$f(x) < 0$: $\frac{2x}{5} - 1 < 0 \Rightarrow x < \frac{5}{2}$

d) raiz de $f(x)$: $-\frac{4x}{5} + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$

$f(x) > 0$: $-\frac{4x}{5} + \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow x < \frac{5}{6}$

$f(x) < 0$: $-\frac{4x}{5} + \frac{2}{3} < 0 \Rightarrow x > \frac{5}{6}$

19. a)



x	$y = ax + b$
1	2
0	4

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - 4}{1 - 0} = -2$

Quando $x = 0$, temos $y = 4$; então temos $b = 4$.

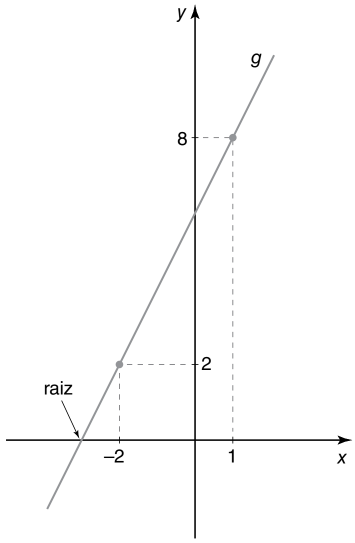
Logo, a equação da reta é $y = -2x + 4$.

A raiz de f é dada por: $-2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

Sabendo que 2 é raiz de f, o gráfico nos informa que:

- f se anula para $x = 2$;
- f é positiva para $x < 2$;
- f é negativa para $x > 2$.

b)



x	$y = ax + b$
-2	2
1	8

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8 - 2}{1 - (-2)} = 2$$

Como o gráfico passa pelos pontos $(-2,2)$ e $(1,8)$, temos:

$$\begin{cases} 2 = a \cdot (-2) + b \\ 8 = a \cdot 1 + b \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = 6$$

Logo, a equação da reta é $y = 2x + 6$

A raiz de g é dada por: $2x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3$

Sabendo que a raiz de f é -3, o gráfico nos informa que:

- g se anula para $x = -3$;
- g é positiva para $x > -3$;
- g é negativa para $x < -3$.

20. A função afim f é crescente, pois tem taxa de variação positiva.

$$\begin{cases} \dfrac{f(5) - f(4)}{5 - 4} > 0 \Rightarrow f(5) > f(4) \quad \text{(I)} \\ f(4) \cdot f(5) < 0 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

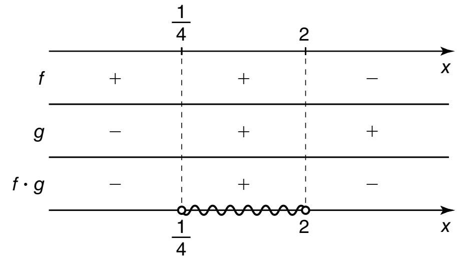
De (I) e (II) resulta $f(4) < 0$ e $f(5) > 0$.

A raiz de f é um número compreendido entre 4 e 5, pois $f(4)$ e $f(5)$ têm sinais opostos.

Logo, a afirmação correta é $f(4) < 0$ e $f(5) > 0$.

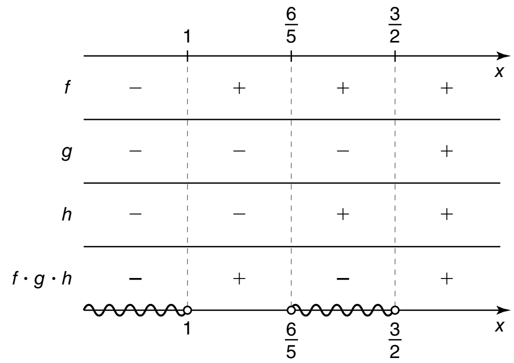
Alternativa **e**.

21. a) Sendo $f(x) = 2 - x$ e $g(x) = 4x - 1$, temos:



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} < x < 2\right\}$.

b) Sendo $f(x) = x - 1$, $g(x) = 2x - 3$ e $h(x) = 5x - 6$, temos:

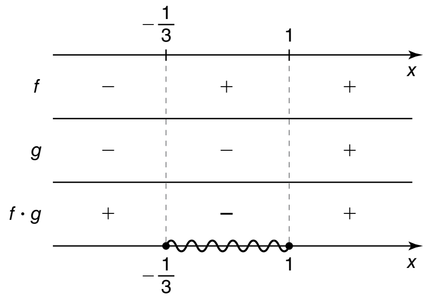


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } \frac{6}{5} < x < \frac{3}{2}\right\}$.

c) A forma fatorada da expressão $3x^2 - 2x - 1$ é $(3x + 1)(x - 1)$.

Assim, $3x^2 - 2x - 1 \leqslant 0 \Rightarrow (3x + 1)(x - 1) \leqslant 0$

Sendo $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = x - 1$, temos:

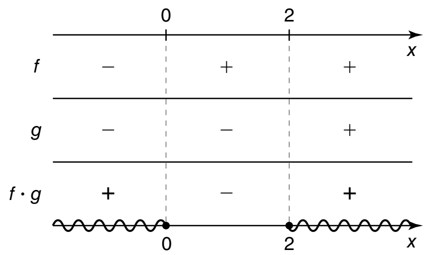


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1\right\}$.

d) A forma fatorada da expressão $x^2 - 2x$ é $x(x - 2)$.

Assim, $x^2 - 2x \geqslant 0 \Rightarrow x(x - 2) \geqslant 0$

Sendo $f(x) = x$ e $g(x) = x - 2$, temos:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 2\}$.

e) A forma fatorada da expressão $x^2 - 9$ é $(x + 3)(x - 3)$.
Assim, $x^2 - 9 < 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 3) < 0$.
Sendo $f(x) = x + 3$ e $g(x) = x - 3$, temos:

		-3		3	
f	$-$		$+$		$+$
g	$-$		$-$		$+$
$f \cdot g$	$+$		$-$		$+$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$.

22. Inicialmente, fatoramos o primeiro membro da inequação.
$x^3 + 2x^2 - x - 2 = x^2(x + 2) - (x + 2) =$
$= (x + 2)(x^2 - 1) = (x + 2)(x + 1)(x - 1)$
Assim, temos a inequação equivalente:
$(x + 2)(x + 1)(x - 1) > 0$
Representando $f(x) = x + 2$, $g(x) = x + 1$, $h(x) = x - 1$ e $f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) = (x + 2)(x + 1)(x - 1)$ em um quadro de sinais, obtemos:

		-2		-1		1	
f	$-$		$+$		$+$		$+$
g	$-$		$-$		$+$		$+$
h	$-$		$-$		$-$		$+$
$f \cdot g \cdot h$	$-$		$+$		$-$		$+$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1 \text{ ou } x > 1\}$.

23. $2(x - 1)(x + 5) < 2 - 2x \Rightarrow$
$\Rightarrow 2(x - 1)(x + 5) - 2 + 2x < 0$
$\therefore 2(x - 1)(x + 5) + 2(x - 1) < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2(x - 1)(x + 5 + 2) < 0$
$\therefore 2(x - 1)(x + 7) < 0$
Sendo $f(x) = x - 1$ e $h(x) = x + 7$, temos:

		-7		1	
f	$-$		$-$		$+$
g	$-$		$+$		$+$
$f \cdot g$	$+$		$-$		$+$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < 1\}$.
Portanto, o maior número inteiro tal que $2(x - 1)(x + 5) < 2 - 2x$ é 0.

24. O produto $f(x) \cdot g(x)$ é negativo se, e somente se, $f(x)$ e $g(x)$ tiverem sinais contrários.
Observando o gráfico, constatamos que isso ocorre para todo x real tal que $2 < x < 3$ ou $5 < x < 6$.
Alternativa **a**.

25. a) Condição de existência: $2x - 8 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$
Como o numerador de $\frac{4}{2x - 8}$ é positivo, a fração será positiva se, e somente se, o denominador for positivo, ou seja:
$2x - 8 > 0 \Rightarrow x > 4$
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$.

b) Condição de existência: $x - 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$
Como o numerador de $\frac{3}{x - 5}$ é positivo, a fração será negativa se, e somente se, o denominador for negativo, ou seja:
$x - 5 < 0 \Rightarrow x < 5$
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$.

c) Condição de existência: $x \neq \frac{2}{3}$

		-1		$\frac{2}{3}$	
f	$-$		$+$		$+$
g	$+$		$+$		$-$
$\frac{f}{g}$	$-$		$+$		$-$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x > \frac{2}{3}\right\}$.

d) Condição de existência $3x - 12 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$

		2		3		4	
f	$-$		$+$		$+$		$+$
g	$+$		$+$		$-$		$-$
h	$-$		$-$		$-$		$+$
$\frac{f \cdot g}{h}$	$+$		$-$		$+$		$-$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2 \text{ ou } 3 \leqslant x < 4\}$.

e) A inequação é equivalente a $\frac{(x - 1)(x - 3)}{2x + 5} \leqslant 0$.
Condição de existência $2x + 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{5}{2}$

		$-\frac{5}{2}$		1		3	
f	$-$		$-$		$+$		$+$
g	$-$		$-$		$-$		$+$
h	$-$		$+$		$+$		$+$
$\frac{f \cdot g}{h}$	$-$		$+$		$-$		$+$

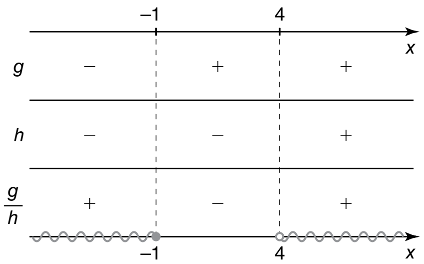
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{2} \text{ ou } 1 \leqslant x \leqslant 3\right\}$.

26. O domínio D da função f é formado por todos os números reais x tais que:

$\dfrac{1 + x}{x - 4} \geqslant 0$

Condição de existência: $x - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$

Estudando a variável de sinal das funções $g(x) = 1 + x$ e $h(x) = x - 4$, obtemos:



Assim, concluímos que $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x > 4\}$.

Alternativa **d**.

27. $g(x) = \sqrt{\dfrac{2}{x + 3}} + \sqrt{\dfrac{x}{x + 2}}$

(I) $\dfrac{2}{x + 3} \geqslant 0$

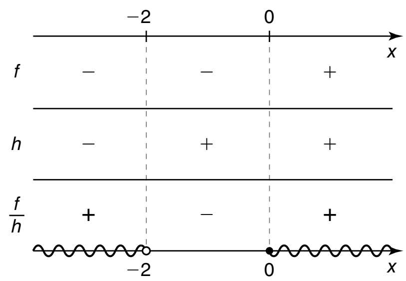
Condição de existência: $x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$

Como o numerador é positivo, a desigualdade se verifica se $x + 3 > 0$, ou seja, $x > -3$.

(II) $\dfrac{x}{x + 2} \geqslant 0$

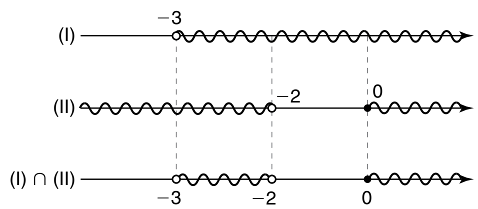
Condição de existência: $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

Sendo $f(x) = x$ e $g(x) = x + 2$, temos:



Logo, $x < -2$ ou $x \geqslant 0$.

Fazendo a intersecção dos intervalos obtidos em (I) e (II), temos:



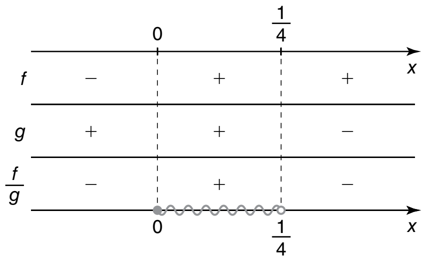
Logo, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2 \text{ ou } x \geqslant 0\}$.

28. $\dfrac{5x + 1}{1 - 4x} \geqslant 1 \Rightarrow \dfrac{5x + 1}{1 - 4x} - 1 \geqslant 0$

$\therefore \dfrac{9x}{1 - 4x} \geqslant 0$

Condição de existência: $1 - 4x \neq 0 \Rightarrow x \neq \dfrac{1}{4}$

Sendo $f(x) = 9x$ e $g(x) = 1 - 4x$, temos:



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \dfrac{1}{4}\right\}$.

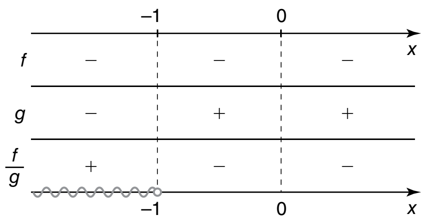
Alternativa **d**.

29. $\dfrac{x}{x + 1} > x \Rightarrow \dfrac{x}{x + 1} - x > 0$

$\therefore \dfrac{-x^2}{x + 1} > 0$

Condição de existência: $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

Sendo $f(x) = -x^2$ e $g(x) = x + 1$, temos:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$.

Alternativa **e**.

30. $f(x) = \dfrac{(x - 1)^{20} \cdot (x + 1)^{38}}{x^{10}}$

Condição de existência: $x^{10} \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

Lembrando que toda potência de base real e expoente par é positiva ou nula e levando em consideração a condição de existência, concluímos que $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Desse modo, não temos nenhum valor para $f(x) \leqslant 0$.

Logo, os únicos valores de x que satisfazem a inequação são as raízes de f, que são 1 e -1.

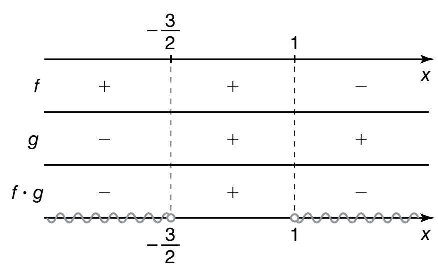
Alternativa **b**.

31. $\begin{cases} (1 - x)(2x + 3) < 0 & \text{(I)} \\ \dfrac{x + 5}{x} \leqslant 0 & \text{(II)} \end{cases}$

Resolvendo inicialmente cada inequação, temos:

(I) $(1 - x)(2x + 3) < 0$

Sendo $f(x) = 1 - x$ e $g(x) = 2x + 3$, temos:

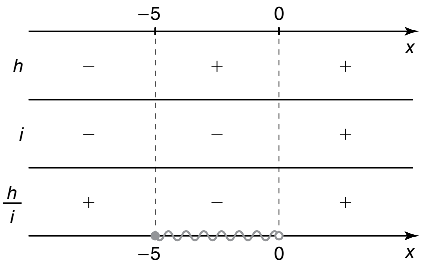


Logo, $S_I = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\dfrac{3}{2} \text{ ou } x > 1\right\}$.

(II) $\frac{x+5}{x} \leqslant 0$

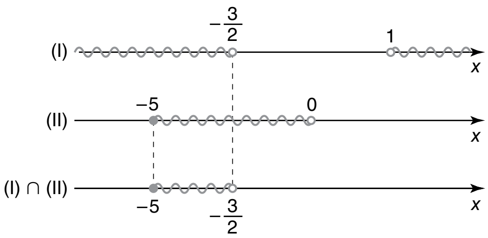
Condição de existência: $x \neq 0$

Sendo $h(x) = x + 5$ e $i(x) = x$, temos:



Logo, $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leqslant x < 0\}$.

O conjunto solução do sistema de inequações será a intersecção das soluções:



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leqslant x < -\frac{3}{2}\right\}$.

Exercícios contextualizados

32. $s = s_0 + vt$

Temos:

$s_0 = 0$

$s = 1{,}49 \cdot 10^8$

$v = 3 \cdot 10^5$

$\therefore\ 1{,}49 \cdot 10^8 = 0 + 3 \cdot 10^5 t \Rightarrow t = \frac{1{,}49 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^5} \approx 0{,}50 \cdot 10^3$

Logo, a luz percorre essa distância em aproximadamente $0{,}50 \cdot 10^3$ segundos, ou seja, 500 segundos.

33. Considerando x a quantidade de dias em atraso e $M(x)$ o valor a ser pago, conclui-se que a lei da função M é dada por:

$M(x) = 500 + 10 + 0{,}4x$, ou seja:

$M(x) = 510 + 0{,}4x$

Alternativa **c**.

34. **a)** O gráfico mostra que, na superfície do mar (profundidade 0), a pressão sofrida pelo mergulhador é de 1 atmosfera.

b) $\frac{p-2}{18-10} = \frac{2-1}{10-0} \Rightarrow p = 2{,}8$

Logo, a pressão sofrida pelo mergulhador a 18 m de profundidade é de 2,8 atm.

c) $p = ax + b$

$a = \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{2-1}{10-0} = 0{,}1$

Então temos: $p = 0{,}1x + b$

Como o ponto (10, 2) pertence ao gráfico, temos:

$2 = 0{,}1 \cdot 10 + b \Rightarrow b = 1$

Logo, a equação é $p = 0{,}1x + 1$.

35. De acordo com os dados, podemos obter os pares ordenados (0, 280.000) e (3, 325.000). Como se trata de um crescimento linear, a lei de associação entre x e y é da forma $y = ax + b$, sendo x o tempo decorrido e y o valor estimado do imóvel. Assim, temos:

$\begin{cases} 280.000 = a \cdot 0 + b \\ 325.000 = a \cdot 3 + b \end{cases} \Rightarrow b = 280.000 \text{ e } a = 15.000$

Logo, $y = 15.000x + 280.000$.

O tempo de 4 anos e 3 meses corresponde a 4 anos e $\frac{3}{12}$ meses, ou seja, 4,25 anos.

Substituindo $x = 4{,}25$ na equação obtida anteriormente, temos:

$y = 15.000 \cdot 4{,}25 + 280.000 \Rightarrow y = 343.750$

Logo, o valor estimado será de R$ 343.750,00.

Alternativa **d**.

36. **a)** De acordo com o enunciado, temos dois pares ordenados: (5, 25) e (10, 20). Como a temperatura varia linearmente, a lei de associação entre x e y é da forma $y = ax + b$. Assim, temos:

$\begin{cases} 25 = 5 \cdot a + b \\ 20 = 10 \cdot a + b \end{cases} \Rightarrow a = -1 \text{ e } b = 30$

Logo, $y = -x + 30$.

b) Substituindo $x = 8$ na equação obtida no item **a**, temos:

$y = -8 + 30 \Rightarrow y = 22$

Logo, a temperatura da sala após 8 minutos será de 22 °C.

37. **a)** De acordo com o enunciado, o reservatório C enche numa vazão de (8 + 10) L/min, ou seja, 18 L/min. Como ele estava inicialmente vazio, podemos estabelecer sua lei de associação de volume y em função do tempo x: $y = 18x$

Desse modo, para $y = 108$, temos:

$108 = 18x \Rightarrow x = 6$

Como as torneiras são fechadas simultaneamente, assim que o reservatório C é cheio, as torneiras permaneceram abertas por 6 minutos.

b) Como o reservatório A contém inicialmente 110 L de gasolina e perde líquido numa vazão de 8 L/ min, temos a seguinte lei de associação de volume y em função do tempo x: $y = 110 - 8x$

Para $x = 6$, temos:

$y = 110 - 8 \cdot 6 \Rightarrow y = 62$

Como o reservatório B contém inicialmente 130 L de gasolina e perde líquido numa vazão de 10 L/min, temos a seguinte lei de associação de volume y em função do tempo x: $y = 130 - 10x$

Para $x = 6$, temos:

$y = 130 - 10 \cdot 6 \Rightarrow y = 70$

Logo, após o enchimento do reservatório C, no reservatório A haverá 62 litros de gasolina, e no reservatório B haverá 70 litros de gasolina.

c) De acordo com os itens **a** e **b**, temos: $f(x) = 110 - 8x$

d) De acordo com os itens **a** e **b**, temos: $g(x) = 18x$

e) reservatório A: $f(x) = 110 - 8x$

reservatório B: $f(x) = 130 - 10x$

Portanto, havia inicialmente (110 + 130) litros, ou seja, 240 litros, com uma vazão de (8 + 10) L/min, ou seja, 18 L/min. Desse modo, concluímos que: $S(x) = 240 - 18x$.

38. a) O rendimento de cada mês é:

Abril: $160 + 0{,}02 \cdot 8.350 = 327$

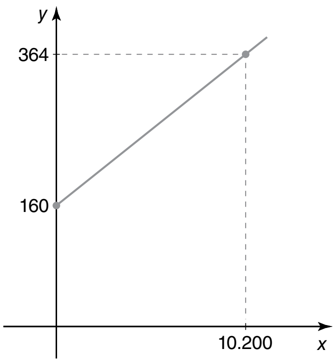
Maio: $160 + 0{,}02 \cdot 10.200 = 364$

Junho: $160 + 0{,}02k$

	Venda (R$)	Rendimento (R$)
Abril	8.350	327
Maio	10.200	364
Junho	k	$160 + 0{,}02k$

b) $y = 160 + 0{,}02x$

Note que o gráfico é uma semirreta.

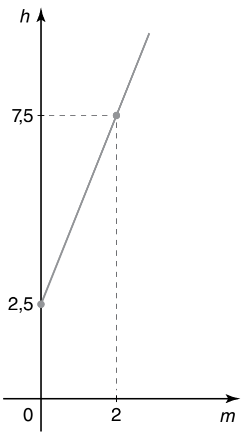


39. $m = 3 + 0{,}1t \Rightarrow t = \dfrac{m-3}{0{,}1}$

Substituindo t por $\dfrac{m-3}{0{,}1}$ na função $h = 10 + 0{,}25t$, temos:

$h = 10 + 0{,}25 \cdot \dfrac{m-3}{0{,}1} \Rightarrow h = 2{,}5 + 2{,}5m$

m	h
0	2,5
2	7,5



O gráfico é o segmento dessa semirreta cujos extremos são $(0; 2{,}5)$ e $(m_f; h(m_f))$, em que m_f é a massa da planta ao final das medições.

40 a) Como para cada faixa de consumo é cobrada uma tarifa, temos que representar a função por mais de uma sentença. Ressaltamos que o maior valor pago na segunda faixa é dado por $12 + (20 - 10) \cdot 2$, isto é, R$ 32,00. Assim, indicando por x a quantidade de água consumida, em metro cúbico, e por $f(x)$ a tarifa em real, temos:

$$f(x) = \begin{cases} 12, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 12 + 2(x - 10), \text{ se } 10 < x \leqslant 20 \\ 32 + 3(x - 20), \text{ se } x > 20 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 12, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 2x - 8, \text{ se } 10 < x \leqslant 20 \\ 3x - 28, \text{ se } x > 20 \end{cases}$$

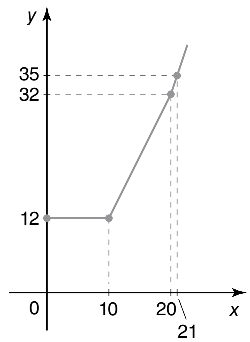
b) Para esboçar o gráfico da função, analisamos cada sentença:

I. $f(x) = 12$, se $0 \leqslant x \leqslant 10$. Logo, neste intervalo, o gráfico é um segmento de reta com extremos (0, 12) e (10, 12).

II. $f(x) = 2x - 8$, se $10 < x \leqslant 20$. Logo, neste intervalo, o gráfico é um segmento de reta com um extremo aberto (10, 12) e um extremo fechado (20, 32).

III. $f(x) = 3x - 28$, se $x > 20$. Logo, quando $x > 20$ o gráfico é a semirreta de origem aberta em (20, 32) que passa pelo ponto (21, 35).

A reunião dos gráficos deduzidos em I, II, III é o gráfico da função f:



É claro que, na prática, há um limite para o consumo de água. No entanto, por ser teoricamente ilimitado esse consumo, representamos por uma semirreta o gráfico determinado no item III.

41.

Dia do mês (x)	Valor do dólar (y)
1	R$ 2,00
31	R$ 2,21

$$y = ax + b$$

- $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2{,}21 - 2{,}00}{31 - 1} = 0{,}007$
- $2{,}00 = 0{,}007 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 1{,}993$

Logo, $y = 0{,}007x + 1{,}993$.

Se $x = 21$, então $y = 0{,}007 \cdot 21 + 1{,}993$

$\therefore\ y = 2{,}14$

Logo, o valor do dólar, em real, no dia 21 de julho foi R$ 2,14.

42. a) De acordo com o gráfico, temos:

- $A(18; 24{,}38)$
- $B(30; 21{,}88)$

A lei de associação entre x e y é da forma $y = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Assim, temos:

$$\begin{cases} 24{,}38 = 18a + b \\ 21{,}88 = 30a + b \end{cases} \Rightarrow a \approx -0{,}21 \text{ e } b = 28{,}16$$

Logo, $y = -0{,}21x + 28{,}16$

Substituindo $x = 22{,}8$ na equação obtida anteriormente, temos:

$y = -0{,}21 \cdot 22{,}8 + 28{,}16 \Rightarrow y = 23{,}37$

Portanto, a capacidade volumétrica do cilindro à temperatura de 22,8 °C é de aproximadamente 23,37 litros.

b) Substituindo $y = 22{,}38$ na equação obtida no item **a**, temos:

$22{,}38 = -0{,}21 \cdot x + 28{,}16 \Rightarrow x = 27{,}5$

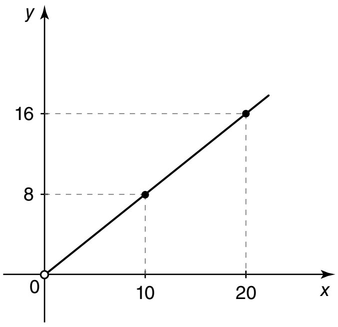
Portanto, a temperatura para que a capacidade volumétrica do cilindro seja 22,38 m^3 é de aproximadamente 27,5 °C.

43. a) Sendo A a área do papel, temos:

$A = (50 \cdot 0{,}80)\ m^2 = 40\ m^2$

b) $y = 0{,}8x$, $x > 0$

x	y
10	8
20	16



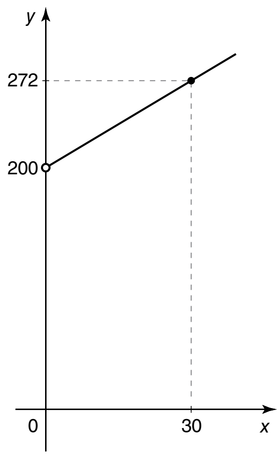
c) De acordo com o enunciado, temos:

$y = 5 \cdot 50 \cdot 0{,}8 + 3 \cdot x \cdot 0{,}8$; com $x > 0$

Simplificando, obtemos:

$y = 2{,}4x + 200$; com $x > 0$

x	y
0	200
30	272



44. Os pontos (5, 1) e (10, 2) pertencem ao gráfico e a lei de associação entre t e h é da forma $h = at + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Assim, temos:

$$\begin{cases} 1 = 5 \cdot a + b \\ 2 = 10 \cdot a + b \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{5} \text{ e } b = 0$$

Logo, $h = \frac{t}{5}$.

No trigésimo dia, ou seja, para $t = 30$, temos:

$$h = \frac{30}{5} = 6$$

Portanto, a altura da planta no trigésimo dia será de 6 centímetros.

Alternativa **b**.

45. O preço m, em real, varia de forma linear em função da quantidade n, em quilograma de fruta comprada, além de se tratar de uma função afim, pois para $n = 0$ temos $m = 0$. Assim, obedece à lei de associação $y = ax$. Portanto, o gráfico é uma reta que passa pela origem do sistema.

Alternativa **c**.

46. a) $C = 2\pi r \Rightarrow C = 6{,}28r$

Se $r = 0{,}5$ m, então $C = 3{,}14$ m.

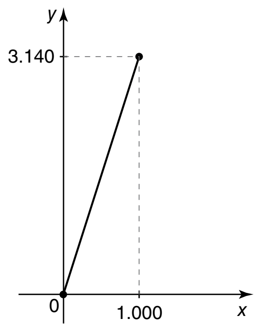
Temos a seguinte proporção:

Número de voltas		Distância percorrida (m)
1	———	3,14
x	———	y

Então, $\frac{1}{x} = \frac{3{,}14}{y} \Rightarrow y = 3{,}14x$

b)

x	y
0	0
1.000	3.140



c) Sim, pois:

I. Se $x = 0$, então $y = 0$.

II. Se $x \neq 0$, a razão de y para x é constante, ou seja, $\frac{y}{x} = 3{,}14$.

47. De acordo com o gráfico, o valor a ser pago por um banho de 20 min é R\$ 0,60. Se o custo por kWh é R\$ 0,30, então a energia elétrica consumida nesse banho é 2 kwh.

Lembrando que $Pot = \frac{E}{\Delta t}$, resulta:

$$Pot = \frac{2\ \text{kWh}}{\frac{1}{3}\ \text{h}} = 6\ \text{kW}$$

Alternativa **e**.

48. a) Considerando que para uma ingestão de 0 mg a 120 mg a lei de associação entre x e y seja da forma $y = ax$ e que a função passe pelo ponto (120, 90), podemos calcular o valor de a:

$$a = \frac{90 - 0}{120 - 0}$$

$\therefore a = 0{,}75$

Desse modo, temos $y = 0{,}75x$.

Substituindo $x = 100$ na equação obtida anteriormente, temos:

$y = 0{,}75 \cdot 100 \Rightarrow y = 75$

Logo, se o paciente ingerir 100 mg do composto, em um dia, serão absorvidos pelo organismo 75 mg.

b) Considerando que para uma ingestão de 120 mg a 180 mg a lei de associação entre x e y é da forma $y = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ e que ela passa pelos pontos (120, 90) e (180, 120), temos:

$$\begin{cases} 90 = 120 \cdot a + b \\ 120 = 180 \cdot a + b \end{cases} \Rightarrow a = 0{,}5 \text{ e } b = 30$$

Logo, $y = 0{,}5x + 30$.

Substituindo $x = 150$ na equação obtida anteriormente, temos:

$y = 0{,}5 \cdot 150 + 30 \Rightarrow y = 105$

Logo, se o paciente ingerir 150 mg do composto, em um dia, serão absorvidos pelo organismo 105 mg.

c) Considerando que para uma ingestão acima de 180 mg o gráfico seja uma função constante $y = 120$, temos que se o paciente ingerir 400 mg, serão absorvidos 120 mg.

d) Pelo gráfico concluímos que esse limite é de 180 mg por dia.

e) Por meio dos itens **a**, **b** e **c**, temos:

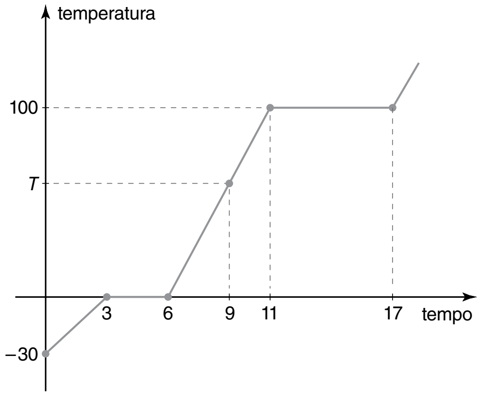
$$f(x) = \begin{cases} 0{,}75x, \text{ para } 0 < x \leqslant 120 \\ 0{,}5x + 30, \text{ para } 120 < x \leqslant 180 \\ 120, \text{ para } x > 180 \end{cases}$$

49 **a)** -30 °C

b) 3 minutos

c) 6 minutos

d)



$$\frac{T}{3} = \frac{100}{5} \Rightarrow T = 60$$

Então a temperatura da água 9 minutos depois do aquecimento era de 60 °C.

e) 5 minutos

f) • Para $0 \leqslant x < 3$, temos:

x	y
0	−30
3	0

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{0 - (-30)}{3 - 0} = 10 \\ b &= -30 \end{aligned}\right\} f(x) = 10x - 30$$

• Para $3 \leqslant x < 6$, temos $f(x) = 0$

• Para $6 \leqslant x < 11$, temos:

x	y
6	0
11	100

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{100 - 0}{11 - 6} = 20 \\ 0 &= 20 \cdot 6 + b \Rightarrow b = -120 \end{aligned}\right\} f(x) = 20x - 120$$

• Para $11 \leqslant x \leqslant 17$, temos $f(x) = 100$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 10x - 30, \text{ se } 0 \leqslant x < 3 \\ 0, \text{ se } 3 \leqslant x < 6 \\ 20x - 120, \text{ se } 6 \leqslant x < 11 \\ 100, \text{ se } 11 \leqslant x \leqslant 17 \end{cases}$$

50. **a)** Como em 5 horas o consumo foi de 450 Wh, temos que por hora foi consumido (450 : 5) Wh, ou seja, 90 Wh.

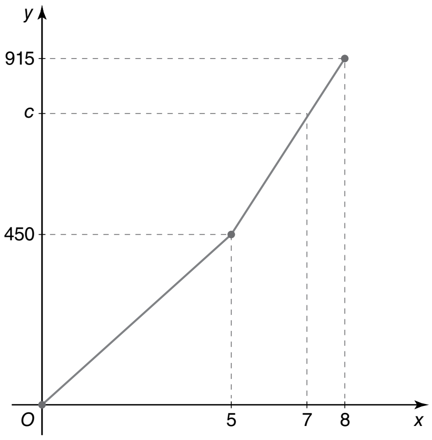
b) No intervalo de 5 a 8 horas, a taxa a de variação do consumo foi:

$$a = \frac{915 - 450}{8 - 5} \Rightarrow a = 155$$

Logo, nesse período foi consumido 155 Wh/h.

Pelo item **a**, sabemos que só a TV consome por hora 90 Wh. Portanto, o ventilador consumirá (155 − 90) Wh, ou seja, 65 Wh.

c) Aplicando o teorema de Tales, temos a seguinte figura:



$$\frac{915 - 450}{c - 450} = \frac{8 - 5}{7 - 5} \Rightarrow c = 760$$

Logo, após duas horas de os dois aparelhos estarem funcionando juntos, haviam sido consumidos 760 Wh desde o instante em que foi ligada a TV.

d) • Pelo item **a** temos que de 0 a 5 horas a função é linear, com taxa de variação $a = 90$.

• Pelo item **b**, temos que de 5 a 8 horas a função é afim, com taxa de variação $a = 155$.

Como ela passa pelo ponto (5, 450), temos:

$450 = 155 \cdot 5 + b \Rightarrow b = -325$

Desse modo, temos:

$$f(x) = \begin{cases} 90x, \text{ para } 0 < x \leqslant 5 \\ 155x - 325, \text{ para } 5 \leqslant x \leqslant 8 \end{cases}$$

51. Sendo x a quantidade de minutos utilizados e $f(x)$ o custo para a telefonia K, temos:

$$f(x) = \begin{cases} 29{,}9; \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 200 \\ 29{,}9 + 0{,}2 \cdot (x - 200), \text{ se } x > 200 \end{cases}$$

Sendo x a quantidade de minutos utilizados e $g(x)$ o custo para a telefonia Z, temos:

$$g(x) = \begin{cases} 49{,}9; \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 300 \\ 49{,}9 + 0{,}1 \cdot (x - 300), \text{ se } x > 300 \end{cases}$$

Desse modo, concluímos que o gráfico da função que representa a telefonia K é constante até a quantidade de minutos igual a 200 e que o gráfico da função que representa a telefonia Z é constante até a quantidade de minutos igual a 300. A partir dessa informação descartamos os gráficos **b** e **e**.

Temos que a taxa a de variação do custo após 200 minutos para a telefonia K ($a = 0{,}2$) é maior que a taxa a de variação do custo após 300 minutos para a telefonia Z ($a = 0{,}1$), o que significa que após esses minutos o gráfico da telefonia K será terá inclinação mais acentuada.

Alternativa **d**.

52. a) Pelo gráfico, notamos que para um número de calendário x, tal que $0 < x \leqslant 1.000$, temos uma lei de associação entre x e y da forma $y = ax$. Como a função passa pelos pontos (0, 0) e (1.000, 500), temos:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{500 - 0}{1.000 - 0} \Rightarrow a = 0{,}5$$

Logo, $y = 0{,}5x$.

Substituindo $x = 600$ na equação obtida anteriormente, temos:

$y = 0{,}5 \cdot 600 \Rightarrow y = 300$

Portanto, o valor a ser pago pelo comprador por 600 calendários é R$ 300,00.

b) Pelo gráfico notamos que para um número de calendário x, tal que $x > 1.000$, temos lei de associação entre x e y da forma $y = ax$. Como a função passa pelos pontos (0, 0) e (1.000, 400), temos:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{400 - 0}{1.000 - 0} \Rightarrow a = 0{,}4$$

Logo, $y = 0{,}4x$.

Substituindo $x = 1.200$ na equação obtida anteriormente, temos:

$y = 0{,}4 \cdot 1.200 \Rightarrow y = 480$

Portanto, o valor a ser pago pelo comprador por 1.200 calendários é R$ 480,00.

c) Através dos itens **a** e **b**, concluímos que:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5x, \text{ se } 0 < x \leqslant 1.000 \\ 0{,}4x, \text{ se } x > 1.000 \end{cases}$$

53. a) A velocidade v do automóvel é dada por:

$$v = \frac{14 - (-20)}{17} \text{ km/min} = 2 \text{ km/min}$$

Logo, a abscissa s, em quilômetro, do ponto onde se localiza o automóvel em função do tempo t, em minuto, é dada por: $s = -20 + 2t$.

b) A taxa a de variação da função é o coeficiente de t, isto é, $a = 2$.

c) A taxa de variação indica que a cada minuto a distância percorrida aumenta 2 km, portanto essa taxa é a velocidade do automóvel.

54. a) Em um sistema cartesiano, consideremos no eixo das abscissas os números dos dias e no eixo das ordenadas os saldos bancários. Assim, o gráfico da função que expressa o saldo bancário y em função do número x do dia passa pelos pontos (1, 2.000) e (21, 3.000). Como esse gráfico é formado por pontos de uma reta, pois a variação é linear, temos que a lei que associa y e x é expressa por uma função afim, $y = ax + b$, em que as constantes reais a e b satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} 2.000 = a \cdot 1 + b \\ 3.000 = a \cdot 21 + b \end{cases} \Rightarrow a = 50 \text{ e } b = 1.950$$

Temos, portanto, a função $y = 50x + 1.950$.

b) A taxa a de variação da função é o coeficiente de x, isto é, $a = 50$.

c) A taxa de variação indica que a cada dia o saldo da conta aumentou em R$ 50,00.

55. Se dos 6 aos 8 anos a variação da pulsação é linear, a lei de associação entre x e y é da forma $y = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Os pontos (6, 100) e (8, 90) obedecem essa lei. Assim, temos:

$$\begin{cases} 100 = a \cdot 6 + b \\ 90 = a \cdot 8 + b \end{cases} \Rightarrow a = -5 \text{ e } b = 130$$

Logo, $y = -5x + 130$.

Substituindo $x = 7{,}2$ na equação obtida anteriormente, temos:

$y = -5 \cdot 7{,}2 + 130 \Rightarrow y = 94$

Logo, a pulsação aproximada de uma pessoa com 7,2 anos de idade é de 94 batimentos por minuto.

56. A reta que passa pelos pontos (2010; 3,5) e (2030; 5) é gráfico de uma função do tipo $y = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Assim:

- para $x = 2010$ e $y = 3{,}5$, temos: $3{,}5 = 2010a + b$
- para $x = 2030$ e $y = 5$, temos: $5 = 2030a + b$

Temos então o sistema: $\begin{cases} 2010a + b = 3{,}5 \\ 2030a + b = 5 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, temos: $a = 0{,}075$ e $b = -147{,}25$

Portanto: $y = 0{,}075x - 147{,}25$

Finalmente, atribuindo o valor 2020 à variável x, temos uma estimativa para a população urbana em 2020:

$y = 0{,}075 \cdot 2020 - 147{,}25 \Rightarrow y = 4{,}25$

Logo, a população urbana em 2020 será 4,25 bilhões de pessoas, aproximadamente.

Alternativa **d**.

57. a) A lei de associação entre x e y é da forma $y = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Pelo gráfico temos que os pontos (2000, 274,634) e (2050, 393,931) obedecem essa lei. Assim, temos:

$$\begin{cases} 274{,}634 = a \cdot 2000 + b \\ 393{,}931 = a \cdot 2050 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = 2{,}38594 \text{ e} \\ b = -4.497{,}246 \end{matrix}$$

Logo, $y = 2{,}38594x - 4.497{,}246$.

Substituindo $x = 2040$ na equação obtida anteriormente, obtemos:

$y = 2{,}38594 \cdot 2040 - 4.497{,}246 \Rightarrow y \approx 370{,}071$

Portanto, a população em 2040 será de aproximadamente 370,071 milhões de habitantes.

b) Fazendo $x = 2020$ e $x = 2030$ na equação do item **a**, obtemos:

$y = 2{,}38594 \cdot 2020 - 4.497{,}246 = 322{,}3528$ e

$y = 2{,}38594 \cdot 2030 - 4.497{,}246 = 346{,}2122$

Logo, a taxa percentual p de crescimento da população de 2020 a 2030 é dada por:

$$p = \frac{(346{,}2122 - 322{,}3528)}{322{,}3528} \approx 7{,}4\%$$

58. Como o incremento mensal é constante (4.300), a equação que expressa y em função de x é da forma $y = 4.300x + b$.

Para $x = 2$ (fevereiro), temos:

$80.605 = 4.300 \cdot 2 + b \Rightarrow b = 872.005$

Portanto, a equação pedida é:

$y = 4.300x + 872.005$

Alternativa **c**.

59. Diminuiu, pois o coeficiente de x é negativo, indicando uma taxa decrescente de variação.

60. **a)** Os pontos (1, 2.000) e (13, -340) pertencem ao gráfico da função $y = ax + b$; logo:

$$\begin{cases} 2.000 = a \cdot 1 + b \\ -340 = a \cdot 13 + b \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $a = -195$ e $b = 2.195$.

Assim, a lei de associação é $y = -195x + 2.195$.

b) Substituindo $x = 31$ na equação que obtivemos no item **a**, temos:

$y = -195 \cdot 31 + 2.195 = -3.850$

Portanto, o saldo no dia 31 de janeiro era de -3.850 reais.

c) Para o saldo ser positivo, devemos ter $y > 0$. Então temos: $-195x + 2.195 > 0 \Rightarrow x < 11,25$

Logo, o saldo esteve positivo durante 11 dias.

d) Para o saldo ser negativo, devemos ter $y < 0$. Então temos: $-195 \cdot x + 2.195 < 0 \Rightarrow x > 11,25$

Como o saldo ficou negativo a partir do 12º dia, concluímos que a conta ficou com saldo negativo por 20 dias de janeiro.

61. **a)** Seja $y = ax + b$ a equação da reta suporte do segmento representado.

Os pontos (0, 200) e (12, -100) pertencem ao gráfico; logo, temos:

$$\begin{cases} 200 = a \cdot 0 + b \\ -100 = a \cdot 12 + b \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $a = -25$ e $b = 200$.

Então, $y = -25x + 200$.

b) Substituindo $y = 0$ na equação obtida no item **a**, temos:

$0 = -25x + 200 \Rightarrow x = 8$

Portanto, a broca atingirá o nível do mar em 8 horas.

c) Para a broca atingir o objetivo, devemos ter: $y = -300$; assim:

$-300 = -25x + 200 \Rightarrow x = 20$

Portanto, serão necessárias 20 horas para a broca atingir o objetivo.

d) Para a broca estar em pontos de altitude positiva, devemos ter $y > 0$; logo:

$-25x + 200 > 0 \Rightarrow x < 8$

Portanto, a broca estará em pontos de altitude positiva por 8 horas.

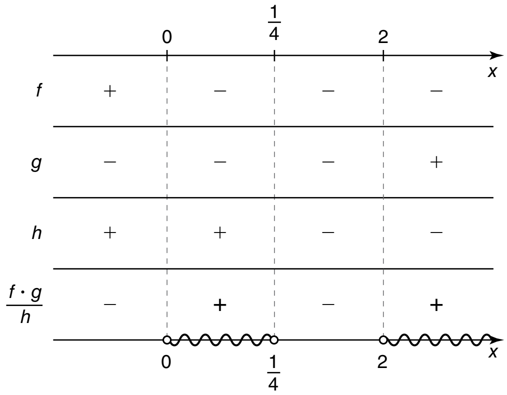
e) Como a broca atinge o objetivo após 20 horas, e sabendo pelo item **d** que a broca estará em pontos de altitude positiva por 8 horas, ela estará em pontos de altitude negativa ($y < 0$) por $(20 - 8)$ horas, ou seja, 12 horas.

62. $\dfrac{-p^2 - 2p + 1}{-4p + 1} > 1 \Rightarrow \dfrac{-p^2 + 2p}{-4p + 1} > 0$

$\therefore \dfrac{-p(p - 2)}{-4p + 1} > 0$

Condição de existência: $-4p + 1 \neq 0 \Rightarrow p \neq \dfrac{1}{4}$

Estudando o sinal das funções $f(p) = -p$, $g(p) = p - 2$ e $h(p) = -4p + 1$, temos:



Concluímos, então, que a demanda é elástica para qualquer preço p, com $0 < p < \dfrac{1}{4}$ ou $p > 2$

Alternativa **d**.

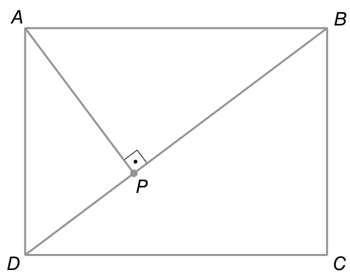
Pré-requisitos para o capítulo 5

1. **a)** A diagonal $\overline{BD}$ do retângulo é a hipotenusa do triângulo ABD, desse modo, podemos usar o teorema de Pitágoras:

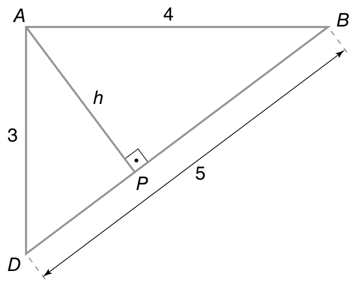
$BD^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow BD = 5$

Logo, a distância entre os vértices B e D é de 5 cm.

b) A distância entre o vértice A e a reta que contém a diagonal $\overline{BD}$ é o comprimento do segmento $\overline{AP}$, em que P é a projeção ortogonal de A sobre a reta que contém a diagonal $\overline{BD}$. Desse modo, temos a seguinte figura:



O segmento $\overline{AP}$ é a altura, relativa à hipotenusa, do triângulo ABD. Indicando por h a medida desse segmento, esquematizamos:



Por uma das relações métricas no triângulo retângulo, concluímos:

$5h = 3 \cdot 4 \Rightarrow h = 2{,}4$

2. a) $\overline{MB}$, pois temos:

b) médio

c) médio

d) mediatriz

e) simétricos

3. $x^2 - 5a^2x + 6a^4 = 0$

$\Delta = (-5a^2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6a^4 = 25a^4 - 24a^4$

$\therefore \Delta = a^4$

$$x = \frac{-(-5a^2) \pm \sqrt{a^4}}{2 \cdot 1} = \frac{5a^2 \pm a^2}{2} \Rightarrow x = 3a^2 \text{ ou } x = 2a^2$$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 3a^2 \text{ ou } x = 2a^2, \text{ com } a \in \mathbb{R}\}$

4. a) Para $y = 0$, temos:

$$\frac{2x - 1}{x^2 + 2} = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0$$

$\therefore x = \frac{1}{2}$

Logo, o ponto de intersecção do gráfico com o eixo das abscissas é $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

b) Para $x = 0$, temos:

$$y = \frac{2 \cdot 0 - 1}{0^2 + 2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

Logo, o ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas é $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

5. Definição de côncavo:

1. Que tem a superfície mais funda no centro do que na borda: vidro côncavo.
2. Que tem reentrância ou escavação irregular na superfície; ENFUNADO [Antôn.: saliente.]

Exemplos de objetos côncavos:

Colher (parte que se coloca a comida), casca de ovo (interior) e guarda-chuva (interior).

Definição de convexo:

1. Que forma uma saliência arredondada para fora (como a parte externa de um círculo ou de uma esfera).

Exemplos de objetos convexos:

Bola de gude, olhos e chapéu (superfície exterior).

Dicionário Caldas Aulete. Disponível em: <http://www.aulete.com.br/>. Acesso em: 13 nov. 2014.

Trabalhando em equipe

Matemática sem fronteiras

1. Temos que $R = 100$, então:

$V(R) = 16 \cdot R$

$V(100) = 1.600$

Logo, a velocidade de afastamento da galáxia em relação à Terra é 1.600 km/s.

2. Como a velocidade de afastamento é de 144.000 km/h = 40 km/s, temos:

$40 = 16R \Rightarrow R = 2{,}5$

Ou seja, a galáxia encontra-se a 2,5 milhões de anos-luz da Terra.

3. Da semelhança entre os triângulos CAB e $CA'B'$, temos:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{A'C}{A'C - h} \Rightarrow d_2 \cdot (A'C - h) = d_1 \cdot A'C$$

$\therefore d_2 \cdot A'C - d_2 \cdot h = d_1 \cdot A'C \Rightarrow$

$\Rightarrow d_2 \cdot A'C - d_1 \cdot A'C = d_2 \cdot h$

$$\therefore A'C \cdot (d_2 - d_1) = d_2 \cdot h \Rightarrow A'C = \frac{d_2 \cdot h}{d_2 - d_1}$$

Logo, $A'C$ em função de d_1, d_2 e h é expresso por $\frac{d_2 \cdot h}{(d_2 - d_1)}$.

Análise da resolução

COMENTÁRIO: O aluno considerou o gráfico contínuo, o que está errado, pois a variável x só pode assumir valores naturais.

Resolução correta:

a) Temos pelo enunciado que R\$ 900,00 é o custo fixo e o custo por frasco é de R\$ 0,15. Sejam x o número de frascos e C o custo total, então $C(x) = 900 + 0{,}15x$, com $x \in \mathbb{N}$.

b) O gráfico é formado apenas pelos pontos (x, y) da reta de equação $y = 900 + 0{,}15x$, com $x \in \mathbb{N}$.