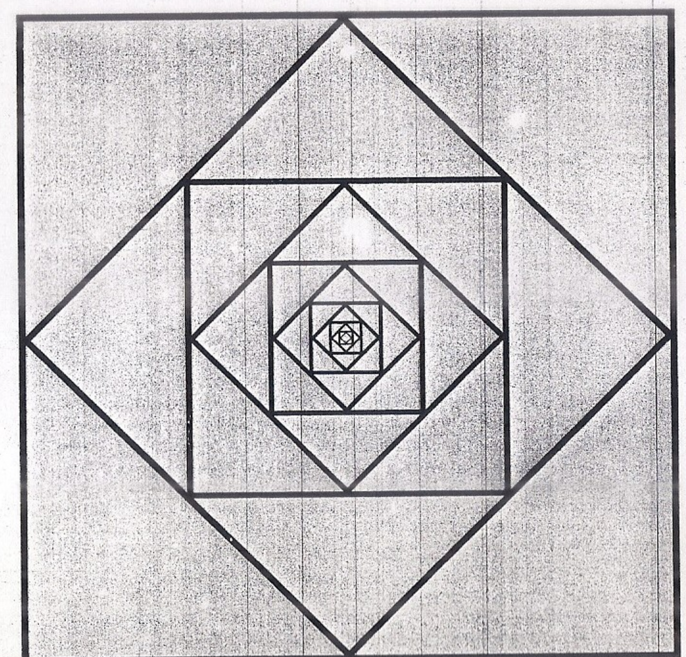
NOÇÕES DE MATEMÁTICA



VOLUME 2
Progressões e Logaritmos

Aref Antar Neto
José Luiz Pereira Sampaio
Nilton Lapa
Sidney Luiz Cavallantte

Aref Antar Neto
José Luiz Pereira Sampaio
Nilton Lapa
Sidney Luiz Cavallantte

PROGRESSÕES E LOGARITMOS

Noções de Matemática

VOLUME 2

Capa:
Annysteyne Maia Chaves

CIP – Brasil. Catalogação-na-Fonte.
Câmara Brasileira do Livro, SP

P958 Progressões e logaritmos: 2º grau / Aref Antar Neto. (et al.) Fortaleza: Ed. Vestseller, 2009. (Noções de matemática; v.2)

1. Logaritmos 2. Progressões aritméticas 3. Progressões geométricas I. Antar Neto, Aref, 1949 – II. Série.

78-1723

17. CDD – 511.2
18. – 513.4
17. – 511.7
18. – 513.22

Índices para catálogo sistemático:
1. Logaritmos: Aritmética 511.7 (17.) 513.22 (18.)
2. Progressões: Aritméticas 511.2 (17.) 513.4 (18.)

Editora VestSeller

www.VestSeller.com.br

Índice

Parte I

Parte II

Parte III

Parte IV

PARTE I

Capítulo 1 – **Potências e raízes**

Capítulo 2 – **A indução**

Capítulo 1

Potências e raízes

Neste capítulo vamos examinar as definições e as propriedades mais importantes que envolvem as *potências* e as *raízes*. Elas serão úteis nos capítulos posteriores, onde definiremos *logaritmo* de um número real positivo, e onde estudaremos as propriedades das funções exponencial e logarítmica.

1.1. POTÊNCIA DE EXPOENTE INTEIRO

Definição

Sejam **a** um número real *qualquer* e *n* um número natural.

Define-se **potência n-ésima do número a** que se indica com o símbolo a^n da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &a^0 = 1 \\ &a^n = a \cdot a^{n-1}, \text{ para } n \geq 1 \end{aligned}$$

Da definição acima obtemos:

$a^1 = a \cdot a^0 = a \cdot 1 = a$
$a^2 = a \cdot a^1 = a \cdot a$
$a^3 = a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a) = a \cdot a \cdot a$
$a^4 = a \cdot a^3 = a \cdot (a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a$
....

Observe então que, para $n \geq 2$, a^n é o produto de **n** fatores iguais a **a**:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

O número real **a** é chamado **base** da potência e o número natural **n** é chamado **expoente** da potência.

Exemplos

a) $2^0 = (-2)^0 = 0^0 = 1$
b) $2^1 = 2$; $(-2)^1 = -2$; $0^1 = 0$
c) $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$
d) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$
e) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^4 = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{81}{256}$
f) $0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

Exercícios Resolvidos

1.1) Calcule:
a) $(-2)^4$ b) -2^4 c) $-(-2)^3$

Solução
a) $(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = 16$
b) $-2^4 = -(2^4) = -(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2) = -16$
c) $-(-2)^3 = -[(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)] = -(-8) = 8$

É comum confundir-se $(-a)^n$ com $-a^n$. Note que:

$$(-a)^n = \underbrace{(-a)\cdot(-a)\cdot(-a)\cdot\ldots\cdot(-a)}_{\text{n fatores iguais a } -a}$$

$$-a^n = -(a^n) = -\underbrace{(a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{\text{n fatores iguais a a}}$$

1.2) Se $a < 0$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, qual é o *sinal* de a^n?
Solução
Se **n** é par, o número de fatores no desenvolvimento de a^n é par; como $a < 0$, tem-se $a^n > 0$.
Se **n** é ímpar, o número de fatores no desenvolvimento de a^n é ímpar; como $a < 0$, tem-se $a^n < 0$.

1.3) Calcule:
$S = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + \ldots + (-1)^{98} + (-1)^{99}$

Solução

Na expressão acima, observe que se **n** é par tem-se $(-1)^n = 1$ e se **n** é ímpar tem-se $(-1)^n = -1$; então:
$S = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + \ldots + (-1)^{98} + (-1)^{99}$
$$S = \underbrace{1-1}_{\text{zero}}+\underbrace{1-1}_{\text{zero}}+\underbrace{1-\ldots}_{\text{zero}}+\underbrace{1-1}_{\text{zero}}$$
$S = 0$

Exercícios Propostos

1.4) Calcule:
a) $(-3)^3$ c) $-(-3)^3$ e) -3^4
b) -3^3 d) $(-3)^4$ f) $-(-3)^4$

1.5) Calcule:
a) $(-2)^0$ c) 0^0 e) $(-1)^{10}$
b) $(-1)^1$ d) 0^5 f) $(\pi)^0$

1.6) Dê, segundo os valores de **n**, $n \in \mathbb{N}$, os *sinais* de:
a) 3^n
b) $(-3)^n$
c) 0^n
d) 1^n

1.7) Para $n \geq 2$; $n \in \mathbb{N}$, calcule:
$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \ldots + (-1)^n$

1.8) Se $n \in \mathbb{N}^*$ e $f(x) = 5x^{2n+1} - 10\cdot x^{2n} + 3\cdot x^{2n-1} + 5$, calcule $f(-1)$.

Definição

Sejam **a** um número real *diferente de zero*, e **n** um número natural; define-se:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Exemplos

a) $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

b) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

c) $-14x^{-2}y = -14\frac{1}{x^2}y = \frac{-14y}{x^2} (x \neq 0)$

d) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{25}} = 25$

Exercícios Resolvidos

1.9) Calcule:
a) $(-2)^{-2}$ d) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$

b) -2^{-2} e) $\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}$

c) $-(-2)^{-2}$ f) $-\left(-\frac{4}{5}\right)^{-2}$

Solução

a) $(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{(-2)(-2)} = \frac{1}{4}$

b) $-(2^{-2}) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$

c) $-(-2)^{-2} = -\frac{1}{(-2)^2} = -\frac{1}{(-2)(-2)} = -\frac{1}{4}$

d) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{9}$

e) $\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}} = \frac{1}{\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{9}{4}}} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$

f) $-\left(-\frac{4}{5}\right)^{-2} = -\frac{1}{\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{1}{\frac{16}{25}} = -\frac{25}{16}$

Exercícios Propostos

1.10) Calcule:

a) $(-3)^{-3}$

b) -3^{-3}

c) $-(-3)^{-3}$

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$

e) $\frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}}$

f) $-\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3}$

1.11) Calcule:

a) $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 2^{-2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} - (-2)^{-2}}$

b) $\left[2^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 5 \cdot 2^0\right]^{-1}$

1.12) Se $ab \neq 0$ e $a + b \neq 0$, simplifique:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{(a+b)^{-1}}$$

1.13) Sendo $ab \neq 0$ e $a + b \neq 0$, verifique que se $4(a + b)^{-1} = a^{-1} + b^{-1}$, então $a = b$.

1.14) Se $x \neq 0$ e $x + x^{-1} = m$, calcule $x^2 + x^{-2}$ em função de **m**.

1.2. ALGUMAS PROPRIEDADES DAS POTÊNCIAS DE EXPOENTE INTEIRO

A definição de a^n para o número natural **n** e a definição dada para a^{-n} possibilitam definir **potência n-ésima do número real a**, quando **n** é um **número inteiro**.

Para o número real **a** e para o número inteiro **n**, define-se:

$$a^n = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 0 \\ a \cdot a^{n-1}, \text{ se } n \geq 1 \\ \frac{1}{a^{-n}}, \text{ se } n < 0 \text{ e } a \neq 0 \end{cases}$$

Para os números reais **a** e **b** e para os *números inteiros* **m** e **n** valem as propriedades:

I. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	IV. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
II. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$	V. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$
III. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	

Exemplos

a) $4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3} = 4^5 = 1024$

b) $\frac{10^2}{10^4} = 10^{2-4} = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

c) $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096$

d) $(x^2y)^3 = (x^2)^3 \cdot y^3 = x^6y^3$

e) $\left(\frac{x}{2}\right)^4 = \frac{x^4}{2^4} = \frac{x^4}{16}$

f) Observe que: $a^{m^n} = a^{(m^n)}$ e não se deve confundir a^{m^n} com $a^{(m^n)}$; assim:

$$2^{2^3} = 2^{(2^3)} = 2^8$$
$$(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$$

Exercícios Resolvidos

1.15) Sendo $ab \neq 0$, simplifique: $\dfrac{(a^5b^3)^4}{(a^2b^4)^2}$

Solução

$$\frac{(a^5b^3)^4}{(a^2b^4)^2} = \frac{(a^5)^4\cdot(b^3)^4}{(a^2)^2\cdot(b^4)^3} = \frac{a^{20}\cdot b^{12}}{a^4\cdot b^8} = a^{20-4}\cdot b^{12-8} = a^{16}\cdot b^4$$

1.16) Se $n \in \mathbb{N}^*$, simplifique a expressão: $y = \dfrac{2^{n+4} - 2\cdot 2^n}{2\cdot 2^{n+3}}$

Solução

$$y = \frac{2^n\cdot 2^4 - 2\cdot 2^n}{2\cdot 2^n\cdot 2^3} = \frac{\cancel{2^n}(2^4-2)}{2\cdot \cancel{2^n}\cdot 2^3} = \frac{2^4-2}{2\cdot 2^3} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

1.17) Sendo $abc \neq 0$, simplifique a expressão:

$$y = 2^8\cdot 16^{-3}\cdot a^8b^{-4}c^{-3}\cdot\left(\frac{a^{-5}b^{-2}}{a^4c^8}\right)^3$$

Solução

$$y = 2^8\cdot(2^4)^{-3}\cdot a^8b^{-4}c^{-3}\cdot\frac{(a^{-5}b^{-2})^3}{(a^4c^8)^3}$$

$$y = 2^8\cdot 2^{-12}\cdot a^8b^{-4}c^{-3}\cdot\frac{(a^{-5})^3\cdot(b^{-2})^3}{(a^4)^3\cdot(c^8)^3}$$

$$y = 2^{8-12}\cdot a^8b^{-4}c^{-3}\cdot\frac{a^{-15}b^{-6}}{a^{12}c^{24}}$$

$$y = 2^{-4}\cdot\frac{a^8a^{-15}}{a^{12}}\cdot b^{-4}b^{-6}\cdot\frac{c^{-3}}{c^{24}}$$

$$y = 2^{-4}\cdot a^{8-15-12}\cdot b^{-4-6}\cdot c^{-3-24}$$

$$y = 2^{-4}\cdot a^{-19}\cdot b^{-10}\cdot c^{-27}$$

ou, se quisermos usar apenas expoentes positivos:

$$y = \frac{1}{16\cdot a^{19}b^{10}c^{27}}$$

1.18) Simplifique a expressão:

$$A = \frac{ab^{-2}\cdot(a^{-1}b^2)^4\cdot(ab^{-1})^2}{a^{-2}b\cdot(a^2b^{-1})^3\cdot a^{-1}b}$$

e calcule o seu valor para $a = 10^{-3}$ e $b = -10^{-2}$

Solução

$$A = \frac{ab^{-2}\cdot(a^{-1})^4(b^2)^4\cdot a^2(b^{-1})^2}{a^{-2}b\cdot(a^2)^3(b^{-1})^3\cdot a^{-1}b} = \frac{ab^{-2}a^{-4}b^8a^2b^{-2}}{a^{-2}ba^6b^{-3}a^{-1}b} =$$

$$= \frac{a^{1-4+2}\cdot b^{-2+8-2}}{a^{-2+6-1}\cdot b^{1-3+1}} = \frac{a^{-1}b^4}{a^3b^{-1}} = a^{-1-3}\cdot b^{4-(-1)} = a^{-4}\cdot b^5$$

Se $a = 10^{-3}$ e $b = -10^{-2}$, obtemos:

$A = (10^{-3})^{-4}\cdot(-10^{-2})^5 = 10^{12}\cdot(-1\cdot 10^{-2})^5 = 10^{12}\cdot(-1)^5\cdot(10^{-2})^5 =$

$= 10^{12}\cdot(-1)\cdot 10^{-10} = -1\cdot 10^{12-10} = -10^2 = -100$

Exercícios Propostos

1.19) Sendo $ab \neq 0$, simplifique as expressões abaixo e dê as respostas utilizando expoentes positivos:

a) $\dfrac{(ab^2)^3}{(a^2b)^2}$

b) $(a^{-3}b^2)^0$

c) $\dfrac{7^{-1}a^0b^{-2}}{(3ab)^{-4}}$

d) $\left[\left(\dfrac{ab^{-2}\cdot 2^{-1}}{b^{-2}a^2}\right)^{-1}\right]^3$

e) $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{(ab)^{-1}}$

f) $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}$, $a \neq b$

1.20) Se α e β são números inteiros e $2^\alpha = m$ e $2^\beta = n$, calcule em função de **m** e **n**:

a) $2^{2\alpha+3\beta}$

b) $2^{\beta-\alpha}$

c) $2^{5\alpha-\beta}$

d) $4^{\alpha-\beta}$

e) $0{,}5^{\beta+\alpha}$

f) $0{,}25^{3\alpha-2\beta}$

1.21) Sendo $abc \neq 0$, simplifique a expressão:

$$A = 2^8\cdot 4^{-3}\cdot(a^4b^{-2})^3\cdot\left(\frac{b^{-2}a^5}{a^{-1}b^{-3}c^4}\right)^{-2}$$

1.22) Simplifique:

$$\frac{[(-12)^{-8}]^{-2}\cdot 75^{-4}\cdot(-4)^{-9}}{(25^{-2})^4\cdot 18^6\cdot 10^4}$$

1.23) Considere o produto:

$$P = [x^{(2^m)} + y^{(2^m)}] \cdot [x^{(2^m)} - y^{(2^m)}],\ m \in \mathbb{N}^*$$

a) Verifique que $P = x^{(2^{m+1})} - y^{(2^{m+1})}$

b) Suponha $x = 10^4$, $y = 10^2$ e $m = 2$; determine com quantos zeros "termina" o número P.

1.3. RAÍZES

Consideremos os seguintes problemas e as suas correspondentes respostas.

Ache as raízes:

1º) cúbica de 27
Resposta: 3, pois $3^3 = 27$

2º) cúbica de 0
Resposta: 0, pois $0^3 = 0$

3º) quinta de −32
Resposta: −2, pois $(-2)^5 = -32$

4º) quarta de 81
Resposta: 3 e −3, pois 3^4, $(-3)^4 = 81$

5º) sexta de 0
Resposta: 0, pois $0^6 = 0$

6º) quadrada de −25
Resposta: não existe

Observe o 6º problema: *Um número negativo não admite raiz quadrada.* Para perceber isso, basta tentar calculá-la. Se um número **b** fosse raiz quadrada de −25, deveria acontecer:

$$b^2 = -25$$

e é fácil ver que isto é impossível, pois o quadrado de um número real é *não negativo.*

O 4º problema mostra um caso em que existem duas raízes opostas, ou seja, de mesmo valor absoluto e sinais contrários; isso ocorre sempre que calculamos uma *raiz de índice par de um número positivo.*

Observe nos 1º, 2º e 3º problemas que quando calculamos uma *raiz de índice ímpar de um número real* obtivemos um único resultado.

Podemos resumir as diferentes situações da seguinte forma:

Sejam o número real **a** e **n** um número inteiro positivo.

1. Chama-se **raiz n-ésima do número real a**, se existir, ao número real **b** que satisfaz à condição:

$$b^n = a$$

2. A **existência** da raiz n-ésima do número real **a** é dada pela tabela abaixo:

	n ímpar	n par
a > 0	existe uma raiz única, positiva, indicada por $\sqrt[n]{a}$	existem duas raízes opostas, a positiva indicada por $\sqrt[n]{a}$, e a negativa indicada por $-\sqrt[n]{a}$
a = 0	existe uma raiz única, que é zero	existe uma raiz única, que é zero
a < 0	existe uma raiz única, negativa, indicada por $\sqrt[n]{a}$	não existe raiz

Exemplos

a) A raiz cúbica de 8 é 2, pois: $2^3 = 8$.
Indica-se essa raiz por $\sqrt[3]{8}$.
Assim: $\sqrt[3]{8} = 2$.

b) A raiz cúbica de −8 é −2, pois: $(-2)^3 = -8$.
Indica-se essa raiz por $\sqrt[3]{-8}$.
Assim: $\sqrt[3]{-8} = -2$.

c) A raiz quadrada de zero é zero, pois: $0^2 = 0$.
Indica-se $\sqrt{0} = 0$

d) As raízes quadradas de 16 são 4 e −4, pois: $4^2 = (-4)^2 = 16$.
Indicamos essas raízes por $\sqrt{16}$ e $-\sqrt{16}$.
Assim: $\sqrt{16} = 4$ e $-\sqrt{16} = -4$.

Observações

1º) No símbolo $\sqrt[n]{a}$, **a** denomina-se **radicando** e **n** denomina-se **índice** da raiz.

2º) Se tivermos a > 0 e **n par**, o símbolo $\sqrt[n]{a}$ indica **apenas** a raiz n-ésima **positiva** de **a**. Nesse caso, se quisermos indicar a raiz n-ésima **negativa** de **a** usamos o símbolo $-\sqrt[n]{a}$.
Então, $\sqrt{4} = 2$ e não $\sqrt{4} = \pm 2$; observe que $-\sqrt{4} = -2$.

3º) Quando calculamos a *raiz n-ésima positiva de a*, n *par, de um quadrado perfeito*, devemos ter cuidado para não cometermos enganos; assim por exemplo:

$$\sqrt{5^2} = 5$$

$$\sqrt{(-5)^2} = 5 \text{ e não } \sqrt{(-5)^2} = -5$$

Note, pela 2ª observação, que se a > 0 e n é par, o símbolo $\sqrt[n]{a}$ indica apenas a raiz n-ésima positiva de **a**; então para todo número real x devemos escrever:

$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$ $\boxed{|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \ge 0 \\ -x, & \text{se } x \le 0 \end{cases}}$

Exercícios Resolvidos

1.24) Simplifique a expressão:
$A = \sqrt{(\sqrt{3}-3)^2} + \sqrt{(3+\sqrt{3})^2}$

Solução

$\sqrt{(\sqrt{3}-3)^2} = |\sqrt{3}-3| = -(\sqrt{3}-3) = 3-\sqrt{3}$, (observe que $\sqrt{3}-3<0$)

$\sqrt{(3+\sqrt{3})^2} = |3+\sqrt{3}| = 3+\sqrt{3}$

Então,

$A = 3-\sqrt{3}+3+\sqrt{3}$

$A = 6$

1.25) Considere a expressão:

$$Y = \sqrt{(x-1)^2}$$

Quais são as diferentes *formas* que ela pode assumir, segundo os valores de x?

Solução

$Y = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x-1 \ge 0 \\ -(x-1), & \text{se } x-1 \le 0 \end{cases}$ $\boxed{|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \ge 0 \\ -x, & \text{se } x \le 0 \end{cases}}$

Então:

$Y = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \ge 1 \\ -x+1, & \text{se } x \le 1 \end{cases}$

Exercícios Propostos

1.26) Classifique cada uma das sentenças abaixo em Verdadeira (V) ou Falsa (F):

a) $\sqrt[4]{16} = \pm 2$ d) $\sqrt[3]{-27} = -3$

b) $\sqrt[4]{16} = 2$ e) $-\sqrt[4]{16} = -2$

c) $\sqrt[3]{27} = 3$ f) $\sqrt{(-5)^2} = -5$

1.27) Verifique que $\sqrt{\dfrac{1}{(2-\sqrt{5})^2}} - \sqrt{\dfrac{1}{(2+\sqrt{5})^2}} = 4$

1.28) Considere a expressão:

$$y = \sqrt{(x+1)^2}$$

Quais são as diferentes formas que ela pode assumir, segundo os valores de x?

1.4. PROPRIEDADES DAS RAÍZES

Sendo **a** e **b** números reais **não negativos**, **m**, **n** e **p** números *inteiros positivos*, valem as propriedades:

I. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b}$

II. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ $(b \ne 0)$

III. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

IV. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$

V. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m\cdot p]{a^{n\cdot p}}$

Exemplos

a) $\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{3\cdot 4} = \sqrt[5]{12}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{10}{2}} = \sqrt[3]{5}$

c) $(\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[3\cdot 4]{3} = \sqrt[12]{3}$

e) $\sqrt[4]{5^3} = \sqrt[4\cdot 2]{5^{3\cdot 2}} = \sqrt[8]{5^6}$

Exercícios Resolvidos

1.29) Calcule: $A = \sqrt[5]{1} + \sqrt[6]{0} + \sqrt[4]{81} + \sqrt[3]{-125} - \sqrt[3]{64}$

Solução

Sendo:

$\sqrt[5]{1} = 1$, $\sqrt[6]{0} = 0$, $\sqrt[4]{81} = 3$, $\sqrt[3]{-125} = -5$ e $\sqrt[3]{64} = 4$, temos:

$A = 1+0+3+(-5)-4$

$A = -5$

1.30) Simplifique: $y = 4\cdot\sqrt{147} + 3\cdot\sqrt{75} + \sqrt{192}$

Solução

$y = 4\cdot\sqrt{49\cdot 3} + 3\cdot\sqrt{25\cdot 3} + \sqrt{64\cdot 3}$

$y = 4\cdot\sqrt{49}\cdot\sqrt{3} + 3\cdot\sqrt{25}\cdot\sqrt{3} + \sqrt{64}\cdot\sqrt{3}$

$y = 4\cdot 7\cdot\sqrt{3} + 3\cdot 5\cdot\sqrt{3} + 8\cdot\sqrt{3}$

$y = 28\sqrt{3} + 15\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$

$y = 51\sqrt{3}$

1.31) Reduza ao *mesmo índice*: $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[4]{7}$

Solução

O *índice comum* é o M.M.C. entre os índices 2, 3 e 4, que é 12. Então, aplicando a propriedade V:

$$\sqrt{5} = \sqrt[2]{5^1} \underset{\text{mult. por 6}}{\overset{\text{mult. por 6}}{=}} \sqrt[12]{5^6} = \sqrt[12]{15625}$$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^1} \underset{\text{mult. por 4}}{\overset{\text{mult. por 4}}{=}} \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16}$$

$$\sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{7^1} \underset{\text{mult. por 3}}{\overset{\text{mult. por 3}}{=}} \sqrt[12]{7^3} = \sqrt[12]{343}$$

1.32) Efetue as operações:

a) $(\sqrt{98} - \sqrt{8}) \cdot \sqrt{6}$

b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2}$

c) $\dfrac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[3]{2}}$

d) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} - \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6} + \sqrt{5}}$

Solução

a) $(\sqrt{98} - \sqrt{8}) \cdot \sqrt{6} = (\sqrt{49 \cdot 2} - \sqrt{4 \cdot 2}) \cdot \sqrt{6} = (7\sqrt{2} - 2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{6} =$
$= 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 5\sqrt{12} = 5\sqrt{4 \cdot 3} = 5 \cdot 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

b) Observe que para efetuarmos o produto das duas raízes, isto é, para aplicarmos a propriedade **I**, devemos *reduzi-las ao mesmo índice*:
$\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{5^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{5^3 \cdot 2^2} = \sqrt[6]{500}$

c) Também aqui devemos reduzir as raízes ao mesmo índice:

$$\frac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[12]{4^3}}{\sqrt[12]{2^4}} = \sqrt[12]{\frac{4^3}{2^4}} = \sqrt[12]{4}$$

d)

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{6} + \sqrt{5}) - \sqrt{5}(\sqrt{6} - \sqrt{5})}{(\sqrt{6} - \sqrt{5}) + (\sqrt{6} + \sqrt{5})} =$$

$$= \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} + \sqrt{6} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{6} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2} =$$

$$= \frac{6 + \sqrt{30} - \sqrt{30} + 5}{6 - 5} = \frac{11}{1} = 11$$

1.33) *Racionalize* os denominadores das frações:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$

Solução

No problema, pretende-se determinar uma fração cujo denominador é um número racional e que seja igual à fração dada:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5 \cdot 5^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{25}}{5}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \cdot \dfrac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \dfrac{2\sqrt{3} + 3}{4 - 3} = 2\sqrt{3} + 3$

Observe que, de um modo geral, para *racionalizarmos* o denominador de uma fração como $\dfrac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ ou $\dfrac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$, multiplicamos o seu numerador e o seu denominador pelo "conjugado do denominador":

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$$

d)

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}} = \frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{5}} = \frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{2 + 2\sqrt{6} + 3 - 5} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{2\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{12} + \sqrt{18} + \sqrt{30}}{2(\sqrt{6})^2} = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{30}}{12}$$

1.34) Se $x = \dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$ e $y = \dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$, calcule:

a) $x^2 + xy + y^2$ b) $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$

Solução

a)

$$x^2 = \left(\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{10+2\sqrt{20}+2}{4} = \frac{12+2\sqrt{20}}{4} =$$

$$= \frac{12+2\cdot\sqrt{4\cdot 5}}{4} = \frac{12+4\sqrt{5}}{4} = \frac{4(3+\sqrt{5})}{4} = 3+\sqrt{5}$$

$$y^2 = \left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{10-2\sqrt{20}+2}{4} = \frac{12-2\sqrt{20}}{4} =$$

$$= \frac{12-2\cdot\sqrt{4\cdot 5}}{4} = \frac{12-4\sqrt{5}}{4} = \frac{4(3-\sqrt{5})}{4} = 3-\sqrt{5}$$

$$xy = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2} = \frac{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{2})^2}{4} = \frac{10-2}{4} = 2$$

Então, $x^2 + xy + y^2 = 3 + \sqrt{5} + 2 + 3 - \sqrt{5} = 8$

b) Note que $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = x^2(x + y) + y^2(x + y) = (x + y)(x^2 + y^2)$

Mas, $x + y = \dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$

$x^2 + y^2 = 3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} = 6$

Então, $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2) = \sqrt{10}\cdot 6 = 6\sqrt{10}$

Exercícios Propostos

1.35) Calcule: $\sqrt[9]{-1}+\sqrt[3]{0}-\sqrt[5]{243}-\sqrt[4]{81}+\sqrt{49}$

1.36) Simplifique: $A = 3\sqrt{12}-2\sqrt{27}+\sqrt{2}-\sqrt{75}+\sqrt{48}$

1.37) Reduza ao mesmo índice: $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[6]{30}$

1.38) Coloque em *ordem crescente* os números: $\sqrt{6}$, $\sqrt[4]{12}$, $\sqrt[8]{72}$

1.39) Efetue as operações:

a) $(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{10})\cdot\sqrt{2}$

b) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{4}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$

d) $3\cdot\left(\dfrac{\sqrt{6}-3}{3}\right)^2 + 6\cdot\left(\dfrac{\sqrt{6}-3}{3}\right)$

e) $\sqrt{4\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}+\sqrt[3]{8\sqrt{\dfrac{1}{2}}}-2\sqrt[6]{32}}$

1.40) Racionalize os denominadores das frações:

a) $\dfrac{9}{2\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{7}}$

c) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{4}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

e) $\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}}$

1.41) Verifique que:

a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{2}} = 3-\sqrt{2}$

b) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}-\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 0$

c) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right)^2-\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^2 = -\sqrt{15}$

1.42) Racionalize o denominador de $\dfrac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}$

1.43) Se $x = \dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$ e $y = \dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$, calcule:

a) $x + y$

b) $x^2 + y^2$

c) $x^2 + 3xy + y^2$

d) $x^3 + y^3$

1.44) Considere o número:

$A = (\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-2)\cdot\sqrt{\sqrt{3}+2}$

a) Calcule A^2.

b) Deduza o valor de A.

1.45) Seja $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$

a) Verifique que: $\dfrac{1}{f(x)} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

b) Verifique que: $\dfrac{1}{f(1)} + \dfrac{1}{f(2)} + \dfrac{1}{f(3)} + \ldots + \dfrac{1}{f(n)} = \sqrt{n+1} - 1$

1.5. POTÊNCIA DE EXPOENTE RACIONAL

Sejam dados o número **real positivo a** e o número **racional** $\dfrac{m}{n}$, com **m** e **n** inteiros, $n \neq 0$.

Nesse número $\dfrac{m}{n}$, o denominador **n** será sempre escolhido *positivo*. Assim, se $\dfrac{m}{n}$ é negativo, teremos **n** positivo e **m** negativo.

Nestas condições, o símbolo $a^{\frac{m}{n}}$ é definido por:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Exemplos

a) $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4^1} = \sqrt{4} = 2$

b) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

c) $8^{-\frac{1}{3}} = 8^{\frac{-1}{3}} = \sqrt[3]{8^{-1}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{2}$

Podemos definir potência de expoente racional para o caso a = 0, mas com a condição $\dfrac{m}{n} > 0$:

$$\boxed{0^{\frac{m}{n}} = 0\left(\frac{m}{n} > 0\right)}$$

Na definição acima, a condição $\dfrac{m}{n} > 0$ é necessária para manter uma coerência com as definições dadas anteriormente. Por exemplo, sabemos que *não se pode escrever*:

$$0^{-2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0}$$

Da mesma forma, *não podemos escrever*:

$$0^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{0^{-2}}$$

1.6. PROPRIEDADES DAS POTÊNCIAS DE EXPOENTE RACIONAL

As potências de expoente racional obedecem às mesmas regras operatórias vistas para potências de expoente inteiro.

Se **a** e **b** são números reais **positivos** e $\dfrac{m}{n}$ e $\dfrac{p}{q}$ são números racionais (m, n, p e q são inteiros e $nq \neq 0$), valem as propriedades:

I. $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$

II. $\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} \; (a \neq 0)$

III. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$

IV. $(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$

V. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} \; (b \neq 0)$

Exemplos

a) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 2^{\frac{6}{6}} = 2$

b) $\dfrac{2^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{\frac{7}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}} = \dfrac{2^{\frac{5}{3}+\frac{7}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}} = \dfrac{2^{\frac{31}{6}}}{2^{\frac{1}{6}}} = 2^{\frac{31}{6}-\frac{1}{6}} = 2^{\frac{30}{6}} = 2^5 = 32$

c) $(3^2)^{\frac{5}{6}} = 3^{2\cdot\frac{5}{6}} = 2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{3^5} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3^2} = 3\sqrt[3]{9}$

d) $(2x^3)^{-\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{1}{3}} \cdot (x^3)^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{3}}} \cdot x^{3\left(-\frac{1}{3}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot x^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2} \cdot x}$, $(x > 0)$

Exercícios Resolvidos

1.46) Expresse em forma de potência com expoente racional os seguintes radicais:

a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt[4]{2}$

c) $\sqrt[3]{7^2}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{11}}$

Solução

a) $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$

b) $\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}}$

c) $\sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{2}{3}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{11}} = \sqrt[6]{11} = 11^{\frac{1}{6}}$

1.47) Calcule, substituindo as potências de expoente racional pelos correspondentes radicais:

a) $4^{\frac{1}{2}}$

b) $16^{\frac{1}{4}}$

c) $27^{\frac{2}{3}}$

d) $64^{-\frac{5}{6}}$

Solução

a) $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4^1} = \sqrt{4} = 2$

b) $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16^1} = \sqrt[4]{16} = 2$

c) $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{3^6} = \sqrt[3]{(3^2)^3} = 3^2 = 9$

d) $64^{-\frac{5}{6}} = 64^{\frac{-5}{6}} = \sqrt[6]{64^{-5}} = \sqrt[6]{\frac{1}{64^5}} = \sqrt[6]{\frac{1}{(2^6)^5}} = \sqrt[6]{\frac{1}{2^{30}}} = \frac{\sqrt[6]{1}}{\sqrt[6]{(2^5)^6}} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

1.48) Utilizando as propriedades das potências de expoente racional, simplifique:

a) $(0,04)^{-\frac{1}{2}}$

b) $\left(25^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}$

c) $27^{-\frac{2}{3}} \cdot 9^{1,5}$

d) $5^0 \cdot 2^3 \cdot 8^{\frac{2}{3}}$

Solução

a) $(0,04)^{-\frac{1}{2}} = \left[(0,2)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = (0,2)^{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = (0,2)^{-1} = \frac{1}{0,2} = 5$

b) $\left(25^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} = 25^{\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}} = 25^{\frac{3}{2}} = \left(5^2\right)^{\frac{3}{2}} = 5^{2\cdot\frac{3}{2}} = 5^3 = 125$

c) $27^{-\frac{2}{3}} \cdot 9^{1,5} = \left(3^3\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(3^2\right)^{\frac{3}{2}} = 3^{3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} \cdot 3^{2\cdot\frac{3}{2}} = 3^{-2} \cdot 3^3 = 3^{-2+3} = 3^1 = 3$

d) $5^0 \cdot 2^3 \cdot 8^{\frac{2}{3}} = 1 \cdot 2^3 \cdot \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} = 2^3 \cdot 2^{3\cdot\frac{2}{3}} = 2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$

1.49) Sendo **a**, **b** e **c** números reais positivos, simplifique:

$$A = (ab^{-3}c^3)^{\frac{1}{2}} \cdot (a^7b^4c^2)^{\frac{1}{3}} \cdot (a^{-5}bc)^{\frac{1}{6}}$$

Solução

$$A = a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}}c^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{7}{3}}b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{2}{3}} \cdot a^{-\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{6}}c^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{7}{3}-\frac{5}{6}} \cdot b^{-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{1}{6}} \cdot c^{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}} =$$

$$= a^{\frac{3+14-5}{6}} \cdot b^{\frac{-9+8+1}{6}} \cdot c^{\frac{9+4+1}{6}} = a^{\frac{12}{6}} \cdot b^{\frac{0}{6}} \cdot c^{\frac{14}{6}} = a^2 \cdot b^0 \cdot c^{\frac{7}{3}} = a^2 \cdot c^{\frac{7}{3}}$$

Se quisermos a resposta utilizando os radicais correspondentes:

$$A = a^2 \cdot \sqrt[3]{c^7} = a^2 \cdot \sqrt[3]{c^6 \cdot c} = a^2 \cdot c^2 \cdot \sqrt[3]{c}$$

1.50) Suposta definida, simplifique a expressão:

$$y = \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}-1} + \frac{a^{\frac{1}{2}}-1}{a^{\frac{1}{2}}+1} - \frac{4}{a-1}\right)^{-3}$$

Solução

Lembrando que $\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)\cdot\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right) = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 1^2 = a-1$, o M.M.C. dos denominadores é a – 1, tem-se:

$$y = \left[\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right) + \left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right) - 4}{a-1}\right]^{-3}$$

$$y = \left[\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)^2 + \left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)^2 - 4}{a-1}\right]^{-3}$$

$$y = \left(\frac{a+2a^{\frac{1}{2}}+1+a-2a^{\frac{1}{2}}+1-4}{a-1}\right)^{-3}$$

$$y = \left(\frac{(2a-2)}{a-1}\right)^{-3} = \left[\frac{2(a-1)}{a-1}\right]^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

1.51) Se, $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$, calcule:

a) $x + x^{-1}$

b) $x^2 + x^{-2}$

c) $\dfrac{x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} + 2}{x^2 + x^{-2} + 3}$

Solução

a) Elevando ao quadrado os dois membros da igualdade $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ obtemos:

$$\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 9$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} + \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 9$$

$$x + 2x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} + x^{-1} = 9$$

$$x + 2 + x^{-1} = 9$$

E, daí:

$$x + x^{-1} = 7$$

b) Elevando ao quadrado os dois membros da igualdade $x + x^{-1} = 7$ obtemos:

$$(x + x^{-1})^2 = 49$$

$$x^2 + 2x \cdot x^{-1} + (x^{-1})^2 = 49$$

$$x^2 + 2x^{1-1} + x^{-2} = 49$$

$$x^2 + 2 + x^{-2} = 49$$

E, daí:

$$x^2 + x^{-2} = 47$$

c) Elevando ao cubo os dois membros da igualdade $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ obtemos:

$$\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^3 = 27$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3 + 3\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^3 = 27$$

$$x^{\frac{3}{2}} + 3xx^{-\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}}x^{-1} + x^{-\frac{3}{2}} = 27$$

$$x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} = 27$$

$$x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} + 3\big(\underbrace{x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}}_{3}\big) = 27$$

$$x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} + 9 = 27$$

E, daí :

$$x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} = 18$$

Então, $\dfrac{x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} + 2}{x^2 + x^{-2} + 3} = \dfrac{18 + 2}{47 + 3} = \dfrac{20}{50} = \dfrac{2}{5}$

Exercícios Propostos

1.52) Calcule:

a) $16^{\frac{5}{4}}$

b) $625^{\frac{3}{4}}$

c) $(0{,}001)^{-\frac{2}{3}}$

1.53) Calcule:

a) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0{,}5} + 16^{0{,}75} - (0{,}5)^{-5} + \left(-\dfrac{3}{7}\right)^0 \cdot 5$

b) $(0{,}027)^{-\frac{1}{3}} - \left(-\dfrac{1}{6}\right)^{-1} + 256^{0{,}75} - 3^{-1} + (5{,}5)^0$

1.54) Calcule: $\left(\dfrac{a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{5}{6}}}{a^{-\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{3}}}\right)^{-\frac{2}{3}}$ para a = 0,01 e b = 27

1.55) Utilize as potências de expoente racional para simplificar:

a) $\dfrac{1}{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$

b) $\sqrt{\sqrt{a} \cdot \dfrac{a}{\sqrt[3]{a}}}$

c) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^5} \cdot \sqrt[3]{a^4}$

1.56) Utilize as potências de expoente racional para simplificar:

$$\sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}}$$

1.57) Simplifique:

a) $\sqrt{a^{-\frac{5}{3}}b^3c^{-\frac{2}{3}}} \div \sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}}b^4c^{-1}}$

b) $\sqrt{\sqrt[3]{a} \cdot a^{\frac{1}{6}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}}}$

1.58) Supondo definida, simplifique a expressão:

$$\frac{1}{1-x^{\frac{1}{4}}}+\frac{1}{1+x^{\frac{1}{4}}}+\frac{2}{1+x^{\frac{1}{2}}}+\frac{4}{1-x}$$

1.59) Se $x=2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}$, calcule $2x^3+6x$.

1.60) Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}\div\dfrac{1}{x^{1,5}-1}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{ba}+\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x^2b^2}+\sqrt[3]{x^2b}}$

b) $\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}+\left(a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}$

1.61) Simplifique a expressão:

$$y=\left(\frac{1}{1-x^{-0,5}}-\frac{1}{1-x^{-1}}\right)\cdot(x-1)$$

Calcule o valor de y para x = 0,0036.

1.62) Determine x, $x\in\mathbb{Q}$, tal que:

a) $9^x=27$

b) $32^x=4$

c) $64^{\frac{2}{x}}=16$

d) $16^{\frac{3}{x}}=\frac{1}{8}$

e) $\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{2}{x}}=25$

f) $100^{1,5}=10^x$

1.7. POTÊNCIA DE EXPOENTE IRRACIONAL

Seja a um **número real positivo**

O problema que aqui se coloca é dar para a^x, onde **x** é um número **irracional**, uma definição justa, que respeite as regras de cálculo usuais das potências.

Vejamos um exemplo: como definir $2^{\sqrt{2}}$?

Como $\sqrt{2}$ é número irracional, $2^{\sqrt{2}}$ não tem significado se considerarmos apenas as definições vistas até aqui. Entretanto, o processo para a definição de $2^{\sqrt{2}}$ se utiliza das potências de expoente *racional*.

Inicialmente, observe que se **r** e **s** são números **racionais** e r < s tem-se $2^r<2^s$; parece razoável que essa propriedade se mantenha quando definimos 2^x para **x irracional**; assim, se r e s são racionais e:

$$r<\sqrt{2}<s$$

então devemos ter:

$$2^r<2^{\sqrt{2}}<2^s \qquad \text{(I)}$$

Consideremos agora as sucessivas *aproximações racionais* de $\sqrt{2}$:

$$\begin{array}{l} 1,4 < \sqrt{2} < 1,5 \\ 1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \\ 1,414 < \sqrt{2} < 1,415 \\ 1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143 \\ 1,41421 < \sqrt{2} < 1,41422 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

O conjunto de desigualdades acima e a conclusão (I) permitem-nos deduzir que $2^{\sqrt{2}}$ também satisfaz a um conjunto de desigualdades:

$$\begin{array}{l} 2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5} \\ 2^{1,41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42} \\ 2^{1,414} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,415} \\ 2^{1,4142} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,4143} \\ 2^{1,41421} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,41422} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

No conjunto de desigualdades acima, substituindo as potências de expoente racional por aproximações decimais, obtemos uma sequência de intervalos de *amplitudes cada vez menores*:

$$\begin{array}{l} 2,639 < 2^{\sqrt{2}} < 2,829 \\ 2,657 < 2^{\sqrt{2}} < 2,676 \\ 2,664 < 2^{\sqrt{2}} < 2,667 \\ 2,665 < 2^{\sqrt{2}} < 2,666 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Observe que o número $2^{\sqrt{2}}$ pertence a todos os intervalos da sequência, e que à medida em que os intervalos vão se sucedendo, vamos obtendo aproximações, por falta e por excesso, que nos dão uma avaliação cada vez mais precisa para $2^{\sqrt{2}}$.

A construção acima nos dá uma aproximação para $2^{\sqrt{2}}$ com três casas decimais: 2,665.

O procedimento descrito acima para definir $2^{\sqrt{2}}$ pode ser ampliado para a definição de a^x, onde **a** é um **número real positivo** e **x** é um número **irracional**.

Para isso, suponhamos a > 1, e consideremos *duas sequências*:

Uma, crescente, constituída por **números racionais** menores do que x:

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$$

A outra, decrescente, constituída por **números racionais** maiores do que x:

$$s_1, s_2, s_3, \ldots s_n, \ldots$$

As duas sequências devem ser construídas de tal forma que as diferenças $s_1 - r_1$, $s_2 - r_2$, $s_3 - r_3$, ..., $s_n - r_n$, ... sejam cada vez menores, isto é, aproximam-se de zero.

Então, o conjunto de desigualdades:

$$r_1 < x < s_1$$
$$r_2 < x < s_2$$
$$r_3 < x < s_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

gera, para a > 1, o conjunto de desigualdades:

$$a^{r_1} < a^x < a^{s_1}$$
$$a^{r_2} < a^x < a^{s_2}$$
$$a^{r_3} < a^x < a^{s_3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Observe que as potências de *expoente racional*:

$$a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \ldots$$

são aproximações "por falta" de a^x, e que as potências de *expoente racional*

$$a^{s_1}, a^{s_2}, a^{s_3}, \ldots$$

são aproximações "por excesso" a^x.

Note também que, à medida em que o *número irracional* x é "cercado" por intervalos de amplitudes cada vez menores: $r_n < x < s_n$, a^x é "cercado" pelos correspondentes intervalos: $a^{r_n} < a^x < a^{s_n}$, também de amplitudes cada vez menores. Diremos, então, que tais intervalos de extremidades a^{r_n} e a^{s_n} vão definir um número que é a^x.

Para $0 < a < 1$, a definição de a^x, x irracional, é análoga. Apenas, como $0 < a < 1$, a desigualdade: $r_n < x < s_n$ gera a desigualdade: $a^{r_n} > a^x > a^{s_n}$.

Observações

1º) Se x é um número **irracional positivo**, definimos:

$$0^x = 0$$

2º) Para todo número irracional x, define-se:

$$1^x = 1$$

3º) Se a < 0 e x é número irracional, o símbolo a^x *não está definido*.

4º) Para as potências de expoente irracional são válidas as propriedades usuais das potências.

Exercícios Propostos

1.63) Simplifique:

a) $0^{\sqrt{2}} - 1^{\sqrt{5}} + 7^{-\sqrt{3}} \cdot 7^{\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{\left(5^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt[3]{5}}}{25^{\sqrt[6]{3,125}}}$

c) $\left(3^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} \cdot 9^{\sqrt{6}} \div 3^3$

d) $\left[\dfrac{27^{\sqrt{12}} \cdot 3^{\sqrt{2}} \cdot 3^{\sqrt{48}}}{9^{\sqrt{27}} \cdot 3^{\sqrt{75}}}\right]^{\sqrt{2}}$

1.64) Com auxílio de uma "calculadora" construa uma sequência de intervalos que define $3^{\sqrt{2}}$. Dê uma aproximação de $3^{\sqrt{2}}$ com três casas decimais.

1.8. POTÊNCIA DE EXPOENTE REAL

Com as definições vistas até aqui, para o **número real positivo a** e para o número real **x**, qualquer, fica definido o número a^x, isto é, uma **potência de expoente real**.

Note que para a definição de a^x, com x real (racional ou irracional) há uma forte exigência: a > 0.

Observe também que se a > 0, então $a^x > 0$ para todo x real.

Propriedades

Sejam **a** e **b números reais positivos** e x e y números reais quaisquer; valem as seguintes propriedades:

I. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

II. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

III. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

IV. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

V. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

Capítulo

2 A indução

2.1. O QUE É A INDUÇÃO?

Podemos responder à pergunta dizendo que a *indução* é um processo de raciocínio, que faz a passagem de hipóteses ou conhecimentos particulares para conclusões gerais.

As ciências naturais utilizam-se daquilo que denominamos *indução empírica*. Esta, de uma série de observações particulares de um certo fenômeno, estabelece uma proposição geral que deve reger todas as possibilidades do fenômeno.

As leis gerais determinadas pela indução empírica não são providas de um grau absoluto de validade. O grau de certeza com que se estabelece uma lei depende do número de experiências feitas, bem como de confirmações posteriores do mesmo fenômeno.

Nas ciências naturais, em geral, um raciocínio desse tipo é plenamente convincente. Por exemplo, quando uma pessoa diz que "Todo homem é mortal", esta afirmação tem toda a certeza possível, dado o número enorme de confirmações que esta proposição teve através da História. Porém, o caráter desta proposição não é o mesmo que o de uma afirmação ou teorema demonstrado por meio de raciocínios puramente matemáticos.

Poder-se-ia dizer, então, que na Matemática a indução não se aplica como raciocínio válido, pois esta ciência não se satisfaz com os "graus de certeza", obtidos pela indução empírica. Essa é, porém, uma idéia errônea. É verdade que a *meta* que se procura atingir na Matemática é a forma dedutiva e axiomática, na qual os fatos e conceitos se apresentam interligados perfeitamente, de acordo com uma sequência lógica. Tal meta, entretanto, só pode ser atingida mediante todo um processo construtivo para o qual contribuem decisivamente a sensibilidade, a intuição e a experimentação. Com isto, queremos dizer que mesmo numa *ciência exata* como é a Matemática, ocupam lugar de destaque a contribuição da indução empírica, a imaginação que inventa e a construção experimental, elementos que constituem a *força diretriz* e *motora* mediante a qual pode ser atingida a meta final: a forma cristalizada de estrutura axiomática e dedutiva.

Um exemplo de como se pode utilizar a indução na Matemática é o seguinte: suponha que desejamos uma *fórmula* que nos dá o valor da soma:

$$S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^n,$$

para qualquer valor inteiro positivo de **n**.

Essa soma apresenta os valores seguintes:

Para $n = 1$: $S_1 = 2$

Para $n = 2$: $S_2 = 2 + 2^2 = 6$

Para $n = 3$: $S_3 = 2 + 2^2 + 2^3 = 14$

Para $n = 4$: $S_4 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$

Para $n = 5$: $S_5 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 62$

....

Por meio de experimentações sucessivas, o matemático "achou" a fórmula:

$$S_n = 2[(n-1)^2 + n],$$

a qual nos fornece:

Para $n = 1$: $S_1 = 2$ (satisfaz!)
Para $n = 2$: $S_2 = 2[1^2 + 2] = 6$ (satisfaz!)
Para $n = 3$: $S_3 = 2[2^2 + 3] = 14$ (satisfaz!)

É de se supor, então, que esta é a fórmula geral procurada. Puro engano! Isso não é verdade, pois para $n = 4$ tem-se:

$$S_4 = 2[3^2 + 4] = 26$$

valor diferente do real, que é $S_4 = 30$.

Concluímos, então, que a fórmula encontrada satisfaz para n = 1, 2 e 3, *mas não satisfaz em geral.*

Com o prosseguimento das tentativas, encontrou-se a expressão:

$$S_n = \frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 12}{6}$$

que fornece valores corretos para n = 1, 2, 3, 4 e 5, mas para n = 6 não satisfaz.

Com esse processo, o matemático consegue se aproximar cada vez mais da fórmula geral. Num dado instante, após muita pesquisa, chegou-se à fórmula:

$$S_n = 2^{n+1} - 2$$

que se mostrou válida, por exemplo, de n = 1 até n = 1 500.

Podemos, então, afirmar que esta é a fórmula procurada?

Não! O fato de uma expressão ser válida para um número bastante grande de casos particulares não significa que ela seja válida para todos os casos. Quem poderá garantir que para um valor de **n** superior a 1 500 não vai falhar a expressão encontrada?

Do exemplo discutido acima tiramos uma conclusão simples, mas importante:

"Uma proposição pode ser correta para um número bastante grande de casos particulares e ao mesmo tempo pode ser falsa em geral."

É justamente neste ponto que se distanciam a Matemática e as ciências naturais. Se o problema discutido acima fosse restrito ao campo da Sociologia, por exemplo, poderíamos afirmar que a expressão encontrada é válida "com uma determinada porcentagem de certeza". Tal certeza será maior ou menor, conforme seja o número de casos particulares examinados.

A Matemática não se satisfaz com essa "porcentagem de certeza". Ela exige certeza absoluta. Dessa maneira, temos que provar rigorosamente que a fórmula encontrada é válida para todo n.

O que se pode concluir, após esta discussão, é que a construção experimental foi útil para se encontrar uma fórmula, sobre a qual recaem suspeitas de que é de fato a expressão procurada. A prova, a demonstração rigorosa, que vai selar a questão, é dada dentro da Matemática por um processo especial de raciocínio que se denomina INDUÇÃO MATEMÁTICA.

2.2. O MÉTODO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

Tomemos o exemplo discutido no item anterior.

Por meio de um processo intuitivo conseguiu-se uma possível fórmula para exprimir a soma:

$$S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^n$$

Presume-se que seja:

$$S_n = 2^{n+1} - 2$$

Surge, então, a seguinte dúvida: temos uma proposição que se mostrou correta em muitos casos particulares; é, no entanto, impossível verificar todos os casos particulares. Como podemos saber se a proposição é correta em geral?

Quando uma proposição depende dos números naturais, **o método da Indução Matemática** constitui um eficiente instrumento para verificar a validade da proposição no caso geral. Para aplicar a Indução Matemática é necessário demonstrar dois teoremas:

Teorema 1: A proposição é válida para n = 1
Teorema 2: Se a proposição for válida para n = k, **então**, ela também é válida para o caso seguinte, n = k + 1

Vamos, então, demonstrar que é válida para todo **n** a proposição:

$$2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2$$

Teorema 1: A proposição é válida para n = 1.

Para demonstrar este teorema, basta fazer uma *verificação direta.*

Para n = 1, temos:

(1º membro) = 2

(2º membro) = $2^2 - 2 = 2$

Teorema 2: De acordo com o enunciado deste teorema, devemos *supor* (HIPÓTESE) que a propriedade é válida para um certo valor n = k, e *provar* (TESE) que, então, ela também é válida para n = k + 1.

Hipótese: $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 2$

Tese: $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 2$

Demonstração

Vamos somar aos dois membros da expressão da hipótese o número 2^{k+1}; resulta:

$$\underbrace{2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^k + 2^{k+1}}_{\text{1º membro da tese}} = 2^{k+1} - 2 + 2^{k+1} = \underbrace{2 \cdot 2^{k+1} - 2 = 2^{k+2} - 2}_{\text{2º membro da tese}}$$

Os dois teoremas foram provados. Podemos então dizer que

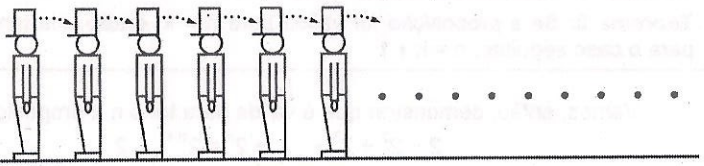
$$S_n = 2^{n+1} - 2$$

para todo n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Observações

1ª) Para o aluno é um tanto difícil convencer-se da eficiência da demonstração. Porém, com um pouco de reflexão sobre o que foi feito, podemos atingir um acordo.
Inicialmente, devemos notar que não seria possível verificar, experimentalmente, a proposição para todos os números naturais. O Teorema 1 corresponde à verificação experimental para o 1º caso: n = 1. O Teorema 2 *permite passar* de *um caso para o seguinte*. Assim, por exemplo, como a proposição vale para n = 1, **então**, podemos imediatamente concluir que ela também vale para n = 2 (Teorema 2). Fica, assim, provado que a proposição vale para n = 2, mas sem necessidade de uma nova verificação experimental. Retomando o raciocínio, temos: a proposição vale para n = 2, então vale também para n = 3 (Teorema 2). Percebe-se assim que, por aplicações sucessivas do Teorema 2, qualquer natural poderá ser atingido, sem necessidade de verificar experimentalmente.

Intuitivamente, o método pode ser entendido com um artifício muito simples: suponhamos que temos soldados de chumbo colocados em fila, que começa por um deles e prossegue indefinidamente:



Como podemos ter certeza de que, derrubando o primeiro deles, todos os soldados cairão?
Para isso, basta provar que:
1º) O primeiro soldado cai.
2º) Os soldados estão situados de tal modo que toda vez que um qualquer deles cai, automaticamente, golpeia e faz o soldado seguinte cair.

Assim, mesmo que a fila se estenda indefinidamente, podemos afirmar que todos os soldados vão cair.

2ª) É importante notar a **necessidade da demonstração dos dois Teoremas**: **1** e **2**. É claro que não basta o Teorema 1: a simples verificação de um caso particular é insuficiente.

Do mesmo modo, não basta a demonstração única do Teorema 2.

3ª) Na demonstração do Teorema 2, a *passagem* do caso n = k para o caso n = k + 1 é equivalente à *passagem* do caso n = k – 1 para o caso n = k.

Em cada problema escolhemos aquela que mais facilitar os cálculos algébricos.

4ª) Em alguns problemas a proposição dada é válida *a partir de um certo número natural* n_0. Nesse caso, o Teorema 1 é a verificação para $n = n_0$.

Exercícios Resolvidos

2.1) Prove que a soma dos n primeiros números inteiros e positivos é $\frac{n(n+1)}{2}$.

Solução

Devemos demonstrar que:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Teorema 1
Para n = 1 tem-se:
(1º membro) = 1
(2º membro) = $\frac{1\cdot 2}{2}=1$

Teorema 2
Hipótese: $1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$

Tese: $1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Somando aos dois membros da hipótese o número k + 1, obtemos:

$$\underbrace{1+2+3+\ldots+k+(k+1)}_{1^\circ \text{ membro da tese}}=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=$$

$$\underbrace{=(k+1)\cdot\left(\frac{k}{2}+1\right)=(k+1)\cdot\frac{k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}}_{2^\circ \text{ membro da tese}}$$

Observe que neste problema não foi necessário "adivinhar" a fórmula; ela foi dada no próprio enunciado.

2.2) Vamos escrever em ordem crescente os números ímpares positivos:

$$1, 3, 5, 7, \ldots$$

Chamemos o primeiro de μ_1, o segundo de μ_2, o terceiro de μ_3 etc...

$$\mu_1=1,\ \mu_2=3,\ \mu_3=5,\ \mu_4=7,\ \ldots$$

Surge, então, o seguinte problema: "encontrar uma fórmula para o número ímpar genérico μ_n, expresso em função de **n**".

Solução
Podemos escrever:

$$\mu_1 = 2\cdot 1-1$$
$$\mu_2 = 2\cdot 2-1$$
$$\mu_3 = 2\cdot 3-1$$

Se examinarmos cuidadosamente as três igualdades, seremos levados a crer que para se obter o *n-ésimo número ímpar*, μ_n, é preciso multiplicar **n** por 2 e subtrair 1:

$$\mu_n = 2n-1$$

Vamos provar que essa fórmula é verdadeira.

Teorema 1: A fórmula é válida para $n = 1$. De fato, vimos que $\mu_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ (é o primeiro ímpar positivo!)

Teorema 2: Hipótese: $\mu_k = 2k - 1$

Tese: $\mu_{k+1} = 2(k+1) - 1 = 2k + 1$

Somando 2 aos dois membros da hipótese:

$$\mu_k + 2 = (2k - 1) + 2$$

Observando que para se obter o ímpar μ_{k+1} basta somar 2 ao ímpar "anterior" μ_k tem-se na igualdade acima:

$$\mu_{k+1} = 2k + 1,$$

que é a tese.

2.3) Calcular a soma dos **n** primeiros números ímpares positivos:

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$$

Solução

Já existem fórmulas na Matemática que resolvem o problema acima. Entretanto, o nosso interesse não é usá-las, mas descobri-las através da indução. Para isso é necessário inicialmente estabelecer uma hipótese, isto é, simplesmente tentar "adivinhar" a resposta.
Dando valores particulares a **n** obtemos:

$S_1 = 1$
$S_2 = 1 + 3 = 4$
$S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$
$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$
$S_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

É fácil notar que $S_1 = 1^2$, $S_2 = 2^2$, $S_3 = 3^2$, $S_4 = 4^2$,... o que nos faz "acreditar" que em geral:

$$S_n = n^2$$

Vamos provar que esta fórmula é verdadeira.

Teorema 1: A fórmula é valida para $n = 1$:

$$S_1 = 1^2 = 1$$

Teorema 2: Hipótese: $S_k = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$

Tese: $S_{k+1} = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + \underbrace{[2(k+1) - 1]}_{2k+1} = (k+1)^2$

Somando aos dois membros da hipótese o número $[2(k + 1) - 1] = 2k + 1$ obtemos:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + [2(k+1) - 1]}_{1^\circ \text{ membro da tese}} = \underbrace{k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2}_{2^\circ \text{ membro da tese}}$$

2.4) Estudar, para $n \in \mathbb{N}^*$, a validade da desigualdade:

$$2^n > 2n + 1$$

Solução

Vamos examinar alguns casos particulares:

$n = 1 : 2^1 > 2 \cdot 1 + 1$, é falsa
$n = 2 : 2^2 > 2 \cdot 2 + 1$, é falsa
$n = 3 : 2^3 > 2 \cdot 3 + 1$, é válida
$n = 4 : 2^4 > 2 \cdot 4 + 1$, é válida

Somos levados a crer que a desigualdade é válida para $n \geq 3$. Vamos prová-la.

Teorema 1: Para $n = 3$ está verificado

Teorema 2: Hipótese: $2^k > 2k + 1$

Tese: $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$ ou $2^{k+1} > 2k + 3$

Multiplicando os dois membros da hipótese por 2:

$$2^k \cdot 2 > (2k + 1) \cdot 2$$
$$2^{k+1} > 4k + 2$$

Mas, $4k + 2 = (2k + 3) + (2k - 1)$, e como $2k - 1 > 0$, pois $k \geq 3$ tem-se:

$$4k + 2 > 2k + 3$$

Logo: $2^{k+1} > 2k + 3$

2.5) Demonstre que para todo n, $n \in \mathbb{N}^*$, o número:

$$A_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$$

é divisível por 133.

Solução

Teorema 1: Para $n = 1$

$A_1 = 11^3 + 12^3 = 3059 = 133 \cdot 23$

Teorema 2: Suponhamos que $A_k = 11^{k+2} + 12^{2k+1}$ seja divisível por 133. Vamos provar que $A_{k+1} = 11^{k+3} + 12^{2(k+1)+1}$ é tambem divisível por 133.

Temos:

$A_{k+1} = 11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11^{k+2} \cdot 11 + 12^{2k+1} \cdot 12^2$

Como $12^2 = 144 = 133 + 11$, segue-se que:

$A_{k+1} = 11^{k+2} \cdot 11 + 12^{2k+1} \cdot (133 + 11) = 11^{k+2} \cdot 11 + 12^{2k+1} \cdot 11 + 12^{2k+1} \cdot 133 =$

$= 11 \cdot \underbrace{[11^{k+2} + 12^{2k+1}]}_{\text{divisível por 133 por hipótese.}} + 12^{2k+1} \cdot 133$

As duas parcelas são divisíveis por 133, e daí a tese.

Exercícios Propostos

Para $n \in \mathbb{N}^*$, nos exercícios de 2.6 a 2.12, prove as proposições indicadas:

2.6) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$

2.7) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2.8) $1 + 5 + 14 + \ldots + \dfrac{(n-4)(n-3)(2n-7)}{6} = \dfrac{(n-4)(n-3)^2(n-2)}{12}$ $(n \geq 5)$

2.9) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n + 1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

2.10) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

2.11) $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{n(n+1)}{2}$

2.12) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \ldots + \dfrac{n}{2^n} = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$

2.13) Ache a *expressão geral* dos números x_n, sabendo-se que $x_1 = 1$ e que para todo natural p, $p > 1$, $x_p = x_{p-1} \cdot 2$. Com a Indução Matemática, demonstre a validade da resposta.

2.14) Estude a validade da desigualdade: $2^n > n^2$.

2.15) **Desigualdade de Bernoulli**. Sendo $a > -1$ e **n** inteiro positivo prove que:

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

2.16) Se $n \in \mathbb{N}^*$ demonstre que $10^n - 1$ é divisível por 9.

2.17) Se $n \in \mathbb{N}^*$ demonstre que $n^3 + 5n$ é divisível por 6.

2.18) Se $n \in \mathbb{N}^*$ demonstre que $2^{2n-1} \cdot 3^{n+2} + 1$ é divisível por 11.

Exercícios Suplementares

I.1) Os números reais **a** e **b** são positivos; **m**, **n**, **p**, **r** e **q** são números inteiros. Simplifique a expressão:

$$y = \frac{\left[\left(a^m\right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{q}{n}}\right]^{nr}}{\left[\sqrt[q]{b^m} \cdot \left(\sqrt[m]{b}\right)^r\right]^{mq}} \div \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{-p}\right]^r$$

I.2) Sejam a, b, c, x, y e z números reais positivos, dos quais a, b e e são inteiros. Demonstre que se b é **média aritmética** entre **a** e **c**, e **y** é **média geométrica** entre **x** e **z** então:

$$x^b \cdot y^c \cdot z^a = x^c \cdot y^a \cdot z^b$$

I.3) Calcule o valor da expressão $y = \dfrac{(x-1)\sqrt{3}}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$ para:

a) $x = 2 + \sqrt{3}$

b) $x = 2 - \sqrt{3}$

I.4) Considere a expressão $y = \sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2}$. Quais são as diferentes formas que ela pode assumir segundo os valores de x?

I.5) Racionalize o denominador da fração $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}}$.

I.6) Se $g(x) = \sqrt{x}$, prove que $\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$ para $x > 0$, $a > 0$ e $x \neq a$.

I.7) As raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são α e β. Para $n \in \mathbb{N}^*$ toma-se: $S_n = \alpha^n + \beta^n$.
Demonstre que $a \cdot S_{n+2} + b \cdot S_{n+1} + c \cdot S_n = 0$

I.8) Para $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \geq 2$ prove que: $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$

I.9) Demonstre que $\dfrac{1}{2}\left[a^n + b^n\right] \geq \left[\dfrac{1}{2}(a+b)\right]^n$, para $n \in \mathbb{N}^*$, com **a** e **b** positivos.

I.10) Traçando **n** retas em um plano, não se pode dividi-lo em mais do que 2^n "partes". Demonstre.

I.11) Para todo n em $\mathbb{N}$, $n \geq 2$, prove que:

$$\frac{2^2-1}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{3^2} \cdot \frac{4^2-1}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{n+1}{2n}$$

I.12) Estude a validade da desigualdade: $n^3 < 2^n$.

PARTE II

Capítulo

3

Sequências

3.1. INTRODUÇÃO

Neste item apresentaremos de modo informal o conceito de *sequência*. Mais adiante definiremos sequência como sendo um tipo especial de função.

É comum necessitarmos colocar "em uma certa ordem" os elementos de um conjunto. Com essa "ordenação" obtemos o que se denomina uma **sucessão** ou uma **sequência**.

Por exemplo, os dias da semana poderiam ser ordenados assim:

segunda-feira	1º dia
terça-feira	2º dia
quarta-feira	3º dia
quinta-feira	4º dia
sexta-feira	5º dia
sábado	6º dia
domingo	7º dia

Embora uma sequência possa ser formada por elementos quaisquer, neste livro vamos nos interessar apenas por sequências de *números reais*.

Exemplos

a) Consideremos a sequência $\left(10; -8; \sqrt{2}; 5; \frac{7}{3}\right)$

Podemos dizer que:

primeiro termo é 10
o segundo termo é -8
o terceiro termo é $\sqrt{2}$
o quarto termo é 5
o quinto termo é $\frac{7}{3}$.

Repare que para representar a sequência, colocamos seus elementos entre parênteses.

b) A sequência (3; 7; 8) é diferente da sequência (8; 3; 7) pois, embora sejam formadas pelos mesmos elementos, eles estão em *ordens diferentes*.

É usual representar o i-ésimo termo de uma sequência por a_i (ou b_i ou c_i etc). Assim:

a_1 representa o primeiro termo
a_2 representa o segundo termo
a_3 representa o terceiro termo e assim por diante.

Exemplo

Na sequência $(4 ; -2 ; \pi ; 0)$ temos:

$$a_1 = 4,\ a_2 = -2,\ a_3 = \pi,\ a_4 = 0$$

Os exemplos que demos até agora são de sequências **finitas**, isto é, têm um número finito de termos. Mas podemos ter também sequências infinitas, isto é, sequências que têm número infinito de termos.

Consideremos por exemplo, a sequência dos números naturais pares, ordenados em ordem crescente.

$$(0; 2; 4; 6; 8; \ldots)$$

Esta é uma *sequência infinita.*

3.2. FUNÇÃO

Vamos lembrar neste item o conceito de função.

Consideremos dois conjuntos não vazios **A** e **B**. Uma **função de A em B** é um conjunto f de pares ordenados (x; y), com $x \in A$ e $y \in B$, satisfazendo a condição:

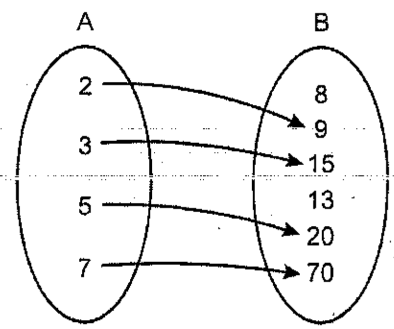
para cada elemento $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $(x; y) \in f$

Exemplos

a) Sejam os conjuntos
$A = \{2; 3; 5; 7\}$ e $B = \{8; 9; 15; 13; 20; 70\}$.
Consideremos o seguinte conjunto de pares ordenados:

$$f = \{(2; 9); (3; 15); (5; 20); (7; 70)\}$$

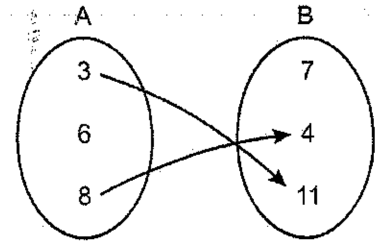
Este conjunto pode ser representado por um *diagrama de flechas*, como vemos ao lado. O conjunto f é uma **função de A em B**, pois cada elemento de A está *relacionado* com um **único** elemento de B. No conjunto A não pode "sobrar" elemento sem correspondente em B, enquanto que em B pode "sobrar" elemento sem correspondente em A (no nosso exemplo "sobram" em B os números 8 e 13).



b) Consideremos os conjuntos
$A = \{3; 6; 8\}$ e $B = \{7; 4; 11\}$.
Seja o conjunto

$$f = \{(3; 11); (8; 4)\}.$$

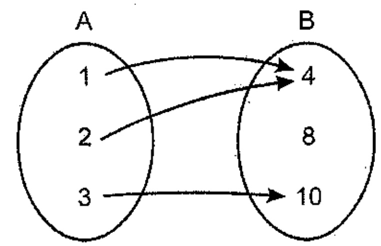
O conjunto **f não** é uma função de A em B pois "sobra" no conjunto A o elemento 6 sem correspondente em B.



c) Sendo $A = \{1; 2; 3\}$ e $B = \{4; 8; 10\}$ considere o seguinte conjunto g:

$$g = \{(1, 4); (2; 4); (3; 10)\}$$

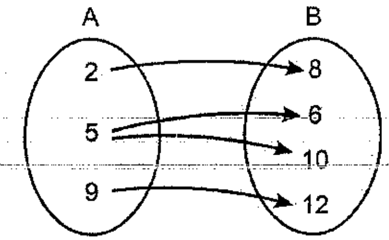
O conjunto g é uma função de A em B. O fato de haver dois elementos de A (os números 1 e 2) com o mesmo correspondente em B (o número 4) não contradiz a nossa definição.



d) Sendo $A = \{2; 5; 9\}$ e $B = \{8; 6; 10; 12\}$ consideremos o conjunto:

$$h = \{(2; 8); (5; 6); (5; 10); (9; 12)\}$$

O conjunto h **não** é uma função de A em B, pois há um elemento de A (o número 5) que está em correspondência com dois elementos distintos de B (os números 6 e 10) e, de acordo com a definição de função, a cada elemento de A deve corresponder um **único** elemento de B.



Observações

Consideremos uma função f de A em B. Temos:

1ª) o conjunto A é chamado de **domínio de f**, sendo representado por

$$D(f)$$

2ª) o conjunto B é chamado de **contradomínio de f**, sendo indicado por

$$CD(f)$$

3ª) se o par ordenado (x; y) pertence à função f dizemos que **y é a imagem de x pela função f** e escrevemos:

$$y = f(x)$$

4ª) o conjunto de todos os elementos de B que são imagens de algum elemento de A é chamado **conjunto-imagem de f** e é indicado por:

$$I(f)$$

5ª) algumas notações usadas para dizer que f é uma função de A em B são:

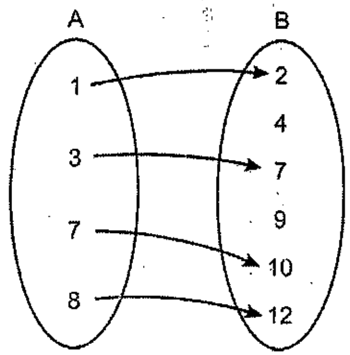
$$f : A \longrightarrow B$$

$$A \xrightarrow{f} B$$

Exemplo

Consideremos os conjuntos A = {1; 3; 7; 8} e B = {2; 4; 7; 9; 10; 12} e seja a função f de A em B:

$$f = \{(1; 2); (3; 7); (7; 10); (8; 12)\}$$



O domínio de f é: D(f) = {1; 3; 7; 8} = A
O contradomínio de f é: CD(f) = {2; 4; 7; 9; 10; 12} = B
O conjunto-imagem de f é: I(f) = {2; 7; 10; 12}
Para dizermos que a imagem de 1 é 2 escrevemos:

$$f(1) = 2$$

Se quisermos dizer que a imagem de 3 é 7 escrevemos:

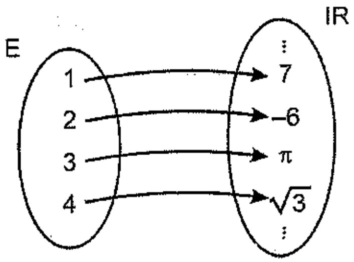
$$f(3) = 7$$

3.3. SEQUÊNCIA FINITA

Consideremos o conjunto E = {1; 2; 3; ...; k} também indicado por $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \geq n \geq k\}$. Chamamos de **sequência finita** qualquer função de E em $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais e $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais).

Exemplo

Consideremos o conjunto E = {1; 2; 3; 4} e a função f dada pelo diagrama de flechas:



$f(1) = 7$
$f(2) = -6$
$f(3) = \pi$
$f(4) = \sqrt{3}$

Esta função é uma sequência finita.
Podemos também usar a notação dada no item 3.1 e escrever:

$$f_1 = 7,\ f_2 = -6,\ f_3 = \pi,\ f_4 = \sqrt{3}$$

Consideremos uma sequência **f** de domínio E = {1; 2; 3;...; k}. Podemos representá-la por

$$(f(1); f(2); f(3); \ldots ; f(k))$$

ou então por $(f_n)_{n \in E}$

ou ainda por $(f_n)_{1 \leq n \leq k}$

onde $\mathbf{f_n}$ é o **termo geral**

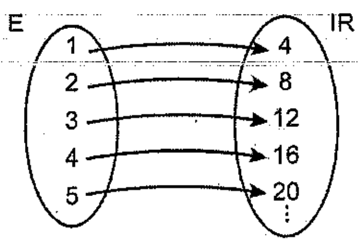
As *imagens* costumam ser chamadas de *termos* da sequência e diremos que:

f(1) é o 1º termo
f(2) é o 2º termo
f(3) é o 3º termo
etc.

No lugar de f(1), f(2), f(3), ... podemos escrever f_1, f_2, f_3, ...

Exemplo

Seja E = {1; 2; 3; 4; 5} e a função a de E em $\mathbb{R}$ dada por a(x) = 4x



$a(1) = 4(1) = 4$
$a(2) = 4(2) = 8$
$a(3) = 4(3) = 12$
$a(4) = 4(4) = 16$
$a(5) = 4(5) = 20$

Esta função é uma sequência finita que poderá ser representada por

$$(4;\ 8;\ 12;\ 16;\ 20)$$

Podemos também escrever:
$a_1 = 4$
$a_2 = 8$
$a_3 = 12$
$a_4 = 16$
$a_5 = 20$

Esta sequência tem 5 termos onde
4 é o primeiro termo
8 é o segundo termo
12 é o terceiro termo
16 é o quarto termo
20 é o quinto termo

Consideremos a sequência

$$(a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_k;\ \ldots;\ a_p;\ \ldots\ldots\ a_n)$$

Onde a_k, a_{k+1}, $a_{k+2}, \ldots$, a_p são termos consecutivos.

Em certos casos será útil, observar que, de a_k até a_p, o total de termos (contando com a_k e a_p) é igual a

$$p - k + 1 \qquad (3.1)$$

Exemplos

a) $\underbrace{a_3;\ a_4;\ a_5;\ a_6;\ a_7;\ a_8}_{6\ \text{termos}}$ $\qquad 6 = 8 - 3 + 1$

b) $\underbrace{a_{20};\ a_{21};\ a_{22};\ a_{23};\ a_{24}}_{5\ \text{termos}}$ $\qquad 5 = 24 - 20 + 1$

3.4. MEIOS E EXTREMOS

Consideremos a sequência finita

$$(a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_n)$$

Os termos $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{a_n}$ são chamados **extremos** da sequência; os outros termos são chamados de **meios**.

Dois termos são **equidistantes dos extremos** quando o número de termos que antecedem um deles é igual ao número de termos que sucedem o outro.

Exemplo

Consideremos a sequência

$$(a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5;\ a_6;\ a_7;\ a_8;\ a_9)$$

a_1 e a_9 são os extremos
a_2 e a_8 são equidistantes dos extremos
a_3 e a_7 são equidistantes dos extremos
a_4 e a_6 são equidistantes dos extremos

Suponhamos que a_k e a_p sejam termos equidistantes dos extremos da sequência finita:

$$(a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_k;\ldots;\ a_p\ldots;\ a_n)$$

Então devemos ter (de acordo com a fórmula 3.1)

$$k - 1 + 1 = n - p + 1$$

isto é,

$$k + p = n + 1 \qquad (3.2)$$

Assim, no exemplo anterior, a_3 e a_7 são termos equidistantes dos extremos a_1 e a_9. Temos então: $3 + 7 = 1 + 9$

3.5. SEQUÊNCIA INFINITA

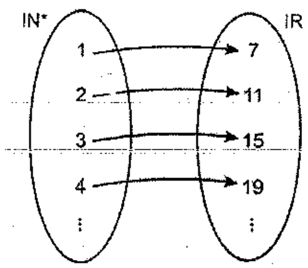
Seja $\mathbb{N}^*$ o conjunto dos números naturais diferentes de zero:

$$\mathbb{N}^* = \{1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$$

Chamamos de **sequência infinita** qualquer função de $\mathbb{N}^*$ em $\mathbb{R}$.

Exemplo

Consideremos a função de $\mathbb{N}^*$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(n) = 4n + 3$



$f(1) = 4(1) + 3 = 7$
$f(2) = 4(2) + 3 = 11$
$f(3) = 4(3) + 3 = 15$
$f(4) = 4(4) + 3 = 19$

Esta é uma sequência infinita que pode ser representada por

$$(7;\ 11;\ 15;\ 19;\ ...)$$

Dada uma sequência infinita f podemos representá-la por

$$(f_1;\ f_2;\ f_3;\ ...)$$

ou por

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

ou simplesmente por: (f_n), onde f_n é o **termo geral**.

3.6. RECORRÊNCIA

Para determinarmos uma sequência, além dos processos apresentados nos exemplos anteriores, podemos usar o processo de **recorrência**. Tal processo consiste em dar o primeiro termo (ou os primeiros) e uma sentença aberta que permita calcular cada termo em função do anterior (ou dos anteriores).

Exemplos

a) Consideremos a sequência infinita tal que $a_1 = 5$ e para todo $n > 1$ tem-se

$$a_n = a_{n-1} + 3$$

Vemos que cada termo a_n da sequência é igual ao anterior a_{n-1} somado com 3.

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8 \\ a_2 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11 \\ a_4 = a_3 + 3 = 11 + 3 = 14 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Portanto, a sequência pode ser representada por:

$$(5;\ 8;\ 11;\ 14;\ ...)$$

b) Consideremos a sequência f de domínio E = {1; 2; 3; 4; 5; 6) tal que $f_1 = 3$, $f_2 = 7$ e cada termo, a patir do terceiro, é igual à soma dos anteriores. Temos:

$$\begin{cases} f_3 = f_1 + f_2 = 3 + 7 = 10 \\ f_4 = f_1 + f_2 + f_3 = 3 + 7 + 10 = 20 \\ f_5 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 3 + 7 + 10 + 20 = 40 \\ f_6 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 3 + 7 + 10 + 20 + 40 = 80 \end{cases}$$

Assim a sequência é: (3; 7; 10; 20; 40; 80)

c) Seja a sequência infinita tal que:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad (n \geq 3) \end{cases}$$

Vemos que cada termo dessa sequência (a partir do terceiro) é igual à soma dos dois anteriores:

$$\begin{cases} a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2 \\ a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3 \\ a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5 \\ a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Temos então: (1; 1; 2; 3; 5; 8;...)

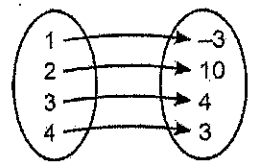
Esta sequência é chamada **sequência de Fibonacci** e tem importantes propriedades. "Fibonacci" é o nome pelo qual ficou conhecido um importante matemático chamado Leonardo de Pisa, que viveu entre 1180 e 1250 aproximadamente. ("Fibonacci" significa filho de Bonaccio.)

Exercícios Resolvidos

3.1) Consideremos a sequência

$$(a_n)\ 1 \leq n \leq 4$$

definida pelo diagrama abaixo:



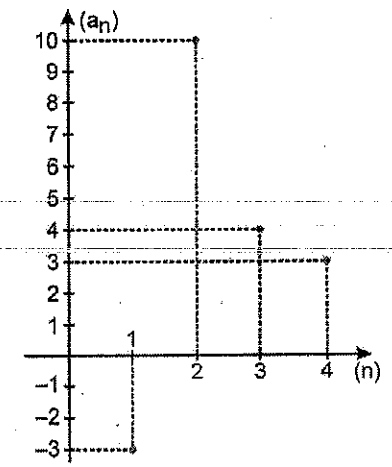
Esboce o gráfico dessa sequência.

Solução

Os pares ordenados que formam a sequência são:

$$(1;\ -3);\ (2;\ 10);\ (3;\ 4);\ (4;\ 3)$$

Representemos esses pares num sistema de coordenadas cartesianas.



3.2) Escreva os 4 primeiros termos das sequências infinitas dadas por:

a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

b) $a_n = (-1)^n$

c) $b_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+2}$

Solução

a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

$a_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

$a_2 = \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3}$ $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{4}{5}; \ldots\right)$

$a_3 = \dfrac{3}{3+1} = \dfrac{3}{4}$

$a_4 = \dfrac{4}{4+1} = \dfrac{4}{5}$

b) $a_n = (-1)^n$

$a_1 = (-1)^1 = -1$

$a_2 = (-1)^2 = +1$ $(-1; 1; -1; 1; \ldots)$

$a_3 = (-1)^3 = -1$

$a_4 = (-1)^4 = +1$

c) $b_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+2}$

$b_1 = (-1)^1 \dfrac{1}{1+2} = -\dfrac{1}{3}$

$b_2 = (-1)^2 \dfrac{2}{2+2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ $\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{5}; \dfrac{2}{3}; \ldots\right)$

$b_3 = (-1)^3 \dfrac{3}{3+2} = -\dfrac{3}{5}$

$b_4 = (-1)^4 \dfrac{4}{4+2} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

3.3) Escreva os 5 primeiros termos das sequências infinitas definidas por:

a) $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} + 2n & (n \geq 2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_n = 2a_{n-1} + 4 & (n \geq 2) \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \\ a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n \geq 3) \end{cases}$

Solução

a) $a_1 = 4$

$a_n = a_{n-1} + 2n$

$a_2 = a_1 + 2(2) = 4 + 4 = 8$

$a_3 = a_2 + 2(3) = 8 + 6 = 14$

$a_4 = a_3 + 2(4) = 14 + 8 = 22$

$a_5 = a_4 + 2(5) = 22 + 10 = 32$

$(4; 8; 14; 22; 32; \ldots)$

b) $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_n = 2a_{n-1} + 4 \end{cases}$

$a_2 = 2a_1 + 4 = 2(-3) + 4 = -2$

$a_3 = 2a_2 + 4 = 2(-2) + 4 = 0$

$a_4 = 2a_3 + 4 = 2(0) + 4 = 4$

$a_5 = 2a_4 + 4 = 2(4) + 4 = 12$

$(-3; -2; 0; 4; 12; \ldots)$

c) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \\ a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \end{cases}$

$a_3 = 2a_2 + 3a_1 = 2(3) + 3(2) = 12$

$a_4 = 2a_3 + 3a_2 = 2(12) + 3(3) = 33$

$a_5 = 2a_4 + 3a_3 = 2(33) + 3(12) = 102$

$(2; 3; 12; 33; 102; \ldots)$

3.4) Seja a sequência infinita cujo termo geral é

$$a_n = 3n - 4$$

determine:

a) a_8

b) a_{k+1}

c) a_{3k-1}

Solução

a) $a_8 = 3(8) - 4 = 24 - 4 = 20$

b) $a_{k+1} = 3(k+1) - 4 = 3k + 3 - 4 = 3k - 1$

c) $a_{3k-1} = 3(3k-1) - 4 = 9k - 3 - 4 = 9k - 7$

3.5) Dê os termos gerais das seguintes sequências:

a) $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{4}{5}; \dfrac{5}{6}; \ldots\right)$

b) $(2; 4; 6; 8; 10; 12; \ldots)$

c) $(2; 4; 8; 16; 32; 64; \ldots)$

d) $(1; 3; 5; 7; 9; 11; \ldots)$

e) $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{5}{6}; \dfrac{7}{8}; \dfrac{9}{10}; \ldots\right)$

f) $(1^3; 3^5; 5^7; 7^9; 9^{11}; \ldots)$

g) $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{4}; \dfrac{3}{8}; \dfrac{4}{16}; \dfrac{5}{32}; \ldots\right)$

Solução

a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

b) $a_n = 2n$

c) $a_n = 2^n$

d) $a_n = 2n - 1$

e) $a_n = \dfrac{2n-1}{2n}$

f) $a_n = (2n-1)^{2n+1}$

g) $a_n = \dfrac{n}{2^n}$

3.6) Considere a sequência infinita dada por

$$\therefore\ a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

a) Escreva os 4 primeiros termos dessa sequência.

b) Determine as constantes **a** e **b** tais que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

c) Calcule o valor da soma

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Solução

a) $a_1 = \dfrac{1}{(2-1)(2+1)} = \dfrac{1}{(1)(3)} = \dfrac{1}{3}$

$a_2 = \dfrac{1}{(4-1)(4+1)} = \dfrac{1}{(3)(5)} = \dfrac{1}{15}$

$a_3 = \dfrac{1}{(6-1)(6+1)} = \dfrac{1}{(5)(7)} = \dfrac{1}{35}$

$a_4 = \dfrac{1}{(8-1)(8+1)} = \dfrac{1}{(7)(9)} = \dfrac{1}{63}$

Assim, a sequência é:

$$\left(\frac{1}{1\cdot 3}; \frac{1}{3\cdot 5}; \frac{1}{5\cdot 7}; \frac{1}{7\cdot 9}; \ldots\right) \text{ ou } \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{15}; \frac{1}{35}; \frac{1}{63}; \ldots\right)$$

b) $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{a}{(2n-1)} + \dfrac{b}{(2n+1)} = \dfrac{a(2n+1)+b(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} =$

$= \dfrac{2na+a+2nb-b}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{(2a+2b)n+(a-b)}{(2n-1)(2n+1)}$

Para todo $n \in \mathbb{N}^*$ devemos ter então:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{(2a+2b)n+(a-b)}{(2n-1)(2n+1)}$$

Assim:

$$\begin{cases} 2a+2b=0 \\ a-b=1 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema obtemos $a = \dfrac{1}{2}$ e $b = -\dfrac{1}{2}$

Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ vale:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1}$$

c) Queremos calcular $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, isto é:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

Usando o resultado do item b, podemos escrever:

$$\oplus\begin{cases} \dfrac{1}{1\cdot 3} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} - \cancel{\dfrac{\frac{1}{2}}{3}} \\ \dfrac{1}{3\cdot 5} = \cancel{\dfrac{\frac{1}{2}}{3}} - \cancel{\dfrac{\frac{1}{2}}{5}} \\ \dfrac{1}{5\cdot 7} = \cancel{\dfrac{\frac{1}{2}}{5}} - \cancel{\dfrac{\frac{1}{2}}{7}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \cancel{\dfrac{\frac{1}{2}}{2n-1}} - \dfrac{\frac{1}{2}}{2n+1} \end{cases}$$

Adicionando membro a membro essas igualdades, vários termos vão se cancelar, e ficaremos com:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} = \frac{\frac{1}{2}(2n+1) - \frac{1}{2}}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}$$

3.7) Considere a sequência infinita definida por:

$$a_n = n^2$$

e seja (b_n) uma sequência dada por:

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

a) Escreva os 6 primeiros termos de (a_n).

b) Escreva os 5 primeiros termos de (b_n).

c) Dê a fórmula do termo geral de (b_n) em função de n.

Solução

a) $a_n = n^2$
$a_1 = (1)^2 = 1$
$a_2 = (2)^2 = 4$
$a_3 = 3^2 = 9$
$a_4 = 4^2 = 16$
$a_5 = 5^2 = 25$
$a_6 = 6^2 = 36$
$(a_n) = (1; 4; 9; 16; 25; 36; ...)$

b) $b_n = a_{n+1} - a_n$
$b_1 = a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$
$b_2 = a_3 - a_2 = 9 - 4 = 5$
$b_3 = a_4 - a_3 = 16 - 9 = 7$
$b_4 = a_5 - a_4 = 25 - 16 = 9$
$b_5 = a_6 - a_5 = 36 - 25 = 11$
$(b_n) = (3; 5; 7; 9; 11; ...)$

c) $b_n = a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$
$b_n = 2n + 1$

3.8) Consideremos as sequências infinitas (a_n) e (b_n) dadas por:

$$\begin{cases} a_n = 4n - 1 \\ b_n = 2n \end{cases}$$

e seja (c_n) a sequência infinita dada por

$$c_n = a_{b_n}$$

a) Escreva os 8 primeiros termos de (a_n).
b) Escreva os 4 primeiros termos de (b_n).
c) Escreva os 4 primeiros termos de (c_n).
d) Dê o termo geral de (c_n) em função de **n**.

Solução

a) $a_n = 4n - 1$
$a_1 = 4(1) - 1 = 3$
$a_2 = 4(2) - 1 = 7$
$a_3 = 4(3) - 1 = 11$
$a_4 = 4(4) - 1 = 15$
$a_5 = 4(5) - 1 = 19$
$a_6 = 4(6) - 1 = 23$
$a_7 = 4(7) - 1 = 27$
$a_8 = 4(8) - 1 = 31$
$(a_n) = (3; 7; 11; 15; 19; 23; 27; 31;...)$

b) $b_n = 2n$
$b_1 = 2(1) = 2$
$b_2 = 2(2) = 4$
$b_3 = 2(3) = 6$
$b_4 = 2(4) = 8$
$(b_n) = (2; 4; 6; 8; ...)$

c) $c_n = a_{b_n}$
$c_1 = a_{b_1} = a_2 = 7$
$c_2 = a_{b_2} = a_4 = 15$
$c_3 = a_{b_3} = a_6 = 23$
$c_4 = a_{b_4} = a_8 = 31$
$(c_n) = (7; 15; 23; 31;...)$

d) $c_n = a_{b_n} = a_{2n}$
$a_n = 4n - 1 \Rightarrow a_{2n} = 4(2n) - 1 = 8n - 1$
Assim:
$c_n = a_{2n} = 8n - 1$
$c_n = 8n - 1$

3.9) Em um exemplo do item 3.6 mencionamos a **sequência de Fibonacci**, a qual é dada por:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \qquad\qquad n \geq 3 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

Usando o **método da Indução Matemática** demonstre que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Solução

Teorema 1: Façamos, em primeiro lugar, a verificação para n = 1 e n = 2

$$a_1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

$$a_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\frac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

Teorema 2: Vamos agora admitir que a fórmula vale para n = k e n = k + 1 e tentar demonstrar que isso implica no fato da fórmula ser verdadeira para n = k + 2.

Supondo então que a fórmula vale para n = k e n = k + 1, temos:

$$a_k = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad a_{k+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt{5}}$$

Pela definição da sequência de Fibonacci temos

$$a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$$

Assim:

$$a_{k+2} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}}$$

É fácil observar que

$$\begin{cases} \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

e portanto:

$$a_{k+2} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}}{\sqrt{5}}$$

Assim concluímos que a fórmul · vale para n = k + 2.

Exercícios Propostos

3.10) Dê os 5 primeiros termos das sequências infinitas dadas por:

a) $a_n = 3n$
b) $a_n = 2n - 1$
c) $a_n = 2n + 1$
d) $a_n = 2n$
e) $a_n = 2n + 6$
f) $a_n = \frac{4n-1}{5n+2}$

3.11) Dê os 6 primeiros termos das sequências infinitas dadas por:

a) $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_n = 3a_{n-1} + 2 \end{cases} \quad (n \geq 2)$

b) $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = 5 \\ a = a_{n-1} + 2a_{n-2} \end{cases} \quad (n \geq 3)$

c) $a_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

3.12) Consideremos a sequência (a_n) dada por:

$$a_n = \frac{3}{4}n - 1$$

Determine:
a) a_5
b) a_{k+4}
c) a_{2k}

3.13) Seja a sequência de domínio E = {1; 2; 3; 4} dada por

$$a_n = n - 2$$

Faça o gráfico dessa sequência.

3.14) Consideremos a sequência (a_n) dada por $a_n = 2n + 3$ e seja (b_n) dada por

$$b_n = 5a_n + 3a_{n+1}$$

Dê o termo geral b_n em função de **n**.

3.15) Considere as sequências (a_n), (b_n) e (c_n) definidas por:

$$\begin{cases} a_n = 2n + 4 \\ b_n = a_n^2 \\ c_n = b_{n+1} - b_n \end{cases}$$

a) Dê a fórmula do termo geral de (b_n) em função de n.
b) Dê a fórmula do termo geral de (c_n) em função de n.

3.16) Uma sequência infinita tem termo geral dado por

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

a) Escreva os 4 primeiros termos da sequência.
b) Determine as constantes a e b tais que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$$

c) Dê a fórmula da soma dos **n** primeiros termos dessa sequência, em função de **n** (sugestão: veja o problema 3.6).

3.17) Dê as fórmulas dos termos gerais das seguintes sequências:

a) (4; 6; 8; 10; 12;...)
b) (10; 12; 14; 16; 18; 20;...)
c) (3; 5; 7; 9; 11;...)
d) (9; 11; 13; 15; 17;...)
e) $\left(\frac{7}{4}; \frac{9}{6}; \frac{11}{8}; \frac{13}{10}; \ldots\right)$
f) $(1^2; 2^3; 3^4; 4^5; 5^6; \ldots)$

3.18) Consideremos as sequências (a_n) e (b_n) dadas por

$$\begin{cases} a_n = 3n + 2 \\ b_n = 2n - 1 \end{cases}$$

e seja (c_n) a sequência dada por $c_n = b_{a_n}$

a) Dê a fórmula do termo geral de (c_n) em função de n.
b) Escreva os 4 primeiros termos de (c_n).

3.7. SOMATÓRIO

Em certos casos podemos abreviar a escrita de uma soma usando o símbolo Σ (é a letra grega "sigma", que corresponde à letra S do nosso alfabeto, sugerindo assim a palavra "soma"), que é chamado **símbolo de somatório**. A maneira de se usar esse símbolo será vista nos exemplos seguintes.

Exemplos

a) $\sum_{i=1}^{4} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

b) $\sum_{i=3}^{7} a_i = a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$

c) $\sum_{i=1}^{5} 7i = 7(1) + 7(2) + 7(3) + 7(4) + 7(5)$

d) $\sum_{i=0}^{2} (4i - 7) = [4(0) - 7] + [4(1) - 7] + [4(2) - 7]$

De modo geral, sendo k e n números naturais com $k \le n$, o símbolo

$$\boxed{\sum_{i=k}^{n} a_i}$$

representa a soma: $a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n$
e lemos assim:

"somatório dos a_i, com **i** variando de **k** a **n**".

Os números **k** e **n** são chamados **limites do somatório** e é fácil verificar que o número de termos de $\sum_{i=k}^{n} a_i$ é igual a $n - k + 1$.

Exemplo

Consideremos o somatório $\sum_{i=2}^{7} a_i$

Lemos assim:

"somatório dos a_i para **i** variando de **2** a **7**".

Os limites do somatório são 2 e 7. Fazendo o desenvolvimento,

$$\sum_{i=2}^{7} a_i = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$$

observamos que há 6 termos, isto é, o número de termos é 7 – 2 + 1.

Propriedades

a) $$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i} \qquad (3.3)$$

De fato:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) =$$
$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

b) $$\boxed{\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i} \qquad (3.4)$$

De fato:

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Caso Especial

Sendo a uma constante, temos:

$$\sum_{i=1}^{n} a = n \cdot a$$

Exemplos

a) $\sum_{i=1}^{3} a = a + a + a = 3a$

b) $\sum_{i=1}^{3} (5i+2) = \sum_{i=1}^{3} 5i + \sum_{i=1}^{3} 2 = 5\sum_{i=1}^{3} i + 3(2) =$

$= 5(1+2+3) + 3(2) = 5(6) + 3(2) = 36$

3.8. PRODUTÓRIO

Sejam **k** e **n** números naturais com $k \le n$. O símbolo

$$\prod_{i=k}^{n} a_i$$

representa o produto

$$a_k \cdot a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_n$$

Exemplos

a) $\prod_{i=1}^{4} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$

b) $\prod_{i=2}^{7} a_i = a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7$

O símbolo Π é chamado **símbolo de produtório** (Π é a letra grega "pi" maiúscula).

Propriedades

a) $\boxed{\prod_{i=1}^{n} (a_i b_i) = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i}$ (3.5)

De fato:

$$\prod_{i=1}^{n} (a_i b_i) = (a_1 b_1) \cdot (a_2 b_2) \cdot \ldots \cdot (a_n b_n) =$$

$$= (a_1 a_2 \ldots a_n)(b_1 b_2 \ldots b_n) = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i$$

b) $\boxed{\prod_{i=1}^{n} c a_i = c^n \prod_{i=1}^{n} a_i}$ (3.6)

De fato:

$$\prod_{i=1}^{n} c a_i = (ca_1)(ca_2)\ldots(ca_n) =$$

$$= \underbrace{(c \cdot c \cdot \ldots c)}_{\text{n fatores}}(a_1 \cdot a_2 \ldots a_n) = c^n \prod_{i=1}^{n} a_i$$

Caso Especial

Sendo c uma constante temos:

$$\prod_{i=1}^{n} c = c^n$$

Exemplo

$$\prod_{i=1}^{4} c = c \cdot c \cdot c \cdot c = c^4$$

Exercícios Resolvidos

3.19) Desenvolva os somatórios:

a) $\sum_{i=1}^{5} b_i$

b) $\sum_{j=1}^{3} a_j$

c) $\sum_{i=3}^{6} (9i)$

d) $\sum_{i=0}^{3} (6i+2)$

e) $\sum_{k=1}^{5} 2^k (-1)^{k+1}$

Solução

a) $\sum_{i=1}^{5} b_i = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$

b) $\sum_{j=1}^{3} a_j = a_1 + a_2 + a_3$

c) $\sum_{i=3}^{6} (9i) = 9(3) + 9(4) + 9(5) + 9(6)$

d) $\sum_{i=0}^{3} (6i+2) = [6(0)+2] + [6(1)+2] + [6(2)+2] + [6(3)+2]$

e) $\sum_{k=1}^{5} 2^k (-1)^{k+1} = 2^1(-1)^2 + 2^2(-1)^3 + 2^3(-1)^4 + 2^4(-1)^5 + 2^5(-1)^6$

3.20) Calcule:

a) $\sum_{i=0}^{3}\left[(-1)^i + 2^{i+1}\right]$

b) $\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$

Solução

a) $\sum_{i=0}^{3}\left[(-1)^i + 2^{i+1}\right] = \left[(-1)^0 + 2^1\right] + \left[(-1)^1 + 2^2\right] + \left[(-1)^2 + 2^3\right] + \left[(-1)^3 + 2^4\right] =$

$= (1 + 2) + (-1 + 4) + (1 + 8) + (-1 + 16) =$

$= (3) + (3) + (9) + (15) = 30$

b) $\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{64} =$

$= \frac{64 + 16 + 4 + 1}{64} = \frac{85}{64}$

3.21) Represente as expressões abaixo usando o símbolo de somatório:

a) $2 + 4 + 6 + 8 + 10$

b) $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$

c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

d) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$

Solução

a) $\sum_{i=1}^{5}(2i)$

b) $\sum_{i=1}^{6}2^i$

c) $\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^i$

d) $\sum_{i=1}^{6}(2i-1)$

3.22) Desenvolva os produtórios:

a) $\prod_{i=4}^{9}a_i$ b) $\prod_{i=4}^{7}(3i)$

Solução

a) $\prod_{i=4}^{9}a_i = a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 \cdot a_9$

b) $\prod_{i=4}^{7}(3i) = (3\cdot 4)(3\cdot 5)(3\cdot 6)(3\cdot 7)$

Exercícios Propostos

3.23) Desenvolva os somatórios:

a) $\sum_{i=1}^{4}5i$

b) $\sum_{k=3}^{8}3^k$

c) $\sum_{k=4}^{9}\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}$

3.24) Calcule:

a) $\sum_{i=1}^{5}(3i-6)$

b) $\sum_{k=0}^{4}(-1)^k 2^{k+1}$

3.25) Desenvolva os produtórios:

a) $\prod_{j=1}^{3}8^j$

b) $\prod_{i=3}^{6}\frac{4i}{i+1}$

3.26) Represente as expressões abaixo usando os símbolos de somatório ou produtório:

a) $4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24$

b) $3 + 7 + 11 + 15$

c) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{16}\cdot\frac{5}{32}\cdot\frac{6}{64}$

Capítulo

4

Progressões aritméticas

4.1. DEFINIÇÃO

Chamamos de **progressão aritmética** (PA) qualquer sequência onde cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado com uma constante denominada razão da progressão. Em outras palavras:

> Uma **progressão aritmética** de **razão r** é uma sequência tal que:
>
> $a_n = a_{n-1} + r \ (n > 1)$

Exemplos

a) Consideremos a sequência (3; 5; 7; 9; 11). Vemos que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado com 2. Dizemos então que a sequência é uma progressão aritmética de razão r = 2.

b) A sequência (2; 7; 12; 17; 22; 27) é uma progressão aritmética de razão igual a 5.

c) A sequência (20; 17; 14; 11; 8; 5; 2; −1) é uma PA de razão r = −3.

d) A sequência (5; 5; 5; 5; 5) é uma PA de razão r = 0.

e) A sequência $\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}; 2; \frac{7}{3}; \frac{8}{3}; 3\right)$ é uma PA de razão $r = \frac{1}{3}$.

f) Consideremos a PA infinita dada por:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} - 2 \end{cases}$$

A razão dessa PA é r = −2 e seus primeiros termos estão representados abaixo:

$$(4; 2; 0; -2; -4; -6; \ldots)$$

4.2. SEQUÊNCIAS CRESCENTES E DECRESCENTES

Consideremos a sequência $(a_n)_{n \in E}$ de domínio E. Dizemos que:

1º) a sequência é **crescente** se, e somente se, para todo $n \in E$ (com n > 1) tem-se:

$$a_n > a_{n-1}$$

2º) a sequência é **decrescente** se, e somente se, para todo $n \in E$ (com n > 1) tem-se:

$$a_n < a_{n-1}$$

3º) a sequência é **estacionária** se, e somente se, para todo n $\in$ E (com n > 1) tem-se:

$$a_n = a_{n-1}$$

Exemplos

a) a sequência (2; 7; 20; 42; 70) é crescente
b) a sequência (18; 14; 12; 3; –4; –20) é decrescente
c) a sequência (8; 8; 8; 8; 8) é estacionária
d) a sequência (4; 6; 17; 20; 19; 18; 2) não é crescente, nem decrescente, nem estacionária.

4.3. PROPRIEDADES

Consideremos a progressão aritmética $(a_n)_{n \in E}$ de domínio E e razão **r**. Valem as propriedades:

1ª) $\boxed{\text{A PA é crescente} \Leftrightarrow r > 0}$

De fato:
A PA é crescente $\Leftrightarrow a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow a_{n-1} + r > a_{n-1} \Leftrightarrow r > 0$

2ª) $\boxed{\text{A PA é decrescente} \Leftrightarrow r < 0}$

A verificação desta propriedade é análoga à verificação da 1ª.

3ª) $\boxed{\text{A PA é estacionária} \Leftrightarrow r = 0}$

A verificação desta propriedade também é análoga à verificação da 1ª.

4.4. FÓRMULA DO TERMO GERAL

Consideremos a PA de razão **r**:

$$(a_1; a_2; a_3; \dots ; a_n; \dots)$$

Temos:

$$\oplus \begin{cases} \cancel{a_2} = a_1 + r \\ \cancel{a_3} = \cancel{a_2} + r \\ \cancel{a_4} = \cancel{a_3} + r \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n = a_{n-1} + r \end{cases}$$

Lembrando da fórmula 3·1 do capítulo 3, o número de igualdade ao lado é: $n - 2 + 1 = n - 1$

Somando membro a membro essas n – 1 igualdades teremos:

$$a_n = a_1 + \underbrace{r + r + r + \dots + r}_{(n-1)\ \text{parcelas}}$$

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r} \quad (4.1)$$

Exemplos

a) Podemos então escrever:
$a_2 = a_1 + r$
$a_3 = a_1 + 2r$
$a_4 = a_1 + 3r$
$a_{20} = a_1 + 19r$
$a_{37} = a_1 + 36r$

b) É importante observar que se $a_n = a_{n-1} + r$ então $r = a_n - a_{n-1}$, isto é, para obtermos a razão de uma PA, basta fazermos a diferença entre um termo qualquer (a partir do 2º) e o anterior. Assim, na PA (5; 12; 19; 26; 33) a razão r pode ser obtida do seguinte modo:

$$r = 12 - 5 = 7 \text{ ou } r = 19 - 12 = 7$$

c) Determinemos o 8º termo da seguinte PA: (1; 3; 5;...)

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ r = 2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)r \\ a_8 &= a_1 + 7r = 1 + 7(2) = 15 \end{aligned}$$

Tomemos novamente a PA de razão **r**:

$$(a_1; a_2; \dots a_k; \dots; a_n; \dots)$$

Podemos escrever:

$$\oplus \begin{cases} \cancel{a_{k+1}} = a_k + r \\ \cancel{a_{k+2}} = \cancel{a_{k+1}} + r \\ \cancel{a_{k+3}} = \cancel{a_{k+2}} + r \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n = \cancel{a_{n-1}} + r \end{cases}$$

O total de **igualdades** ao lado é: $n - (k+1) + 1$ ou $n - k - 1 + 1$ ou: $n - k$

Somando membro a membro essas **n – k** igualdades, teremos:

$$a_n = a_k + \underbrace{r + r + r + \dots + r}_{(n-k)\ \text{parcelas}}$$

$$\boxed{a_n = a_k + (n-k)r} \quad (4.2)$$

A fórmula 4.1 é um caso particular da fórmula 4.2.

Exemplos

a) Podemos escrever:
$a_{20} = a_3 + (20 - 3)r = a_3 + 17r$
$a_{40} = a_5 + 35r$

b) Consideremos uma PA em que $a_7 = -9$ e $r = 4$ e calculemos a_{15}.
$a_{15} = a_7 + 8r = (-9) + 8(4) = -9 + 32 = 23$

A fórmula 4.2 foi estabelecida para $n \geq k$, mas é fácil perceber que ela vale também para $n \leq k$. Assim, por exemplo, podemos escrever:

$a_5 = a_9 + (5 - 9)r = a_9 - 4r$
$a_3 = a_{20} + (3 - 20)r = a_{20} - 17r$
$a_7 = a_{30} - 23r$

Considerando a fórmula 4.1 temos:

$a_n = a_1 + (n - 1)r = a_1 + nr - r$
ou

$$a_n = \underbrace{r}_{\text{constante}} n + \underbrace{a_1 - r}_{\text{constante}}$$

Portanto, qualquer sequência onde o termo geral é dado por uma expressão do tipo:

$$\boxed{a_n = An + B} \qquad (4.3)$$

onde **A** e **B** são constantes, *é uma PA de razão igual a A.*

Exemplos

a) A sequência cujo termo geral é $a_n = 7n - 8$ é uma PA de razão igual a 7 (portanto é uma PA crescente).

b) A sequência cujo termo geral é $a_n = -3n + \frac{5}{8}$ é uma PA de razão igual a −3 (portanto é uma PA decrescente).

c) A sequência cujo termo geral é $a_n = 9$ é uma PA de razão igual a zero (PA estacionária). Poderíamos também escrever: $a_n = 0n + 9$. Supondo que seja uma PA infinita teremos:

(9; 9; 9; 9;...)

Exercícios Resolvidos

4.1) Determine o oitavo termo de uma PA onde $a_5 = 6$ e $a_{17} = 30$

Solução

De acordo com a fórmula 4.2 temos:
$a_{17} = a_5 + 12r$
$30 = 6 + 12r$
$12r = 24$
$r = 2$
Assim: $a_8 = a_5 + 3r = 6 + 3(2) = 12$

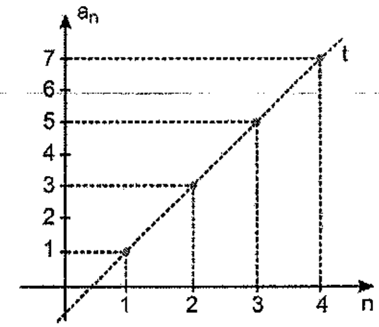
4.2) Seja a PA de domínio E = {1; 2; 3; 4} cujo termo geral é $a_n = 2n - 1$

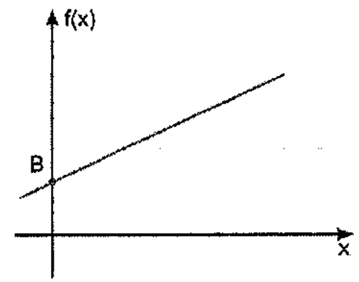
a) qual é a razão dessa PA?
b) quais são os termos dessa PA?
c) faça o gráfico de a_n em função de n.

Solução

a) $a_n = 2n - 1 \Rightarrow r = 2$
b) $a_1 = 2(1) - 1 = 1$
$a_2 = 2(2) - 1 = 3$
$a_3 = 2(3) - 1 = 5$
$a_4 = 2(4) - 1 = 7$
c)

n	a_n
1	1
2	3
3	5
4	7





Os pares ordenados que deverão formar o gráfico são:

(1; 1), (2; 3), (3; 5), (4; 7),

isto é, apenas 4 pares e, portanto, o nosso gráfico tem apenas 4 pontos que são os assinalados no nosso desenho (esses pontos não devem ser "ligados"). Observamos que os 4 pontos estão sobre uma mesma reta t o que não é de estranhar pois, como sabemos, quando temos uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, do tipo:

$$f(x) = Ax + B$$

onde **A** e **B** são constantes, o gráfico é uma reta que corta o eixo vertical no ponto de ordenada B. Como uma PA apresenta sempre termo geral do tipo

$$a_n = An + B$$

o gráfico de uma PA será um conjunto de pontos alinhados.

4.3) Consideremos a PA $(-5; -1; 3;...)$
a) determine a posição do número 103 nessa PA
b) verifique se o número 8726 é um dos termos da PA.

Solução

a) $r = (-1) - (-5) = -1 + 5 = 4$
$a_n = a_1 + (n-1)r$
$103 = -5 + (n-1)(4)$

Resolvendo esta equação obtemos $n = 28$ e, assim, o número 103 é o 28º termo da PA.

b) Suponhamos que exista um número natural **n** tal que:
$a_n = 8\,726$
$a_n = a_1 + (n-1)r$
$8\,726 = -5 + (n-1)(4)$

Porém, resolvendo esta equação, obtemos $n = \frac{8\,735}{4}$ que não é número natural.
Portanto, 8 726 não é termo dessa PA.

4.4) Numa PA temos $a_3 = 11$ e $a_7 = 27$. Determine a_1 e r.

Solução

$a_3 = a_1 + 2r$
$11 = a_1 + 2r$
$a_7 = a_1 + 6r$
$27 = a_1 + 6r$

Temos então o sistema: $\begin{cases} a_1 + 2r = 11 \\ a_1 + 6r = 27 \end{cases}$

Resolvendo-o, obtemos $a_1 = 3$ e $r = 4$

4.5) Numa PA temos $a_2 + a_4 = 14$ e $a_3 + a_6 = 23$. Escreva os quatro primeiros termos da progressão.

Solução

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + r \\ a_4 = a_1 + 3r \\ a_3 = a_1 + 2r \\ a_6 = a_1 + 5r \end{cases} \qquad \begin{aligned} & a_2 + a_4 = 14 \\ & a_1 + r + a_1 + 3r = 14 \\ & 2a_1 + 4r = 14 \\ & a_1 + 2r = 7 \text{ (I)} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & a_3 + a_6 = 23 \\ & a_1 + 2r + a_1 + 5r = 23 \\ & 2a_1 + 7r = 23 \text{ (II)} \end{aligned}$$

Temos então o sistema formado pelas equações (I) e (II):

$$\begin{cases} a_1 + 2r = 7 \\ 2a_1 + 7r = 23 \end{cases}$$

Resolvendo-o, obtemos $a_1 = 1$ e $r = 3$. Assim a progressão é:

$(1; 4; 7; 10;...)$

4.6) Determine o número de termos **n** de uma PA finita na qual o primeiro termo é 1, o último é 17 e a razão é $r = n - 1$.

Solução

$a_n = a_1 + (n-1)r$
$17 = 1 + (n-1)(n-1)$
$(n-1)^2 = 16$

$$n - 1 = \pm 4 \begin{cases} n - 1 = 4 \Leftrightarrow n = 5 \\ n - 1 = -4 \Leftrightarrow n = -3 \text{ (não serve pois n deve ser natural)} \end{cases}$$

Assim: $n = 5$

4.7) Numa PA de razão $r = -3$, o 17º termo é igual a 20% do 1º termo. Escreva os 4 primeiros termos da PA.

Solução

a_{17} é igual a 20% de a_1, isto é, $a_{17} = \frac{20}{100}a_1 = \frac{1}{5}a_1 = \frac{a_1}{5}$

Sabemos que: $a_{17} = a_1 + 16r$

Assim: $\frac{a_1}{5} = a_1 + 16(-3)$

Resolvendo esta equação obtemos $a_1 = 60$
Assim a PA é: $(60; 57; 54; 51;...)$

4.8) *Interpole* 4 meios aritméticos entre -3 e 22.

Solução

Interpolar 4 meios aritméticos entre -3 e 22 significa que devemos achar 4 números que "colocados" entre -3 e 22 deverão formar uma PA, onde o primeiro termo é -3 e o último é 22. Teremos, portanto, um total de 6 termos.

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ \boxed{-3} & \underbrace{\boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{}}_{\text{4 meios}} & & & & \boxed{22} \end{array}$$

$$\begin{cases} a_6 = a_1 + 5r \\ 22 = -3 + 5r \\ 5r = 25 \\ r = 5 \end{cases}$$

Portanto, a PA é:

$(-3; 2; 7; 12; 17; 22)$

e os 4 meios são: 2, 7, 12 e 17.
Devemos observar que podemos usar a palavra "inserir" no lugar da palavra "interpolar".

4.9) Numa PA de razão r = –6, a razão entre o 21º termo e o 1º termo é igual a $\frac{3}{5}$. Escreva os 3 primeiros termos da PA.

Solução

Dizer que a razão entre o 21º termo e o 1º termo é igual a $\frac{3}{5}$ significa que

$\frac{a_{21}}{a_1} = \frac{3}{5}$.

Podemos, então, escrever: $a_{21} = \frac{3}{5}a_1$.

Mas: $a_{21} = a_1 + 20r$

Assim: $\frac{3a_1}{5} = a_1 + 20(-6)$

Resolvendo esta equação, obtemos $a_1 = 300$. Assim a PA é:

(300; 294; 288;...)

4.10) Qual é o primeiro termo negativo da PA $\left(\frac{4}{5}; \frac{13}{20}; \ldots\right)$?

Solução

$$r = \frac{13}{20} - \frac{4}{5} = \frac{13-16}{20} = -\frac{3}{20}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r = \frac{4}{5} + (n-1)\left(\frac{-3}{20}\right) = \frac{-3}{20}n + \frac{4}{5} + \frac{3}{20}$$

$$a_n = -\frac{3}{20}n + \frac{19}{20}$$

Assim:

$$a_n < 0 \iff -\frac{3}{20}n + \frac{19}{20} < 0 \iff n > \frac{19}{3}$$

Como $\frac{19}{3} \cong 6{,}3$ e n deve ser natural, concluímos que:

$$a < 0 \iff n \geq 7$$

Portanto, o 1º termo negativo é a_7:

$$a_7 = a_1 + 6r = \frac{4}{5} + 6\left(-\frac{3}{20}\right) = \frac{4}{5} - \frac{9}{10} = -\frac{1}{10}$$

4.11) Uma função f de domínio $\mathbb{N}$ é dada por:

$$\begin{cases} f(0) = 5 \\ f(n+1) = \dfrac{4f(n)+3}{4} \end{cases}$$

Calcule f(60)

Solução

Temos: $f(n+1) = \frac{4f(n)+3}{4} = f(n) + \frac{3}{4}$

Esta relação de recorrência define uma PA de razão $r = \frac{3}{4}$, tal que:

$$\begin{cases} f(0) = a_1 = 5 \\ f(1) = a_2 \\ f(2) = a_3 \\ \ldots\ldots\ldots \\ f(60) = a_{61} \end{cases} \qquad a_{61} = a_1 + 60r = 5 + 60\left(\frac{3}{4}\right) = 5 + 45 = 50$$

4.12) Consideremos a PA de termo geral a_n e razão r. Sendo k um número real não nulo, consideremos a sequência de termo geral b_n tal que:

$$b_n = k \cdot a_n$$

Mostre que (b_n) é uma PA e calcule sua razão.

Solução

Sendo (a_n) uma PA de razão **r** podemos escrever (de acordo com a fórmula 4.3)

$$a_n = rn + c$$

onde **c** é uma constante. Assim:

$$b_n = ka_n = k(rn + c) = krn + kc$$

Como **kr** e **kc** são constantes, ainda de acordo com a fórmula 4.3 concluímos que (b_n) é uma PA cuja razão é igual a $k \cdot r$.

4.13) a) Considere as sequências (a_n) e (b_n) definidas por:

$$a_n = 3n - 2 \text{ e } b_n = 2n$$

Consideremos ainda a sequência (c_n) definida por:

$$c_n = a_{b_n}$$

Mostre que (c_n) é uma PA e calcule sua razão.

Solução

$$\left.\begin{array}{l} c_n = a_{b_n} \\ b_n = 2n \end{array}\right\} c_n = a_{2n}$$

$$a_n = 3n - 2 \Rightarrow a_{2n} = 3(2n) - 2 = 6n - 2$$

Assim: $c_n = a_{2n} = 6n - 2$

De acordo com a fórmula 4.3 concluímos que (c_n) é uma PA de razão igual a 6.

b) Sendo (a_n) e (b_n) sequências definidas por:

$$a_n = n^2 \text{ e } b_n = a_{n+1} - a_n$$

Móstre que (b_n) é uma PA e calcule sua razão.

Solução

$a_n = n^2 \Rightarrow a_{n+1} = (n+1)^2$

$b_n = a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$

Se $b_n = 2n + 1$, de acordo com a fórmula 4.3 concluímos que (b_n) é uma PA de razão igual a 2.

$(a_n) = (1; 4; 9; 16; 25; 36; 49;...)$

$(b_n) = (3; 5; 7; 9; 11;...)$

4.14) Um capital de R$ 200,00 foi colocado a juros simples de 3% ao mês. Qual o montante após 47 meses?

Solução

O montante é a soma do capital com os juros.

3% de $200 = \frac{3}{100} \cdot 200 = 6$

Assim, a cada mês o montante é acrescido de R$ 6,00 e podemos afirmar então que os montantes formam uma PA de razão 6 (em reais). Sendo a_1 o montante após o 1º mês temos:

$$a_1 = 200 + 6 = 206$$

e portanto, o montante após 47 meses será:

$$a_{47} = a_1 + 46r = 206 + 46(6) = 482$$

Temos, então, que após 47 meses, o montante será igual a R$ 482,00.

4.15) Sabendo que os números 12, 32 e 40 são termos de uma PA crescente, determine os possíveis valores da razão **r**.

Solução

$(...; 12;... ; 32;... ; 40;...)$

Podemos escrever: $\begin{cases} 32 = 12 + xr \\ 40 = 12 + yr \end{cases}$

onde **x** e **y** são números naturais não nulos (com $y > x$)

$\begin{cases} 32 = 12 + xr \Leftrightarrow xr = 20 \quad \text{(I)} \\ 40 = 12 + yr \Leftrightarrow yr = 28 \quad \text{(II)} \end{cases}$

Como obviamente $r \neq 0$, podemos dividir membro a membro as equações (I) e (II) obtendo:

$$\frac{x}{y} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}$$

Como a fração $\frac{5}{7}$ é irredutível e os números **x** e **y** são naturais (não nulos) o menor valor possível para **x** é 5 e o menor valor possível para **y** é 7. Mas:

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{7} = \frac{10}{14} = \frac{15}{21} = \frac{20}{28} = \frac{25}{35} = ...$$

isto é, para $\frac{x}{y} = \frac{5}{7}$ basta que $x = 5k$ e $y = 7k$, onde $k \in \mathbb{N}^*$

$\left.\begin{matrix} x = 5k \\ xr = 20 \end{matrix}\right\} 5kr = 20$

onde: $r = \frac{20}{5k} = \frac{4}{k}$

Portanto, os valores possíveis para a razão r são da forma $r = \frac{4}{k}$, onde **k** é um número natural qualquer não nulo.

4.16) Cada uma das progressões aritméticas a seguir tem 80 termos:

$(a_n) = (9; 13;...)$

(b_n) $(10; 13;...)$

Quantos números são ao mesmo tempo termos das duas progressões?

Solução

$a_{80} = 9 + 79(4) = 325$ $\qquad (a_n) = (9; 13; ...; 325)$

$b_{80} = 10 + 79(3) = 247$ $\qquad (b_n) = (10; 13;...; 247)$

A razão de (a_n) é 4 e a razão de (b_n) é 3, isto é, os termos de (a_n) vão crescendo *de 4 em 4* e os termos de (b_n) vão crescendo *de 3 em 3*. O mínimo múltiplo comum de 4 e 3 é igual a 12 e, portanto, a "coincidência" se dá *de 12 em 12*.

+12 +12

$(a_n) = (9; 13; 17; 21; 25; 29; 33; 37; 41; ...; 325)$

$(b_n) = (10; 13; 16; 19; 22; 25; 28; 31; 34; 37; 40; ...; 247)$

+12 +12

Portanto, os termos coincidentes formam uma PA de razão igual a 12, e primeiro termo igual a 13. Representando por c_n o termo geral dessa progressão temos:

$\begin{cases} c_1 = 13 \\ c_n = 13 + (n-1)12 = 13 + 12n - 12 = 12n + 1 \end{cases}$

Sendo 325 o último termo de (a_n) e 247 o último termo de (b_n), o último termo de (c_n) não pode superar 247.

$c_n \leq 247$

$12n + 1 \leq 247$

$n \leq \frac{246}{12}$

Mas $\frac{246}{12} = 20{,}5$ e como **n** é natural, temos: $n \leq 20$

Assim, o maior valor possível para **n** é 20 e, portanto, o último termo de (c_n) é:

$$c_{20} = c_1 + 19(12) = 13 + 19(12) = 241$$

Temos, então, que o número de termos coincidentes é 20 e a PA dos termos coincidentes é:

$$(13; 25; 37;...; 241)$$

4.17) Quantos múltiplos de 7 há entre 12 e 864?

Solução

Depois de 12, o primeiro múltiplo de 7 é 14. Efetuando a divisão euclidiana de 864 por 7 temos:

$$\begin{array}{l|l} 864 & 7 \\ \hline 16 & 123 \\ \ \ 24 & \\ \ \ \ 3 & \end{array} \qquad 864 - 3 = 861$$

Portanto, 861 é o último múltiplo de 7 antes de 864. Temos, então, uma PA finita de razão 7, primeiro termo 14 e último termo 861:
(14; 21; 28;...; 861)
$a_n = a_1 + (n-1)r$
$861 = 14 + (n-1)(7)$
Resolvendo esta equação obtemos n = 122.

4.18) Verifique se os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{8}$ podem ser termos de uma PA.

Solução

É óbvio que esses números não podem ser termos consecutivos de uma PA pois $\sqrt{3}-\sqrt{2} \neq \sqrt{8}-\sqrt{3}$.
Vamos verificar, então, se eles podem ser termos não consecutivos de uma PA.
Supondo que essa PA (se existir) seja crescente e de razão **r** ($r \neq 0$) temos:

$$(\ldots;\ \sqrt{2};\ldots;\ \sqrt{3};\ldots;\ \sqrt{8};\ldots)$$

$\begin{cases} \sqrt{3} = \sqrt{2} + xr \\ \sqrt{8} = \sqrt{2} + yr \end{cases}$ com **x** e **y** naturais não nulos

Portanto: $\begin{cases} xr = \sqrt{3} - \sqrt{2} & \text{(I)} \\ yr = \sqrt{8} - \sqrt{2} & \text{(II)} \end{cases}$

Dividindo membro a membro (II) por (I), temos:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{8}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{8}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{24}+\sqrt{16}-\sqrt{6}-2}{3-2} =$$

$$= \frac{\sqrt{4 \cdot 6}+4-\sqrt{6}-2}{1} = 2\sqrt{6}-\sqrt{6}+2 = \sqrt{6}+2$$

Portanto, deveríamos ter $\frac{y}{x} = \sqrt{6}+2$.

Mas acontece que $\frac{y}{x}$ é um número racional (pois y e x são naturais não nulos) e $\sqrt{6}+2$ é um número irracional. Assim, concluímos que não é possível $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{8}$ serem termos de uma mesma PA.

Exercícios Propostos

4.19) Determine:
a) o 15º termo da PA (3; −1;...)
b) o 20º termo da PA $\left(2;\ \frac{7}{3};\ \ldots\right)$
c) o 30º termo da PA $\left(15;\ \frac{3}{4};\ldots\right)$
d) o 10º termo da PA $(4;\ 2+3\sqrt{2};\ldots)$

4.20) Numa PA tem-se $a_4 = 13$ e $a_6 = 21$. Determine a_1 e a razão.

4.21) Numa PA tem-se $a_{20} = \sqrt{3}-1$ e $a_{30} = 19\sqrt{3}+35$. Determine a_{42}.

4.22) Determine o número de termos **n** de uma PA na qual o primeiro termo é igual a 1, o último termo é 21 e a razão r = n.

4.23) Uma PA tem termo geral dado por $a_n = \frac{-3n+1}{6}$. Qual a razão da PA?

4.24) Numa PA de n termos e razão r temos $a_1 = -\frac{2}{15}$, $a_n = \frac{2}{3}$ e rn = 1. Calcule r e n.

4.25) Numa PA temos $a_1 = -1$ e $a_7 = \frac{1}{r}$. Calcule a razão.

4.26) Numa PA temos $a_1 = 2$ e $r = -\frac{1}{2}$. Determine o número k tal que $a_k = \frac{k-5}{k}$.

4.27) Numa PA, $a_5 = 23$ e $a_{12} = -40$. Calcule o primeiro termo negativo.

4.28) Numa PA temos $a_p = q$ e $a_q = p$, com $p \neq q$. Determine a_1 e a_{p+q}.

4.29) Quantos múltiplos de 4 há entre 10 e 8 539?

4.30) Considere a PA (a_n) de razão r e a sequência (b_n) dada por:

$$b_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$$

Mostre que (b_n) é uma PA e calcule sua razão.

4.31) Sendo (a_n) uma PA de termos positivos e de razão $r \neq 0$, demonstre que:
a) $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$
b) $\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}$

4.32) Consideremos as sequências (a_n) e (b_n) dadas por:

$$a_n = 4n + 1 \text{ e } b_n = 2n + 1$$

a) escreva os 5 primeiros termos de (a_n);
b) escreva os 5 primeiros termos de (b_n);
c) mostre que (a_{b_n}) é uma PA e calcule a sua razão;
d) escreva os 4 primeiros termos de (a_{b_n}).

4.33) Sabendo que os números 13, 31 e 43 são termos de uma PA crescente, calcule os possíveis valores da razão **r**.

4.34) Cada uma das progressões aritméticas a seguir tem 100 termos:

(4; 8;...) (3; 8;...)

Quantos termos em comum elas têm?

4.35) Considere a PA (a_n) onde $a_p = \frac{1}{p}$ e $a_q = \frac{1}{q}$. Calcule a_{p+q}, supondo $p \neq q$.

4.36) Na PA (a_n) temos $a_p = A$ e $a_q = B$. Calcule a_{p+q} supondo $p \neq q$.

4.37) Interpole 133 meios aritméticos entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{28}{3}$.

4.38) Inserir entre 1 e 31 **n** meios aritméticos de modo que a razão entre o 7º e o (n – 1)º meio seja igual a $\frac{5}{9}$.

4.39) Quantos meios aritméticos devemos inserir entre 5 e 200 de modo que a razão **r** seja menor que 3?

4.40) Considere a progressão aritmética:

$$\left(\frac{n^2-3}{n}; \frac{n^2+2}{n}; \ldots\right) n \in \mathbb{N}^*$$

Determine o termo de ordem **n**.

4.41) Considere a função f: $A \to \mathbb{R}$ dada por $\begin{cases} f(-8) = 10 \\ f(n+1) = f(n) - 5 \end{cases}$

onde A = {–8; –7; –6; –5;...}. Determine f(100).

4.42) Consideremos a PA $(a_1; a_2; \ldots; a_n; \ldots)$ de razão **r**. Usando o princípio de indução matemática, demonstre que para todo **n** pertencente ao domínio temos:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

4.43) Sendo E = {1; 2; 3; 4; 5} considere a PA $(a_n)_{n \in E}$ dada por $a_n = -2n + 8$. Esboce o gráfico de a_n em função de n.

4.5. MÉDIA ARITMÉTICA

Consideremos **n** números $x_1, x_2, \ldots, x_n$. A **média aritmética** deles é por definição o número m_a calculado do seguinte modo:

$$m_a = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \qquad (4.4)$$

Poderíamos também escrever:

$$m_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Exemplos

a) A média aritmética dos números 4, 5 e 17 é:

$$m_a = \frac{4+5+17}{3} = \frac{26}{3}$$

b) A média aritmética dos números 7 e –4 é:

$$m_a = \frac{(7)+(-4)}{2} = \frac{3}{2}$$

4.6. PROPRIEDADES

Sejam **a**, **b** e **c** três termos consecutivos de uma PA de razão **r**:

(...; a; b; c; ...)

Temos: $\begin{cases} b = a + r \\ b = c - r \end{cases}$

Somando membro a membro estas duas igualdades temos:

$$2b = a + c$$

$$b = \frac{a+c}{2}$$

isto é:

Dados três termos consecutivos de uma PA, o do meio é média aritmética dos outros dois.

Exemplo

Consideremos o seguinte problema:

"Determine o valor de x de modo que x – 3, 3x – 7 e x – 5 sejam termos consecutivos de uma PA."

Devemos ter então: $3x - 7 = \frac{(x-3)+(x-5)}{2}$

Resolvendo esta equação obtemos $x = \frac{3}{2}$.

4.7. REPRESENTAÇÕES ESPECIAIS

É muito frequente aparecerem problemas de PA com poucos termos. Nestes casos pode ser útil usar representações especiais. Vamos considerar dois casos: número ímpar de termos e número par de termos.

a) **número ímpar de termos**

Se forem três termos podemos representá-los por:

$$x - r,\ x,\ x + r$$

onde **r é a razão.**

Se forem cinco termos podemos representá-los por:

$$x - 2r,\ x - r,\ x,\ x + r,\ x + 2r$$

b) **número par de termos**

Se forem 4 termos podemos representá-los por:

$$x - 3y,\ x - y,\ x + y,\ x + 3y$$

onde a razão é $r = 2y$

Se forem 6 termos:

$$x - 5y,\ x - 3y,\ x - y,\ x + y,\ x + 3y,\ x + 5y$$

Exemplo

Determine três números em PA tais que sua soma seja 18 e o terceiro a metade do primeiro.

Solução

$$\begin{cases} (x-r)+(x)+(x+r)=18 \\ x+r=\dfrac{x-r}{2} \end{cases}$$

$$(x-r)+x+(x+r)=18 \Leftrightarrow 3x=18 \Leftrightarrow x=6$$

$$x+r=\frac{x-r}{2}$$

$$6+r=\frac{6-r}{2}$$

$$r=-2$$

A PA é então: (8; 6; 4)

Observe que a utilização das **representações especiais** é particularmente interessante, quando se conhece a soma dos termos da PA.

Exercícios Resolvidos

4.44) Determine as médias aritméticas dos seguintes números:

a) $4; \frac{2}{3}$ e $\frac{5}{8}$

b) -9 e 17

Solução

a) $m_a = \dfrac{4+\frac{2}{3}+\frac{5}{8}}{3} = \dfrac{\frac{127}{24}}{3} = \dfrac{127}{72}$

b) $m_a = \dfrac{-9+17}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

4.45) Determine o valor de x de modo que os números 1, 2 + x e 6 − x sejam termos consecutivos de uma PA.

Solução

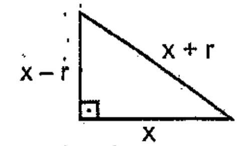
O termo central deve ser média aritmética dos outros dois:

$$2+x=\frac{1+(6-x)}{2}$$

Resolvendo esta equação obtemos $x = 1$.

4.46) Determine as medidas dos lados de um triângulo retângulo de perímetro 36, sabendo-se que as medidas dos lados estão em PA.

Solução



$(x - r) + (x) + (x + r) = 36$
$3x = 36$
$x = 12$

Pelo teorema de Pitágoras: $(x + r)^2 = (x - r)^2 + x^2$

Substituindo x por 12: $(12 + r)^2 = (12 - r)^2 + 12^2$

Resolvendo esta equação obtemos $r = 3$. Assim, $x - r = 9$ e $x + r = 15$.

Portanto, os lados do triângulo medem 9, 12 e 15.

4.47) A soma de 4 números em PA é 96 e o terceiro é o dobro do segundo. Determine a PA.

Solução

Sejam $x - 3y$, $x - y$, $x + y$ e $x + 3y$ os números.
$(x - 3y) + (x - y) + (x + y) + (x + 3y) = 96$
$4x = 96$
$x = 24$

Temos também:
$x + y = 2(x - y)$
$24 + y = 2(24 - y)$

Resolvendo a equação obtemos $y = 8$.

$x - 3y = 24 - 3(8) = 0$
$x - y = 24 - 8 = 16$
$x + y = 24 + 8 = 32$
$x + 3y = 24 + 3(8) = 48$
A PA é: (0; 16; 32; 48)

4.48) Os três termos de uma sequência são proporcionais aos números 3, 5 e 9. Somando 4 ao termo do meio, a nova sequência é uma PA. Determine a sequência inicial.

Solução

Seja (x; y; z) a sequência; x, y e z são proporcionais aos números 3, 5 e 9, isto é

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{9}=k$$

$$\text{e portanto}\begin{cases} x=3k \\ y=5k \\ z=9k \end{cases}$$

Podemos, então, representar a sequência por:

$$(3k;\ 5k;\ 9k)$$

Somando 4 ao termo do meio a nova sequência é:

$$(3k;\ 5k+4;\ 9k)$$

Sendo ela uma PA, temos:

$$5k+4=\frac{3k+9k}{2}$$

Resolvendo esta equação obtemos k = 4 e, portanto: x = 12, y = 20 e z = 36.
A sequência original é assim: (12; 20; 36).

4.49) Determine uma PA de três termos cuja soma é 9 e cujo produto é igual a 15.

Solução

$(x-r)+(x)+(x+r)=9$
$3x=9$
$x=3$

$(x-r)\,(x)\,(x+r)=15$
$(3-r)\,(3)\,(3+r)=15$
$r^2=4$
$r=\pm 2$

$$\text{Para } r=2\begin{cases} x-r=1 \\ x=3 \\ x+r=5 \end{cases}\quad \text{e a PA é } (1;\ 3;\ 5)$$

$$\text{Para } r=-2\begin{cases} x-r=5 \\ x=3 \\ x+r=1 \end{cases}\quad \text{e a PA é } (5;\ 3;\ 1)$$

Exercícios Propostos

4.50) Determine uma PA de três termos cuja soma é 15 e a soma de seus inversos é $\frac{33}{40}$.

4.51) Determine o valor de x de modo que $x-1$, $2x-4$ e x^2-4x-1 sejam termos consecutivos de uma PA.

4.52) A soma dos 4 termos de uma PA é igual a 8 e o produto do primeiro pelo último é igual a –140. Determine a PA.

4.53) Numa PA crescente de 3 termos, a soma dos termos é 21 e o produto é –105. Determine a PA.

4.54) Num triângulo retângulo as medidas dos lados estão em PA. Mostre que essas medidas são proporcionais aos números 3, 4 e 5.

4.55) Os três termos de uma sequência são proporcionais aos números 2, 5 e 7. Subtraindo 4 do termo do meio, os números passam a formar uma PA. Determine a sequência original.

4.56) Os números **a**, **b** e **c** formam uma PA (nessa ordem). Mostre que a sequência

$$(a^2bc;\ ab^2c;\ abc^2)$$

também é uma PA.

4.57) A soma dos 4 termos de uma PA é igual a 2 e a soma de seus quadrados é igual a 46. Determine a PA.

4.8. PROPRIEDADES

a) Consideremos a PA finita de razão r

$$(a_1;\ a_2 \ldots;\ a_p \ldots;\ a_q;\ldots;\ a_n)$$

onde a_p e a_q são equidistantes dos extremos. Como já vimos, temos:

$$p+q=n+1$$

isto é,

$$p-1=n-q$$

$$\text{Temos também: }\begin{cases} a_p=a_1+(p-1)r \\ a_n=a_q+(n-q)r \end{cases}$$

Subtraindo membro a membro essas duas igualdades temos:

$$a_p-a_n=a_1-a_q+\cancel{(p-1)}r-\cancel{(n-q)}r$$

$$a_p+a_q=a_1+a_n$$

isto é,

A soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos. (4.6)

b) Sejam a_p, a_q, a_t e a_u termos quaisquer de uma PA de razão $r \neq 0$. Então:

$$\boxed{p+q=t+u \Leftrightarrow a_p+a_q=a_t+a_u} \quad (4.7)$$

De fato:

$$\begin{cases} a_p = a_1+(p-1)r \\ a_q = a_1+(q-1)r \end{cases} \qquad \begin{cases} a_t = a_1+(t-1)r \\ a_u = a_1+(u-1)r \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_p+a_q = 2a_1+(p-1)r+(q-1)r = 2a_1-2r+(p+q)r \\ a_t+a_u = 2a_1+(t-1)r+(u-1)r = 2a_1-2r+(t+u)r \end{cases}$$

$$a_p+a_q = a_t+a_u \Leftrightarrow \cancel{2a_1}-\cancel{2r}+(p+q)r = \cancel{2a_1}-\cancel{2r}+(t+u)r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p+q)\cancel{r} = (t+u)\cancel{r} \Leftrightarrow p+q=t+u$$

Se $r = 0$ vale, obviamente, a implicação

$$p+q=t+u \Rightarrow a_p+a_q=a_t+a_u$$

mas, não vale a implicação

$$a_p+a_q=a_t+a_u \Rightarrow p+q=t+u$$

c) Consideremos uma PA finita com um número ímpar de termos cujo termo central é a_p:

$$(a_1; a_2 \ldots ; a_{p-1}; a_{p+1} \ldots ; a_n)$$

Neste caso, a_{p-1} e a_{p+1} são equidistantes dos extremos e, portanto,

$$a_{p-1}+a_{p+1} = a_1+a_n$$

Mas, sabemos que: $a_p = \dfrac{a_{p-1}+a_{p+1}}{2}$ e, portanto: $a_p = \dfrac{a_1+a_n}{2}$, isto é:

Dada uma PA com número ímpar de termos, o termo central é média aritmética dos extremos e, portanto, é também média aritmética de qualquer par de termos equidistantes dos extremos.	(4.8)

4.9. SOMA DOS TERMOS

Vamos deduzir uma fórmula que permita calcular a soma dos **n** primeiros termos de uma PA. Representando por S_n essa soma temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad (I)$$

ou também: $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$ (II)

Somando membro a membro as igualdades (I) e (II) temos:

$$2S_n = \underbrace{(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\ldots+(a_{n-2}+a_3)+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1)}_{\text{n parênteses}}$$

Note que dentro de cada parênteses está a soma de dois termos equidistantes dos extremos ou a própria soma dos extremos (se n for ímpar, num dos parênteses teremos $a_p + a_p$ onde a_p é o termo central entre a_1 e a_n). Portanto, as expressões entre parênteses são todas iguais a $a_1 + a_n$:

$$2S_n = n(a_1+a_n)$$

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}} \quad (4.9)$$

Podemos escrever também do seguinte modo:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{(a_1+a_n)n}{2}}$$

Exercícios Resolvidos

4.58) Numa PA de 23 termos, a_5 e a_p são equidistantes dos extremos. Determine p.

Solução

Devemos ter $5 + p = 1 + 23$ e, portanto, $p = 19$.

4.59) Numa PA tem-se $a_5 + a_{30} = 60$. Calcule o valor de $a_8 + a_{27}$.

Solução

$5 + 30 = 8 + 27 \Rightarrow a_5 + a_{30} = a_8 + a_{27} = 60$.

4.60) Calcule a soma dos 20 primeiros termos da PA. (3; 7; 11;...)

Solução

$$\begin{cases} r = 4 \\ a_1 = 3 \end{cases} \quad a_{20} = a_1 + 19r = 3 + 19(4) = 79$$

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$$

$$S_{20} = \frac{(a_1+a_{20})20}{2} = \frac{(3+79)20}{2} = 820$$

4.61) Calcule a soma dos 30 primeiros termos de uma PA em que $a_7 + a_{24} = 400$.

Solução

$$S_{30} = \frac{(a_1+a_{30})30}{2} = 15(a_1+a_{30})$$

Porém: $a_1 + a_{30} = a_7 + a_{24}$ e, assim:

$S_{30} = 15(a_1 + a_{30}) = 15(a_7 + a_{24}) = 15(400) = 6\,000$

4.62) Considere a PA (–3; 2; 7;...)

a) Determine a fórmula que dá a soma dos **n** primeiros termos em função de **n**.

b) Calcule a soma dos 15 primeiros termos.

c) Sendo a_i um *termo genérico* dessa PA, calcule:

$$\sum_{i=7}^{40} a_i$$

Solução

a) $a_1 = -3 \qquad r = 5$

$$a_n = a_1 + (n-1)r = (-3) + (n-1)(5) = -3 + 5n - 5 = 5n - 8$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(-3+5n-8)n}{2} = \frac{5}{2}n^2 - \frac{11}{2}n$$

$$S_n = \frac{5}{2}n^2 - \frac{11}{2}n$$

b) Usando a fórmula do item a temos:

$$S_{15} = \frac{5}{2}(15)^2 - \frac{11}{2}(15) = 480$$

c) $$\sum_{i=7}^{40} a_i = a_7 + a_8 + .. + a_{40} = (a_1 + a_2 + .. + a_6 + a_7 + .. + a_{40}) - (a_1 + a_2 + .. + a_6)$$

$$= S_{40} - S_6 = \left[\left(\frac{5}{2}(40)^2 - \frac{11}{2}(40)\right)\right] - \left[\left(\frac{5}{2}(6)^2 - \frac{11}{2}(6)\right)\right] = 3723$$

4.63) A soma dos **n** primeiros termos de uma PA infinita é dada por:

$$S_n = 4n^2 - 6n$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Determine o primeiro termo e a razão.

Solução

$S_n = 4n^2 - 6n$

$$\begin{cases} S_1 = 4(1)^2 - 6(1) = -2 \\ S_2 = 4(2)^2 - 6(2) = 4 \end{cases}$$

Porém $S_1 = a_1$ e $S_2 = a_1 + a_2$. Assim temos: $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_1 + a_2 = 4 \end{cases}$ onde tiramos $a_2 = 6$.

$r = a_2 - a_1 = 6 - (-2) = 8$

A PA é: (–2; 6; 14; ...)

4.64) Determine a fórmula da soma dos **n** primeiros números naturais ímpares.

Solução

A sequência dos números naturais ímpares, ordenados em ordem crescente, é uma PA de razão r = 2.

$$(1; 3; 5; 7; ...)$$

$a_1 = 1$; $a_n = a_1 + (n-1)r = 1 + (n-1)(2) = 2n - 1$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(1+2n-1)n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

$S_n = n^2$

Confronte esta solução com as soluções dos problemas 2.2 e 2.3!

4.65) Sendo x um número real não nulo, calcule:

$E = x^{-53} \cdot x^{-50} \cdot x^{-47} \cdot x^{-44} \cdot \ldots \cdot x^{7}$

Solução

Na multiplicação de potências de mesma base, conserva-se a base e somam-se os expoentes. Assim:

$$E = x^{-53-50-47 \ldots +7}$$

A sequência (–53; –50; ...; +7) é uma PA de **n** termos e razão r = 3. Determinemos o valor de n:

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$7 = -53 + (n-1)(3)$

Resolvendo esta equação obtemos n = 21.

Assim:

$$(-53) + (-50) + (-47) + \ldots + (7) = \frac{[(-53)+(7)]21}{2} = -483$$

Portanto: $E = x^{-483}$

4.66) Considere a PA cujo termo geral é $a_n = 4n - 3$. Calcule

$$\sum_{i=5}^{43} a_i$$

Solução

$$\sum_{i=5}^{43} a_i = \underbrace{a_5 + a_6 + \ldots + a_{43}}_{39 \text{ termos}} = \frac{(a_5 + a_{43})39}{2}$$

$$a_n = 4n - 3 \Rightarrow \begin{cases} a_5 = 4(5) - 3 = 17 \\ a_{43} = 4(43) - 3 = 169 \end{cases}$$

$$\sum_{i=5}^{43} a_i = \frac{(7+169)39}{2} = 3627$$

Um outro modo de "encaminhar" o problema é:

$$\sum_{i=5}^{43} a_i = S_{43} - S_4, \text{ onde } \begin{cases} S_{43} = \text{soma dos 43 primeiros termos} \\ S_4 = \text{soma dos 4 primeiros termos} \end{cases}$$

4.67) Sendo x um número natural com x > 1 calcule:

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\frac{x-3}{x}+\ldots+\frac{1}{x}$$

Solução

A sequência $\left(\frac{x-1}{x};\frac{x-2}{x},\ldots;\frac{1}{x}\right)$ é uma PA de razão $r=\frac{x-2}{x}-\frac{x-1}{x}=\frac{-1}{x}$.

$$\begin{cases} a_1=\dfrac{x-1}{x} \\ a_n=\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$a_n=a_1+(n-1)r$$

$$\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}=(n-1)\left(\frac{-1}{x}\right)$$

$$\frac{1}{x}=1-\frac{1}{x}-\frac{n}{x}+\frac{1}{x}$$

$$\frac{n}{x}=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

Onde: $n = x - 1$

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{\left(\frac{x-1}{x}+\frac{1}{x}\right)(x-1)}{2}=\frac{x-1}{2}$$

4.68) Prove que, se numa PA, $S_m = S_n$ (com $m \neq n$) então $S_{m+n} = 0$.

Solução

$$a_n=a_1+(n-1)r=a_1+nr-r$$

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{(a_1+a_1+nr-r)n}{2}=\frac{r}{2}n^2+\left(\frac{2a_1-r}{2}\right)n$$

$$S_m=\frac{r}{2}m^2+\left(\frac{2a_1-r}{2}\right)m$$

Como $S_m = S_n$, vem:

$$\frac{r}{2}m^2+\frac{2a_1-r}{2}m=\frac{r}{2}n^2+\frac{2a_1-r}{2}n$$

$$rm^2+(2a_1-r)m=rn^2+(2a_1-r)n$$

$$rm^2-rn^2+m(2a_1-r)-n(2a_1-r)=0$$

$$(m^2-n^2)r+(2a_1-r)(m-n)=0$$

$$(m-n)(m+n)r+(2a_1-r)(m-n)=0$$

Como $m - n \neq 0$, podemos cancelá-lo:

$$(m+n)r+(2a_1-r)=0$$

$$(m+n-1)r+2a_1=0 \quad \text{(I)}$$

Por outro lado: $a_{m+n} = a_1 + (m + n - 1)r$

E assim:

$$S_{m+n}=\frac{(a_1+a_{m+n})(m+n)}{2}=\frac{[a_1+a_1+(m+n-1)r](m+n)}{2}=$$

$$=\frac{[2a_1+(m+n-1)r](m+n)}{2}$$

Pela relação (I), a expressão entre colchetes é igual a zero e portanto:

$$S_{m+n}=0$$

4.69) Lembrando que $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, calcule:

$E = 1^2 - 2^2 + 3^3 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \ldots + 99^2 - 100^2$

Solução

$$\oplus\begin{cases} 1^2-2^2=(1-2)(1+2)=-3 \\ 3^2-4^2=(3-4)(3+4)=-7 \\ 5^2-6^2=(5-6)(5+6)=-11 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 99^2-100^2=(99-100)(99+100)=-199 \end{cases}$$

Somando membro a membro temos:

$$E=\underbrace{(-3)+(-7)+(-11)+\ldots+(-199)}_{50\text{ termos}}=\frac{(-3-199)50}{2}=-5050$$

Um outro modo de fazer esse problema é:

$$E = 1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\ldots+99^2-100^2=\sum_{n=1}^{50}\left[(2n-1)^2-(2n)^2\right]$$

Mas $(2n - 1)^2 - (2n)^2 = -4n + 1$

Assim: $E=\sum_{n=1}^{50}(-4n+1)$

A sequência de termo geral $a_n = -4n + 1$ é uma PA tal que

$$\begin{cases} a_1=-4(1)+1=-3 \\ a_{50}=-4(50)+1=-199 \end{cases}$$

Portanto:

$$E=\sum_{n=1}^{50}(-4n+1)=\frac{(-3-199)50}{2}=-5050$$

4.70) Considere a sequência (y_n) dada por $\begin{cases} y_1 = 7 \\ y_n = y_{n-1} + 2n \end{cases}$

Determine y_{45}.

Solução

Pela relação de recorrência vemos que a sequência dada não é PA. De $y_n = y_{n-1} + 2n$ vem:

$$\oplus \begin{cases} \cancel{y_2} = y_1 + 2(2) \\ \cancel{y_3} = \cancel{y_2} + 2(3) \\ \cancel{y_4} = \cancel{y_3} + 2(4) \\ \dots\dots\dots \\ y_{45} = \cancel{y_{44}} + 2(45) \end{cases} \quad \leftarrow \boxed{\text{termos ao lado 44 igualdades}}$$

Somando membro a membro essas 44 igualdades temos:

$$y_{45} = y_1 + 2(2) + 2(3) + 2(4) + \ldots + 2(45) = 7 + \underbrace{4 + 6 + 8 + \ldots + 90}_{\text{PA de 44 termos}} =$$

$$= 7 + \frac{(4+90)44}{2} = 2075$$

4.71) Considere a PA (–7; –1; 5; 11;...; 83). Calcule a soma dos termos de ordem par:

Solução

$$\begin{cases} r = 6 \\ a_1 = -7 \\ a_n = 83 \end{cases} \qquad \begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)r \\ 83 &= -7 + (n-1)(6) \\ n &= 16 \end{aligned}$$

Queremos: $S = \underbrace{a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{16}}_{8 \text{ termos}}$

$$S = \frac{(a_2 + a_{16})8}{2} = \frac{(-1+83)8}{2} = 328$$

Exercícios Propostos

4.72) Numa PA de 57 termos, a_k e a_{32} são equidistantes dos extremos. Determine o valor de k.

4.73) Calcule a soma dos 40 primeiros termos da PA (–3; 1; 5;...)

4.74) Calcule $\sum_{i=1}^{12} (-3i + 6)$.

4.75) Consideremos uma PA de termo geral $a_n = 3n - 20$. Calcule $\sum_{i=10}^{40} a_i$.

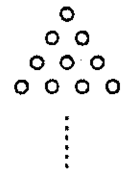
4.76) Calcule a soma dos 40 primeiros termos de uma PA na qual $a_{12} + a_{29} = 60$.

4.77) Numa PA temos $a_4 = 13$ e $a_7 = 25$. Calcule a soma dos 20 primeiros termos.

4.78) Calcule a soma de todos os múltiplos de 4 que estão entre 10 e 1413.

4.79) Calcule a soma de todos os números naturais que estão entre 16 e 900 e que dão resto 2 ao serem divididos por 3.

4.80) Um sargento tentou colocar os 480 soldados sob seu comando, em forma de triângulo com um soldado na 1ª linha, 2 soldados na 2ª linha e assim por diante. No fim, sobraram 15 soldados fora do triângulo. Quantas linhas tem esse triângulo?



4.81) O primeiro termo de uma PA é 20 e a soma dos 10 primeiros termos é 65. Determine a razão da progressão

4.82) Considere a PA $\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{2}; \ldots\right)$. Determine a expressão que dá a soma dos n primeiros termos em função de n.

4.83) A soma dos n primeiros termos de uma PA infinita é dada por:

$$S_n = -3n^2 + 4n$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Escreva os três primeiros termos da PA.

4.84) A soma dos n primeiros termos de uma sequência infinita é dada por:

$$S = n^2 - 3n + 1$$

a) Escreva os 4 primeiros termos dessa sequência.
b) Essa sequência é uma PA?

4.85) A soma dos **k** primeiros termos da PA $\left(\frac{1}{3}; 1; \frac{5}{3}; \ldots\right)$ é igual a 147. Calcule o valor de k.

4.86) Seja a PA $\left(41; \frac{203}{5}; \ldots\right)$ e seja S_n a soma dos **n** primeiros termos. Determine os valores de **n** para os quais $S_n < 0$.

4.87) Calcule a soma dos termos de ordem ímpar da progressão aritmética:

(8; 5; 2;...; –85)

4.88) Calcule o valor de $E = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \ldots + 91^2$.

4.89) Seja a sequência (y_n) dada por

$$\begin{cases} y_1 = 11 \\ y_n = y_{n-1} + 7n \ (n > 1) \end{cases}$$

Determine a fórmula que dá o termo geral y_n em função de **n**.

4.90) Sendo $n \in \mathbb{N}^*$, calcule:

$$\frac{n^2+7}{n} + \frac{n^2+9}{n} + \frac{n^2+11}{n} + \ldots + \frac{n^2+41}{n}$$

4.10. POTÊNCIAS DOS NÚMEROS NATURAIS

Vamos estabelecer fórmulas para o cálculo das seguintes somas:

$$\begin{cases} \gamma_n^{(1)} = 1+2+3+\ldots+n \\ \gamma_n^{(2)} = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 \\ \gamma_n^{(3)} = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 \\ \text{etc.} \end{cases}$$

O cálculo de $\gamma_n^{(1)}$ é **simples**, pois a sequência (1; 2; 3; ...; n) é uma PA. Portanto:

$$\gamma_n^{(1)} = 1+2+3+\ldots+n = \frac{(1+n)n}{2}$$

$$\boxed{\gamma_n^{(1)} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n} \quad (4.10)$$

Para o cálculo de $\gamma_n^{(2)}$ recorreremos a um artifício. Vamos partir da identidade

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

$$\begin{cases} \cancel{2^3} = (1+1)^3 = 1^3 + 3(1)^2 + 3(1) + 1^3 \\ \cancel{3^3} = (2+1)^3 = \cancel{2^3} + 3(2)^2 + 3(2) + 1^3 \\ \cancel{4^3} = (3+1)^3 = \cancel{3^3} + 3(3)^2 + 3(3) + 1^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n+1)^3 = \quad = \cancel{n^3} + 3n^2 + 3n + 1^3 \end{cases}$$

Somando membro a membro essas n igualdades temos:

$$(n+1)^3 = 1 + 3\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right) + 3(1+2+3+\ldots+n) + (1+1+1+\ldots+1)$$

$$(n+1)^3 = 1 + 3\ \gamma_n^{(2)} + 3\ \gamma_n^{(1)} + n$$

$$(n+1)^3 = 3\ \gamma_n^{(2)} + 3\ \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

Dessa igualdade tiramos:

$$\gamma_n^{(2)} = \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n+1)}{3}$$

$$\gamma_n^{(2)} = \frac{2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)}{6} =$$

$$= \frac{2\left(n^3+3n^2+3n+1\right) - 3n^2 - 3n - 2n - 2}{6} =$$

$$= \frac{2n^3+6n^2+6n+2-3n^2-3n-2n-2}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

Portanto:

$$\boxed{\gamma_n^{(2)} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n} \quad (4.11)$$

Fatorando a expressão do lado direito podemos escrever também:

$$\boxed{\gamma_n^{(2)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \quad (4.12)$$

Partindo da identidade:

$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

e procedendo de modo semelhante ao que fizemos anteriormente podemos obter $\gamma_n^{(3)}$:

$$\boxed{\gamma_n^{(3)} = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2} \quad (4.13)$$

Do desenvolvimento de $(n + 1)^5$ obtém-se $\gamma_n^{(4)}$; do desenvolvimento de $(n + 1)^6$ obtém se e assim por diante.

Vamos resumir então os casos mais importantes:

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma_n^{(1)} &= 1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\ \gamma_n^{(2)} &= 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\ \gamma_n^{(3)} &= 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \end{aligned}} \quad (4.14)$$

Exercícios Resolvidos

4.91) Calcule a soma $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2$

Solução

$$S = \gamma_{10}^{(2)} = \frac{1}{3}(10)^3 + \frac{1}{2}(10)^2 + \frac{1}{6}(10) = \frac{1000}{3} + \frac{100}{2} + \frac{10}{6} = \frac{1155}{3} = 385$$

4.92) Seja a PA de termo geral $a = 4n - 3$.
Calcule: $S = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_8^2$

Solução

$$S = \sum_{n=1}^{8} a_n^2 = \sum_{n=1}^{8}(4n-3)^2 = \sum_{n=1}^{8}\left(16n^2 - 24n + 9\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{8}\left(16n^2\right) - \sum_{n=1}^{8}(24n) + \sum_{n=1}^{8}(9) =$$

$$= 16\sum_{n=1}^{8} n^2 - 24\sum_{n=1}^{8} n + \sum_{n=1}^{8}(9) = 16\gamma_8^{(2)} + 8(9) \quad -24\ \gamma_8^{(1)}$$

$$\begin{cases} \gamma_8^{(2)} = \frac{1}{3}(8)^3 + \frac{1}{2}(8)^2 + \frac{1}{6}(8) = \frac{512}{3} + \frac{64}{2} + \frac{8}{6} = 204 \\ \gamma_8^{(1)} = \frac{1}{2}(8)^2 + \frac{1}{2}(8) = 32 + 4 - 36 \end{cases}$$

Assim:
$S = 16\,(204) - 24\,(36) + 8(9) = 2472$

4.93) Calcule a soma:
$S = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + 20 \cdot 21 \cdot 22$

Solução

$$S = \sum_{n=1}^{20} n(n+1)(n+2) = \sum_{n=1}^{20}\left(n^3 + 3n^2 + 2n\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{20} n^3 + 3\sum_{n=1}^{20} n^2 + 2\sum_{n=1}^{20} n = \gamma_{20}^{(3)} + 3\gamma_{20}^{(2)} + 2\gamma_{20}^{(1)} =$$

$$\begin{cases} \gamma_{20}^{(3)} = \frac{1}{4}(20)^4 + \frac{1}{2}(20)^3 + \frac{1}{4}(20)^2 = 44\,100 \\ \gamma_{20}^{(2)} = \frac{1}{3}(20)^3 + \frac{1}{2}(20)^2 + \frac{1}{6}(20) = 2\,870 \\ \gamma_{20}^{(1)} = \frac{1}{2}(20)^2 + \frac{1}{2}(20) = 210 \end{cases}$$

Assim:
$S = 44\,100 + 3(2\,870) + 2(210) = 53\,130$

Exercícios Propostos

4.94) Calcule:
a) $1 + 2 + 3 + \ldots + 30$
b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 12^2$
c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3$

4.95) Calcule:
a) $4^2 + 7^2 + 10^2 + 13^2 + 16^2 + \ldots + 46^2$
b) $2^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3 + \ldots + 16^3$

4.96) Calcule:
a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + 20 \cdot 21$
b) $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \ldots + (2n-1)(2n+1)$
c) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2)$

4.97) Seja a PA cujo termo geral é $a_n = 2n - 1$. Calcule:

$$\sum_{n=1}^{10} a_n^3$$

Capítulo 5

Progressões harmônicas

5.1. DEFINIÇÃO

Consideremos uma sequência cujos termos são diferentes de zero. Dizemos que a sequência é uma **progressão harmônica (PH)** se, e somente se, os inversos dos termos formam uma PA, isto é,

$(a_1; a_2; \ldots; a_n; \ldots)$ é uma PH se, e somente se, $\left(\frac{1}{a_1}; \frac{1}{a_2}; \ldots; \frac{1}{a_n}; \ldots\right)$ é uma PA onde, para todo i, $a_i \neq 0$.

Exemplos

a) A sequência (3; 5; 7; 9; 11; 13) é uma PA; portanto, a sequência $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7}; \frac{1}{9}; \frac{1}{11}; \frac{1}{13}\right)$ é uma PH.

b) A sequência $\left(\frac{4}{3}; 1; \frac{4}{5}; \frac{2}{3}\right)$ é uma PH pois, a sequência $\left(\frac{3}{4}; 1; \frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$ é uma PA $\left(\text{de razão } r = \frac{1}{4}\right)$.

A relação de recorrência para uma PH é:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + r \qquad \begin{array}{l} a_n \neq 0 \\ a_{n-1} \neq 0 \\ n \geq 2 \end{array}$$

5.2. MÉDIA HARMÔNICA

Consideremos n números diferentes de zero:

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

A **média harmônica** deles é o número m_h definido por:

$$m_h = \frac{1}{\left(\dfrac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n}\right)}$$

isto é, **a média harmônica dos n números é o inverso da média aritmética dos inversos dos números.**

Exemplos

a) Determinemos a média harmônica dos números 3, 4 e 5 (aqui temos n = 3).

$$m_h=\frac{1}{\left(\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}{3}\right)}=\frac{3}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}=\frac{3}{\frac{20+15+12}{60}}=\frac{3}{\frac{47}{60}}=\frac{180}{47}$$

b) Determine a média harmônica de dois números reais **a** e **b** não nulos.

$$m_h=\frac{1}{\left(\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2}{\frac{b+a}{ab}}=\frac{2ab}{a+b}$$

5.3. PROPRIEDADE

Sejam **a**, **b** e **c** três termos consecutivos de uma PH

$$(\ldots;\ a;\ b;\ c;\ \ldots)$$

Neste caso $\left(\ldots;\frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{c};\ldots\right)$ é uma PA e, portanto,

$$\frac{1}{b}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2}\ \text{ ou }\ b=\frac{1}{\left(\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2}\right)}$$

Isto significa que **b** é média harmónica de **a** e **c**.
Assim:

Dados três termos consecutivos de uma PH: o termo central é média harmônica dos outros dois.

Exercícios Resolvidos

5.1) Determine o 10° termo da PH.

$$\left(\frac{3}{5};\frac{3}{7};\frac{3}{9};\ldots\right)$$

Solução

Achemos primeiramente o décimo termo da PA

$$\left(\frac{5}{3};\frac{7}{3};\frac{9}{3};\ldots\right)$$

cuja razão é $r=\frac{2}{3}$. Sendo a_{10} o décimo termo da PA, temos:

$$a_{10}=a_1+9r=\frac{5}{3}+9\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{3}+\frac{18}{3}=\frac{23}{3}$$

Portanto, o 10º termo da PH é $\frac{3}{23}$.

5.2) Inserir 4 meios harmônicos entre $\frac{5}{2}$ e $\frac{5}{17}$.

Solução

Vamos primeiramente inserir 4 meios aritméticos entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{17}{5}$

$$\begin{cases} a_1=\frac{2}{5} \\ a_6=\frac{17}{5} \\ r=? \end{cases} \qquad \begin{aligned} a_6&=a_1+5r\\ \frac{17}{5}&=\frac{2}{5}+5r\\ r&=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

Os 4 meios aritméticos entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{17}{5}$ são:

$$\frac{5}{5};\frac{8}{5};\frac{11}{5};\frac{14}{5}$$

e, portanto, os 4 meios harmônicos entre $\frac{5}{2}$ e $\frac{5}{17}$ são:

$$\frac{5}{5};\frac{5}{8};\frac{5}{11};\frac{5}{14}$$

Exercícios Propostos

5.3) Determine a média harmônica de:
a) 4 e 10
b) 2, –4 e 8

5.4) Determine o 20° termo da PH.

$$\left(\frac{3}{2};\frac{2}{5};\ldots\right)$$

5.5) Interpole 6 meios harmônicos entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{24}$.

5.6) Sejam **x, y** e **z** números reais positivos. Mostre que se $(x^2;\ y^2;\ z^2)$ é uma PA então $(y+z;\ z+x;\ x+y)$ é uma PH.

Capítulo

6 Progressões geométricas

6.1. DEFINIÇÃO

Chamamos de **progressão geométrica (PG)** qualquer sequência onde cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma constante denominada **razão da PG**.

Em outras palavras:

> **Uma progressão geométrica de razão q** é uma sequência tal que:
> $$a_n = a_{n-1} \cdot q \qquad (n > 1)$$

a) Na sequência (3; 6; 12; 24; 48) observamos que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por 2. Portanto, é uma PG de razão q = 2.

b) Na sequência $\left(180; 60; 20; \frac{20}{3}; \frac{20}{9}\right)$ vemos que cada termo, a partir do 2º, é igual ao anterior multiplicado por $\frac{1}{3}$. Portanto, a sequência é uma PG de razão $q = \frac{1}{3}$.

c) A sequência (5; –20; 80; –320; ...) é uma PG de razão q = –4.

d) A sequência (5; 5; 5; 5; 5) é uma PG de razão q = 1. Porém, ela é também uma PA de razão r = 0.

e) A sequência (15; 0; 0; 0; 0; 0; ...) é uma PG de razão q = 0.

f) A sequência (0; 0; 0; 0; 0; 0) é uma PG de razão *indeterminada*. É também uma PA de razão r = 0.

A PG de razão indeterminada tem pouco interesse, e portanto, raramente falaremos dela daqui em diante.

6.2. CLASSIFICAÇÃO QUANTO AO CRESCIMENTO

a) **PG de razão indeterminada**

Neste caso é óbvio que a PG é estacionária.

b) **PG de razão q = 1**

Neste caso também é fácil perceber que a PG é estacionária.

c) **PG de razão q = 0**

Quando a razão é igual a zero, como por exemplo na PG:

$$(8;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ ...)$$

a PG não é crescente, nem decrescente, nem estacionária.

d) **PG de razão q < 0**

Neste caso a PG não é crescente, nem decrescente, nem estacionária, pois os termos vão mudando de sinal à medida que passamos de um termo de ordem **k** para o termo de ordem k + 1. Neste caso dizemos que a PG é **oscilante** ou **alternante**.

Exemplos

a) A PG (4; −8; 16; −32; 64) é oscilante.
b) A PG (−5; 15; −45; 135) é oscilante.
c) **PG de razão q tal que q > 0 e q ≠ 1.**

Neste caso, os termos terão todos o mesmo sinal e a PG será crescente ou decrescente.

6.3. PROPRIEDADES

Uma PG de razão q é crescente se, e somente se:

$$a_1 > 0 \ \text{ e } \ q > 1$$
ou
$$a_1 < 0 \ \text{ e } \ 0 < q < 1$$

Já sabemos que neste caso devemos ter q > 0 e, portanto, todos os termos terão o mesmo sinal. Sendo n > 1 temos:

$$\text{PG é crescente} \Leftrightarrow a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow a_{n-1}\cdot q > a_{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{n-1}\ q - a_{n-1} > 0 \Leftrightarrow a_{n-1}(q-1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{n-1} > 0 \ \text{ e } \ q-1>0 \\ \quad\text{ou} \\ a_{n-1} < 0 \ \text{ e } \ q-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{n-1} > 0 \ \text{ e } \ q>1 \\ \quad\text{ou} \\ a_{n-1} < 0 \ \text{ e } \ q<1 \end{cases}$$

Lembrando que *todos os termos têm o mesmo sinal* e q > 0, vem:

$$\text{PG é crescente} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 > 0 \ \text{ e } \ q>1 \\ \quad\text{ou} \\ a_1 < 0 \ \text{ e } \ 0<q<1 \end{cases}$$

Uma PG de razão q é decrescente se, e somente se:

$$a_1 > 0 \ \text{ e } \ 0 < q < 1$$
ou
$$a_1 < 0 \ \text{ e } \ q > 1$$

A justificativa desta propriedade é análoga à da propriedade anterior e assim sendo, deixamos por conta do leitor.

Exemplos

a) Na PG (3; 6; 12; 24;...) temos q = 2 e, portanto:

$$a_1 > 0 \ \text{ e } \ q > 1$$

É uma PG crescente.

b) Na PG $\left(60;\ 20;\ \frac{20}{3};\ ...\right)$ temos $q = \frac{1}{3}$ e, portanto:

$$a_1 > 0 \ \text{ e } \ 0 < q < 1$$

É uma PG decrescente.

c) A PG (−10; −20; −40;...) é decrescente de razão q = 2. Neste caso temos:

$$a_1 < 0 \ \text{ e } \ q > 1$$

d) A PG (−120; −60; −30; −15; ...) é crescente de razão $q = \frac{1}{2}$. Aqui temos:

$$a_1 < 0 \ \text{ e } \ 0 < q < 1$$

6.4. FÓRMULA DO TERMO GERAL

Consideremos a PG de razão q

$$(a_1;\ a_2;\ a_3;...;\ a_n;...)$$

Suponhamos inicialmente que não se trata da PG de razão indeterminada e que $a_1 \neq 0$ e $q \neq 0$. Temos:

$$\otimes \begin{cases} \cancel{a_2} = a_1 \cdot q \\ \cancel{a_3} = \cancel{a_2} \cdot q \\ \cancel{a_4} = \cancel{a_3} \cdot q \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n = \cancel{a_{n-1}} \cdot q \end{cases}$$

Multiplicando membro a membro essas n − 1 igualdades temos:

$$\cancel{a_2}\cdot\cancel{a_3}\cdot\cancel{a_4}\cdot\ldots\cdot a_n = a_1\cdot\cancel{a_2}\cdot\cancel{a_3}\cdot\ldots\cdot\cancel{a_{n-1}}\cdot\underbrace{q\cdot q\cdot q\cdot\ldots q}_{n-1\text{ fatores}}$$

$$\boxed{a_n = a_1\cdot q^{n-1}} \quad (6.1)$$

A equação 6.1 foi obtida, supondo que $a_1 \neq 0$, $q \neq 0$ e que não se trata de PG de razão indeterminada. Mas é fácil verificar que a equação 6.1 é válida, mesmo para os casos em que $a_1 = 0$ ou $q = 0$.

Exemplos

a) $a_2 = a_1 \cdot q$
$a_3 = a_1 \cdot q^2$
$a_4 = a_1 \cdot q^3$
$a_{20} = a_1 \cdot q^{19}$
$a_{k+3} = a_1 \cdot q^{k+2}$

b) Desde que nenhum termo da PG seja nulo, podemos obter a razão dividindo um termo qualquer (a partir do 2º) pelo anterior. Assim:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_{20}}{a_{19}} = \frac{a_7}{a_6}$$

c) Determinemos o 9º termo da PG
(4; 2; 1;...)

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ q = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad a_9 = a_1\cdot q^8 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^8 = 4\cdot\frac{1}{2^8} = \\ = 2^2\cdot\frac{1}{2^8} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

Consideremos uma PG cujos termos sejam todos diferentes de zero:

$(a_1; a_2; a_3;...;a_k;...;a_n;...)$

$$\otimes\begin{cases} \cancel{a_{k+1}} = a_k\cdot q \\ \cancel{a_{k+2}} = \cancel{a_{k+1}}\cdot q \\ \cancel{a_{k+3}} = \cancel{a_{k+2}}\cdot q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = \cancel{a_{n-1}}\cdot q \end{cases}$$

Multiplicando membro a membro essas n – k igualdades temos:

$$a_n = a_k\cdot\underbrace{q\cdot q\cdot q\cdot\ldots q}_{n-k\text{ fatores}}$$

$$\boxed{a_n = a_k\cdot q^{n-k}} \quad (6.2)$$

A equação 6.1 é um caso particular de 6.2, a qual foi deduzida para o caso em que nenhum termo da PG é nulo. Mas é fácil verificar que em qualquer caso vale 6.2.

Exemplos

a) $a_{20} = a_4 \cdot q^{20-4} = a_4 \cdot q^{16}$
$a_{30} = a_5 \cdot q^{25}$

b) Consideremos uma PG onde $a_7 = \frac{2}{3}$, $q = 9$ e calculemos a_{15}

$$a_{15} = a_7\cdot q^8 = \frac{2}{3}\cdot(9)^8 = \frac{2}{3}\cdot(3^2)^8 = \frac{2}{3}\cdot 3^{16} = 2\cdot 3^{15}$$

Consideremos a equação 6.1 para o caso $q \neq 0$:

$$a_n = a_1\cdot q^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$a_n = a_1\cdot q^n\cdot q^{-1} = \frac{a_1}{q}q^n$$

$$a_n = \underbrace{\left(\frac{a_1}{q}\right)}_{\text{constante}}\underbrace{(q)}_{\text{constante}}{}^n$$

Portanto, uma sequência onde o termo geral é dado por uma expressão do tipo

$$\boxed{a_n = A\cdot B^n} \qquad (6.3)$$

onde **A** e **B** são constantes não nulas, é uma PG *cuja razão é igual a B*.

Exemplos

a) A sequência cujo termo geral é dado por $a_n = 4 \cdot 5^n$ é uma PG de razão $q = 5$.

b) A sequência de termo geral $a_n = -8\left(\frac{2}{3}\right)^n$ é uma PG de razão $q = \frac{2}{3}$.

Exercícios Resolvidos

6.1) Determine o 6º termo da PG (1; $\sqrt{2}$; 2;...) e dê a fórmula do seu termo geral em função de n.

Solução

$$q = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \qquad a_1 = 1$$

$$a_6 = a_1\cdot q^5 = (1)\left(\sqrt{2}\right)^5 = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^4}\cdot\sqrt{2} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$a_n = a_1\cdot q^{n-1} = (1)\left(\sqrt{2}\right)^{n-1} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\right)^n = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}\right)^n$$

6.2) Numa PG tem-se $a_1 = 3$ e $a_6 = 96$. Determine sua razão.

Solução

$a_6 = a_1 \cdot q^5$ $\quad q^5 = 32 = 2^5$

$96 = 3 \cdot q^5$ $\quad q^5 = 2^5 \Leftrightarrow q = 2$

6.3) Numa PG temos $a_1 = 6$ e $a_5 = 486$
Determine sua razão.

Solução

$a_5 = a_1 \cdot q^4$ $\quad q^4 = \frac{486}{6} = 81 = 3^4$

$486 = 6 \cdot q^4$ $\quad q^4 = 3^4 \Leftrightarrow q = \pm 3$

Para $q = 3$, a PG é: (6; 18; 54; 162;...).

Para $q = -3$, a PG é: (6; -18; 54; -162;...)

6.4) O número 384 é um dos termos da PG $\left(\frac{3}{8}; \frac{3}{4}; \ldots\right)$. Determine sua "posição".

Solução

$q = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{8}} = 2$ $\quad a_1 = \frac{3}{8}$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $\quad 2^n = 2048 = 2^{11}$

$384 = \frac{3}{8} \cdot 2^{n-1}$ $\quad 2^n = 2^{11} \Leftrightarrow n = 11$

$\frac{(384)(8)}{3} = \frac{2^n}{2}$

Portanto, 384 é o 11º termo da PG.

6.5) Numa PG temos $a_1 + a_2 = -4$ e $a_3 + a_4 = -36$. Escreva os 5 primeiros termos da PG.

Solução

$a_2 = a_1 \cdot q$ $\quad a_3 = a_1 \cdot q^2$ $\quad a_4 = a_1 \cdot q^3$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = -4 \\ a_3 + a_4 = -36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 q = -4 \\ a_1 q^2 + a_1 q^3 = -36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(1+q) = -4 & \text{(I)} \\ a_1 q^2 (1+q) = -36 & \text{(II)} \end{cases}$$

Dividindo membro a membro a equação (II) pela equação (I) temos:

$$\frac{a_1 q^2 (1+q)}{a_1 (1+q)} = \frac{-36}{-4} = 9$$

$$q^2 = 9 \Rightarrow q = \pm 3$$

Da equação (I) vem: $a_1 = \frac{-4}{1+q}$

$$\begin{cases} \text{para } q = 3 \text{ temos } a_1 = \frac{-4}{1+3} = -1 \text{ e a PG é } (-1; -3; -9; -27; -81;\ldots) \\ \text{para } q = -3 \text{ temos } a_1 = \frac{-4}{1-3} = 2 \text{ e a PG é } (2; -6; 18; -54; 162;\ldots) \end{cases}$$

6.6) Numa PG temos $a_3 = 3$ e $a_9 = \frac{3^7}{2^6}$. Determine a_7.

Solução

$a_9 = a_3 \cdot q^6$

$\frac{3^7}{2^6} = 3 \cdot q^6$

$q^6 = \left(\frac{3}{2}\right)^6$

$q = \pm\frac{3}{2}$

$a_7 = a_3 \cdot q^4$

Como $q^4 > 0$ temos:

$a_7 = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 = 3 \cdot \frac{3^4}{2^4} = \frac{243}{16}$

6.7) **Inserir** 5 meios geométricos entre 3 e 192.

Solução

Devemos formar uma PG de 7 termos onde $a_1 = 3$ e $a_7 = 192$

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ \boxed{3} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{192} \end{array}$$

5 meios

$a_7 = a_1 \cdot q^6$

$192 = 3 \cdot q^6$

$q^6 = 64 = 2^6$

$q^6 = 2^6 \Leftrightarrow q = \pm 2$

Portanto, há duas possibilidades:

para $q = 2$: (3; 6; 12; 24; 48; 96; 192)

para $q = -2$: (3; –6; 12; –24; 48; –96; 192)

6.8) Numa PG o 4º termo é 20% do 3º termo. Sabendo que $a_1 = 2000$, calcule a_5.

Solução

$20\% = \frac{20}{100} = 0{,}2 = \frac{1}{5}$

Se a_4 é 20% de a_3, então $a_4 = \frac{1}{5} a_3$.

Isto quer dizer que a razão é $q = \frac{1}{5}$ e assim

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 = (2000)\left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{2000}{5^4} = \frac{2^4 \cdot 5^3}{5^4} = \frac{2^4}{5} = \frac{16}{5}$$

6.9) A população de uma cidade aumenta à taxa de 10% ao ano. Sabendo que em 1970 a população era de 200.000 habitantes, qual a população em 1974?

Solução

Dizer que a população aumenta de 10% ao ano significa que se em um certo ano a população é de x habitantes, o número de habitantes no ano seguinte será

$$x + 10\% \text{ de } x = x + 0{,}1\,x = 1{,}1\,x$$

Assim, de um ano para outro, o número de habitantes é multiplicado por 1,1 e portanto os números de habitantes em cada ano formam uma PG de razão $q = 1{,}1$. Sendo h_{1970} o número de habitantes em 1970 e h_{1974} o número de habitantes em 1974, temos:

$$h_{1974} = h_{1970} \cdot q^4 = (200.000)\,(1{,}1)^4 = (200.000)\,(1{,}4641) = 292.820$$

6.10) Um automóvel foi comprado por R$ 200 000,00 e sofre uma desvalorização de 20% ao ano. Qual o seu valor após 6 anos?

Solução

Sendo x o valor do automóvel em um certo ano, no ano seguinte será

$$x - 20\% \text{ de } x = x - 0{,}2\,x = 0{,}8\,x$$

Portanto, de um ano para o outro o valor do automóvel é multiplicado por 0,8. Em 6 anos seu valor (em reais) será:

$$V = (200\,000)\,(0{,}8)^6 = (200\,000)\,(0{,}262\,144) = 31\,250$$

Portanto, após 6 anos o valor do carro será de R$ 31 250,00.

6.11) Um capital de R$ 400 000,00 foi colocado a juros compostos de 10% ao mês. Calcule o montante após 4 meses.

Solução

Quando os juros são compostos, a taxa é aplicada não sobre o capital inicial mas sobre o montante anterior. Portanto, se x é o montante em um certo mês, no mês seguinte o montante será:

$$x + 10\% \text{ de } x = x + 0{,}1\,x = 1{,}1\,x$$

Assim os montantes mensais formam uma PG de razão $q = 1{,}1$. Sendo R$ 400 000,00 o capital inicial, após 4 meses o montante (em reais) será:

$$m = (400\,000)\,(1{,}1)^4 = (400\,000)\,(1{,}4641) = 585\,640$$

Portanto, após 4 meses o montante será R$ 585 640,00.

6.12) Um tanque tem 1000 litros de álcool. Retiram-se 200 litros que são substituídos por água. Misturamos bem e em seguida retiram-se 200 litros dessa mistura que são substituídos por água, e assim sucessivamente. Após 4 retiradas, quantos litros de álcool restam?

Solução

Antes de cada retirada o tanque tem 1000 litros de líquido dos quais são retirados 200 litros (isto é, $\frac{1}{5}$ do total). Portanto a cada retirada tiramos $\frac{1}{5}$ do líquido que estava no recipiente e portanto restam $\frac{4}{5}$. Assim, a cada retirada, a quantidade de álcool no tanque é multiplicada por $\frac{4}{5}$. Depois da 4ª retirada, a quantidade de álcool que resta é (em litros):

$$1000\left(\frac{4}{5}\right)^4 = 1000\cdot\left(\frac{256}{625}\right) = 1000\,(0{,}4096) = 409{,}6$$

Assim, após a 4ª retirada, sobrarão 409,6 litros de álcool.

6.13) Considere a PG cujo termo geral é

$$a_n = 3 \cdot 2^n$$

e seja a sequência cujo termo geral é

$$b_n = (a_n)^5$$

Mostre que (b_n) é uma PG e calcule a razão.

Solução

$$b_n = (a_n)^5 = (3 \cdot 2^n)^5 = \underbrace{3^5}_{\text{constante}} \cdot (\underbrace{2^5}_{\text{constante}})^n$$

De acordo com a equação 6.3 podemos afirmar que (b_n) é uma PG cuja razão é igual a 2^5.

Exercícios Propostos

6.14) Consideremos a PG $\left(\frac{1}{32}; \frac{1}{16}; \frac{1}{8}; \ldots\right)$.

a) Dê a fórmula de seu termo geral.
b) Determine o 10º termo.

6.15) Numa PG temos $a_1 = \frac{1}{3}$ e $a_7 = \frac{243}{64}$. Determine a razão.

6.16) Numa PG tem-se $a_1 = \frac{25}{8}$ e $q = \frac{2}{5}$. Determine i sabendo que $a_i = \frac{8}{625}$.

6.17) Numa PG temos $a_5 = -\frac{1}{3}$ e $q = -6$. Calcule a_8.

6.18) Numa PG temos $a_3 + a_5 + a_8 = 370$ e $a_4 + a_6 + a_9 = 740$. Calcule o primeiro termo e a razão.

6.19) Numa PG temos $a_{k-1} = 64x$ e $a_{k+2} = -27x$, onde $x \neq 0$. Calcule a_{k+4}.

6.20) Calcule as razões das seguintes progressões geométricas.

a) $\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{12}; \ldots\right)$

b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2}; \frac{25\sqrt{3}}{6}; \ldots\right)$

c) $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}; \frac{3-2\sqrt{2}}{4}; \ldots\right)$

6.21) Um capital de R\$ 500.000,00 foi colocado a juros compostos de 20% ao ano. Calcule o montante após 3 anos.

6.22) Sendo (a_n) uma PA de termo geral

$$a_n = 3n - 2$$

considere a sequência (b_n) cujo termo geral é

$$b_n = 4^{a_n}$$

Mostre que (b_n) é uma PG e calcule sua razão.

6.23) A sequência (a_n) é uma PA cujo termo geral é

$$a_n = 3n - 4$$

e a sequência (b_n) é uma PG cujo termo geral é

$$b_n = 5 \cdot 2^n$$

Considere a sequência (c_n) dada por

$$c_n = b_{a_n}$$

Prove que é uma PG e calcule sua razão.

6.24) Numa PG temos $a_{m+n} = A$ e $a_{m-n} = B$. Sendo $A > 0$ e $B > 0$, calcule a_m.

6.5. MÉDIA GEOMÉTRICA

Consideremos **n** números

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

A **média geométrica** deles é o número m_g dado por:

$$m_g^n = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \quad (6.4)$$

isto é:

$$m_g^n = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

É óbvio que, quando **n** for *par*, devemos ter

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \geq 0$$

Exemplo

Consideremos os 3 números 4, –6 e 9. A média geométrica deles é m_g dada por:

$$m_g^3 = (4)(-6)(9) = -216 = -6^3$$

Portanto $m_g = -6$

No caso de dois números x e y, a média geométrica m_g é dada por

$$m_g^2 = x \cdot y$$

Exemplo

Consideremos os números 4 e 16. A média geométrica m_g deles deve satisfazer:

$$m_g^2 = 4(16) = 64$$

Portanto $m_g = \pm 8$

Observação

Alguns autores definem a média geométrica do seguinte modo:

$$m_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_n}$$

Isto acarreta que quando **n** é par, $m_g \geq 0$ (veja o item 1.3).

6.6. PROPRIEDADE

Sejam **a**, **b** e **c** três termos consecutivos de uma PG

$$(\ldots; a; b; c; \ldots)$$

Suponhamos inicialmente que os três são diferentes de zero e seja **q** a razão da PG. Temos:

$$\frac{b}{a} = q \text{ e } \frac{c}{b} = q$$

Portanto: $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ e assim $b^2 = ac$

É fácil verificar que mesmo no caso em que $q = 0$ vale $b^2 = ac$. Portanto:

Dados três termos consecutivos de uma PG, o termo central é média geométrica dos outros dois. (6.5)

Exemplo

Determine o valor de x de modo que os números $x - 8$, $x + 1$ e $x - 17$ sejam termos consecutivos de uma PG.

Solução

$(\ldots; x - 8; x + 1; x - 17; \ldots)$

$(x + 1)^2 = (x - 8)(x - 17)$

$x^2 + 2x + 1 = x^2 - 17x - 8x + 136$

$27x = 135$

$x = 5$

6.7. REPRESENTAÇÕES ESPECIAIS

Como no caso da PA, quando a PG tem poucos termos pode ser conveniente representá-los de modo especial. Supondo que a razão q seja diferente de zero temos:

a) para 3 termos

$$\frac{x}{q};\ x;\ xq$$

b) para 5 termos

$$\frac{x}{q^2};\ \frac{x}{q};\ x;\ xq;\ xq^2$$

c) para 4 termos

$$\frac{x}{y^3};\ \frac{x}{y};\ xy;\ xy^3 \quad (q = y^2)$$

d) para 6 termos

$$\frac{x}{y^5};\ \frac{x}{y^3};\ \frac{x}{y};\ xy;\ xy^3;\ xy^5 \quad (q = y^2)$$

Exercícios Resolvidos

6.25) Determine as médias geométricas dos números:
a) –10 e –40 b) 16, 4 e 8

Solução

a) $m_g^2 = (-10)(-40) = 400$

$m_g = \pm\sqrt{400} = \pm 20$

b) $m_g^3 = (16)(4)(8) = 2^9$

$m_g = 2^3 = 8$

6.26) Sejam **x** e **y** dois números reais positivos. Sendo m_a, m_g e m_h, respectivamente, as médias aritméticas, geométrica e harmônica de x e y, mostre que

$$m_h \le |m_g| \le m_a$$

Solução

$$m_a = \frac{x+y}{2};\ |mg| = \sqrt{xy};\ m_h = \frac{2xy}{x+y}$$

I) $|mg| \le m_a \Leftrightarrow \sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{xy} \le x+y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4xy \le (x+y)^2 \Leftrightarrow 4xy \le x^2+2xy+y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \le x^2-2xy+y^2 \Leftrightarrow 0 \le (x-y)^2$

Como $(x-y)^2 \ge 0$ é verdade, então $|m_g| \le m_a$ também o é.

II. $m_h \le |mg| \Leftrightarrow \frac{2xy}{x+y} \le \sqrt{xy} \Leftrightarrow \frac{4x^2y^2}{(x+y)^2} \le xy \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{4xy}{(x+y)^2} \le 1 \Leftrightarrow 4xy \le (x+y)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4xy \le x^2+2xy+y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \le x^2-2xy+y^2 \Leftrightarrow 0 \le (x-y)^2$

Como $(x-y)^2 \ge 0$ é verdade, então $m_h \le |m_g|$ também o é.

Reunindo as conclusões (I) e (II) temos:

$$m_h \le |m_g| \le m_a$$

6.27) Que número devemos somar aos números –1, 1 e 4 de modo que se obtenha, nessa ordem, uma PG?

Solução

Sendo x o número procurado, a sequência

$$(-1 + x;\ 1 + x;\ 4 + x)$$

é uma PG e portanto:

$(1 + x)^2 = (-1 + x)(4 + x)$

$1 + 2x + x^2 = -4 - x + 4x + x^2$

$-x = -5$

$x = 5$

6.28) Mostre que, para que a sequência

$$(a;\ b;\ c)$$

seja ao mesmo tempo PA e PG, devemos ter a = b = c

Solução

Se (a; b; c) é PA, de razão **r**, podemos escrever:

$$\begin{cases} a = b - r \\ c = b + r \end{cases}$$

isto é, a sequência pode ser representada por

$$(b - r;\ b;\ b + r)$$

Como é PG, deve valer:

$b^2 = (b - r)(b + r)$

$b^2 = b^2 - r^2$

$r^2 = 0$

$r = 0$

$\begin{cases} a = b - r = b \\ c = b + r = b \end{cases}$

Assim: a = b = c

6.29) Determine 3 números em PG conhecendo sua soma $\frac{19}{9}$ e o seu produto $\frac{8}{27}$.

Solução

Sejam $\frac{x}{q}$; x; xq os três números

$$\begin{cases} \frac{x}{q} + x + xq = \frac{19}{9} & \text{(I)} \\ \frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = \frac{8}{27} & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (II) tiramos $x^3 = \frac{8}{27}$ e portanto $x = \frac{2}{3}$. Substituindo em (I) obtemos:

$$\frac{2}{3q} + \frac{2}{3} + \frac{2q}{3} = \frac{19}{9}$$

$$6 + 6q + 6q^2 = 19q$$

$$6q^2 - 13q + 6 = 0$$

Esta equação tem duas raízes: $q' = \frac{3}{2}$ e $q'' = \frac{2}{3}$.

$$q = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{q} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{9} \\ xq = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{a PG é } \left(\frac{4}{9}; \frac{2}{3}; 1\right)$$

$$q = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{q} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = 1 \\ xq = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \text{a PG é } \left(1; \frac{2}{3}; \frac{4}{9}\right)$$

Observe que a utilização das *representações especiais* é particularmente interessante quando se conhece o produto dos termos da PG.

6.30) Numa PG de 5 termos reais, a soma dos termos de ordem ímpar é 21 e a soma dos termos de ordem par é 10. Determine a PG.

Solução

Representemos os termos da PG por $\frac{x}{q^2}$; $\frac{x}{q}$; x; xq; xq^2

$$\begin{cases} \frac{x}{q^2} + x + xq^2 = 21 & \text{(I)} \\ \frac{x}{q} + xq = 10 & \text{(II)} \end{cases}$$

Este sistema de equações não é tão simples como os que apareceram nos exercícios 6.5 e 6.18. Precisaremos usar alguns artifícios.

De (I) tiramos:

$$\frac{x}{q^2} + xq^2 = 21 - x$$

$$x\left(\frac{1}{q^2} + q^2\right) = 21 - x$$

$$\frac{1}{q^2} + q^2 = \frac{21 - x}{x} \qquad \text{(III)}$$

De (II) tiramos:

$$x\left(\frac{1}{q} + q\right) = 10$$

$$\frac{1}{q} + q = \frac{10}{x} \qquad \text{(IV)}$$

No quadro ao lado vemos que $\frac{1}{q^2} + q^2 = \left(\frac{1}{q} + q\right)^2 - 2$

$\left(\frac{1}{q} + q\right)^2 = \frac{1}{q^2} + 2 \cdot \frac{1}{q} \cdot q + q^2 = \frac{1}{q^2} + q^2 + 2$
Portanto:
$\frac{1}{q^2} + q^2 = \left(\frac{1}{q} + q\right)^2 - 2$

Assim:

$$\frac{21 - x}{x} = \left(\frac{10}{x}\right)^2 - 2$$

$$\frac{21 - x}{x} = \frac{100}{x^2} - 2$$

$$21x - x^2 = 100 - 2x^2$$

$$x^2 + 21x - 100 = 0$$

As raízes desta equação são x' = 4 e x'' = −25

1º) para x = 4 vem: $\frac{1}{q} + q = \frac{10}{x} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

onde tiramos q = 2 ou q = $\frac{1}{2}$

Tomando q = 2, a PG é (1; 2; 4; 8; 16)

Tomando q = $\frac{1}{2}$, a PG é (16; 8; 4; 2; 1)

2º) para x = −25 vem: $\frac{1}{q}+q=\frac{10}{x}=\frac{10}{-25}=-\frac{2}{5}$

onde tiramos a equação:

$5q^2 + 2q + 5 = 0$

que não admite raízes reais.

6.31) Consideremos uma PG crescente de termos positivos e de razão q. Determine os valores de q para os quais três termos consecutivos dessa PG possam ser as medidas dos lados de um triângulo.

Solução

Sejam $\frac{x}{q}$, x e xq os três termos, com x > 0 e q > 1. O maior número é xq.

Para garantir que os três números sejam as medidas dos lados de um triângulo, basta impor que o maior seja menor que a soma dos outros dois.

$$xq<\frac{x}{q}+x$$

Dividindo por x:

$q<\frac{1}{q}+1$

$q^2<1+q$

$q^2-q-1<0$

Esta inequação é satisfeita para:

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<q<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Mas, como q > 1, a resposta é:

$$1<q<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

6.32) Determine uma PG de três termos positivos, sabendo que a soma dos termos é 21 e a soma dos quadrados dos termos é 189.

Solução

1º modo: Um modo de resolver este exercício é representar os termos por $\frac{x}{q}$, x e xq escrevendo:

$$\begin{cases}\frac{x}{q}+x+xq=21\\ \frac{x^2}{q^2}+x^2+x^2q^2=189\end{cases}$$

Em seguida procede-se como no exercício 6.30. Vamos então encaminhar a resolução de um outro modo.

2º modo: Representando a PG por (a; b; c) temos:

$$\begin{cases}a+b+c=21 & \text{(I)}\\ a^2+b^2+c^2=189 & \text{(II)}\end{cases}$$

Lembrando da identidade:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

e usando $b^2 = ac$ temos:

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2b^2 + 2bc$

$(a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2b(a + b + c)$

$21^2 = 189 + 2b\,(21)$

$441 = 189 + 42b$

$b = 6$

Substituindo em (I) e (II) temos:

$$\begin{cases}a+c=15 & \text{(III)}\\ a^2+c^2=153 & \text{(IV)}\end{cases}$$

De (III) vem a = 15 − c. Substituindo em (IV) obtemos a equação

$$c^2 - 15c + 36 = 0,$$

que tem raízes c' = 3 e c'' = 12.

$$\begin{cases}\text{para } c=3 \text{ vem } a=12 \text{ e a PA é } (12;\,6;\,3)\\ \text{para } c=12 \text{ vem } a=3 \text{ e a PA é } (3;\,6;\,12)\end{cases}$$

Exercícios Propostos

6.33) Determine as médias geométricas dos seguintes números:
a) 12 e 27
b) 6; 8; 4 e 24

6.34) Determine o valor de x de modo que (x − 4; 8 + x; 44 + x) seja PG.

6.35) O produto de três números em PG é −9 261 e a soma do 1º com o 2º é −17. Determine a PG.

6.36) A soma dos três primeiros termos de uma PG é $\frac{7}{2}$ e a soma dos quadrados desses termos é $\frac{21}{4}$. Determine a PG.

6.37) A sequência (a; b; c) é uma PA cuja soma dos termos é 24 e a sequência (a; 2b; 10c − 12) é uma PG. Determine a, b e c.

6.38) Determine x de modo que $(2^x; 3^x; 5^x)$ seja uma PG.

6.39) Determine 5 números em PG sabendo que $a_2 + a_4 = 10$ e $a_1 + a_3 + a_5 = 21$.

6.40) A sequência (a; b; c) é uma PG de razão $q \neq 0$, tal que $a < 0$. Determine os valores de q tais que $c > 4b - 3a$.

6.41) Sabendo que (a; b; c) é uma PG mostre que $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$.

6.8. PROPRIEDADES

a) Consideremos uma PG finita onde a_r e a_s são equidistantes dos extremos:

$$(a_1; a_2; \ldots; a_r; \ldots; a_s; \ldots a_n)$$

Suponhamos, inicialmente, que todos os termos sejam diferentes de zero (portanto, a razão q é diferente de zero). Temos:

$$\begin{cases} a_r = a_1 \cdot q^{r-1} & \text{(I)} \\ a_n = a_s \cdot q^{n-s} & \text{(II)} \end{cases}$$

Dividindo membro a membro as igualdades (I) e (II), temos:

$$\frac{a_r}{a_n} = \frac{a_1 \cdot q^{r-1}}{a_s \cdot q^{n-s}}$$

$$\frac{a_r}{a_n} = \frac{a_1}{a_s}$$

Como a_r e a_s são equidistantes dos extremos, temos $r - 1 = n - s$ e, portanto, $q^{r-1} = q^{n-s}$.

$$\boxed{a_r \cdot a_s = a_1 \cdot a_n} \quad \text{(III)}$$

isto é:

O produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos. (6.6)

É fácil verificar que essa propriedade vale também no caso em que q = 0 ou no caso da PG de razão indeterminada.

b) Consideremos uma PG finita de número ímpar de termos, em que a_p é termo central:

$$(a_1; a_2; \ldots; a_{p-1}; a_p; a_{p+1}; a_n)$$

Neste caso a_{p-1} e a_{p+1} são equidistantes dos extremos e, portanto:

$$a_{p-1} \cdot a_{p+1} = a_1 \cdot a_n$$

Mas sabemos que $a_p^2 = a_{p-1} \cdot a_{p+1}$. Portanto:

$$a_p^2 = a_1 \cdot a_n$$

isto é:

Numa PG de número ímpar de termos, o termo central é média geométrica dos extremos e, portanto, é média geométrica de qualquer par de termos equidistantes dos extremos. (6.7)

6.9. PRODUTO DOS TERMOS

Seja P_n o produto dos **n** primeiros termos de uma PG.

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n \quad \text{(I)}$$
$$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 \quad \text{(II)}$$

Multiplicando membro a membro as igualdades (I) e (II) temos:

$$P_n^2 = \underbrace{(a_1a_n)(a_2a_{n-1})(a_3a_{n-2})\ldots(a_{n-2}a_3)(a_{n-1}a_2)(a_na_1)}_{\text{n parênteses}}$$

Dentro de cada um dos parênteses temos o produto de dois termos equidistantes dos extremos ou o próprio produto dos extremos (ou o quadrado do termo central quando n for ímpar) e assim, cada um desses produtos é igual a a_1a_n. Portanto:

$$\boxed{P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n} \quad (6.8)$$

Podemos chegar a outra fórmula para obter P_n:

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_n =$$
$$= a_1 \cdot (a_1q)(a_1q^2)(a_1q^3)\ldots(a_1q^{n-1}) =$$
$$= \underbrace{(a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_1)}_{\text{n vezes}}(q \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot \ldots \cdot q^{n-1}) =$$
$$= a_1^n \cdot q^{1+2+3+\ldots+(n-1)}$$

Porém, $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \frac{[1+(n-1)][n-1]}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Portanto:

$$\boxed{P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}} \quad (6.9)$$

Podemos representar de outro modo:

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

Exemplo

Calcule o produto dos 20 primeiros termos da PG:

$$\left(\frac{-2}{27}; \frac{2}{9}; \frac{-2}{3}; 2; \ldots\right)$$

Solução

$$a_1 = \frac{-2}{27} = \frac{-2}{3^3} \qquad q = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{-2}{27}} = -3$$

$$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$P_{20} = a_1^{20} \cdot q^{\frac{20(19)}{2}} = a_1^{20} \cdot q^{190} = \left(\frac{-2}{3^3}\right)^{20} (-3)^{190} =$$

$$= \frac{2^{20}}{3^{60}} \cdot 3^{190} = 2^{20} \cdot 3^{130}$$

6.10. SOMA DOS TERMOS

Vamos deduzir fórmulas que permitam calcular a soma dos **n** primeiros termos de uma PG. Representando essa soma por S_n, vamos considerar 3 casos.

1º) **razão indeterminada**

É o caso da PG (0; 0; 0; 0; ...) e, portanto, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ temos:

$$\boxed{S_n = 0} \qquad (6.10)$$

2º) **q = 1**

Neste caso a PG pode ser escrita (a_1; a_1; a_1; ...) e, portanto:

$$\boxed{S_n = n \cdot a_1} \qquad (6.11)$$

3º) **q ≠ 1**

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \qquad \text{(I)}$$

Multiplicando os dois membros de (I) por q:

$$q \cdot S_n = \underbrace{a_1q}_{a_2} + \underbrace{a_2q}_{a_3} + \underbrace{a_3q}_{a_4} + \ldots + \underbrace{a_{n-2}q}_{a_{n-1}} + \underbrace{a_{n-1}q}_{a_n} + a_n \cdot q$$

Isto é:

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot q \qquad \text{(II)}$$

Subtraindo membro a membro as igualdades (II) e (I) temos:

$qS_n - S_n = a_nq - a_1$

$S_n(q - 1) = a_nq - a_1$

E como q ≠ 1, temos:

$$\boxed{S_n = \frac{a_nq - a_1}{q-1}} \qquad (6.12)$$

A fórmula 6.12 pode ser transformada para uma outra forma:

$$S_n = \frac{a_nq - a_1}{q-1} = \frac{a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - a_1}{q-1} = \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q-1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$$

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}} \qquad (6.13)$$

Exercícios Resolvidos

6.42) Calcule $\prod_{i=1}^{12}(4 \cdot 3^n)$.

Solução

A sequência de termo geral $a_n = 4 \cdot 3^n$ é uma PG de razão q = 3 e primeiro termo $a_1 = 4(3)^1 = 12$.

Como $P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$ temos:

$$\prod_{i=1}^{12}(4 \cdot 3^n) = P_{12} = a_1^{12} \cdot q^{\frac{12(11)}{2}} = a_1^{12} \cdot q^{66} = (12)^{12}(3)^{66} =$$

$$= (3 \cdot 4)^{12}(3)^{66} = 3^{12} \cdot 4^{12} \cdot 3^{66} = 3^{78} \cdot 4^{12}$$

6.43) Calcule a soma dos 7 primeiros termos da PG (2; 6; 18; ...)

Solução

$$a_1 = 2 \qquad q = \frac{6}{2} = 3$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$$

$$S_7 = \frac{a_1(q^7-1)}{q-1} = \frac{2(3^7-1)}{3-1} = \frac{2(2187-1)}{2} = 2186$$

6.44) Determine, em função de n, o valor da soma

$$S = 1 + 10 + 100 + \ldots + 10^{n-1}$$

Solução

A sequência (1; 10; 100; ...; 10^{n-1}) é uma PG de n termos com $a_1 = 1$ e $q = 10$.

$$S_n = \frac{a_1\left(q^n-1\right)}{q-1} = \frac{1\left(10^n-1\right)}{10-1} = \frac{10^n-1}{9}$$

6.45) Calcule as seguintes somas:

a) $A = 9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{999\ldots9}_{n\ \text{algarismos}}$

b) $B = 1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{111\ldots1}_{n\ \text{algarismos}}$

Solução

a) $A = 9 + 99 + 999 + \ldots + 999\ldots9 =$

$= (10-1) + (100-1) + (1000-1) + \ldots + (10^n-1) =$

$= (10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^n) - \underbrace{(1+1+1+\ldots+1)}_{n\ \text{parcelas}} =$

$$= \frac{10\left(10^n-1\right)}{10-1} - n = \frac{10\left(10^n-1\right)}{9} - n = \frac{10\left(10^n-1\right)-9n}{9}$$

b) $B = 1 + 11 + 111 + \ldots + 111\ldots1 = \dfrac{9+99+999+\ldots+999\ldots9}{9}$

Aproveitando o resultado do item anterior temos:

$$B = \frac{A}{9} = \frac{10\left(10^n-1\right)-9n}{81}$$

6.46) A soma dos **n** primeiros termos de uma PG de razão diferente de 1 é dada, para todo n, por:

$$S_n = \frac{a^{n-4}+a^{n-3}-a^{-4}-a^{-3}}{a^2-1}$$

onde $a^2 \neq 1$. Determine a razão da PG e o 1º termo.

Solução

$$\begin{cases} S_1 = \dfrac{a^{-3}+a^{-2}-a^{-4}-a^{-3}}{a^2-1} = \dfrac{a^{-2}-a^{-4}}{a^2-1} = \dfrac{a^{-4}\left(a^2-1\right)}{a^2-1} = a^{-4} \\ S_2 = \dfrac{a^{-2}+a^{-1}-a^{-4}-a^{-3}}{a^2-1} = \dfrac{a^{-4}\left(a^2+a^3-1-a\right)}{a^2-1} = \dfrac{a^{-4}\left[a^2(1+a)-(1+a)\right]}{a^2-1} = \\ \quad = \dfrac{a^{-4}\left[(1+a)\left(a^2-1\right)\right]}{a^2-1} = a^{-4}(1+a) = a^{-4}+a^{-3} \end{cases}$$

Mas: $S_1 = a_1$ e $S_2 = a_1 + a_2$

Portanto:

$$\begin{cases} a_1 = a^{-4} \\ a_1 + a_2 = a^{-4} + a^{-3} \end{cases}$$

onde tiramos $a_2 = a^{-3}$ e, portanto:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a^{-3}}{a^{-4}} = a$$

6.47) Sendo $x \neq 0$, calcule a soma:

$$S = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 + \ldots + \left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2$$

Solução

$$S = \left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right) + \left(x^4+2+\frac{1}{x^4}\right) + \ldots + \left(x^{2n}+2+\frac{1}{x^{2n}}\right) =$$

$$= \left(x^2+x^4+\ldots+x^{2n}\right) + \underbrace{(2+2+\ldots+2)}_{n\ \text{parcelas}} + \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\ldots+\frac{1}{x^{2n}}\right)$$

Neste ponto vamos considerar 2 casos:

1º) $x^2 = 1$

$S = (1+1+\ldots+1) + (2+2+\ldots+2) + (1+1+\ldots+1) = n + 2n + n = 4n$

Portanto, para $x^2 = 1$ vem $S = 4n$

2º) $x^2 \neq 1$

- $x^2+x^4+\ldots+x^{2n} = \dfrac{x^2\left[\left(x^2\right)^n-1\right]}{x^2-1} = \dfrac{x^2\left(x^{2n}-1\right)}{x^2-1}$
- $2+2+\ldots+2 = 2n$
- $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\ldots+\dfrac{1}{x^{2n}} = \dfrac{\frac{1}{x^2}\left[\left(\frac{1}{x^2}\right)^n-1\right]}{\frac{1}{x^2}-1} = \dfrac{\frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{x^{2n}}-1\right]}{\frac{1-x^2}{x^2}} =$

$$= \frac{\frac{1-x^{2n}}{x^{2n}}}{1-x^2} = \frac{1-x^{2n}}{x^{2n}\left(1-x^2\right)} = \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}\left(x^2-1\right)}$$

Então:

$$S = \frac{x^2\left(x^{2n}-1\right)}{x^2-1} + 2n + \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}\left(x^2-1\right)} = 2n + \frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$$

6.48) Calcule o produto dos n primeiros termos de uma PG conhecendo-se a sua soma S e a soma S' dos seus inversos.

Solução

Observemos, inicialmente, que se tivermos uma PG $(a_1; a_2; ...a_n)$ de razão q, a sequência dos inversos dos termos:

$$\left(\frac{1}{a_1}; \frac{1}{a_2}; ...; \frac{1}{a_n}\right)$$

é também uma PG cuja razão é igual a $\frac{1}{q}$ (estamos supondo que todos os termos são diferentes de zero). Assim:

$$S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S' = \frac{\left(\frac{1}{a_1}\right)\left[\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{q} - 1} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{\frac{1-q^n}{q^n}}{\frac{1-q}{q}} = \frac{q^n - 1}{a_n(q-1)}$$

Portanto:

$$\frac{S}{S'} = \frac{a_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)}{\frac{1}{a_n}\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)} = a_1 \cdot a_n$$

Mas de acordo com a fórmula 6.8 temos:

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n = \left(\frac{S}{S'}\right)^n$$

portanto: $|P_n| = \sqrt{\left(\frac{S}{S'}\right)^n}$

Exercícios Propostos

6.49) Considere a PG $\left(\frac{1}{2}; -1; 2; -4; ...\right)$. Calcule o produto dos 22 primeiros termos.

6.50) Para a PG do exercício anterior, calcule a soma dos 6 primeiros termos.

6.51) Considere a PG cujo termo geral é $a_n = 2 \cdot 3^{n-2}$. Calcule a soma dos 10 primeiros termos.

6.52) Numa PG tem-se razão q = 2 e a soma dos 6 primeiros termos igual a 63. Determine o primeiro termo.

6.53) Numa PG tem-se $a_1 \cdot q = 3$ e $a_1 + q = \frac{7}{2}$. Calcule a soma dos 5 primeiros termos.

6.54) Calcule a soma dos **n** primeiros termos da sequência:

$$(1; 2; 2^2; 2^3; ...)$$

6.55) Seja **A** a soma dos **n** primeiros termos da sequência: (1; 3; 9; 27;...). Calcule, em função de A, a soma dos **n** primeiros termos da sequência:

$$\left(1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; ...\right)$$

6.56) Considere a sequência dada por $a_n = 2^{1-n}$. Calcule o número x dado por:

$$x = \prod_{i=1}^{4} a_i + \prod_{i=1}^{6} a_i$$

6.57) Uma PG tem $a_1 = 3$ e $q = 4$. A soma dos **k** primeiros termos dessa PG é igual a 4 095. Calcule k.

6.11. LIMITE DA SOMA

Consideremos uma PG infinita de razão $q \neq 0$, tal que $|q| < 1$, isto é, $-1 < q < 1$. Neste caso observa-se que, à medida que **n** aumenta, $|a_n|$ diminui.

Exemplos

a) Na PG $\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; ...\right)$ a razão é $q = \frac{1}{2}$ e os termos vão diminuindo à medida que **n** aumenta.

b) Na PG $\left(3; -1; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \frac{-1}{81}; ...\right)$ temos $q = -\frac{1}{3}$ (e, portanto, $|q| < 1$). Observamos que, à medida que **n** aumenta, o módulo de a_n diminui.

Para estes casos, deixando **n** aumentar indefinidamente, o termo a_n *tende a zero*. Dizemos que:

"o limite de a_n, para **n** tendendo ao infinito, é igual a zero"

e simbolizamos por:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Tomemos a fórmula 6.12, que nos dá a soma dos **n** primeiros termos de uma PG de razão $q \neq 1$:

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$$

Fazendo **n** *tender ao infinito*, a_n *tende a zero*; podemos então escrever:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{-a_1}{q-1}$$

ou

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}} \quad (6.14)$$

Podemos escrever simplesmente:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \frac{a_1}{1-q} \qquad (\text{para } 0 \neq |q| < 1)$$

ou

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \frac{a_1}{1-q} \qquad (\text{para } 0 \neq |q| < 1)$$

Exemplo

Consideremos a PG infinita

$$\left(4;\ 2;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ldots\right)$$

cuja razão é $q = \frac{1}{2}$ e, portanto, estamos no caso $0 \neq |q| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

Isto significa que, *por mais termos que tomemos* nesta progressão, a soma nunca ultrapassará o número 8, "chegando cada vez mais perto". Assim, temos, por exemplo:

$$\begin{cases} S_2 = 4+2 = 6 \\ S_3 = 4+2+1 = 7 \\ S_4 = 4+2+1+\frac{1}{2} = 7{,}5 \\ S_5 = 4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = 7{,}75 \\ S_6 = 4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = 7{,}875 \\ S_7 = 4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} = 7{,}9375 \\ S_8 = 4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32} = 7{,}96875 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Observações

1ª) Em vez de "limite da soma" poderemos falar simplesmente na "soma dos termos da PG infinita".

2ª) O assunto de **limites** será estudado com mais detalhes no volume 8 desta coleção.

Exercícios Resolvidos

6.58) Calcule o limite da soma dos termos da PG

$$\left(\frac{8}{3};\ \frac{8}{9};\ \frac{8}{27};\ldots\right)$$

Solução

$$a_1 = \frac{8}{3} \quad , \quad q = \frac{\frac{8}{9}}{\frac{8}{3}} = \frac{1}{3} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{8}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{2}{3}} = 4$$

6.59) Seja a PG infinita $\left(8;\ 2;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{8};\ \ldots\right)$. Calcule a soma dos seus termos de ordem ímpar.

Solução

Neste caso, ao pedir simplesmente a *soma*, queremos nos referir ao *limite da soma*. Repare que a PG $\left(8;\ 2;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{8};\ \ldots\right)$ tem razão $q = \frac{1}{4}$ e a sequência dos seus termos de ordem ímpar $\left(8;\ \frac{1}{2};\ \ldots\right)$ é uma PG de razão $q' = q^2 = \frac{1}{16}$. Assim, sendo S a soma dos termos de ordem ímpar, temos:

$$S = \frac{a_1}{1-q^2} = \frac{8}{1-\frac{1}{16}} = \frac{8}{\frac{16-1}{16}} = \frac{8(16)}{15} = \frac{128}{15}$$

6.60) Um trem move-se com velocidade constante quando surge um obstáculo um pouco adiante. O maquinista, imediatamente, começa a frear de modo que **no 1º segundo o trem anda 20 metros e em cada segundo seguinte anda**, aproximadamente, 80% do que andou no segundo anterior. Sabendo que no instante em que o maquinista começou a frear o obstáculo estava a 150 metros do trem, pergunta-se: haverá choque entre o trem e o obstáculo?

Solução

Como em cada segundo o trem vai percorrer 80% do que percorreu no segundo anterior, os espaços percorridos por ele em cada segundo formarão uma PG de razão q = 80% e $a_1 = 20$. Como $0 \neq |q| < 1$, a soma dos espaços percorridos tem um limite. Temos.

$$q = 80\% = \frac{80}{100} = 0{,}8 \ \text{ e } \ \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{20}{1-0{,}8} = \frac{20}{0{,}2} = 100$$

Portanto o trem percorrerá menos de 100 metros, e assim, nunca haverá o choque, pois inicialmente o trem estava a 150 metros do obstáculo.

6.61) Calcule a geratriz da dízima períodica 0,212121...

Solução

$$x = 0,212121... = 0,21 + 0,0021 + 0,000021 + ... =$$

$$= \frac{21}{100} + \frac{21}{10\,000} + \frac{21}{1\,000\,000} + ... = \frac{21}{10^2} + \frac{21}{10^4} + \frac{21}{10^6} + ...$$

A sequência $\left(\frac{21}{10^2}; \frac{21}{10^4}; ...\right)$ é uma PG de razão

$$q = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$$

Logo

$$x = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{21}{100}}{1-0,01} = \frac{\frac{21}{100}}{0,99} = \frac{21}{99} = \frac{7}{3}$$

Portanto:

$$0,2121... = \frac{7}{33}$$

6.62) Calcule a geratriz da dízima 0,999...

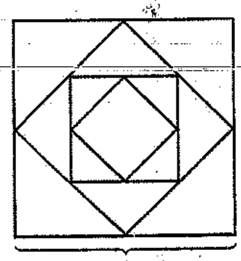
Solução

$$x = 0,999... = 0,9 + 0,09 + 0,009 + ... =$$

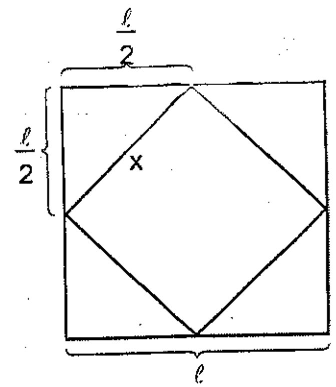
$$= \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + ... = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

Assim: 0,999... = 1

6.63. Consideremos um quadrado de lado **a**. Unindo os pontos médios dos lados obtemos um outro quadrado. Unindo os pontos médios do novo quadrado obtemos um outro quadrado e vamos, assim, procedendo indefinidamente. Calcule o limite da soma das áreas de todos os quadrados assim construídos.



Solução



Sendo ℓ a medida do lado de um dos quadrados e **x** a medida do lado do quadrado seguinte, temos:

$$x^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\ell^2}{4} + \frac{\ell^2}{4} = \frac{2\ell^2}{4}$$

$$x^2 = \frac{\ell^2}{2}$$

Mas, ℓ_2 é a área do quadrado cujo lado mede ℓ e x^2 é a área do quadrado cujo lado mede x. Vemos, então, que de um quadrado para o seguinte, a área é multiplicada por $\frac{1}{2}$. Portanto, a sequência das áreas é uma PG de razão $\frac{1}{2}$ e primeiro termo $a_1 = a_2$.

$$\lim S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{a^2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{a^2}{\frac{1}{2}} = 2a^2$$

6.64) Calcule o limite da expressão

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}\ ...$$

onde a > 0, quando o número de radicais aumenta indefinidamente.

Solução

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}\ ... = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{8}} \cdot a^{\frac{1}{16}} \cdot ... = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...}$$

$$\text{Mas: } \lim\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\text{Assim: } \lim\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}\ ... = a^1 = a$$

Exercícios Propostos

6.65) Calcule o limite da soma dos termos da PG:

$$\left(60;\ -45;\ \frac{135}{4};\ldots\right)$$

6.66) Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} 3\cdot 2^{-n}$

6.67) Sendo a > 1 calcule:

$$\frac{a+1}{a^2}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\ldots$$

6.68) Calcule $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{54}+\ldots\right)$

6.69) A soma dos termos de uma PG infinita é igual a 10 e o primeiro termo é igual a 6. Calcule a razão.

6.70) Seja x um número real não nulo, tal que $-1 < x < 1$. Calcule a soma:

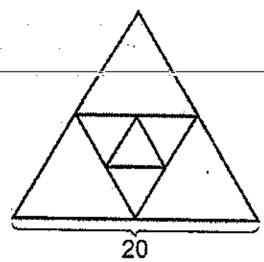
$$x-\frac{x}{3}+x^2-\frac{x}{9}+x^3-\frac{x}{27}+x^4-\frac{x}{81}+\ldots$$

6.71) Numa PG infinita a soma dos termos de ordem ímpar é 54 e a soma dos termos de ordem par é 36. Determine a PG.

6.72) Resolva a equação:

$$x+\frac{x}{4}+\frac{x}{16}+\frac{x}{64}+\ldots=80$$

6.73) Um triângulo equilátero tem lado medindo 20. Ligando os pontos médios dos lados obtemos um outro triângulo equilátero. Ligando os pontos médios dos lados do novo triângulo, obtemos um outro triângulo equilátero e, assim, vamos procedendo indefinidamente. Calcule a soma dos perímetros de todos os triângulos assim construídos.



6.74) Calcule o limite da expressão:

$$\sqrt{a^3\sqrt{b^5\sqrt{a^3\sqrt{b^5}}}}\ \ldots$$

com a > 0 e b > 0, quando o número de radicais aumenta indefinidamente.

6.75) Calcule:

$$S=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots\right)+\ldots+\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)^2}+\ldots\right]+\ldots$$

6.12. PROGRESSÕES ARITMÉTICO-GEOMÉTRICAS

Uma sequência do tipo:

$$(a;\ (a+r)q;\ (a+2r)q^2;\ (a+3r)q^3;\ \ldots)$$

é chamada **progressão aritmético-geométrica.**

Os números a, a + r, a + 2r; ... formam uma PA de razão r e os números q, q^2, q^3, ... formam uma PG de razão **q**.

Para acharmos a soma S_n dos n primeiros termos dessa progressão, usamos um procedimento análogo ao usado na dedução da fórmula da soma dos n primeiros termos da PG (ver item 6.10):

"multiplicamos S_n por q e fazemos a diferença $S_n - qS_n$"

Exercícios Resolvidos

6.76) Calcule a soma dos **n** primeiros termos da sequência:

$$1;\ (3)\ (3);\ (5)\ (3^2);\ (7)\ (3^3);\ (9)\ (3^4);$$

Solução

Aqui temos r = 2 e q = 3. O termo de ordem **n** dessa sequência é:

$$a_n = (2n-1)\,(3)^{n-1}$$

Assim, a soma procurada é:

$$S = 1 + 3(3) + 5(3^2) + 7(3^3) + 9(3^4) + \ldots + (2n-3)(3^{n-2}) + (2n-1)(3^n - 1) \quad \text{(I)}$$

Multiplicando os dois membros de (I) por q = 3, obtemos:

$$3S_n = 1(3) + 3(3^2) + 5(3^3) + 7(3^4) + 9(3^5) + \ldots + (2n-3)(3^{n-1}) + (2n-1)(3^n) \quad \text{(II)}$$

Subtraindo membro a membro (II) de (I):

$$\ominus\begin{cases} S_n = 1+3(3)+5(3^2)+7(3^3)+\ldots+(2n-3)(3^{n-2})+(2n-1)(3^{n-1}) \\ 3S_n = 1(3)+3(3^2)+5(3^3)+\ldots+(2n-3)(3^{n-1})+(2n-1)3^n \end{cases}$$

$$-2S_n = 1+2(3)+2(3^2)+2(3^3)+\ldots\ldots\ldots\ldots+2(3^{n-1})-(2n-1)3^n$$

$$-2S_n = 1-(2n-1)(3^n)+2\underbrace{(3+3^2+3^3+...+3^{n-1})}_{\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}}$$

$$-2S_n = 1-(2n-1)3^n+2\left[\frac{3(3^{n-1}-1)}{2}\right]=$$

$$=1-(2n-1)3^n+3(3^{n-1}-1)=$$

$$=1-(2n-1)3^n+3^n-3=1-3+(1-2n+1)3^n=$$

$$=-2+(2-2n)3^n$$

Portanto: $S_n = 1 + (n-1)3^n$

6.77) Sendo $x > 1$ calcule o *limite da soma*

$$1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}+...$$

Solução

Aqui tem $r = 1$ e $q=\frac{1}{x}\left(\text{note que } \frac{1}{x}<1\right)$

$$-\begin{cases} S=1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{5}{x^4}+... \\ \frac{1}{x}S=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{4}{x^4}+... \end{cases}$$

$$S-\frac{1}{x}S=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}+...=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{x}{x-1}$$

$$S\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x-1}$$

$$S\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{x}{x-1}$$

$$S=\frac{x}{x-1}\cdot\frac{x}{x-1}=\frac{x^2}{(x-1)^2}$$

Exercícios Propostos

6.78) Determine a soma dos **n** primeiros termos da sequência

$$(1;\ 2(3);\ 3(3^2);\ 4(3^3);...)$$

6.79) Sendo $0 < x < 1$, calcule $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + ...$

6.80) Calcule $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^{n-1}}$

Exercícios Suplementares

II.1) Sabendo que $\frac{1}{(2n+1)(2n+5)}=\frac{\frac{1}{4}}{(2n+1)}-\frac{\frac{1}{4}}{(2n+5)}$

Calcule o valor da soma:

$$\frac{1}{3(7)}+\frac{1}{5(9)}+\frac{1}{7(11)}+...+\frac{1}{(2n+1)(2n+5)}$$

II.2) Considere as seguintes progressões geométricas:
a) (2; 4; 8; 16; 32)
b) $\left(8;\ 4;\ 2;\ 1;\ \frac{1}{2}\right)$
c) (2; –4; 8; –16)
Esboce os seus gráficos.

II.3) Sabendo que (a; b; c) é uma PA, mostre que
$(a^2 + ab + b^2;\ c^2 + ac + a^2;\ b^2 + bc + c^2)$
também é uma PA.

II.4) Numa PA de 3 termos a soma de seus termos é igual a 6 e a soma dos quadrados dos termos é igual a 14. Determine a PA.

II.5) Determine 5 números em PA, sabendo que sua soma é igual a 5 e a soma de seus cubos é 265.

275

II.6) Numa PA de razão **r** temos $a_7 = 7$ e $a_1 r = \frac{11}{8}$. Determine a_1 e r.

II.7) Calcule $\left[\sum_{i=1}^{20}(2i-4)\right]^2$

II.8) Numa PA, sendo S_n a soma dos n primeiros termos, sabe-se que $S_7 = S_{11}$. Calcule S_{18}.

→ Questão errada.

II.9) Determine o valor de x na igualdade:

$$2 + 5 + 8 + ... + x = 126$$

II.10) Numa PA o terceiro termo é a + 4b e o décimo terceiro termo é a + 24b. Calcule em função de a e b a soma dos 16 primeiros termos.

II.11) Numa PA decrescente de 4 termos, a soma dos termos é igual a 22 e a soma de seus quadrados é 166. Determine a PA.

II.12) Numa PG temos $a_1 + a_2 = 28$ e $a_3 + a_4 = 175$. Determine a razão e o primeiro termo da progressão.

II.13) Determine três números em PG sabendo que sua soma é 13 e a soma de seus quadrados é 91.

II.14) Numa PG temos $a_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ e $a_3 = \frac{3-2\sqrt{2}}{6}$. Calcule a_1. Solução errada

II.15) A população de certa cidade cresce 15% a cada 6 meses. Se em janeiro de 1965 a população era de 80.000 habitantes, qual sua população em janeiro de 1968?

II.16) Calcule o limite da soma

$$\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\dots$$

II.17) Considere a sequência (a_n) definida por

$$a_i = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

a) Calcule a_1, a_2 e a_3.
b) Mostre que (a_n) é uma PG e determine seu termo geral.
c) Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

II.18) Calcule $8^2 + 12^2 + 16^2 + \dots + 32^2$.

II.19) Calcule $\sum_{n=1}^{20} n(n+3)$.

II.20) Considere a PG de termo geral.

$$a_n = 2 \cdot 4^n$$

e seja a sequência (b_n) definida por

$$b_n = a_n^2$$

a) Mostre que (b_n) é uma PG e determine sua razão.
b) Calcule $\sum_{n=1}^{10} b_n$.

II.21) Determine as geratrizes das seguintes dízimas periódicas
a) 0,444...
b) 0,252525...
c) 0,125125125...

PARTE III

Capítulo 7 – **Logaritmos**
Capítulo 8 – **Propriedades dos logaritmos**
Capítulo 9 – **Logaritmos decimais**
Capítulo 10 – **Logaritmos neperianos – Uma breve história**
Capítulo 11 – **Mudança de base**

Capítulo 7

Logaritmos

7.1. INTRODUÇÃO

Na primeira parte deste volume, estudamos a resolução de algumas *equações exponenciais*, onde a determinação da incógnita não apresentava grandes dificuldades. Faremos uma rápida revisão através de alguns exemplos. (Veja o exercício 1.62.)

Exemplos

a) $2^x = 32$
Como $32 = 2^5$, temos $2^x = 2^5$ portanto, $x = 5$

b) $\left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{4}{25}$

Como $\frac{4}{25} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-2}$, temos $\left(\frac{5}{2}\right)^x = \left(\frac{5}{2}\right)^{-2}$; portanto, $x = -2$

c) $7^x = \sqrt[3]{49}$

Como $\sqrt[3]{49} = 7^{\frac{2}{3}}$, temos $7^x = 7^{\frac{2}{3}}$; portanto, $x = \frac{2}{3}$

d) $\pi^x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

Como $\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \pi^{-\frac{1}{2}}$, temos $\pi^x = \pi^{-\frac{1}{2}}$; portanto, $x = -\frac{1}{2}$

e) $11^x = 121^{\sqrt{2}}$
Como $121^{\sqrt{2}} = 11^{2\sqrt{2}}$, temos $11^x = 11^{2\sqrt{2}}$; portanto, $x = 2\sqrt{2}$

Esse tipo de equação pode ser representado, genericamente, pela igualdade:

$$a^x = b$$

onde **a** e **b** são números reais positivos, e **a** $\neq$ **1**.

Devemos notar que as equações examinadas nos exemplos acima apresentaram uma certa *facilidade* de resolução, pois, foi possível escrever o número **b** como uma potência de base **a** de expoente inteiro ou fracionário, mas sempre *racional*. Entretanto, essa mesma facilidade não ocorre em casos como, por exemplo, a = 3 e b = 16. Sabemos que *existe* um número real **x** tal que $3^x = 16$; é evidente que **x** não pode ser um número inteiro. Na verdade, nesse caso, **x** é um número **irracional** e, por isso, sua representação decimal só pode ser escrita *aproximadamente*. No exemplo em questão, podemos escrever $x \cong 2{,}524$, pois

$$3^{2,524} \cong 16$$

A partir do problema enunciado simbolicamente pela igualdade $a^x = b$ surge a noção de **logaritmo**.

7.2. DEFINIÇÃO DE LOGARITMO

Sejam **a** e **b** números reais positivos, e $a \neq 1$. Nessas condições, define-se:

Logaritmo de b na base a é o expoente x que satisfaz a igualdade $a^x = b$

Indicamos o **logaritmo de b na base a** com a notação $\log_a b$. A definição é, então, traduzida pela **equivalência**:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Exemplos

a) $\log_2 32 = 5$, pois $2^5 = 32$

b) $\log_3 27 = 3$, pois $3^3 = 27$

c) $\log_{10} \frac{1}{10} = -1$, pois $10^{-1} = \frac{1}{10}$

d) $\log_{\frac{1}{5}} 25 = -2$, pois $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 25$

e) $\log_{11} \sqrt[3]{11} = \frac{1}{3}$, pois $11^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{11}$

f) $\log_{\sqrt{7}} \sqrt{7} = 1$, pois $\left(\sqrt{7}\right)^1 = \sqrt{7}$

g) $\log_{13} 1 = 0$, pois $13^0 = 1$

Observações

1ª) **Nomenclatura:** na igualdade $\log_a b = x$, **x** é o **logaritmo**, **a** chama-se **base** e **b** chama-se **logaritmando**. O número **b** pode, também, ser chamado de **antilogaritmo** e ser indicado pela igualdade:

$$b = \text{antilog}_a\, x$$

2ª) **Uma convenção:** quando se *omite* a base **a**, escrevendo-se apenas $\log b$, subentende-se que a base é $a = 10$. Os logaritmos de base 10 chamam-se **logaritmos decimais**.

3ª) **Existência do logaritmo:** a definição de logaritmo faz restrições aos valores do logaritmando **b** e da base **a**. Ao escrevermos a expressão $\log_a b$, devemos, sempre, lembrar que são necessárias as condições:

$$a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$$
$$\text{e}$$
$$b \in \mathbb{R}_+^*$$

isto é,

$$a > 0,\ a \neq 1$$
$$\text{e}$$
$$b > 0$$

A condição $a > 0$ (como vimos anteriormente), é necessária para que a expressão a^x tenha significado, *qualquer que seja o expoente real* **x**. Além disso, sendo $a > 0$, resulta sempre $a^x > 0$ e por isso mesmo torna-se necessária a condição $b > 0$, sem o que não seria possível a igualdade $a^x = b$. Por outro lado, a condição $a \neq 1$ também se faz necessária pois, como $1^x = 1$ para todo x, se tivéssemos $a = 1$, então o único valor possível para b seria também 1 e o conceito de logaritmo, nesse caso, perderia qualquer interesse.

7.3. CONSEQUÊNCIAS IMEDIATAS

Sejam **a**, **b** e **c** números reais positivos ($a \neq 1$) e α um número real qualquer.

Da definição de logaritmo, são imediatas as seguintes conclusões:

(I) $\log_a 1 = 0$

Evidente, pois, para todo **a**, $a^0 = 1$.

(II) $\log_a a = 1$

Decorre, imediatamente, do fato $a^1 = a$.

(III) $\log_a a^\alpha = \alpha$

(IV) $a^{\log_a b} = b$

De fato, se fizermos $\log_a b = x$, teremos $a^{\log_a b} = a^x = b$.

(V) Se $\log_a b = \log_a c$, então $b = c$

Como $\log_a b = \log_a c$, podemos indicar ambos os logaritmos com a mesma letra x:

$$\log_a b = x \quad \text{e} \quad \log_a c = x$$

Então, pela definição, temos:

$$a^x = b \quad \text{e} \quad a^x = c$$

ou seja, $b = c$.

Nota: É imediato que a recíproca também é verdadeira, isto é, se $b = c$, então $\log_a b = \log_a c$, onde *a*, *b* e *c* satisfazem as condições de existência.

7.4. RESUMO

Definição:

$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

Condições de Existência:

$b > 0,\ a > 0$ e $a \neq 1$

Consequências da definição:

(I) $\log_a 1 = 0$

(II) $\log_a a = 1$

(III) $\log_a a^\alpha = \alpha$

(IV) $a^{\log_a b} = b$

(V) $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

Exercícios Resolvidos

7.1) Calcule $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[5]{27}$

Solução

Fazendo $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[5]{27} = x$, temos $\left(\frac{1}{9}\right)^x = \sqrt[5]{27}$ ou $3^{-2x} = 3^{\frac{3}{5}}$ onde $-2x = \frac{3}{5}$;

portanto, $x = \log_{\frac{1}{9}} \sqrt[5]{27} = -\frac{3}{10}$.

7.2) Calcule o valor da expressão:

$y = \log_2 1 + \log_2 2 + 3 \cdot \log_3 27 - 2\log_5 \frac{1}{25}$

Solução

Das consequências da definição, temos:

$\log_2 1 = 0$, $\log_2 2 = 1$, $\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$ e $\log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$.

Então, $y = 0 + 1 + 3 \cdot (3) - 2 \cdot (-2) = 14$

7.3) Calcule o valor de $x = 5^{-1+\log_5 2}$.

Solução

$x = 5^{-1+\log_5 2} = 5^{-1} \cdot 5^{\log_5 2}$

Lembrando que $5^{\log_5 2} = 2$, vem: $x = \frac{1}{5} \cdot 2 = \frac{2}{5}$

7.4) Resolva a equação $x^{2\log_x 3} \cdot \log_2 x = 18$.

Solução

Observando que $x^{2\log_x 3} = \left(x^{\log_x 3}\right)^2 = (3)^2 = 9$, a equação fica:

$$9 \cdot \log_2 x = 18 \text{ ou } \log_2 x = 2, \text{ onde } x = 2^2 = 4$$

Portanto, $S = \{4\}$

7.5) Determine x para que $\log_x 9x = 2$.

Solução

Se $\log_x 9x = 2$, temos $x^2 = 9x$ ou $x^2 - 9x = 0$, ou ainda $x(x-9) = 0$, onde vem $x = 0$ ou $x = 9$. No entanto, sabemos que nem o logaritmando, nem a base podem ser nulos; logo, $x = 0$ não convém e assim $S = \{9\}$.

7.6) Resolva a equação $\log(7x + 4) = \log(5x + 2)$.

Solução

Da consequência (V), temos $7x + 4 = 5x + 2$ onde obtemos $x = -1$.
No entanto, sabemos que os *logaritmandos* $7x + 4$ e $5x + 2$ só podem assumir valores positivos e isto não ocorre quando substituímos x pelo valor determinado, o que equivale a dizer que a equação dada não admite solução. Então, $S = \varnothing$.

7.7) Mostre que, se $\log_a b^\alpha = p$ e $\log_{a^\alpha} b = q$ $(pq\,\alpha \neq 0)$, então $\frac{p}{q} = \alpha^2$.

Solução

Se $\log_a b^\alpha = p$ então $a^p = b^\alpha$ (1)

Se $\log_{a^\alpha} b = q$, então $a^{\alpha q} = b$ (2)

De (1) e (2): $a^p = (a^{\alpha q})^\alpha$ ou $a^p = a^{\alpha^2 q}$

onde $p = \alpha^2 q$ e, finalmente, $\frac{p}{q} = \alpha^2$.

7.8) Resolva a equação $3^{4x+1} - 7 \cdot 3^{2x} + 2 = 0$, sendo dado $\log_3 2 = 0{,}631$.

Solução

Como $3^{4x+1} = 3^{4x} \cdot 3^1$ e $3^{4x} = (3^{2x})^2$ a equação dada pode ser escrita:

$$3 \cdot (3^{2x})^2 - 7 \cdot (3^{2x}) + 2 = 0$$

Fazendo, agora, a *mudança de variável* $3^{2x} = y$, temos a equação:

$$3y^2 - 7y + 2 = 0$$

cujas raízes são $y = \frac{1}{3}$ ou $y = 2$; voltando, então, a $3^{2x} = y$, temos as igualdades:

$$3^{2x} = \frac{1}{3} \text{ e } 3^{2x} = 2$$

Para a primeira, como $\frac{1}{3} = 3^{-1}$, temos $3^{2x} = 3^{-1}$, onde $2x = -1$; portanto $x = -\frac{1}{2}$.

Para resolvermos a segunda, lembremos a equivalência

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

Então: $3^{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x = \log_3 2 = 0{,}631$

onde $x \cong 0{,}315$

Logo, $S = \left\{-\frac{1}{2};\ 0{,}315\right\}$

Exercícios Propostos

7.9) Calcule:

a) $\log_{11} 121$

b) $\log_{121} 11$

c) $\log_2 \frac{1}{32}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 32$

e) $\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{9}$

f) $\log_{\sqrt[4]{7}} \sqrt[3]{7}$

g) $\log_{25} \sqrt[5]{625}$

h) $\log_a \sqrt{a\sqrt{a}}$

i) $\log_{\frac{1}{5}} 0{,}2$

j) $\log 0{,}001$

k) $\log_{0{,}0625} 0{,}125$

l) $\log_{0{,}5625} 0{,}75$

7.10) Resolva as equações:

a) $\log_5 x = 0$

b) $\log_3 x = -2$

c) $\log_{\sqrt{3}} x = \frac{1}{2}$

d) $\log_2 (x + 3) = 1$

e) $\log_{\sqrt{11}} \left(x^2 - 1\right) = 2$

f) $\log_x 3 = 2$

g) $\log_x 2 = -2$

h) $\log_x 2\sqrt{3} = \frac{1}{2}$

7.11) Resolva as equações:

a) $\log_{2x} x = -2$

b) $\log_x 2x = \frac{1}{2}$

c) $\log_{x-3} 4x = 2$

d) $\log_{\sqrt{x-3}} \left(x^2 - 2\right) = 4$

7.12) Resolva as equações:

a) $3 \log_5 x = \log_5 x + 1$

b) $(\log_2 x)^2 - 7 \log_2 x + 10 = 0$

c) $2 (\log x)^2 - 5 \log x + 2 = 0$

7.13) Resolva as equações:

a) $\log_3 (4x - 3) = \log_3 (2x + 5)$

b) $\log (2x - 7) = \log (x - 9)$

c) $\log_5 (x^2 - x) = \log_5 (8x - 14)$

d) $\log_{12} (x^2 - 2x) = \log_{12} (10 - 5x)$

7.14) Calcule:

a) $13^{\log_{13} 5}$

b) $4^{\log_2 3}$

c) $7^{\log_{49} 3}$

d) $5^{2 - \log_5 3}$

e) $4^{\log_2 3 + \log_{16} 3}$

7.15) Calcule o valor de $y = \log_{11} \log_7 \log_2 128$.

7.16) Resolva as equações:

a) $\log_3 \log_2 \log_{10} x = 0$

b) $\log_{27} \log_2 \log_2 (x - 1) = \frac{1}{3}$

7.17) Sendo $\log_a 2 = p$ e $\log_a 3 = q$, calcule:

$$y = a^{\left[\log_a (\log_a 2) + \log_a\left(\log_a 3 + \frac{1}{\log_a 2}\right)\right]}$$

7.18) Sendo $\log_a b = p$ e $\log_b a = q$, mostre que $p \cdot q = 1$.

7.19) Resolva as equações:

a) $2^{3x} + 2^{3x+1} + 2^{3x+2} = 14\sqrt{2}$

b) $5^{2x} - 4 \cdot 5^{x+1} = 5^3$

c) $3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{4x}} + 3 = 0$

7.20) Sendo dados $\log_2 5 = 2{,}322$, $\log 5 = 0{,}699$ e $\log_2 3 = 1{,}585$, resolva as equações:

a) $10^{3(x-1)} = 5$

b) $2^{6x+1} - 11 \cdot 2^{3x} + 5 = 0$

c) $2^{2(x+2)} - 8 \cdot 2^{x+2} + 15 = 0$

Capítulo 8

Propriedades dos logaritmos

Sejam **a**, **b** e **c** números reais positivos, onde $a \neq 1$; α e β são números reais quaisquer com $b \neq 0$.

8.1. PRIMEIRA PROPRIEDADE

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

A demonstração dessa propriedade é bastante simples.

Indicando as expressões $\log_a(bc)$, $\log_a b$ e $\log_a c$, respectivamente por **x**, **y** e **z**, devemos provar que $x = y + z$. Temos as implicações:

$$\log_a(bc) = x \Rightarrow a^x = bc$$

$$\log_a b = y \Rightarrow a^y = b$$

$$\log_a c = z \Rightarrow a^z = c$$

Substituindo as duas últimas igualdades na primeira, obtemos

$$a^x = a^y \cdot a^z \quad \text{ou} \quad a^x = a^{y+z}$$

e daí $x = y + z$

Exemplos

a) $\log_2(35) = \log_2(7 \times 5) = \log_2 7 + \log_2 5$

b) $\log 3 + \log 2 = \log(3 \times 2) = \log 6$

c) $\log_3(18) = \log_3(9 \times 2) = \log_3 9 + \log_3 2 = 2 + \log_3 2$

d) $\log_6 12 + \log_6 3 = \log_6(12 \times 3)\ \log_6 36 = 2$

8.2. SEGUNDA PROPRIEDADE

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

De modo análogo ao que fizemos para demonstrar a primeira propriedade, indicamos as expressões $\log_a\left(\frac{b}{c}\right)$, $\log_a b$ e $\log_a c$, respectivamente por **x**, **y** e **z** e vamos provar que $x = y - z$. Temos as implicações:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = x \Rightarrow a^x = \frac{b}{c}$$

$$\log_a b = y \Rightarrow a^y = b$$

$$\log_a c = z \Rightarrow a^z = c$$

Substituindo as duas últimas na primeira, obtemos

$$a^x = \frac{a^y}{a^z} \text{ ou } a^x = a^{y-z}$$

e daí $x = y - z$

Exemplos

a) $\log_3\left(\frac{10}{27}\right) = \log_3 10 - \log_3 27 = \log_3 10 - 3$

b) $\log_2 18 - \log_2 3 = \log_2\left(\frac{18}{3}\right) = \log_2 6$

c) $\log\left(\frac{m}{pq}\right) = \log m - \log.(pq) = \log m - (\log p + \log q) = \log m - \log p - \log q$

8.3. TERCEIRA PROPRIEDADE

$$\boxed{\log_a(b^\alpha) = \alpha \cdot \log_a b}$$

De fato, fazendo $\log_a(b^\alpha) = x$ e $\log_a b = y$, temos

$$a^x = b^\alpha \text{ e } a^y = b$$

Substituindo o valor de **b** da segunda na primeira, vem

$$a^x = \left(a^y\right)^\alpha \text{ ou } a^x = a^{\alpha y}$$

onde $x = \alpha y$, ou seja $\log_a(b^\alpha) = \alpha \cdot \log_a b$

Exemplos

a) $\log_7(2^5) = 5 \cdot \log_7 2$

b) $\frac{1}{3} \cdot \log_3 8 = \log_3\left(8^{\frac{1}{3}}\right) = \log_3 \sqrt[3]{8} = \log_3 2$

8.4. QUARTA PROPRIEDADE

$$\boxed{\log_{(a^\beta)} b = \frac{1}{\beta} \cdot \log_a b}$$

De fato, fazendo $\log_{(a^\beta)} b = x$ e $\log_a b = y$, temos

$$(a^\beta)^x = b \text{ e } a^y = b$$

e daí, $a^{\beta x} = a^y$

Assim, $\beta x = y$, onde $x = \frac{1}{\beta} \cdot y$, isto é,

$$\log_{(a^\beta)} b = \frac{1}{\beta} \cdot \log_a b$$

Exemplos

a) $\log_{27} x = \log_{(3^3)} x = \frac{1}{3}\log_3 x$

b) $\log_4 5 = \log_{(2^2)} 5 = \frac{1}{2} \cdot \log_2 5 = \log_2\left(5^{\frac{1}{2}}\right) = \log_2 \sqrt{5}$

8.5. CASOS PARTICULARES

1°) Inversão do logaritmando

Na terceira propriedade, na situação particular em que $\alpha = -1$, temos:

$$\log_a(b^{-1}) = -1 \cdot \log_a b$$

isto é,

$$\boxed{\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b}$$

ou seja, *invertendo-se o logaritmando, o logaritmo muda de sinal.*

2°) Inversão da base

Na quarta propriedade, se tivermos $\beta = -1$, obtemos

$$\log_{(a^{-1})} b = \frac{1}{(-1)} \cdot \log_a b$$

isto é,

$$\boxed{\log_{\left(\frac{1}{a}\right)} b = -\log_a b}$$

ou seja, *invertendo-se a base, o logaritmo muda de sinal.*

Observação

A expressão $-\log_a b$ é comumente chamada **cologaritmo de b na base a**, o que quer dizer que o cologaritmo é o *oposto* do logaritmo. Podemos, então, escrever:

$$\boxed{\text{colog}_a b = -\log_a b = \log_a\left(\frac{1}{b}\right) = \log_{\left(\frac{1}{a}\right)} b}$$

3º) Logaritmo de uma raiz

Na terceira propriedade, colocando-se $\alpha = \frac{1}{n}$ (no caso em que **n** é inteiro e positivo), temos:

$$\log_a (b^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$$

isto é,

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b}$$

Não devemos nos esquecer de que **raiz** é também uma **potência**, onde o expoente é o *inverso* do índice do radical.

4º) Caso em que a base é uma raiz

Na quarta propriedade, colocando-se $\beta = \frac{1}{n}$ (no caso em que **n** é inteiro e positivo), temos:

$$\log_{\left(a^{\frac{1}{n}}\right)} b = \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)} \cdot \log_a b$$

isto é,

$$\boxed{\log_{\sqrt[n]{a}} b = n \log_a b}$$

Podemos observar, também, que

$$\log_a b^n = \log_{\sqrt[n]{a}} b$$

Exercícios Resolvidos

8.1) Prove, utilizando o Princípio da Indução Matemática, que:
$\log_a(b_1 b_2 b_3 \cdot \ldots \cdot b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \log_a b_3 + \ldots + \log_a b_n$, para todo $n \geq 2$.
(Generalização da Primeira Propriedade.)

Solução

Teorema 1 – Para $n = 2$, a igualdade dada se escreve:

$$\log_a (b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

que á verdadeira, já que é a primeira propriedade dos logaritmos, demonstrada no item 8.1.

Teorema 2 – *Admitindo* que a igualdade dada é verdadeira para um valor $n = k$ ($k \geq 2$), vamos provar que é também verdadeira para $n = k + 1$. Em outras palavras, temos como *hipótese*:

$$\log_a (b_1 b_2 \ldots b_k) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_k$$

e como *tese*:

$$\log_a (b_1 b_2 \ldots b_k b_{k+1}) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_k + \log_a b_{k+1}$$

Somemos a ambos os membros da hipótese a expressão $\log_a b_{k+1}$:

$$\log_a (b_1 b_2 \ldots b_k) + \log_a b_{k+1} = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_k + \log_a b_{k+1}$$

Como o primeiro membro dessa nova igualdade é uma soma de *dois* logaritmos de mesma base, podemos escrevê-lo como o logaritmo do produto; assim:

$$\log_a [(b_1 b_2 \ldots b_k) \cdot b_{k+1}] = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_k + \log_a b_{k+1}$$

ou seja:

$$\log_a (b_1 b_2 \ldots b_k b_{k+1}) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_k + \log_a b_{k+1}$$

que é a nossa tese.
Provamos, assim, que o logaritmo, numa certa base, do produto de n fatores, todos positivos, é igual à soma dos logaritmos de cada um dos fatores, na mesma base.

8.2) Escreva, na base 10, o desenvolvimento logarítmico da expressão:

$$S = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Solução

Basta escrever $\log S = \log\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$

e aplicar as propriedades conhecidas:

$$\log S = \log\frac{4}{3} + \log\pi + \log r^3 = \log 4 - \log 3 + \log\pi + 3 \log r$$

8.3) Determine a expressão E cujo logaritmo, na base 2 é:
$\log_2 E = 3 + 4 \log_2 x + \log_4 y - 2 \log_2 z$

Solução

Devemos inicialmente escrever o número 3 e o $\log_4 y$ como logaritmos de base 2:

$$3 = \log_2 2^3 \quad \text{e} \quad \log_4 y = \log_{(2^2)} y = \frac{1}{2}\log_2 y$$

Temos, então:

$$\log_2 E = \log_2 2^3 + 4 \cdot \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 y - 2 \log_2 z$$

Aplicando as propriedades vem:

$$\log_2 E = \log_2 8 + \log_2 x^4 + \log_2 y^{\frac{1}{2}} - \log_2 z^2$$

$$\log_2 E = \log_2 \left(8x^4\sqrt{y}\right) - \log_2 z^2$$

$$\log_2 E = \log_2 \left(\frac{\left(8x^4\sqrt{y}\right)}{z^2}\right)$$

Portanto, $E = \frac{\left(8x^4\sqrt{y}\right)}{z^2}$.

8.4) Resolva a equação:

$$\log_3(2x-1) - \log_3(5x+3) = -1$$

Solução

Aplicando a segunda propriedade, escrevemos:

$$\log_3\left(\frac{2x-1}{5x+3}\right) = -1$$

onde:

$$3^{-1} = \frac{2x-1}{5x+3}, \text{ ou seja, } \frac{1}{3} = \frac{2x-1}{5x+3}$$

Resolvendo, obtemos x = 6, valor que satisfaz as condições de existência dos logaritmos apresentados na equação, como se pode facilmente verificar. Logo, S = {6}.

8.5) Dado $\log_3 5 = a$, determine $\log_{81} 125$.

Solução

Temos: $\log_{81} 125 = \log_{(3^4)}(5^3) = \frac{3}{4}\log_3 5 = \frac{3}{4}a$

8.6) Dado log 3 = 0,477, calcule log 9.000.

Solução

Como o logaritmo dado é de base 10, devemos escrever o número 9.000 como um *produto de potências* de bases 3 e 10, que são os elementos conhecidos no problema.
Então:

$9.000 = 9(1.000) = 3^2 \cdot 10^3$

Temos assim que:

$\log 9.000 = \log(3^2 \cdot 10^3) = \log(3^2) + \log(10^3) = 2 \cdot \log 3 + 3 =$
$= 2 \cdot 0,477 + 3 = 3,954$

8.7) Adotando $\log_3 2 = 0,63$ e $\log_3 11 = 2,18$ calcule $\log_3\left(\frac{1}{1936}\right)$.

Solução

Sabemos que:

$\log_3\left(\frac{1}{1\,936}\right) = -\log_3 1\,936$

Decompondo 1 936 em fatores primos, obtemos $1\,936 = 2^4 \cdot 11^2$ e assim:

$\log_3 1\,936 = \log_3(2^4 \cdot 11^2) = \log_3(2^4) + \log_3(11^2) = 4\log_3 2 + 2\log_3 11 =$
$= 4 \cdot 0,63 + 2 \cdot 2,18 = 6,88$

Então, $\log_3\left(\frac{1}{1\,936}\right) = -6,88$

8.8) Sendo $\log(a+b) = p$ e $\log(a^2-b^2) = q$, calcule $\log\left(\frac{a+b}{a-b}\right)$.

Solução

$$\log\left(\frac{a+b}{a-b}\right) = \log\left[\frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{a+b}{a+b}\right] = \log\left[\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}\right] =$$

$$= \log(a+b)^2 - \log(a^2-b^2) = 2\cdot\log(a+b) - \log(a^2-b^2) = 2p - q$$

8.9) Resolva a equação $x^{\log_2 x} = 256\,x^2$.

Solução

Como ambos os membros da equação são positivos (note que a condição de existência do logaritmo exige x positivo), podemos escrever seus logaritmos na base 2:

$$\log_2\left(x^{\log_2 x}\right) = \log_2\left(256\,x^2\right)$$

As propriedades nos permitem escrever:

$$\log_2 x \cdot \log_2 x = \log_2 256 + \log_2 x^2$$

Temos, então

$$(\log_2 x)^2 = 8 + 2\log_2 x$$

Fazendo a substituição $\log_2 x = y$, a equação fica:

$$y^2 = 8 + 2y \text{ ou seja } y^2 - 2y - 8 = 0$$

cujas raízes são y = –2 ou y = 4
Voltando a $\log_2 x = y$, vem:

$$\log_2 x = -2 \text{ ou } \log_2 x = 4$$

e daí $x = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ ou $x = 2^4 = 16$

Logo, $S = \left\{\frac{1}{4}; 16\right\}$

8.10) As raízes reais da equação em x: $x^2 - 2\alpha x - 2\alpha - 1 = 0$ existem e são log (ab) e $\log\left(\frac{a}{b}\right)$. Mostre, sem resolver a equação, que $b = (10a)^{\pm 1}$.

Solução

Das propriedades de soma e produto das raízes de uma equação do 2º grau, temos:

$$\log(ab)+\log\left(\frac{a}{b}\right)=2\alpha \qquad (I)$$

$$\log(ab)\cdot\log\left(\frac{a}{b}\right)=-2\alpha-1 \qquad (II)$$

Trabalhando com (I), vem:

$$\log a + \log b + \log a - \log b = 2\alpha$$

onde $2\cdot\log a = 2\alpha$ e, portanto $\log a = \alpha$ ou seja, $a = 10^{\alpha}$ (III)

Trabalhando, agora, com (II), vem:

$$[\log a + \log b]\cdot[\log a - \log b] = -2\alpha - 1$$

isto é,

$$(\log a)^2 - (\log b)^2 = -2\alpha - 1$$

Como já sabemos que $\log a = \alpha$, tiramos:

$$(\log b)^2 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 = (\alpha+1)^2$$

e daí,

$$\log b = \pm(\alpha + 1)$$

Portanto,

$$b = 10^{\pm(\alpha+1)}$$

Escrevendo que $b = [10^{(\alpha+1)}]^{\pm1} = [10^1\cdot 10^{\alpha}]^{\pm1}$
e aplicando a igualdade (III), obtemos, finalmente

$$b = (10\cdot a)^{\pm1}$$

8.11) Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases}\log_2 x + \log_2 y = 5\\ \log_2 x - \log_2 y = -1\end{cases}$$

Solução

A primeira equação se escreve.

$$\log^2 (x\cdot y) = 5, \text{ onde } xy = 2^5 = 32 \quad (I)$$

A segunda se escreve:

$$\log_2\left(\frac{x}{y}\right) = -1, \text{ onde } \frac{x}{y} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \quad (II)$$

Isolando y em (II): $y = 2x$, e substituindo em (I), obtemos:

$$x\cdot(2x) = 32 \text{ ou } x^2 = 16$$

onde $x = 4$ ou $x = -4$. O resultado $x = -4$ não convém, pois não satisfaz as condições de existência dos logaritmos. Então, para $x = 4$, vem $y = 8$.
Logo, $S = \{(4; 8)\}$

Outro modo: Poderíamos, também, somar membro a membro as equações dadas, obtendo:

$$2\log_2^x = 4$$

onde $\log_2 x = 2$ e, então, $x = 4$.

Na 1ª equação, substituindo $\log_2 x$ por 2. temos:

$$2 + \log_2 y = 5$$

onde $\log_2 y = 3$ e, então, $y = 8$.

Finalmente, escrevemos $S = \{(4; 8)\}$

Exercícios Propostos

8.12) Escreva, na base 10, o desenvolvimento logarítmico de:

a) $a_n = 3\cdot 5^{n-1}$

b) $E = a\sqrt{b\sqrt{c}}$, **a, b e c** reais positivos

c) $P_n = a_1^n\cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$, a_1 e **q** reais positivos

d) $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$, onde $n \in \mathbb{N}^*$ e $(a_1 + a_n) \in \mathbb{R}_+^*$

e) $E = \dfrac{2^5\cdot\sqrt{5}}{\pi\cdot 3^2\cdot\sqrt[3]{7}}$

8.13) Determine a expressão E nos seguintes casos:

a) $\log E = \log 3 + \log 7 + 2\log b$

b) $\log_2 E = \log_4 a + \log_8 b - 2\log_2 c$

c) $\log_3 E = 2 + \log_3 5 - \log_9 a - \log_{27} b$

d) $\log E = 3 + \frac{1}{2}(\log a + \log b) - \frac{3}{4}\log(a + b)$

8.14) Resolva as equações:

a) $\log(x-3) + \log(x+2) = \log 42 - \log 3$

b) $2\log_2(x+1) = \log_2(x+2) + 1$

c) $\log_9(x-1) = \log_3\left(\sqrt{10x-4}\right) - \log_3(x+2)$

d) $\log_5 x^2 + 3\log_{25} x^2 + 2\log_{625} x^2 = 9$

8.15) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases}\log_2 x + \log_2 y = 1\\ \log_3 x - 3\log_3 y = -\log_3 32\end{cases}$ b) $\begin{cases}\log\sqrt{x} - \log\sqrt{y} = \log 3\\ -x^2 + 9y^3 = 90y\end{cases}$

8.16) Sendo $\log_3 2 = a$, calcule:

a) $\log_{81} 64$

b) $\log_3 108$

c) $\log_9 \frac{64}{27}$

8.17) Sendo $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 3 = 0{,}477$, calcule:

a) log5

b) log72

c) log 1200

d) $\dfrac{\log\sqrt{240}+\log\sqrt{27}}{\log 15}$

8.18) Sendo $\log_3 2 = 0{,}63$ e $\log_3 5 = 1{,}46$, calcule:

a) $\log_9 10$

b) $\log_3 2{,}5$

c) $\log_3 \sqrt{450}$

8.19) Sendo $\log 432 = p$ e $\log 648 = q$, calcule $\log 6$.

8.20) Sendo $\log_2\left(\sqrt{17}-3\right) = a$, calcule $\log_2\left(\sqrt{17}+3\right)$.

8.21) Sendo $\log(a-b) = m$ e $\log\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = n$, calcule $\log\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$.

8.22) Resolva as equações:

a) $x^{\log_3 x} = 9x$ — $\log_3 x$

b) $x^{\log x} = \dfrac{x^4}{1000}$

c) $[\log x]^{\log x} = x^2$

8.23) Resolva as equações seguintes, conhecendo-se $\log 2 = 0{,}301$, $\log 3 = 0{,}477$ e $\log_2 3 = 1{,}585$.

a) $10^{3x} = 9$

b) $\left(\sqrt{10}\right)^x = 5$

c) $2 \cdot 100^x - 15 \cdot 10^x + 18 = 0$

d) $(2^{x+1}-3)(2^x-27)(3\cdot 2^x - 1) = 0$

8.24) Mostre que, se três números positivos estão em progressão geométrica, então seus logaritmos de base a, na ordem correspondente, estão em progressão aritmética.

8.25) No exercício anterior, se **q** é a razão da PG e **r** é a razão da PA, qual é a relação entre esses números?

8.26) Calcule o número de termos de uma progressão geométrica em que $a_1 = 4$, $a_n = 13{,}5$ e $q = 1{,}5$.

8.27) Calcule a razão **q** de uma progressão geométrica em que $a_1 = \dfrac{1}{1\,024}$, $a_n = 1.024$ e o número de termos **n** é dado por $n = \log_2 q$.

8.28) As raízes reais da equação $ax^2 - acx + b = 0$ existem e são iguais a $(a \cdot \log_c a)$ e $(b \cdot \log_c b)$. Mostre, então, que $a^a \cdot b^b = c^c$.

8.29) As raízes da equação $x^2 - sx + p = 0$ são $\log a$ e $\log b$; as raízes da equação $x^2 - 2Sx + P = 0$ são $\log(ab)$ e $\log\left(\dfrac{a}{b}\right)$. Nessas condições, calcule p e P em função de s e S.

Capítulo 9

Logaritmos decimais

9.1. SISTEMA DE LOGARITMOS DECIMAIS

O conjunto dos logaritmos, numa dada base **a**, de todos os números reais positivos, é o que chamamos de **Sistema de Logaritmos de base a**.

No caso particular – e mais usual – em que a = 10, temos o **Sistema de Logaritmos Decimais**.

Os logaritmos decimais são também conhecidos como *Logaritmos de Briggs*. Foi o inglês Henry Briggs (1561-1630) quem primeiro utilizou o número 10 para a construção de *tábuas de logaritmos**.

*A primeira de suas tabelas apresentava os valores dos logaritmos decimais dos inteiros de 1 a 1 000 (em *Logarithmorum chilias prima* – 1617). Em *Arithmetica Logarithmica* (1624), Briggs ampliou a tábua até 20 000 e acrescentou, também, os logaritmos dos números de 90 000 a 100 000. Nas duas obras os valores eram apresentados com *quatorze casas decimais*.

9.2. CARACTERÍSTICA E MANTISSA

Já sabemos que os símbolos log b e $\log_{10} b$ são equivalentes. Lembremos, também, que se $\log b = x$ então $10^x = b$ e que $\log 10^\alpha = \alpha$.

Desta última igualdade é imediata a conclusão de que log b só dará como resultado um *número inteiro* se o logaritmando **b** for uma *potência de 10 com expoente inteiro*. A tabela abaixo mostra alguns exemplos:

b	...	$0{,}01 = 10^{-2}$	$0{,}1 = 10^{-1}$	$1 = 10^0$	$10 = 10^1$	$100 = 10^2$	$1000 = 10^3$	...
Log b	...	–2	–1	0	1	2	3	...

Assim, um número **b**, que não seja uma destas potências de 10, terá seu logaritmo decimal **não inteiro**.

Então, que tipo de número será, por exemplo, log 463?

Acompanhe com a tabela. Qualquer que seja o valor positivo de **b**, existem, sempre, duas potências de 10, inteiras e consecutivas, entre as quais **b** está situado. No caso sugerido, b = 463 está entre 10^2 e 10^3:

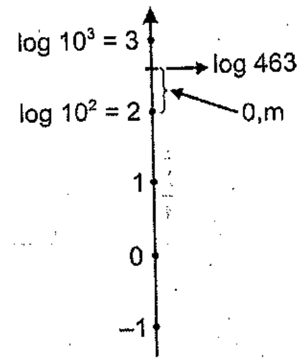
100 — 463 — 1000

$10^2 < 463 < 10^3$

Portanto, o valor de log b deve estar situado entre os valores dos logaritmos decimais dessas potências (eles nada mais são que os próprios expoentes). Vejamos:

$$10^2 < 463 < 10^3$$
$$\log 10^2 < \log 463 < \log 10^3$$
$$2 < \log 463 < 3$$

Observe a ilustração fornecida pela figura abaixo, na qual os **valores dos logaritmos** são colocados em um eixo.

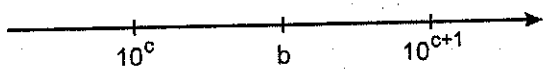


Temos, então, que log 463 é igual a "pouco mais" que dois, isto é, é igual à soma de uma parte inteira (2), com uma parcela decimal que representaremos por 0,m.

$$\log 463 = 2 + 0{,}m = 2{,}m$$

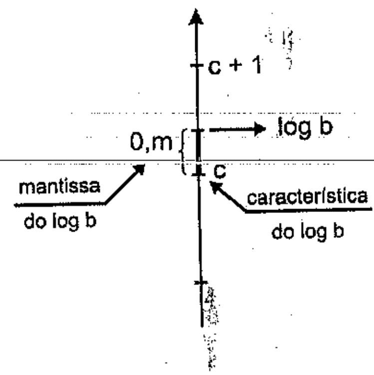
Passemos ao *caso geral*. Dado $b > 0$, existem as potências 10^c e 10^{c+1} com **c** inteiro, tais que

$$10^c \leq b < 10^{c+1}$$



Consequentemente, o logaritmo decimal de **b** estará situado entre os logaritmos decimais destas potências:

$$\log 10^c \leq \log b < \log 10^{c+1}$$



isto é,

$$\boxed{c \leq \log b < c + 1}$$

o que indica que log b é igual à soma de um *número inteiro* c com uma parcela **0,m**, *não negativa e menor do que 1*.

$$\boxed{\log b = c + 0{,}m}$$

Sob essas condições, definimos:

O número c chama-se **característica** do log b
O número **0,m** chama-se **mantissa** do log b

Exemplos

a) com aproximação até a 4ª casa decimal, se log b = 4,5736, escrevemos
$$\log b = 4 + 0{,}5736$$
Então para log b, a característica é c = 4 e a mantissa é 0,m = 0,5736

b) com aproximação até a 7ª casa decimal, temos
$$\log 853 = 2{,}9309490 = 2 + 0{,}9309490$$
Então, para log 853, tem-se c = 2 e 0,m = 0,9309490
Insistimos, nesse ponto, que:

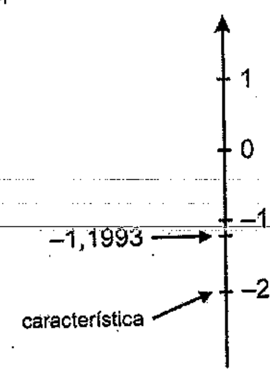
a característica é o maior número inteiro que não supera o valor do logaritmo

o que

a mantissa é sempre um número positivo (ou nulo) e menor do que 1

Fizemos essa repetição dos conceitos de **c** e **0,m** para prevenir um erro muito comum nos casos em que o logaritmo tem valor *negativo*. Vejamos os exemplos:

c) com aproximação de quatro casas decimais, temos log 0,0632 = –1,1993.



Um aluno apressado poderia responder que $c = -1$ e $0{,}m = 0{,}1993$; isto é absolutamente falso, pois a característica, sendo o maior número inteiro que *não supera* o valor do logaritmo, não pode ser -1 e, sim, -2 (veja a figura acima). Além disso, como $-1{,}1993 = -1 - 0{,}1993$, a mantissa dada pelo aluno é, na realidade, negativa, o que contraria definição. Para a característica, o valor correto é $c = -2$. Para obtermos o valor correto da mantissa, podemos escrever

$$\log 0{,}0632 = -1{,}1993 = -2 + 0{,}m$$

e daí tiramos

$$0{,}m = 2 - 1{,}1993$$

onde

$$0{,}m = 0{,}8007$$

Portanto, para $\log 0{,}0632$, tem-se $c = -2$ e $0{,}m = 0{,}8007$

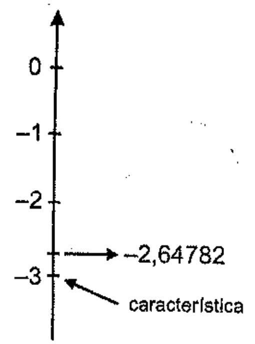
d) com aproximação de cinco casas decimais, temos $\log 0{,}00225 = -2{,}64782$. Como o maior inteiro que não supera $-2{,}64782$ é -3, temos $c = -3$ e escrevemos

$$\log 0{,}00225 = -2{,}64782 = -3 + 0{,}m$$

Daí tiramos

$$0{,}m = 3 - 2{,}64782$$

onde $0{,}m = 0{,}35218$



Portanto, para $\log 0{,}00225$ tem-se $c = -3$ e $0{,}m = 0{,}35218$

Observação

Uma *regra* para a obtenção da característica e da mantissa, *quando o logaritmo dado é negativo*, pode ser enunciada se retomarmos os dois últimos exemplos:

c) $\log 0{,}0632 = -1{,}1993$, onde $\begin{cases} c = -2 \\ 0{,}m = 0{,}8007 \end{cases}$

Fazemos

$$-1{,}1993 = -1 - 0{,}1993 = \underbrace{-1-1}_{c} + \underbrace{1 - 0{,}1993}_{0{,}m} = \underbrace{-2}_{c} + \underbrace{0{,}8007}_{0{,}m}$$

d) $\log 0{,}00225 = -2{,}64782$, onde $\begin{cases} c = -3 \\ 0{,}m = 0{,}35218 \end{cases}$

Fazemos

$$-2{,}64782 = -2 - 0{,}64782 = \underbrace{-2-1}_{c} + \underbrace{1 - 0{,}64782}_{0{,}m} = \underbrace{-3}_{c} + \underbrace{0{,}35218}_{0{,}m}$$

Então, se temos um *logaritmo negativo* $\log b = -C{,}M$, fazemos

$$\log b = -C{,}M = -C - 0{,}M = \underbrace{-C-1}_{c} + \underbrace{1 - 0{,}M}_{0{,}m}$$

E, assim, sua característica **c** e sua mantissa **0,m** são

$$\boxed{\begin{array}{l} c = -C - 1 \\ 0{,}m = 1 - 0{,}M \end{array}}$$

Por exemplo, para $\log b = -4{,}5678$, tem-se

$$c = -4 - 1 = -5$$
$$0{,}m = 1 - 0{,}5678 = 0{,}4322$$

9.3. NOTAÇÃO MISTA DOS LOGARITMOS NEGATIVOS

Nos **logaritmos negativos**, para que a leitura da característica e da mantissa possa ser feita sem qualquer cálculo, é conveniente o uso de uma *notação especial*, que explicaremos usando o exemplo d do item anterior, onde tínhamos

$$\log 0{,}00225 = -2{,}64782 = \underbrace{-3}_{c} + \underbrace{0{,}35218}_{0{,}m}$$

Escrevemos

$$\log 0{,}00225 = \bar{3}{,}35218$$

onde o sinal ⊖ sobre o número 3 significa que *apenas a parte inteira é negativa*, isto é

$$\bar{3}{,}35218 = -3 + 0{,}35218$$

Assim, a notação $\bar{c}{,}m$ significa

$$\boxed{\bar{c}{,}m = -c + 0{,}m}$$

Então, em $\log b = \bar{2}{,}7113$, por exemplo, temos $c = -2$ e $0{,}m = 0{,}7113$.

Chamamos a atenção do leitor para a diferença entre, por exemplo, $-5{,}3971$ e $\bar{5}{,}3971$; note:

$$-5{,}3971 = -5 - 0{,}3971$$
$$\bar{5}{,}3971 = -5 + 0{,}3971$$

Exercícios Propostos

9.1) Complete as igualdades:

a) em log b = 0,2314: c = e 0,m =
b) em log b = 6,3112: c = e 0,m =
c) em log b = $\bar{1}{,}2310$: c = e 0,m =
d) em log b = $\bar{7}{,}1212$: c = e 0,m =
e) em log b = –0,3516: c = e 0,m =
f) em log b = –3,9899: c = e 0,m =

9.2) Efetue as operações indicadas, dando a resposta nas formas mista e comum, quando o resultado for negativo:

a) $\bar{2}{,}23+\bar{1}{,}46$
b) $\bar{3}{,}42-\bar{5}{,}68$
c) $3\times\bar{4}{,}32$
d) $\dfrac{-4{,}6756}{\bar{3}{,}6622}$

9.4. DETERMINAÇÃO DA CARACTERÍSTICA

Já sabemos que, para todo b > 0, tem-se log b = c + 0,m. Conhecendo-se o valor de **b**, a característica c pode ser determinada pelo mesmo processo que utilizamos para defini-la: "cercando" b com duas potências inteiras e consecutivas de 10.

Exemplos

a) se b = 862,13, então $10^2 < b < 10^3$; portanto, log b está entre 2 e 3. Assim, c = 2, e podemos escrever

$$\log 862{,}13 = 2 + 0{,}m$$

b) se b = 0,0128, então $10^{-2} < b < 10^{-1}$; portanto, log b está entre –2 e –1. Assim, c = –2, e podemos escrever

$$\log 0{,}0128 = -2 + 0{,}m$$

Regras Práticas

Apesar desse processo ser bastante simples, é possível estabelecer *regras práticas* para se obter **c** apenas pela *observação* do logaritmando **b**.

Acompanhe com o exemplo a): o número dado b = 862,13 é *maior do que 1* e apresenta *três algarismos antes da vírgula*. A característica de log 862,13 é c = 2. Aqui, a regra é a seguinte:

> Se b > 1, a característica de log b é obtida **subtraindo - se uma unidade do número de algarismos** que **b** apresenta **antes da vírgula**.

Acompanhe, agora, com o exemplo b): o número dado b = 0,0128 é *menor do que 1* e apresenta *dois zeros antes do primeiro algarismo não nulo*. A característica de log 0,0128 é c = –2. A regra, aqui, é a seguinte:

> Se b < 1, a característica de log b é igual ao **oposto do número de zeros** que b apresenta **antes do primeiro algarismo não nulo**.

Exemplos

c) a característica de log 25,3 é c = 1
d) a característica de log 7432,31 é c = 3
e) a característica de log 0,273 é c = –1
f) a característica de log 0,000531 é c = –4

Vamos, agora, justificar essas regras. Inicialmente, lembremos que (com p inteiro)

se $10^p \le b < 10^{p+1}$, então a característica de log b é c = p.

Para justificar a **primeira regra** (válida para b > 1), observemos que:

1º) se $10^0 \le b < 10^1$, então **c = 0**; mas todo número entre 1 e 10 tem **um algarismo** na sua parte inteira.
2º) se $10^1 \le b < 10^2$, então **c = 1**; mas todo número entre 10 e 100 tem **dois algarismos** na sua parte inteira.
3º) se $10^2 \le b < 10^3$, então **c = 2**; mas todo número entre 100 e 1 000 tem **três algarismos** na sua parte inteira.

De modo geral, se $10^n \le b < 10^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$), então **c = n** e além disso **b** tem **n + 1 algarismos** na sua parte inteira

Isso mostra que relação existe entre a característica **c** e o número de algarismos da parte inteira de b > 1:

> Se [número de algarismos da parte inteira] = p então tem-se c = p – 1

Para justificar a **segunda regra** (válida para b < 1), observemos que:

1º) se $10^{-1} \le b < 10^0$, então **c = –1**; mas todo número entre 0,1 e 1 tem **um zero** antes do primeiro algarismo não nulo.
2º) se $10^{-2} \le b < 10^{-1}$, então **c = –2**; mas todo número entre 0,01 e 0,1 tem **dois zeros** antes do primeiro algarismo não nulo.

De modo geral, se $10^{-n} \le b < 10^{-n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$), então **c = –n** e, além disso, **b** tem **n zeros** antes do primeiro algarismo não nulo.

Isso mostra que relação existe entre a característica **c** e o número de zeros que precedem o primeiro algarismo não nulo de b < 1:

> Se [número de zeros que precedem o primeiro algarismo não nulo] = p então tem-se c = –p

9.5. PROPRIEDADE FUNDAMENTAL DA MANTISSA

Se dois números positivos b_1 e b_2, em suas representações decimais, só diferem pela posição da vírgula, então seus logaritmos decimais têm a mesma mantissa.

Vejamos um exemplo.

Se $b_1 = 3{,}5732$ e $b_2 = 3573{,}2$, então $\log b_1$ e $\log b_2$ têm a mesma mantissa.

De fato, notando que $b_2 = 1\,000\ b_1$

temos $\log b_2 = \log (1\,000 b_1) = \log 1\,000 + \log b_1$,

onde $\log b_2 = 3 + \log b_1$

Então, se $\log b_1 = c + 0{,}m$, vem que

$$\log b_2 = 3 + c + 0{,}m = (c + 3) + 0{,}m$$

ou seja $\log 3{,}5732$ e $\log 3573{,}2$ têm a mesma mantissa.

Vamos, então, demonstrar a propriedade para o caso geral.

Seja $\log b_1 = c + 0{,}m$, isto é, $\log b_1$ tem característica **c** e mantissa **0,m**.

Dizer que b_1 e b_2 *diferem apenas na posição da vírgula* é o mesmo que dizer que b_2 é igual a b_1 multiplicado por uma *potência inteira* de 10, isto é, existe um **inteiro n** tal que

$$b_2 = 10^n \cdot b_1$$

Temos, então

$$\log b_2 = \log (10^n\, b_1) = \log 10^n + \log b_1$$

ou seja, $\log b_2 = n + \log b_1$

como $\log b_1 = c + 0{,}m$, vem $\log b_2 = n + c + 0{,}m$

Como n e c são inteiros, $\log b_2$ tem característica $n + c$ e **mantissa 0,m.**

Assim, $\log b_1$ e $\log b_2$ têm a mesma mantissa.

Exemplificando, mais uma vez:

Com aproximação até a 4ª casa decimal, a mantissa de log 837,56 é 0,9230. Assim, log 8,3756; log 0,83756; log 8375,6; log 8375600 e log 0,0083756 têm mantissa 0,9230; suas características, no entanto, são todas diferentes.

Observemos:

$$\log 837{,}56 = 2{,}9230$$
$$\log 8{,}3756 = 0{,}9230$$
$$\log 0{,}83756 = \bar{1}{,}9230$$
$$\log 8375{,}6 = 3{,}9230$$
$$\log 8375600 = 6{,}9230$$
$$\log 0{,}0083756 = \bar{3}{,}9230$$

9.6. USO DA TÁBUA DE LOGARITMOS

No final deste volume há uma tabela denominada **Tábua de Logaritmos. Os números ali existentes são, apenas, os valores das mantissas**, isto é, para um certo número **N**, a tábua fornece a *mantissa do log N*, com aproximação de quatro casas decimais. (As características são facilmente determinadas com as regras vistas anteriormente.)

Veja uma reprodução das linhas iniciais e finais da tábua.

Tábua de Logaritmos Decimais

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
⋮					⋮					
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Você notou que a tábua começa com N = 100 e termina com N = 999; no entanto, utilizando a *propriedade fundamental da mantissa*, é possível conhecer as mantissas dos logaritmos de números N que não constam da tabela. Por exemplo, para determinar a mantissa de log 12, lemos na tábua a de log 120; para determinar a mantissa de log 98,3 procuramos, na tábua, a de log 983.

São dois os problemas fundamentais que envolvem a tábua de logaritmos:

1º problema: *Como calcular o logaritmo decimal de um número dado.*

2º problema: *Como calcular um número, conhecendo o seu logaritmo decimal.*

Usaremos alguns exemplos para esclarecer as soluções desses problemas. Sua leitura deve ser acompanhada com uma consulta à tábua, sempre que esta for citada.

1º problema: Como calcular o logaritmo decimal de um número dado.

Exemplos

a) Calcule log 637.
A característica, pela regra prática, é c = 2. Na tábua, diante do número 637 (linha do 63 e coluna do 7), lê-se 8041, o que quer dizer que a mantissa é 0,m = 0,8041. Assim,
$$\log 637 = c + 0{,}m = 2 + 0{,}8041 = 2{,}8041$$

b) Calcule log 4,48.
A característica é c = 0. Para acharmos a mantissa, devemos procurar, na tábua, o número 448 (linha do 44 e coluna do 8), pois, pela propriedade fundamental da mantissa, esta é a mesma para os logaritmos de 448 e de 4,48. Obtemos, então, 0,m = 0,65 13. Assim,
$$\log 4{,}48 = c + 0{,}m = 0 + 0{,}6513 = 0{,}6513$$

c) Calcule log 44 800.
A característica é c = 4. A mantissa de log 44 800 é a mesma de log 448, já obtida no exemplo b): 0,m = 0,6513. Assim,

$$\log 44\,800 = c + 0{,}m = 4 + 0{,}6513 = 4{,}6513$$

d) Calcule log 0,00448.
A característica é c = –3. A mantissa (mais uma vez não levando em conta a posição da vírgula), é a mesma de log 448: 0,m = 0,6513. Assim,

$$\log 0{,}00448 = c + 0{,}m = -3 + 0{,}6513 = -2{,}3487$$

(poderíamos, também, responder na forma $\log 0{,}00448 = \bar{3}{,}6513$).

e) Calcule log 84,642.
A característica é c = 1. Quanto à mantissa, mesmo não levando em consideração a posição da vírgula, não conseguimos obtê-la, pois o número 84642 excede a "capacidade" da nossa tabela, que só vai até 999. O processo que vamos descrever para contornar esse problema é conhecido como INTERPOLAÇÃO. Vamos calcular a mantissa correspondente ao número 846,42. Procuramos, na tábua, as mantissas correspondentes a 846 e 847; lemos então:

$$\boxed{\begin{array}{l} 846 \to 9274 \\ 847 \to 9279 \end{array}}$$

Vê-se que o acréscimo de 1 unidade ao número 846 acarreta um aumento de 5 unidades no valor de **m**. Ora, o número 846,42 corresponde a 846 com um acréscimo de apenas 0,42. Com esses *acréscimos*, construímos a seguinte *regra de três*:

acrescentando a 846 a quantidade	o valor de m aumenta de
1	5
0,42	x

Daí vem que $\frac{1}{0{,}42} = \frac{5}{x}$, ou seja, $x \cong 2{,}10$

Portanto, como x é o *acréscimo*, o valor de **m** procurado é

$$9274 + 2{,}10 = 9276{,}10 \cong 9276$$

ou seja, a nossa mantissa é 0,m = 0,9276.
Finalmente, temos

$$\log 84{,}642 = 1 + 0{,}9276 = 1{,}9276$$

2º problema: Como calcular um número, conhecendo o seu logaritmo decimal.

Exemplos

f) O Calcule b, sendo log b = 1,5263.
Temos que c = 1 e 0,m = 0,5263. Na tábua, localizamos 5263 que é o valor de **m** correspondente ao número 336 (linha do 33 e coluna do 6).

Falta, agora, colocar a vírgula, o que fazemos com base na característica: como **c = 1**, sabemos que o logaritmando **b** tem **dois** algarismos antes da vírgula. Logo,

$$b = 33{,}6$$

g) Calcule b, sendo $\log b = \bar{3}{,}9595$.
Temos c = –3 e 0,m = 0,9595. Na tábua, para m = 9595, encontramos o número 911. Como **c = –3**, sabemos que o logaritmando **b** tem **três zeros** antes do primeiro algarismo não nulo. Logo,

$$b = 0{,}00911$$

h) Calcule b, sendo log b = –0,2834.
Conforme a regra vista no final do item 9.2, temos

$$c = -C - 1 = -0 - 1 = -1$$

$$0{,}m = 1 - 0{,}M = 1 - 0{,}2834 = 0{,}7166$$

Na tábua, não encontramos, para **m**, o valor 7166. Os valores imediatamente abaixo e acima de 7166 são 7160 e 7168, com as seguintes correspondências:

$$\boxed{\begin{array}{l} 7160 \to 520 \\ 7168 \to 521 \end{array}}$$

É claro, então, que 7166 corresponde a um número entre 520 e 521. Vemos, no quadro acima, que um acréscimo de 8 unidades no valor de **m** acarreta um acréscimo de 1 unidade ao número correspondente.

Ora, m = 7166 corresponde a 7160 com um acréscimo de 6 unidades. Construímos, então, a *regra de três*:

Se m aumenta de	o número correspondente aumenta de
8	1
6	x

Daí vem que $\frac{8}{6} = \frac{1}{x}$, ou x = 0,75

Portanto, o número procurado é

$$520 + 0{,}75 = 520{,}75$$

faltando, agora, deslocar a vírgula para a posição correta. Como c = **–1**, temos, finalmente

$$b = 0{,}52075$$

9.7. CÁLCULO APROXIMADO DE EXPRESSÕES NUMÉRICAS, COM AUXÍLIO DE LOGARITMOS

Os logaritmos se prestam a uma grande variedade de aplicações práticas. Vejamos, através de exercícios, algumas delas.

Exercícios Resolvidos

9.3) Calcule $x = \sqrt[5]{(52,3)^3}$

Solução

Calculemos, inicialmente, log x

$$\log x = \log \sqrt[5]{(52,3)^3} = \frac{3}{5} \log 52,3$$

Com o auxílio da tábua, temos que log 52,3 = 1 + 0,7185 = 1,7185, onde

$$\log x = \frac{3}{5} \cdot 1,7185$$

ou seja,

$$\log x = 1,0311$$

Recaímos agora no problema de calcular o número x, conhecendo seu logaritmo decimal. Temos c = 1 e 0,m = 0,0311. Como não encontramos m = 0311 na tábua, dela tomamos

$$\boxed{\begin{array}{l} 0294 \to 107 \\ 0334 \to 108 \end{array}}$$

onde vemos que um acréscimo de 40 unidades no valor de **m** acarreta um acréscimo de uma unidade ao número correspondente; como 0311 é igual a 0294 com um acrescimo de 17 unidades, vem a *regra de três*:

Se m aumenta de	o número correspondente aumenta de
40	1
17	y

Daí $\frac{40}{17} = \frac{1}{y}$, ou seja, y ≅ 0,43,

e o número procurado é 107 + 0,43 = 107,43. Como c = 1, x tem **dois** algarismos antes da vírgula. Logo

$$x = \sqrt[5]{(52,3)^3} = 10,743$$

9.4) Resolva a equação $2,72 \cdot x^3 - \sqrt{1,8} = 0$

Solução

Isolando x, temos

$$x^3 = \frac{\sqrt{1,8}}{2,72} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{1,8}}{2,72}} = \frac{\sqrt[6]{1,8}}{\sqrt[3]{2,72}}$$

Tomando, agora, log x, vem:

$$\log x = \log\left(\frac{\sqrt[6]{1,8}}{\sqrt[3]{2,72}}\right) = \log\sqrt[6]{1,8} - \log\sqrt[3]{2,72} = \frac{1}{6}\log 1,8 - \frac{1}{3}\log 2,72$$

Com o auxílio da tábua, temos os valores

log 1,8 = 0 + 0,2553 = 0,2553

log 2,72 = 0 + 0,4346 = 0,4346

Então,

$$\log x = \frac{1}{6} \cdot 0,2553 - \frac{1}{3} \cdot 0,4346$$

ou seja, log x = −0,1023, onde

$$c = -0 - 1 = -1$$
$$0,m = 1 - 0,1023 = 0,8977$$

Como não encontramos m = 8977 na tábua, dela tomamos

$$\boxed{\begin{array}{l} 8976 \to 790 \\ 8982 \to 791 \end{array}}$$

e construímos a *regra de três*:

Se m aumenta de	o número correspondente aumenta de
6	1
1	y

Daí, $\frac{6}{1} = \frac{1}{y}$, ou seja, y ≅ 0,17

e o número procurado é 790 + 0,17 = 790,17.

Como c = −1, x tem **um zero** antes do primeiro algarismo não nulo. Logo,

$$x = 0,79017$$

e o conjunto solução da equação é

$$S = \{0,79017\}$$

9.5) Quantos algarismos tem o número $b = 2^{45}$?

Solução

Temos

$$\log b = \log 2^{45} = 45 \cdot \log 2$$

Com o auxílio da tábua, escrevemos log 2 = 0,3010

Então,

$$\log b = 45 \cdot 0,3010 = 13,5450$$

Vemos que a característica de log b é c = 13; portanto, $b = 2^{45}$ tem **14 algarismos.**

Exercícios Propostos

9.6) Determine o logaritmo decimal de:
   a) 111
   b) 74,9
   c) 2,35
   d) 0,123
   e) 0,00457
   f) 0,0821

9.7) Calcule
   a) log 73426
   b) log 0,079481

9.8) Calcule b, sendo:
   a) log b = 1,1818
   b) log b = 3,9479
   c) log b = $\bar{2}$,7649
   d) log b = −3,1979

9.9) Calcule b, sendo
   a) log b = 0,5151
   b) log b = −1,3257

9.10) Calcule o valor aproximado de x, nos seguintes casos:
   a) $x = \sqrt[6]{54{,}6}$
   b) $(7{,}92)^2 \cdot x^3 - \sqrt[5]{64{,}9} = 0$

9.11) Determine o número de algarismos de
   a) 2^{105}
   b) 3^{60}

9.12) Quantos zeros iniciais tem a representação decimal de
   a) 3^{-30}?
   b) 2^{-44}?

Capítulo 10

Logaritmos neperianos – Uma breve história

10.1. LOGARITMOS NEPERIANOS

No capítulo anterior, demos atenção exclusiva aos logaritmos decimais, para os quais até publicamos uma tabela especial. Entretanto, nas aplicações dos logaritmos em problemas de nível superior, é de maior importância o Sistema de Logaritmos Neperianos.

Os **logaritmos neperianos** ou **logaritmos naturais** são os que têm, como base, o *número irracional e*, cujo valor aproximado é:

$$e \cong 2{,}71828182845916$$

O logaritmo de um número b > 0, **na base e**, pode evidentemente ser representado por $\log_e b$; no entanto, a notação usual é ℓn b, isto é,

$$\ell n\, b = \log_e b$$

Então, se por exemplo escrevermos ℓn **2**, podemos ler *logaritmo de 2 na base e*, ou *logaritmo neperiano de 2*, ou ainda, *logaritmo natural de 2*.

O nome **logaritmos naturais** deve-se ao fato de que muitos fenômenos da natureza podem ser descritos por leis matemáticas, em cuja expressão comparece o número e.

Exemplos

a) Para uma dada substância radiativa, a *massa* **m** que se desintegra em um intervalo de tempo **t** é dada por uma expressão do tipo:

$$m = A \cdot e^{\alpha t}$$

onde A e α são constantes características da substância considerada.

b) Um corpo que vibra, como uma mola ou um pêndulo, oscila com uma amplitude que decresce gradualmente, devido à viscosidade do meio. A *amplitude das oscilações* é dada em cada instante t pela expressão

$$A \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

onde γ é a frequência angular natural sem amortecimento e A é uma constante que depende das condições iniciais do movimento.

c) O *potencial elétrico* V produzido por um filamento reto e muito comprido, com uma carga λ por unidade de comprimento, é dada por

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ell n R$$

onde ϵ_0 é a chamada *permissividade do vácuo* e R é a distância do ponto considerado, até o filamento. Note-se a presença do número **e**, como base do logaritmo.

10.2. UMA BREVE HISTÓRIA

O nome **logaritmos neperianos** surgiu em reconhecimento ao trabalho do matemático escocês Neper.

John Neper (ou Napier) (1550–1617), é considerado o criador dos logaritmos, em cuja invenção trabalhou cerca de vinte anos, publicando, em 1614, o "*Mirifici Logarithmorum canonis descriptio*"[1] e, postumamente, em 1619, o "*Mirifici Logarithmorum canonis constructio*"[2].

Na primeira obra, Neper descreveu seu sistema de logaritmos e algumas aplicações; na segunda, fez a exposição dos métodos utilizados para construir suas tabelas.

Historicamente, é importante citar que Neper *não tinha o conceito de base*. Mas, interpretando sua obra em conceitos e palavras atuais, se dividirmos os números de suas tabelas por 10^7, temos uma tábua de logaritmos cuja **base é o número** $(0,9999999)^{10^7}$, que, com aproximação de sete casas decimais, é igual a $\frac{1}{e}$:

$$(0,9999999)^{10^7} \cong 0,3678794$$

$$\frac{1}{e} \cong \frac{1}{2,7182818} \cong 0,3678794$$

1. "Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos."
2. "A construção da maravilhosa regra dos logaritmos."

Um encontro importante

A publicação de Neper, de 1614, fez sucesso, e produziu admiradores. Entre eles, Henry Briggs (de quem falamos no capítulo anterior).

Em 1615, Briggs foi à Escócia encontrar-se com Neper, e estudaram possíveis modificações no método dos logaritmos, entre as quais, o uso do número 10 como o número que, modernamente, chamamos de base. Neper já havia pensado no problema – proposto por Briggs – e concordou. Mas, já não tinha condições para desenvolver a idéia (morreria dois anos depois). Coube, então, a Briggs, a construção da primeira tabela de logaritmos decimais.

10.3. MUDANÇA DE BASE

Conhecemos bem a tabela dos logaritmos decimais. Mas, uma pergunta surge naturalmente: como calcular os logaritmos neperianos, ou outros logaritmos que tenham bases diferentes de 10? Por exemplo, como calcular $\ell n 3$ ou $\log_7 23$ ou $\log_\pi 8$?

É clara, portanto, a necessidade de uma *fórmula* especial que relacione *logaritmos de bases diferentes*. A fórmula é:

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

e sua dedução é o assunto do nosso próximo capítulo.

Capítulo 11

Mudança de base

11.1. DEDUÇÃO DA FÓRMULA DE MUDANÇA DE BASE

Sejam **a**, **b** e **c** números reais positivos, com **a** e **c** diferentes de 1.

Vamos tentar resolver a seguinte questão:

"Qual a relação entre $\log_a b$ e $\log_c b$?"

Representando $\log_a b$ e $\log_c b$ pelas letras x e y, temos:

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b; \quad \log_c b = y \Rightarrow c^y = b$$

Obtemos, então, $a^x = c^y$, e daí podemos escrever:

$$\log_c a^x = \log_c c^y$$

Então, $x \log_c a = y$

ou ainda $x = \frac{y}{\log_c a}$

Como $x = \log_a b$ e $y = \log_c b$, obtemos:

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

que é a chamada **fórmula de mudança de base**.

Esta igualdade permite resolver o problema levantado ao final do capítulo anterior, de calcular logaritmos de bases diferentes de 10, transformando-os em logaritmos decimais.

Exemplos:

a) Calcule $\log_7 23$.

Podemos escrever:

$$\log_7 23 = \frac{\log_{10} 23}{\log_{10} 7}$$

Com o auxílio da tábua, obtemos:

$$\log 23 = 1,3617 \text{ e } \log 7 = 0,8451$$

Então,

$$\log_7 23 = \frac{1,3617}{0,8451} = 1,6113$$

b) Calcule $\ell n\ 3$.

Temos:

$$\ell n\ 3 = \log_e 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} e}$$

Com o auxílio da tábua, obtemos: $\log 3 = 0{,}4771$ e $\log_{10} e = \log 2{,}7182 = 0{,}4343$

Então,

$$\ell n\ 3 = \frac{0{,}4771}{0{,}4343} = 1{,}0985$$

É claro que a fórmula de mudança de base não tem seu uso limitado apenas à passagem para logaritmos decimais; ela pode ser utilizada para uma base qualquer, à conveniência do problema que se está resolvendo.

Exemplos

a) Calcule $\log_{14} 8$, sendo dado $\log_2 7 = 2{,}8074$.

Podemos escrever:

$$\log_{14} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 14} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 (2 \cdot 7)} = \frac{3}{\log_2 2 + \log_2 7} = \frac{3}{1 + 2{,}8074} =$$

$$= \frac{3}{3{,}8074} = 0{,}7879$$

b) Calcule $\log_2 0{,}75$, sendo dado $\log_3 2 = 0{,}6309$.

Escrevemos:

$$\log_2 0{,}75 = \frac{\log_3 0{,}75}{\log_3 2} = \frac{\log_3 \frac{3}{4}}{\log_3 2} = \frac{\log_3 3 - \log_3 4}{\log_3 2} = \frac{1 - 2\log_3 2}{\log_3 2} =$$

$$= \frac{1 - 2 \cdot (0{,}6309)}{0{,}6309} = -0{,}4150$$

11.2. CONSEQUÊNCIAS

1º) **Inversão do logaritmo**

Se, na fórmula

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

fizermos c = b, obteremos:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a}$$

Portanto,

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

isto é, **a troca de posições entre a base e o logaritmando inverte o valor do logaritmo.**

Por exemplo, se $\log_a b = \frac{3}{4}$, então $\log_b a = \frac{3}{4}$ 4/3

2º) **Produto de logaritmos**

A fórmula de mudança de base pode ser escrita

$$\boxed{\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b}$$

onde vemos que, ao **multiplicarmos** dois logaritmos nos quais **a base de um é igual ao logaritmando do outro**, ocorre a eliminação desse valor comum.

Exemplos

a) $\log_{(11)} 5 \cdot \log_3 (11) = \log_3 5$

b) $\log_5 (2) \cdot \log_{(2)} 7 \cdot \log_{13} 5 = \log_{(5)} 7 \cdot \log_{13} (5) = \log_{13} 7$

O exemplo b mostra que esta propriedade pode ser generalizada para o produto de mais de dois fatores; assim, por exemplo:

$$\boxed{\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c \cdots \log_z y = \log_z a}$$

Exercícios Resolvidos

11.1) Sendo dados $\log_3 2 = a$ e $\log_7 3 = b$, calcule $x = \log_{42} 392$.

Solução

Em função dos dados do problema, o número 3 se mostra como o mais indicado para ser utilizado como base, já que está relacionado com os números 2 e 7, através dos logaritmos. Escrevemos, então:

$$x = \log_{42} 392 = \frac{\log_3 392}{\log_3 42}$$

A decomposição em fatores primos, nos dá $392 = 2^3 \cdot 7^2$ e $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$;

portanto, $x = \dfrac{\log_3 (2^3 \cdot 7^2)}{\log_3 (2 \cdot 3 \cdot 7)} = \dfrac{3 \cdot \log_3 2 + 2 \cdot \log_3 7}{\log_3 2 + \log_3 3 + \log_3 7}$.

Lembrando que, se $\log_7 3 = b$, então $\log_3 7 = \frac{1}{b}$, temos:

$$x = \frac{3 \cdot a + 2 \cdot \left(\frac{1}{b}\right)}{a + 1 + \frac{1}{b}} = \frac{3ab + 2}{ab + b + 1}$$

11.2) Resolva a equação $12^x - 101 = 0$.

Solução

Como $12^x = 101$, temos:

$$x = \log_{12} 101 = \frac{\log_{10} 101}{\log_{10} 12}$$

Com o auxílio da tábua, obtemos:

$\log 101 = 2{,}0043$ e $\log 12 = 1{,}0792$. Então,

$$x = \frac{2{,}0043}{1{,}0792} = 1{,}8572$$

Logo, $S = \{1{,}8572\}$

11.3) Resolva a equação $\log_5 x + \log_x 5 = \dfrac{10}{3}$.

Solução

Fazendo $\log_5 x = y$, temos que $\log_x 5 = \dfrac{1}{y}$ e a equação se escreve:

$$y + \frac{1}{y} = \frac{10}{3} \text{ ou } 3y^2 - 10y + 3 = 0$$

Cujas raízes são $y = 3$ ou $y = \dfrac{1}{3}$.

Assim,

$\log_5 x = 3$, onde $x = 5^3 = 125$

ou $\log_5 x = \dfrac{1}{3}$, onde $x = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$.

Logo, $S = \left\{\sqrt[3]{5};\ 125\right\}$.

11.4) Prove que, para **a**, **b** e **c** reais positivos e diferentes de 1, se tem:

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

Solução

Fazendo $a^{\log_c b} = x$ e $b^{\log_c a} = y$, devemos provar que $x = y$.

De $a^{\log_c b} = x$, vem $\log_a x = \log_c b$ (I)

De $b^{\log_c a} = y$, vem $\log_a y = \log_a\left(b^{\log_c a}\right) = \log_c(a) \cdot \log_{(a)} b = \log_c b$ (II)

De (I) e (II), temos $\log_a x = \log_a y$

isto é, $x = y$.

11.5) Prove que:

$$(1 - \log_a b) \cdot \log_{\frac{a}{b}} c = \log_a c$$

Solução

$$1^\circ \text{ membro} = (1 - \log_a b) \cdot \log_{\frac{a}{b}} c = (1 - \log_a b) \cdot \frac{\log_a c}{\log_a (a/b)} =$$

$$= (1 - \log_a b) \cdot \frac{\log_a c}{\log_a a - \log_a b} = (1 - \log_a b) \frac{\log_a c}{1 - \log_a b} =$$

$$= \log_a c = 2^\circ \text{ membro}$$

Exercícios Propostos

11.6) Com o auxílio da tábua, calcule:

a) $\log_3 5$
b) $\log_7 11$
c) $\log_{42,5} 0{,}128$

11.7) Com o auxílio da tábua, resolva as equações:

a) $3^x = 5$
b) $2 \cdot 5^x - 3 = 0$
c) $2^{x+1} + 2^{x+3} = 18$
d) $25^x - 12 \cdot 5^x + 20 = 0$
e) $6 \cdot 49^x - 5 \cdot 7^x + 1 = 0$

11.8) Adotando os valores $\log e = \dfrac{43}{100}$, $\log \pi = \dfrac{49}{100}$ e $\log 7 = \dfrac{21}{25}$, calcule:

a) $\ell n\ \pi$
b) $\ell n\ 7$
c) $\log_7 e$
d) $\log_\pi 7$

11.9) Adotando $\log_2 3 = \dfrac{8}{5}$, calcule:

a) $\log_3 2$
b) $\log_3 6$
c) $\log_{1,5} 18$

11.10) Sendo $\log_2 3 = a$ e $\log_5 2 = b$, calcule em função de **a** e **b**:

a) $\log 6$
b) $\log_{25} 120$
c) $\log_{40} 675$

11.11) Sendo $\log_3 2 = p$ e $\log_{11} 3 = q$, calcule em função de **p** e **q**:

a) $\log_{11} 4$
b) $\log_{44} 33$
c) $\log_{66} 1452$

11.12) Determine o valor das expressões:

a) $y = \log_7 5 \cdot \log_{12} 7 \cdot \log_{125} 12$
b) $y = \log_{b^4} a^3 \cdot \log_{a^3} b^2 \cdot \log_{b^2} a \cdot \log_a b$

11.13) Mostre que, se $\log_b a$, $\log_c b$, $\log_a c$ estão, nessa ordem, em progressão geométrica, então $b = c$.

11.14) As raízes da equação $x^2 + bx + c = 0$ existem e são iguais a $\ell n b$ e $\frac{1}{\ell n_c}$.

Mostre que $b = c^c$.

11.15) Sendo $\log_a m = 2$, $\log_b m = 3$ e $\log_c m = 5$, calcule $\log_{abc} m$.

11.16) Resolva as equações:

a) $\log_3 x + 6 \log_x 3 = 5$

b) $\log_a x + \log_x a = \frac{5}{2}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$

c) $\log_a ax \cdot \log_x ax = 4$, com $a > 0$ e $a \neq 1$

11.17) Sendo $\log 2 \cdot \log 3 = 0{,}1436$, resolva a equação:

$$\log_2 x + \log_3 x = \log 36$$

11.18) Sendo $\ell n 5 \cdot \ell n 7 = 3{,}1318$, resolva a equação:

$$\log_7 x - \log_5 x^2 = 3 \log_e 9{,}8$$

11.19) Se $\log_a x$, $\log_b x$, $\log_c x$, com $x \neq 1$, estão, nessa ordem, em progressão aritmética, mostre que $\log_a b + \log_c b = 2$.

11.20) Se $\log_a b = \log_b c$ e $\log_a c = \log_c$, com $x \neq 1$, mostre que

$$(\log_x b)^4 = (\log_x a)^3$$

Vish

Quis economizar, se lascou.

Que nada!

Custo Benefício Pelevadíssimo

Exercícios Suplementares

III.1) Calcule o valor de $\log_{\frac{1}{2}} 32 + \log_{10} 0{,}001 - \log_{0,1} 10\sqrt{10}$

III.2) Sendo **p** e **q** números reais e positivos tais que:
$\log_3 \log_5 p = \log_5 \log_3 q = 0$
calcule $p + q$.

III.3) Um número x tem logaritmo igual a 4 na base a e tem logaritmo igual a 8 na base $\frac{a}{3}$. Calcule x e a.

III.4) Calcule $\log_{0,04} 125$.

III.5) Resolva a equação $\log_{25} \log_3 x = \frac{1}{2}$.

III.6) Escreva a expressão que dá o valor de **n** em função de **k**, sendo:

$$2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^7 \cdot \ldots \cdot 2^{2n-1} = k$$

III.7) Resolva o sistema $\begin{cases} 2^x = \frac{1}{2^{4+y}} \\ \log_2 (2x + y) = 1 \end{cases}$

III.8) Resolva a equação $\log_4 \left(\frac{1}{\log_x 4} \right) = \frac{1}{2}$.

III.9) Resolva a equação $\log_3 2 + \log_3 (x + 1) = 1$.

III.10) Sendo $\log_a b = 10$ e $\log_a c = 20$, calcule o valor de:
$\log_a \sqrt{bc} + \log_a \sqrt{b} \cdot c$

III.11) Resolva a equação $\log_8 x^{10} - 3 = 3 \log_8^2 x$.

enunciado errado

III.12) Sendo $\log 2 = 0{,}30103$ e $\log 3 = 0{,}47712$, dê o valor de $\log 7{,}2$.

III.13) Para todo $x > 0$ tem-se $\log_a x = \frac{5}{2} \log x$. Calcule o valor da base a.

III.14) Resolva o sistema $\begin{cases} 8^x = 2^{y+1} \\ \log_3 x = 1 + \log_3 y \end{cases}$

III.15) Resolva a equação $\log \sqrt{x} + \log_{100} x = 2$.

III.16) Escreva a expressão que dá o valor de x, sendo $\log_a x^m + \log_a x^n = p$.

III.17) Calcule x na equação: $\sum_{n=0}^{3} (-1)^n (n-1) \log \frac{n+1}{x} = \log \frac{3x}{4}$

III.18) Sendo $\log y = \bar{1},841116$, calcule $\log \frac{1}{y}$.

III.19) Sendo $\log a = \bar{2},12$ e $\log b = \bar{3},18$, calcule $\frac{\log a}{\log b}$.

III.20) Sendo $A = \bar{2},4112$, calcule $3A + 2$.

III.21) Se $x = \log_a 25$ e $y = \log_a 5$, calcule $\frac{x}{y}$.

III.22) Sabendo-se que $\ell n\ 10 = 2{,}30$ e que $\log 71{,}2 = 1{,}85$, calcule $\ell n\ 71{,}2$.

III.23) O logaritmo de um número na base 16 é $\frac{2}{3}$. Qual é o logaritmo desse número na base $\frac{1}{4}$?

III.24) Calcule o valor de x na equação $8^x = 1{,}6$, sabendo-se que $\log_5 8 = 1{,}2920$.

III.25) Resolva a equação $\log_4 (x + 2) \cdot \log_x 2 = 1$.

III.26) Calcule **m**, sabendo-se que:

$$\log_a b = 7 - m \quad \text{e} \quad \log_b a = \frac{11}{2} - m$$

III.27) Sendo $\log a = p$, $\log b = q$, $\log c = r$ e $a^{b^x} = c$, mostre que $10^x = \left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{1}{q}}$.

III.28) O logaritmo de um certo número numa dada base é 3. A terça parte desse logaritmo, a base e o número formam, nessa ordem, uma PA. Qual é a base do logaritmo?

III.29) Se $y = 2^x$ e $x = \frac{\log_3 \log_2 3}{\log_3 2}$, calcule y.

III.30) Sendo $\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b}$, mostre que $a^a \cdot b^b \cdot c^c = 1$.

III.31) Dada a equação $x^2 - px + B^m = 0$ e sendo **a** e **b** suas raízes reais, prove que:

$$\log_B a^a + \log_B b^b + \log_B a^b + \log_B b^a = mp$$

III.32) Sendo $x = \log_c ab$, $y = \log_b ac$ e $z = \log_a bc$, calcule

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}$$

III.33) Sendo $\log_{ab} a = n$, calcule em função de **n** o valor de $\log_{ab}\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)$.

III.34) Sabe-se que $\log_a b = A$ e $\log_q b = B$.
Sendo **c** o produto dos 10 primeiros termos de uma PG de 1º termo **a** e razão **q**, determine $\log_c b$ em função de A e B.

III.35) Prove que $\left(\frac{p}{q}\right)^{\log r} \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^{\log p} \cdot \left(\frac{r}{p}\right)^{\log q} = 1$

III.36) Calcule, com o auxílio da tábua de logaritmos, o valor aproximado de cada uma das expressões indicadas:

a) $x = \sqrt[18]{28{,}3}$

b) $x = (12{,}7)^{1{,}4}$

c) $x = \sqrt[5]{39{,}6} + \sqrt[3]{78{,}2}$

III.37) Conhece-se a propriedade:

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

Prove, utilizando o Princípio da Indução Matemática, que:

$$\log_{a_0} a_1 \cdot \log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \ldots \cdot \log_{a_{n-1}} a_n = \log_{a_0} a_n .$$

Para todo inteiro $n \geq 2$.

III.38) Resolva a equação $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$.

III.39) Resolva a equação $3^{\log_x 3} \cdot x^{\log_3 x} = 9$.

III.40) Sejam **a**, **b**, **c** e **x** números positivos e diferentes de 1. Prove que se **a**, **b** e **c** estão, nessa ordem, em PG, então:

$$\frac{\log_a x - \log_b x}{\log_b x - \log_c x} = \frac{\log_a x}{\log_c x}$$

PARTE IV

Capítulo 12

Função exponencial
Função logaritmo
Inequações

12.1. O CONCEITO DE FUNÇÃO

Dados dois conjuntos A e B, diferentes do conjunto vazio, uma **função f de A em B** é uma correspondência que associa a *cada elemento de A um único elemento de B*.

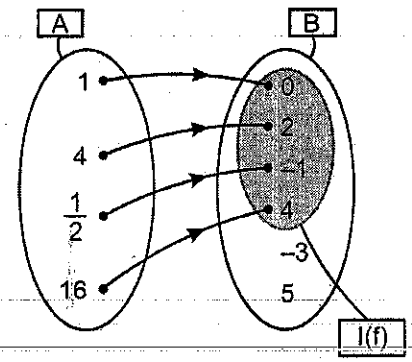
O conjunto A é denominado **domínio de** f; o conjunto B é denominado **contradomínio de f**; se **x** é um elemento qualquer de A, então o único **y** de B, associado a x, é denominado **imagem de x pela função f** e é indicado por:

$$y = f(x)$$

O conjunto de todos os elementos de B que são imagem de algum elemento de A, é denominado **conjunto imagem de f** e é indicado por:

$$I(f)$$

Exemplo



A figura mostra uma função f de A em B, onde temos:

Domínio: $A = \left\{1;\ 4;\ \frac{1}{2};\ 16\right\}$

Contradomínio: $B = \{0;\ 2;\ -1;\ 4;\ -3;\ 5\}$

Conjunto-imagem: $I(f) = \{0;\ 2;\ -1;\ 4\}$

12.2. FUNÇÃO REAL DE VARIÁVEL REAL

Uma função f, de A em B, diz-se **função real de variável real** se $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$.

Exemplo

A função definida por $f(x) = \sqrt{x-5}$, tem para domínio A todo x real para o qual $x - 5 \geq 0$, isto é, $x \geq 5$. Então:

$$A = [5; +\infty[\subset \mathbb{R}$$

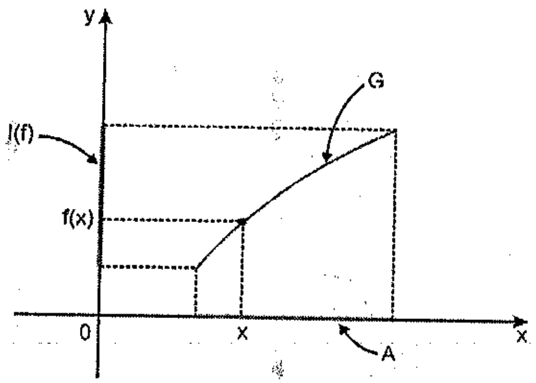
O contradomínio de $B = \mathbb{R}$

12.3. GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO REAL DE VARIÁVEL REAL

Considere uma função f, real de variável real:

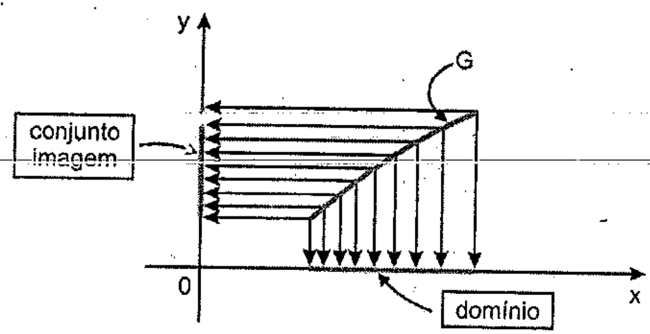
$$f: A \to B$$

Fixando um sistema de coordenadas x0y, o conjunto G de todos os pontos (x; f(x)), com $x \in A$, é o **gráfico de f**.



Observe que, conhecido o gráfico G de uma função f, o seu domínio pode ser obtido projetando-se G sobre 0x, na direção 0y; o conjunto imagem de f pode ser obtido projetando-se G sobre 0y, na direção 0x.

Assim:



12.4. INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARITMO

Nos capítulos anteriores estudamos a parte *operacional* das potências e dos logaritmos, onde aprendemos que, fixado como base um número real **a**, **positivo** e **diferente de 1**, temos:

1º) para cada **x** real, o número a^x existe e tem valor único;

2º) para cada **x** real positivo, o número $\log_a x$ existe e tem valor único.

Essas duas afirmações nos mostram a possibilidade de tratar as potências e os logaritmos sob o ponto de vista da teoria das funções, pois a idéia básica na definição de função é *a cada elemento x de um dado conjunto A corresponder um único elemento f(x) de um dado conjunto B.*

A partir disso surgem, então, as definições de **função exponencial** e **função logaritmo**.

12.5. FUNÇÃO EXPONENCIAL

Seja **a** um número real **positivo** e **diferente de 1**. Chama-se função **exponencial de base a** a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = a^x$$

O **domínio** da função exponencial é $\mathbb{R}$.

O **contradomínio** é também $\mathbb{R}$.

Exemplos

a) A função definida por $f(x) = 5^x$ é a *função exponencial de base 5.*

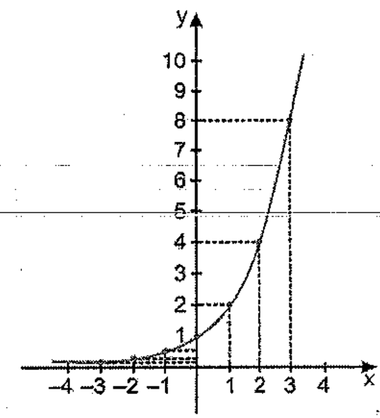
b) A função definida por $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ é a *função exponencial de base 0,2.*

12.6. GRÁFICOS DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Examinemos, inicialmente, dois exemplos:

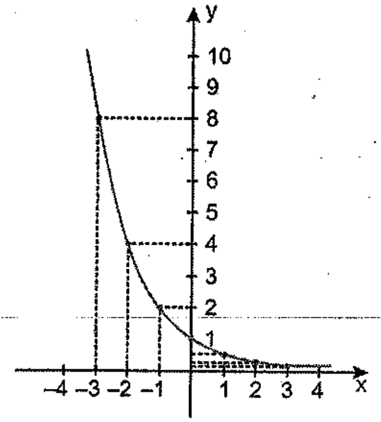
a) gráfico da função $f(x) = 2^x$

x	y
–3	$\frac{1}{8}$
–2	$\frac{1}{4}$
–1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



b) gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	y
–3	8
–2	4
–1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



Observemos, nesses dois exemplos, que:

1º) os gráficos não têm ponto em comum com o eixo 0x e cortam o eixo 0y no ponto (0; 1);

2º) os gráficos estão *inteiramente* localizados "acima" do eixo 0x. O conjunto imagem dessas funções é $\mathbb{R}_+^*$.

Esses dois fatos são facilmente generalizados para a função exponencial de base **a** (pois, para todo a positivo e diferente de 1, temos $a^0 = 1$ e $a^x > 0$, qualquer x real):

O ponto (0; 1) pertence ao gráfico da função exponencial.
O conjunto imagem da função exponencial é

$$\boxed{I(f) = \mathbb{R}_+^*}$$

Devemos ainda notar (veja as definições do quadro abaixo) nesses exemplos que a função $f(x) = 2^x$ é **crescente em** $\mathbb{R}$, enquanto que $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ é **decrescente em** $\mathbb{R}$; esses comportamentos opostos se devem ao fato de que as **potências de base maior que 1 crescem** com o aumento do expoente, ao passo que **as potências de base entre 0 e 1 decrescem** com o aumento do expoente; assim, ao fazermos um expoente x_1 "crescer" para um valor x_2, teremos:

Função crescente
Função descrescente

Sejam uma função f, de domínio A, e I um subconjunto de A ($I \subset A$)
f se diz **crescente em I** se, e somente se, para todo $x_1, x_2 \in I$:

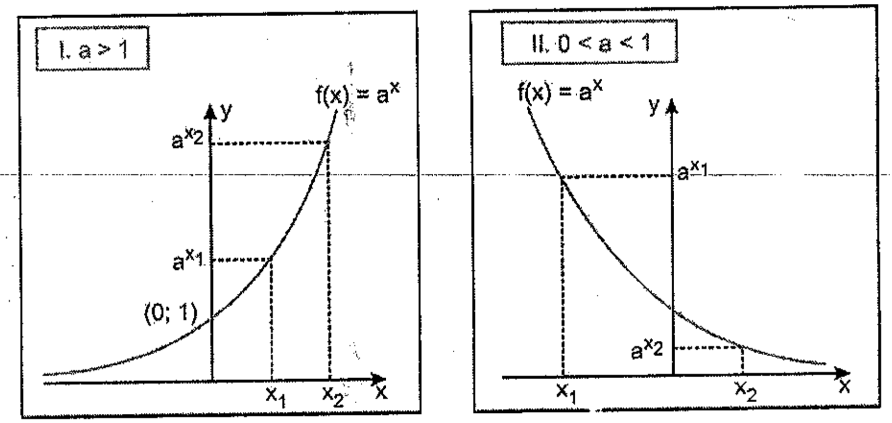
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

f se diz **descrente em I** se, e somente se, para todo $x_1, x_2 \in I$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} 2^{x_1} < 2^{x_2} \ (\text{por exemplo, } 2^3 < 2^5) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} \ \left(\text{por exemplo, } \left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^5\right) \end{cases}$$

Com isso, podemos resumir graficamente o comportamento da *função exponencial* $f(x) = a^x$:



Nesses gráficos confirmamos que, se a > 1, **f(x) = a^x é crescente** em $\mathbb{R}$ e, se 0 < a < 1, **f(x) = a^x é decrescente** em $\mathbb{R}$, ou seja:

$a > 1$	$x_1 < x_2$	$\Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$
$0 < a < 1$	$x_1 < x_2$	$\Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$

12.7. INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS

A classificação das funções exponenciais em crescente ou decrescente por si só nos ensina a resolver *inequações exponenciais*, isto é, inequações em que a incógnita comparece no expoente.

Analisando o quadro acima, vemos que:

1º) *quando a base é maior que 1, a relação de desigualdade entre as potências se mantém entre os expoentes.*

Exemplos

a) se $2^x < 2^5$, então $x < 5$

b) se $\left(\sqrt{5}\right)^x > \left(\sqrt{5}\right)^{-2}$, então $x > -2$

2º) *quando a base está entre 0 e 1, a relação de desigualdade entre as potências se inverte entre os expoentes.*

Exemplos

c) se $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^5$, então $x > 5$

d) se $\left(\frac{7}{10}\right)^x > \left(\frac{7}{10}\right)^\pi$, então $x < \pi$

Exercícios Resolvidos

12.1) Resolva a inequação $5^x < 25^{2x-1}$

Solução

Escrevemos $5^x < 5^{2(2x-1)}$; como a base é *maior que 1*, temos:

$$5^x < 5^{4x-2} \Rightarrow x < 4x - 2 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{2}{3}\right\}$

12.2) Resolva a inequação $(0,73)^{2x} \geq \sqrt[3]{0,73}$

Solução

Escrevemos $(0,73)^{2x} \geq (0,73)^{\frac{1}{3}}$; como a base *está entre 0 e 1*, temos:

$$(0,73)^{2x} \geq (0,73)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 2x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow x \leq \frac{1}{6}$$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{6}\right\}$

12.3) Resolva a inequação $125 < 5^x < 127$

Solução

Escrevemos $5^3 < 5^x < 5^{\log_5 127}$; como a base é *maior que 1*, vem:

$$3 < x < \log_5 127$$

Não dispondo da Tábua de Logaritmos, respondemos

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < \log_5 127\}$$

mas, com a fórmula de mudança de base e o *auxílio da Tábua* podemos calcular $\log_5 127$:

$$\log_5 127 = \frac{\log 127}{\log 5} = \frac{2,1038}{0,6990} = 3,0099$$

e responder que:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 3,0099\}$

12.4) Resolva a inequação $2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 2 \geq 0$

Solução

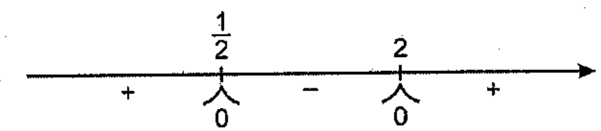
Fazemos, nesse caso, uma *mudança de variável*

$$2^x = y$$

obtendo, assim, uma *inequação do 2º grau*

$$2y^2 - 5y + 2 \geq 0$$

Calculamos, então, as raízes e estudamos os sinais do trinômio $2y^2 - 5y + 2$:



Vemos que os valores que satisfazem são:

$$y \leq \frac{1}{2} \text{ ou } y \geq 2$$

como $y = 2^x$, vem

$$2^x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } 2^x \geq 2$$

e daí obtemos:

$$2^x \leq 2^{-1} \Rightarrow x \leq -1$$

ou

$$2^x \geq 2^1 \Rightarrow x \geq 1$$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \vee x \geq 1\}$

12.5) Resolva a inequação $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 8 < 0$

Solução

Escrevemos, inicialmente:

$$3^{2x} - 2 \cdot 3 \cdot 3^x + 8 < 0$$

que é o mesmo que

$$3^{2x} - 6 \cdot 3^x + 8 < 0$$

Fazendo $3^x = y$, vem a inequação do 2º grau:

$$y^2 - 6y + 8 < 0$$

Calculando as raízes e estudando os sinais do trinômio, temos:

onde $2 < y < 4$

Como $y = 3^x$ vem

$$2 < 3^x < 4$$

e escrevemos:

$$3^{\log_3 2} < 3^x < 3^{\log_3 4}$$

Portanto, $\log_3 2 < x < 2 \log_3 2$

Calculando $\log_3 2$ com o auxílio da Tábua:

$$\log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{0,3010}{0,4771} = 0,6309$$

Assim, $0,6309 < x < 2 \cdot 0,6309$ e $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0,6309 < x < 1,2618\}$

12.6) Sendo x um real tal que $x > 1$, resolva a inequação:

$$(x-1)^5 > (x-1)^{13}$$

Solução

Ao observarmos que

$$5 < 13 \text{ e } (x-1)^5 > (x-1)^{13}$$

lembramos que a relação de desigualdade entre os expoentes é o **contrário** da relação de desigualdade entre as potências **somente quando a base está entre 0 e 1** (item 12.5). Podemos, então, escrever:

$$0 < x - 1 < 1$$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$

12.7) Sendo **a** um número real positivo e diferente de 1, resolva a inequação:

$$a^{2x-1} < a^{x+6}$$

Solução

Como não sabemos se a base **a** é maior do que 1 ou está entre 0 e 1, devemos estudar ambas as possibilidades:

1) $\boxed{a > 1}$ Nesse caso, temos:

$a^{2x-1} < a^{x+6} \Rightarrow 2x - 1 < x + 6 \Rightarrow x < 7$

e $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 7\}$

2) $\boxed{0 < a < 1}$ Nesse caso, temos:

$a^{2x-1} < a^{x+6} \Rightarrow 2x - 1 > x + 6 \Rightarrow x > 7$

e $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\}$

Exercícios Propostos

12.8) Classifique as funções abaixo em crescentes ou decrescentes

a) $f(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x$

b) $f(x) = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^{-x}$

c) $f(x) = \left[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right]^x$

d) $f(x) = \left(\log_3 \sqrt{13}\right)^x$

12.9) Resolva as inequações:

a) $3^{3x+2} < 3^{2x+3}$

b) $(0,3)^{x-1} < (0,3)^{2x}$

c) $\left(\frac{1}{8}\right)^x > \sqrt[3]{4}$

d) $\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2} \le \left(\frac{49}{25}\right)^{6-4x}$

e) $2^{\frac{x+1}{x-1}} \ge \sqrt{2}$

12.10) Resolva as inequações (utilize a Tábua de Logaritmos, se necessário)

a) $2^x \ge 5$

b) $27 < 9^x < 41$

c) $(0,13)^2 < 2^x < 130^{\frac{1}{2}}$

12.11) Determine o domínio das seguintes funções (utilize a Tábua, se necessário)

a) $f(x) = \sqrt{4^x - 5 \cdot 2^x + 4}$

b) $f(x) = \sqrt{-\left(5^{2x+1} - 26 \cdot 5^x + 5\right)}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3^{-2x} - 8 \cdot 3^{-x} + 15}}$

12.12) Resolva as inequações:

a) $(2x-3)^{10} > (2x-3)^6$, sendo $x > \frac{3}{2}$

b) $(x^2-8)^{13} \ge (x^2-8)^{17}$, sendo $x^2 - 8 > 0$

12.13) Sendo **a** um número real positivo e diferente de 1, resolva as inequações:

a) $a^{x^2} < a^9$

b) $3 \cdot a^{2x} - 10 \cdot a^x + 3 \le 0$

12.14) Sendo $x > 0$, resolva a inequação $x^{x^2} > x^{5x}$

12.15) Discuta, segundo os valores reais de a, as inequações

a) $2^x > \alpha$

b) $2^x < \alpha$

12.8. FUNÇÃO LOGARITMO

Seja a um número real **positivo** e **diferente de 1. Chama-se função logaritmo de base a** a função f, de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \log_a x$$

O **domínio** da função logaritmo é $\mathbb{R}_+^*$.

O **contradomínio** é $\mathbb{R}$.

Exemplos

a) A função definida por $f(x) = \log x$ é a *função logaritmo de base 10.*

b) A função definida por $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ é a *função logaritmo de base* $\frac{1}{3}$.

Exercícios Resolvidos

12.16) Determine o domínio da função $f(x) = \log_7 (2x - 26)$

Solução

Para a existência do logaritmo, devemos ter logaritmando positivo, ou seja

$$2x - 26 > 0$$

onde $x > 13$

Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 13\}$

12.17) Determine o domínio da função $f(x) = \log_{4-3x} 123$.

Solução

Para a existência do logaritmo, devemos ter a base positiva e diferente de 1, ou seja

$$4 - 3x > 0 \;\text{ e }\; 4 - 3x \neq 1$$

onde $x < \frac{4}{3}$ e $x \neq 1$

Logo, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{4}{3} \text{ e } x \neq 1\right\}$

12.18) Determine o domínio da função

$$f(x) = \log_{x-2} (5x - x^2)$$

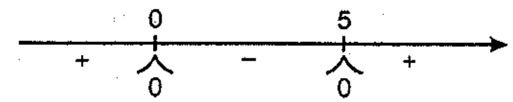
Solução

Nesse caso devemos impor as condições de existência para logaritmando e base, isto é, devemos ter, simultaneamente:

$$\begin{cases} 5x - x^2 > 0 & \text{(I)} \\ x - 2 > 0 & \text{(II)} \\ x - 2 \neq 1 & \text{(III)} \end{cases}$$

Resolvemos cada uma delas e fazemos a *interseção* dos resultados:

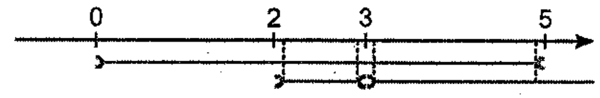
(I) $5x - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 5x < 0$



Onde $0 < x < 5$

(II) $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

(III) $x - 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 3$



Fazendo a interseção das três condições obtemos

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5 \text{ e } x \neq 3\}$

Exercícios Propostos

12.19) Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \log (3x - 1)$

b) $f(x) = \log_3 x^2$

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+2) + \log_{\frac{1}{2}}(3+x)$

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}[(x+2)(3+x)]$

e) $f(x) = \dfrac{\log_3(x+2)}{\log_5(3-x)}$

f) $f(x) = \log (5 - 25^x)$

12.20) Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_{2x+5} 5$

b) $f(x) = \log_{x^2-1} x$

c) $f(x) = \log_{3x-4} (x^2 - 9)$

d) $f(x) = \log_{12-x^2} (2x - 6)$

e) $f(x) = \log_{x^2-2} (3 - x^2)$

12.9. INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Para aprendermos as *regras* de resolução de inequações que envolvem logaritmos, lembremos inicialmente a definição

$$a^x = X \iff x = \log_a X$$

Do estudo da função exponencial, temos as equivalências:

I. $a > 1$ $\qquad x_1 < x_2 \iff a^{x_1} < a^{x_2}$

II. $0 < a < 1$ $\qquad x_1 < x_2 \iff a^{x_1} > a^{x_2}$

Representando a^{x_1} e a^{x_2}, respectivamente, por X_1 e X_2, temos as equivalências

$$a^{x_1} = X_1 \Leftrightarrow x_1 = \log_a X_1$$
$$a^{x_2} = X_2 \Leftrightarrow x_2 = \log_a X_2$$

Fazendo essas substituições em I e II, obtemos:

I. $a > 1 \Rightarrow \log_a X_1 < \log_a X_2 \Leftrightarrow X_1 < X_2$

II. $0 < a < 1 \Rightarrow \log_a X_1 < \log_a X_2 \Leftrightarrow X_1 > X_2$

A observação desse último quadro nos mostra que:

1º) *quando a base é maior que 1, a relação de desigualdade entre os logaritmos se mantém entre os logaritmandos.*

2º) *quando a base está entre 0 e 1, a relação de desigualdade entre os logaritmos se inverte entre os logaritmandos.*

Notamos, então, que essas *regras* são basicamente as mesmas das inequações exponenciais. No entanto, é muito importante lembrar que a exponencial, tendo domínio $\mathbb{R}$, *não exige condição de existência*, o que já não ocorre com a função logaritmo, cujo domínio é $\mathbb{R}_+^*$. Assim, é fundamental que nas resoluções de inequações logarítmicas o ponto de partida seja a determinação dessas condições.

Exercícios Resolvidos

12.21) Resolva a inequação $\log_5 (2x - 3) < \log_5 7$

Solução

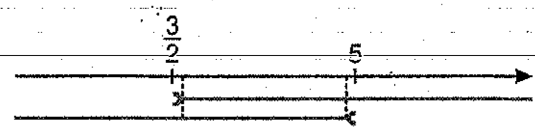
Estabelecemos, inicialmente, a *condição de existência*:

$2x - 3 > 0$, onde $x > \frac{3}{2}$ (I)

Observando, agora, que a base é **maior que 1**, temos as implicações:

$\log_5 (2x-3) < \log_5 7 \Rightarrow 2x - 3 < 7 \Rightarrow x < 5$ (II)

Comparando as condições (I) e (II), vem:



$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x < 5 \right\}$

12.22) Resolva a inequação $\log_{\frac{1}{3}} (8 - 2x) \geq 3$.

Solução

Temos a *condição de existência* $8 - 2x > 0$, onde $x < 4$ (I)

Escrevendo o número 3 como $\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^3$, e observando que a base está entre 0 e 1, vem:

errado

$\log_{\frac{1}{3}} (8-2x) \geq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} \Rightarrow 8 - 2x \geq \frac{1}{27} \Rightarrow x \leq \frac{215}{54}$ (II)

Das condições (I) e (II) temos

$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{215}{54} \right\}$

12.23) Resolva a inequação $\log_{12} (x - 1) + \log_{12} (x - 2) \leq 1$

Solução

As condições de existência são:

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \end{cases}$$

prevalecendo, portanto, $x > 2$ (I)

Para podermos, agora, resolver a inequação, transformamos o primeiro membro num só logaritmo e o número 1 em $\log_{12} 12$. Então:

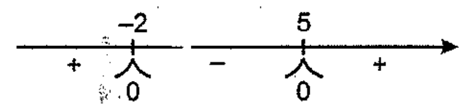
$$\log_{12} \left[(x-1) \cdot (x-2) \right] \leq \log_{12} 12$$

Como a base é **maior que 1**, vem

$$(x-1)(x-2) \leq 12$$

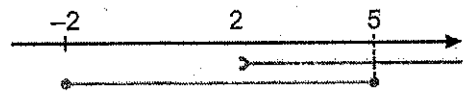
e daí $x^2 - 3x - 10 \leq 0$

Calculando as raízes e estudando os sinais, temos



$-2 \leq x \leq 5$ (II)

De (I) e (II):



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$

12.24) Resolva a inequação $\log_{x+4} 3 > \log_{x+4} 7$

Solução

Neste caso, basta observarmos que

$$3 < 7 \text{ e } \log_{x+4} 3 > \log_{x+4} 7$$

e lembrarmos que a relação de desigualdade entre os logaritmandos é *contrária* à relação de desigualdade entre os logaritmos *somente quando a base está entre 0 e 1*.

Assim, escrevemos

$$0 < x + 4 < 1$$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -3\}$

(Note-se que, ao impormos $0 < x + 4 < 1$, automaticamente está garantida a condição de existência da base: positiva e diferente de 1.)

12.25) Resolva a inequação $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 8 - 7\log_x \frac{1}{2}$.

Solução

As condições de existência são $x > 0$ e $x \neq 1$ (I)

Fazendo a mudança de variável $\log_{\frac{1}{2}} x = y$,

temos que $\log_x \frac{1}{2} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} x} = \frac{1}{y}$,

e a inequação fica:

$$y \geq 8 - \frac{7}{y}$$

que é o mesmo que

$$\frac{y^2 - 8y + 7}{y} \geq 0$$

Calculando as raízes do numerador A e do denominador B e estudando seus sinais:

y	$-\infty$	0		1		7	$+\infty$
A	++++		++	0	--------	0	++++
B	----	0	++		+++++++		++++
$\frac{A}{B}$	----		+++	0	--------	0	++++

Então, $0 < y \leq 1$ ou $y \geq 7$

Como $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, temos

$$0 < \log_{\frac{1}{2}} x \leq 1 \quad \text{ou} \quad \log_{\frac{1}{2}} x \geq 7$$

e escrevemos

$$\log_{\frac{1}{2}} 1 < \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

Como a base está entre 0 e 1:

$1 > x \geq \frac{1}{2}$ ou $x \leq \frac{1}{128}$ (II).

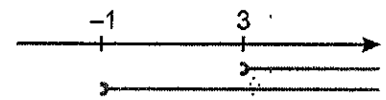
Das condições (I) e (II), vem

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \frac{1}{128} \vee \frac{1}{2} \leq x < 1\right\}$

12.26) Resolva a inequação, sendo $a > 0$ e $a \neq 1$: $\log_a (2x - 6) < \log_a (x + 1)$

Solução

As condições de existência são:



$\begin{cases} 2x - 6 > 0 \Rightarrow x > 3 \\ x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \end{cases}$

prevalecendo $x > 3$ (I)

Como não sabemos se a base a é maior que 1 ou está entre 0 e 1, devemos examinar ambas as possibilidades:

1ª) $a > 1$ Nesse caso, temos:

$\log_a (2x - 6) < \log_a (x + 1) \Rightarrow 2x - 6 < x + 1 \Rightarrow x < 7$ (II)

Das condições (I) e (II):

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 7\}$

2ª) $0 < a < 1$ Nesse caso, temos:

$\log_a (2x - 6) < \log_a (x + 1) \Rightarrow 2x - 6 > x + 1 \Rightarrow x > 7$ (III)

Das condições (I) e (III):

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\}$

12.27) Determine o domínio da função

$$f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} (\log_3 x)}$$

Solução

Para obtermos o domínio dessa função, devemos resolver a inequação

$$\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x) \geq 0$$

Condições de existência:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x > 0 \Rightarrow \log_3 x > \log_3 1 \Rightarrow x > 1 \end{cases}$$

prevalecendo $x > 1$ (I)
Para resolvermos, agora, a inequação, escrevemos:

$$\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x) \geq \log_{\frac{1}{2}} 1$$

e tiramos

$$\log_3 x \leq 1$$

que é o mesmo que

$$\log_3 x \leq \log_3 3$$

e daí $x \leq 3$ (II)
De (I) e (II), vem

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 3\}$

12.28) Resolva a inequação

$$3^{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-5x+8\right)} > \frac{1}{3}$$

Solução

Condição de existência: $x^2 - 5x + 8 > 0$
Como $\Delta = -7 < 0$, o trinômio é *positivo para todo x real.*
Escrevemos agora

$$3^{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-5x+8\right)} > 3^{-1}$$

Como a **base das potências** é maior que 1, tiramos

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-5x+8\right) > -1$$

isto é o mesmo que

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-5x+8\right) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

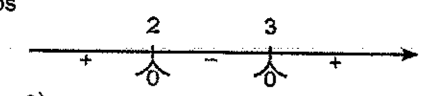
Como a **base dos logaritmos** está entre 0 e 1, vem

$$x^2-5x+8 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

isto é,

$$x^2 - 5x + 6 < 0$$

Finalmente, temos



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$

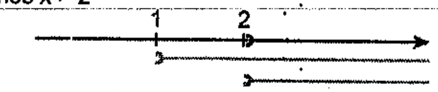
12.29) Resolva a inequação (onde $x > 0$ e $x \neq 1$): $x^{\log_2 x} > x$

Solução

Devemos examinar duas possibilidades: $x > 1$ ou $0 < x < 1$.

1ª) $x > 1$ Nesse caso, temos:

$x^{\log_2 x} > x^1 \Rightarrow \log_2 x > 1$; isto é o mesmo que $\log_2 x > \log_2 2$;
portanto, temos $x > 2$



Logo, $S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

2ª) $0 < x < 1$ Nesse caso, temos:

$x^{\log_2 x} > x^1 \Rightarrow \log_2 x < 1$; isto é o mesmo que $\log_2 x < \log_2 2$;
portanto temos $x < 2$

Logo, $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

Finalmente, $S = S_1 \cup S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } x > 2\}$

Outro modo. Podemos resolver essa inequação tomando o logaritmo de ambos os membros na base 2; como essa base é maior que 1, a desigualdade mantém o seu sentido. Assim:

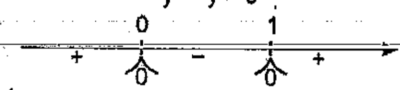
$$x^{\log_2 x} > x \Rightarrow \log_2\left(x^{\log_2 x}\right) > \log_2 x$$

e agora, escrevemos

$$\log_2 x \cdot \log_2 x > \log_2 x$$

Fazendo a mudança de variável $\log_2 x = y$, vem a inequação

$$y^2 - y > 0$$



e daí, $y < 0$ ou $y > 1$
Como $y = \log_2 x$

$$\log_2 x < 0 \text{ ou } \log_2 x > 1$$

e daí:

$$\log_2 x < \log_2 1 \text{ ou } \log_2 x > \log_2 2$$

onde $x < 1$ ou $x > 2$
Levando em conta a condição de existência $x > 0$, vem, finalmente

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \vee x > 2\}$$

Exercícios Propostos

12.30) Dê o valor verdadeiro (V) ou falso (F) às sentenças:

a) $\log_2 27 > \log_2 19$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 27 > \log_{\frac{1}{2}} 19$

c) $\log_{0,7} \pi > \log_{0,7} \sqrt{10}$

d) $\log_5 x > \log_5 7 \Leftrightarrow x > 7$

e) $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 7 \Leftrightarrow x < 7$

f) $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 7 \Leftrightarrow x < 7$

12.31) Resolva as inequações:

a) $\log_2 (x-3) > \log_2 7$

b) $\log_{\frac{1}{2}} (2x-1) \geq \log_{\frac{1}{2}} (x+3)$

c) $\log_3(x^2-4x) < \log_{\sqrt{3}}\left(3\sqrt{5}\right)$

d) $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-13\right) \geq -1$

e) $\log_3 (x+1)^2 < 2$

12.32) Determine o domínio das funções:

a) $f(x) = \sqrt{\log(x-3)}$

b) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x + 3}$

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{5}}\left[\log_3\left(x^2-3\right)\right]$

d) $f(x) = \log_2 \log_{\frac{1}{3}} \log_2 (2-x)$

e) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{2}} \log_4 x^2}$

12.33) Resolva as inequações:

a) $\log(x+2) + \log(x+3) > \log 12$

b) $\log_{\frac{1}{2}} (x+2) - \log_{\frac{1}{2}} (x+3) \leq -1$

c) $\log_5 x \cdot \log_5 x^2 - 18 > 0$

d) $\left(\log_{\sqrt{2}} x\right)^2 - 4\log_2 x - 24 \leq 0$

12.34) Resolva as inequações

a) $\log_{\frac{1}{3}} x - 3\log_x 3 + 4 > 0$

b) $\log_2 (x-1) \leq 3 + 10 \cdot \log_{x-1} 2$

12.35) Resolva as inequações:

a) $\log_{x^2-8} 11 < \log_{x^2-8} 21$

b) $\log_{x^2-2} 23 \leq \log_{x^2-2} 13$

12.36) Sendo a um número real positivo e diferente de 1, resolva:

a) $\log_a (3x-5) > 0$

b) $\log_a (3x-2) \geq \log_a (3-2x)$

12.37) Resolva as inequações:

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-4x+4\right)} < \frac{1}{25}$

b) $x^{\log_{\frac{1}{10}}(x-2)} > \frac{1}{x}$

c) $x^{\log_3 x} > x^2$

d) $x^{\log_3 x} \geq 27x^2$

12.38) Sendo $x > 0$, $x \neq 1$, $a > 0$ e $a \neq 1$, resolva a inequação em x

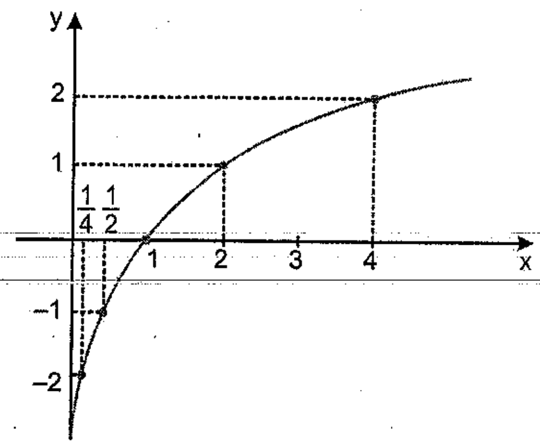
$$x^{\log_a x} \leq a$$

12.10. GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARITMO

Examinemos, inicialmente, dois exemplos:

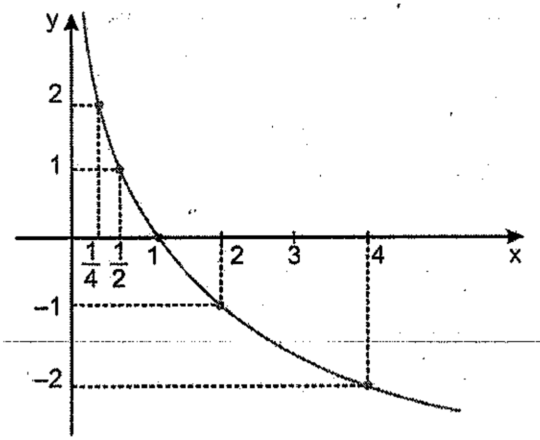
a) gráfico da função f(x) $\log_2 x$

x	y
$\frac{1}{4}$	−2
$\frac{1}{2}$	−1
1	0
2	1
4	2



b) gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	y
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	−1
4	−2



Observemos, nesses dois exemplos, que:

1º) os gráficos não têm ponto em comum com o eixo 0y e cortam o eixo 0x no ponto (1; 0)

2º) os gráficos estão *inteiramente* localizados "à direita" do eixo 0y; vemos que as funções podem assumir um valor real qualquer. O conjunto imagem dessas funções é $\mathbb{R}$.

Esses dois fatos são facilmente generalizados para a função logaritmo de base a (pois, para todo a positivo e diferente de 1, temos $\log_a 1 = 0$, e sabemos que $\log_a x$ pode assumir qualquer valor real):

O ponto (1; 0) pertence ao gráfico da função logaritmo.
O conjunto imagem da função logaritmo é

$$\boxed{I(f) = \mathbb{R}}$$

Notamos, agora, no gráfico de $f(x) = 2^x$ a confirmação da equivalência vista em 6.9.

$$a > 1:\ x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$

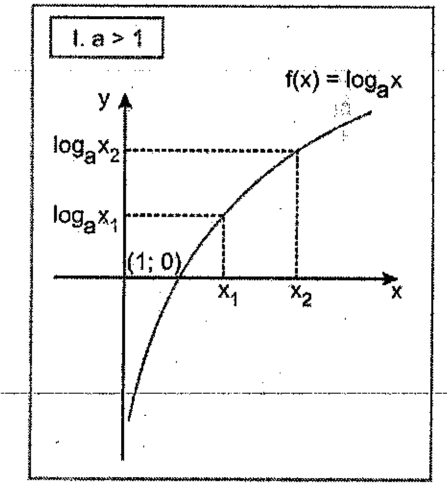
Verificamos, então, que a **função logaritmo de base maior que 1 é crescente.**

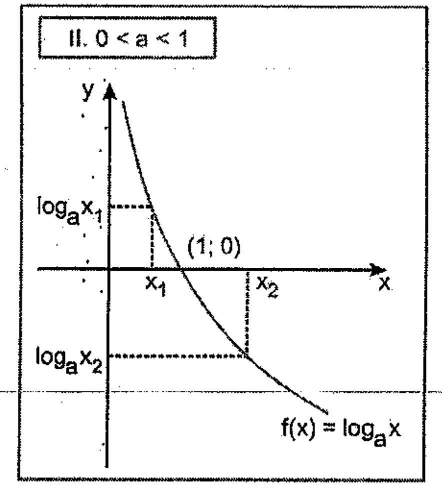
Da mesma forma, o gráfico de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ nos confirma que

$$0 < a < 1:\ x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$

e, portanto, a **função logaritmo de base entre 0 e 1 é decrescente.**

Com isto, podemos resumir graficamente o comportamento da *função logaritmo* $f(x) = \log_a x$:





Exercícios Propostas

12.39) Classifique as funções abaixo em crescente ou decrescente:

a) $f(x) = \log_{\pi} x$

b) $f(x) = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} x$

c) $f(x) = \log_{(0,8)^2} x$

d) $f(x) = \ell n\, x$

12.40) Construa os gráficos das funções:

a) $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$

b) $f(x) = 3^{-x}$

c) $f(x) = \log_3 x$

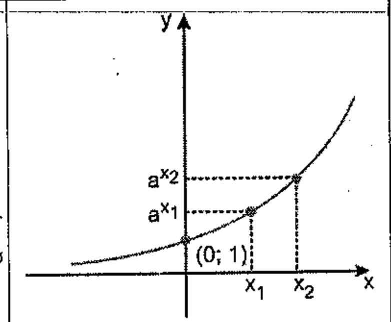
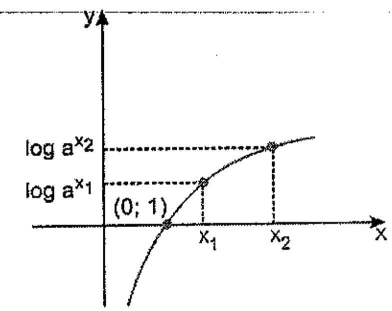
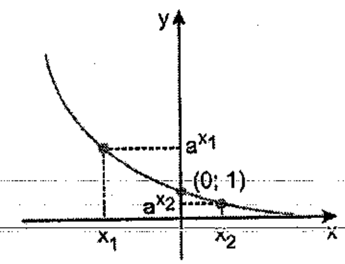
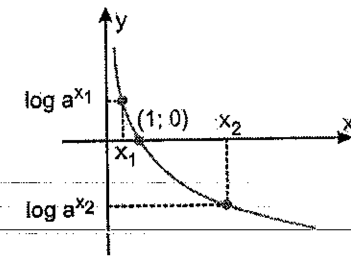
d) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

Capítulo 13

Construção de gráficos

13.1. UM RESUMO

Vamos, inicialmente, fazer uma revisão dos conceitos fundamentais que envolvem as funções *exponencial e logaritmo*, através do seguinte resumo:

	FUNÇÃO EXPONENCIAL $f(x) = a^x$	FUNÇÃO LOGARITMO $f(x) = \log_a x$
$a > 1$	 $D(f) = \mathbb{R}$ $I(f) = \mathbb{R}_+^*$ f é crescente em $\mathbb{R}$ $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$	 $D(f) = \mathbb{R}_+^*$ $I(f) = \mathbb{R}$ f é crescente em $\mathbb{R}_+^*$ $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$
$0 < a < 1$	 $D(f) = \mathbb{R}$ $I(f) = \mathbb{R}_+^*$ f é decrescente em $\mathbb{R}$ $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$	 $D(f) = \mathbb{R}_+^*$ $I(f) = \mathbb{R}$ f é decrescente em $\mathbb{R}_+^*$ $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$

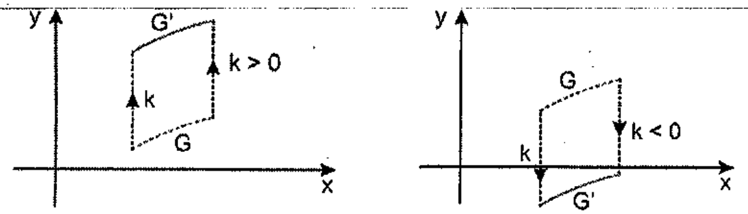
13.2. CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS

De modo geral, a construção do gráfico de uma função definida por $y = f(x)$ pode ser feita através de uma *tabela* na qual são atribuídos alguns valores particulares a x e determinados os correspondentes valores de y. No entanto, conhecidos os gráficos fundamentais das funções exponencial e logaritmo, com algumas *regras* de **transformações no gráfico de uma função**, podemos, a partir daqueles, construir os gráficos de muitas outras funções.

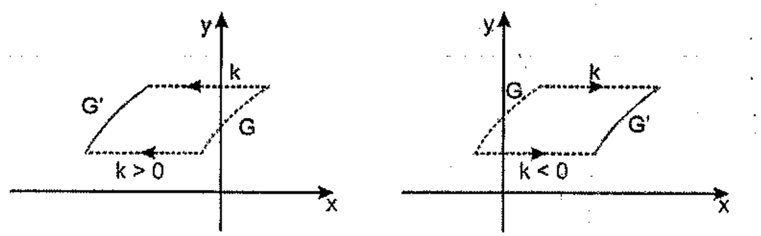
Vamos enunciar algumas dessas regras.

Seja G o gráfico da função definida por $y = f(x)$ e seja $k \neq 0$ uma constante real.

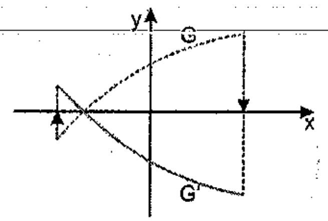
1ª) O gráfico G' da função $y = f(x) + k$ pode ser obtido a partir de G, fazendo este sofrer uma *translação de k unidades*, na direção Oy "*para cima*", *se k é positivo, ou "para baixo", se k é negativo.*



2ª) O gráfico G' da função $y = f(x + k)$ pode ser obtido a partir de G, fazendo este sofrer uma *translação de k unidades*, na direção Ox, "*para a esquerda*", *se k é positivo, ou "para a direita", se k é negativo.*

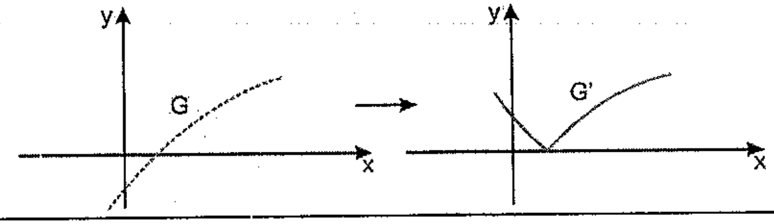


3ª) O gráfico G' da função $y = -f(x)$ pode ser obtido a partir de G, fazendo este sofrer uma *reflexão em relação ao eixo Ox.*



Nota: de modo análogo, o gráfico G' da função $y = f(-x)$ pode ser obtido fazendo-se G sofrer uma *reflexão em relação ao eixo Oy.*

4ª) O gráfico G' da função $y = |f(x)|$ pode ser obtido a partir de G, fazendo *a parte que está abaixo do eixo Ox sofrer uma reflexão em relação a Ox.*

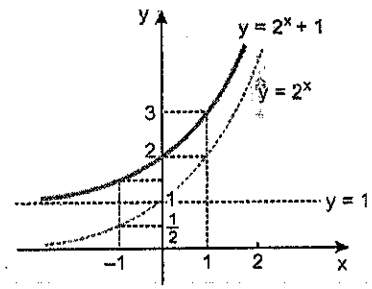


Exercícios Resolvidos

13.1) Esboce o gráfico da função $f(x) = 2^x + 1$.

Solução

Basta construirmos o gráfico de 2^x e, pela *1ª regra de transformação*, deslocá-lo 1 unidade "para cima".

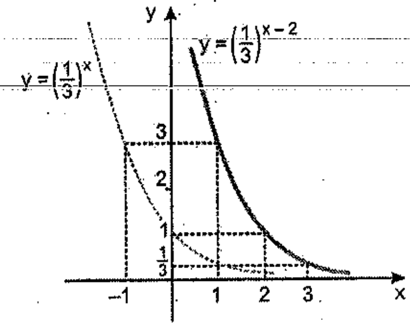


Note que $I(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$

13.2) Esboce o gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$.

Solução

Esboçaremos, primeiramente, o gráfico de $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ e, em seguida, usando a 2ª *regra de transformação*, deslocaremos esse gráfico 2 unidades para a direita.

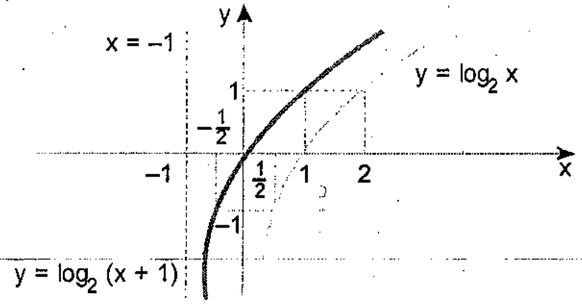


Note que $I(f) = \mathbb{R}_+^*$

13.3) Esboce o gráfico da função $f(x) = \log_2 (x + 1)$.

Solução

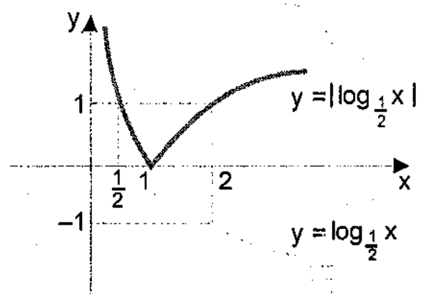
Notemos inicialmente que $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$
Esboçamos, a seguir, o gráfico de $\log_2 x$ e, depois, deslocamos 1 unidade para a esquerda.



13.4) Esboce o gráfico da função $f(x) = \left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|$.

Solução

Esboçaremos, inicialmente, o gráfico de $\log_{\frac{1}{2}} x$; em seguida, pela *4ª regra* enunciada, faremos a parte do gráfico que se encontra abaixo do eixo Ox sofrer uma reflexão em torno desse eixo.



13.5) Esboce o gráfico da função $f(x) = \log_3 |x|$

Solução

Notemos que $D(f) = \mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
Utilizando a definição de módulo, escrevemos

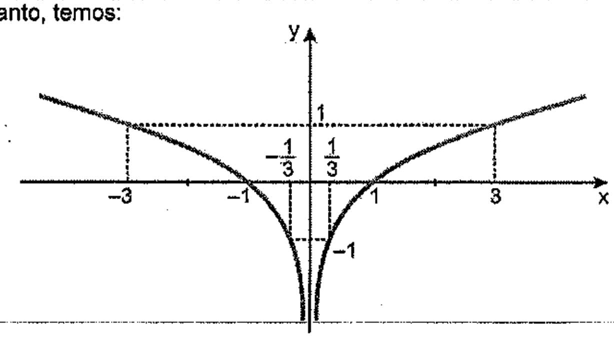
$$f(x) = \log_3 |x| = \begin{cases} \log_3 x, & \text{se } x > 0 \\ \log_3 (-x), & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

A observação desse quadro nos leva às seguintes conclusões:

1º) Nos pontos correspondentes a $x > 0$, temos o próprio gráfico de $\log_3 x$.

2º) Nos pontos correspondentes a $x < 0$, devemos construir o gráfico de $\log_3 (-x)$; para isso, a observação feita na *3ª regra* nos diz que basta fazermos o gráfico de $\log_3 x$ sofrer uma reflexão em relação ao eixo Oy.

Portanto, temos:



Exercícios Propostos

13.6) Esboce os gráficos das funções:
a) $f(x) = 2^{x+1}$
b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$
c) $f(x) = \log_2 x + 1$
d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (x - 2)$

13.7) Esboce os gráficos das funções:
a) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$
b) $f(x) = -|\log_2 x|$
c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} |x|$

13.8) Determine o conjunto imagem das funções:
a) $f(x) = 2^x - 2$
b) $f(x) = 3^x + \pi$
c) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x - \sqrt{5}$

13.9) Esboce o gráfico da função: $f(x) = \left|\log_2 |x|\right|$

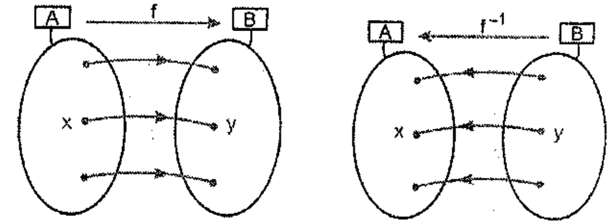
13.10) Esboce o gráfico da função: $f(x) = \left|\log_{\frac{1}{2}} (x - 1)\right| + 1$

Capítulo 14

Exponencial e logaritmo: funções inversas

14.1. O CONCEITO DE FUNÇÃO INVERSA

Uma função f, de A em B, define uma correspondência que, a cada x em A associa um único y em B. Se f é tal que, *a cada y ∈ B existe em correspondência um único x ∈ A*, isto é, se *todo* elemento de B é imagem de *um só* elemento de A, f se diz uma função **bijetora**. Pode-se, nessas condições, definir uma *função de B em A*, indicada por f^{-1}, para a qual, se (x; y) ∈ f, então (y; x) ∈ f^{-1}



A função f^{-1}, de B em A, é chamada **inversa de f.**
Note-se que:

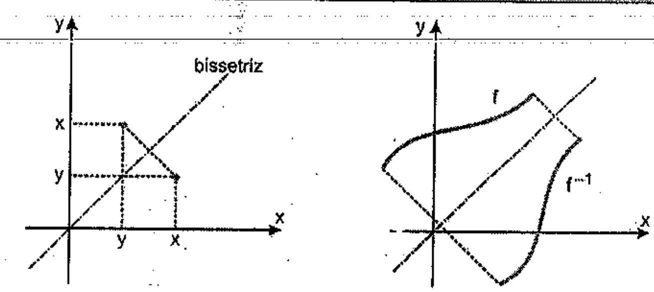
1º) só existe f^{-1} se f é bijetora

2º) se f é bijetora, seu conjunto imagem é o próprio contradomínio

3º) $D(f) = I(f^{-1})$ e $D(f^{-1}) = I(f)$

4º) Se o ponto de coordenadas (x; y) pertence ao gráfico de f, o ponto de coordenadas (y; x) pertence ao gráfico de f^{-1}. Como (x; y) e (y; x) são pontos simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, conclui-se que:

Os gráficos da função f e de sua inversa f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.



Lembremos, agora, o processo de cálculo da expressão que define a função inversa.

Seja a função f, *invertível*, definida pela fórmula:

$$y = f(x)$$

Para se obter a expressão que define f^{-1},

1º) isola-se x no primeiro membro da fórmula;

2º) troca-se a letra x pela letra y e a letra y pela letra x.

Exemplo

Calculemos a expressão que define a função inversa de f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

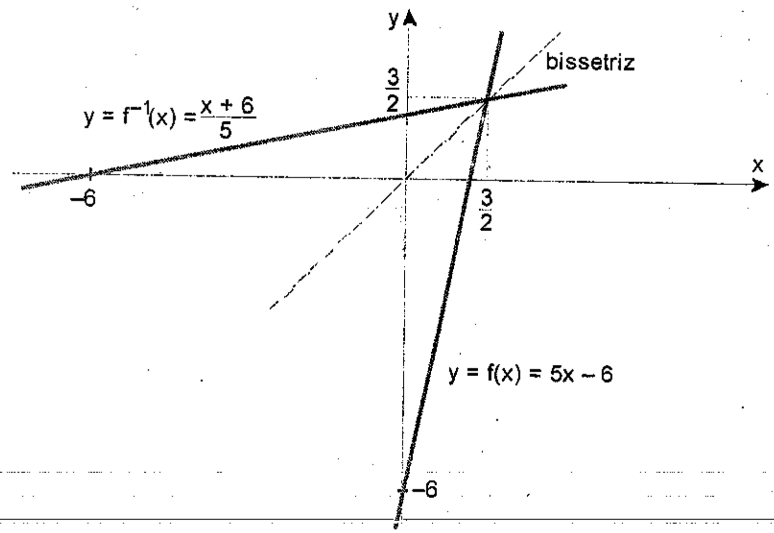
$$y = f(x) = 5x - 6$$

1º) Isolamos x: $y = 5x - 6 \Rightarrow 5x = y + 6 \Rightarrow x = \dfrac{y+6}{5}$

2º) (troca das letras): $y = \dfrac{x+6}{5}$

Então, a função f^{-1} de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, é definida por

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x+6}{5}$$



14.2. LOGARITMO E EXPONENCIAL: FUNÇÕES INVERSAS

Consideremos as definições:

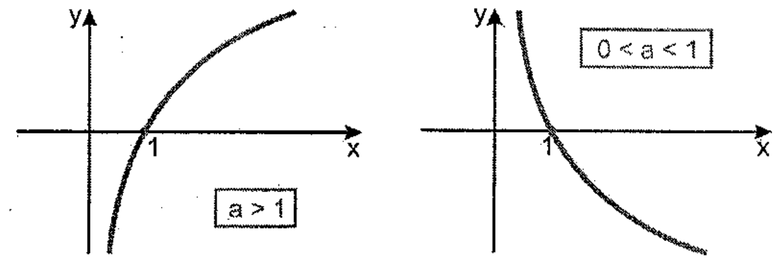
1º) *Função exponencial*:

f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$, definida por $y = f(x) = a^x$

2º) *Função logaritmo*:

f, de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$, definida por $y = f(x) = \log_a x$

Analisando os gráficos da função logaritmo



notamos que $f(x) = \log_a x$ é bijetora e, portanto, invertível. Vamos calcular sua inversa.

1º) (isolar x) temos $y = \log_a x$; da definição de logaritmo, vem

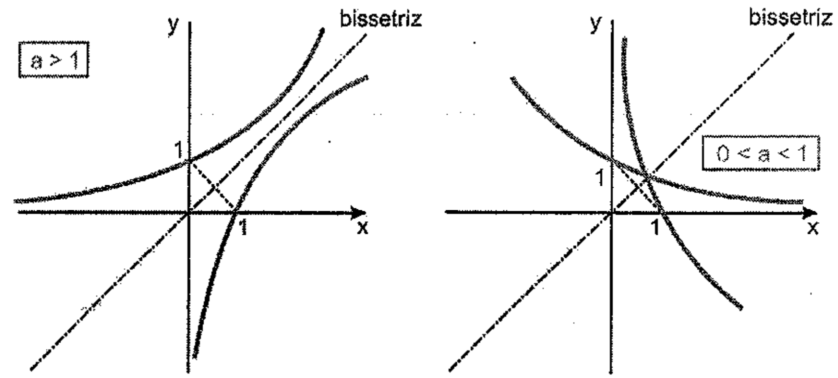
$$x = a^y$$

2º) (troca das letras): $y = a^x$

Então, temos que **a função inversa da função logaritmo de base a é a função exponencial de base a**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ dada por

$$f^{-1}(x) = a^x$$

Podemos observar os gráficos:



Exemplos

a) A expressão que define a inversa da função dada por $y = f(x) = \log_5 x$ é $y = f^{-1}(x) = 5^x$

b) A inversa de $y = f(x) = \left(\dfrac{13}{5}\right)^x$ é $y = f^{-1}(x) = \log_{\frac{13}{5}} x$.

Exercícios Resolvidos

14.1) Determine a expressão que define a inversa da função $y = f(x) = \log_3 (x-2)$.

Solução

1º) isolamos x: $y = \log_3 (x-2) \Rightarrow 3^y = x-2$ onde $x = 3^y + 2$

2º) trocamos as letras: $y = 3^x + 2$

Então, $y = f^{-1}(x) = 3^x + 2$.

14.2) Determine a expressão que define a inversa da função $y = f(x) = 2^{x-1}$.

Solução

1º) $y = 2^{x-1} \Rightarrow x - 1 = \log_2 y$

onde $x = 1 + \log_2 y$

2º) (troca das letras): $y = 1 + \log_2 x = f^{-1}(x)$

14.3) Determine a expressão que define a inversa da função: $f(x) = 3^x - 3^{-x}$

Solução

Temos $y = 3^x - 3^{-x}$ e, nesse caso, não conseguimos isolar x de modo imediato, como fizemos no exercício anterior. Fazemos, então, o seguinte: Primeiramente, *a mudança de variável* $3^x = \alpha$ (note que devemos ter, necessariamente, $\alpha > 0$). Resulta

$$y = \alpha - \frac{1}{\alpha}$$

que podemos escrever $\alpha^2 - y\alpha - 1 = 0$. Resolvendo essa equação do segundo grau em α:

$\Delta = y^2 + 4$ (é positivo para todo $y \in \mathbb{R}$)

$$\alpha = \frac{y \pm \sqrt{y^2+4}}{2}$$

Obtemos dois valores de α, em função de y:

$$\alpha_1 = \frac{y + \sqrt{y^2+4}}{2} \quad e \quad \alpha_2 = \frac{y - \sqrt{y^2+4}}{2}$$

Como $4 > 0$, tem-se $y^2 + 4 > y^2$
onde: $\sqrt{y^2+4} > \lvert y \rvert$
isto é, $\sqrt{y^2+4} > y$ e $\sqrt{y^2+4} > -y$
onde: $y - \sqrt{y^2+4} < 0$ e $y + \sqrt{y^2+4} > 0$

Como vemos no quadro acima, temos:

$$\alpha_1 > 0 \text{ e } \alpha_2 < 0$$

Portanto, somente α_1 é conveniente no exercício.

Logo, $\alpha = 3^x = \dfrac{y + \sqrt{y^2+4}}{2}$

Podemos, agora, *isolar x*; pela definição de logaritmo:

$$x = \log_3\left(\frac{y + \sqrt{y^2+4}}{2}\right)$$

Finalmente, trocando as letras, vem:

$$y = f^{-1}(x) = \log_3\left(\frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}\right)$$

Exercícios Propostos

14.4) Determine a expressão que define a inversa de cada função abaixo:
a) $f(x) = \log_5 (x + 2)$
b) $f(x) = \log_5 x + 2$
c) $f(x) = 3^{2x+3}$
d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 5$

14.5) Determine a expressão que define a inversa de cada função abaixo:
a) $f(x) = 3 - \log(x + 1)$
b) $f(x) = 2^{x-5} + 7$

14.6) Determine a expressão que define a inversa de $f(x) = \log_3 (2^x)$.

14.7) Determine as expressões que definem as inversas das funções definidas por:
a) $f(x) = 5^x - 2 \cdot 5^{-x}$
b) $f(x) = 4^x - 4^{-x+2}$

14.8) Determine a expressão que define a inversa da função definida por:

$$f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$$

Exercícios Suplementares

IV.1) Sendo a > 0 e a ≠ 1, diga em que condições a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a^{-x}$ é *crescente*.

IV.2) Sendo a > 0 e a ≠ 1, resolva a inequação: $a^{x^3-1} \leq a^{x^2-1}$

IV.3) Resolva a inequação $\dfrac{e^x - 1}{1 - x^2} < 0$.

IV.4) Resolva a inequação (com x > 0 e x ≠ 1): $x^{x^2-5x+6} > x^2$

IV.5) A função f: $\mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = log |x| é crescente ou decrescente?

IV.6) Dê o domínio da função definida por $y = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^x - 243}}$.

IV.7) Dê o domínio da função definida por $y = \log\left(\dfrac{2^x - 1}{2 - x}\right)$.

IV.8) Determine o domínio da função definida por $y = \log_x (x^2 - 2x - 15)$.

IV.9) Resolva a inequação $\log_{\frac{1}{3}} \log_4 \left(x^2 - 5\right) > 0$.

IV.10) Resolva a inequação $|\log(x^2 - 6x + 9)| > \log (x^2 - 6x + 9)$.

IV.11) Resolva a inequação $\log_{|x|} \sqrt{5} - \log_{|x|} 5 > 0$.

IV.12) Dê o domínio da função definida por $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{4}} x$.

IV.13) Dê o domínio da função definida por $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{4x^2 - 16x + 15}$.

IV.14) Para que valores de **a** a equação $x^2 - \log a = 0$ admite raiz real?

IV.15) Determine a condição que deve obedecer **a** para que a equação $x^2 - 2x + \log a = 0$ admita duas raízes reais e distintas.

IV.16) Que relação deve existir entre **a** e **m** para que a equação em x

$$x^2 + 2x - \log_a (m + 1) = 0$$

tenha duas raízes reais e distintas?

IV.17) Sendo a > 1 e 0 < b < 1, resolva o sistema de inequações em x:

$$\begin{cases} \log_a \log_b x < 0 \\ \log_b \log_a x > 0 \end{cases}$$

IV.18) Esboce o gráfico e dê o conjunto imagem da função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ 2^x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

IV.19) Esboce o gráfico e dê o conjunto imagem da função definida por

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (1 - x)$$

IV.20) A função f é definida pela equação

$$e^{2x} - 2e^x \cdot f(x) - 1 = 0$$

Determine a expressão que define a inversa de f.

IV.21) Dê a expressão que define a inversa da função definida por

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

IV.22) Dê o domínio da função definida por $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} \log_3 |x - 3|}$.

IV.23) Resolva a inequação: $\log_3 \log_{x^2} \log_{x^2} x^4 > 0$

IV.24) Resolva a inequação: $x^{\left(2 - \log_2^2 x - \log_2 x^2\right)} > \dfrac{1}{x}$.

IV.25) Sendo a > 1, resolva a inequação: $\dfrac{1}{\log_a x} > 1$

IV.26) Sendo 0 < a < 1, resolva a inequação: $\dfrac{1 + \log_a^2 x}{1 + \log_a x} > 1$.

IV.27) Sendo 0 < k < 1, resolva a inequação: $\log_{kx} x + \log_x (kx^2) > 0$.

IV.28) Simplifique a expressão:

$$y = (\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b) \log_b a - 1$$

IV.29) Prove que, para a > 1, tem-se: $\log_{10} a + \log_a 10 \geq 2$.

IV.30) Mostre que $\dfrac{1}{\log_3 5} + \dfrac{1}{\log_6 5} < 2$.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Capítulo 1

1.4) a) -27 c) 27 e) -81
b) -27 d) 81 f) -81

1.5) a) 1 c) 1 e) 1
b) -1 d) 0 f) 1

1.6) a) positivo
b) n par: positivo; n ímpar: negativo
c) $n = 0$: positivo; $n > 0$: zero
d) positivo

1.7) n ímpar: -1; n par: zero

1.8) -13

1.10) a) $-\frac{1}{27}$ c) $\frac{1}{27}$ e) $\frac{8}{125}$
b) $-\frac{1}{27}$ d) $\frac{125}{8}$ f) $\frac{125}{8}$

1.11) a) -1 b) $\frac{1}{6}$

1.12) ab

1.13) Eleve $x + x^{-1} = m$ ao quadrado: $m^2 - 2$

1.19) a) $\frac{b^4}{a}$ c) $\frac{81a^4b^2}{7}$ e) $a + b$
b) 1 d) $8a^3$ f) $\frac{b+a}{b-a}$

1.20) a) m^2n^3 c) $\frac{m^5}{n}$ e) $\frac{1}{mn}$
b) $\frac{n}{m}$ d) $\frac{m^2}{n^2}$ f) $\frac{n^4}{m^6}$

1.21) $\frac{4c^8}{b^8}$

1.22) -10^4

1.23) b) $P = 10^{16} \cdot (10^{16} - 1)$; 16 zeros

1.26) a) F c) V e) V
b) V d) V f) F

1.28) $x \geq -1$: $y = x + 1$; $x \leq -1$: $y = -(x + 1)$

1.35) 0

1.36) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$

1.37) $\sqrt[6]{27}$; $\sqrt[6]{36}$; $\sqrt[6]{30}$

1.38) $\sqrt[8]{72} < \sqrt[4]{12} < \sqrt{6}$

1.39) a) $2 + \sqrt{10} - 2\sqrt{5}$
b) $\sqrt[12]{128}$
c) $\sqrt[6]{\frac{4}{9}}$
d) -1
e) 0

1.40) a) $\frac{5\sqrt{6}}{8}$
b) $\frac{\sqrt[5]{2401}}{7}$
c) $\frac{7 + 2\sqrt{10}}{3}$
d) $\sqrt{6} + \sqrt{2} + 2$
e) $\sqrt{2\left(2 + \sqrt{2}\right)} - 2$

1.42) $\frac{1 + \sqrt[3]{45} - \sqrt[3]{75}}{4}$; note que $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

1.43) a) 18 c) 325
b) 322 d) $5\,778$

1.44) a) 4
b) -2; observe que $A < 0$

1.45) a) racionalize

b) $$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{f(1)} = \sqrt{2} - \sqrt{1} \\[2mm] \frac{1}{f(2)} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \\[2mm] \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}\text{some!}$$

1.52) a) 32
b) 125
c) 100

1.53) a) −15 b) 74

1.54) 300

1.55) a) $a^{-\frac{7}{4}}$
b) $a^{\frac{7}{12}}$
c) $a^{\frac{7}{2}}$

1.56) 1

1.57) a) $a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{6}}$ b) $a^{\frac{1}{3}}$

1.58) $\frac{8}{1-x^2}$

1.59) 3

1.60) a) $x-1$
b) $\frac{2ab(a+b)}{(a-b)^2}$
c) $\sqrt[3]{\frac{a}{x^2b}}$

1.61) $y = x^{\frac{1}{2}}$; 0,06

1.62) a) $(3^2)^x = 3^3 \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$
b) $\frac{2}{5}$
c) 3
d) −4
e) −2
f) 3

1.63) a) 0 c) $27^{\sqrt{6}}$
b) 1 d) $3^{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

1.64) 4,729

Capítulo 2

2.13) $x_n = 2^{n-1}$

2.14) Válida para $n = 1$ e $n \geq 5$; neste caso ($n \geq 5$) demonstrar pela Indução Matemática.

2.15) **Teorema 2**
Hipótese: $(1+a)^k \geq 1 + ka$
Tese: $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$
Multiplicando ambos os membros da desigualdade da hipótese por $1 + a$ (note que $1 + a > 0$, pois $a > -1$), obtemos:
$(1+a)^k \cdot (1+a) \geq (1+ka)(1+a)$
$(1+a)^{k+1} \geq 1 + a + ka + \underbrace{ka^2}_{\text{positivo}} > 1 + (1+k)a$

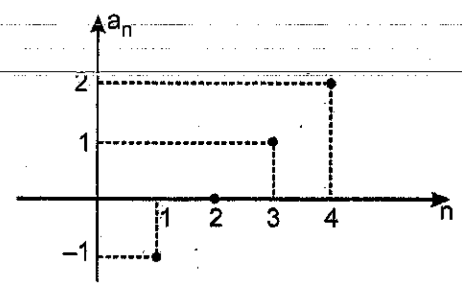
Capítulo 3

3.10) a) (3; 6; 9; 12; 15; ...)
b) (1; 3; 5; 7; 9;...)
c) (3; 5; 7; 9; 11; ...)
d) (2; 4; 6; 8; 10; ...)
e) (8; 10; 12; 14; 16; ...)
f) $\left(\frac{3}{7}; \frac{7}{12}; \frac{11}{17}; \frac{15}{22}; \frac{19}{27}; ...\right)$

3.11) a) (−2; −4; −10; −28; −82; −244; ...)
b) (−1; 5; 3; 13; 19; 45; ...)
c) (1; 3; 6; 10; 15; 21; ...)

3.12) a) $\frac{11}{4}$
b) $\frac{3k+8}{4}$
c) $\frac{3k-2}{2}$

3.13)



3.14) $b_n = 16n + 30$

3.15) a) $b_n = 4n^2 + 16n + 16$
b) $c_n = 8n + 20$

3.16) a) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{12}; \frac{1}{20}; \ldots\right)$
b) $a = 1$ e $b = -1$
c) $S_n = \frac{n}{n+1}$

3.17) a) $a_n = 2n + 2$
b) $a_n = 2n + 8$
c) $a_n = 2n + 1$
d) $a_n = 2n + 7$
e) $a_n = \frac{2n+5}{2n+2}$
f) $a_n = n^{n+1}$

3.18) a) $c_n = 6n + 3$
b) $(9; 15; 21; 27; \ldots)$

3.23) a) $5(1) + 5(2) + 5(3) + 5(4)$
b) $3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8$
c) $\left(\frac{1}{5}\right)^5 + \left(\frac{1}{5}\right)^6 + \left(\frac{1}{5}\right)^7 + \left(\frac{1}{5}\right)^8 + \left(\frac{1}{5}\right)^9 + \left(\frac{1}{5}\right)^{10}$

3.24) a) 15
b) 22

3.25) a) $8 \cdot 8^2 \cdot 8^3$
b) $\left(\frac{12}{4}\right)\left(\frac{16}{5}\right)\left(\frac{20}{6}\right)\left(\frac{24}{7}\right)$

3.26) a) $\sum_{i=1}^{6} 4i$
b) $\sum_{i=1}^{4} (4i-1)$
c) $\prod_{i=1}^{6} \frac{i}{2^i}$

Capítulo 4

4.19) a) -53
b) $\frac{25}{3}$
c) $\frac{-1593}{4}$
d) $-14 + 27\sqrt{2}$

4.20) $a_1 = 1$; $r = 4$

4.21) $\frac{203\sqrt{3} + 391}{5}$

4.22) 5

4.23) $-\frac{1}{2}$

4.24) $r = \frac{1}{5}$; $n = 5$

4.25) $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{3}$

4.26) 5

4.27) -4

4.28) $a_1 = p + q - 1$; $a_{p+q} = 0$

4.29) 2 132

4.30) (a_n) é PA de razão r e assim: $a_n = rn + k$ onde k é constante.
$a_{n+1} = r(n + 1) + k$
$b_n = a_{n+1}^2 - a_n^2 = [r(n + 1) + k]^2 - [rn + k]^2$
$b_n = (2r^2)n + (r^2 + 2rk)$
Como $2r^2$ e $r^2 + 2rk$ são constantes, (b_n) é uma PA de razão $2r^2$.

4.31) a) Racionalizando cada termo do 1º membro obtemos:

$$\frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{\underbrace{a_2 - a_1}_{r}} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{\underbrace{a_3 - a_2}_{r}} + \ldots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{\underbrace{a_n - a_{n-1}}_{r}} = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{r} =$$

$$= \frac{a_n - a_1}{r\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}\right)} = \frac{(n-1)r}{r\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}\right)} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$$

b) Observando que $\frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right)$ temos:

$$+\begin{cases} \dfrac{1}{a_1a_2} = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{a_1} - \cancel{\dfrac{1}{a_2}}\right) \\ \dfrac{1}{a_2a_3} = \dfrac{1}{r}\left(\cancel{\dfrac{1}{a_2}} - \cancel{\dfrac{1}{a_3}}\right) \\ \dfrac{1}{a_3a_4} = \dfrac{1}{r}\left(\cancel{\dfrac{1}{a_3}} - \cancel{\dfrac{1}{a_4}}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{1}{a_{n-1}\cdot a_n} = \dfrac{1}{r}\left(\cancel{\dfrac{1}{a_{n-1}}} - \dfrac{1}{a_n}\right) \end{cases}$$

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\dots+\frac{1}{a_{n-1}\cdot a_n}=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\right)=$$

$$=\frac{a_n-a_1}{r\,a_1a_n}=\frac{a_1+(n-1)r-a_1}{r\,a_1a_n}=\frac{(n-1)r}{r\,a_1a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$$

4.32) a) (5; 9; 13; 17; 21; ...)
b) (3; 5; 7; 9; 11; ...)
c) $a_{b_n} = a_{2n+1} = 4(2n+1)+1 = 8n+4+1 = 8n+5$, portanto $r = 8$
d) (13; 21; 29; 37; ...)

4.33) $r = \dfrac{6}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$

4.34) 20

4.35) 0

4.36) $\dfrac{pA - qB}{p - q}$

4.37) $\dfrac{1}{15}$

4.38) $r = 2$

4.39) $n > 64$

4.40) $a_n = \dfrac{n^2+5n-8}{n}$

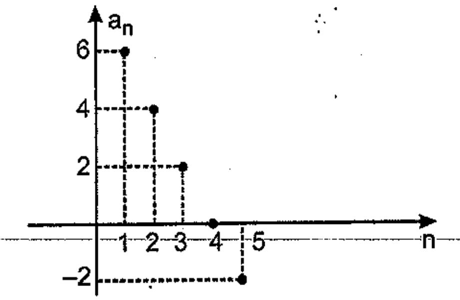
4.41) –530

4.42) **Teorema 1**: Para n = 1 temos: $a_1 = a_1 + (1-1)r$,
que é uma sentença verdadeira
Teorema 2: Suponhamos que a sentença seja válida para n = k:

$$a_k = a_1 + (k-1)r$$

$$a_{k+1} = a_k + r = a_1 + (k-1)r + r = a_1 + kr = a_1 + [(k+1)-1]r$$

4.43)



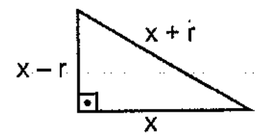
4.50) (2; 5; 8) ou (8; 5; 2)

4.51) x = 1 ou x = 6

4.52) (–10; –2; 6; 14) ou (14; 6; –2; –10)

4.53) (–1; 7; 15)

4.54)

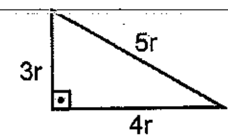


$(x+r)^2 = (x-r)^2 + x^2$
$x^2 + 2rx + r^2 = x^2 - 2rx + r^2 + x^2$
$4rx = x^2$

Como $x \neq 0$ vem: $x = 4r$

$$\begin{cases} x + r = 4r + r = 5r \\ x - r = 4r - r = 3r \end{cases}$$

Portanto:



4.55) (16; 40; 56)

4.56) (a; b; c) é PA $\Rightarrow$ a + c = 2b

$abc^2 + a^2bc = abc\,(c + a) = abc\,(2b) = 2ab^2c$

onde $ab^2c = \dfrac{abc^2 + a^2bc}{2}$

4.57) (−4; −1; 2; 5) ou (5; 2; −1; −4)

4.72) 26

4.73) 3000

4.74) −162

4.75) 1660

4.76) 1200

4.77) 780

4.78) 249 912

4.79) 135 110

4.80) 30

4.81) −3

4.82) $S_n = \dfrac{11}{12}n^2 - \dfrac{1}{4}n$

4.83) (1; −5; −11; ...)

4.84) a) (−1; 0; 2; 4; ...)
b) não

4.85) 21

4.86) n > 206

4.87) −592

4.88) 4186

4.89) $y_n = \dfrac{7n^2 + 7n + 8}{2}$

4.90) $\dfrac{18n^2 + 432}{n}$

4.94) a) 465
b) 650
c) 3 025

4.95) a) 11 895
b) 10368

4.96) a) 3 080
b) $\dfrac{4}{3}n^3 + 2n^2 - \dfrac{1}{3}n$
c) $\dfrac{1}{4}n^4 + \dfrac{3}{2}n^3 + \dfrac{11}{4}n^2 + \dfrac{3}{2}n$

4.97) 19 900

Capítulo 5

5.3) a) $\dfrac{40}{7}$
b) 8

5.4) $\dfrac{6}{213}$

5.5) $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{9}; \dfrac{1}{12}; \dfrac{1}{15}; \dfrac{1}{18}; \dfrac{1}{21}; \dfrac{1}{24}\right)$

5.6) $(x^2; y^2; z^2)$ é PA $\Leftrightarrow 2y^2 = x^2 + z^2$

$(y + z; z + x; x + y)$ é PH $\Leftrightarrow z + x = \dfrac{2(y+z)(x+y)}{(y+z)+(x+y)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z + x = \dfrac{2yx + 2y^2 + 2xz + 2yz}{2y + x + z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z + x)(2y + x + z) = 2yx + 2y^2 + 2xz + 2yz \Leftrightarrow x^2 + z^2 = 2y^2$

Como $x^2 + z^2 = 2y^2$ é verdade, então $(y + z; z + x; x + y)$ é PH.

Capítulo 6

6.14) a) 2^{n-6}
b) 16

6.15) $\dfrac{3}{2}$

6.16) 7

6.17) 72

6.18) $a_1 = \frac{5}{2}$; $q = 2$

6.19) $\frac{-243}{16}x$

6.20) a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

c) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

6.21) 864 000, 00

6.22) $b_n = \frac{1}{16} \cdot 64^n$: é uma PG de razão 64.

6.23) $c_n = \frac{5}{16} \cdot 8^n$: é um PG de razão 8.

6.24) $\sqrt{AB}$

6.33) a) ± 18 b) $\pm 4\sqrt{18} = \pm 12\sqrt{2}$

6.34) 10

6.35) (3; –21; 147)

6.36) $\left(\frac{1}{2}; 1; 2\right)$ ou $\left(2; 1; \frac{1}{2}\right)$

6.37) 8; 14 ou 8; $\frac{16}{5}$

6.38) $x = 0$

6.39) (1; 2; 4; 8; 16) ou (16; 8; 4; 2; 1)

6.40) $1 < q < 3$

6.41) $(a + b + c)(a - b + c) = (a + aq + aq^2)(a - aq + aq^2) =$
$= a^2(1 + q + q^2)(1 - q + q^2) = a^2(1 + q^2 + q^4) = a^2 + a^2q^2 + a^2q^4 = a^2 + b^2 + c^2$

6.49) -2^{231}

6.50) $\frac{-21}{2}$

6.51) $\frac{59049}{3} = 19683$

6.52) $a = 1$

6.53) $\frac{93}{2}$ ou $\frac{211}{8}$

6.54) $2^n - 1$

6.55) $\frac{3A}{2A+1}$

6.56) $\frac{2017}{1024}$

6.57) 6

6.65) $\frac{240}{7}$

6.66) 3

6.67) $\left(\frac{a+1}{a}\right)^2$

6.68) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6.69) $\frac{2}{5}$

6.70) $\frac{3x - x^2}{2(1-x)}$

6.71) $a_1 = 30$; $q = \frac{2}{3}$

6.72) 60

6.73) 120

6.74) $a^2 \cdot b^{\frac{5}{3}}$

6.75) 1

6.78) $\frac{(2n-1)3^n+1}{4}$

6.79) $\frac{x}{(1-x)^2}$

6.80) 3

Capítulo 7

7.9) a) 2
b) $\frac{1}{2}$
c) -5
d) -5
e) $\frac{2}{3}$
f) $\frac{4}{3}$
g) $\frac{2}{5}$
h) $\frac{3}{4}$
i) 1
j) -3
k) $\frac{3}{4}$
l) $\frac{1}{2}$

7.10) a) {1}
b) $\left\{\frac{1}{9}\right\}$
c) $\left\{\sqrt[4]{3}\right\}$
d) {–1}
e) $\{-2\sqrt{3};\ 2\sqrt{3}\}$
f) $\{\sqrt{3}\}$
g) $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$
h) {12}

7.11) a) $\left\{\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right\}$
b) $\left\{\frac{1}{4}\right\}$
c) {9}
d) ∅

7.12) a) $\left\{\sqrt{5}\right\}$
b) {4; 32}
c) $\left\{\sqrt{10};\ 100\right\}$

7.13) a) {4}
b) ∅
c) {2; 7}
d) {–5}

7.14) a) 5
b) 9
c) $\sqrt{3}$
d) $\frac{25}{3}$
e) $9\sqrt{3}$

7.15) y = 0

7.16) a) {100}
b) {257}

7.17) y = pq + 1

7.18) De $\log_a b = p$, vem $a^p = b$
De $\log_b a = q$, vem $b^q = a$
Substituindo o valor de **b** da primeira na segunda, temos:
$(a^p)^q = a$ ou seja $a^{pq} = a^1$
Logo, pq = 1

7.19) a) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$
b) {2}
c) $\left\{\frac{1}{4};\ 0\right\}$

7.20) a) {1,233 }
b) $\left\{-\frac{1}{3};\ 0{,}774\right\}$
c) {–0, 415; 0,322 }

Capítulo 8

8.12) a) $\log a_n = \log 3 + (n-1)\log 5$
b) $\log E = \log a + \frac{1}{2}\log b + \frac{1}{4}\log c$
c) $\log P_n = n\ \log a_1 + \frac{n(n-1)}{2}\log q$
d) $\log S_n = \log(a_1 + a_n) + \log n - \log 2$
e) $\log E = 5\log 2 + \frac{1}{2}\log 5 - \log\pi - 2\log 3 - \frac{1}{3}\log 7$

8.13) a) $E = 21\,b^2$

b) $E = \dfrac{\sqrt{a}\sqrt[3]{b}}{c^2}$

c) $E = \dfrac{4^5}{\sqrt{a}\sqrt[3]{b}}$

d) $E = \dfrac{1000\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{(a+b)^3}}$

8.14) a) $\{5\}$
b) $\{\sqrt{3}\}$
c) $\{2\}$
d) $\{-5\sqrt{5};\ 5\sqrt{5}\}$

8.15) a) $\left\{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ 2\sqrt{2}\right)\right\}$
b) $\{(90;\ 10)\}$

8.16) a) $\dfrac{3a}{2}$
b) $2a + 3$
c) $\dfrac{3(2a-1)}{2}$

8.17) a) 0,699
b) 1,857
c) 3,079
d) 1,620

8.18) a) 1,05
b) 0,83
c) 2,78

8.19) $\dfrac{p+q}{7}$

8.20) $3 - a$

8.21) $m - n$

8.22) a) $\left\{\dfrac{1}{3};\ 9\right\}$
b) $\{10;\ 1\,000\}$
c) $\{1;\ 10^{100}\}$

8.23) a) $\{0,318\}$
b) $\{1,398\}$
c) $\{0,176;\ 0,778\}$
d) $\{-1,585;\ 0,585;\ 4,755\}$

8.24) Se $\dfrac{b}{q}$, b, bq estão, nessa ordem, em PG, devemos mostrar que

$$\log_a\left(\frac{b}{q}\right),\ \log_a b,\ \log_a (bq)$$

estão, nessa ordem, em PA; para isso basta calcularmos as diferenças:

1ª) $\log_a b - \log_a\left(\dfrac{b}{q}\right) = \log_a b - (\log_a b - \log_a q) = \log_a q$

2ª) $\log_a (bq) - \log_a b = \log_a b + \log_a q - \log_a b = \log_a q$

Portanto, temos: $\log_a b - \log_a\left(\dfrac{b}{q}\right) = \log_a (bq) - \log_a b$ ou seja, $\log_a\left(\dfrac{b}{q}\right)$, $\log_a b$, $\log_a (bq)$ estão em PA

8.25) $q = a^r$

8.26) $n = 4$

8.27) $q = 32$

8.28) A soma das raízes é

$$a \log_c a + b \log_c b = \frac{ac}{a} = c$$

Então, $\log_c a^a + \log_c b^b = c$ $\quad \log_c (a^a b^b) = c$

onde $a^a b^b = c^c$

8.29) $p = S(s - S)$; $P = s(2S - s)$

Capítulo 9

9.1) a) 0 e 0,2314
b) 6 e 0,3112
c) −1 e 0,2310
d) −7 e 0,1212
e) −1 e 0,6484
f) −4 e 0,0101

9.2) a) $-2{,}31 = \bar{3}{,}69$
b) 1,74
c) $-11{,}04 = \overline{12}{,}96$
d) 2

9.6) a) 2,0453
b) 1,8745
c) 0,3711
d) $\bar{1}{,}0899 = -0{,}9101$
e) $\bar{3}{,}6599 = -2{,}3401$
f) $\bar{2}{,}9143 = -1{,}0857$

9.7) a) 4,8658
b) $-1{,}0997 = \bar{2}{,}9003$

9.8) a) 15,2
b) 8 870
c) 0,0582
d) 0,000634

9.9) a) 3,274 b) 0,04724

9.10) a) x = 1,947 b) 0,3324

9.11) a) 32 b) 29

9.12) a) 15 b) 14

Capítulo 11

11.6) a) 1,4650 b) 1,2323 c) −0,5483

11.7) a) {1,4650}
b) {0,2519}
c) {0,8480}
d) {0,4307; 1,4307}
e) {−0,5646; −0,3562}

11.8) a) $\frac{49}{43}$ c) $\frac{43}{84}$
b) $\frac{84}{43}$ d) $\frac{12}{7}$

11.9) a) $\frac{5}{8}$
b) $\frac{13}{8}$
c) 7

11.10) a) $\frac{b(a+1)}{b+1}$
b) $\frac{ab+3b+1}{2}$
c) $\frac{3ab+2}{3b+1}$

11.11) a) 2pq
b) $\frac{q+1}{2pq+1}$
c) $\frac{2pq+q+2}{pq+q+1}$

11.12) a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$

11.13) Como, numa PG, o termo médio é a média geométrica dos extremos, temos:

$$(\log_c b)^2 = \log_b (a) \cdot \log_{(a)} c = \log_b c$$

ou seja

$(\log_c b)^2 = \frac{1}{\log_c b}$

e daí

$(\log_c b)^3 = 1$ onde $\log_c b = 1$

Portanto, b = c

11.14) O produto das raízes é $\ell n\, b \cdot \frac{1}{\ell n\, c} = c$, onde

$\ell n\, b = c\, \ell n\, c = \ell n\, c^c$ e então $b = c^c$.

11.15) $\frac{30}{31}$

11.16) a) {9; 27}
b) $\left(\sqrt{a};\, a^2\right)$
c) {a}

11.17) $\{10^{0,2872}\}$

11.18) $\left\{\frac{1}{e^{9,3954}}\right\}$

11.19) Como, numa PA, o termo médio é a média aritmética dos extremos, temos:

$$2 \log_b x = \log_a x + \log_c x$$

Multiplicando ambos os membros por $\log_x b$, vem:

$2 \log_b (x) \cdot \log_{(x)} b = \log_a (x) \cdot \log_{(x)} b + \log_c (x) \cdot \log_{(x)} b$

onde $2 = \log_a b + \log_c b$

11.20) Escrevendo as duas igualdades na base x, vem:

$$\frac{\log_x b}{\log_x a} = \frac{\log_x c}{\log_x b} \quad \text{e} \quad \frac{\log_x c}{\log_x a} = \frac{1}{\log_x c}$$

Da primeira, obtemos:

$\log_x c = \frac{(\log_x b)^2}{\log_x a}$

que, substituído na segunda, traz:

$$\frac{(\log_x b)^2}{\log_x a \cdot \log_x a} = \frac{\log_x a}{(\log_x b)^2}$$

Onde, finalmente:

$$(\log_x b)^4 = (\log_x a)^3$$

12.8) a) crescente
b) crescente
c) decrescente
d) crescente

12.9) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$
c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{2}{9}\right\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ ou } x \geq 6\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ ou } x > 1\}$

12.10) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2,322\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1,5 < x < 1,6902\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5,888 < x < 3,511\}$

12.11) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1,465 \text{ ou } x > -1\}$

12.12) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < -2\sqrt{2} \text{ ou } 2\sqrt{2} < x \leq 3\}$

12.13) a) Se $a > 1$, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$
Se $0 < a < 1$, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$
b) Se $a > 1$, $S = \{y \in \mathbb{R} \mid -\log_a 3 \leq x \leq \log_a 3\}$
Se $0 < a < 1$, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \log_a 3 \leq x \leq -\log_a 3\}$

12.14) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } x > 5\}$

12.15) a) Se $\alpha \leq 0$, $S = \mathbb{R}$
Se $\alpha > 0$, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_2 \alpha\}$
b) Se $\alpha \leq 0$, $S = \varnothing$
Se $\alpha > 0$, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \log_2 \alpha\}$

12.19) a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{3}\right\}$

b) $\mathbb{R}^*$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > -2\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3 \text{ e } x \neq 2\}$
f) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2}\right\}$

12.20) a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{2} \text{ e } x \neq -2\right\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ e } x \neq \sqrt{2}\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 2\sqrt{3} \text{ e } x \neq \sqrt{11}\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} < x < -\sqrt{2} \text{ ou } \sqrt{2} < x < \sqrt{3}\}$

12.30) a) V
b) F
c) V
d) V
e) V
f) F

12.31) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 10\}$
b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x \leq 4\right\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 0 \text{ ou } 4 < x < 9\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < -\sqrt{13} \text{ ou } \sqrt{13} < x \leq 4\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 2 \text{ ou } x \neq -1\}$

12.32) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 8\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq -\sqrt{2} \text{ ou } \sqrt{2} \leq x < 2\}$

12.33) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
b) $\varnothing$
c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{125} \text{ ou } x > 125\right\}$
d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} \leq x \leq 8\right\}$

12.34) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } 3 < x < 27\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \le \frac{5}{4} \text{ ou } 2 < x \le 33\right\}$

12.35) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} < x < -\sqrt{2} \text{ ou } \sqrt{2} < x < \sqrt{3}\}$

12.36) a) Se $a > 1$, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

Se $0 < a < 1$, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{3} < x < 2\right\}$

b) Se $a > 1$, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x < \frac{3}{2}\right\}$

Se $0 < a < 1$, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} < x \le 1\right\}$

12.37) a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{3} < x < \frac{7}{3} \text{ e } x \ne 2\right\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 12\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } x > 9\}$

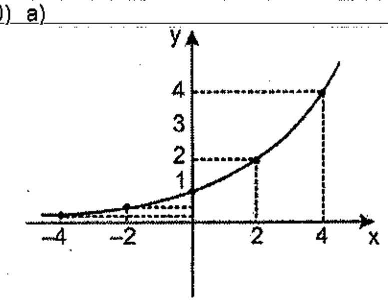
d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \le \frac{1}{3} \text{ ou } x \ge 27\right\}$

12.38) Se $a > 1$, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{a} \le x \le a \text{ e } x \ne 1\right\}$

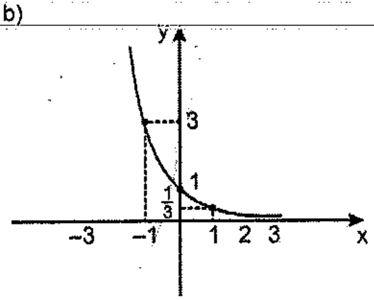
Se $0 < a < 1$, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \le a \text{ ou } x \ge \frac{1}{a}\right\}$

12.39) a) crescente
b) decrescente
c) decrescente
d) crescente

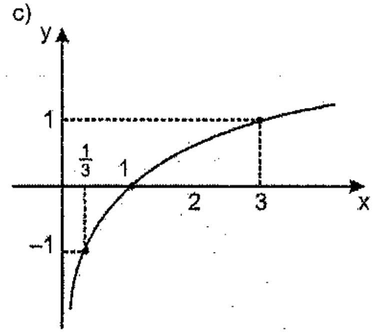
12.40) a)



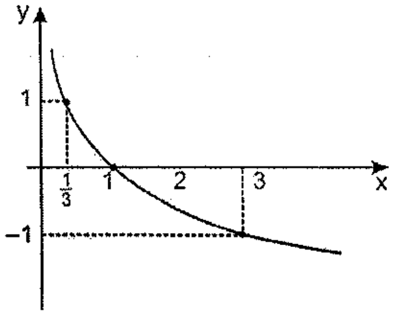
b)



c)

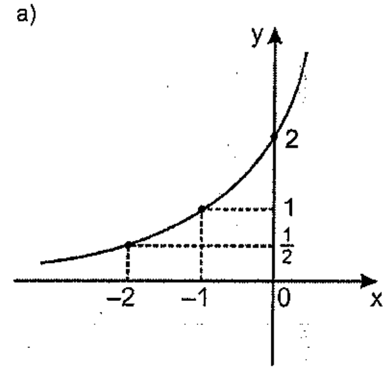


d)

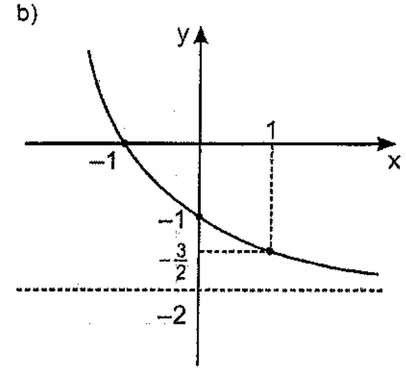


Capítulo 13

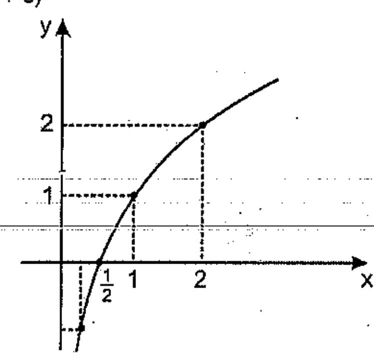
13.6) a)



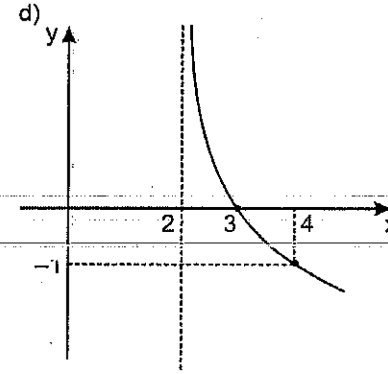
b)



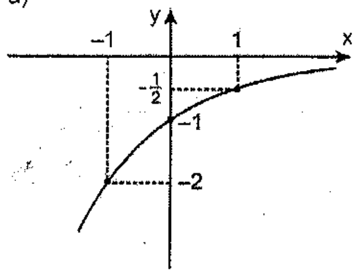
c)



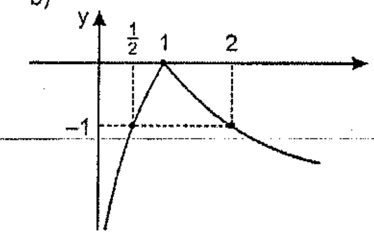
d)



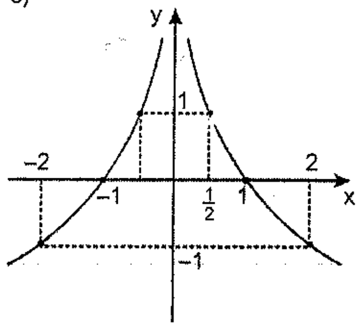
13.7) a)



b)



c)

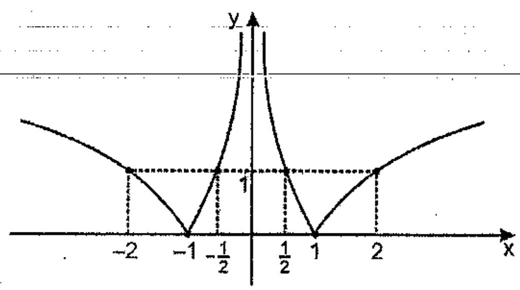


13.8) a) $\{y \in \mathbb{R} \mid y > -2\}$

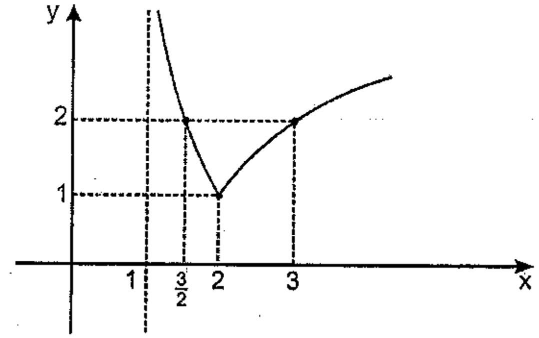
b) $\{y \in \mathbb{R} \mid y > \pi\}$

c) $\{y \in \mathbb{R} \mid y > -\sqrt{5}\}$

13.9)



13.10)



Capítulo 14

14.4) a) $f^{-1}(x) = 5^x - 2$
b) $f^{-1}(x) = 5^{x-2}$
c) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\log_3 x - \frac{3}{2}$
d) $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+5)$

14.5) a) $f^{-1}(x) = 10^{3-x} - 1$
b) $f^{-1}(x) = \log_2(x-7) + 5$

14.6) $f^{-1}(x) = \log_2(3^x)$

14.7) a) $f^{-1}(x) = \log_5\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+8}}{2}\right)$

b) $f^{-1}(x) = \log_4\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+64}}{2}\right)$

14.8) $f^{-1}(x) = \log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

Parte I

I.1) $\left(\frac{a}{b}\right)^{mn}$

I.2) Observe que $2b = a + c$ e $y^2 = zx$

I.3) a) $\sqrt{2}$
b) $-\sqrt{2}$

I.4) $x \le -1$: $y = -2$; $-1 \le x \le 1$: $y = 2x$; $x \ge 1$; $y = 2$

I.5) Lembre que: $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$; $\frac{\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}}{7}$

I.6) Racionalize o numerador da fração obtida.

I.7) $\left.\begin{array}{l} a^{\alpha^2} + b\alpha + c = 0 \text{: e multiplique por } \alpha^n \\ a^{\beta^2} + b\beta + c = 0 \text{: e multiplique por } \beta^n \end{array}\right\}$ some

I.8) Use a inequação $\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$

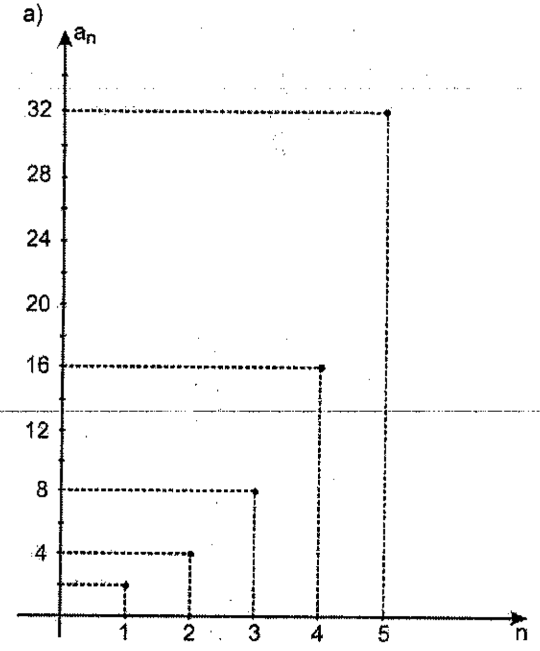
I.10) **Teorema 1**: Uma reta no plano divide-o em 2 partes, portanto não mais que 2^1.
Teorema 2: Suponhamos que não se pode dividir o plano em mais do que 2^k partes, tendo-se k retas. Vamos provar que, ao acrescentarmos uma nova reta, o número de partes não ultrapassará 2^{k+1}.
Estando as **k** retas no plano, uma nova reta irá cortar as regiões já existentes. O número de regiões cortadas não é superior a 2^k. Se de fato fossem cortadas 2^k regiões, o número total passaria a ser o dobro. Isto quer dizer que com k + 1 retas obteremos *no máximo* $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ partes.

I.12) $n > 9$: a propriedade é válida.

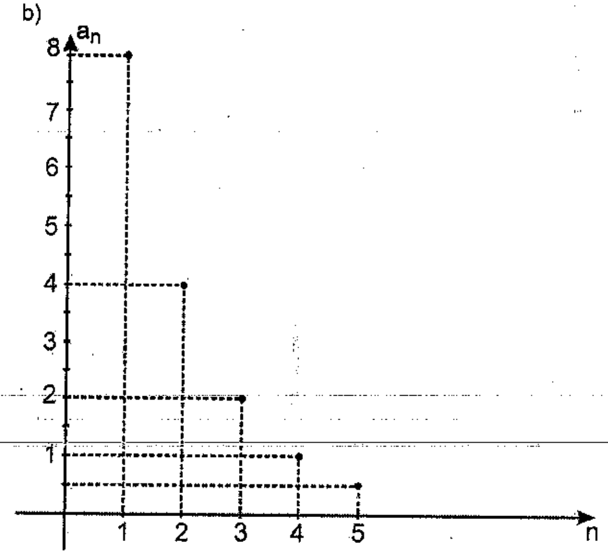
Parte II

II.1) $\frac{2}{15} - \frac{1}{4(2n+3)} - \frac{1}{4(2n+5)}$

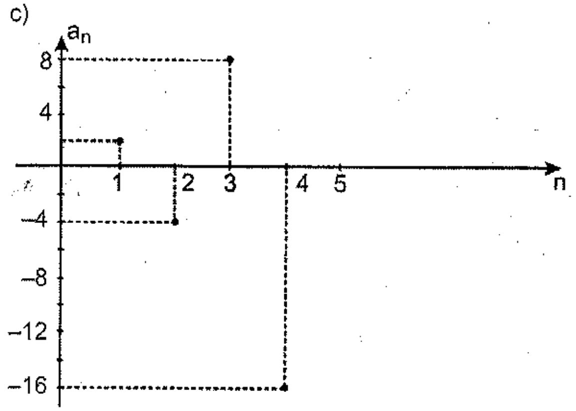
II.2) a)



b)



c)



II.3) $(a; b; c)$ é PA $\Rightarrow a + c = 2b$

$(a^2 + ab + b^2;\ c^2 + ac + a^2;\ b^2 + bc + c^2)$ é PA $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(c^2 + ac + a^2) = (a^2 + ab + b^2) + (b^2 + bc + c^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2c^2 + 2ac + 2a^2 = a^2 + 2b^2 + c^2 + ab + bc \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c^2 + a^2 + 2ac = ab + bc + 2b^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a + c)^2 = (a + c)b + 2b^2 \Leftrightarrow$

Lembrando que $a + c = 2b$ temos:

$(a + c)^2 = (a + c)b + 2b^2 \Leftrightarrow (2b)^2 = (2b)b + 2b^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4b^2 = 4b^2$

Como esta última sentença é verdadeira, a sequência é uma PA.

II.4) (1; 2; 3) ou (3; 2; 1)

II.5) (−5; −2; 1; 4; 7) ou (7; 4; 1; −2; −5)

II.6) $a_1 = \frac{11}{2}$ e $r = \frac{1}{4}$ ou $a_1 = \frac{3}{2}$ e $r = \frac{11}{12}$

II.7) 115 600

II.8) 0

II.9) 29

II.10) $16(a + 15b)$

II.11) (10; 7; 4; 1)

II.12) $a_1 = 8$ e $q = \frac{5}{2}$ ou $a_1 = -\frac{56}{3}$ e $q = -\frac{5}{2}$

II.13) (1; 3; 9) ou (9; 3; 1)

II.14) $9\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$

II.15) 185 044

II.16) 6

II.17) a) $a_1 = \frac{1}{2};\ a_2 = \frac{1}{6};\ a_3 = \frac{1}{18}$

b) $a_n = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow q = \frac{1}{3}$

c) $\frac{3}{4}$

II.18) 3 248

II.19) 3 500

II.20) a) 16

b) $\frac{64}{15}\left(16^{10} - 1\right)$

II.21) a) $\frac{4}{9}$

b) $\frac{25}{99}$

c) $\frac{125}{999}$

Parte III

III.1) $-\frac{13}{2}$

III.2) 8

III.3) $x = 6\,581$, $a = 9$

III.4) $-\frac{3}{2}$

III.5) $S = \{243\}$

III.6) $n = \sqrt{\log_2 k}$

III.7) $S = \{(6; -10)\}$

III.8) $S = \{16\}$

III.9) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

III.10) 40

III.11) $S = \{2; 512\}$

III.12) 0,85733

III.13) $\sqrt[5]{100}$

III.14) $S = \left\{\left(\frac{3}{8}; \frac{1}{8}\right)\right\}$

III.15) $S = \{100\}$

III.16) $x = a^{\frac{p}{m+n}}$

III.17) $x = 4$

III.18) 0,158884

III.19) 0,67

III.20) −2,7664

III.21) 2

III.22) 4,26

III.23) $-\frac{4}{3}$

III.24) $x = 0{,}226$

III.25) $S = \{2\}$

III.26) $m = 5$ ou $m = \frac{15}{2}$

III.27) De $a^{b^x} = c$ vem $b^x = \log_a c = \frac{\log c}{\log a} = \frac{r}{p}$

Onde

$$x = \log_b\left(\frac{r}{p}\right) = \frac{\log\left(\frac{r}{p}\right)}{\log b} = \frac{1}{q}\log\left(\frac{r}{p}\right) = \log\left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{1}{q}}$$

então $10^x = \left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{1}{q}}$

III.28) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

III.29) $y = \log_2 3$

III.30) Façamos $\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b} = t$

Então temos

$\log a = t\,(b-c)$

$\log b = t\,(c-a)$

$\log c = t\,(a-b)$

ou ainda:

$a \log a = ta\,(b-c)$

$b \log b = tb\,(c-a)$

$c \log c = tc\,(a-b)$

Somando, temos:

$a \log a + b \log b + c \log c = 0$

ou seja $\log a^a + \log b^b + \log c^c = 0$

e finalmente $a^a \cdot b^b \cdot c^c = 1$.

III.31) Temos $a + b = p$ (I) e $ab = B^m$ (II)

De (II) tiramos:

$\log_B a + \log_B b = m$ (III)

Vamos multiplicar membro a membro as igualdades (I) e (III):

$$(a + b)(\log_B a + \log_B b) = mp$$

onde $a \log_B a + b \log_B b + b \log_B a + a \log_B b = mp$

e finalmente

$\log_B a^a + \log_B b^b + \log_B a^b + \log_B b^a = mp$

III.32) 1

III.33) $\frac{5n-3}{6}$

III.34) $\frac{AB}{10B+45A}$

III.35) Seja

$$A = \left(\frac{p}{q}\right)^{\log r} \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^{\log p} \cdot \left(\frac{r}{p}\right)^{\log q}$$

Vamos calcular log A e mostrar que log A = 0:

$$\log A = \log r \cdot \log\frac{p}{q} + \log p \cdot \log\frac{q}{r} + \log q \cdot \log\frac{r}{p} =$$

$$= \log r \cdot (\log p - \log q) + \log p \cdot (\log q - \log r) + \log q \cdot (\log r - \log p) =$$

$$= \log r \cdot \log p - \log r \cdot \log q + \log p \cdot \log q - \log p \cdot \log r +$$

$$+ \log q \cdot \log r - \log q \cdot \log p = 0$$

De log A = 0 vem imediatamente A = 1.

III.36) a) 1,204
b) 35,1
c) 6,364

III.37) Para n = 2 temos $\log_{a_0} a_1 \cdot \log_{a_1} a_2 = \log_{a_0} a_2$ (trata-se da propriedade conhecida).

Vamos admitir *por hipótese* que

$$\log_{a_0} a_1 \cdot \log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \ldots \cdot \log_{a_{n-1}} a_n = \log_{a_0} a_n$$

e vamos provar *como tese* que

$$\log_{a_0} a_1 \cdot \log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \ldots \cdot \log_{a_{n-1}} a_n \cdot \log_{a_n} a_{n+1} = \log_{a_0} a_{n+1}$$

Para isso, basta multiplicar ambos os membros da expressão da hipótese por

$\log_{a_n} a_{n+1}$:

$$\log_{a_0} a_1 \cdot \log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \ldots \cdot \log_{a_{n-1}} a_n \cdot \log_{a_n} a_{n+1} =$$

$$= \log_{a_0} a_n \cdot \log_{a_n} a_{n+1} = \log_{a_0} a_{n+1}$$

Nesta última passagem foi aplicada novamente a propriedade conhecida, que vale para o caso de um produto de dois logaritmos.

III.38) $S = \left\{2^{-\sqrt{2}};\ 2^{\sqrt{2}}\right\}$

III.39) $S = \left\{3;\ 3^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}};\ 3^{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right\}$

III.40) Vamos simplificar a expressão:

$$A = \frac{\log_a x - \log_b x}{\log_b x - \log_c x}$$

Temos:

$$A = \frac{\frac{1}{\log_x a} - \frac{1}{\log_x b}}{\frac{1}{\log_x b} - \frac{1}{\log_x c}} = \frac{\frac{\log_x b - \log_x a}{\log_x a \cdot \log_x b}}{\frac{\log_x c - \log_x b}{\log_x b \cdot \log_x c}} = \frac{\frac{\log_x\left(\frac{b}{a}\right)}{\log_x a}}{\frac{\log_x\left(\frac{c}{b}\right)}{\log_x c}}$$

Mas estando **a**, **b** e **c** em PG, tem-se $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$.

Assim:

$$A = \frac{\frac{1}{\log_x a}}{\frac{1}{\log_x c}} = \frac{\log_a x}{\log_c x}$$

Parte IV

IV.1) $0 < a < 1$

IV.2) Se a > 1; $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 1\}$
Se 0 < a < 1; $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 1 \text{ ou } x = 0\}$

IV.3) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } x > 1\}$

IV.4) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

IV.5) decrescente

IV.6) $]-\infty; -5[$

IV.7) $]0; 2[$

IV.8) $]5; +\infty[$

IV.9) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -\sqrt{6} \text{ ou } \sqrt{6} < x < 3\}$

IV.10) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4 \text{ e } x \ne 3\}$

IV.11) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1 \text{ e } x \ne 0\}$

IV.12) $\left]\frac{1}{4}; 1\right[$

IV.13) $D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x<\frac{3}{2}\ \text{ou}\ x>\frac{5}{2}\right\}$

IV.14) $a \geq 1$

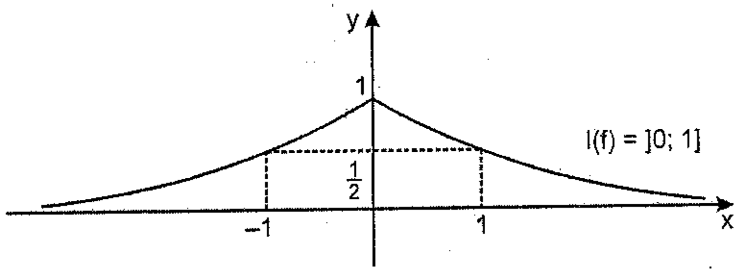
IV.15) $0 < a < 10$

IV.16) Se $a > 1$, deve-se ter $m+1>\frac{1}{a}$

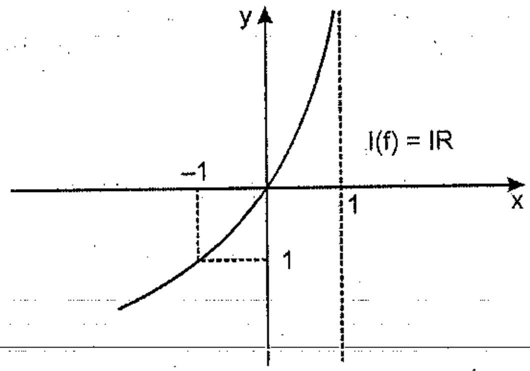
Se $0 < a < 1$, deve-se ter $0<m+1<\frac{1}{a}$

IV.17) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\mid b<x<a\ \text{e}\ x\neq 1\}$

IV.18)



IV.19)



IV.20) $f^{-1}(x)=\ell n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

IV.21) $f^{-1}(x)=\ell n\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

IV.22) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<2\ \text{ou}\ 4<x<6\}$

IV.23) $S=\{x\in\mathbb{R}\mid -\sqrt{2}<x<-1\ \text{ou}\ 1<x<\sqrt{2}\}$

IV.24) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<\frac{1}{8}\ \text{ou}\ 1<x<2\right\}$

IV.25) $S=\{x\in\mathbb{R}\mid 1<x<a\}$

IV.26) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<a\ \text{ou}\ 1<x<\frac{1}{a}\right\}$

IV.27) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<1\ \text{ou}\ x>\frac{1}{k}\right\}$

IV.28) $y = \log_a b$

IV.29) Façamos $\log_{10} a = y$. Como $a > 1$, tem-se $y > 0$.
Partindo de $(y-1)^2 \geq 0$ escrevemos:

$$y^2-2y+1 \geq 0 \Rightarrow y^2+1 \geq 2y$$

e, como $y > 0$, vem:

$$\frac{y^2+1}{y}\geq 2 \Rightarrow y+\frac{1}{y}\geq 2$$

ou seja, $\log_{10} a + \log_a 10 \geq 2$

IV.30) Como $24 < 25$, temos $\log_5 24 < \log_5 25$
onde $\log_5 3 + \log_5 8 < 2$ e então

$$\frac{1}{\log_3 5}+\frac{1}{\log_8 5}<2$$

TÁBUA DE LOGARITMOS DECIMAIS

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1881	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4041	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	2010
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TÁBUA DE LOGARITMOS DECIMAIS

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8249	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TÁBUA DE LOGARITMOS DECIMAIS

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8696	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9286
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9972	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9821	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9