logo

$$|z_1+z_2|^2 = z_1z_1^* + [z_1z_2^* + (z_1z_2^*)^*] + z_2z_2^* = |z_1|^2 + [z_1z_2^* + (z_1z_2^*)^*] + |z_2|^2$$

porém

$$z_1z_2^* + \left(z_1z_2^*\right)^* = 2\operatorname{Re}\left(z_1z_2^*\right) \le 2\left|z_1z_2^*\right| = 2|z_1||z_2|$$

de modo que

$$|z_1+z_2|^2 \le |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$$

ou

$$|z_1+z_2|^2 \le \left(|z_1|+|z_2|\right)^2$$

Uma conseqüência imediata da desigualdade do triângulo é que

$$\boxed{|z_1+z_2| \ge \big||z_1|-|z_2|\big|} \qquad \textbf{(89)}$$

que pode ser demonstrada a partir de

$$|z_1| = \left|(z_1+z_2)+(-z_2)\right| \le |z_1+z_2| + |-z_2| \ ,$$

o que nos leva a

$$\boxed{|z_1+z_2| \ge |z_1|-|z_2|} \qquad \textbf{(90)}$$

que é a desigualdade **(89)** quando $|z_1| \ge |z_2|$. Se tivermos $|z_1| < |z_2|$, basta trocar z_1 e z_2 na desigualdade **(90)** para obter

$$|z_1+z_2| \ge -\left(|z_1|-|z_2|\right)$$

que é o resultado desejado.

A desigualdade **(89)** traduz o fato de que o comprimento de um todo de um triângulo não pode ser menor que a diferença dos comprimentos dos outros dois lados.

Podemos também obter formas alternativas úteis para as desigualdades **(88)** e **(89)** trocando z_2 por $-z_2$:

$$\boxed{|z_1-z_2| \le |z_1|+|z_2|} \qquad \textbf{(91)}$$

$$\boxed{|z_1-z_2| \ge \big||z_1|-|z_2|\big|} \qquad \textbf{(92)}$$

Exemplo 1.28

Verificar a desigualdade do triângulo para $z_1 = 2 - \boldsymbol{j}3$ e $z_2 = -4 + \boldsymbol{j}$.

Solução:

Temos que:

$$z_1 + z_2 = (2-4) + \boldsymbol{j}[(-3)+1] = -2 - \boldsymbol{j}2 \rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} \cong$$
$$\cong 2{,}82$$

$$z_1 = 2 - \boldsymbol{j}3 \rightarrow |z_1| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \cong 3{,}61$$

$$z_2 = -4 + \boldsymbol{j} \rightarrow |z_2| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17} \cong 4{,}12$$

$$|z_1 + z_2| = 2{,}82 < |z_1| + |z_2| = 7{,}73$$

e está verificada a desigualdade.

1.14.6 Curvas e Regiões no Plano Complexo

Vamos considerar agora alguns tipos importantes de curvas e regiões no plano complexo e suas representações por meio de equações e desigualdades.

a) Circunferência

Conforme já visto em 1.14.4.b, a distância entre os pontos do plano definidos pelos complexos z_1 e z_2 é $|z_1 - z_2|$. Segue-se então que uma circunferência *C* de raio ρ com centro em um ponto a (fig. 1.31) pode ser representada sob a forma

$$\boxed{|z-a| = \rho} \qquad \textbf{(93)}$$

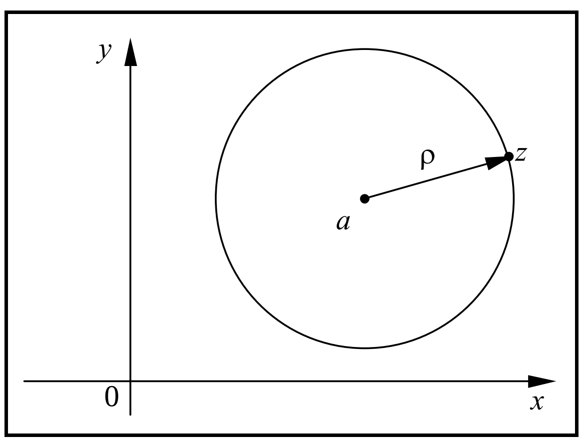


Fig. 1.31

Onde *z* é um ponto qualquer da circunferência.

Exemplo 1.29

Identificar o lugar geométrico representado por (a) $|z - \boldsymbol{j}| = 3$; (b) $|z + 2 - \boldsymbol{j}3| = 4$.

a) $\begin{cases} a = 0 + \boldsymbol{j} \rightarrow a(0,1) \\ \rho = 3 \end{cases}$

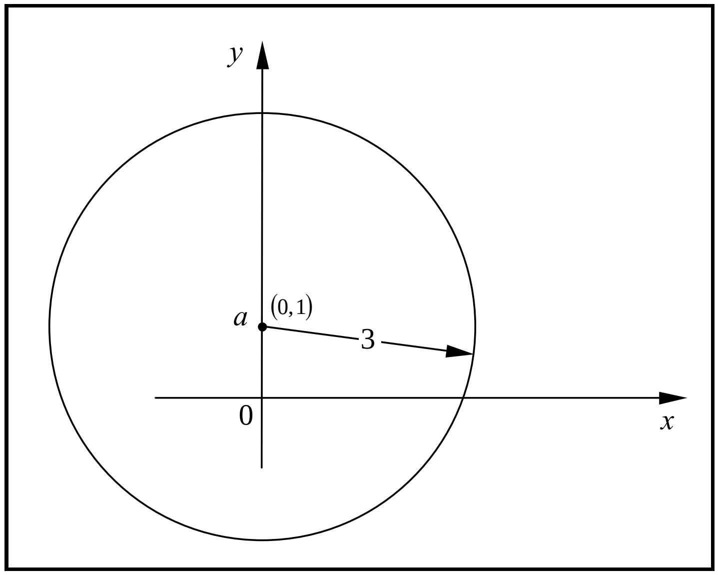


Fig. 1.32

Trata-se pois de uma circunferência centrada em $a(0,1)$ e raio 3.

b) $\begin{cases} a = -2 + \boldsymbol{j}3 \rightarrow a(-2,3) \\ \rho = 4 \end{cases}$

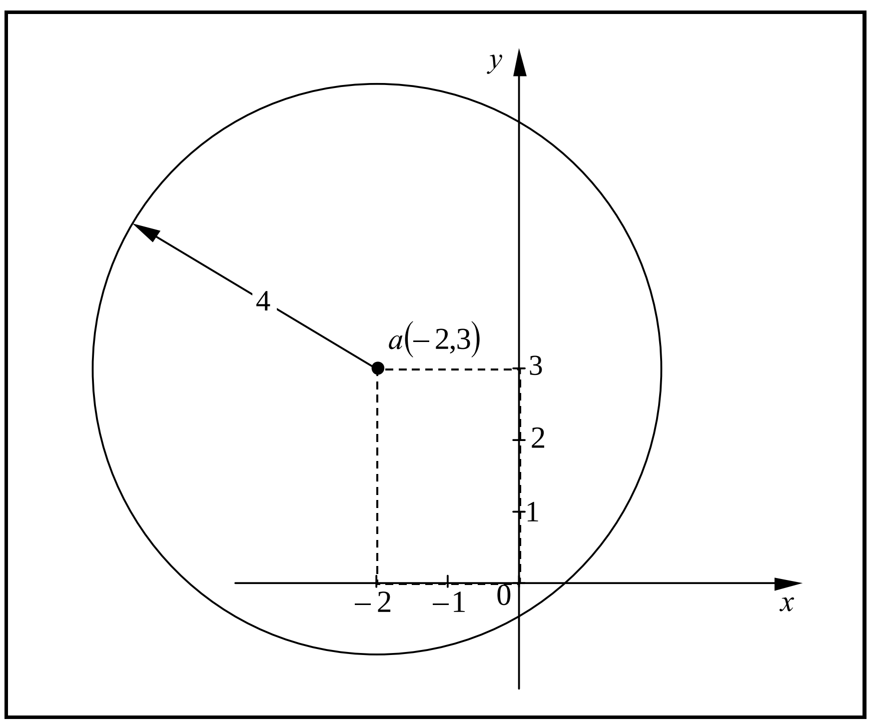


Fig. 1.33

Temos então uma circunferência centrada em $a(-2,3)$ e raio 4.

b) Disco Fechado

Em conseqüência do que foi visto em (a), para um disco fechado de raio ρ e centro em *a* temos:

$\boxed{|z-a| \le \rho}$ **(94)**

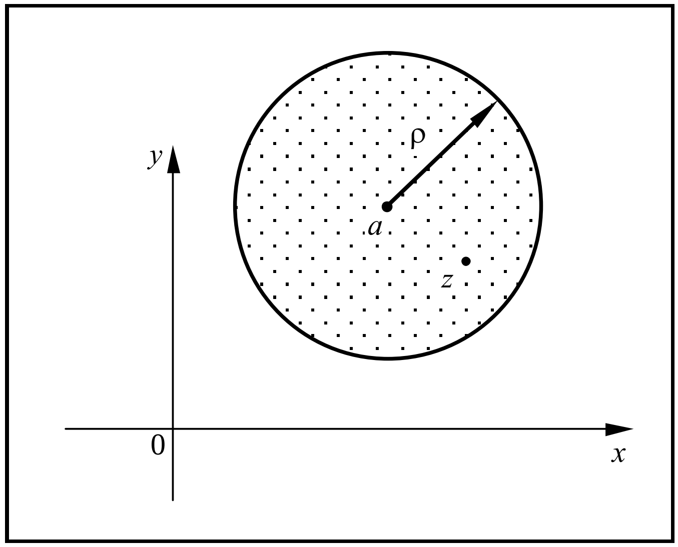


Fig. 1.34

Exemplo 1.30

Identificar o lugar geométrico representado por $|z+3+\boldsymbol{j}| \le 2$.

$$\begin{cases} a = -3 - \boldsymbol{j} \rightarrow a(-3,-1) \\ \rho = 2 \end{cases}$$

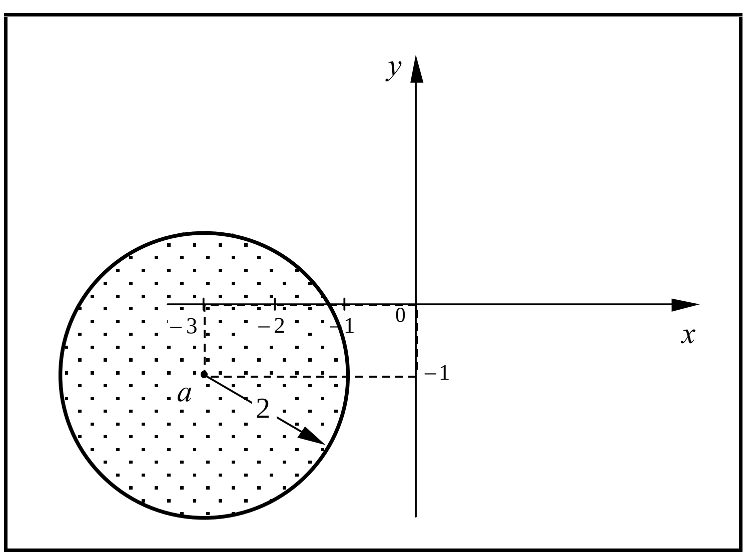


Fig. 1.35

c) Disco Aberto

Para o disco aberto temos:

$$\boxed{|z - a| < \rho} \qquad \textbf{(95)}$$

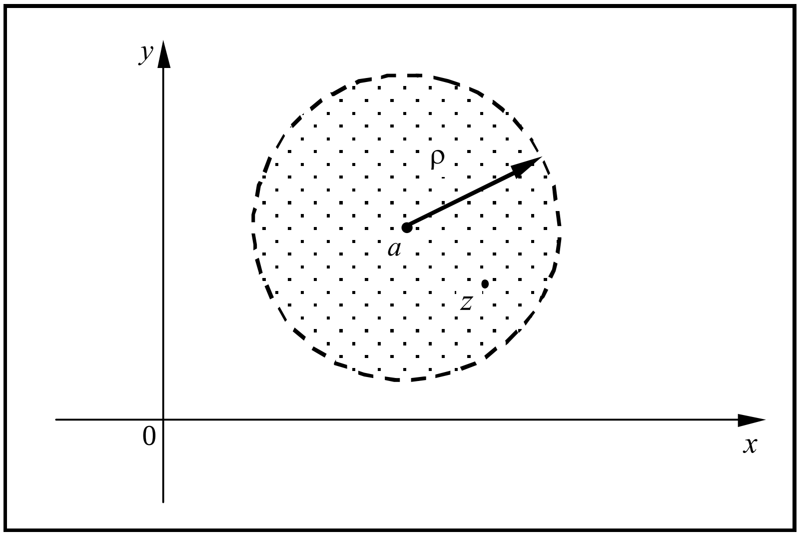


Fig. 1.36

d) Exterior da Circunferência

Semelhantemente a desigualdade

$$\boxed{z - a > \rho} \qquad \textbf{(96)}$$

Representa o exterior da circunferência de raio ρ centrada em *a*.

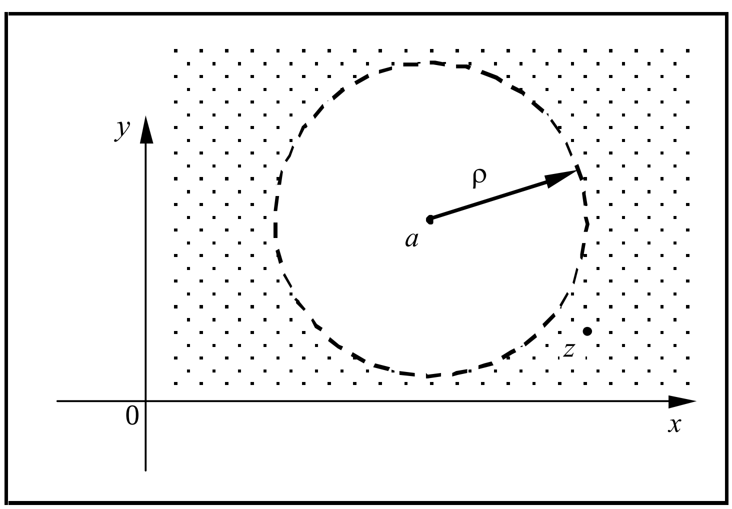


Fig. 1.37

e) Coroa Fechada

A região entre duas circunferências concêntricas de raios ρ_1 e ρ_2, sendo $\rho_2 > \rho_1$, pode ser representada por:

$$\boxed{\rho_1 \leq |z-a| \leq \rho_2} \qquad \textbf{(97)}$$

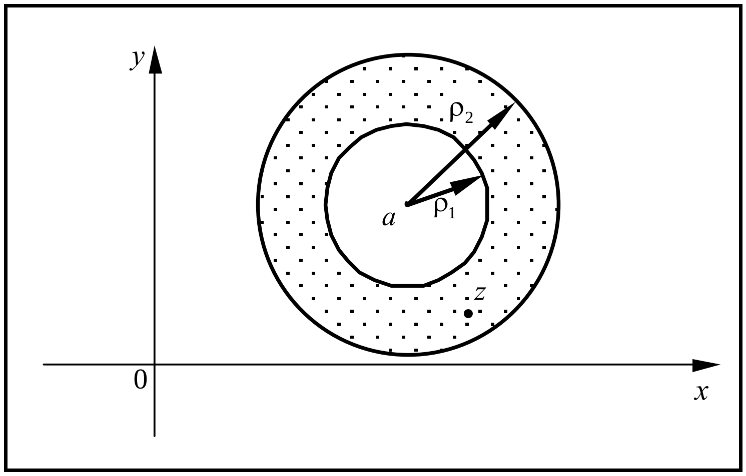


Fig. 1.38

f) Coroa Aberta

Temos então:

$$\boxed{\rho_1 < |z-a| < \rho_2} \qquad \textbf{(98)}$$

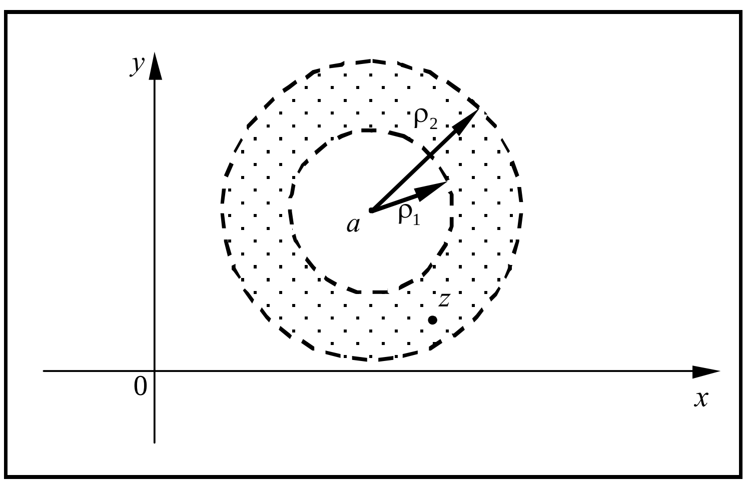


Fig. 1.39

g) Circunferência Unitária

A equação

$$\boxed{|z| = 1} \qquad \textbf{(99)}$$

representa a chamada circunferência unitária, ou seja, a circunferência de raio 1 e centro na origem, que representa papel importante na seqüência do estudo de variáveis complexas.

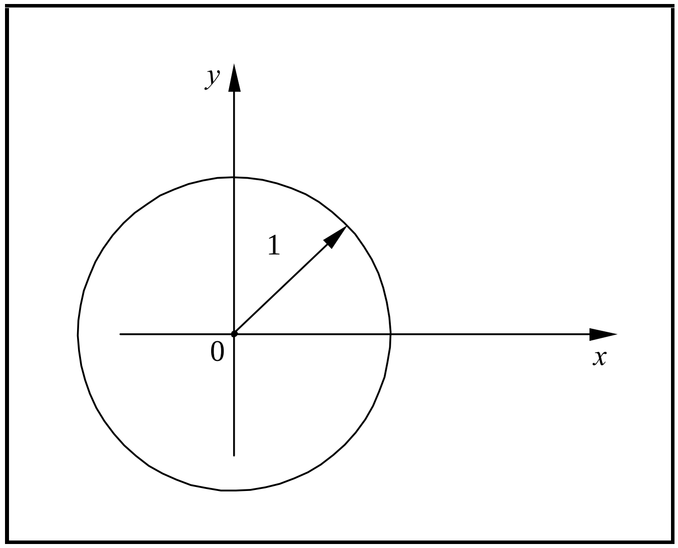


Fig. 1.40

h) Reta que une dois pontos

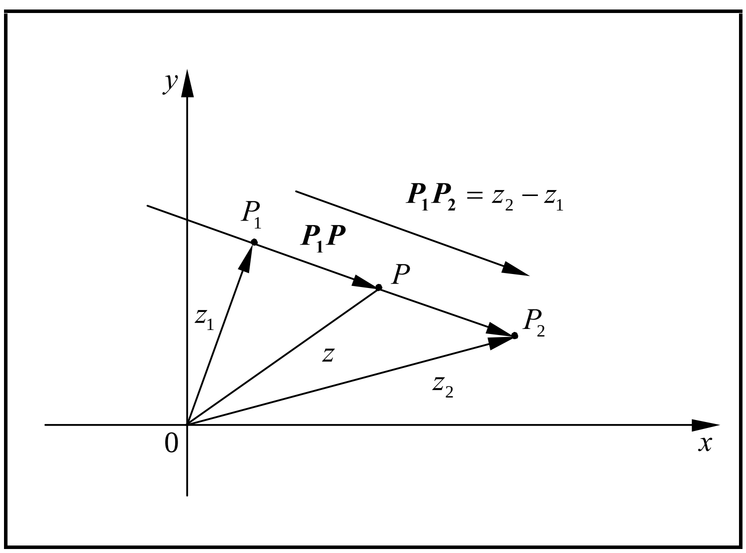


Fig. 1.41

Sejam $z_1 = x_1 + \boldsymbol{j}y_1$ e $z_2 = x_2 + \boldsymbol{j}y_2$ os complexos representando dois pontos quaisquer P_1 e P_2 do plano, conforme aparece na figura 1.41, e z o complexo representando um ponto P qualquer da reta que passa pelos dois pontos inicialmente mencionados.

Da figura em questão percebe-se que:

$$z = z_1 + \boldsymbol{AP}$$

Sendo $\boldsymbol{AP}$ e $\boldsymbol{AB}$ segmentos orientados paralelos temos:

$$\boldsymbol{AP} = k\boldsymbol{AB}$$

o que nos permite escrever:

$$z = z_1 + k\boldsymbol{AB}$$

No entanto,

$$\boldsymbol{AB} = z_2 - z_1$$

o que nos conduz a:

$$\boxed{z = z_1 + k(z_2 - z_1)} \quad \textbf{(100a)}$$

$$\boxed{z = (1-k)z_1 + kz_2} \quad \textbf{(100a)}$$

Se queremos representar qualquer ponto da reta devemos ter $-\infty < k < \infty$ mas, se queremos representar apenas os pontos do segmento que une os pontos P_1 e P_2 devemos ter $0 \le k \le 1$.

1.15. Exercícios Propostos sobre Números Complexos

1. Determine $x \in \mathrm{R}$ para que o número complexo $(3x+2) - \boldsymbol{j}(x-1)$ seja real.

2. Determine os valores reais de <u>a</u> para os quais $(a + \boldsymbol{j})^4$ é um número real.

3. Efetuar as seguintes potências:

   a) $\boldsymbol{j}^{12}$

   b) $(-\boldsymbol{j})^{76}$

   c) $\boldsymbol{j}^{77}$

   d) $\boldsymbol{j}^{2n}\left(n \in N^*\right)$

   e) $\boldsymbol{j}^{4n+3}\left(n \in N^*\right)$

   f) $\boldsymbol{j}^{2n+1}\left(n \in N^*\right)$

4. Calcular $\boldsymbol{j}^0 . \boldsymbol{j}^1 . \boldsymbol{j}^2 . \boldsymbol{j}^3 \ldots \boldsymbol{j}^{30}$.

5. Calcule o módulo e o argumento dos seguintes números complexos:

   a) $z_1 = 1 + \boldsymbol{j}$

   b) $z_2 = \boldsymbol{j}2$

c) $z_3 = 3$

d) $z_4 = 1 + \boldsymbol{j}\sqrt{3}$

e) $z_5 = -\boldsymbol{j}3$

f) $z_6 = \sqrt{3} - \boldsymbol{j}$

6. Exprimir cada um dos seguintes números complexos na forma polar:

a) $15e^{\boldsymbol{j}\pi/4}$

b) $5e^{-\boldsymbol{j}2\pi/3}$

c) $10e^{-\boldsymbol{j}5\pi/6}$

7. Passar os seguintes números complexos da forma polar para a forma retangular:

a) $12{,}3\,\underline{/30^\circ}$

b) $25\,\underline{/-45^\circ}$

c) $86\,\underline{/-115^\circ}$

8. Escrever na forma trigonométrica os seguintes números complexos e representá-los no plano de Argand-Gauss:

a) $1 + \boldsymbol{j}$

b) -5

c) $-2 + \boldsymbol{j}2$

9. Determinar x e $y \in \mathbb{R}$ de modo que $(2x + \boldsymbol{j}4y) - (x - \boldsymbol{j}y) = 7 + \boldsymbol{j}10$.

10. Determine x e $y \in \mathbb{R}$ tais que $\boldsymbol{j}^{250} + \boldsymbol{j}^{104} + 2\boldsymbol{j}^{37} = x + \boldsymbol{j}y$.

11. Calcule o valor de n sabendo-se que $(2\boldsymbol{j})^n + (1 + \boldsymbol{j})^{2n} = -16\boldsymbol{j}$.

12. Calcular

a) $(1 - \boldsymbol{j}3)^2 + (-1 - \boldsymbol{j}).(2 + \boldsymbol{j}4)$

b) $(2 - \boldsymbol{j}3) + (5 + \boldsymbol{j}3)$

c) $\left(\dfrac{1}{2} + \boldsymbol{j}\right) + \left(\dfrac{2}{3} - \boldsymbol{j}3\right) + \boldsymbol{j}^3 - \boldsymbol{j}^2$

d) $(1 - \boldsymbol{j})^3$

e) $\left(-4\sqrt{3}+\boldsymbol{j}4\right)\left(\sqrt{3}+\boldsymbol{j}\right)$

f) $\left(\sqrt{2}-\boldsymbol{j}\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\boldsymbol{j}\sqrt{3}\right)$

g) $\boldsymbol{j}\left(3+\boldsymbol{j}5\right)$

h) $\left(7-\boldsymbol{j}8\right)\left(1+\boldsymbol{j}\right)$

13. Se $z_1 = 5e^{j\pi/2}$ e $z_2 = 2e^{-j\pi/4}$ calcular $z_1.z_2$.

14. Calcular os seguintes produtos:

a) $\left(3\,\underline{/20^\circ}\right)\left(2\,\underline{/-45^\circ}\right)$

b) $\left(23{,}5+\boldsymbol{j}8{,}55\right)\left(4{,}53-\boldsymbol{j}2{,}11\right)$

15. Sendo $z = 2{,}5e^{-j\pi/3}$ calcular $z.z^*$.

16. Sendo $z = 10\,\underline{/-40^\circ}$ calcular $z.z^*$.

17. Expressar na forma polar os seguintes complexos:

a) $-4e^{j5\pi/6}$

b) $-18e^{-j3\pi/2}$

18. Calcular:

a) $\dfrac{1+\boldsymbol{j}}{\boldsymbol{j}}+\dfrac{\boldsymbol{j}}{1+\boldsymbol{j}}$

b) $\dfrac{2}{1+\boldsymbol{j}}$

c) $\dfrac{1+\boldsymbol{j}}{1-\boldsymbol{j}}$

d) $\dfrac{4+\boldsymbol{j}\sqrt{2}}{2-\boldsymbol{j}\sqrt{2}}$

e) $\dfrac{-8\boldsymbol{j}}{3+\boldsymbol{j}5}$

f) $\dfrac{1+\boldsymbol{j}}{\boldsymbol{j}}-\dfrac{\boldsymbol{j}}{1-\boldsymbol{j}}$

g) $\dfrac{(3+\boldsymbol{j}2)(6-\boldsymbol{j}4)}{(-1+\boldsymbol{j}3)\boldsymbol{j}2}$

h) $\dfrac{3+\boldsymbol{j}}{2+\boldsymbol{j}}+\dfrac{3-\boldsymbol{j}2}{3-\boldsymbol{j}}$

19. Determinar o número real x tal que o produto $z_1.z_2$, onde $z_1 = 4+\boldsymbol{j}3$ e $z_2 = x-\boldsymbol{j}6$, seja também um número real.

20. Determine o número complexo z tal que $z^2 = 2z\boldsymbol{j}$.

21. Determine $a \in \mathbb{R}$ para que $\dfrac{-9+\boldsymbol{j}a}{2+\boldsymbol{j}3}$ seja imaginário puro.

22. Determinar o resultado da expressão $z = \dfrac{z_1.z_2}{z_1+z_2}$ sendo $z_1 = 10+\boldsymbol{j}3{,}95$ e $z_2 = 5+\boldsymbol{j}15{,}7$.

23. Sendo z_1 e z_2 dois números complexos, resolver o sistema $\begin{cases} z_1+z_2 = 4+\boldsymbol{j} \\ 2z_1 - z_2 = 5-\boldsymbol{j} \end{cases}$.

24. Calcule o argumento do complexo $(1-\boldsymbol{j})\div(1+\boldsymbol{j})$.

25. Sendo $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+\boldsymbol{j}\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+\boldsymbol{j}\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ calcular $z_1.z_2$ apresentando o resultado na forma trigonométrica.

26. Dados $z_1 = \dfrac{1}{2}+\boldsymbol{j}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $z_2 = 1+\boldsymbol{j}$ determine:

a) $z_1.z_2$

b) $z_1.z_2^*$

c) $z_1^*.z_2$

d) $(z_1.z_2)^*$

e) z_1^2

f) z_2^2

g) $z_1.z_1^* + z_2^*$

27. Dados $z_1 = 1+\boldsymbol{j}2$, $z_2 = -2-\boldsymbol{j}$ e $z_3 = 3-\boldsymbol{j}4$, calcular:

a) $|z_1+z_2|$

b) $|z_1| + |z_2|$

c) $\left|\dfrac{z_1^* - z_2^*}{z_3^*}\right|$

d) $|(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)|$

e) $|z_1.z_2^* + z_2.z_1^*|$

28. Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são α e β. Calcule o valor do produto $(\cos\alpha + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}\,\alpha)(\cos\beta + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}\,\beta)$.

29. Calcular $(1 - \boldsymbol{j})^8$.

30. Dado o número complexo $z = 1 + \boldsymbol{j}$ calcular z^{20}.

31. Calcular $\left(\dfrac{1}{2} - \boldsymbol{j}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^7$.

32. Calcular $\dfrac{1}{(1 - \boldsymbol{j})^{20}}$.

33. Achar o conjugado do complexo z^2 onde $z = a(\cos\alpha + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}\,\alpha)$, com $a = 2$ e $\alpha = \dfrac{\pi}{8}\,\mathrm{rad}$.

34. Calcular o menor valor **natural** n para o qual $\left(-\sqrt{3} + \boldsymbol{j}\right)^n$ é um imaginário puro.

35. Calcule o valor da expressão $\dfrac{(1 + \boldsymbol{j})^{101}.(1 - \boldsymbol{j})^{50}}{(-1 - \boldsymbol{j})^{100}.(-1 + \boldsymbol{j})^{49}}$.

36. Calcule o resultado de $\left(\dfrac{1 + \boldsymbol{j}}{1 - \boldsymbol{j}}\right)^{15}$.

37. Dados os complexos $u = \dfrac{5 - \boldsymbol{j}12}{5 + \boldsymbol{j}12}$ e $v = 1 - \boldsymbol{j}$ calcule o valor de $|u| + v^8$.

38. Calcular as seguintes raízes e representá-las no plano complexo:

a) $\sqrt{8 + \boldsymbol{j}6}$

b) $\sqrt[3]{\boldsymbol{j}}$

c) $\sqrt[4]{1}$

d) $\sqrt{-25}$

e) $\sqrt[4]{-1}$

f) $\sqrt[7]{-128}$

g) $\sqrt[6]{-1}$

h) $\sqrt{1-\boldsymbol{j}\sqrt{3}}$

i) $\sqrt[3]{1+\boldsymbol{j}}$

39. Determinar o conjunto-solução em $\mathbb{C}$ para cada uma das seguintes equações:

a) $w^2+1=0$

b) $w^3+1=0$

c) $w^4+1=0$

d) $w^2+\boldsymbol{j}=0$

e) $w^2+w+1=0$

f) $w^2-4w+53=0$

g) $w^2+(\boldsymbol{j}-2)w+(3-\boldsymbol{j})=0$

h) $w^4-3w^2+2=0$

i) $w^4+3w^2-4=0$

j) $w^4-16=0$

40. Demonstre, por indução matemática, a desigualdade seguinte, e interprete o resultado graficamente.

$$|z_1+z_2+\ldots+z_n|\le|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n| \qquad (n=2,3,\ldots)$$

41. Estabelecer as equações cartesianas, identificar e traçar os gráficos dos lugares geométricos representados por:

a) $|z+3|=3$

b) $|z-\boldsymbol{j}4|\le 2$

c) $2\le|z-2|\le 4$

d) $z+z^*=2$

e) $z+z^2=|z|^2$

f) $z - z^* = \boldsymbol{j}$

g) $\text{Im}(z) \geq 2$

h) $\text{Im}(z^2) \leq 2$

i) $\text{Re}(z^2) \leq 1$

j) $|\arg z| < 45º$

k) $-5 < \text{Re}(z) < 1$

l) $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$

m) $|z - 2| = |z - \boldsymbol{j}2|$

n) $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 2$

o) $\left|\frac{z+\boldsymbol{j}2}{z-\boldsymbol{j}2}\right| = 3$

p) $\left|\frac{z+\boldsymbol{j}}{z-\boldsymbol{j}}\right| = 1$

q) $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 1$

r) $\left|\frac{z+\boldsymbol{j}6}{z-2}\right| \geq 1$

s) $\text{Re}(z-3) \geq 0$

t) $\text{Im}(\boldsymbol{j}z - \boldsymbol{j}) < 0$

u) $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 1$

v) $|z-1| + |z+1| = 3$

w) $0 < \text{Im}\left(\frac{1}{z}\right) < 1$

x) $|z - \boldsymbol{j}4| + |z + \boldsymbol{j}4| = 10$

y) $z^2 + (z^*)^2 = 2$

z) $z = \alpha z_1 + \beta z_2$, sendo z_1 e z_2 números complexos quaisquer, α e β reais e não negativos e $\alpha + \beta = 1$.

1.16. Resposta dos Exercícios Propostos sobre Números Complexos:

1. $x = 1$

2. 0; 1 e -1

3. a) 1; b) 1; c) $\boldsymbol{j}$; d) 1 para n par e -1 para n ímpar; e) $-\boldsymbol{j}$; f) $\boldsymbol{j}$ par n par e $-\boldsymbol{j}$ para n ímpar.

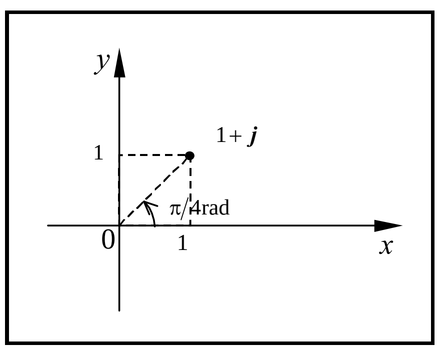
4. $\boldsymbol{j}$

5. a) 1,414 e 45º; b) 2 e 90º; c) 3 e 0; d) 2 e 60º; e) 3 e – 90º; f) 2 e – 30º.

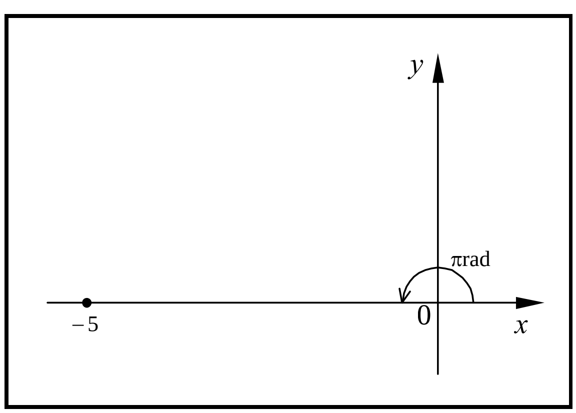
6. a) $15\underline{/45^\circ}$; b) $5\underline{/-120^\circ}$; c) $10\underline{/-150^\circ}$

7. a) $10{,}65 + \boldsymbol{j}6{,}15$; b) $17{,}7 - \boldsymbol{j}17{,}7$; c) $-36{,}3 - \boldsymbol{j}77{,}9$

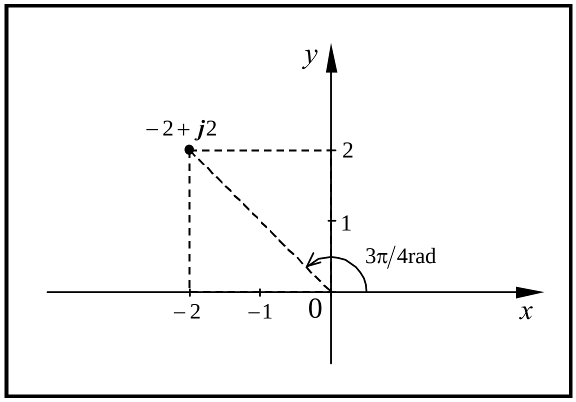
8. a) $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)$



b) $z = 5(\cos\pi + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}\,\pi)$



c) $z = -2 + \boldsymbol{j}2$



9. $x = 7$, $y = 2$

10. $x = 0$, $y = 2$

11. $n = 3$

12. a) $-6 - \boldsymbol{j}12$; b) 7; c) $2{,}167 - \boldsymbol{j}3$; d) $-2 - \boldsymbol{j}2$; e) – 16; f) 5; g) $-5 + \boldsymbol{j}3$; h) $15 - \boldsymbol{j}$

13. $10e^{\boldsymbol{j}\pi/4}$

14. a) $6\angle{-25^\circ}$; b) $124{,}5 - \boldsymbol{j}10{,}86 = 125\angle{-5^\circ}$

15. 6,25

16. 100

17. a) $4\angle{-30^\circ}$; b) $18\angle{-90^\circ}$

18. a) $1{,}5 - \boldsymbol{j}0{,}5$; b) $1 - \boldsymbol{j}$; c) $\boldsymbol{j}$; d) $1 + \boldsymbol{j}1{,}414$;

e) $-1{,}176 - \boldsymbol{j}0{,}117$; f) $1{,}5 - \boldsymbol{j}1{,}5$; g) $-3{,}9 + \boldsymbol{j}1{,}3$; h) $2{,}5 - \boldsymbol{j}0{,}5$.

19. $x = 8$

20. 0 e $\boldsymbol{j}2$

21. $a = 6$

22. $7{,}17\angle{41{,}3^\circ} = 5{,}39 + \boldsymbol{j}4{,}73$

23. $z_1 = 3$ e $z_2 = 1 + \boldsymbol{j}$

24. $-\pi/2$ rad

25. $6\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + \boldsymbol{j}\,\text{sen}\,\dfrac{3\pi}{4}\right)$