

# UNIL

## Livro 3

Pré-vestibular Física



SISTEMA DE ENSINO  
**POLIEDRO**

**Autoria:** Nicolau Arbex Sarkis, Marcílio Alberto de Faria Pires, Rodrigo Fulgêncio Mauro e André Oliveira de Guadalupe.

**Diretor executivo:** Nicolau Arbex Sarkis.

**Gerência editorial:** João Carlos Puglisi.

**Coordenação de edição técnica:** Marília L. dos Santos G. Ribeiro.

**Edição técnica:** Equipe de editores técnicos da Editora Poliedro.

**Coordenação de produção editorial:** Livia Scherrer dos Santos.

**Analista de produção editorial:** Claudia Moreno Fernandes.

**Coordenação de edição:** Michelle Silva da Mata e Vivian Plascak Jorge.

**Edição:** Equipes de edição da Editora Poliedro.

**Coordenação de revisão:** Mariana Castelo Queiroz.

**Revisão:** Equipe de revisão da Editora Poliedro.

**Coordenação de arte:** Antonio Domingues e Kleber S. Portela.

**Diagramação:** Equipes de arte da Editora Poliedro.

**Ilustrações:** Equipes de ilustração da Editora Poliedro.

**Coordenação de licenciamento:** Ana Rute A. M. Perugini.

**Licenciamento:** Equipe de licenciamento da Editora Poliedro.

**Projeto gráfico:** Alexandre Moreira Lemes e Kleber S. Portela.

**Projeto gráfico da capa:** Bruno Torres.

**Coordenador de PCP:** Anderson Flávio Correia.

**Impressão e acabamento:** nywgraf Editora Gráfica Ltda.

**Créditos: capa e frontispício** Rafael Ramirez Lee/Shutterstock 5 © Daveh900 | Dreamstime.com • © Anthony Aneese Totah Jr | Dreamstime.com • © Pavle Marjanovic | Dreamstime.com 113 Albert Lozano/123rf.com • © Dimitar Marinov | Dreamstime.com • NSSDC/NASA 205 © Chuckaitch | Dreamstime.com • © Invenex | Dreamstime.com • ESO/José Francisco Salgado **contracapa** Elinalee/Shutterstock.

A Editora Poliedro pesquisou junto às fontes apropriadas a existência de eventuais detentores dos direitos de todos os textos e de todas as obras de artes plásticas presentes nesta obra, sendo que sobre alguns nenhuma referência foi encontrada. Em caso de omissão, involuntária, de quaisquer créditos faltantes, estes serão incluídos nas futuras edições, estando, ainda, reservados os direitos referidos nos arts. 28 e 29 da lei 9.610/98.

SISTEMA DE ENSINO  
**POLIEDRO**

São José dos Campos - SP  
ISBN: 978-85-7901-051-4  
Telefax: (12) 3924-1616  
editora@sistemapoliedro.com.br  
www.sistemapoliedro.com.br

Copyright © 2015  
Todos os direitos de edição reservados à Editora Poliedro

# SUMÁRIO

## Frente 1

<b>9 Força de atrito e dinâmica do movimento circular</b> .....	<b>6</b>
Força de atrito.....	7
Dinâmica do movimento circular .....	10
Revisando .....	15
Exercícios propostos .....	21
Textos complementares.....	32
Exercícios complementares .....	35
<b>10 Trabalho, potência e energia</b> .....	<b>49</b>
Trabalho.....	50
Potência.....	54
Energia.....	55
Forças conservativas.....	58
Revisando .....	66
Exercícios propostos .....	74
Texto complementar .....	90
Exercícios complementares .....	92

## Frente 2

<b>9 Forças magnéticas e indução magnética</b> .....	<b>114</b>
Conceitos iniciais.....	115
Força magnética em um fio retilíneo percorrido por corrente.....	115
Lei de Lenz.....	121
Lei de Faraday-Neumann.....	122
Revisando .....	128
Exercícios propostos .....	129
Texto complementar .....	139
Exercícios complementares .....	141
<b>10 Gravitação</b> .....	<b>150</b>
Sistema Solar.....	151
Leis de Kepler .....	153
Força gravitacional .....	156
Campo gravitacional.....	158
Rotação da Terra e peso aparente.....	161
Movimento de satélites.....	162
Energia potencial gravitacional e conservação de energia mecânica.....	166
Sistema binário .....	169
Fases da Lua.....	170
Eclipses .....	171
Revisando .....	171
Exercícios propostos .....	173
Texto complementar .....	186
Exercícios complementares .....	191

# Frente 3

<b>10 Instrumentos ópticos</b> .....	<b>206</b>
Instrumentos ópticos.....	207
Óptica da visão.....	210
Revisando .....	214
Exercícios propostos.....	215
Textos complementares.....	219
Exercícios complementares.....	222
<b>11 Movimentos periódicos oscilatórios</b> .....	<b>226</b>
Movimentos periódicos .....	227
Revisando .....	238
Exercícios propostos .....	240
Textos complementares.....	245
Exercícios complementares.....	248
<b>12 Ondulatória</b> .....	<b>253</b>
Ondas .....	254
Revisando .....	257
Exercícios propostos .....	258
Texto complementar .....	261
Exercícios complementares.....	263
<b>Gabarito</b> .....	<b>266</b>



# Frente 1

# 9

## Força de atrito e dinâmica do movimento circular

FRENTE 1

Em um movimento circular, a resultante centrípeta é responsável pela variação da direção da velocidade. Uma motocicleta, ao fazer uma curva em um circuito de motovelocidade, mantém-se em movimento circular devido ao atrito estático entre os pneus e a pista. A força de atrito, atuando como resultante centrípeta, permite que a motocicleta permaneça em sua trajetória em movimento acelerado sem deslizar ou derrapar. A grande dependência do coeficiente de atrito na trajetória circular descrita pela moto pode ser minimizada em uma pista inclinada.



## Força de atrito

### Introdução

Estudamos, até o momento, situações em que as superfícies de contato entre dois corpos são perfeitamente lisas e situações em que desprezamos a resistência do ar. Isso facilitou o entendimento das leis de Newton, porém são casos ideais, em que as forças de atrito são desconsideradas.

Na realidade, por mais lisa ou polida que uma superfície possa ser, ela apresenta irregularidades quando observada microscopicamente.

Para um corpo apoiado em um plano, analisando as superfícies de contato com uma lupa, as asperezas podem ser observadas como na figura a seguir.

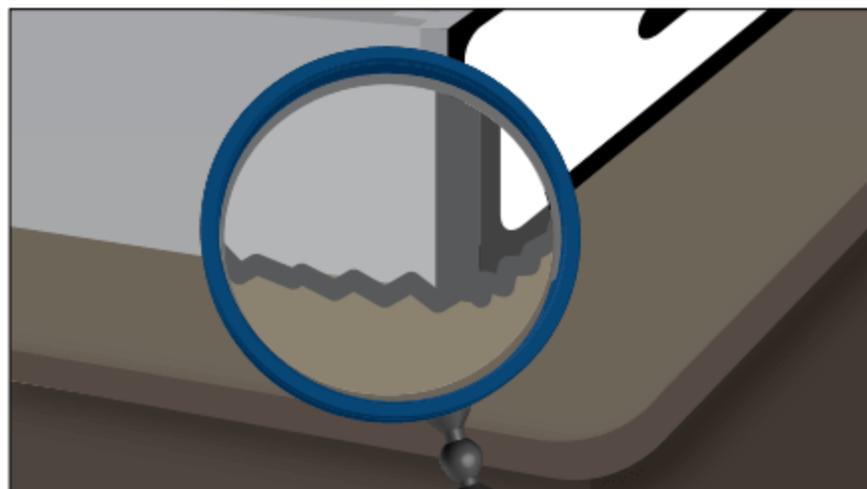


Fig. 1 Superfícies são rugosas quando vistas microscopicamente.

Devido às saliências das duas superfícies, elas se interpenetram, o que dificulta o movimento de uma em relação à outra.

Às forças de oposição ao movimento, trocadas entre as superfícies, damos o nome de **força de atrito**.

O atrito é chamado **estático** quando não há movimento relativo entre os corpos.

O atrito é chamado **dinâmico** (ou cinético) quando há movimento relativo entre os corpos.

O atrito nem sempre é desfavorável ao movimento do corpo. Nós só andamos devido ao atrito. Nossos pés exercem força sobre o solo e este, pelo Princípio da Ação e Reação, exerce uma força que nos impulsiona.

O atrito, nesse caso, é estático, pois não há movimento relativo entre o solo e a superfície de nossos pés que o toca.

### Atrito estático

Para estudarmos a força de atrito estático, tomemos um corpo em repouso sobre um plano horizontal.

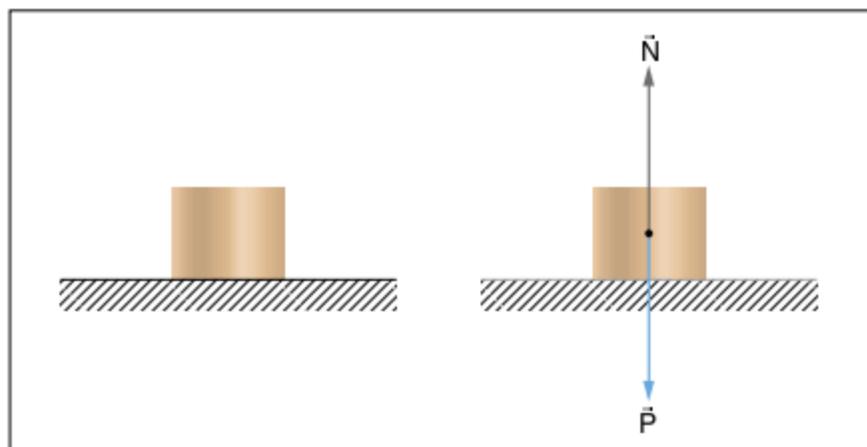


Fig. 2 Corpo em equilíbrio sobre uma superfície horizontal.

As únicas forças que atuam sobre o corpo são o peso ( $\vec{P}$ ) e a normal ( $\vec{N}$ ). Do equilíbrio, concluímos que  $N = P$ .

Se aplicarmos uma força  $\vec{F}_1$  horizontal sobre o corpo e este não se mover, então haverá equilíbrio das três forças que atuam no corpo: peso ( $\vec{P}$ ), força horizontal ( $\vec{F}_1$ ) e força de contato com o plano ( $\vec{R}_1$ ):

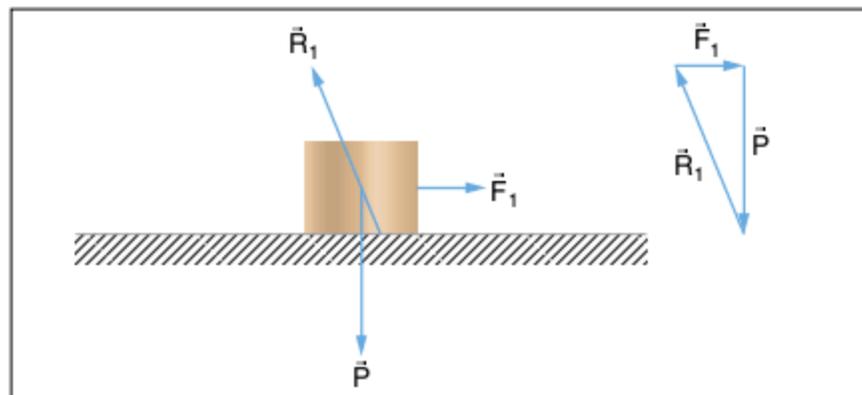


Fig. 3 Corpo em equilíbrio com aplicação de uma força  $\vec{F}_1$ .

onde:

$$\vec{R}_1 + \vec{F}_1 + \vec{P} = \vec{0}$$

Podemos decompor a força  $\vec{R}_1$  em duas componentes:

- uma componente perpendicular à superfície de contato, à qual damos o nome de **força normal**.
- uma componente paralela à superfície de contato, à qual damos o nome de **força de atrito**.

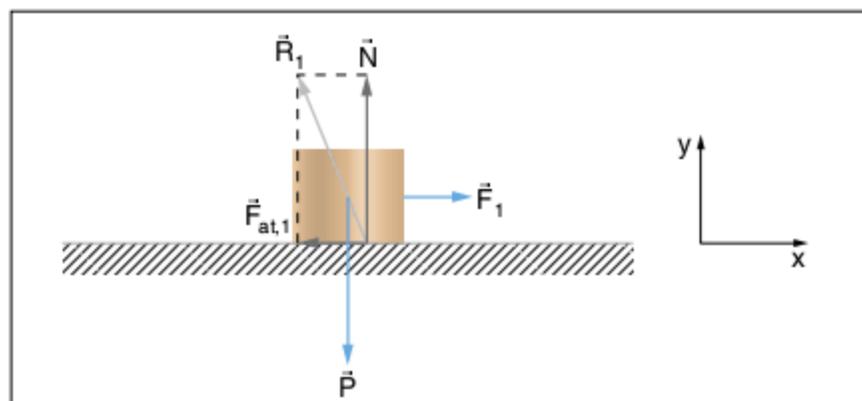


Fig. 4 Decomposição da força de contato em normal e força de atrito.

Em x, há equilíbrio:

$$F_{at,1} = F_1$$

Em y, há equilíbrio:

$$N = P$$

Se aplicarmos uma força  $\vec{F}_2$  no lugar de  $\vec{F}_1$  ( $F_2 > F_1$ ) e o corpo continuar parado:

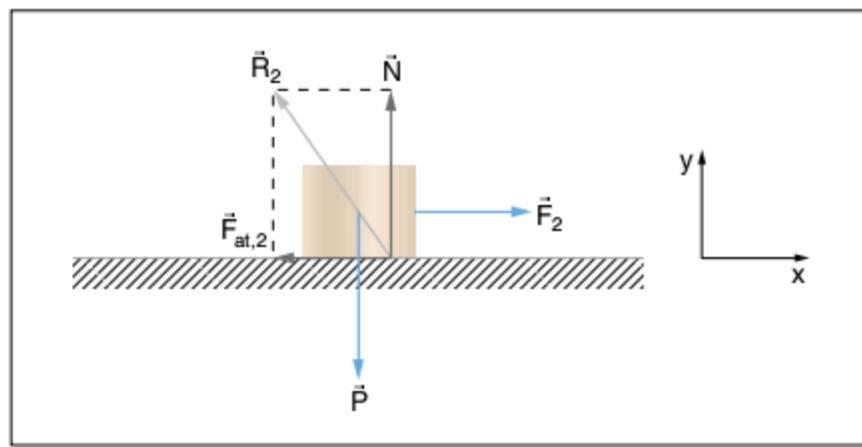


Fig. 5 Corpo em equilíbrio com aplicação de uma força  $\vec{F}_2$ .

Em x, há equilíbrio:

$$F_{at,2} = F_2$$

Em y, há equilíbrio:

$$N = P$$

Quanto mais aumentarmos o valor da força horizontal sobre o corpo, maior será a força de atrito estático, e a normal permanecerá com seu valor inalterado.

Assim, a força de atrito estático é variável, porém só aumenta até certo limite.

Haverá um momento em que ela atingirá um valor máximo e, com o aumento da força horizontal, o corpo iniciará o movimento.

Dizemos que o corpo está na iminência do movimento quando estiver prestes a se mover, e isso ocorrerá quando aplicarmos uma força  $\vec{F}_{m\acute{a}x}$ , de tal modo que  $F_{m\acute{a}x} = F_{at,e\acute{m}a\acute{x}}$ , onde  $F_{at,e\acute{m}a\acute{x}}$  é a força de atrito estático máxima.

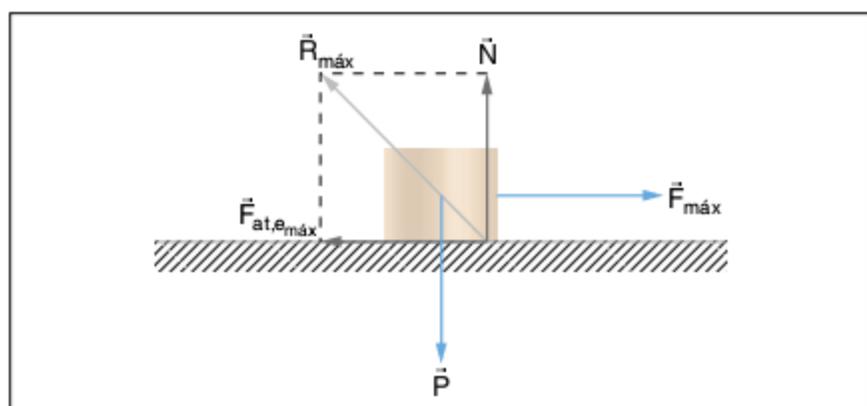


Fig. 6 Corpo ainda em equilíbrio, mas na iminência de se mover.

Se repetirmos a mesma experiência com uma massa maior, mas mantendo as mesmas superfícies de contato, a força necessária ( $F'_{m\acute{a}x}$ ) para colocar o corpo na iminência do movimento será maior. Haverá também uma nova normal ( $N'$ ).

No entanto, o quociente  $\frac{F_{at,e\acute{m}a\acute{x}}}{N}$  será igual ao quociente  $\frac{F'_{at,e\acute{m}a\acute{x}}}{N'}$ . Esse quociente é chamado de coeficiente de atrito estático ( $\mu_e$ ) entre as superfícies:

$$\frac{F_{at,e\acute{m}a\acute{x}}}{N} = \frac{F'_{at,e\acute{m}a\acute{x}}}{N'} = \mu_e$$

Assim:

$$F_{at,e\acute{m}a\acute{x}} = \mu_e \cdot N$$

Por ser o quociente entre duas grandezas de mesma dimensão, o coeficiente de atrito é uma grandeza adimensional e não possui unidade.

**Observação:** É importante notar que  $F_{at,e\acute{m}a\acute{x}}$  e  $N$  são apenas a decomposição da mesma força de contato entre as superfícies.

A força de atrito estático tem seu valor situado entre zero e seu valor máximo,  $F_{at,e\acute{m}a\acute{x}}$ :

$$0 \leq F_{at,e} \leq F_{at,e\acute{m}a\acute{x}}$$

Logo:

$$0 \leq F_{at,e} \leq \mu_e \cdot N$$

Assim, é impossível a força de atrito estático assumir um valor maior do que  $\mu_e \cdot N$ .

O coeficiente de atrito estático ( $\mu_e$ ) depende dos materiais das superfícies de contato e do polimento de cada uma, porém independe da área de contato entre as superfícies. Os valores da força aplicada e da massa também não alteram o coeficiente de atrito, apenas a força de atrito.

Como vimos na primeira situação (Fig. 2), a existência do coeficiente de atrito não é condição suficiente para a existência da força de atrito, mas apenas condição necessária. Podemos não ter  $F_{at,e}$  apesar de existir  $\mu_e$ .

Pela Lei da Ação e Reação, se o plano exerce uma força de atrito sobre o corpo, este exerce uma força de atrito sobre o plano.

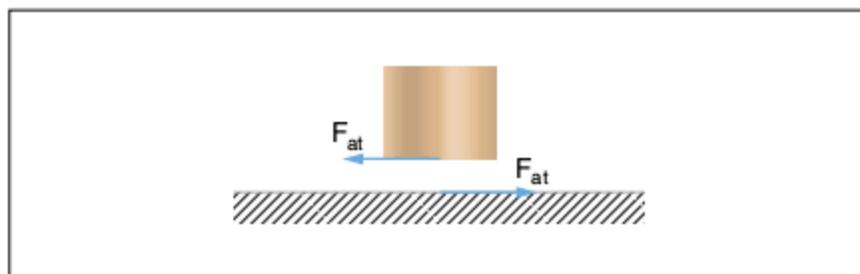


Fig. 7 Força de atrito e a Lei da Ação e Reação.

Uma maneira interessante de determinar o coeficiente de atrito estático entre um corpo e um plano é inclinar o plano até que o corpo fique na iminência de escorregar.

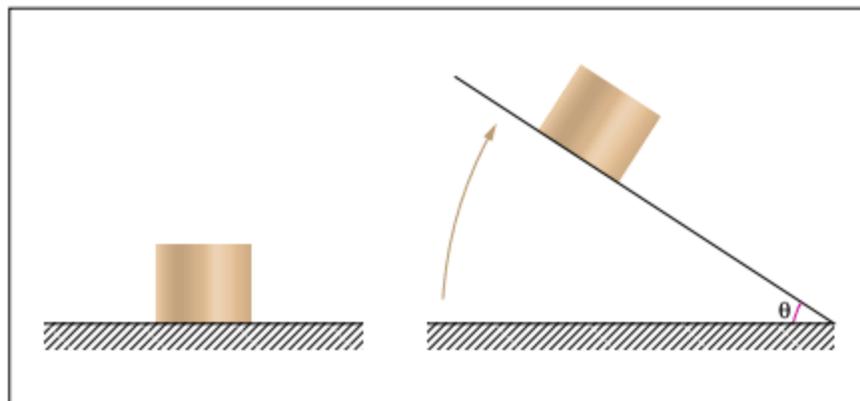


Fig. 8 Plano horizontal inclinado para a determinação de  $\mu_e$

Neste momento, estarão atuando duas forças sobre o corpo: o peso ( $\vec{P}$ ) e a força de contato do plano inclinado ( $\vec{R}$ ).

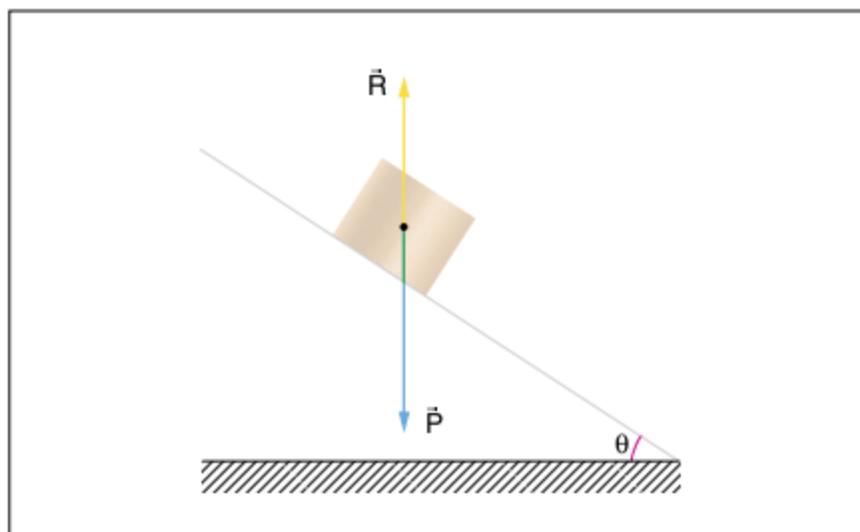


Fig. 9 Equilíbrio estático em plano inclinado.

Podemos decompor as duas forças em suas componentes perpendiculares e paralelas ao plano inclinado:

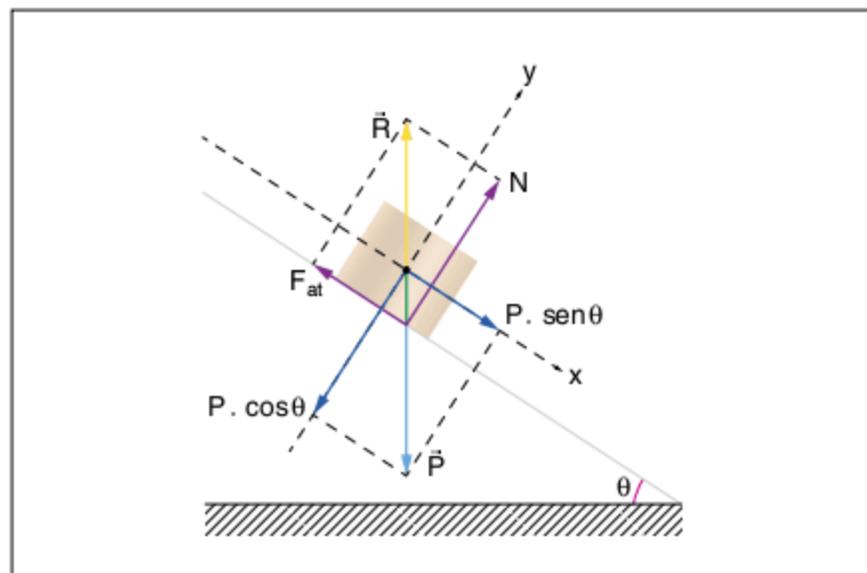


Fig. 10 Decomposição de forças em um plano inclinado.

Em x, há equilíbrio:

$$F_{at} = P \cdot \text{sen } \theta \quad (I)$$

Em y, há equilíbrio:

$$N = P \cdot \text{cos } \theta \quad (II)$$

Como o corpo está na iminência do movimento, então a força de atrito é máxima e igual a  $\mu_e \cdot N$ .

Em (I):

$$\mu_e \cdot N = P \cdot \text{sen } \theta \quad (III)$$

Dividindo (III) por (II):

$$\frac{\mu_e \cdot N}{N} = \frac{P \cdot \text{sen } \theta}{P \cdot \text{cos } \theta} \Rightarrow \mu_e = \text{tg } \theta$$

Assim, conhecendo o ângulo  $\theta$  e, conseqüentemente,  $\text{tg } \theta$ , conheceremos o coeficiente de atrito estático.

No plano,  $\text{tg } \theta$  é dada por  $\frac{y}{x}$ .

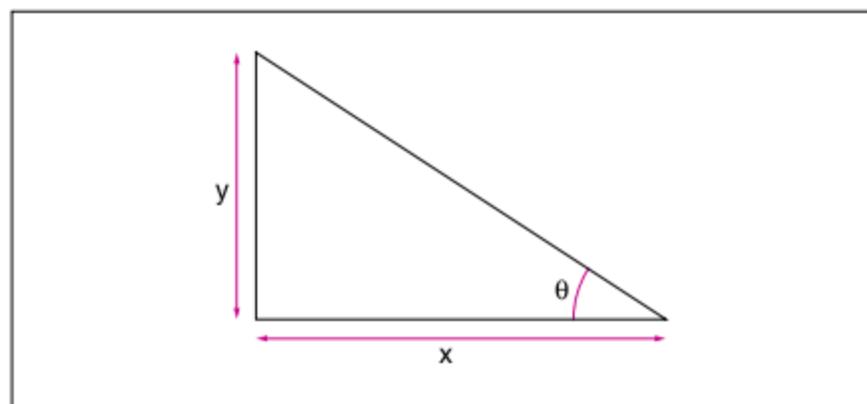


Fig. 11 Determinação do ângulo  $\theta$  através de um triângulo retângulo.

### Atrito dinâmico

Um corpo sobre um plano permanecerá em repouso enquanto a força horizontal não superar a força de atrito estático máxima. Logo, o movimento se dará quando  $F > \mu_e \cdot N$ . Nesse caso, o corpo iniciará seu movimento e o atrito deixará de ser estático para se tornar dinâmico.

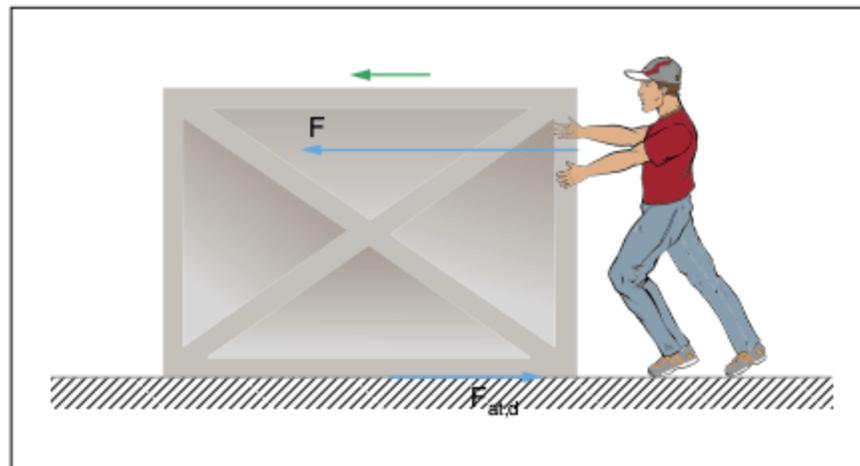


Fig. 12 Corpo em movimento sujeito a atrito dinâmico.

A força de atrito dinâmico, ao contrário da força de atrito estático, não varia, e seu módulo é dado por:

$$F_{at,d} = \mu_d \cdot N$$

onde  $\mu_d$  é o coeficiente de atrito dinâmico e  $N$  é a força normal exercida pelo plano sobre o corpo.

O coeficiente de atrito dinâmico ( $\mu_d$ ), a exemplo do coeficiente de atrito estático, depende dos materiais das superfícies de contato e do polimento de cada uma, porém independe da área de contato entre as superfícies.

A experiência nos mostra que, na grande maioria dos casos,  $\mu_d < \mu_e$ , o que significa que  $F_{at,d} < F_{at,e,máx}$ , pois, iniciado o movimento, é reduzido o acoplamento existente entre as saliências das superfícies. Em nosso dia a dia, vemos que é mais fácil manter um corpo em movimento do que tirá-lo do repouso.

**Observação:** Lembre-se de como é difícil mover um carro a partir do repouso em um plano horizontal; uma vez em movimento, é mais fácil empurrá-lo. Para retirar o carro do repouso, tem de ser vencido o atrito estático entre as peças móveis internas do carro.

No sistema representado na figura 12, ao aumentarmos o valor de  $F$ , a força de atrito varia conforme o gráfico:

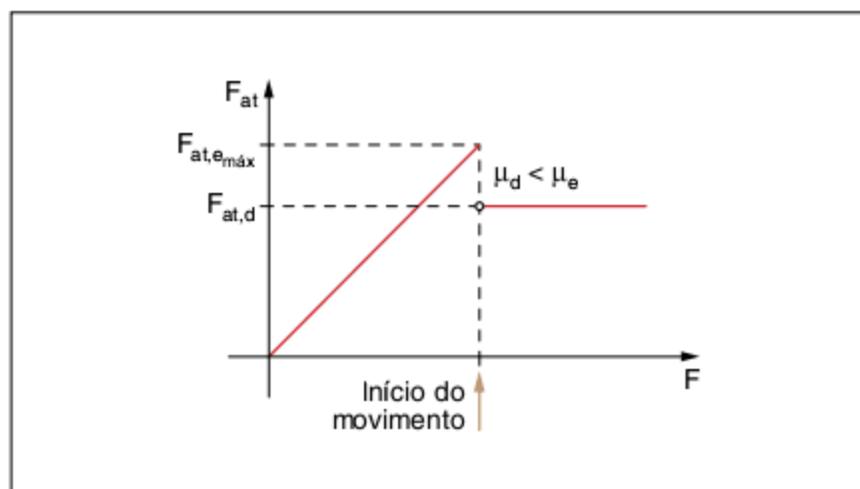


Fig. 13 Gráfico da força de atrito em função da força sobre o corpo.

À medida que a velocidade aumenta, há uma redução muito pequena em  $\mu_d$ , que por vezes é desprezada.

Podemos resumir as características das forças de atrito estático e dinâmico na tabela a seguir.

Força	Direção	Sentido	Módulo
Atrito estático	Paralela à superfície de contato entre os corpos	Contrário à tendência do movimento	$0 \leq F_{at,e} \leq \mu_e \cdot N$
Atrito dinâmico		Contrário ao movimento	$F_{at,d} = \mu_d \cdot N$

Tab. 1 Direção, sentido e módulo das forças de atrito estático e dinâmico.

## Resistência dos fluidos

O movimento de um corpo em um fluido (líquido ou gás) recebe a resistência desse fluido através de uma força.

Essa força de oposição ao movimento é dada, experimentalmente, pela seguinte expressão:

$$F = k \cdot v^n$$

onde:

- $k$  é a constante que depende da densidade do fluido, da área da superfície do corpo e da sua geometria.
- $v$  é a velocidade do corpo.
- $n$  é uma constante que depende do fluido e do corpo.

Para o movimento de um corpo no ar, chamamos esta força de arrasto ( $D$ ), do inglês *drag*, dada por:

$$D = \frac{1}{2} \rho \cdot S \cdot C_D \cdot v^2$$

com:

$$n = 2 \quad \text{e} \quad k = \frac{1}{2} \rho \cdot S \cdot C_D$$

onde:

- $\rho$  é a densidade do ar
- $S$  é a área de referência do corpo
- $C_D$  é o coeficiente de arrasto

Podemos tomar como exemplo um corpo em queda livre:



Fig. 14 Atrito devido à resistência do ar.

Se a queda for no vácuo, a única força será o peso, e o movimento será uniformemente variado. No entanto, sujeito à resistência do ar, a resultante será dada por:

$$F_R = P - F_{ar} = P - k \cdot v^2$$

Então:

$$m \cdot a = mg - k \cdot v^2 \Rightarrow a = g - \frac{k v^2}{m}$$

O gráfico seguinte mostra a variação da aceleração durante a queda.

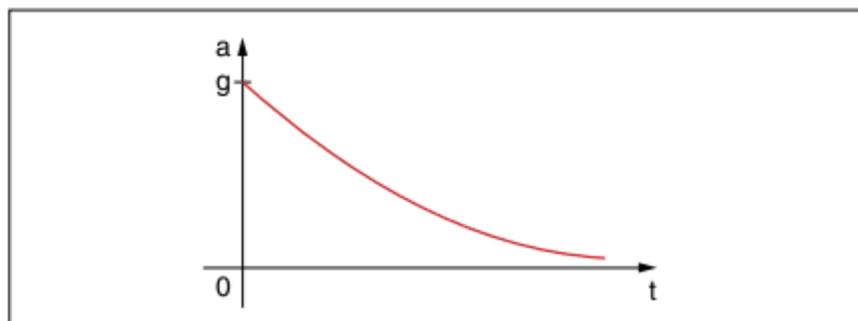


Fig. 15 Gráfico da aceleração em função do tempo de um corpo em queda com resistência do ar.

No início do movimento,  $v = 0$  e  $a = g$ . Com a aceleração, a velocidade vai aumentando e a aceleração diminuindo, até que a força de resistência se iguale ao peso. Nesse ponto, o corpo atingirá uma velocidade limite e a aceleração será nula.

$$F_{ar} = P \Rightarrow k \cdot v_{lim}^2 = mg$$

Logo:

$$v_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

Ao atingir a velocidade limite, o corpo adquire movimento uniforme. O gráfico seguinte mostra a variação da velocidade durante a queda.

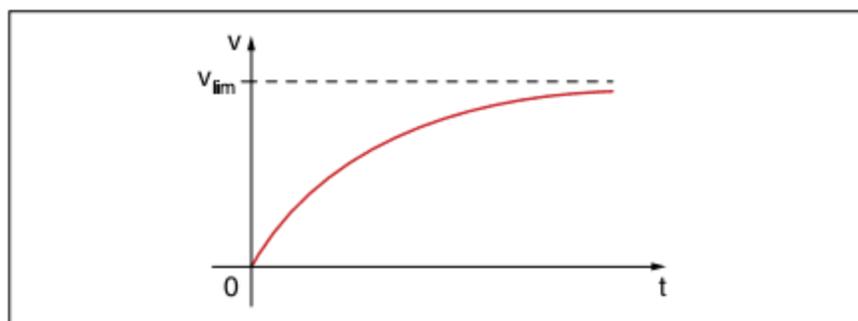


Fig. 16 Gráfico da velocidade em função do tempo de um corpo em queda com resistência do ar.

Para  $F_{ar} = k \cdot v^2$ , a unidade de  $k$  é dada por:

$$\text{unid}(k) = \frac{\text{unid}(F_{ar})}{\text{unid}(v^2)} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m/s}^2}{\text{m}^2/\text{s}^2} \Rightarrow \text{unid}(k) = \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

## Dinâmica do movimento circular

Vamos tomar um corpo que se move em uma trajetória curva. Já estudamos a geometria desse movimento e vimos que é útil decompor a aceleração vetorial instantânea em duas direções: tangencial e normal à trajetória.

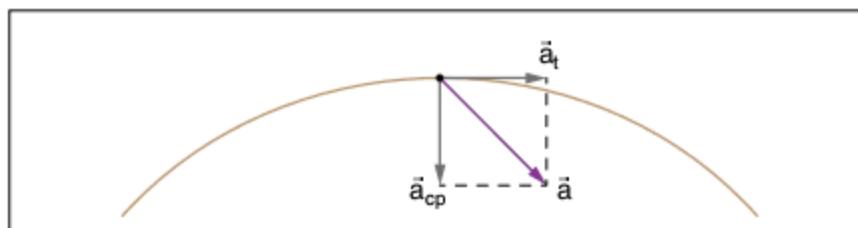


Fig. 17 Aceleração de um corpo em um movimento curvilíneo.

onde:

- $\vec{a}_t$  é chamada de aceleração tangencial e está relacionada com a variação do módulo de  $\vec{v}$ . Ela é tangente à trajetória no instante considerado, com o mesmo sentido de  $\vec{v}$  quando

o movimento é acelerado e oposto ao de  $\vec{v}$  quando retardado. Seu módulo é igual ao módulo da aceleração escalar.

- $\vec{a}_{cp}$  é chamada de aceleração centrípeta e está relacionada com a variação da direção de  $\vec{v}$ . Ela é perpendicular à trajetória no instante considerado, com sentido orientado para o centro da trajetória. Seu módulo é dado por  $\frac{v^2}{R}$ , onde  $v$  é o módulo de  $\vec{v}$  e  $R$  é o raio de curvatura da trajetória. Quando a trajetória é circular,  $R$  é o próprio raio da circunferência.

Da Segunda Lei de Newton, sabemos que:

$$\vec{F}_R = m \cdot \vec{a}$$

Para estudar a dinâmica do movimento de um corpo, vimos que é necessário que a aceleração desse corpo e as forças sobre ele aplicadas estejam todas decompostas em duas direções definidas. Porém, como a aceleração de um corpo em movimento curvilíneo já costuma ser decomposta nas direções tangencial e normal à trajetória, então nos vemos forçados a decompor todas as forças nessas duas direções.

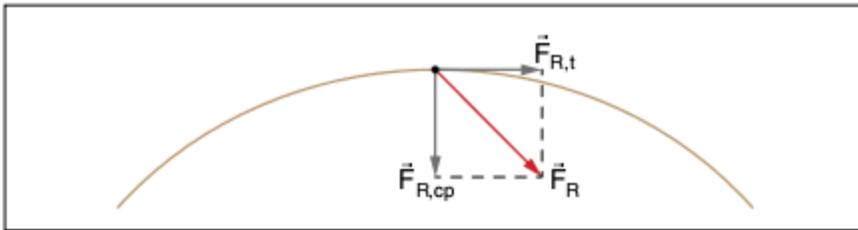


Fig. 18 Força resultante em um movimento curvilíneo.

onde:

$$\vec{F}_{R,t} = m \cdot \vec{a}_t \quad \text{e} \quad \vec{F}_{R,cp} = m \cdot \vec{a}_{cp}$$

**Observação:** Assim, a resultante tangencial é tangente à trajetória, com mesmo sentido de  $\vec{v}$  no movimento acelerado e sentido contrário ao de  $\vec{v}$  no movimento retardado. A resultante centrípeta é perpendicular à trajetória, com sentido orientado para o centro da trajetória.

### Exercícios resolvidos

**1** Um bloco de massa 5 kg repousa sobre uma mesa. Os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre o bloco e a mesa valem, respectivamente, 0,4 e 0,3. Ao aplicar uma força  $F$  horizontal sobre o bloco, determine a intensidade da força de atrito e o valor da aceleração do bloco para:

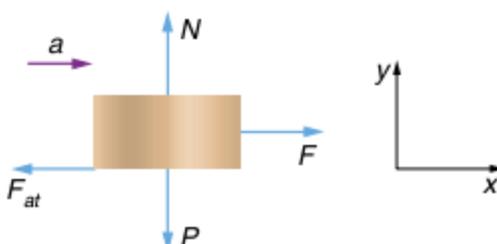
Adote:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

a)  $F = 18 \text{ N}$

b)  $F = 25 \text{ N}$

**Resolução:**

Isolando o bloco, temos:



Em  $y$ , há equilíbrio:

$$N = P \Rightarrow N = 50 \text{ N}$$

Precisamos calcular a máxima  $F_{at,e}$  e a  $F_{at,d}$ :

$$F_{at,e,máx} = \mu_e \cdot N = 0,4 \cdot 50 = 20 \text{ N}$$

$$F_{at,d} = \mu_d \cdot N = 0,3 \cdot 50 = 15 \text{ N}$$

a) Se  $F = 18 \text{ N} < F_{at,e,máx}$ , então o bloco estará em repouso:  
 $a = 0$  e  $F - F_{at} = 0 \Rightarrow F_{at} = F \Rightarrow F_{at} = 18 \text{ N}$

b) Se  $F = 25 \text{ N} > F_{at,e,máx}$ , então o bloco estará em movimento:

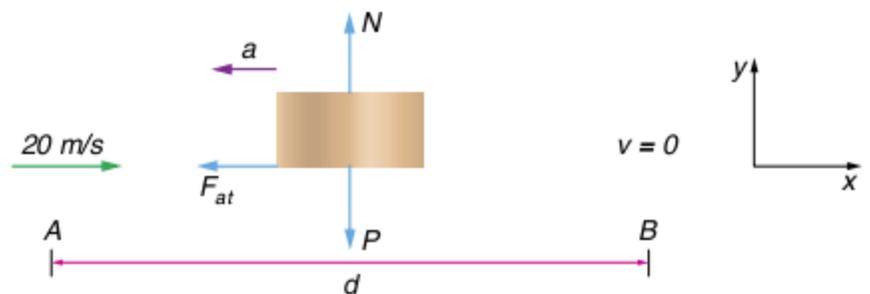
$$F_{at} = F_{at,d} \Rightarrow F_{at} = 15 \text{ N} \quad \text{e}$$

$$F - F_{at} = m \cdot a \Rightarrow 25 - 15 = 5 \cdot a \Rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2$$

**2** Um corpo desliza sobre uma superfície áspera, com coeficiente de atrito dinâmico igual a 0,4, sujeito apenas à força peso e à força de contato da superfície. Ao passar por um ponto A, sua velocidade vale 20 m/s. Determine o espaço percorrido pelo corpo até parar, a partir de A, sabendo que  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

**Resolução:**

Isolando o corpo em qualquer ponto entre A e B (posição em que o corpo para):



Em  $y$ , há equilíbrio:

$$N = P \Rightarrow N = mg$$

Em  $x$ :

$$F_{at} = m \cdot a \Rightarrow \mu \cdot N = m \cdot a \Rightarrow \mu \cdot mg = m \cdot a \Rightarrow a = \mu \cdot g = 0,4 \cdot 10 \Rightarrow a = 4 \text{ m/s}^2$$

Logo, o corpo sofrerá uma desaceleração de  $4 \text{ m/s}^2$ .

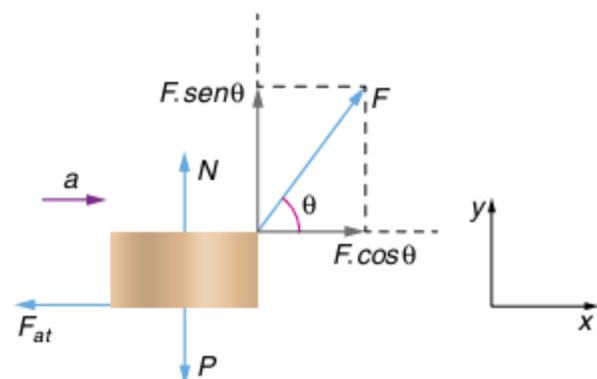
Aplicando a equação de Torricelli entre A e B:

$$0^2 = 20^2 - 2 \cdot 4 \cdot d \Rightarrow d = 50 \text{ m}$$

**3** Um corpo de massa 2 kg está sobre uma superfície horizontal, com a qual tem coeficiente de atrito dinâmico de 0,5. O corpo é puxado por uma força  $F$ , que forma um ângulo  $\theta$  com a horizontal, sentido para cima, em que  $\cos\theta = 0,6$ . Se  $g = 10 \text{ m/s}^2$  e a aceleração do corpo vale  $3 \text{ m/s}^2$ , determine o valor de  $F$ .

**Resolução:**

Isolando o sistema:



Em y, há equilíbrio:

$$N + F \cdot \text{sen}\theta = P \Rightarrow N = mg - F \cdot \text{sen}\theta = 20 - F \cdot 0,8$$

Em x:

$$F \cdot \text{cos}\theta - F_{at} = m \cdot a \quad (I)$$

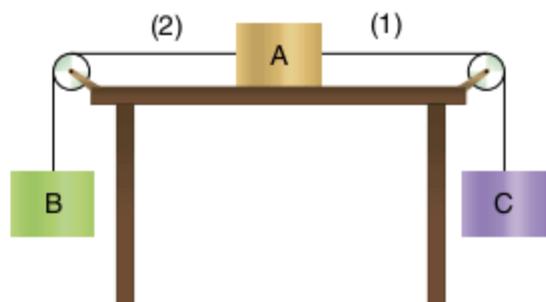
Mas:

$$F_{at} = \mu \cdot N = 0,5 \cdot (20 - F \cdot 0,8) = 10 - 0,4F$$

Em (I):

$$F \cdot 0,6 - (10 - 0,4F) = 2 \cdot 3 \Rightarrow 0,6F + 0,4F - 10 = 6 \Rightarrow F = 16 \text{ N}$$

**4** No sistema a seguir, as massas de A e B valem 5 kg e 4 kg, respectivamente. Os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre A e a mesa valem 0,4. Os fios e as polias são ideais.



Sabendo que  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , determine:

- o máximo valor da massa de C para que o sistema fique em repouso.
- o mínimo valor da massa de C para que o sistema fique em repouso.
- os módulos da aceleração do sistema e das trações nos fios quando a massa de C for igual a 11 kg.

**Resolução:**

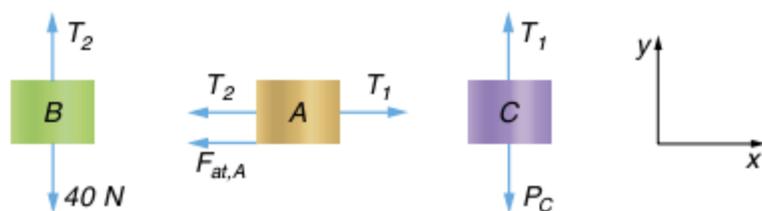
Como, em qualquer uma das situações, A estará em equilíbrio na vertical, então:

$$N_A = P_A = 50 \text{ N}$$

- Quando  $m_C$  for máximo, A tenderá a se mover para a direita. Logo, o atrito sobre A é estático, máximo e para a esquerda:

$$F_{at,A} = F_{at,\text{máx}} = \mu_e \cdot N_A = 0,4 \cdot 50 = 20 \text{ N}$$

Isolando os corpos:



Equilíbrio de B em y:

$$T_2 = 40 \text{ N}$$

Equilíbrio de A em x:

$$T_1 = T_2 + F_{at,A} = 40 + 20 \Rightarrow T_1 = 60 \text{ N}$$

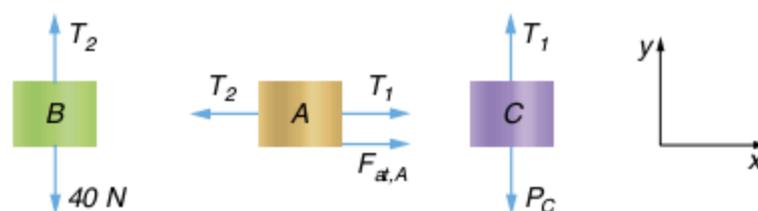
Equilíbrio de C em y:

$$P_C = T_1 = 60 \text{ N} \Rightarrow m_C = 6 \text{ kg}$$

- Quando  $m_C$  for mínimo, A tenderá a se mover para a esquerda. Logo, o atrito sobre A é estático, máximo e para a direita:

$$F_{at,A} = F_{at,\text{máx}} = 20 \text{ N}$$

Isolando os corpos:



Equilíbrio de B em y:

$$T_2 = 40 \text{ N}$$

Equilíbrio de A em x:

$$T_2 = T_1 + F_{at,A} \Rightarrow 40 = T_1 + 20 \Rightarrow T_1 = 20 \text{ N}$$

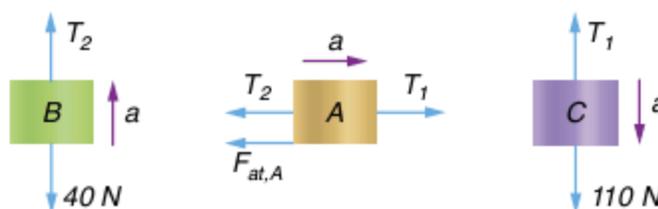
Equilíbrio de C em y:

$$P_C = T_1 = 20 \text{ N} \Rightarrow m_C = 2 \text{ kg}$$

- Quando  $m_C = 11 \text{ kg}$ , C descera, pois o valor de sua massa é maior que o valor máximo de 6 kg. A se moverá para a direita, B subirá, o atrito sobre A será dinâmico e para a esquerda.

$$F_{at,A} = F_{at,d} = \mu_d \cdot N_A = 0,4 \cdot 50 = 20 \text{ N}$$

Isolando os corpos:



$$B: T_2 - 40 = 4a \quad (I)$$

$$A: T_1 - T_2 - 20 = 5a \quad (II)$$

$$C: 110 - T_1 = 11a \quad (III)$$

$$50 = 20a \Rightarrow a = 2,5 \text{ m/s}^2$$

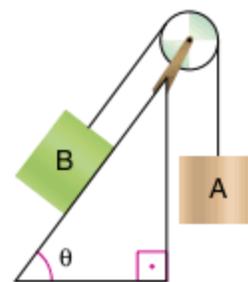
Em (I):

$$T_2 - 40 = 4 \cdot 2,5 \Rightarrow T_2 = 50 \text{ N}$$

Em (III):

$$110 - T_1 = 11 \cdot 2,5 \Rightarrow T_1 = 82,5 \text{ N}$$

**5** No sistema a seguir, as massas de A e B valem 4 kg e 3 kg, respectivamente. O coeficiente de atrito dinâmico entre B e o plano vale 0,5. Os fios e as polias são ideais.



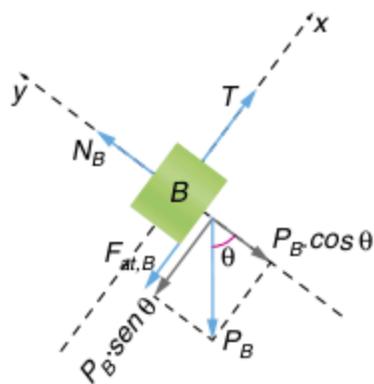
Sabendo que  $\text{sen}\theta = 0,8$  e  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , determine:

- a aceleração do sistema.
- a tração no fio.

**Resolução:**

Como a massa de A é maior do que a de B, então a tendência de A é descer e a de B subir.

a) e b) Isolando o corpo B:



Em y, há equilíbrio:

$$N_B = P_B \cdot \cos\theta = 30 \cdot 0,6 \Rightarrow N_B = 18 \text{ N}$$

Em x:

$$T - F_{at,B} - P_B \cdot \sin\theta = m_B \cdot a \quad (I)$$

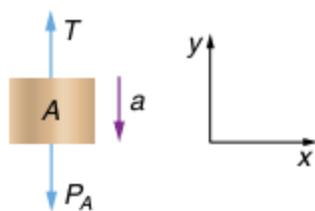
Mas:

$$F_{at,B} = \mu \cdot N_B = 0,5 \cdot 18 \Rightarrow F_{at,B} = 9 \text{ N}$$

Em (I):

$$T - 9 - 30 \cdot 0,8 = 3 \cdot a \Rightarrow T - 33 = 3a \quad (II)$$

Isolando o corpo A:



Em y:

$$P_A - T = m_A \cdot a \Rightarrow 40 - T = 4 \cdot a \quad (III)$$

De (II) e (III):

$$T - 33 = 3a$$

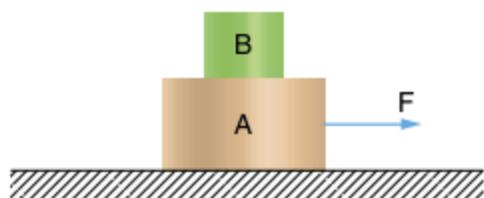
$$40 - T = 4a$$

$$7 = 7a \Rightarrow a = 1 \text{ m/s}^2$$

Em (II):

$$T - 33 = 3 \cdot 1 \Rightarrow T = 36 \text{ N}$$

**6** No sistema a seguir, as massas de A e B valem 6 kg e 4 kg, respectivamente. Os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre os blocos valem 0,5 e 0,4. Não há atrito entre A e o plano. Aplica-se sobre A uma força horizontal F.



Sabendo que  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , determine:

- a força máxima aplicada em A para que não haja movimento relativo entre os blocos.
- a aceleração de cada bloco e a força de atrito entre eles para  $F = 30 \text{ N}$ .
- a aceleração de cada bloco e a força de atrito entre eles para  $F = 60 \text{ N}$ .

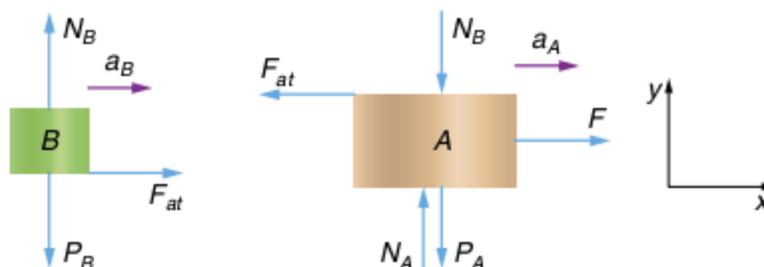
**Resolução:**

Se não houvesse atrito entre A e B, o corpo B não poderia receber nenhuma força horizontal. Logo, sua aceleração nessa direção seria nula. A existência de coeficiente de atrito permite que, se necessário, A e B exerçam, um sobre o outro, força de atrito que tem direção paralela à superfície de contato, ou seja, horizontal. É preciso muita atenção em um problema como este para determinar o sentido dessa força.

Em nosso problema, o corpo A é puxado para a direita por F, logo, ele se movimentará ou tenderá a se mover nesse sentido, tendo, portanto, a força de atrito de B atuando sobre ele em sentido contrário, para a esquerda. Pelo Princípio da Ação e Reação, se B realiza sobre A uma força para a esquerda, então, A realiza sobre B uma força de mesmo módulo para a direita.

Outra forma de raciocinar sobre o sentido da força de atrito é pensar que ela atua no sentido de impedir ou de tentar impedir o movimento relativo entre os corpos, para mantê-los juntos. Assim, como o corpo A tende a se mover para a direita, a força de atrito atua sobre B de modo que este acompanhe o corpo A, ou seja, com uma força de atrito para a direita. Pelo Princípio da Ação e Reação, se A realiza sobre B uma força para a direita, então, B realiza sobre A uma força de mesmo módulo para a esquerda.

Isolando os blocos:



- Para não haver movimento relativo entre os blocos, o atrito deve ser estático, com  $a_A = a_B = a$ . No caso de F ser máxima, teremos  $F_{at, \text{máx}}$ .

Em B:

$$F_{at} = F_{at, \text{máx}} = \mu_e \cdot N_B = \mu_e \cdot P_B = 0,5 \cdot 40 = 20 \text{ N}$$

Mas:

$$F_{at} = m_B \cdot a \Rightarrow 20 = 4 \cdot a \Rightarrow a = 5 \text{ m/s}^2$$

Como todo o sistema se move com a mesma aceleração, podemos isolar o conjunto:

$$F = (m_A + m_B) \cdot a = (6 + 4) \cdot 5 \Rightarrow F = 50 \text{ N}$$

- Quando  $F = 30 \text{ N} < 50 \text{ N}$ , o atrito é estático e todo o conjunto se move com a mesma aceleração:  $a_A = a_B = a$ .

Para o conjunto:

$$F = (m_A + m_B) \cdot a \Rightarrow 30 = 10 \cdot a \Rightarrow a = 3 \text{ m/s}^2$$

Para B:

$$F_{at} = m_B \cdot a = 4 \cdot 3 \Rightarrow F_{at} = 12 \text{ N}$$

- Quando  $F = 60 \text{ N} > 50 \text{ N}$ , os blocos possuem acelerações diferentes e o atrito é dinâmico. Portanto, não podemos isolar A e B juntos.

Para o atrito:

$$F_{at} = F_{at,d} = \mu_d \cdot N_B = 0,4 \cdot 40 = 16 \text{ N}$$

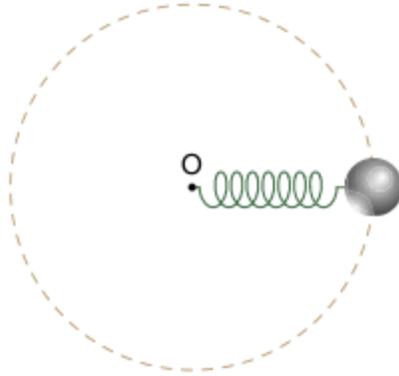
Para B:

$$F_{at} = m_B \cdot a_B \Rightarrow 16 = 4 \cdot a_B \Rightarrow a_B = 4 \text{ m/s}^2$$

Para A:

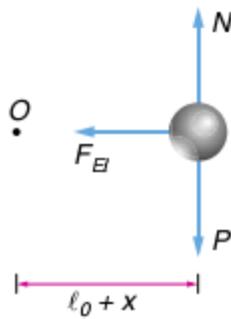
$$F - F_{at} = m_A \cdot a_A \Rightarrow 60 - 16 = 5 \cdot a_A \Rightarrow a_A = 8,8 \text{ m/s}^2$$

**7** Uma partícula de 20 g de massa está presa a uma mola de constante elástica 10 N/m, descrevendo um movimento circular uniforme em um plano horizontal, com velocidade de 5 m/s, em torno do ponto O. Se o comprimento natural da mola vale 40 cm, determine a sua deformação.



**Resolução:**

Isolando a partícula e tomando sua vista lateral:



O corpo descreve um movimento circular, e a resultante centrípeta é a força elástica:

$$F_{R,cp} = F_{El} \Rightarrow m \cdot a_{cp} = k \cdot x \Rightarrow \frac{m \cdot v^2}{R} = k \cdot x \Rightarrow \frac{m \cdot v^2}{l_0 + x} = k \cdot x \Rightarrow$$

$$\frac{0,02 \cdot 5^2}{0,4 + x} = 10x \Rightarrow 10x(0,4 + x) = 0,5 \Rightarrow$$

$$10x^2 + 4x - 0,5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-0,5)}}{20} = \frac{-4 \pm 6}{20}$$

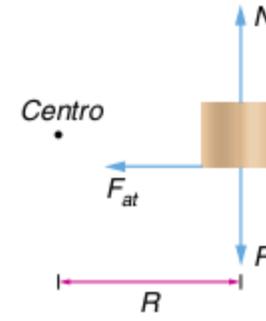
Como  $x > 0$ :

$$x = \frac{-4 + 6}{20} \Rightarrow x = 0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

**8** Um disco gira em torno de seu eixo, em um plano horizontal. Um pequeno corpo é colocado a uma distância de 10 cm do centro do disco. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o corpo e o disco vale 0,25 e que  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , determine a maior velocidade angular do disco para que o corpo não deslize sobre ele.

**Resolução:**

Isolando o corpo:



A força de atrito é a responsável pela manutenção do corpo em movimento circular:

$$F_{R,cp} = F_{at}$$

A maior velocidade angular é obtida quando o corpo estiver na iminência de escorregar:

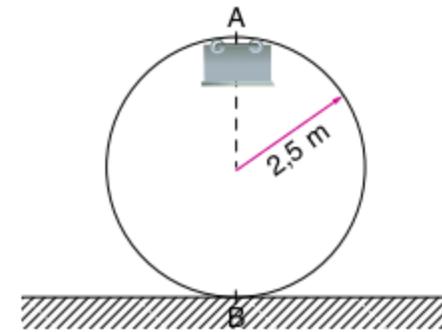
$$F_{at} = F_{at,e,máx} = \mu_e \cdot N = \mu_e \cdot mg$$

Logo:

$$m \cdot a_{cp} = F_{at} \Rightarrow m \cdot \omega^2 R = \mu_e \cdot mg \Rightarrow$$

$$\omega^2 = \frac{\mu_e \cdot g}{R} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{0,25 \cdot 10}{0,1}} \Rightarrow \omega = 5 \text{ rad/s}$$

**9** Um carrinho de massa 100 kg descreve um percurso circular de uma montanha-russa, de raio 2,5 m, com velocidade constante, como na figura a seguir.



Sabendo que  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , determine:

- a mínima velocidade que o carrinho deve ter em A para não perder contato com os trilhos.
- a força que o trilho exerce no carrinho no ponto B, supondo que o movimento se dê com velocidade constante e igual à do item a.

**Resolução:**

a) Isolando o carrinho em A:



Quando o carrinho estiver na iminência de cair:  $N_A = 0$ .

Como o carrinho descreve um movimento circular:

$$F_{R,cp} = N_A + P = 0 + P \Rightarrow m \cdot a_{cp} = mg \Rightarrow \frac{v^2}{R} = g \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{R \cdot g} = \sqrt{2,5 \cdot 10}$$

$$v = 5 \text{ m/s}$$

b) Isolando o carrinho em B:



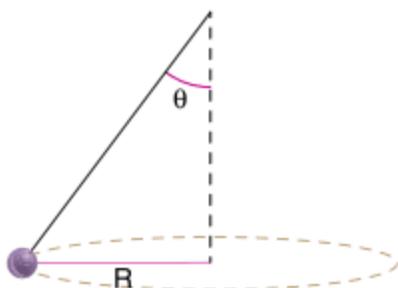
Como o carrinho descreve um movimento circular:

$$F_{R,cp} = N_B - P \Rightarrow m \cdot a_{cp} = N_B - mg \Rightarrow$$

$$\frac{m \cdot v^2}{R} = N_B - mg \Rightarrow N_B = \frac{m \cdot v^2}{R} + mg = \frac{100 \cdot 5^2}{2,5} + 100 \cdot 10$$

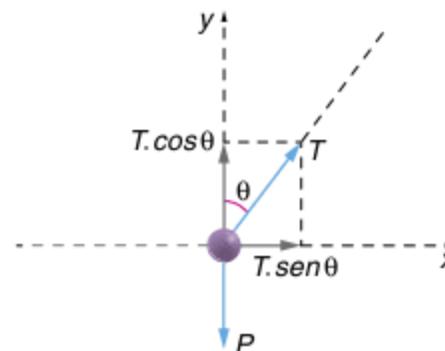
$$N_B = 2.000 \text{ N}$$

**10** Um pequeno corpo de massa 3 kg, preso à extremidade de um fio, descreve um movimento circular horizontal, de raio 1,2 m, conforme a figura a seguir. Sabendo que  $\text{sen}\theta = 0,6$  e  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , determine a velocidade angular do movimento.



**Resolução:**

Isolando o corpo:



Em y, há equilíbrio:

$$T \cdot \cos\theta = P \Rightarrow T \cdot \cos\theta = mg \quad (I)$$

Em x, o corpo descreve movimento circular de raio R:

$$F_{R,cp} = T \cdot \text{sen}\theta \Rightarrow m \cdot \omega^2 \cdot R = T \cdot \text{sen}\theta \quad (II)$$

Dividindo (II) por (I):

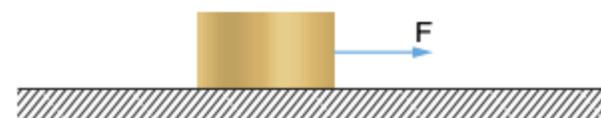
$$\frac{T \cdot \text{sen}\theta}{T \cdot \cos\theta} = \frac{m\omega^2 R}{mg} \Rightarrow \text{tg}\theta = \frac{\omega^2 R}{g} \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R} \cdot \text{tg}\theta} = \sqrt{\frac{10}{1,2} \cdot \frac{0,6}{0,8}} \Rightarrow \omega = 2,5 \text{ rad/s}$$

## Revisando

Considere, quando necessário,  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

**1** Na figura ao lado, um bloco de massa 5 kg repousa sobre uma superfície plana horizontal. Os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre as superfícies do plano e do corpo são iguais, respectivamente, a 0,50 e 0,30. Aplica-se ao bloco uma força F horizontal.



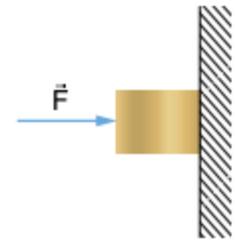
Determine o módulo da força de atrito entre o bloco e a superfície e o valor da aceleração do bloco nos seguintes casos:

- a)  $F = 20 \text{ N}$
- b)  $F = 25 \text{ N}$
- c)  $F = 30 \text{ N}$

**2** Na figura ao lado, está representado um bloco de 4 kg sendo pressionado contra a parede por uma força  $F$ . O coeficiente de atrito estático entre o corpo e a parede vale 0,40 e o cinético vale 0,25.

a) Determine a mínima força  $F$  que pode ser aplicada ao bloco para que ele não deslize na parede. Determine o módulo da força de atrito entre o bloco e a superfície e o valor da aceleração do bloco nos seguintes casos:

- b)  $F = 80 \text{ N}$
- c)  $F = 200 \text{ N}$



**3** Dois blocos, A e B, de massas 5 kg e 10 kg, respectivamente, unidos por um fio ideal, são puxados por uma força  $F$  sobre um plano horizontal, conforme a figura.



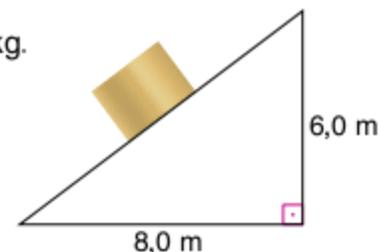
	Coeficiente de atrito estático	Coeficiente de atrito dinâmico
Entre A e o piso	0,6	0,4
Entre B e o piso	0,5	0,3

De acordo com a tabela de coeficientes de atrito estático e dinâmico de A e B com o piso, determine:

- a) a máxima força  $F$  que pode ser aplicada ao sistema para que ele não deslize.
- b) a aceleração do sistema e a tração no fio quando  $F = 140 \text{ N}$ .

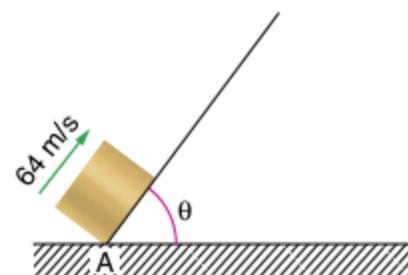
**4** Uma força  $F$ , constante e paralela ao plano inclinado da figura, atua sobre um bloco de massa  $5,0 \text{ kg}$ . O coeficiente de atrito entre o bloco e o plano vale  $0,8$ . Determine:

- o módulo e o sentido de  $F$  para que o bloco fique na iminência de se mover para cima.
- o módulo e o sentido de  $F$  para que o bloco fique na iminência de se mover para baixo.



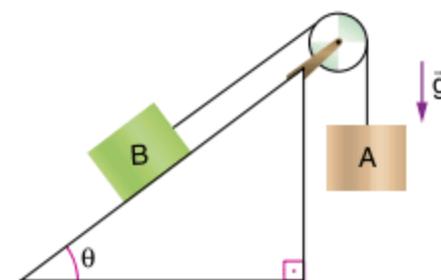
**5** Um corpo é lançado com velocidade inicial de  $64 \text{ m/s}$  de um ponto  $A$  de uma rampa que forma um ângulo  $\theta$  com a horizontal, como mostra a figura ao lado. Os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre o corpo e a rampa valem  $0,8$ . Sabendo que  $\sin \theta = 0,8$ , determine:

- o módulo e o sentido da aceleração do corpo durante a subida.
- o intervalo de tempo decorrido até que a velocidade do corpo se anule.
- a distância percorrida pelo corpo sobre a rampa até parar.
- a altura máxima atingida pelo corpo em relação ao solo.
- o módulo e o sentido da aceleração do corpo durante a descida.
- o intervalo de tempo decorrido durante a descida.
- a velocidade com que o corpo chega ao ponto de partida.

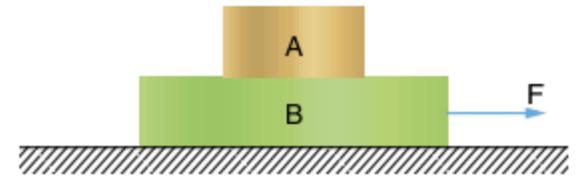


**6** Na situação esquematizada na figura ao lado, o fio e a polia são ideais. Despreza-se o efeito da resistência do ar. As massas dos blocos  $A$  e  $B$  valem, respectivamente,  $6 \text{ kg}$  e  $4 \text{ kg}$ . Sabendo que  $\sin \theta = 0,60$  e que o coeficiente de atrito cinético entre  $B$  e o plano de apoio vale  $0,50$ , determine:

- o módulo e o sentido da aceleração de  $A$ .
- o módulo da tração no fio.



**7** Um bloco B de 6 kg de massa repousa sobre um assoalho sem atrito. Sobre B, existe um bloco A de 4 kg de massa. Os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre os blocos valem, respectivamente, 0,25 e 0,20. Aplica-se sobre B uma força horizontal F. Determine:



- a força horizontal máxima aplicada a B, de modo que não exista movimento relativo entre os blocos.
- a aceleração de cada bloco e a força de atrito entre eles quando  $F = 10 \text{ N}$ .
- a aceleração de cada bloco e a força de atrito entre eles quando  $F = 50 \text{ N}$ .

**8** Um homem salta de um balão estacionário a uma grande altitude. O conjunto homem-paraquedas possui massa igual a 90 kg e estará sujeito à resistência do ar, que tem módulo dado por  $F_{\text{ar}} = k \cdot v^2$ . Com o paraquedas fechado,  $k = 0,25 \text{ kg/m}$ ; com ele aberto,  $k = 25 \text{ kg/m}$ . Sabendo que a densidade do ar pode ser considerada constante durante todo o percurso, determine:

- o módulo e o sentido da aceleração do sistema imediatamente após o salto.
- o módulo e o sentido da aceleração do sistema quando sua velocidade for igual a 30 m/s, com o paraquedas fechado.
- a maior velocidade que o sistema atingirá com o paraquedas fechado, em km/h.
- o módulo e o sentido da aceleração do sistema com o paraquedas aberto, imaginando que, quando ele estiver completamente aberto, a velocidade do sistema já tenha sido reduzida para 12 m/s.
- a velocidade aproximada com que o homem atinge o solo, em m/s.

**9 UFPR (Adapt.)** Convidado para substituir Felipe Massa, acidentado nos treinos para o grande prêmio da Hungria, o piloto alemão Michael Schumacher desistiu após a realização de alguns treinos, alegando que seu pescoço doía, como consequência de um acidente sofrido alguns meses antes, e que a dor estava sendo intensificada pelos treinos. A razão disso é que, ao realizar uma curva, o piloto deve exercer uma força sobre a sua cabeça, procurando mantê-la alinhada com a vertical. Considerando que a massa da cabeça de um piloto mais o capacete seja de 6,0 kg e que o carro esteja fazendo uma curva de raio igual a 72 m a uma velocidade de 216 km/h, calcule a massa que, sujeita à aceleração da gravidade, tem um peso de mesmo módulo.

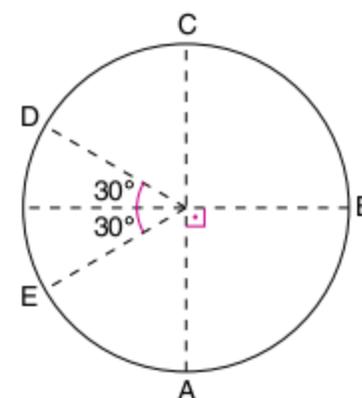
**10** Um corpo de massa 200 g, preso a uma mola de constante elástica 100 N/m, descreve uma circunferência em um plano horizontal sem atrito com velocidade igual a 10 m/s. Sabendo que a deformação da mola é de 20 cm, determine seu comprimento natural.

**11** Um motociclista descreve uma circunferência vertical em um “globo da morte” de raio 4 m. Sabendo que a velocidade do motociclista é constante e igual a 12 m/s e que a massa total do conjunto motociclista-moto é de 200 kg, determine a força normal exercida sobre o conjunto nos pontos:

- a) A                      b) B                      c) C                      d) D                      e) E

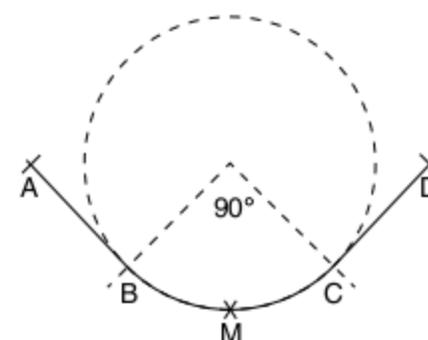
No mesmo “globo da morte”, determine:

- f) a mínima velocidade que o motociclista deve ter no ponto C para que consiga dar a volta completa.



**12 Unicamp** A figura ao lado descreve a trajetória ABMCD de um avião em um voo em um plano vertical. Os trechos AB e CD são retas. O trecho BMC é um arco de 90° de uma circunferência de 2,5 km de raio. O avião mantém velocidade de módulo constante igual a 900 km/h. O piloto tem massa de 80 kg e está sentado sobre uma balança (de mola) nesse voo experimental. Pergunta-se:

- a) Quanto tempo o avião leva para percorrer o arco BMC?  
 b) Qual a marcação da balança no ponto M (ponto mais baixo da trajetória)?



**13** Na figura 1, um corpo de 8 kg está preso a um fio de comprimento 3 m e é solto a partir do repouso na posição A. Na figura 2, um corpo de 5 kg está preso a um fio de comprimento 2 m e passa com velocidade de 4 m/s pelo ponto B, o mais baixo da trajetória. Determine o módulo da:

- aceleração tangencial na posição A, na figura 1.
- aceleração centrípeta na posição A, na figura 1.
- tração no fio na posição A, na figura 1.
- aceleração tangencial na posição B, na figura 2.
- aceleração centrípeta na posição B, na figura 2.
- tração no fio na posição B, na figura 2.

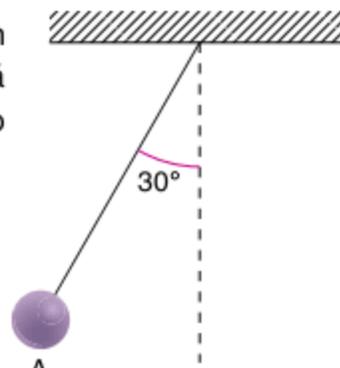


Figura 1

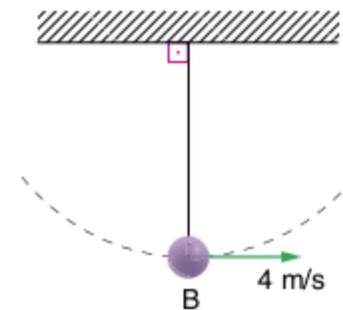
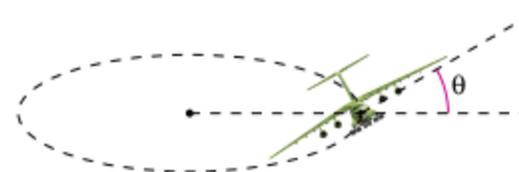


Figura 2

**14 Mackenzie (Adapt.)** Um avião descreve uma trajetória circular horizontal com velocidade escalar constante  $v$ . As asas formam um ângulo  $\theta$  com a horizontal. Devem ser levados em conta apenas o peso do avião e a força de sustentação, que é perpendicular à asa, pois estamos considerando que o módulo da resistência do ar é igual ao módulo da força do motor do avião, com sentidos opostos. Sendo  $g$  a aceleração da gravidade, determine o raio da trajetória descrita pelo avião.



**15** Um corpo descreve uma circunferência de raio 8 cm em um plano horizontal com velocidade angular de 5 rad/s. Determine o mínimo coeficiente de atrito estático entre o corpo e o plano para que não haja escorregamento.

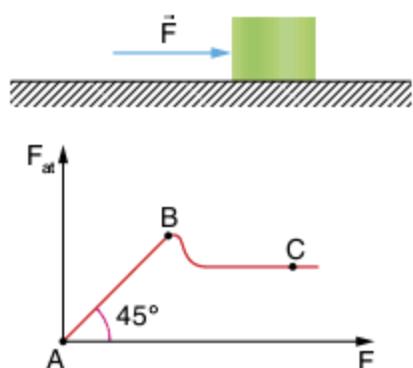
**16** Um cilindro oco de raio  $r$  gira com velocidade angular  $\omega$  em torno de seu eixo, que é vertical. Uma pessoa de massa  $m$ , encostada na superfície interna do cilindro, gira junto com ele, sem escorregar, apesar de não se apoiar em nenhum outro corpo. Calcule o mínimo valor de  $\omega$  para que isso aconteça, sendo  $g$  a intensidade do campo gravitacional e  $\mu_e$  o coeficiente de atrito estático entre as superfícies em contato.

# Exercícios propostos

Considere, quando necessário,  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

## Força de atrito

**1 Unama** Um corpo inicialmente em repouso recebe a ação de uma força externa  $F$  crescente, conforme a figura. Representamos graficamente a força de atrito entre o corpo e a superfície em função de  $F$ .



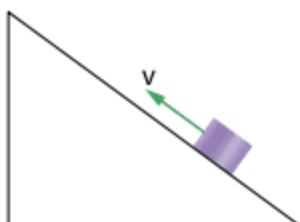
Acerca dessa situação, podemos dizer:

- I. no trecho AB, o corpo move-se com aceleração constante, já que o atrito varia proporcionalmente à ação  $F$ .
- II. no trecho AB, o corpo encontra-se em repouso.
- III. no ponto B, o corpo está na iminência do deslizamento.
- IV. no trecho BC, o corpo se movimenta, mas a força de atrito independe da velocidade do corpo, pelo menos para valores pequenos desta.

Estão corretas as afirmativas:

- (a) I, II e IV.
- (b) II, III e IV.
- (c) I e IV.
- (d) II e IV.
- (e) apenas a II.

**2 UFPE** Um homem, ao empurrar um caixote ao longo de uma rampa inclinada, aplica uma força  $F$ , paralela à superfície da rampa. O caixote se desloca para cima, com velocidade constante  $v$ .

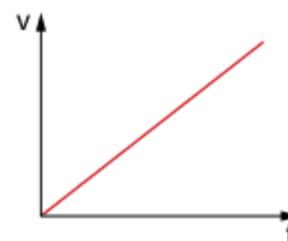


Qual dos diagramas a seguir representa as forças que atuam sobre o caixote? Considere  $f$  a força de atrito,  $N$  a força normal e  $P$  o peso do caixote.

- (a)
- (b)

- (c)
- (d)
- (e)

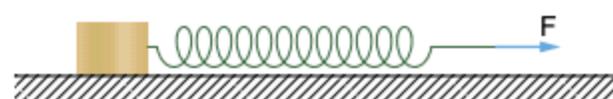
**3 UFF** Um carro desloca-se para frente em linha reta sobre uma estrada horizontal e plana, com uma velocidade que varia em função do tempo, de acordo com o gráfico mostrado na figura.



Escolha a opção que representa a força resultante que o solo faz sobre o carro.

- (a)
- (b)
- (c)
- (d)
- (e)

**4 UFF** Professores do Instituto de Física da UFF estudam a dinâmica do movimento de placas geológicas que compõem a crosta terrestre, com o objetivo de melhor compreender a física dos terremotos. Um sistema simples, que exhibe os elementos determinantes dessa dinâmica, é composto de um bloco apoiado sobre uma mesa horizontal rugosa e puxado por uma mola, como mostrado a seguir. A mola é esticada continuamente por uma força  $F$  de módulo crescente, mas o bloco permanece em repouso até que o atrito não seja mais suficiente para impedir seu deslocamento.

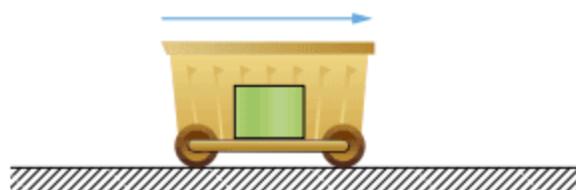


Enquanto não houver deslizamento, é correto afirmar que:

- (a) o módulo da força que o bloco faz sobre a mola é igual ao módulo da força de atrito sobre o bloco.
- (b) o módulo da força de atrito sobre o bloco é maior que o módulo da força que a mola faz sobre o bloco.
- (c) o módulo da força de atrito depende da força normal sobre o bloco, já que a normal é a reação ao peso.
- (d) o módulo da força que a mola faz sobre o bloco é maior que o módulo da força que o bloco faz sobre a mola.
- (e) o módulo da força de atrito sobre o bloco não muda enquanto a mola é esticada.

**5 UFRJ** Um trem está se movendo sobre trilhos planos, retilíneos e horizontais com movimento uniforme em relação à estrada.

Sobre o piso horizontal de um dos vagões, há um bloco em repouso em relação ao vagão, como mostra a figura. Nesse caso, o piso exerce sobre o bloco uma força  $\vec{f}$ .

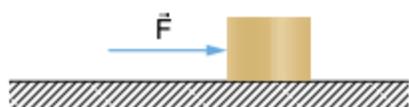


A partir de um determinado instante, o trem é uniformemente retardado até parar. Apesar disso, durante o retardamento, o bloco permanece em repouso em relação ao vagão. Nesse caso, durante o retardamento, o piso exerce sobre o bloco uma força  $\vec{f}'$ .

Verifique se  $|\vec{f}| < |\vec{f}'|$ ,  $|\vec{f}| = |\vec{f}'|$  ou se  $|\vec{f}| > |\vec{f}'|$ .

### Atrito estático

**6** O bloco da figura pesa 8,0 N e está em repouso, apoiado sobre um plano horizontal que lhe oferece um coeficiente de atrito estático de valor 0,80.



Aplica-se, então, sobre ele uma força horizontal  $\vec{F}$ , de intensidade 6,0 N.

a) O vetor que melhor representa a força exercida pelo bloco sobre o plano de apoio é:

- (a)
- (b)
- (c)
- (d)
- (e)

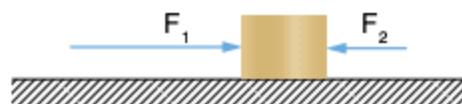
b) A intensidade da força referida anterior é:

- (a) 8,0 N
- (b) 6,0 N
- (c) 6,4 N
- (d) 10 N
- (e) 14 N

**7 UFPE** Um físico, atendendo à sua esposa, tenta mudar a localização da sua geladeira, empurrando-a horizontalmente sobre o chão, mas não consegue movê-la. Pensando sobre o assunto, ele imagina como sua vida seria mais fácil num planeta de gravidade menor que a da Terra. Considerando que a força que o físico faz sobre a geladeira vale 1.200 N, a massa da geladeira é 300 kg e o coeficiente de atrito estático entre a geladeira e o chão é  $\frac{1}{2}$ , indique, dentre os planetas a seguir, aquele com maior aceleração da gravidade,  $g$ , no qual ele ainda conseguiria mover a geladeira.

- (a) Plutão,  $g = 0,3 \text{ m/s}^2$
- (b) Marte,  $g = 3,7 \text{ m/s}^2$
- (c) Urano,  $g = 7,8 \text{ m/s}^2$
- (d) Vênus,  $g = 8,6 \text{ m/s}^2$
- (e) Saturno,  $g = 9,0 \text{ m/s}^2$

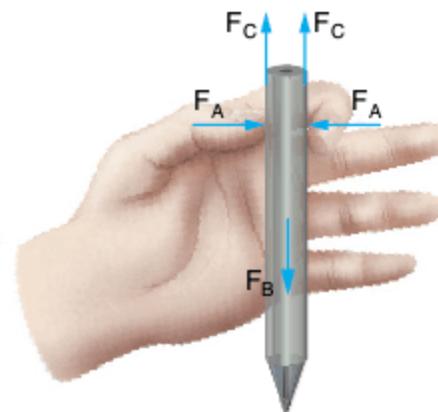
**8 UFC** O bloco mostrado na figura está em repouso sob a ação da força horizontal  $F_1$ , de módulo igual a 10 N, e da força de atrito entre o bloco e a superfície.



Se uma outra força horizontal  $F_2$ , de módulo igual a 2 N e sentido contrário, for aplicada ao bloco, a força resultante sobre ele será:

- (a) nula.
- (b) 2 N
- (c) 8 N
- (d) 10 N
- (e) 12 N

**9 PUC-PR** Você segura um lápis verticalmente, como indica a figura a seguir.



Sobre as três forças,  $F_A$ ,  $F_B$  e  $F_C$ , que atuam sobre o lápis, assinale a alternativa incorreta.

- (a) O valor máximo de  $F_C$  não depende do módulo de  $F_A$ .
- (b)  $F_C$  pode ser identificada como uma força de atrito estático.
- (c) Uma das condições de equilíbrio estático do lápis é  $F_C = \frac{F_B}{2}$ .
- (d) Caso o coeficiente de atrito estático entre os dedos e o lápis fosse nulo, este não poderia permanecer em equilíbrio, qualquer que fosse o módulo de  $F_A$ .
- (e)  $F_B$  pode ser identificada com a força peso do lápis.

**10 Unifesp** Uma bonequinha está presa por um ímã à porta vertical de uma geladeira.

- a) Desenhe, esquematicamente, essa bonequinha, representando e nomeando as forças que atuam sobre ela.

- b) Sendo  $m = 20 \text{ g}$  a massa total da bonequinha com o ímã e  $\mu = 0,50$  o coeficiente de atrito estático entre o ímã e a porta da geladeira, qual deve ser o menor valor da força magnética entre o ímã e a geladeira para que a bonequinha não caia? Dado:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

### Atrito dinâmico

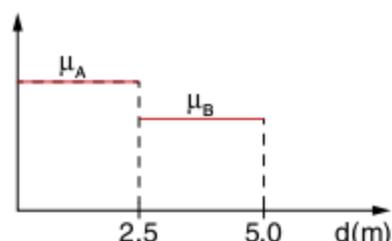
- 11** Uma caixa cai de uma pequena altura sobre uma esteira transportadora, cujos pontos se movem com velocidade escalar  $v = 2,0 \text{ m/s}$ . A aceleração da gravidade tem módulo  $g = 10 \text{ m/s}^2$  e o coeficiente de atrito dinâmico entre a caixa e a esteira é  $\mu = 0,50$ .



Calcule o intervalo de tempo decorrido desde o instante da queda até o momento em que a caixa para de escorregar sobre a esteira.

- 12 UFPB** A superfície de uma mesa é constituída de dois materiais distintos, A e B. Um bloco de metal com massa igual a  $2,0 \text{ kg}$  é lançado sobre essa mesa com velocidade inicial de  $5,0 \text{ m/s}$ .

Inicialmente, o bloco desliza sobre o material A e, a seguir, passa a deslizar sobre o material B. Os coeficientes de atrito cinético entre o bloco e os dois materiais são, respectivamente,  $\mu_A = 0,35$  e  $\mu_B = 0,25$  e estão representados no gráfico a seguir em função da posição  $d$ .



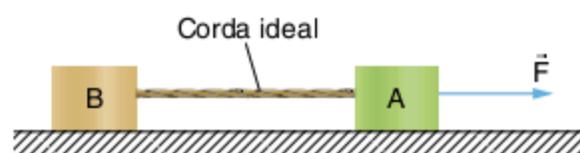
Nesse contexto, a distância percorrida pelo bloco até atingir o repouso é:

- (a) 2,0 m                      (c) 1,0 m                      (e) 3,0 m  
(b) 4,0 m                      (d) 5,0 m

- 13 EEM-SP** Um motorista está dirigindo numa estrada horizontal, com neblina densa, a  $120 \text{ km/h}$ , quando vê à sua frente um caminhão que trafega no mesmo sentido, a  $36 \text{ km/h}$ . Percebe imediatamente que deveria ter obedecido à sinalização e aos limites de segurança, pois a estrada está em obras e, no trecho afunilado, não é possível a ultrapassagem. Freia seu carro até travarem-se as rodas, mas o pavimento está úmido e o coeficiente de atrito é apenas  $\mu = 0,10$ . Quando as rodas são travadas, a velocidade do carro é de  $108 \text{ km/h}$  e a distância dele ao caminhão é de apenas  $72 \text{ metros}$ . Adote  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

- a) É possível evitar a colisão?  
b) Em caso negativo, qual a velocidade do carro no instante da colisão?

- 14 Mackenzie** Dois blocos, A e B, de pesos, respectivamente, iguais a  $30 \text{ N}$  e  $70 \text{ N}$  apoiam-se sobre uma mesa horizontal. O coeficiente de atrito entre os blocos e a mesa vale  $0,40$ .



Aplicando-se ao primeiro bloco uma força horizontal constante, de intensidade  $F = 50 \text{ N}$ , e supondo  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , pede-se:

- a) o módulo da aceleração comunicada ao sistema.  
b) a intensidade da força tensora na corda.

- 15 Cescea-SP** Um corpo desliza sobre um plano horizontal, solicitado por uma força de intensidade  $100 \text{ N}$ . Um observador determina o módulo da aceleração do corpo:  $a = 1,0 \text{ m/s}^2$ . Sabendo-se que o coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e o plano de apoio é  $0,10$ , podemos dizer que a massa do corpo é: Dado:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

- (a) 10 kg  
(b) 50 kg  
(c) 100 kg  
(d) 150 kg  
(e) 200 kg

- 16 Fuvest** Uma caixa vazia, pesando  $10 \text{ N}$ , é colocada sobre uma superfície horizontal. Ao ser solicitada por uma força horizontal, começa a se movimentar quando a intensidade da força atinge  $5 \text{ N}$ ; cheia d'água, isso acontece quando a intensidade da força atinge  $50 \text{ N}$ .

Adote  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

- a) Qual a força de atrito em cada caso?  
b) Qual a quantidade de água?

- 17 UFG (Adapt.)** Aplica-se, horizontalmente, uma força  $\vec{F}$  de intensidade variável num bloco homogêneo de massa  $m = 0,50 \text{ kg}$ , inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal, conforme a figura 1. Com o bloco em repouso, atuam nele também as forças  $\vec{P}$  (peso),  $\vec{N}$  (normal) e  $\vec{f}_e$  (atrito estático). Ao iniciar-se o movimento, passa a atuar a força de atrito cinético  $\vec{f}_c$ .

Figura 1

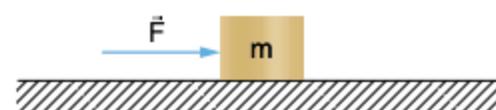
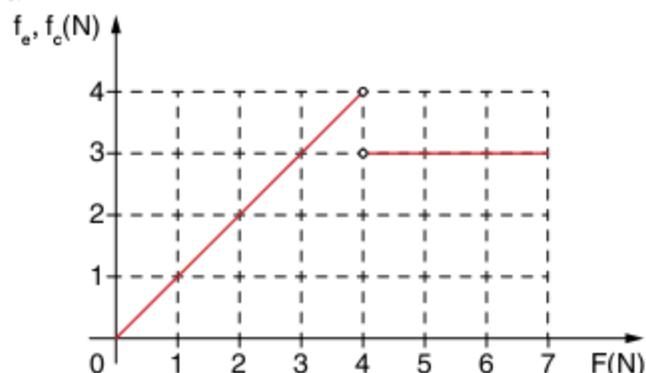


Figura 2

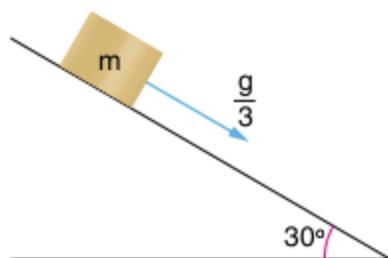


Analisando o gráfico das forças de atrito  $\vec{f}_e$  e  $\vec{f}_c$ , em função de  $\vec{F}$ , para intensidades que variam de 0,0 a 7,0 N, conforme a figura 2, e dado  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , pode-se afirmar que:

- o coeficiente de atrito estático  $\mu_e$  é igual a 0,80.
- para  $F > 4,0 \text{ N}$ , a força de atrito é 3,0 N e a aceleração é crescente.
- para  $F = 7,0 \text{ N}$ , a aceleração é  $8,0 \text{ m/s}^2$ .
- o coeficiente de atrito cinético  $\mu_c$  é igual a 0,60.

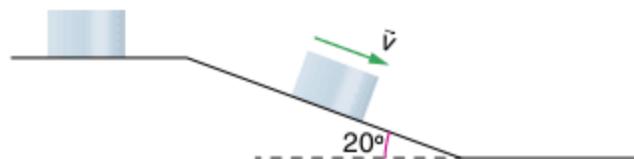
### Atrito no plano inclinado

**18 UFRJ** Um pequeno bloco de massa  $m = 3,0 \text{ kg}$  desliza sobre a superfície inclinada de uma rampa que faz com a horizontal um ângulo de  $30^\circ$ , como indica a figura a seguir.



Verifica-se que o bloco desce a rampa com movimento retilíneo ao longo da direção de maior declive ( $30^\circ$  com a horizontal) com uma aceleração de módulo igual a  $\frac{g}{3}$ , em que  $g$  é o módulo da aceleração da gravidade. Considerando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , calcule o módulo da força de atrito que a superfície exerce sobre o bloco.

**19 UFG** Blocos de gelo de  $10 \text{ kg}$  são armazenados em uma câmara frigorífica. Os blocos são empurrados para a câmara através de uma rampa que forma um ângulo de  $20^\circ$  com a horizontal, conforme a figura a seguir. Suponha que a presença do atrito entre o gelo e a rampa faça com que os blocos desçam com velocidade constante de  $3 \text{ m/s}$ . Ao final da rampa, os blocos passam a se movimentar num trecho horizontal, iniciando o movimento com a mesma velocidade de  $3 \text{ m/s}$ . Dados: Aceleração da gravidade  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ;  $\sin 20^\circ = 0,34$  e  $\cos 20^\circ = 0,94$ .



- Calcule o coeficiente de atrito cinético entre a rampa e o bloco de gelo.
- Considerando que o coeficiente de atrito cinético entre o gelo e o trecho horizontal seja o mesmo do item anterior, determine a distância que o bloco de gelo percorre até parar.

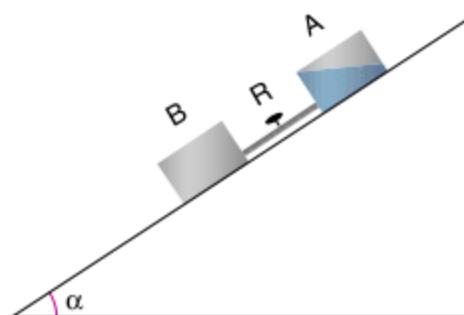
**20 UFG** Um catador de recicláveis de massa  $m$  sobe uma ladeira puxando seu carrinho. O coeficiente de atrito estático entre o piso e os seus sapatos é  $\mu_e$  e o ângulo que a ladeira forma com a horizontal é  $\theta$ . O carrinho, por estar sobre rodas, pode ser considerado livre de atrito. A maior massa do carrinho com os recicláveis que ele pode suportar, sem escorregar, é de:

- $m \left( \mu_e \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - 1 \right)$
- $m (\mu_e \cos \theta - \sin \theta)$
- $m \left( \mu_e - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)$
- $m (\mu_e \sin \theta - \cos \theta)$
- $m \left( \mu_e \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - 1 \right)$

**21 Vunesp** Um bloco de massa  $m = 5,0 \text{ kg}$  está apoiado sobre um plano, inclinado  $30^\circ$  em relação à horizontal. Se uma força  $F$ , paralela ao plano inclinado, é aplicada ao bloco com sentido para cima, o bloco desliza para baixo com velocidade  $v = (2t) \text{ m/s}$ . Se a mesma força  $F$  é aplicada para baixo, o corpo desliza com velocidade  $v' = (3t) \text{ m/s}$ .

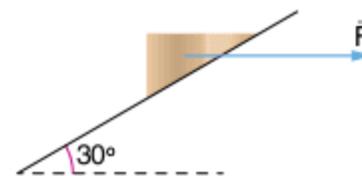
- Calcule  $F$ .
- Calcule o coeficiente de atrito de deslizamento entre o corpo e o plano inclinado.

**22 PUC-MG (Adapt.)** A figura a seguir mostra dois recipientes de massas desprezíveis e interligados. Com o recipiente A contendo  $4,0 \text{ kg}$  de água e o recipiente B vazio, o conjunto permanece em repouso sobre o plano inclinado. Abrindo-se o registro, permite-se que parte da água passe, lentamente, para o recipiente B até que o conjunto fique na iminência de deslizar.



Nessa situação, determine a massa de água no vaso A. Dados:  $\sin \alpha = 0,6$ ; coeficientes de atrito estático entre os recipientes e o plano:  $A = 0,80$ ;  $B = 0,50$ .

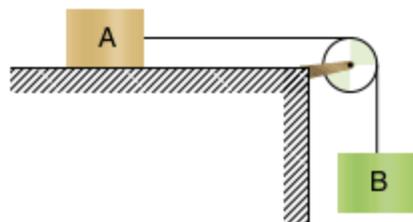
**23 UFC** Uma cunha de massa  $m = 2 \text{ kg}$  é empurrada sobre um plano inclinado por uma força horizontal  $F$ , de intensidade igual a  $20 \text{ N}$ , conforme figura a seguir.



- Sabendo que a velocidade com que a cunha sobe o plano é constante, determine:
- a intensidade da força exercida pelo plano inclinado sobre a cunha.
  - o coeficiente de atrito cinético entre a cunha e o plano inclinado.

### Polias e força de atrito

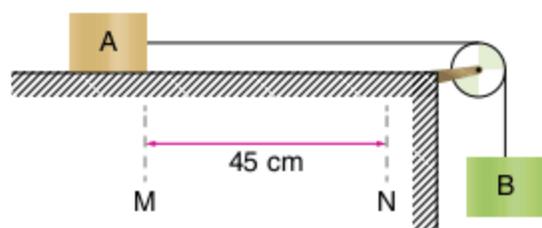
**24 PUC-PR** Dois corpos, A e B, de massas, respectivamente, iguais a  $3 \text{ kg}$  e  $6 \text{ kg}$ , estão ligados por um fio ideal que passa por uma polia sem atrito, conforme a figura.



Entre o corpo A e o apoio, o coeficiente de atrito é 0,50. Considerando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , a aceleração de cada corpo e a tração no fio valem:

- (a)  $a = 5 \text{ m/s}^2$  e  $T = 30 \text{ N}$       (d)  $a = 2 \text{ m/s}^2$  e  $T = 100 \text{ N}$   
 (b)  $a = 3 \text{ m/s}^2$  e  $T = 30 \text{ N}$       (e)  $a = 6 \text{ m/s}^2$  e  $T = 60 \text{ N}$   
 (c)  $a = 8 \text{ m/s}^2$  e  $T = 80 \text{ N}$

**25 Mackenzie** No sistema a seguir, o fio e a polia são ideais. Ao abandonarem os blocos, A vai do ponto M para o N em 1,5 s.

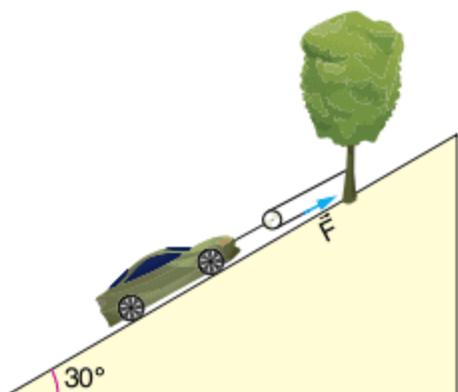


O coeficiente de atrito cinético entre o bloco A e a superfície de apoio é:

Dados:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , massa do bloco A = 8 kg e massa do bloco B = 2 kg.

- (a) 0,1      (c) 0,3      (e) 0,5  
 (b) 0,2      (d) 0,4

**26 FEI-SP** Um professor, que possui um automóvel ano 1961, mora numa ladeira que forma um ângulo de  $30^\circ$  com a horizontal. Infelizmente seu carro já não consegue subir essa ladeira. Para guardá-lo na garagem, ele se vale de um sistema (roldana e cordas), com massa desprezível, como indicado na figura a seguir, e conta com a ajuda de alunos.

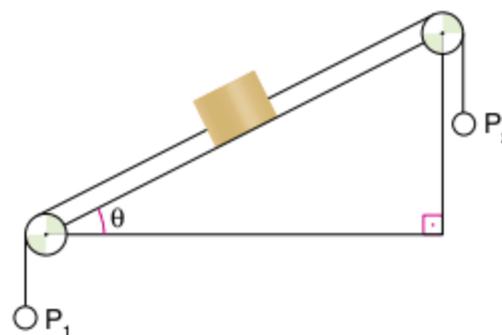


Sabendo que a massa do carro é 800 kg, que a força de atrito resistente entre a superfície e os pneus corresponde a 5% do peso do carro, e adotando  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  e

$g = 10 \text{ m/s}^2$ , a força F total que o grupo de alunos deve realizar para que o carro suba em MRU vale:

- (a) 5.000 N      (c) 3.600 N      (e) 2.200 N  
 (b) 4.800 N      (d) 3.000 N

**27 Mackenzie** Um bloco de 10 kg repousa sozinho sobre o plano inclinado a seguir. Esse bloco se desloca para cima quando se suspende em  $P_2$  um corpo de massa superior a 13,2 kg.



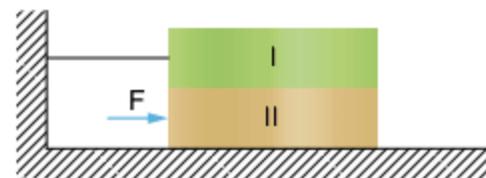
Retirando-se o corpo de  $P_2$ , a maior massa que poderemos suspender em  $P_1$  para que o bloco continue em repouso, supondo os fios e as polias ideais, deverá ser de:

Dados:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ;  $\sin \theta = 0,6$ ;  $\cos \theta = 0,8$ .

- (a) 1,20 kg      (c) 2,40 kg      (e) 13,2 kg  
 (b) 1,32 kg      (d) 12,0 kg

### Corpos sobrepostos e força de atrito

**28 Vunesp** Na figura, o bloco I repousa sobre o bloco II, sendo que I está preso por uma corda a uma parede. Sabe-se que  $m_I = 3,0 \text{ kg}$  e  $m_{II} = 6,0 \text{ kg}$ . O coeficiente de atrito cinético entre I e II é 0,10 e entre II e o plano é 0,20.

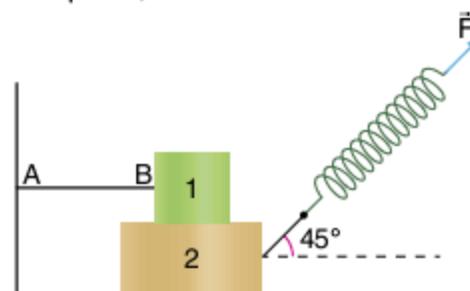


Qual deve ser a força F que, aplicada em II, desloca esse bloco com aceleração de  $2,0 \text{ m/s}^2$ ?

Dado:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

- (a) 40 N      (c) 15 N      (e) 33 N  
 (b) 30 N      (d) 27 N

**29 FEI-SP** Na figura, temos: o fio AB é inextensível e horizontal, a massa do corpo 1 é  $m_1 = 5 \text{ kg}$ , a massa do corpo 2 é  $m_2 = 10 \text{ kg}$ , a mola tem constante elástica  $k = 1.000 \text{ N/m}$ , o coeficiente de atrito entre os corpos 1 e 2 e entre o corpo 2 e a pista horizontal é  $\mu = 0,1$ .



Se a mola é deformada de 10 cm, a aceleração adquirida pelo corpo 2 é, em  $\text{m/s}^2$ :

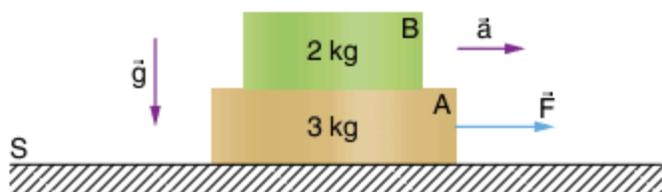
Adotar a aceleração da gravidade  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

- (a) 5,7      (c) 5,0      (e) nula.  
 (b) 8,0      (d) 4,5

**30** Um caixote de massa 20 kg está em repouso sobre a carroceria de um caminhão que percorre uma estrada plana, horizontal, com velocidade constante de 72 km/h. Os coeficientes de atrito estático e dinâmico, entre o caixote e o piso da carroceria, são, aproximadamente, iguais e valem  $\mu = 0,25$ .

- a) Qual o módulo da força de atrito que está atuando no caixote?  
 b) Determine o menor tempo possível para que esse caminhão possa frear sem que o caixote escorregue.  
 c) Se  $a = 2 \text{ m/s}^2$ , qual o módulo da força de atrito que a carroceria aplica sobre o caixote?  
 d) Se  $a = 3 \text{ m/s}^2$ , qual o módulo da força que a carroceria aplica sobre o caixote?

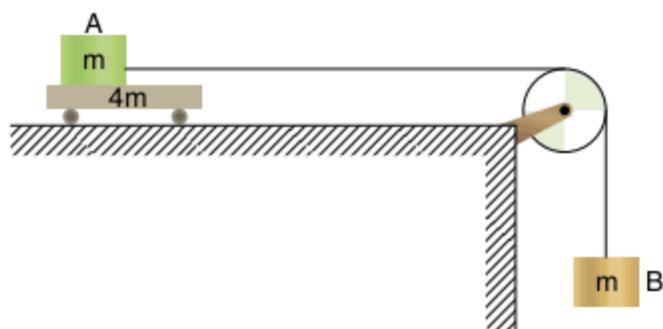
**31** Na figura seguinte, a superfície S é horizontal, a intensidade de F é 40 N, o coeficiente de atrito de arrastamento entre o bloco A e a superfície S vale 0,50 e  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



Sob a ação da força F, o sistema é acelerado horizontalmente e, nessas condições, o bloco B apresenta-se na iminência de escorregar em relação ao bloco A.

- a) Determine o módulo da aceleração do sistema.  
 b) Calcule o coeficiente de atrito estático entre os blocos A e B.

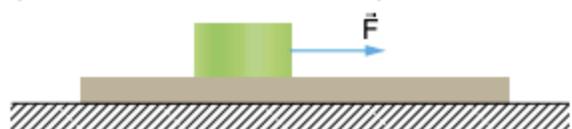
**32 Vunesp** Dois blocos, A e B, ambos de massa m, estão ligados por um fio leve e flexível, que passa por uma polia de massa desprezível, que gira sem atrito. O bloco A está apoiado sobre um carrinho de massa 4m, que pode se deslocar sobre a superfície horizontal sem encontrar qualquer resistência. A figura a seguir mostra a situação descrita.



Quando o conjunto é liberado, B desce e A se desloca com atrito constante sobre o carrinho, acelerando-o. Sabendo que a força de atrito entre A e o carrinho, durante o deslocamento, equivale a 0,2 do peso de A (ou seja, força de atrito =  $0,2mg$ ) e fazendo  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , determine:

- a) a aceleração do carrinho.  
 b) a aceleração do sistema constituído por A e B.

**33 UFPB** Um bloco de 1 kg está apoiado sobre uma prancha de 4 kg, como mostra a figura. O bloco é puxado por uma força  $\vec{F}$  horizontal. Os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre o bloco e a prancha são 0,8 e 0,6, respectivamente.



Considerando-se que o atrito entre a prancha e o solo é desprezível, então é correto afirmar que a maior aceleração da prancha será:

- (a)  $1,0 \text{ m/s}^2$       (c)  $1,5 \text{ m/s}^2$       (e)  $2,0 \text{ m/s}^2$   
 (b)  $1,2 \text{ m/s}^2$       (d)  $1,6 \text{ m/s}^2$

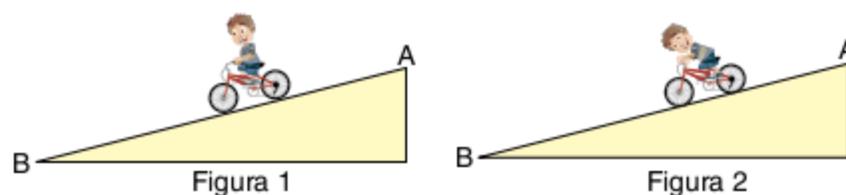
## Resistência do ar

**34 UFMG** Um paraquedista, alguns minutos após saltar do avião, abre seu paraquedas. As forças que atuam sobre o conjunto paraquedista-equipamentos são, então, o seu peso e a força de resistência do ar. Essa força é proporcional à velocidade.

Desprezando-se qualquer interferência de ventos, pode-se afirmar que:

- (a) a partir de um certo momento, o paraquedista descerá com velocidade constante.  
 (b) antes de chegar ao chão, o paraquedista poderá atingir velocidade nula.  
 (c) durante toda a queda, a força resultante sobre o conjunto será vertical para baixo.  
 (d) durante toda a queda, o peso do conjunto é menor do que a força de resistência do ar.

**35 UFMS (Adapt.)** O triatlo é uma modalidade esportiva que combina, de forma sequencial e sem interrupção, natação, ciclismo e corrida. Com relação à parte do ciclismo, uma das preocupações dos treinadores e dos atletas é a resistência do ar que aplica força de arrasto  $\vec{F}_a$  contrária ao movimento. Essa força depende da seção transversal à direção do movimento, e aumenta com a velocidade  $\vec{v}$ . Um dos modelos teóricos para expressar essa força é dado pela expressão vetorial  $\vec{F}_a = -b\vec{v}$ , onde b é uma constante de proporcionalidade. Um dos recursos utilizados pelo ciclista para diminuir essa força, durante o movimento, é curvar o seu corpo para a frente, diminuindo a seção transversal. Um treinador, na tentativa de analisar a dependência entre essa força e a maneira como o ciclista curva o corpo, faz um experimento com um ciclista. Na primeira parte do experimento, o ciclista desce ao longo de um declive, numa trajetória retilínea, a partir do repouso no ponto A, com a bicicleta livre e sem pedalar, e sem curvar o corpo, veja a figura 1. Na segunda parte do experimento, repete todo o procedimento da primeira parte e nas mesmas condições, no mesmo declive. A única diferença é que o ciclista curva o corpo para a frente, diminuindo a seção transversal, veja a figura 2. Para análise, o treinador escolhe o modelo teórico da força proporcional à velocidade, como citada anteriormente, e verifica que a bicicleta atinge uma velocidade constante antes de chegar ao final do plano nas duas partes do experimento, só que, no segundo caso, o tempo de descida do ponto A ao B é menor que na primeira parte do experimento. Considere que a massa de todo o sistema é invariável e que a única força contrária ao movimento é a força de arrasto causada pelo ar.

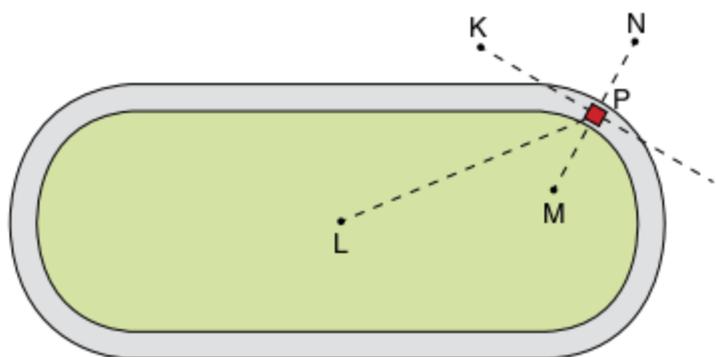


Com fundamentos nas leis de Newton e nos conceitos de forças de arrasto, assinale a alternativa correta.

- (a) As forças de arrasto aplicadas no sistema ciclista-bicicleta no final do plano são iguais nos dois casos.
- (b) A constante de proporcionalidade  $b$ , na equação  $\vec{F}_a = -b\vec{v}$ , é menor na primeira parte do experimento do que na segunda parte.
- (c) As acelerações médias do ciclista são iguais nos dois casos.
- (d) A constante de proporcionalidade  $b$  não possui unidades, uma vez que é uma constante.
- (e) A componente do módulo da força peso na direção da velocidade é sempre maior que o módulo da força de arrasto desde A até B nas duas partes do experimento.

### Dinâmica do movimento circular

**36 UFMG** Um circuito, onde são disputadas corridas de automóveis, é composto de dois trechos retilíneos e dois trechos em forma de semicírculos, como mostrado na figura.

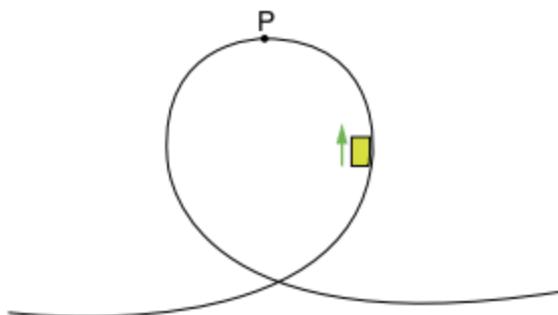


Um automóvel está percorrendo o circuito no sentido anti-horário, com velocidade de módulo constante.

Quando o automóvel passa pelo ponto P, a força resultante que atua nele está no sentido de P para:

- (a) K      (b) L      (c) M      (d) N

**37 UFMG** Observe o desenho:



Esse desenho representa um trecho de uma montanha-russa. Um carrinho passa pelo ponto P e não cai. Pode-se afirmar que, no ponto P:

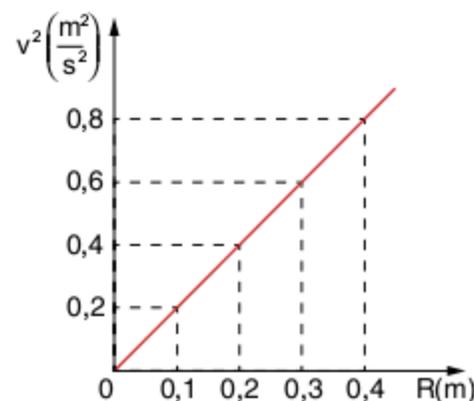
- (a) a força centrífuga que atua no carrinho o empurra sempre para a frente.
- (b) a força centrípeta que atua no carrinho equilibra seu peso.
- (c) a força centrípeta que atua no carrinho mantém sua trajetória circular.
- (d) a soma das forças que o trilho faz sobre o carrinho equilibra seu peso.
- (e) o peso do carrinho é nulo nesse ponto.

**38 UFPE** Um bloco desliza, com atrito, sobre um hemisfério e para baixo. Qual das opções a seguir melhor representa todas as forças que atuam sobre o bloco?

- (a)
- (b)
- (c)
- (d)
- (e)

### Dinâmica do movimento circular no plano horizontal

**39 Cessem-SP** Uma experiência sobre movimento circular uniforme consiste em registrar a velocidade tangencial  $v$ , à medida que se varia o raio  $R$  da trajetória de um corpo, mantendo constante a intensidade da força centrípeta que atua sobre ele. O gráfico de  $v^2$  em função de  $R$  é mostrado a seguir.



Sendo a massa do móvel 3,0 kg, qual a intensidade da força resultante?

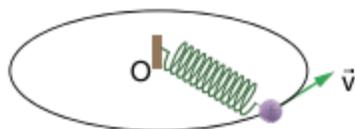
**40 Enem** O Brasil pode se transformar no primeiro país das Américas a entrar no seleto grupo das nações que dispõem de trem-bala. O Ministério dos Transportes prevê o lançamento do edital de licitação internacional para a construção da ferrovia de alta velocidade Rio-São Paulo. A viagem ligará os 403 quilômetros entre a Central do Brasil, no Rio, e a Estação da Luz, no centro da capital paulista, em uma hora e 25 minutos.

Disponível em: <http://oglobo.globo.com>.

Devido à alta velocidade, um dos problemas a ser enfrentado na escolha do trajeto que será percorrido pelo trem é o dimensionamento das curvas. Considerando-se que uma aceleração lateral confortável para os passageiros e segura para o trem seja de  $0,1g$ , em que  $g$  é a aceleração da gravidade (considerada igual a  $10 \text{ m/s}^2$ ), e que a velocidade do trem se mantenha constante em todo o percurso, seria correto prever que as curvas existentes no trajeto deveriam ter raio de curvatura mínimo de, aproximadamente:

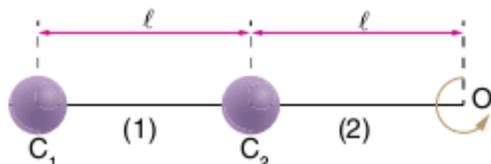
- (a) 80 m                      (c) 800 m                      (e) 6.400 m  
 (b) 430 m                    (d) 1.600 m

**41 Unicamp** Uma bola de massa  $1,0 \text{ kg}$ , presa à extremidade livre de uma mola esticada de constante elástica  $k = 2.000 \text{ N/m}$ , descreve um movimento circular e uniforme de raio  $r = 0,50 \text{ m}$ , com velocidade  $v = 10 \text{ m/s}$  sobre uma mesa horizontal e sem atrito. A outra extremidade da mola está presa a um pino em O, segundo a figura a seguir.



- a) Determine o valor da força que a mola aplica na bola para que esta realize o movimento descrito.  
 b) Qual era o comprimento original da mola antes de ter sido esticada?

**42 PUC-SP** A figura mostra um sistema de dois corpos de massas iguais, ligados por fios inextensíveis e de massas desprezíveis, girando num plano horizontal, sem atrito, com velocidade angular  $\omega$  constante, em torno do ponto fixo O.

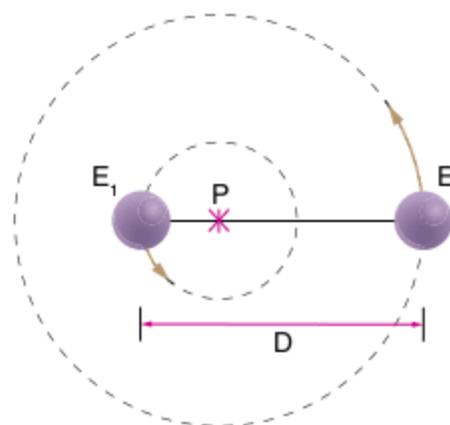


A razão  $\frac{T_2}{T_1}$  entre as tensões  $T_2$  e  $T_1$ , que atuam, respectivamente, nos fios (2) e (1), tem valor:

- (a) 2                      (c) 1                      (e)  $\frac{1}{2}$   
 (b)  $\frac{3}{2}$                     (d)  $\frac{2}{3}$

**43 Fuvest** Um astrônomo, ao estudar uma estrela dupla  $E_1$ - $E_2$ , observou que ambas executavam um movimento em torno de um mesmo ponto P, como se estivessem ligadas por uma barra imaginária. Ele mediu a distância D entre elas e o

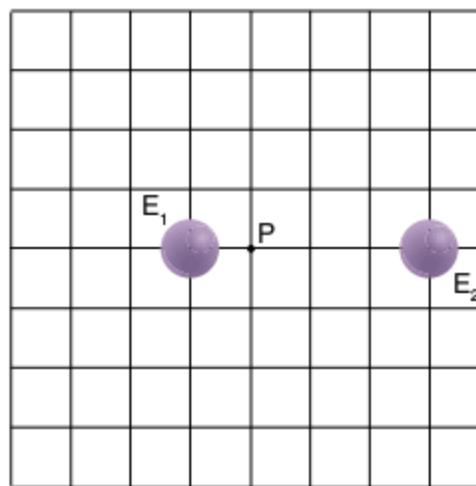
período T de rotação das estrelas, obtendo  $T = 12$  dias. Observou, ainda, que o raio  $R_1$ , da trajetória circular de  $E_1$ , era três vezes menor do que o raio  $R_2$ , da trajetória circular de  $E_2$ . Observando essas trajetórias, ele concluiu que as massas das estrelas eram tais que  $M_1 = 3M_2$ . Além disso, supôs que  $E_1$  e  $E_2$  estivessem sujeitas apenas à força gravitacional entre elas.



Note e adote: A força de atração gravitacional  $F_G$  entre dois corpos, de massas  $M_1$  e  $M_2$ , é dada por  $F_G = \frac{GM_1M_2}{D^2}$ , onde G é a constante universal da gravitação e D a distância entre os corpos.

A partir das medidas e das considerações do astrônomo:

- a) indique as posições em que  $E_1$  e  $E_2$  estariam, quinze dias após uma observação em que as estrelas foram vistas, como está representado no esquema a seguir. Marque e identifique claramente as novas posições de  $E_1$  e  $E_2$  no esquema.



- b) determine a razão  $R = \frac{V_2}{V_1}$  entre os módulos das velocidades lineares das estrelas  $E_2$  e  $E_1$ .  
 c) escreva a expressão da massa  $M_1$  da estrela  $E_1$ , em função de T, D e da constante universal da gravitação G.

**Dinâmica do movimento circular no plano vertical**

**44 Osec** Um avião descreve um loop num plano vertical, com velocidade de  $720 \text{ km/h}$ . Para que no ponto mais baixo da trajetória a intensidade da força que o piloto exerce no banco seja o triplo de seu peso, é necessário que o raio do loop seja de: Dado:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

- (a) 0,5 km                      (c) 1,5 km                      (e) 2,5 km  
 (b) 1,0 km                      (d) 2,0 km

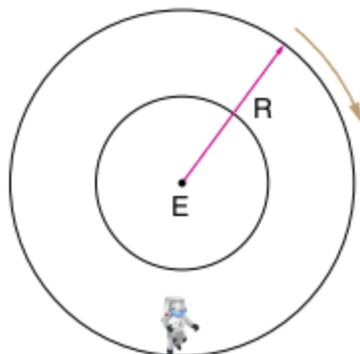
**45 Mackenzie** O eixo de um trecho de rodovia está contido num plano vertical e apresenta-se em perfil, conforme indica a figura. O raio de curvatura dos pontos A e B são iguais e o trecho que contém o ponto C é horizontal. Um automóvel percorre a rodovia com velocidade escalar constante.



Sejam  $N_A$ ,  $N_B$  e  $N_C$  a reação normal da rodovia sobre o carro nos pontos A, B e C, respectivamente, podemos dizer que:

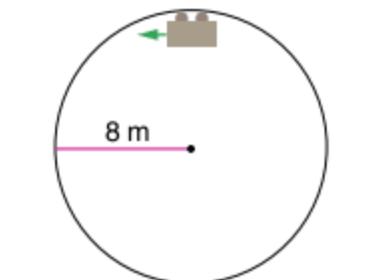
- (a)  $N_B > N_A > N_C$     (c)  $N_C > N_B > N_A$     (e)  $N_A > N_C > N_B$   
 (b)  $N_B > N_C > N_A$     (d)  $N_A > N_B > N_C$

**46 Unicamp** Algo muito comum nos filmes de ficção científica é o fato de os personagens não flutuarem no interior das naves espaciais. Mesmo estando no espaço sideral, na ausência de campos gravitacionais externos, eles se movem como se existisse uma força que os prendesse ao chão das espaçonaves. Um filme que se preocupa com essa questão é *2001, uma Odisseia no espaço*, de Stanley Kubrick. Nesse filme, a gravidade é simulada pela rotação da estação espacial, que cria um peso efetivo agindo sobre o astronauta. A estação espacial, em forma de cilindro oco, mostrada a seguir, gira com velocidade angular constante de 0,2 rad/s em torno de um eixo horizontal E perpendicular à página. O raio R da espaçonave é 40 m.



- a) Calcule a velocidade tangencial do astronauta representado na figura.  
 b) Determine a força de reação que o chão da espaçonave aplica no astronauta, que tem massa  $m = 80$  kg.

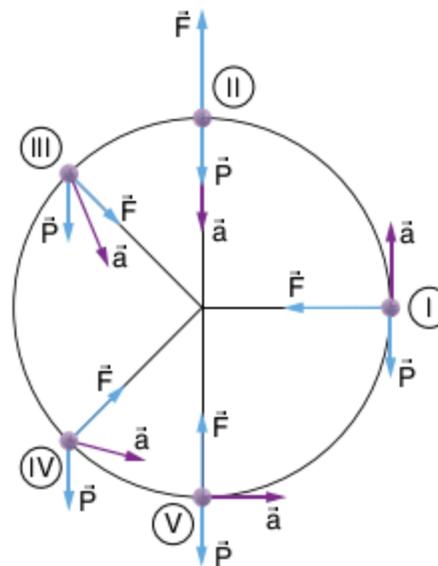
**47 Fuvest** A figura a seguir mostra, num plano vertical, parte dos trilhos do percurso circular de uma montanha-russa de um parque de diversões. A velocidade mínima que o carrinho deve ter, ao passar pelo ponto mais alto da trajetória, para não desgrudar dos trilhos vale, em metros por segundo:



- (a)  $\sqrt{20}$     (c)  $\sqrt{80}$     (e)  $\sqrt{320}$   
 (b)  $\sqrt{40}$     (d)  $\sqrt{160}$

### Dinâmica do movimento circular em pêndulo simples

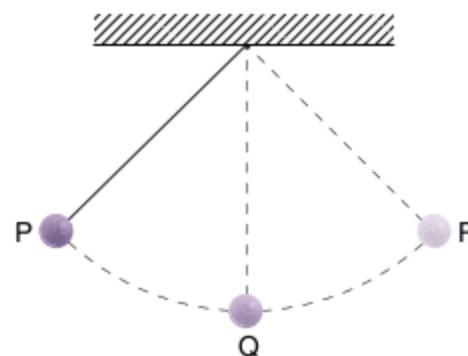
**48 PUC-Rio** Uma bolinha, presa por um fio flexível de massa desprezível, descreve, em um plano vertical, uma trajetória circular com centro no eixo em que está preso o fio. A figura a seguir mostra a direção das forças que atuam na bolinha, o peso  $P$  e a força  $F$  exercida pelo fio, além da aceleração da bolinha, nas posições assinaladas de I a V.



Em que pontos da trajetória os vetores estão corretamente indicados?

- (a) II e V.  
 (b) I, II e IV.  
 (c) III e IV.  
 (d) I, III e IV.  
 (e) III e V.

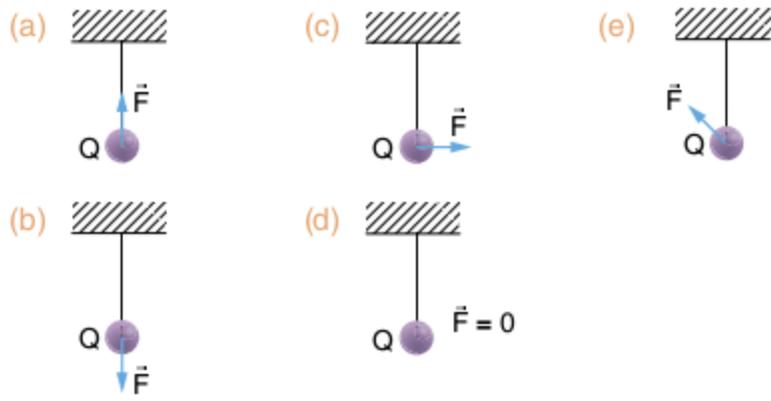
**49** O pêndulo da figura oscila em condições ideais, tendo como posições de inversão do sentido do seu movimento os pontos P e R.



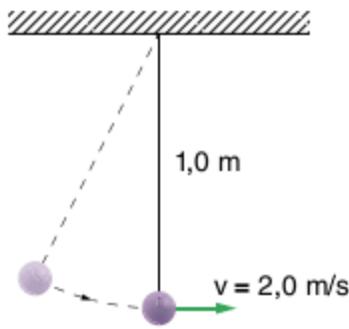
a) Assinale a opção que melhor representa a força resultante ( $\vec{F}$ ) na esfera pendular, quando esta ocupa a posição P.

- (a)    (c)    (e)   
 (b)    (d)

b) Assinale a opção que melhor representa a força resultante ( $\vec{F}'$ ) na esfera pendular, quando esta ocupa a posição Q (mais baixa da trajetória), proveniente da posição P.

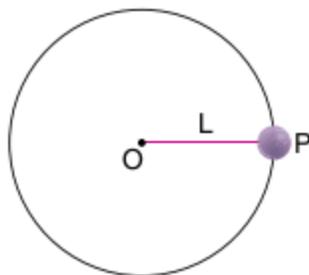


**50 Efoa-MG** Uma esfera metálica de massa 0,10 kg, presa à extremidade de um fio leve e inextensível de 1,0 m de comprimento, é abandonada de certa altura e passa pelo ponto mais baixo da trajetória com velocidade de módulo 2,0 m/s, como mostra a figura. Adote  $g = 10 \text{ m/s}^2$  e despreze o efeito do ar.



Determine, no ponto mais baixo da trajetória:  
 a) a intensidade da força resultante na esfera.  
 b) a intensidade da força que traciona o fio.

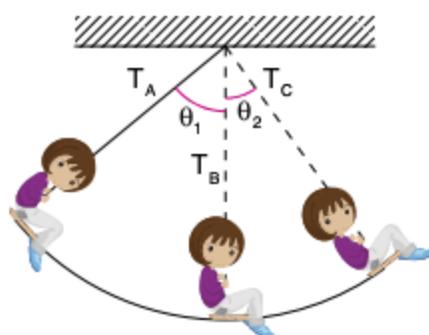
**51 Cesgranrio** Na figura, L é uma linha de comprimento 0,5 m, fixa em O, e P é uma pedra de 5 g em movimento circular. A tensão máxima suportada pela linha é 25 N.



A velocidade máxima (em relação ao ponto O) da pedra que a linha suporta é:

- (a) 10 m/s
- (b) 20 m/s
- (c) 30 m/s
- (d) 40 m/s
- (e) 50 m/s

**52 UFV** A figura a seguir ilustra uma menina em um balanço.

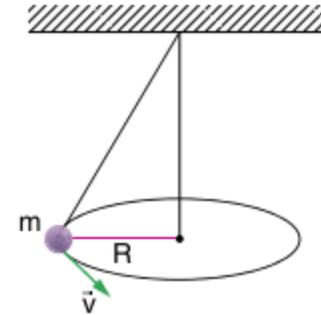


Seja  $T_A$ ,  $T_B$  e  $T_C$  as tensões na corda do balanço nas posições indicadas e  $\theta_1$  maior que  $\theta_2$ , a afirmativa correta é:

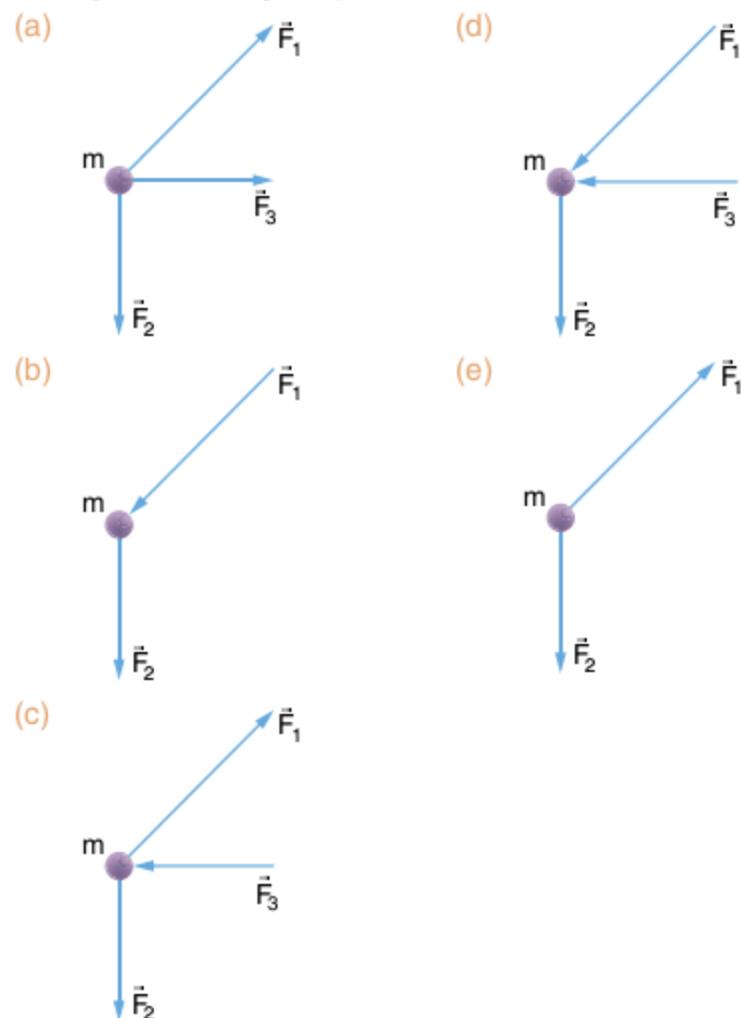
- (a)  $T_A > T_B > T_C$
- (b)  $T_C > T_B > T_A$
- (c)  $T_B > T_C > T_A$
- (d)  $T_A > T_C > T_B$
- (e)  $T_A = T_B = T_C$

### Dinâmica do movimento circular em pêndulo cônico e sistemas assemelhados

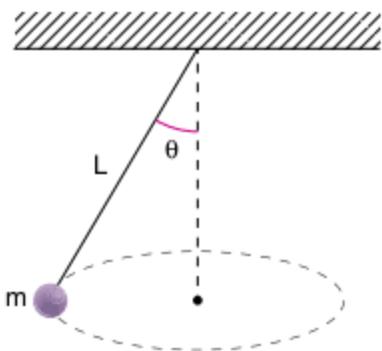
**53 Fatec-SP** Um pêndulo de massa  $m$  oscila em torno de um círculo de raio  $R$ , com velocidade tangencial  $\vec{v}$ . As forças que agem sobre  $m$  são  $\vec{F}_1$  (tração no fio) e  $\vec{F}_2$  (peso da massa pendular).  $\vec{F}_3$  é a resultante de  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ .



O diagrama de forças aplicadas em  $m$  é:

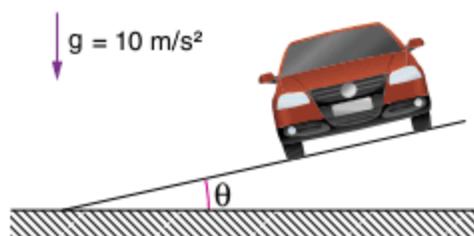


**54 Unicamp** Um pêndulo cônico é formado por um fio de massa desprezível e comprimento  $L = 1,25 \text{ m}$ , que suporta uma massa  $m = 0,5 \text{ kg}$  na sua extremidade inferior. A extremidade superior do fio é presa ao teto, conforme ilustra a figura a seguir. Quando o pêndulo oscila, a massa  $m$  executa um movimento circular uniforme num plano horizontal, e o ângulo que o fio forma com a vertical é  $\theta = 60^\circ$ .



- a) Qual é a tensão no fio?  
 b) Qual é a velocidade angular da massa?  
 Se for necessário, use:  $\sin 60^\circ = 0,87$ ;  $\cos 60^\circ = 0,5$ .

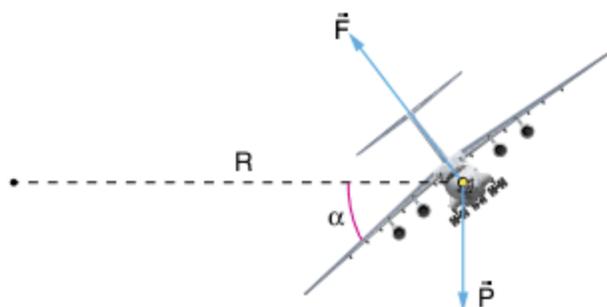
**55 Fuvest** Um carro percorre uma pista curva superelevada ( $\tan \theta = 0,2$ ) de 200 m de raio.



Desprezando o atrito, qual a velocidade máxima sem risco de derrapagem?

- (a) 40 km/h      (c) 60 km/h      (e) 80 km/h  
 (b) 48 km/h      (d) 72 km/h

**56 UFSC** Um avião descreve uma curva em trajetória circular com velocidade escalar constante, num plano horizontal, conforme está representado na figura, onde  $\vec{F}$  é a força de sustentação, perpendicular às asas;  $\vec{P}$  é a força peso;  $\alpha$  é o ângulo de inclinação das asas em relação ao plano horizontal; R é o raio de trajetória. São conhecidos os valores:  $\alpha = 45^\circ$ ;  $R = 1.000$  metros; massa do avião = 10.000 kg.

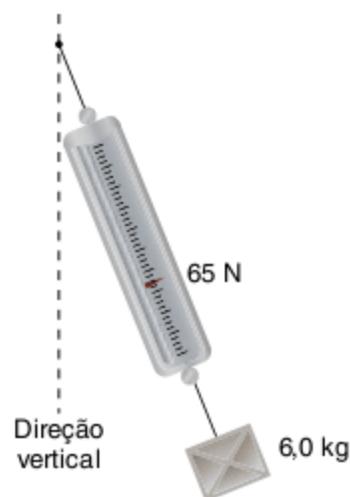


Assinale a(s) proposição(ões) correta(s), considerando, para efeito de cálculos, apenas as forças indicadas na figura.

- 01 Se o avião descreve uma trajetória curvilínea, a resultante das forças externas que atuam sobre ele é, necessariamente, diferente de zero.  
 02 Se o avião realiza movimento circular uniforme, a resultante das forças que atuam sobre ele é nula.  
 04 A força centrípeta é, em cada ponto da trajetória, a resultante das forças externas que atuam no avião, na direção do raio da trajetória.  
 08 A força centrípeta sobre o avião tem intensidade igual a 100.000 N.  
 16 A velocidade do avião tem valor igual a 360 km/h.  
 32 A força resultante que atua sobre o avião não depende do ângulo de inclinação das asas em relação ao plano horizontal.

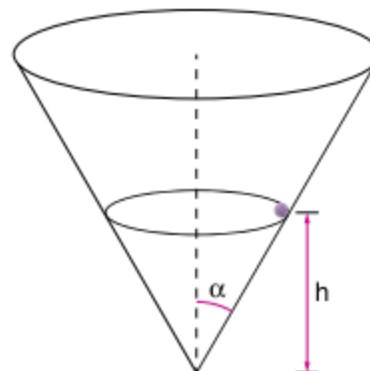
Soma =

**57 UFRJ** Uma caixa é pendurada no teto de um ônibus por meio de fios ideais presos a um dinamômetro de massa desprezível. A figura mostra esses objetos em equilíbrio em relação ao ônibus, enquanto ele está percorrendo um trecho circular de uma estrada horizontal, com velocidade de 72 km/h. Nessa situação, o dinamômetro mostra que a tensão no fio é 65 N.



Sabendo que a massa da caixa é 6,0 kg, calcule o raio da curva da estrada.

**58 ITA** Uma massa pontual se move, sob a influência da gravidade e sem atrito, com velocidade angular  $\omega$ , em um círculo a uma altura  $h \neq 0$  na superfície interna de um cone, que forma um ângulo  $\alpha$  com seu eixo central, como mostrado na figura.



A altura h da massa em relação ao vértice do cone é:

- (a)  $\frac{g}{\omega^2}$   
 (b)  $\frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha}$   
 (c)  $\frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{\cotg \alpha}{\sin \alpha}$   
 (d)  $\frac{g}{\omega^2} \cdot \cotg^2 \alpha$   
 (e) inexistente, pois a única posição de equilíbrio é  $h = 0$ .

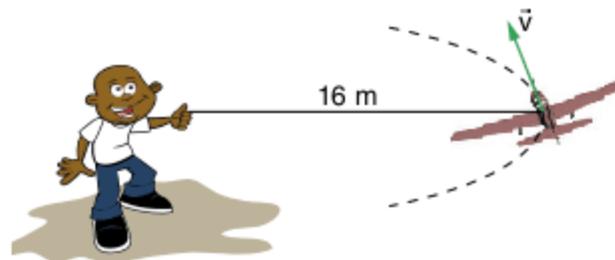
**Dinâmica do movimento circular e força de atrito**

**59 UnB** Um disco gira em torno de seu centro, num plano horizontal, com uma velocidade angular  $\omega = 5$  rad/s. Um pequeno corpo de massa m é colocado a uma distância  $r = 20$  cm do centro do disco. Ache o menor coeficiente de atrito entre as superfícies para o corpo não deslizar sobre o disco.

**60 Vunesp** Um cubo de aço e outro de cobre, ambos de massas iguais a 20 g, estão sobre um disco de aço horizontal, que pode girar em torno de seu centro. Os coeficientes de atrito estático para aço-aço e cobre-aço são, respectivamente,  $\mu_A = 0,74$  e  $\mu_C = 0,53$ . O cubo de cobre está inicialmente a uma distância de 10 cm do centro do disco. Aceleração da gravidade =  $10 \text{ m/s}^2$ .

- Qual deve ser a mínima velocidade angular do disco para que o cubo de cobre comece a deslizar?
- Se o disco estiver girando com a velocidade angular mínima do item a, a que distância do centro deve estar o cubo de aço para que o seu deslizamento seja simultâneo com o de cobre?

**61 PUC-MG** Uma criança de massa 64 kg pilota um aeromodelo de massa 4,0 kg. O coeficiente de atrito estático entre os pés da criança e o solo vale 0,40, e o aeromodelo gira em um plano horizontal, como mostra a figura. Se o raio da trajetória, suposta circular, é de 16 m, determine a velocidade máxima que o aeromodelo pode ter para o garoto não deslizar. Dado:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



**62 Fuvest** Um caminhão, com massa total de 10.000 kg, está percorrendo uma curva circular plana e horizontal a 72 km/h (ou seja, 20 m/s) quando encontra uma mancha de óleo na pista e perde completamente a aderência. O caminhão encosta, então, no muro lateral que acompanha a curva, que o mantém em trajetória circular de raio igual a 90 m. O coeficiente de atrito entre o caminhão e o muro vale 0,3. Podemos afirmar que, ao

encostar no muro, o caminhão começa a perder velocidade à razão de, aproximadamente:

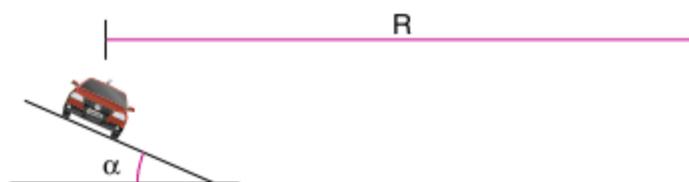
- $0,07 \text{ m/s}^2$
- $1,3 \text{ m/s}^2$
- $3,0 \text{ m/s}^2$
- $10 \text{ m/s}^2$
- $67 \text{ m/s}^2$

**63 Uerj** O cesto da máquina de lavar roupas da família mede 50 cm de diâmetro. Durante o ciclo de centrifugação, o coeficiente de atrito da roupa com a parede do cesto da máquina é constante e igual a 0,5 e a aceleração angular do cesto é igual a  $2 \text{ rad/s}^2$ .

Calcule, em relação a esse ciclo de centrifugação:

- a velocidade de rotação mínima para que a roupa fique grudada à parede do cesto.
- o número de rotações feitas pelo cesto, a partir do repouso até atingir a velocidade de 3 rotações por segundo.

**64 UFRJ** Pistas com curvas de piso inclinado são projetadas para permitir que um automóvel possa descrever uma curva com mais segurança, reduzindo as forças de atrito da estrada sobre ele. Para simplificar, considere o automóvel como um ponto material.



- Suponha a situação mostrada na figura anterior, onde se representa um automóvel descrevendo uma curva de raio  $R$ , com velocidade  $V$ , tal que a estrada não exerça forças de atrito sobre o automóvel. Calcule o ângulo  $\alpha$  de inclinação da curva, em função da aceleração da gravidade  $g$  e de  $V$ .
- Suponha agora que o automóvel faça a curva de raio  $R$ , com uma velocidade maior do que  $V$ . Faça um diagrama representando por setas as forças que atuam sobre o automóvel nessa situação.

## TEXTOS COMPLEMENTARES

### Como funciona a aerodinâmica

[Os carros, para se mover, têm que atravessar uma parede de ar, cuja resistência devem vencer]. [...] Não é fácil pensar no ar ou no vento como uma parede. Em baixa velocidade, em dias com pouco vento, é difícil perceber como o ar interage com nossos veículos, mas em alta velocidade, ou sob vento excepcionalmente forte, a resistência do ar (a força que o ar exerce sobre um objeto em movimento – também chamada de arrasto) tem enorme efeito sobre a aceleração, a dirigibilidade e o consumo de um carro.

Nesta hora, entra em cena a ciência da aerodinâmica. Aerodinâmica é o estudo do ar em movimento e das forças exercidas por ele sobre objetos sólidos. Há décadas, projetam-se carros tendo em mente a aerodinâmica, e os fabricantes de carros puseram em uso inovações que tornam mais fácil cortar o muro de ar, diminuindo seu efeito adverso.

Na essência, projetar um carro levando em consideração o fluxo de ar significa que ele vai ter menos dificuldade para acelerar e vai ter menor consumo de combustível, porque o motor não tem que trabalhar tanto para empurrar o carro através da parede de ar.

Os engenheiros desenvolveram várias maneiras de fazer isso. Por exemplo, para que o ar flua ao redor do carro com a menor resistência possível, as carrocerias são arredondadas e têm partes que canalizam o ar. Alguns carros de alto desempenho têm até partes projetadas para levar o ar a se mover de forma suave sob sua parte inferior. Em determinados modelos, há aerofólios (também chamados de asas ou *spoilers*) para evitar que o ar “empurre” para cima o carro, o que diminui sua estabilidade, criando sustentação.

Vamos examinar a física da aerodinâmica e da resistência do ar e a história de como os carros têm sido projetados levando isso

em conta, além de explicar por que a tendência de carros ecológicos dá mais importância que nunca à aerodinâmica.

### A ciência da aerodinâmica

Conforme um objeto se move pela atmosfera, ele desloca o ar que o cerca. O objeto também fica sujeito ao arrasto. O arrasto é gerado quando um objeto sólido se move através de um meio fluido como a água ou o ar. [...]

Conforme um objeto acelera, sua velocidade e o arrasto aumentam. [...]

Como isso se aplica ao projeto de um carro? Bem, é útil para descobrir um número importante – o coeficiente de arrasto. Esse é um dos fatores primários a determinar quão facilmente um objeto se move cortando o ar. O coeficiente de arrasto ( $C_x$ ) é descrito pela seguinte equação.

$$C_x = \frac{F_a}{(A \cdot \rho \cdot 0,5 \cdot v^2)}$$

onde  $F_a$  é a força de arrasto,  $A$  a área de referência,  $\rho$  a densidade do ar e  $v$  a velocidade do objeto.

Qual o coeficiente de arrasto que os projetistas de um carro tentam conseguir?

### O coeficiente de arrasto

Acabamos de ver que a força exercida sobre um objeto – por exemplo, um carro – pela resistência do ar é proporcional ao coeficiente de arrasto. Agora imagine a força do ar contrária ao carro conforme ele se move numa rodovia. A 120 km/h, a força agindo contra o carro é quatro vezes maior que a verificada quando o carro está a 60 km/h.

A capacidade aerodinâmica de um carro é medida usando o coeficiente de arrasto do veículo. Na essência, quanto mais baixo o  $C_x$ , mais aerodinâmico é o carro – e mais facilmente ele se move através da parede de ar contrária a ele. [...]

Superfícies suaves e arredondadas permitem que o ar flua ao redor do veículo, reduzindo o “empurrão” do ar contra a carroceria.

A maioria dos carros atuais tem um  $C_x$  em torno de 0,30. Utilitários esportivos, que tendem a ser mais “quadrados”, porque são maiores, levam mais gente e frequentemente precisam de grades mais amplas para ajudar a refrigerar o motor, têm  $C_x$  entre 0,30 e 0,40. Nas picapes, propositalmente quadradas, o número fica próximo a 0,40.

Muita gente contestou o visual “único” do Toyota Prius, um carro híbrido, mas ele tem uma forma extremamente aerodinâmica por uma boa razão. É uma de suas características de eficiência, com seu  $C_x$  de 0,26 ajudando na obtenção de um consumo baixíssimo. A redução do  $C_x$  de um carro em 0,01 pode diminuir o consumo em 0,09 L/km.

### O túnel de vento nas medições de arrasto

Para medir a eficiência aerodinâmica de um carro, em tempo real, os engenheiros da indústria automobilística tomaram emprestada uma ferramenta da indústria aeronáutica – o túnel de vento.

Basicamente, um túnel de vento é um enorme tubo com ventiladores que dirigem um fluxo de ar a um objeto em seu interior. Pode ser um carro, um avião ou qualquer outra coisa cuja resistência ao

ar os engenheiros precisem medir. Em uma sala anexa ao túnel, os engenheiros estudam como o ar interage com o objeto – a maneira como as correntes de ar fluem sobre as variadas superfícies.

O carro ou o avião dentro do túnel nunca se move, mas os ventiladores criam vento a diferentes velocidades, para simular as condições do mundo real. Algumas vezes não é usado um carro de verdade – os projetistas baseiam-se em modelos em escala de seus veículos na medição da resistência do ar. Conforme o vento se desloca sobre o carro no túnel, computadores calculam o coeficiente de arrasto. [...]

De alguns anos para cá, os gigantescos túneis de vento de milhões de dólares têm sido cada vez menos usados. Simulações em computadores começam a substituir os túneis de vento para avaliar a aerodinâmica de carros e aviões. Em muitos casos, os túneis de vento quase servem apenas para checar se são precisas as simulações no computador. [...]

### Dispositivos aerodinâmicos

A aerodinâmica envolve mais do que apenas o arrasto – há outros fatores, chamados sustentação e *downforce* (sustentação negativa). Sustentação é a força que se opõe ao peso de um objeto, elevando-o e mantendo-o no ar. A sustentação negativa é seu oposto – uma força que empurra o objeto em direção ao solo.

Você acha que o coeficiente de arrasto de um carro de F-1 é superbaixo? Afinal, um carro superaerodinâmico deve ser muito veloz. Bem, não é assim num F-1. Os carros dessa categoria têm  $C_x$  por volta de 0,70.

Por que um supercarro que supera 330 km/h não é lá muito aerodinâmico? Porque um F-1 é projetado para ter o máximo possível de *downforce*. Pelas altíssimas velocidades atingidas – e por seu baixíssimo peso – esses carros começam a ter sustentação e tendem a decolar, como um avião. Obviamente carros não devem voar e, se um carro perde o contato com o chão quando em alta velocidade, pode haver um sério acidente. Por isso, a sustentação negativa deve ser ampliada – e a forma de fazer isso leva a um elevado  $C_x$ .

Os carros de F-1 conseguem sustentação negativa graças a aerofólios ou defletores montados na frente e na traseira. Os aerofólios criam diferenças de pressão que literalmente empurram o carro em direção ao solo – é a sustentação negativa. Isso aumenta a velocidade em curvas, mas tem que ser cuidadosamente balanceado para que o carro tenha velocidade suficiente nas retas. [...]

Mas e os defletores e outras peças aerodinâmicas em carros do dia a dia? São realmente aerodinâmicos? Em alguns casos, os dispositivos aumentam a estabilidade em alta velocidade. Por exemplo, o Audi TT inicialmente não tinha um defletor no capô traseiro, mas a Audi instalou um quando se descobriu que a carroceria arredondada criava muita sustentação, o que pode ter provocado acidentes. Na maioria dos casos, a colocação de um grande aerofólio na traseira de um carro comum não vai melhorar muito o desempenho nem a dirigibilidade. Em alguns casos, pode haver piora no comportamento do carro – que pode, por exemplo, ter dificuldade em fazer curvas.

Patrick E. George. "HowStuffWorks – Como funciona a aerodinâmica". Publicado em 31 de março de 2009 (atualizado em 09 de abril de 2009) Disponível em: <<http://carros.hsw.uol.com.br/aerodinamica4.htm>>. (Adapt.)

## Origem do atrito

Leonardo Da Vinci (1452-1519) realizou alguns dos primeiros estudos relacionados ao atrito e ao desgaste de peças, deduzindo que o atrito independe da área da superfície de um corpo e é diretamente proporcional à força normal. As propriedades do atrito foram descobertas por meio de análises experimentais nos séculos XVII e XVIII, por Amontons e Coulomb. Este chegou a uma aproximação matemática para a força de atrito estático, a força mínima necessária para dar início ao movimento de um corpo.

O estudo empírico das propriedades do atrito deve-se ao fato de as interações físicas responsáveis por essa força de resistência ao movimento serem complexas. O atrito entre duas superfícies deve-se a forças intermoleculares de natureza eletromagnética, relacionadas à interação entre as partículas carregadas das superfícies em contato.

Superfícies planas, observadas microscopicamente, são, na verdade, irregulares. Ligações moleculares entre as partículas que

constituem duas superfícies irregulares em contato formam-se e rompem-se durante o movimento, impondo resistência a ele. Isso faz com que seja mais difícil dar início ao movimento, rompendo as ligações já formadas entre as partículas das duas superfícies, do que mantê-lo. Por esse motivo, o coeficiente de atrito estático é maior que o coeficiente de atrito dinâmico.

Durante o movimento, as breves interações entre as partículas das superfícies em contato são variáveis e a força de atrito dinâmico não é de fato constante ao longo do movimento.

Materiais aderentes, como a borracha, em contato com outras superfícies, podem apresentar coeficientes de atrito maiores do que 1; desse modo, a força necessária para dar início ao movimento deve ser maior que a força normal à superfície.

## RESUMINDO

Neste capítulo, estudamos a **força de atrito** entre os corpos, diferenciando atrito estático de atrito dinâmico, que dependem de haver ou não, respectivamente, movimento relativo entre as superfícies de contato.

O estudo da força de contato entre dois corpos é facilitado quando a decompomos em:

- força de atrito ( $F_{at}$ ) – a componente paralela à superfície de contato.
- força normal ( $N$ ) – a componente perpendicular à superfície de contato.

A **força de atrito estático** ( $F_{at,e}$ ) tem seu valor dado por:

$$0 \leq F_{at,e} \leq F_{at,e,max}$$

A força de atrito estático é máxima na iminência do movimento entre as superfícies e vale  $\mu_e \cdot N$ , em que  $\mu_e$  é o **coeficiente de atrito estático** entre as superfícies.

Logo:

$$0 \leq F_{at,e} \leq \mu_e \cdot N$$

A **força de atrito dinâmico** ( $F_{at,d}$ ) tem seu valor dado por:

$$F_{at,d} = \mu_d \cdot N$$

em que  $\mu_d$  é o **coeficiente de atrito dinâmico** entre as superfícies.

Os coeficientes de atrito dependem do material de que são feitas as superfícies de contato e de seus polimentos, com  $\mu_d < \mu_e$ .

Estudamos também a **resistência dos fluidos** ao movimento de um corpo. A resistência do ar a um corpo pode ser escrita como:

$$F_{ar} = k \cdot v^2$$

em que  $v$  é a velocidade do corpo e  $k$  é uma constante que depende da densidade do ar, da área da superfície do corpo e da sua geometria.

Um corpo de massa  $m$ , sujeito apenas à força peso e à resistência do ar, atinge uma **velocidade limite** ( $v_{lim}$ ) dada por:

$$v_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

Vimos também que o estudo da dinâmica de um corpo que descreve uma trajetória curva é facilitado quando decompomos todas as forças e a aceleração em duas direções: perpendicular e tangente à curva no ponto em que o corpo se encontra.

Escrevendo a Segunda Lei de Newton para as duas direções:

$$\vec{F}_{R,t} = m \cdot \vec{a}_t \quad \text{e} \quad \vec{F}_{R,cp} = m \cdot \vec{a}_{cp}$$

em que  $\vec{F}_{R,t}$  é a **resultante tangencial**,  $\vec{a}_t$  é a **aceleração tangencial**, com módulo igual ao módulo da aceleração escalar,  $\vec{F}_{R,cp}$  é a **resultante centrípeta** e  $\vec{a}_{cp}$  é a **aceleração centrípeta**, com módulo igual a  $\frac{v^2}{R}$  ( $v$  é a velocidade do corpo e  $R$  é o raio de curvatura da trajetória no ponto considerado).

# QUER SABER MAIS?



## SITES

- Atrito no plano inclinado  
[http://phet.colorado.edu/pt\\_BR/simulation/ramp-forces-and-motion](http://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/ramp-forces-and-motion)
- Sem atrito – Desgaste em peças de máquinas e motores  
<http://revistapesquisa.fapesp.br/?art=3810&bd=1&pg=1&lg=>
- Aerodinâmica em um foguete (em inglês)  
<http://exploration.grc.nasa.gov/education/rocket/rktaero.html>
- Atrito e o curling – A ciência dos Jogos Olímpicos de Inverno  
[www.youtube.com/watch?v=GTVqtGTflc8](http://www.youtube.com/watch?v=GTVqtGTflc8)
- Força de atrito e as leis de Newton  
[www.youtube.com/watch?v=-cM9S2AzU28](http://www.youtube.com/watch?v=-cM9S2AzU28)

## Exercícios complementares

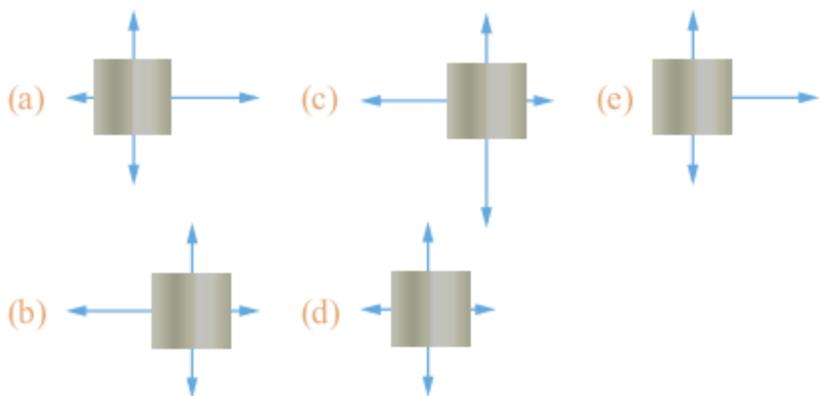
Considere, quando necessário,  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

### Força de atrito

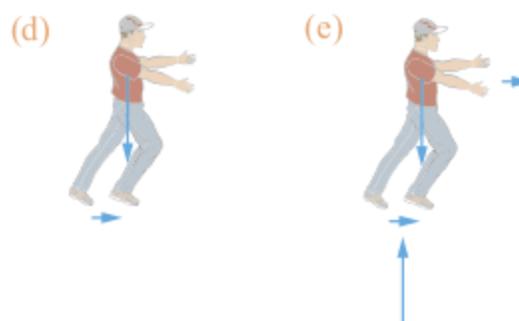
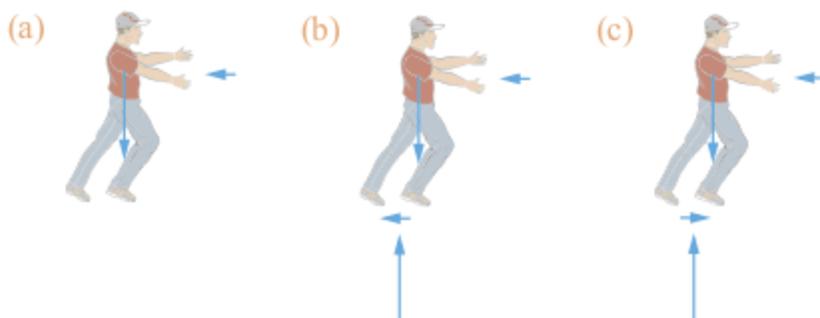
**1 UFMG** Um homem empurra um caixote para a direita, com velocidade constante, sobre uma superfície horizontal, como mostra a figura a seguir.



a) Desprezando-se a resistência do ar, o diagrama que melhor representa as forças que atuam no caixote é:



b) O diagrama que melhor representa as forças que atuam no homem é:



**2 UFSC** Um homem empurra uma mesa com uma força horizontal  $\vec{F}$ , da esquerda para a direita, movimentando-a neste sentido. Um livro solto sobre a mesa permanece em repouso em relação a ela.

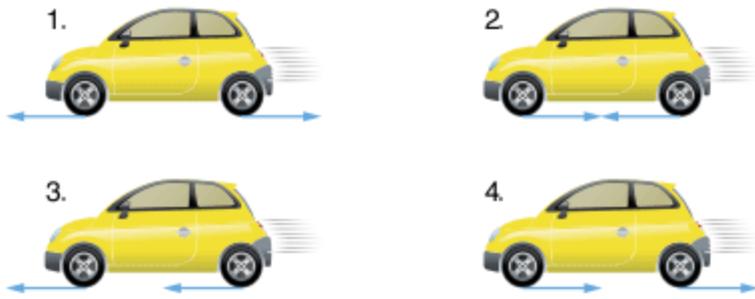


Considerando a situação descrita, assinale a(s) proposição(ões) correta(s).

- 01 Se a mesa deslizar com velocidade constante, a força de atrito sobre o livro não será nula.
- 02 Se a mesa deslizar com velocidade constante, atuarão somente as forças peso e normal sobre o livro.
- 04 Se a mesa deslizar com aceleração constante, atuarão sobre o livro somente as forças peso, normal e a força  $\vec{F}$ .
- 08 Se a mesa deslizar com aceleração constante, a força de atrito que atua sobre o livro será responsável pela aceleração do livro.
- 16 Como o livro está em repouso em relação à mesa, a força de atrito que age sobre ele é igual, em módulo, à força  $\vec{F}$ .
- 32 Se a mesa deslizar com aceleração constante, o sentido da força de atrito que age sobre o livro será da esquerda para a direita.

Soma =

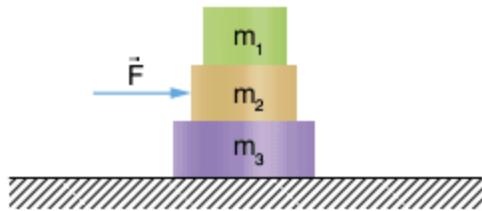
**3 ITA** Um automóvel se desloca sobre uma estrada, da direita para a esquerda, conforme as figuras de 1 a 4. As setas nas rodas indicam os sentidos das forças de atrito (sem relação com os módulos) exercidas sobre elas pelo chão:



Associe os esquemas apresentados com os algarismos romanos de I a IV.

- I. Tração somente nas rodas dianteiras.
- II. Tração nas quatro rodas.
- III. Motor desligado (desacoplado).
- IV. Tração somente nas rodas traseiras.

**4 UEL** Considere o sistema constituído por três blocos de massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , apoiados um sobre o outro, em repouso sobre uma superfície horizontal, como mostra a figura a seguir.



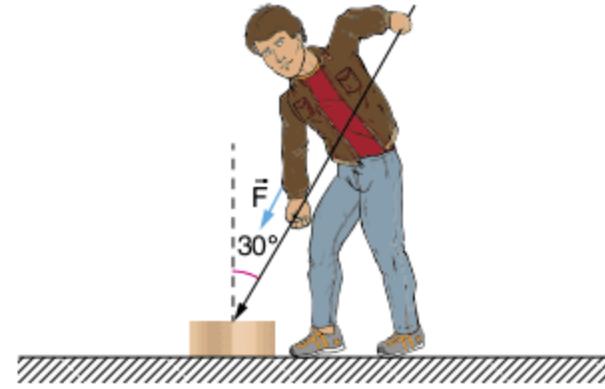
Observe que uma força  $\vec{F}$  é aplicada ao bloco de massa  $m_2$ , conforme a representação. Entretanto, essa força é incapaz de vencer as forças de atrito  $\vec{f}_{i,j}$  entre os blocos  $m_i$  e  $m_j$ , onde  $i$  e  $j$  variam de 1 a 3.

Desprezando a resistência do ar, assinale a alternativa que representa todas as forças que atuam no bloco de massa  $m_2$ , onde os  $\vec{N}_i$  representam as normais que atuam nos blocos e os  $\vec{P}_i$  correspondem aos pesos dos respectivos blocos com  $i$  variando de 1 a 3.

- (a)
- (b)
- (c)
- (d)
- (e)

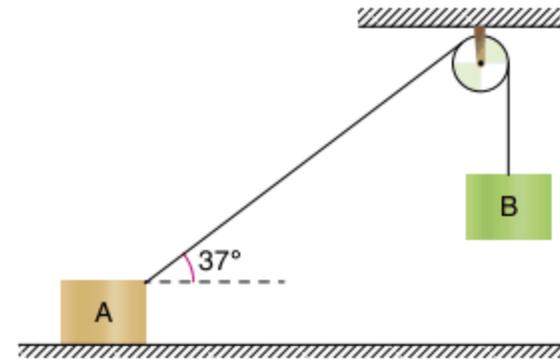
### Atrito estático

**5 Fuvest** Tenta-se, sem sucesso, deslocar uma caixa de peso  $P = 50 \text{ N}$ , em repouso sobre um plano horizontal com atrito, aplicando-lhe uma força  $F = 200 \text{ N}$ , na direção da haste. Despreze a massa da haste.



- a) Faça um esquema de todas as forças que agem sobre a caixa e identifique claramente a origem de cada uma delas. Escreva o valor, em N, da resultante dessas forças  $F_R$ .
- b) Qual o valor da força de atrito entre a caixa e o plano (em N)?
- c) Qual o valor mínimo do coeficiente de atrito?

**6 Mackenzie** No sistema a seguir, a massa do corpo A é  $11 \text{ kg}$  e o coeficiente de atrito estático entre esse corpo e a superfície de apoio é  $0,5$ .



Para que o sistema permaneça em equilíbrio, a maior massa que o corpo B pode ter é:

Dados:  $\cos 37^\circ = 0,8$ ;  $\sin 37^\circ = 0,6$ .

- (a)  $2 \text{ kg}$
- (b)  $3 \text{ kg}$
- (c)  $4 \text{ kg}$
- (d)  $5 \text{ kg}$
- (e)  $6 \text{ kg}$

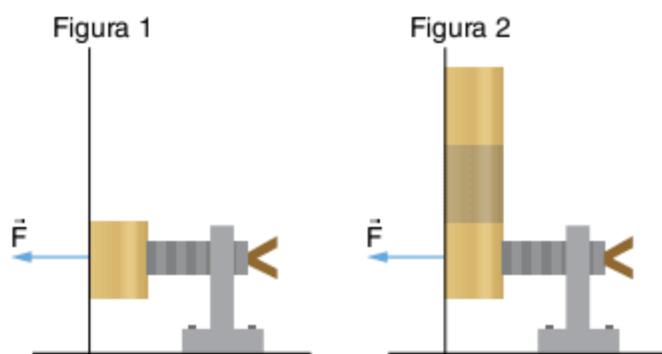
**7 Fuvest** Uma locomotiva de massa  $M$  está ligada a um vagão de massa  $\frac{2M}{3}$ , ambos sobre trilhos horizontais e retilíneos.

O coeficiente de atrito estático entre as rodas da locomotiva e os trilhos é  $\mu$ , e todas as demais fontes de atritos podem ser desprezadas. Ao se pôr a locomotiva em movimento, sem que suas rodas patinem sobre os trilhos, a máxima aceleração que ela pode imprimir ao sistema formado por ela e pelo vagão vale:

- (a)  $\frac{3\mu g}{5}$
- (b)  $\frac{2\mu g}{3}$
- (c)  $\mu g$
- (d)  $\frac{3\mu g}{2}$
- (e)  $\frac{5\mu g}{3}$

**8 UFSC** Uma prensa é utilizada para sustentar um bloco apoiado em uma parede vertical, como ilustrado na figura 1. O bloco e a parede são sólidos e indeformáveis. A prensa exerce

uma força de  $10^4$  N sobre o bloco, na direção perpendicular às superfícies em contato. A massa do bloco é de 50 kg e o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a parede é 0,35. Em seguida, mais blocos de mesma massa são colocados em cima do primeiro, como é mostrado na figura 2, porém a força que a prensa exerce permanece inalterada.

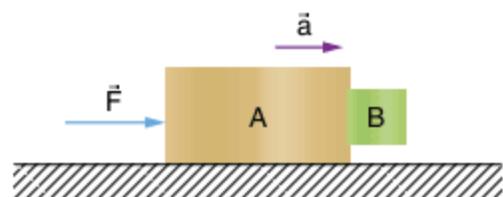


Em relação à situação descrita, assinale a(s) proposição(ões) correta(s).

- 01 A força necessária para sustentar apenas um bloco é igual a 175 N.
- 02 A força que a parede exerce sobre o primeiro bloco é igual a  $10^4$  N e a força de atrito estático entre a parede e o bloco é igual a 3.500 N.
- 04 Com a força aplicada, é possível sustentar um total de sete blocos iguais ao primeiro.
- 08 A força de atrito estático entre a parede e os blocos acima do primeiro é nula.
- 16 Se o coeficiente de atrito estático entre a parede e o bloco for nulo, a prensa não sustentará o primeiro bloco contra a parede por maior que seja a força aplicada  $\vec{F}$ .
- 32 Como o peso de cada bloco é de 500 N, a força  $\vec{F}$  aplicada pela prensa poderá sustentar 20 blocos.
- 64 Quanto mais polidas forem as superfícies em contato da parede e do bloco, menor será o coeficiente de atrito e, portanto, menor será o número de blocos que a força aplicada poderá sustentar.

Soma =

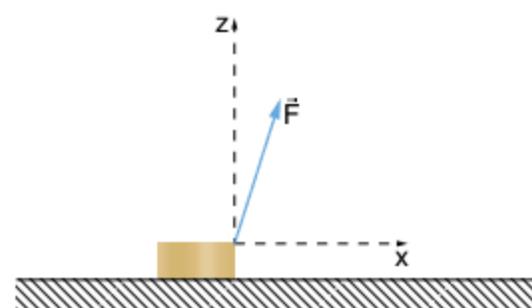
**9** Um bloco A, apoiado em uma superfície plana horizontal sem atrito, move-se em movimento acelerado de aceleração  $\vec{a}$ , empurrado por uma força horizontal  $\vec{F}$ . O bloco A, por sua vez, empurra um bloco B, como mostra a figura, de modo que B não caia. Suponha que o coeficiente de atrito estático entre os blocos A e B seja igual a  $\mu$ .



- a) Supondo  $\mu = 0,40$ , determine os valores possíveis para o módulo de  $\vec{a}$ .
- b) Supondo  $\mu = 0,40$  e que as massas de A e B sejam  $m_A = 8,0$  kg e  $m_B = 2,0$  kg, calcule os valores possíveis para a intensidade de  $\vec{F}$ .
- c) Supondo  $a = 20$  m/s<sup>2</sup>, calcule os valores possíveis de  $\mu$ .

### Atrito dinâmico

**10 UFPB** Sobre um bloco com massa 1,0 kg, apoiado sobre uma mesa horizontal (figura a seguir), existe uma força dada por  $\vec{F} = 1\hat{i} + 3\hat{k}$ , expressa no Sistema Internacional de Unidades (SI).



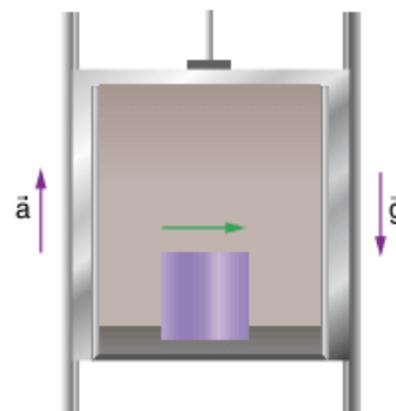
Considerando que o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a mesa é 0,2 e admitindo que, inicialmente, foi fornecida ao bloco uma velocidade de 4,0 m/s ao longo do eixo x, é correto afirmar que o bloco, até parar, percorreu uma distância de:

- (a) 16 m
- (b) 20 m
- (c) 32 m
- (d) 40 m
- (e) 80 m

**11 UFC** Uma partícula de massa  $m$  descreve uma trajetória retilínea, passando pelos pontos P e Q, em sequência, e parando em R, depois de passar por P e Q. Quando ela passa pelo ponto P, sua velocidade é  $v$ . Os trechos entre P e Q, de comprimento  $l_1$ , e entre Q e R, de comprimento  $l_2$ , possuem coeficientes de atrito cinético  $\mu$  e  $2\mu$ , respectivamente. Considere a aceleração da gravidade igual a  $g$ . O ponto R está a uma distância  $l$  de P. Assinale a alternativa que contém os comprimentos  $l_1$  e  $l_2$  corretos, em função de  $\mu$ ,  $l$ ,  $v$  e  $g$ .

- (a)  $l_1 = 2l - \frac{v^2}{2\mu g}$  e  $l_2 = \frac{v^2}{2\mu g} - l$
- (b)  $l_1 = \frac{3l}{2} - \frac{v^2}{2\mu g}$  e  $l_2 = \frac{v^2}{2\mu g} - \frac{l}{2}$
- (c)  $l_1 = 2l - \frac{v^2}{\mu g}$  e  $l_2 = \frac{v^2}{\mu g} - l$
- (d)  $l_1 = 2l - \frac{v^2}{3\mu g}$  e  $l_2 = \frac{v^2}{3\mu g} - l$
- (e)  $l_1 = \frac{3l}{2} - \frac{v^2}{3\mu g}$  e  $l_2 = \frac{v^2}{3\mu g} - \frac{l}{2}$

**12** Um elevador é acelerado verticalmente para cima com  $6,0$  m/s<sup>2</sup>, em um local em que  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>. Sobre o seu piso horizontal, é lançado um bloco, sendo-lhe comunicada uma velocidade inicial de 2,0 m/s em relação ao elevador.

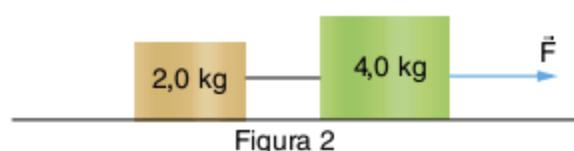
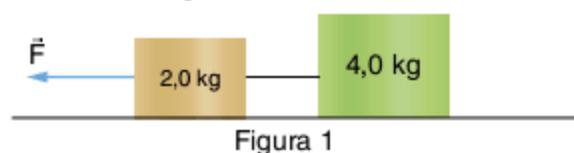


O bloco é freado pela força de atrito exercida pelo piso até parar em relação ao elevador. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre as superfícies atritantes vale 0,25, calcule, em relação ao elevador, a distância percorrida pelo bloco até parar.

**13 Fuvest** Procedimento de segurança, em autoestradas, recomenda que o motorista mantenha uma “distância” de 2 segundos do carro que está à sua frente, para que, se necessário, tenha espaço para frear (“Regra dos dois segundos”). Por essa regra, a distância  $D$  que o carro percorre, em 2 s, com velocidade constante  $V_0$ , deve ser igual à distância necessária para que o carro pare completamente após frear. Tal procedimento, porém, depende da velocidade  $V_0$  em que o carro trafega e da desaceleração máxima  $\alpha$  fornecida pelos freios.

- Determine o intervalo de tempo  $T_0$ , em segundos, necessário para que o carro pare completamente, percorrendo a distância  $D$  referida.
- Represente, graficamente, a variação da desaceleração  $\alpha$  em função da velocidade  $V_0$ , para situações em que o carro para completamente em um intervalo  $T_0$  (determinado no item anterior).
- Considerando que a desaceleração  $\alpha$  depende principalmente do coeficiente de atrito  $\mu$  entre os pneus e o asfalto, sendo 0,6 o valor de  $\mu$ , determine o valor máximo de velocidade  $V_M$ , em m/s, para o qual a “Regra dos dois segundos” permanece válida.

**14 UFPR** Dois blocos de massas iguais a 2,0 kg e 4,0 kg estão presos entre si por um fio inextensível e de massa desprezível. Como representado a seguir, o conjunto pode ser puxado de duas formas distintas sobre uma mesa, por uma força  $\vec{F}$  paralela à mesa. O coeficiente de atrito estático entre os blocos e a mesa é igual a 0,20. O fio entre os blocos pode suportar uma tração de até 10 N sem se romper.



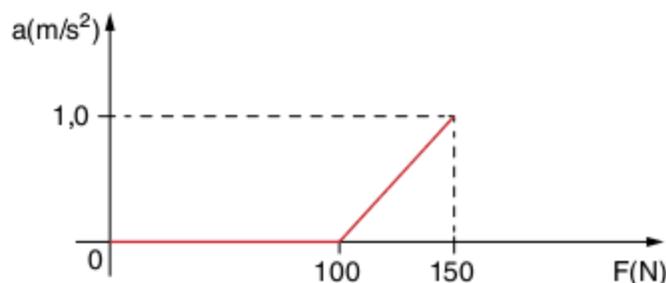
Com base nesses dados, é correto afirmar:

- se o conjunto for puxado pelo bloco de maior massa, como na figura 2, o fio que une os blocos arrebentará.
- se o conjunto for puxado pelo bloco de menor massa, como na figura 1, o fio que une os blocos arrebentará.
- o conjunto da figura 1 será acelerado se a força  $\vec{F}$  tiver módulo maior que 12 N.
- no conjunto da figura 2, as forças de atrito que atuam em cada um dos blocos têm o mesmo módulo.
- a tração no fio que une os blocos é a mesma, quer o conjunto seja puxado como na figura 1, quer como na figura 2.

**15** No arranjo experimental da figura, o homem puxa a corda para a esquerda e, com isso, consegue acelerar horizontalmente a caixa para a direita.



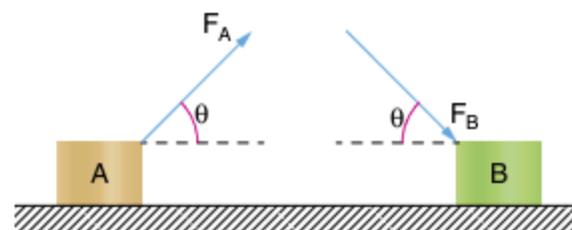
O módulo da aceleração da caixa varia com a intensidade da força que o homem aplica na corda, conforme o gráfico seguinte.



Desprezando a resistência do ar, adotando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , admitindo que o fio e a polia sejam ideais e que os coeficientes de atrito estático e dinâmico sejam iguais:

- esboce o gráfico da intensidade da força de atrito recebida pelo bloco em função da intensidade da força exercida pelo homem na corda.
- calcule a massa do bloco e o coeficiente de atrito entre ele e o plano de apoio.

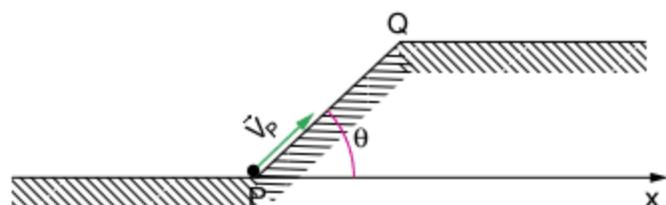
**16** Dois blocos iguais, A e B, de peso  $P$  estão sujeitos às forças  $F_A$  e  $F_B$ , respectivamente, como na figura, sendo que A é puxado e B empurrado. Os corpos se deslocam com velocidade constante.



- Se os coeficientes de atrito entre os corpos e a superfície são iguais a  $\mu$ , qual o valor de  $F_A$  e de  $F_B$ ?
- Se  $F_A = F_B = F$ , quais os valores dos coeficientes de atrito  $\mu_A$  e  $\mu_B$ ?

### Atrito no plano inclinado

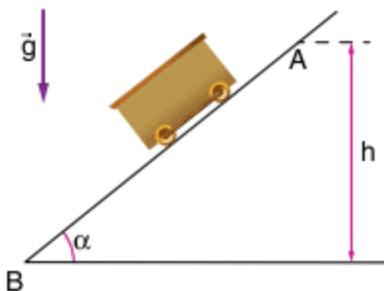
**17 ITA** A partir do nível P, com velocidade inicial de 5 m/s, um corpo sobe a superfície de um plano inclinado PQ de 0,8 m de comprimento. Sabe-se que o coeficiente de atrito cinético entre o plano e o corpo é igual a  $\frac{1}{3}$ . Considere a aceleração da gravidade  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ,  $\text{sen } \theta = 0,8$ ,  $\text{cos } \theta = 0,6$  e que o ar não oferece resistência.



O tempo mínimo de percurso do corpo para que se torne nulo o componente vertical de sua velocidade é:

- 0,20 s
- 0,24 s
- 0,40 s
- 0,44 s
- 0,48 s

**18 Fuvest** Um bloco de massa  $m$ , montado sobre rodas (para tornar o atrito desprezível), parte do repouso em A e leva o tempo  $t_0$  para atingir B. A massa das rodas é desprezível. Retirando-se as rodas, verifica-se que o bloco, partindo do repouso em A, leva um tempo  $2t_0$  para atingir B.

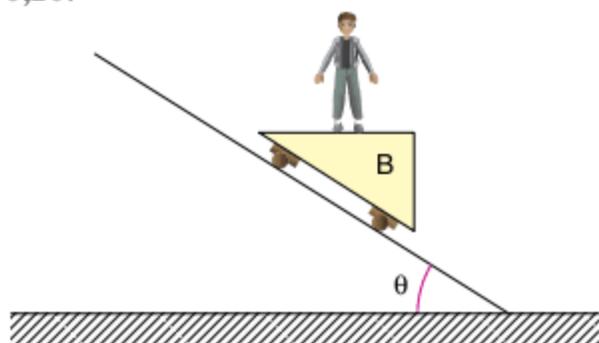


- Determinar o valor de  $t_0$ .
- Determinar o valor do coeficiente de atrito entre o plano e o bloco (sem rodas), em função de  $\alpha$ .

**19 ITA** Dois blocos de massas  $m_1 = 3,0 \text{ kg}$  e  $m_2 = 5,0 \text{ kg}$  deslizam sobre um plano, inclinado  $60^\circ$  com relação à horizontal, encostados um no outro, com o bloco 1 acima do bloco 2. Os coeficientes de atrito cinético entre o plano inclinado e os blocos são  $\mu_{1C} = 0,4$  e  $\mu_{2C} = 0,6$ , respectivamente, para os blocos 1 e 2. Considerando a aceleração da gravidade  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , a aceleração  $a_1$  do bloco 1 e a força  $F_{12}$  que o bloco 1 exerce sobre o bloco 2 são, respectivamente:

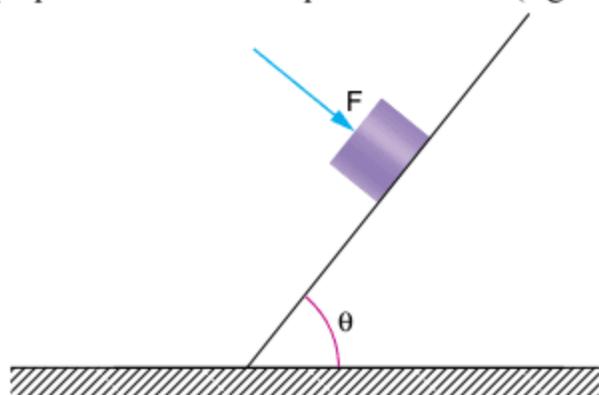
- |   |                                       |
|---|---------------------------------------|
| (a) $6,0 \text{ m/s}^2; 2,0 \text{ N}$  | (d) $8,5 \text{ m/s}^2; 26 \text{ N}$ |
| (b) $0,46 \text{ m/s}^2; 3,2 \text{ N}$ | (e) $8,5 \text{ m/s}^2; 42 \text{ N}$ |
| (c) $1,1 \text{ m/s}^2; 17 \text{ N}$   |                                       |

**20** Um indivíduo de massa  $m = 50 \text{ kg}$  está sobre uma balança de molas, a qual está fixa em um carrinho B que desce por uma rampa sem atrito, como mostra a figura. São dados:  $g = 10 \text{ m/s}^2$  e  $\sin \theta = 0,20$ .



Determine a marcação da balança, supondo que seu mostrador esteja calibrado em newtons.

**21 UFMS** Um bloco de peso ( $W$ ) é mantido em equilíbrio estático quando submetido à ação de uma força de intensidade ( $F$ ), aplicada perpendicularmente ao plano inclinado (figura a seguir).

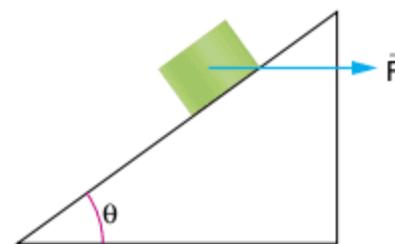


Seja ( $\mu_e$ ) o coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano inclinado. É correto afirmar que:

- $F = W \cdot \sin \theta$ .
- $\mu_e = \sin \theta$ .
- $\mu_e = \tan \theta$ .
- a intensidade da força exercida pelo plano sobre o bloco na direção de ( $F$ ) pode ser dada por  $\frac{W \cdot \sin \theta}{\mu_e}$ .
- a intensidade da força exercida pelo plano sobre o bloco na direção de ( $F$ ) pode ser dada por  $(F + W \cdot \cos \theta)$ .

Soma =

**22 UFG** Aplica-se uma força horizontal  $\vec{F}$  sobre um bloco de peso  $\vec{P}$  que está em repouso sobre um plano que faz um ângulo  $\theta \leq 90^\circ$  com a horizontal, conforme figura a seguir.

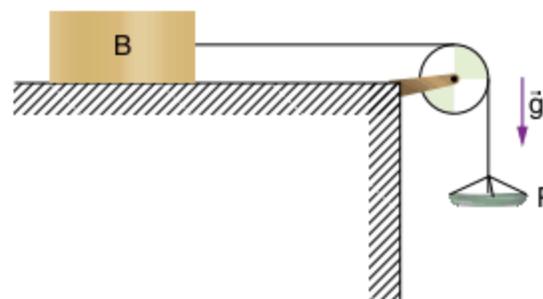


O coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano é  $\mu$ . Nessa situação, pode-se afirmar que:

- a força de atrito será nula quando  $F \cdot \sin \theta = P \cdot \cos \theta$ .
- o bloco não se move para cima a partir de um determinado  $\theta < 90^\circ$ .
- a força normal será nula para  $\theta = 90^\circ$ .
- a força de atrito será igual a  $F \cdot \cos \theta + P \cdot \sin \theta$  na iminência de deslizamento.
- o bloco poderá deslizar para baixo desde que  $\mu > \tan \theta$ .

### Polias e força de atrito

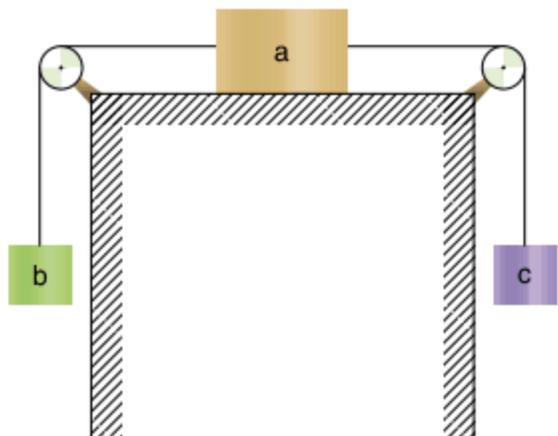
**23** Na situação da figura, o bloco B e o prato P pesam, respectivamente,  $80 \text{ N}$  e  $1,0 \text{ N}$ . O coeficiente de atrito estático entre B e o plano horizontal de apoio vale  $0,10$  e desprezam-se os pesos dos fios e o atrito no eixo da polia. No local,  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



Dispõem-se de 20 bloquinhos iguais, de  $100 \text{ g}$  de massa cada um, que podem ser colocados sobre o prato P.

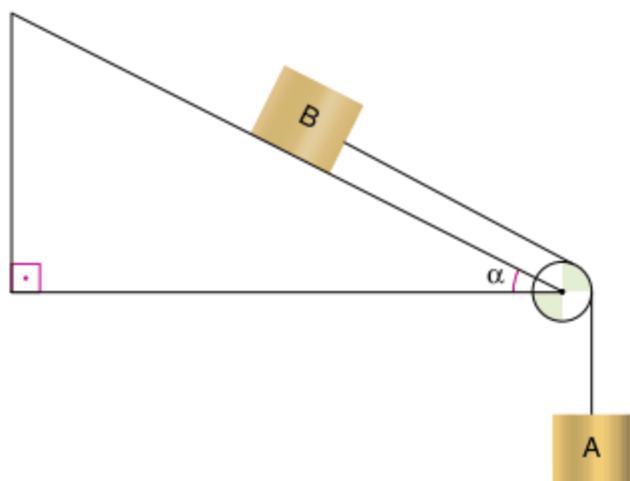
- Colocando dois bloquinhos sobre P, qual a intensidade da força de atrito exercida em B?
- Qual o número de bloquinhos que deve ser colocado sobre P para que B fique na iminência de se movimentar?

**24 FEI** No sistema a seguir, sabe-se que a massa do corpo "b" é  $m_B = 20 \text{ kg}$ , a massa do corpo "a" é  $m_A = 25 \text{ kg}$  e o coeficiente de atrito entre o corpo "a" e a mesa é  $0,20$ . Os fios são inextensíveis e o atrito e a inércia das roldanas desprezíveis.



- a) Qual deve ser o valor mínimo da massa do corpo "c" ( $m_c$ ) para que o sistema se mantenha em equilíbrio?  
 b) E qual o valor máximo?  
 c) Se  $m_c = 30$  kg, qual a aceleração do sistema?

**25 Mackenzie** A ilustração a seguir refere-se a uma certa tarefa na qual o bloco B, dez vezes mais pesado que o bloco A, deverá descer pelo plano inclinado com velocidade constante.



Considerando que o fio e a polia são ideais, o coeficiente de atrito cinético entre o bloco B e o plano deverá ser:

Dados:  $\sin \alpha = 0,6$ ;  $\cos \alpha = 0,8$ .

- (a) 0,500                      (c) 0,875                      (e) 1,50  
 (b) 0,750                      (d) 1,33

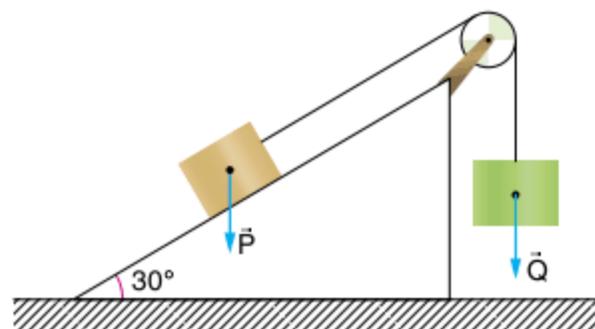
**26 UFF** Um pano de prato retangular, com 60 cm de comprimento e constituição homogênea, está em repouso sobre uma mesa, parte sobre sua superfície, horizontal e fina, e parte pendente, como mostra a figura a seguir.



Sabendo-se que o coeficiente de atrito estático entre a superfície da mesa e o pano é igual a 0,5 e que o pano está na iminência de deslizar, pode-se afirmar que o comprimento  $l$  da parte sobre a mesa é:

- (a) 40 cm                      (c) 15 cm                      (e) 30 cm  
 (b) 20 cm                      (d) 60 cm

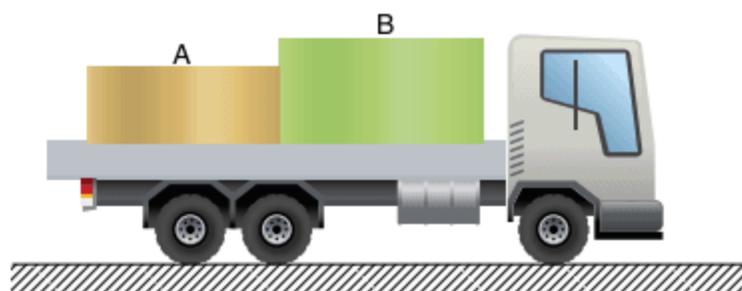
**27 EEM-SP** Um corpo de peso  $P = 50$  N está apoiado num plano inclinado  $30^\circ$  com a horizontal. O coeficiente de atrito estático entre o corpo e o plano é  $\mu = 0,2$ . Um segundo corpo de peso  $Q$  está preso ao primeiro por meio de um fio que passa por uma polia sem atrito. Considere  $\cos 30^\circ = 0,87$ .



- a) Entre que limites pode variar o peso  $Q$  de forma que o sistema permaneça em repouso?  
 b) Para que valor de  $Q$  a força de atrito entre o corpo e o plano inclinado é nula?

### Corpos sobrepostos e força de atrito

**28 UFSC** Um caminhão trafega num trecho reto de uma rodovia, transportando sobre a carroceria duas caixas, A e B, de massas  $m_A = 600$  kg e  $m_B = 1.000$  kg, dispostas conforme a figura. Os coeficientes de atrito estático e de atrito dinâmico entre as superfícies da carroceria e das caixas são, respectivamente, 0,80 e 0,50. O velocímetro indica 90 km/h quando o motorista, observando perigo na pista, pisa no freio. O caminhão se imobiliza após percorrer 62,5 metros.

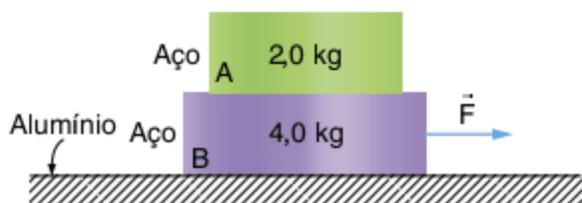


Assinale a(s) proposição(ões) correta(s):

- 01 O caminhão é submetido a uma desaceleração de módulo igual a  $5,0 \text{ m/s}^2$ .  
 02 O caminhão para, mas a inércia das caixas faz com que elas continuem em movimento, colidindo com a cabina do motorista.  
 04 Somente a caixa B escorrega sobre a carroceria, porque, além da desaceleração do caminhão, a caixa A exerce uma força sobre ela igual a 3.000 N.  
 08 A caixa A não escorrega e, assim, a força que ela exerce sobre a caixa B é nula.  
 16 As duas caixas não escorregam, permanecendo em repouso com relação à carroceria do caminhão.  
 32 As caixas escorregariam sobre a superfície da carroceria se o módulo da desaceleração do caminhão fosse maior do que  $8,0 \text{ m/s}^2$ .  
 64 A caixa A não escorrega, porque a inércia da caixa B a impede.

Soma =

**29** Na figura seguinte, os blocos A e B são de aço e a superfície horizontal sobre a qual se apoia o bloco B é de alumínio:

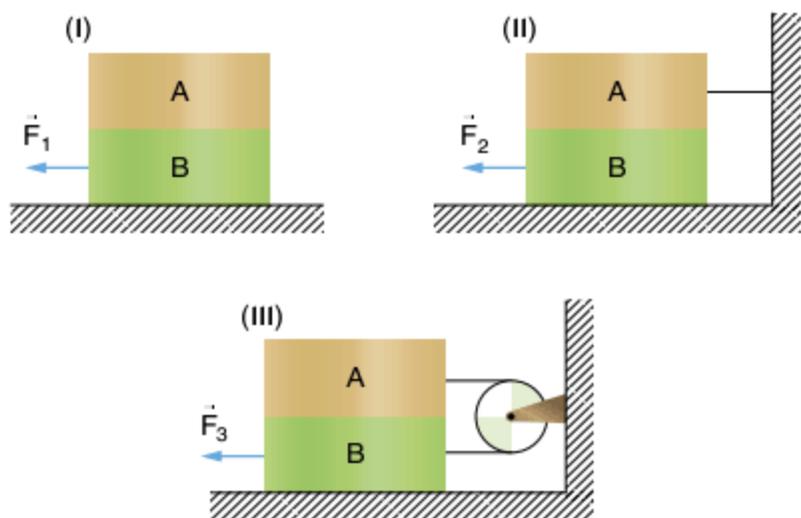


Recorrendo-se a uma tabela, foram encontrados os seguintes dados:

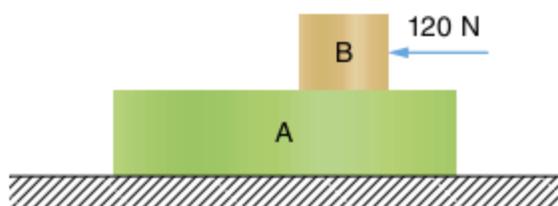
Materiais atritantes	Coefficiente de atrito estático	Coefficiente de atrito dinâmico
Aço com aço	0,74	0,57
Aço com alumínio	0,61	0,47

Sendo  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , determine qual a máxima intensidade de  $F$  (horizontal), tal que o bloco A não escorregue em relação a B.

**30** **ITA** Os blocos A e B da figura têm massa  $m$ . O coeficiente de atrito entre todas as superfícies é  $\mu$ . A força  $F_1$  imprime ao bloco B da figura (I) velocidade uniforme. Calcule as relações  $\frac{F_2}{F_1}$  e  $\frac{F_3}{F_1}$ , onde  $F_2$  é a força indicada na figura (II) e  $F_3$  é indicada na figura (III), para que o bloco B, nessas figuras, tenha velocidade constante.



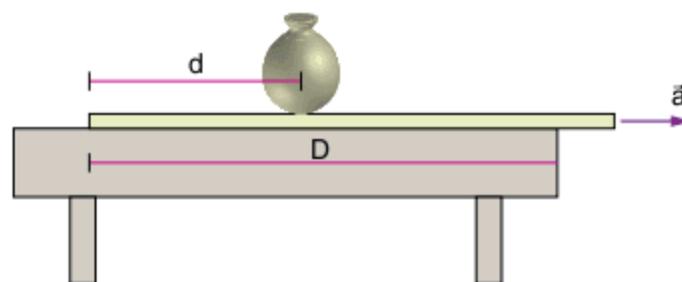
**31** **UFPR** Um bloco B, com massa de 20 kg, está apoiado sobre uma placa A, de massa igual a 60 kg, que repousa sobre uma superfície lisa, sem atrito. Os valores dos coeficientes de atrito estático e cinético entre o bloco e a placa são, respectivamente, 0,4 e 0,3.



Calcule, em  $\text{m/s}^2$ , a aceleração do bloco, ao ser aplicada a ele uma força horizontal de 120 N.

Dado:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

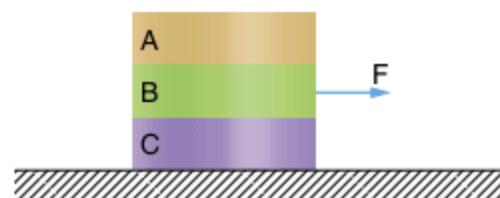
**32** **ITA** Um antigo vaso chinês está a uma distância  $d$  da extremidade de um forro sobre uma mesa. Essa extremidade, por sua vez, encontra-se a uma distância  $D$  de uma das bordas da mesa, como mostrado na figura. Inicialmente, tudo está em repouso. Você apostou que consegue puxar o forro com uma aceleração constante  $a$  (veja a figura), de tal forma que o vaso não caia da mesa. Considere que ambos os coeficientes de atrito, estático e cinético, entre o vaso e o forro tenham o valor  $\mu$  e que o vaso pare no momento em que toca na mesa.



Você ganhará a aposta se a magnitude da aceleração estiver dentro da faixa:

- (a)  $a < \left(\frac{d}{D}\right) \cdot \mu g$       (c)  $a > \mu g$       (e)  $a > \left(\frac{D}{D-d}\right) \cdot \mu g$   
 (b)  $a > \left(\frac{d}{D}\right) \cdot \mu g$       (d)  $a > \left(\frac{D}{d}\right) \cdot \mu g$

**33** **Cesgranrio** Três blocos, A, B e C, de mesmo peso  $P$ , estão empilhados sobre um plano horizontal. O coeficiente de atrito entre esses blocos e entre o bloco C e o plano vale 0,5. Uma força horizontal  $F$  é aplicada ao bloco B, conforme indica a figura.

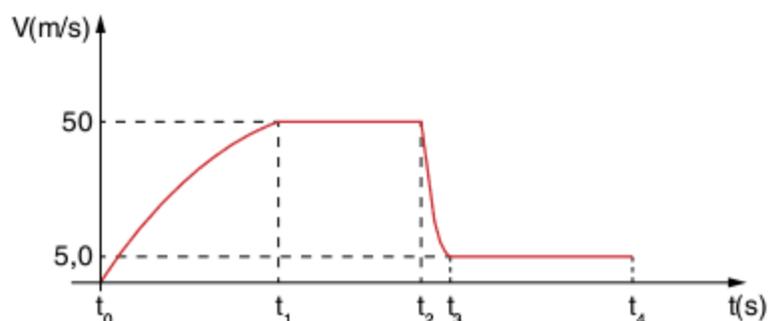


O maior valor que  $F$  pode adquirir, sem que o sistema ou parte dele se mova, é:

- (a)  $\frac{P}{2}$       (b)  $P$       (c)  $\frac{3P}{2}$       (d)  $2P$       (e)  $3P$

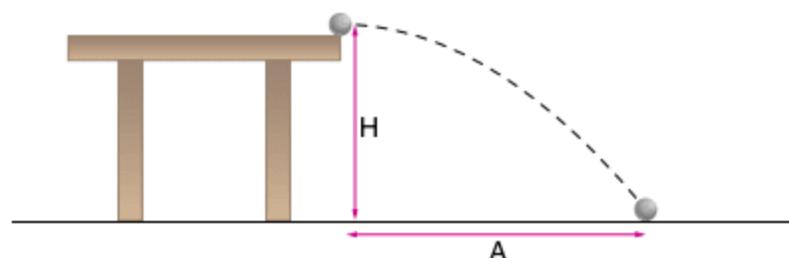
**Resistência do ar**

**34** **UFF (Adapt.)** O paraquedas é um aparelho que se destina a diminuir a velocidade de queda de um corpo. Sua utilização data de fins do século XVIII, passando a servir para suavizar a queda de cargas e homens em locais estratégicos. O gráfico a seguir representa a componente vertical da velocidade, em função do tempo, de uma carga acoplada a um paraquedas e abandonada, no instante  $t_0 = 0$ , de um avião em pleno ar.



Sabendo que o conjunto cai submetido apenas à força peso e à de resistência do ar e que  $t_2$  é o instante em que o paraquedas se abre, relacione a intensidade da força de resistência do ar ( $F_r$ ) à da força peso ( $P$ ), nos trechos do percurso compreendidos entre os instantes  $t_0$  e  $t_1$ ,  $t_1$  e  $t_2$ ,  $t_2$  e  $t_3$ ,  $t_3$  e  $t_4$ , utilizando os sinais de maior ( $>$ ), menor ( $<$ ) e igual ( $=$ ).

**35 UFMS** Uma bola de bilhar de massa  $m$  é lançada horizontalmente com velocidade  $V_0$  da borda de uma mesa que está a uma altura  $H$  do solo também horizontal. A aceleração da gravidade no local é  $g$  e uniforme, veja a figura.



Considerando que o ar exerce uma força  $\vec{F}_a$  de arrasto na bola dada pelo formalismo vetorial  $\vec{F}_a = -b\vec{V}$ , onde  $b$  é uma constante de proporcionalidade e  $\vec{V}$  é o vetor velocidade da bola vista de um referencial inercial, assinale a(s) proposição(ões) correta(s).

- 01 A trajetória da bola não será uma parábola.
- 02 A componente da velocidade da bola na direção horizontal permanece constante durante a queda.
- 04 A força de arrasto é sempre vertical para cima.
- 08 O alcance  $A$  na horizontal é igual a  $V_0 \left( \frac{2H}{g} \right)^{\frac{1}{2}}$ .
- 16 A intensidade do vetor aceleração da bola vai diminuindo durante a queda.

Soma =

### Dinâmica do movimento circular

**36 Cesgranrio** Um automóvel percorre uma pista circular horizontal com movimento uniforme. Cinco forças são identificadas:

- $\vec{P}$ : peso do carro.
- $\vec{N}$ : soma das componentes verticais de todas as forças exercidas sobre o carro com exceção do peso.
- $\vec{f}_t$ : soma das componentes tangenciais das forças exercidas pela estrada sobre as rodas motoras.
- $\vec{f}_r$ : soma das componentes tangenciais de todas as forças de atrito resistente (i.e., que se opõem ao movimento do carro).
- $\vec{F}$ : soma de todas as componentes normais à trajetória, no plano da estrada, de todas as forças exercidas sobre o carro.

Já que o movimento do carro é circular uniforme, devemos ter:

(a)	$\vec{f}_t = \vec{f}_r = \vec{0}$	$\vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$	$\vec{F} \neq \vec{0}$
(b)	$ \vec{f}_t  >  \vec{f}_r $	$\vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$	$\vec{F} \neq \vec{0}$
(c)	$\vec{f}_t + \vec{f}_r = \vec{0}$	$ \vec{f}_t  >  \vec{f}_r $	$\vec{F} = \vec{0}$
(d)	$\vec{f}_t + \vec{f}_r = \vec{0}$	$\vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$	$\vec{F} \neq \vec{0}$
(e)	$\vec{f}_t = \vec{f}_r = \vec{0}$	$\vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$	$\vec{F} = \vec{0}$

**37 UnB** Uma esfera de ferro é fixada por uma mola em uma plataforma giratória, como mostra a figura adiante. Dois observadores, um na plataforma e outro fixo ao solo, em repouso, observam o movimento da esfera, que, quando está a meio caminho entre o eixo de rotação e a borda da plataforma circular, causa uma distensão de 5 cm na mola.



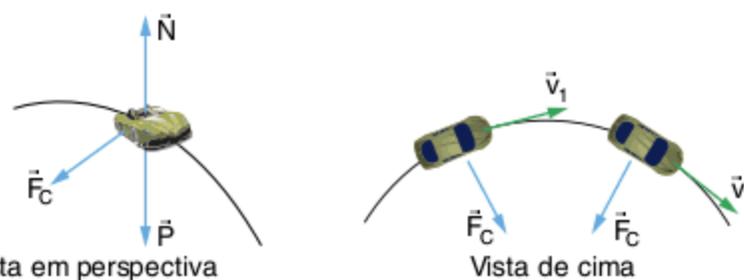
Julgue os itens que se seguem, relativos à situação apresentada.

- 0 Para o observador situado sobre a plataforma girante, é a força centrífuga que distende a mola.
- 1 Para o observador em repouso, no solo, é a força centrípeta aplicada pela mola distendida que mantém a esfera em movimento circular, junto com a plataforma girante.
- 2 A esfera terá a sua velocidade linear reduzida pela metade, quando a distensão da mola for de 10 cm.
- 3 Se for liberada da mola, a esfera escapará da plataforma e o observador em repouso, no solo, verá que ela descreve um movimento circular, até atingir o repouso.

**38 UFSC** Ao fazermos uma curva, sentimos o efeito da força centrífuga, a força que nos "joga" para fora da curva e exige um certo esforço para não deixar o veículo sair da trajetória. Quanto maior a velocidade, mais sentimos essa força. Ela pode chegar ao ponto de tirar o veículo de controle, provocando um capotamento ou a travessia na pista, com colisão com outros veículos ou atropelamento de pedestres e ciclistas.

Denatran. Direção defensiva. [Apostila], maio, 2005. p. 31. Disponível em: <www.denatran.sc.gov.br>.

A citação apresenta um erro conceitual bastante frequente. Suponha o movimento descrito analisado em relação a um referencial inercial, conforme a figura a seguir.



Em relação ao exposto, assinale a(s) proposição(ões) correta(s).

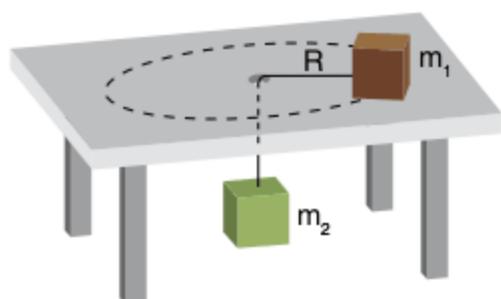
- 01 Um veículo de massa  $m$  percorre uma determinada curva de raio  $R$  sem derrapar, com velocidade máxima de módulo constante  $v$ . Um segundo veículo com pneus idênticos ao primeiro, com massa quatro vezes maior ( $4m$ ), deverá percorrer a mesma curva sem derrapar, com uma velocidade máxima constante de módulo duas vezes menor  $\left( \frac{v}{2} \right)$ .
- 02 Um veículo descrevendo uma curva em uma estrada plana certamente estará sob ação de uma força centrífuga, se opondo à força de atrito entre os pneus e o chão. Se o atrito deixar de atuar, o veículo será lançado radialmente para fora da curva em virtude dessa força centrífuga.

- 04 Como o veículo está em equilíbrio, atuam a força centrípeta (para “dentro” da trajetória) e a força centrífuga (para “fora” da trajetória), com o mesmo módulo, a mesma direção e sentidos contrários. Essas forças constituem um par ação e reação, segundo a 3ª Lei de Newton.
- 08 Se o veículo percorrer uma curva, executando uma trajetória circular, com o módulo da velocidade constante, estará sujeito a uma aceleração. Pela 2ª Lei de Newton, essa aceleração é provocada pela resultante das forças que atuam sobre o veículo. Como a força normal e o peso se anulam, a força resultante é a força centrípeta que se origina do atrito entre os pneus e o chão.
- 16 Força é o resultado da interação entre dois ou mais corpos. Pela 3ª Lei de Newton: “se dois corpos A e B interagem, a força que A faz sobre B tem o mesmo módulo, a mesma direção e sentido contrário à força que B faz sobre A”. Logo, não há força centrífuga atuando sobre o veículo, pois se o veículo (corpo A) é jogado para fora da curva, ele deveria ser atraído por outro corpo, que naturalmente não existe.

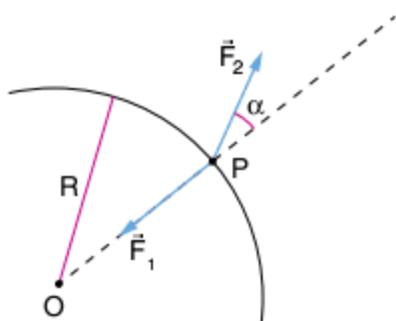
Soma =

### Dinâmica do movimento circular no plano horizontal

- 39 Um pequeno bloco de massa  $m_1$  gira sobre uma mesa horizontal sem atrito. Esse bloco está ligado a outro, de massa  $m_2$ , através de um fio que passa por um orifício existente na mesa. O bloco de massa  $m_1$  descreve um movimento circular uniforme de raio  $R = 0,50$  m e velocidade  $v = 5,0$  m/s, e o bloco de massa  $m_2$  permanece em repouso. Determine a relação  $\frac{m_2}{m_1}$ .



- 40 **UFC** Uma partícula P, de massa  $m$ , descreve um movimento circular de raio  $R$ , centrado no ponto O, sob a ação das forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , conforme figura a seguir.



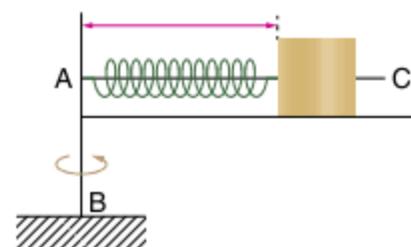
Das equações de movimento apresentadas nas alternativas a seguir, assinale a correta para este sistema.

Considere:  $a_t$  a aceleração tangencial da partícula P;  $v_p$  a velocidade tangencial da partícula P.

- (a)  $F_2 \cos \alpha = ma_t$
- (b)  $F_1 + F_2 = m \left( \frac{v_p^2}{R} \right)$

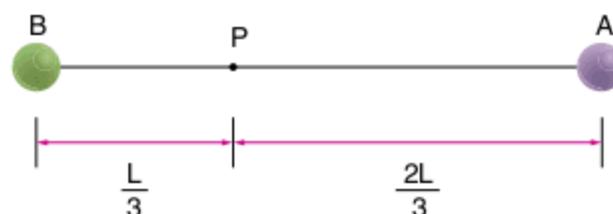
- (c)  $F_1 - F_2 \cos \alpha = m \left( \frac{v_p^2}{R} \right)$
- (d)  $F_1 - F_2 = m \left( \frac{v_p^2}{R} \right)$
- (e)  $F_1 = m \left( \frac{v_p^2}{R} \right)$

- 41 Um corpo de 1 kg, preso a uma mola ideal, pode deslizar sem atrito sobre a haste AC, solidária à haste AB. A mola tem constante elástica igual a 500 N/m e o seu comprimento sem deformação é de 40 cm.



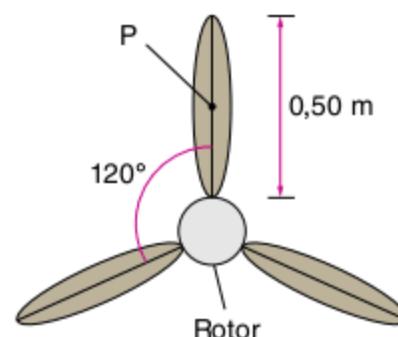
Determine a deformação da mola, sabendo que o corpo gira com velocidade linear de 5 m/s.

- 42 **Fuvest** Dois pequenos corpos, A e B, de massas iguais a  $M$  estão presos às extremidades de uma barra rígida, de massa desprezível e de comprimento  $L$ . O sistema gira livremente sobre um plano horizontal em torno de um pino P fixo no plano, como mostra a figura a seguir. Despreze qualquer atrito. O sistema é posto em rotação, sendo  $V_A$  o módulo da velocidade do corpo A.



- a) Qual o módulo  $V_B$  da velocidade do corpo B?
- b) Qual o valor da razão entre os módulos das forças resultantes que agem nos corpos A e B, respectivamente?
- c) Determine, em função dos dados do problema, o valor do módulo  $F_p$  da força que o pino P exerce sobre a barra.

- 43 **Fuvest** Um ventilador de teto, com eixo vertical, é constituído por três pás iguais e rígidas, encaixadas em um rotor de raio  $R = 0,10$  m, formando ângulos de  $120^\circ$  entre si. Cada pá tem massa  $M = 0,20$  kg e comprimento  $L = 0,50$  m. No centro de uma das pás foi fixado um prego P, com massa  $m_p = 0,020$  kg, que desequilibra o ventilador, principalmente quando este se movimenta.



Suponha, então, o ventilador girando com uma velocidade de 60 rotações por minuto e determine:

Se necessário, utilize  $\pi \approx 3$ .

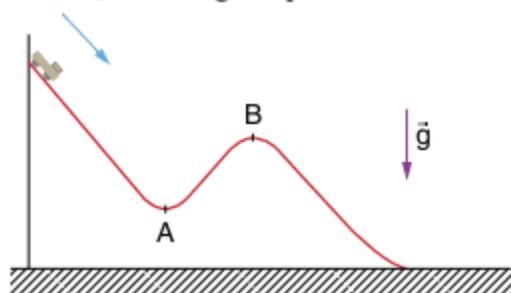
- a intensidade da força radial horizontal  $F$ , em newtons, exercida pelo prego sobre o rotor.
- a massa  $M_0$ , em kg, de um pequeno contrapeso que deve ser colocado em um ponto  $D_0$ , sobre a borda do rotor, para que a resultante das forças horizontais, agindo sobre o rotor, seja nula.
- a posição do ponto  $D_0$ , localizando-a na figura apresentada.

### Dinâmica do movimento circular no plano vertical

**44 Utam** Um garoto de peso  $P$  está sentado numa cadeira de roda-gigante de raio  $R$ , que dá uma volta completa a cada  $T$  segundos. A força que o assento da cadeira exerce sobre o garoto, quando passa pela altura máxima, é:

- $P \left( 1 + \frac{4\pi^2 R^2}{gT^2} \right)$
- $P \left( 1 - \frac{4\pi^2 R^2}{gT^2} \right)$
- $P \left( 1 - \frac{2\pi}{gTR} \right)$
- $P \left( 1 + \frac{4\pi^2 R^2}{gT^2} \right)$
- $P \left( 1 - \frac{4\pi^2 R^2}{gT^2} \right)$

**45 Fuvest** Um carrinho é largado do alto de uma montanha-russa, conforme a figura. Ele se movimenta, sem atrito e sem saltar-se dos trilhos, até atingir o plano horizontal.



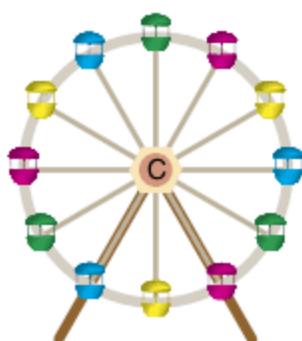
Sabe-se que os raios de curvatura da pista em A e B são iguais. Considere as seguintes afirmações.

- No ponto A, a resultante das forças que agem sobre o carrinho é dirigida para baixo.
- A intensidade da força centrípeta que age sobre o carrinho é maior em A do que em B.
- No ponto B, o peso do carrinho é maior do que a intensidade da força normal que o trilho exerce sobre ele.

Está correto apenas o que se afirma em:

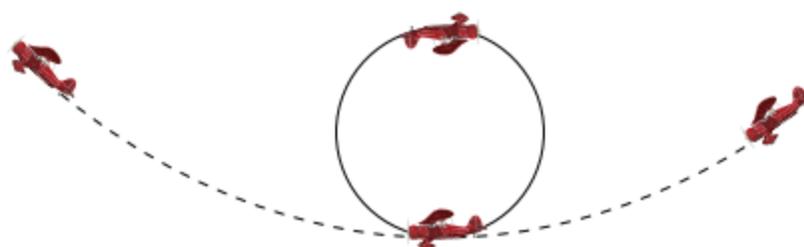
- I.
- II.
- III.
- I e II.
- II e III.

**46 UFRJ** A figura representa uma roda-gigante que gira com velocidade angular constante em torno do eixo horizontal fixo que passa por seu centro C.



Numa das cadeiras, há um passageiro de 60 kg de massa sentado sobre uma balança de mola (dinamômetro), cuja indicação varia de acordo com a posição do passageiro. No ponto mais alto da trajetória, o dinamômetro indica 234 N e, no ponto mais baixo, indica 954 N. Considere a variação do comprimento da mola desprezível quando comparada ao raio da roda. Calcule o valor da aceleração local da gravidade.

**47 UFSC** Um piloto executa um *looping* com seu avião – manobra acrobática em que a aeronave descreve um arco de circunferência no plano vertical –, que atinge, no ponto mais baixo da trajetória, ao completar a manobra, a velocidade máxima de 540 km/h. O raio da trajetória é igual a 450 m e a massa do piloto é 70 kg. Nessas manobras acrobáticas, deve-se considerar que a maior aceleração que o organismo humano pode suportar é 9g ( $g$  = aceleração da gravidade).



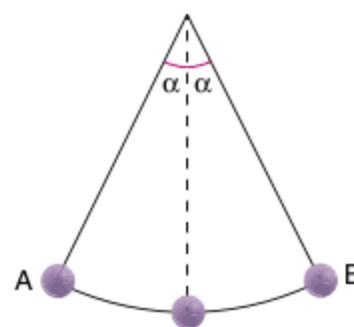
Com base nos dados fornecidos, assinale a(s) proposição(ões) correta(s).

- Se o raio de trajetória fosse menor do que 250 m, o piloto seria submetido a uma aceleração centrípeta máxima maior do que 9g (nove vezes a aceleração da gravidade).
- A força centrípeta sobre o piloto, na parte mais baixa da trajetória, é cinco vezes maior do que o seu peso.
- O piloto é submetido a uma aceleração centrípeta máxima igual a 5g (cinco vezes a aceleração da gravidade).
- A velocidade mínima para que o avião complete a volta, no topo da trajetória, é igual a 270 km/h.
- A força que o avião faz sobre o piloto, na parte mais baixa da trajetória, é igual a 4.200 N.
- A força que o piloto faz sobre o avião é igual ao seu peso, em toda a trajetória.
- O piloto é submetido a uma aceleração centrípeta máxima no topo da trajetória, quando a força de sustentação do avião é mínima.

Soma =

### Dinâmica do movimento circular em pêndulo simples

**48 Cesgranrio** Um pêndulo, constituído por um fio ideal e uma esfera de peso  $P$ , oscila entre duas posições extremas A e B, conforme ilustra a figura.

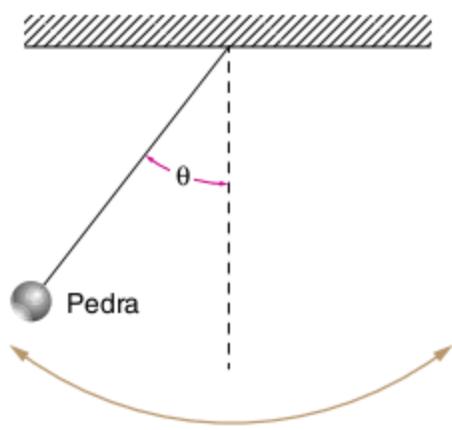


Nessas extremidades, a relação correta entre os módulos do peso e da tração (T) no fio é:

- (a)  $T = P \cdot \sin \alpha$                       (d)  $P = T \cdot \cos \alpha$   
 (b)  $T = P \cdot \cos \alpha$                       (e)  $P = T \cdot \tan \alpha$   
 (c)  $T = P \cdot \tan \alpha$

**49 UFGM** Uma pedra é amarrada em um cordão de 40 cm de comprimento e posta a girar em um plano vertical. Qual o módulo da velocidade mínima da pedra, no ponto mais alto da trajetória, para que ela possa descrever uma trajetória circular? Dado:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

**50 IME 2011** Uma pedra está presa a um fio e oscila da maneira mostrada na figura a seguir.



Chamando T a tração no fio e  $\theta$  o ângulo entre o fio e a vertical, considere as seguintes afirmativas.

- I. O módulo da força resultante que atua na pedra é igual a  $T \cdot \sin \theta$ .  
 II. O módulo da componente, na direção do movimento, da força resultante que atua na pedra é máximo quando a pedra atinge a altura máxima.  
 III. A componente, na direção do fio, da força resultante que atua na pedra é nula no ponto em que a pedra atinge a altura máxima.

Está(ão) correta(s) a(s) afirmativa(s):

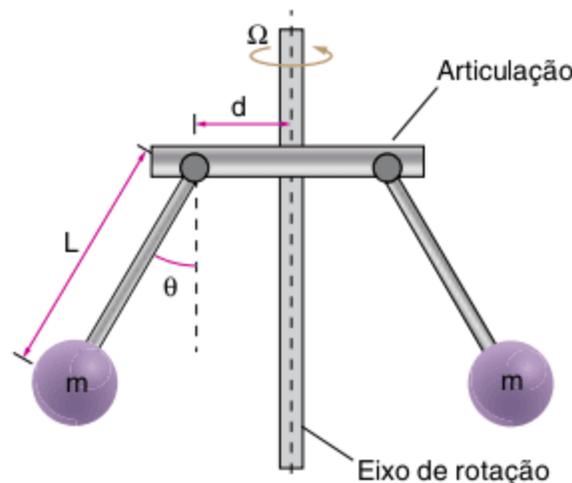
- (a) I e II, apenas.                      (d) I, II e III.  
 (b) I e III, apenas.                      (e) II, apenas.  
 (c) II e III, apenas.

**51 IME** Um vagão de trem desloca-se horizontalmente com aceleração a, sendo g a aceleração da gravidade no local. Em seu interior, preso no teto, encontra-se um fio ideal de comprimento L, que sustenta uma massa m puntiforme. Em um determinado instante, o vagão passa a se deslocar com velocidade constante, mantendo a direção e o sentido anteriores. Nesse momento, a aceleração angular  $\alpha$  da massa m em relação ao ponto do vagão em que o fio foi preso é:

- (a)  $\alpha = \frac{g}{L} \sin \left[ \arctan \frac{a}{g} \right]$                       (d)  $\alpha = \frac{a}{L}$   
 (b)  $\alpha = \frac{g}{L} \cos \left[ \arctan \frac{a}{g} \right]$                       (e)  $\alpha = 0$   
 (c)  $\alpha = \frac{L}{g} \cos \left[ \arctan \frac{a}{g} \right]$

### Dinâmica do movimento circular em pêndulo cônico e sistemas assemelhados

**52 Unicamp** As máquinas a vapor, que foram importantíssimas na Revolução Industrial, costumavam ter um engenhoso regulador da sua velocidade de rotação, como é mostrado esquematicamente na figura a seguir. As duas massas afastavam-se do eixo devido ao movimento angular e acionavam um dispositivo regulador da entrada de vapor, controlando assim a velocidade de rotação, sempre que o ângulo  $\theta$  atingia  $30^\circ$ . Considere hastes de massa desprezível e comprimento  $L = 0,2 \text{ m}$ , com massas  $m = 0,18 \text{ kg}$  em suas pontas,  $d = 0,1 \text{ m}$  e aproxime  $\sqrt{3} \approx 1,8$ .



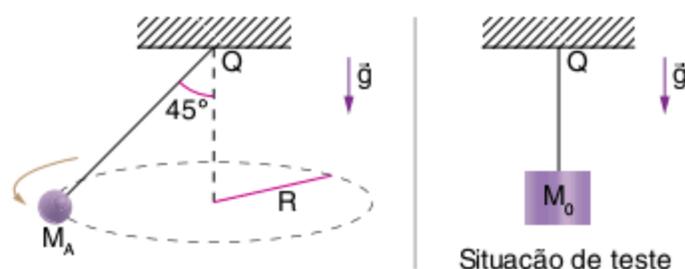
- a) Faça um diagrama indicando as forças que atuam sobre uma das massas m.  
 b) Calcule a velocidade angular  $\Omega$  para a qual  $\theta = 30^\circ$ .

**53 Puccamp** O raio de curva ferroviária é de 400 metros e um trem deve percorrê-la com a velocidade de 72 km/h. De quanto deve estar elevado o trilho externo para reduzir a um mínimo a força para fora sobre ele? A distância entre os trilhos é de 1,2 metros.

Dado:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

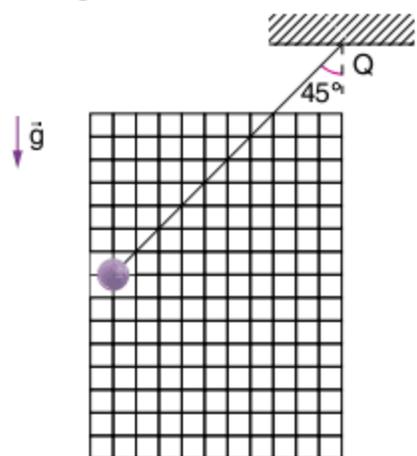
- (a) 0,20 m                      (c) 0,15 m                      (e) 0,10 m  
 (b) 0,12 m                      (d) 0,18 m

**54 Fuvest** Um acrobata, de massa  $M_A = 60 \text{ kg}$ , quer realizar uma apresentação em que, segurando uma corda suspensa em um ponto Q fixo, pretende descrever um círculo de raio  $R = 4,9 \text{ m}$ , de tal forma que a corda mantenha um ângulo de  $45^\circ$  com a vertical. Visando garantir sua total segurança, há uma recomendação de que essa corda deve ser capaz de suportar uma tensão de, no mínimo, três vezes o valor da tensão a que é submetida durante a apresentação. Para testar a corda, com ela parada e na vertical, é pendurado em sua extremidade um bloco de massa  $M_0$ , calculada de tal forma que a tensão na corda atenda às condições mínimas estabelecidas pela recomendação de segurança.



Nessa situação:

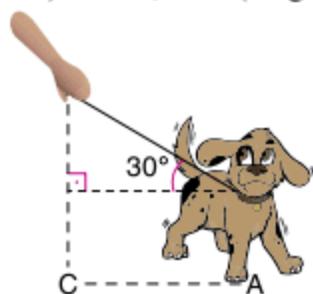
- a) represente, no esquema a seguir, a direção e o sentido das forças que agem sobre o acrobata, durante sua apresentação, identificando-as, por meio de um desenho em escala.



- b) estime o tempo  $t_A$ , em segundos, que o acrobata leva para dar uma volta completa em sua órbita circular.  
 c) estime o valor da massa  $M_0$ , em kg, que deve ser utilizada para realizar o teste de segurança.

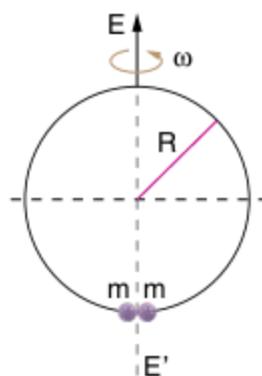
Adote  $\pi \cong 3$ .

- 55 ITA** O cachorrinho da figura tem massa 10 kg e move-se num terreno horizontal numa trajetória de raio de curvatura 1,0 m. Num dado instante, sua velocidade é de 0,36 km/h e ele exerce contra o solo forças de 0,10 N (dirigida de A para o centro de curvatura C) e de 0,05 N (tangencial).



Sabendo-se que a mão do dono está na vertical erguida do centro de curvatura, calcule a tensão na guia e a aceleração tangencial do cachorrinho.

- 56 ITA** Um aro metálico circular e duas esferas são acoplados conforme ilustra a figura a seguir. As esferas dispõem de um furo diametral que lhes permite circular pelo aro sem atrito. O aro começa a girar, a partir do repouso, em torno do diâmetro vertical  $EE'$ , que passa entre as esferas, até atingir uma velocidade angular constante  $\omega$ .



Sendo R o raio do aro, m a massa de cada esfera e desprezando-se os atritos, pode-se confirmar que:

- (a) as esferas permanecem na parte inferior do aro, porque esta é a posição de mínima energia potencial.

- (b) as esferas permanecem a distâncias r de  $EE'$ , tal que, se  $2\theta$  for o ângulo central cujo vértice é o centro do aro e cujos lados passam pelo centro das esferas na posição de equilíbrio estável, então  $\text{tg } \theta = \frac{\omega^2 r}{g}$ , estando as esferas abaixo do diâmetro horizontal do aro.  
 (c) as esferas permanecem a distâncias r de  $EE'$ , tal que, se  $2\theta$  for o ângulo central cujo vértice é o centro do aro e cujos lados passam pelos centros das esferas na posição de equilíbrio estável, então  $\text{tg } \theta = \frac{\omega^2 r}{g}$ , estando as esferas acima do diâmetro horizontal do aro.  
 (d) as alternativas b e c anteriores estão corretas.  
 (e) a posição de maior estabilidade ocorre quando as esferas estão nos extremos de um mesmo diâmetro.

- 57 UFMS** Dois trapezistas, que são crianças, possuem massas iguais a M, e cada um deles segura em cordas que estão presas a um ponto comum da extremidade esquerda de outra corda que passa por duas roldanas presas no teto. Na extremidade direita dessa outra corda, um outro trapezista, adulto, de massa 2M, está também pendurado e mantém o sistema em equilíbrio, veja a figura 01. Inicialmente, os trapezistas estão em repouso, mas, quando quiserem, podem girar com relação a um eixo vertical independentemente, como mostram as figuras 02, 03 e 04.

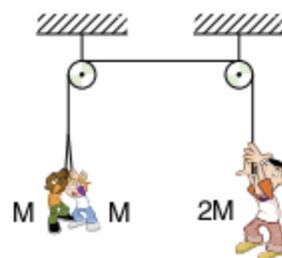


Fig. 01

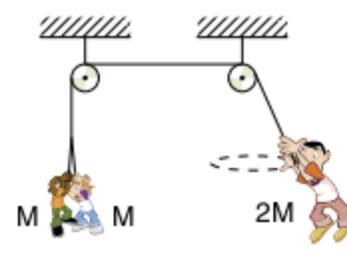


Fig. 02

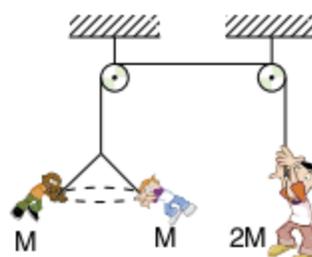


Fig. 03

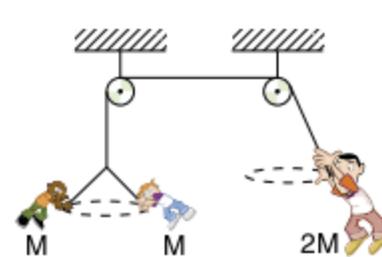


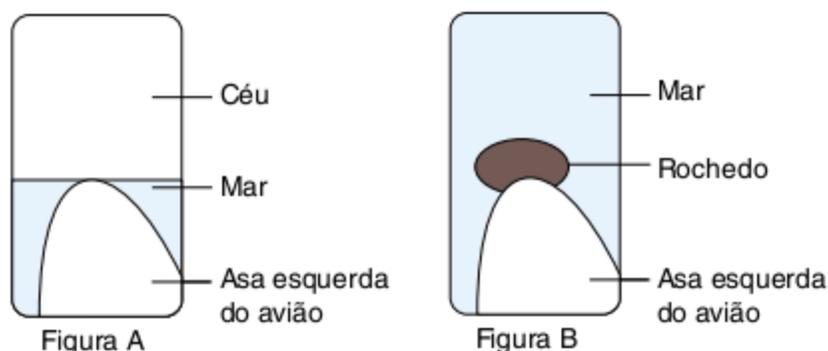
Fig. 04

Desprezando a massa da corda e outras forças dissipativas, é correto afirmar:

- 01 na situação correspondente à figura 02, as duas crianças trapezistas estão em equilíbrio.  
 02 na situação correspondente à figura 03, o trapezista adulto está em equilíbrio.  
 04 na situação correspondente à figura 04, todos os trapezistas estão em equilíbrio na direção vertical.  
 08 todos os trapezistas permanecem em equilíbrio vertical somente na situação da figura 01.  
 16 quando todos os trapezistas estão em equilíbrio vertical, a força tensora, na corda que passa pelas roldanas, é igual a  $2Mg$ .

Soma =

**58 Fuvest** Um avião voa horizontalmente sobre o mar com velocidade  $V$  constante (a ser determinada). Um passageiro, sentado próximo ao centro de massa do avião, observa que a superfície do suco de laranja, que está em um copo sobre a bandeja fixa ao seu assento, permanece paralela ao plano da bandeja. Estando junto à janela e olhando numa direção perpendicular à da trajetória do avião, o passageiro nota que a ponta da asa esquerda do avião tangencia a linha do horizonte, como mostra a figura A. O piloto anuncia que, devido a um problema técnico, o avião fará uma curva de  $180^\circ$  para retornar ao ponto de partida. Durante a curva, o avião se inclina para a esquerda, de um ângulo  $\theta = 30^\circ$ , sem que haja alterações no módulo de sua velocidade e na sua altura. O passageiro, olhando sempre na direção perpendicular à da velocidade do avião, observa que a ponta da asa esquerda permanece durante toda a curva apontando para um pequeno rochedo que aflora do mar, como representado na figura B. O passageiro também nota que a superfície do suco permaneceu paralela à bandeja e que o avião percorreu a trajetória semicircular de raio  $R$  (a ser determinado), em 90 s. Percebe, então, que com suas observações, e alguns conhecimentos de Física que adquiriu no Ensino Médio, pode estimar a altura e a velocidade do avião.



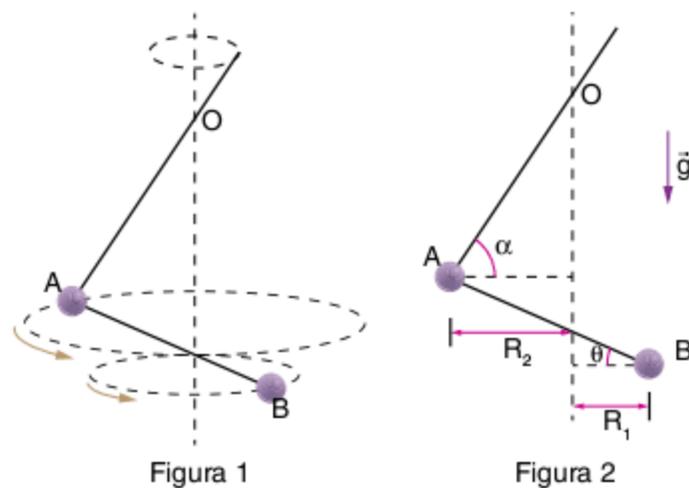
- Encontre uma relação entre  $V$ ,  $R$ ,  $g$  e  $\theta$  para a situação descrita.
- Estime o valor da velocidade  $V$  do avião, em km/h ou m/s.
- Estime o valor da altura  $H$ , acima do nível do mar, em metros, em que o avião estava voando.

Note e adote:  $\pi = 3$ ;  $\sin 30^\circ = 0,5$ ;  $\cos 30^\circ = 0,86$ ;  $\text{tg } 30^\circ = 0,6 = \frac{1}{1,7}$ .

Aceleração da gravidade:  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

As distâncias envolvidas no problema são grandes em relação às dimensões do avião.

**59 Fuvest** Um brinquedo consiste em duas pequenas bolas, A e B, de mesma massa  $M$  e um fio flexível: a bola B está presa na extremidade do fio e a bola A possui um orifício pelo qual o fio passa livremente. Para o jogo, um operador (com treino!) deve segurar o fio e girá-lo, de tal forma que as bolas descrevam trajetórias circulares, com o mesmo período  $T$  e raios diferentes. Nessa situação, como indicado na figura 1, as bolas permanecem em lados opostos em relação ao eixo vertical fixo que passa pelo ponto O. A figura 2 representa o plano que contém as bolas e que gira em torno do eixo vertical, indicando os raios e os ângulos que o fio faz com a horizontal.



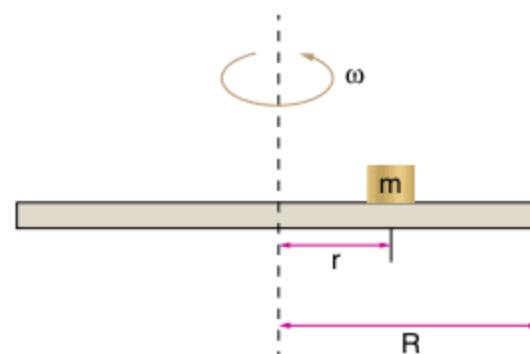
Assim, determine:

- o módulo da força de tensão  $F$ , que permanece constante ao longo de todo o fio, em função de  $M$  e  $g$ .
- a razão  $K = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta}$ , entre os senos dos ângulos que o fio faz com a horizontal.
- o número  $N$  de voltas por segundo que o conjunto realiza quando o raio  $R_1$  da trajetória descrita pela bolinha B for igual a 0,10 m.

Note e adote: Não há atrito entre as bolas e o fio. Considere  $\sin \theta \approx 0,4$  e  $\cos \theta \approx 0,9$ ;  $\pi \approx 3$ .

### Dinâmica do movimento circular e força de atrito

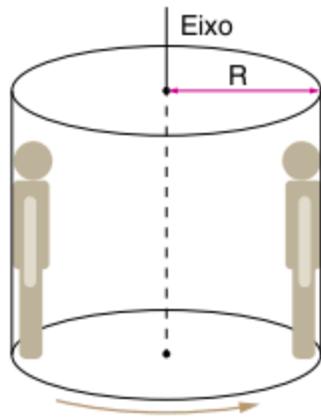
**60 UFPR** Um disco de raio  $R$  está em movimento circular uniforme com velocidade angular  $\omega$ . Sobre esse disco, está posicionado um pequeno bloco de madeira de massa  $m$ , a uma distância  $r$  do eixo de rotação, conforme mostra, em perfil, a figura a seguir. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e o disco é  $\mu$ . Sabe-se que existe uma velocidade angular máxima  $\omega_M$  a partir da qual o bloco desliza para fora do disco. A aceleração da gravidade é representada por  $g$ .



Com base nesses dados, responda aos itens a seguir.

- Represente na figura as forças que atuam sobre o bloco durante o movimento e indique os seus nomes.
- Obtenha uma equação para a velocidade angular máxima  $\omega_M$  em função dos dados fornecidos.
- O que acontecerá com a velocidade angular máxima  $\omega_M$  quando a distância  $r$  do bloco ao eixo de rotação for duplicada?

**61 UFSC** Rotor é um brinquedo que pode ser visto em parques de diversões. Consiste em um grande cilindro de raio  $R$  que pode girar em torno de seu eixo vertical central. Após a entrada das pessoas no rotor, elas se encostam nas suas paredes e este começa a girar. O rotor aumenta sua velocidade de rotação até que as pessoas atinjam uma velocidade  $v$ , quando, então, o piso é retirado. As pessoas ficam suspensas, como se estivessem “ligadas” à parede interna do cilindro enquanto ele está girando, sem nenhum apoio debaixo dos pés e vendo um buraco abaixo delas.

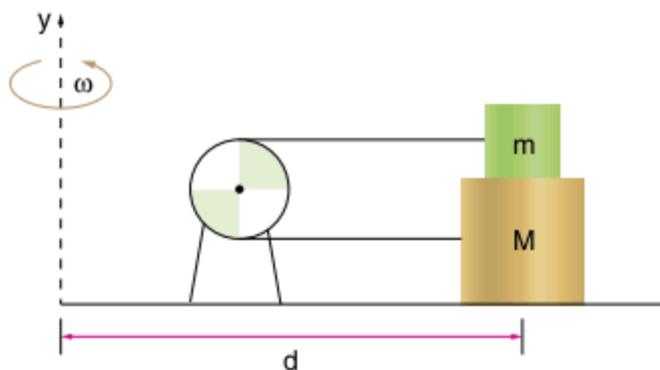


Em relação à situação descrita, é correto afirmar que:

- 01 a força normal, ou seja, a força que a parede faz sobre uma pessoa encostada na parede do rotor em movimento, é uma força centrípeta.
- 02 se duas pessoas dentro do rotor tiverem massas diferentes, aquela que tiver maior massa será a que terá maior chance de deslizar e cair no buraco abaixo de seus pés.
- 04 o coeficiente de atrito estático entre a superfície do rotor e as roupas de cada pessoa dentro dele deve ser maior ou igual a  $\frac{gR}{v^2}$ .
- 08 o coeficiente de atrito estático entre a superfície do rotor e as roupas de cada pessoa dentro dele é proporcional ao raio do rotor.
- 16 o coeficiente de atrito estático entre a superfície do rotor e as roupas de cada pessoa dentro dele é proporcional à velocidade  $v$  do rotor.

Soma =

**62 IME** Uma mesa giratória tem velocidade angular constante  $\omega$ , em torno do eixo  $y$ . Sobre essa mesa, encontram-se dois blocos, de massas  $m$  e  $M$ , ligados por uma corda inelástica que passa por uma roldana fixa à mesa, conforme a figura a seguir.



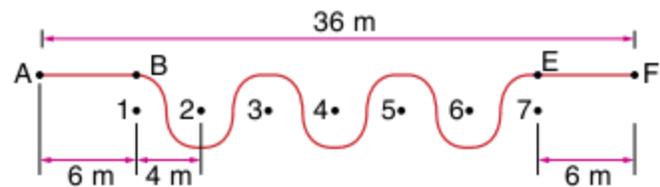
Considerando que não existe atrito entre a mesa e o bloco  $M$ , determine o coeficiente de atrito mínimo entre os dois blocos para que não haja movimento relativo entre eles.

Considere  $d$  a distância dos blocos ao eixo de rotação.

Despreze as massas da roldana e da corda.

Dado:  $M > m$ .

**63 ITA** A figura representa o percurso de um ciclista, num plano horizontal, composto de dois trechos retilíneos ( $AB$  e  $EF$ ), cada um com  $6,0$  m de comprimento, e de um trecho sinuoso intermediário formado por arcos de circunferências de mesmo diâmetro, igual a  $4,0$  m, cujos centros se encontram numerados de 1 a 7. Considere pontual o sistema ciclista-bicicleta e que o percurso é completado no menor tempo, com velocidade escalar constante.

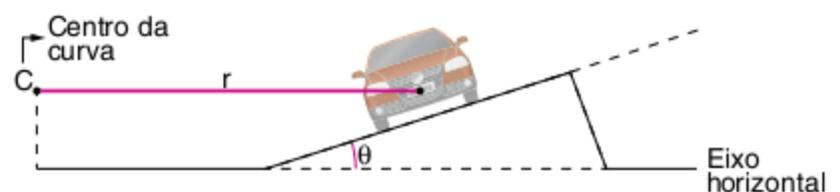


Se o coeficiente de atrito estático com o solo é  $\mu = 0,80$ , assinale a opção correta que indica, respectivamente, a velocidade do ciclista, o tempo despendido no percurso e a frequência de zigue-zague no trecho  $BE$ .

- (a)  $6,0$  m/s     $6,0$  s     $0,17$  s<sup>-1</sup>
- (b)  $4,0$  m/s     $12$  s     $0,32$  s<sup>-1</sup>
- (c)  $9,4$  m/s     $3,0$  s     $0,22$  s<sup>-1</sup>
- (d)  $6,0$  m/s     $3,1$  s     $0,17$  s<sup>-1</sup>
- (e)  $4,0$  m/s     $12$  s     $6,0$  s<sup>-1</sup>

**64 UFG** Com o objetivo de compensar a diminuição de atrito e oferecer maior segurança nas estradas escorregadias, as curvas devem ser projetadas formando um ângulo de inclinação com o plano horizontal. Considere um carro, de massa  $m$ , percorrendo com velocidade máxima  $\vec{v}$  uma curva de raio  $r$ , sem derrapar, inclinada de um ângulo  $\theta$  com a horizontal, conforme figura a seguir.

Dados:  $\mu$  (coeficiente de atrito entre os pneus e a estrada) e  $g$  (aceleração da gravidade).



Com base nos dados fornecidos, determine a expressão:

- a) da força normal que atua no carro.
- b) da velocidade do carro.

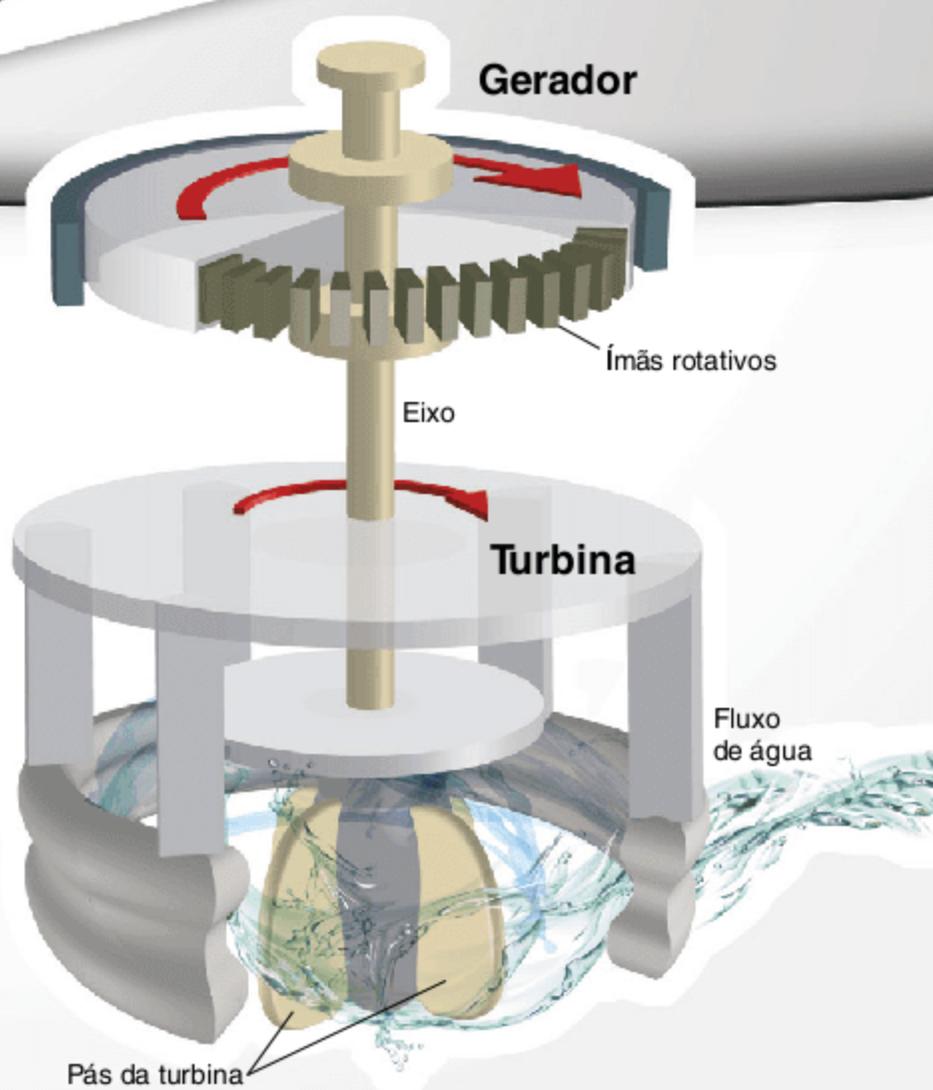
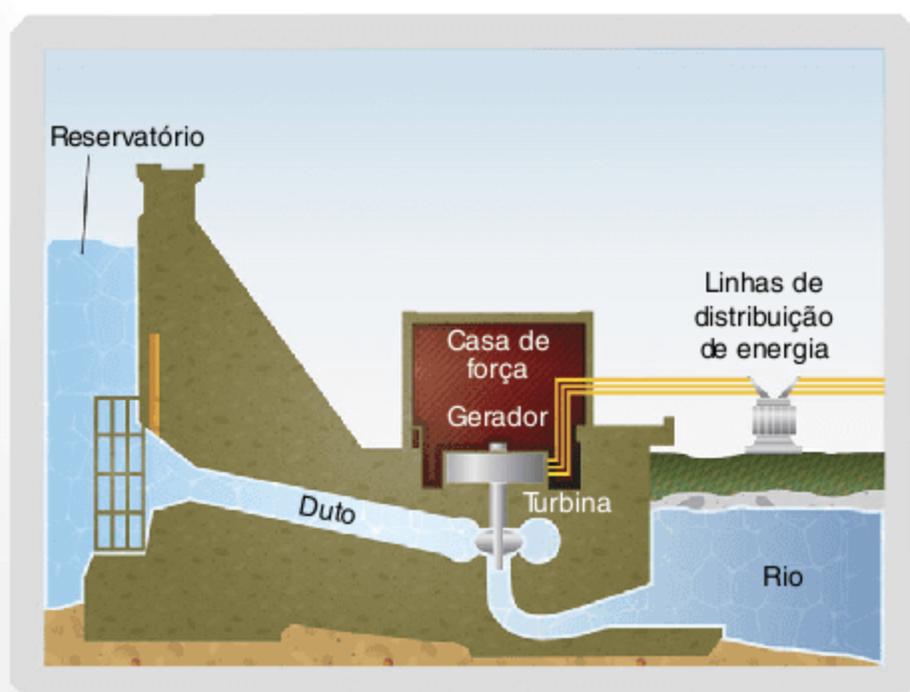
# Trabalho, potência e energia

# 10

## FRENTE 1



Uma usina hidrelétrica aproveita o potencial hidráulico de um rio para produzir energia elétrica. Ao ser represada, a água do rio adquire energia potencial em relação à parte baixa; quando as barreiras que contêm a água são abertas, a energia potencial gravitacional é transformada em energia cinética e a água é dirigida por dutos às turbinas hidráulicas, fazendo suas pás girar e, conseqüentemente, movimentando o gerador, que converte energia cinética em energia elétrica. No Brasil, existem hoje 175 usinas hidrelétricas em operação, com uma capacidade de produção total de 77.839.687 kW.



## Trabalho

### Trabalho de uma força constante

Vamos tomar uma partícula que, submetida a várias forças, sofre um deslocamento de um ponto A a outro ponto B. Seja  $\vec{F}$  uma das forças que atuam sobre a partícula, formando um ângulo  $\theta$  com o vetor deslocamento  $\vec{d}$ . Se  $\vec{F}$  for constante (módulo, direção e sentido constantes), então o trabalho da força  $\vec{F}$ , ao longo do deslocamento  $\vec{d}$ , é uma grandeza escalar dada por:

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos\theta \text{ ou } W = F \cdot d \cdot \cos\theta$$

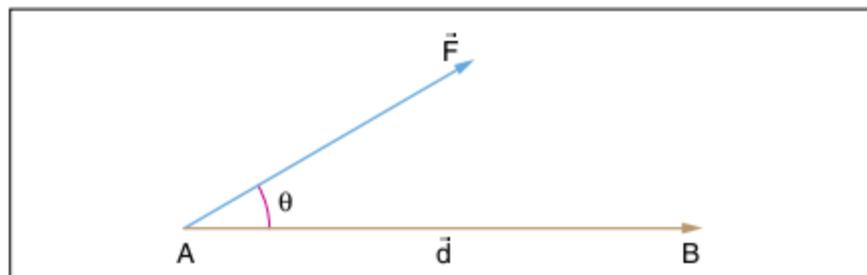


Fig. 1 Força aplicada sobre um corpo que sofre um deslocamento qualquer.

I. Como  $|\vec{F}| \cdot \cos\theta$  é o módulo da projeção de  $\vec{F}$  na direção de  $\vec{d}$ , então podemos dizer que o trabalho da força é o produto do deslocamento pela projeção da força na direção do deslocamento.

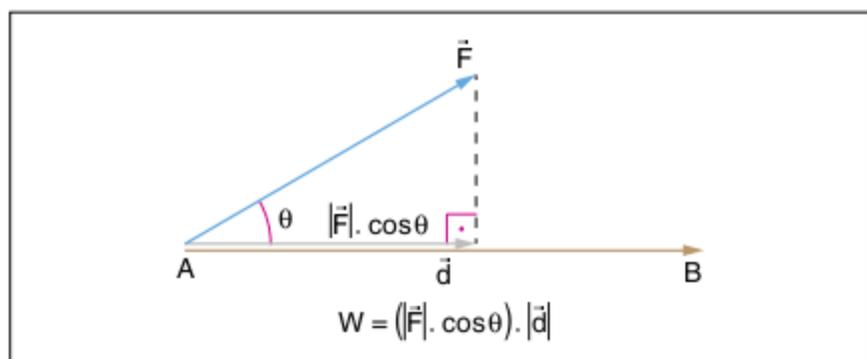


Fig. 2 Decomposição da força na direção do deslocamento.

II. Como  $|\vec{d}| \cdot \cos\theta$  é o módulo da projeção de  $\vec{d}$  na direção de  $\vec{F}$ , então podemos dizer que o trabalho da força é o produto da força pela projeção do deslocamento na direção da força.

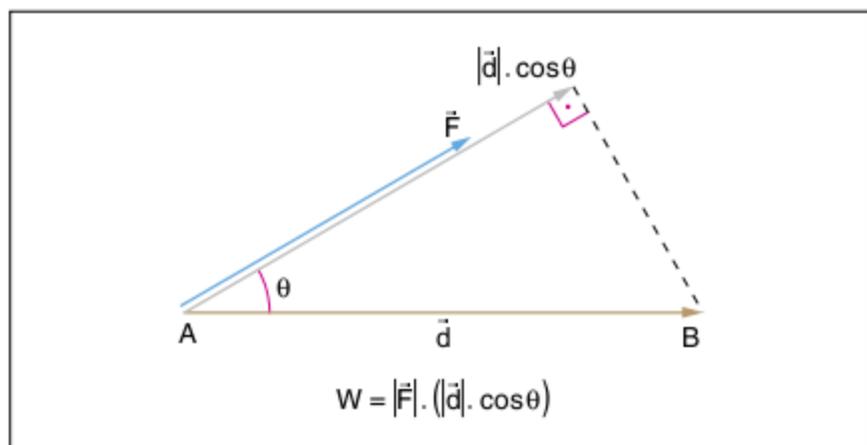


Fig. 3 Decomposição do deslocamento na direção da força.

**Observação:** Como  $\theta$  é o ângulo entre dois vetores, que é definido como o menor ângulo entre eles quando colocados com origem comum, então  $\theta$  está compreendido de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ .

A partir de  $W = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos\theta$ , temos:

- Se  $|\vec{F}| = 0$  ou se  $|\vec{d}| = 0$ , então  $W = 0$ .
- Se  $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ , então  $\cos\theta > 0 \Rightarrow W > 0$ . Nesse caso, dizemos que a força  $\vec{F}$  realiza trabalho motor, pois ela favorece o deslocamento.

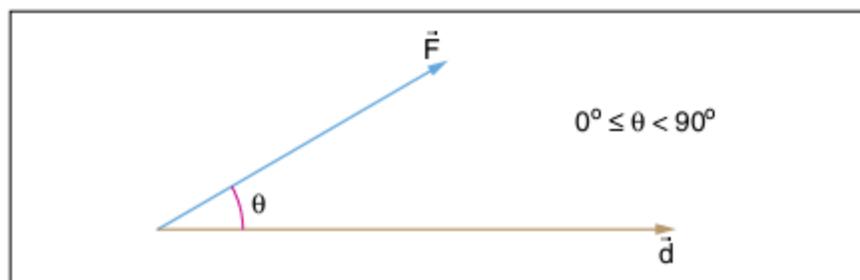


Fig. 4 Força e deslocamento formam ângulo menor que  $90^\circ$ .

- Se  $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ , então  $\cos\theta < 0 \Rightarrow W < 0$ . Nesse caso, dizemos que a força  $\vec{F}$  realiza trabalho resistente, pois ela desfavorece o deslocamento.

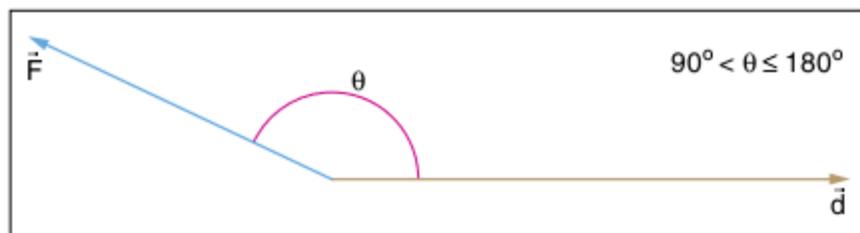


Fig. 5 Força e deslocamento formam ângulo maior que  $90^\circ$ .

- Se  $\theta = 0^\circ$ , então  $\cos\theta = 1 \Rightarrow W = F \cdot d$ . Isso acontece quando  $\vec{F}$  e  $\vec{d}$  têm o mesmo sentido.

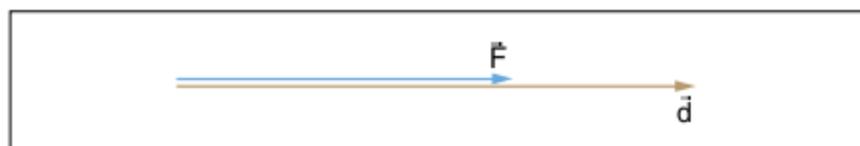


Fig. 6 Força e deslocamento têm mesmo sentido.

- Se  $\theta = 180^\circ$ , então  $\cos\theta = -1 \Rightarrow W = -F \cdot d$ . Isso acontece quando  $\vec{F}$  e  $\vec{d}$  têm sentidos contrários.



Fig. 7 Força e deslocamento têm sentidos contrários.

- Se  $\theta = 90^\circ$ , então  $\cos\theta = 0 \Rightarrow W = 0$ . Isso acontece quando  $\vec{F}$  e  $\vec{d}$  são perpendiculares entre si.



Fig. 8 Força e deslocamento formam ângulo reto.

Como exemplo de trabalho nulo, temos o trabalho do peso e o trabalho da normal de um corpo que se desloca em um plano horizontal.

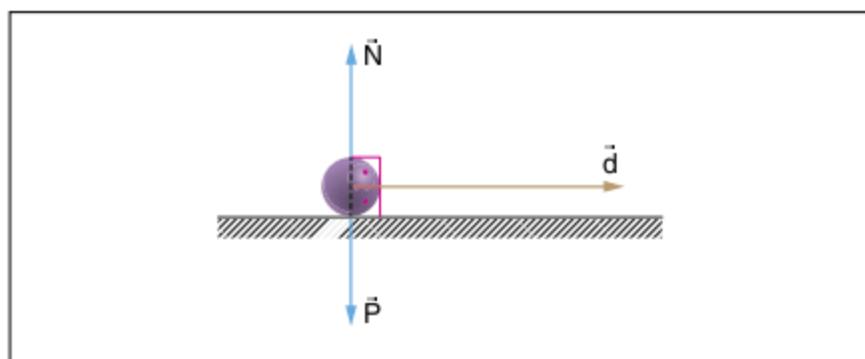


Fig. 9 Peso e normal perpendiculares ao deslocamento.

Tanto o peso quanto a normal são perpendiculares ao deslocamento e, portanto, não realizam trabalho.

No entanto, não é sempre que a força normal não realiza trabalho. Um corpo dentro de um elevador ascendente tem atuando sobre ele uma normal que realiza trabalho positivo, pois força e deslocamento têm o mesmo sentido.

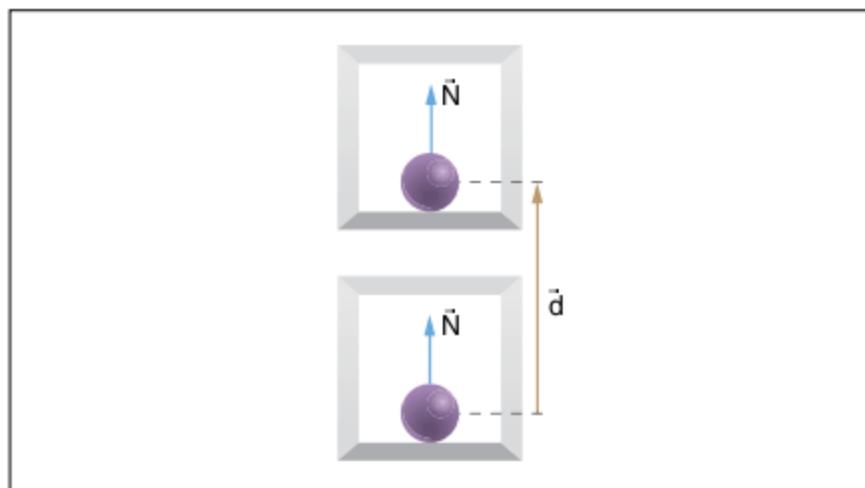


Fig. 10 Normal na mesma direção do deslocamento.

Outro exemplo de trabalho nulo é o da resultante centrípeta, que é, por definição, a decomposição da resultante das forças na direção perpendicular à trajetória.

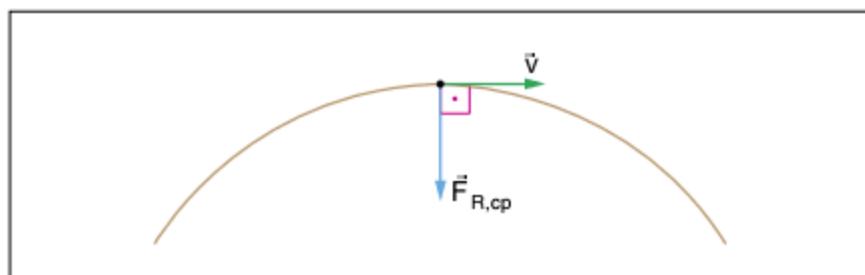


Fig. 11 Resultante centrípeta perpendicular ao deslocamento.

Como, a cada instante, a resultante centrípeta é sempre perpendicular à trajetória, então o seu trabalho é nulo.

A unidade do trabalho é o produto da unidade da força pela unidade do deslocamento:

$$\text{unid}(W) = \text{unid}(F) \cdot \text{unid}(d)$$

No SI, a unidade do trabalho é chamada de joule (J):

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$$

## Trabalho de uma força variável

Se uma força de módulo, direção ou sentido variável atuar sobre um corpo ao longo de seu deslocamento, o trabalho dessa força deve ser calculado de outra forma.

Inicialmente, vamos tomar trechos infinitesimais de deslocamento e decompor a força atuante na direção do deslocamento. Já sabemos que a decomposição da força na direção perpendicular ao deslocamento não realiza trabalho.

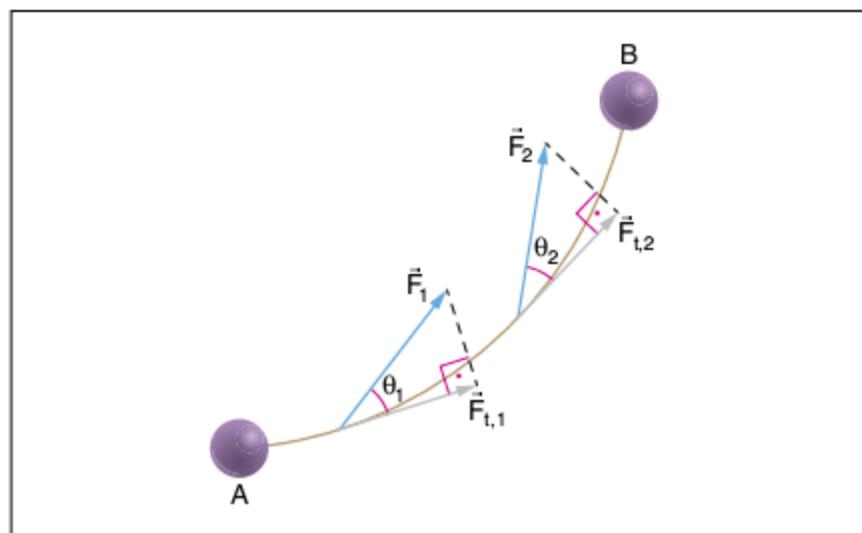


Fig. 12 Força decomposta na direção do deslocamento em cada instante.

Em um gráfico  $F \times s$ , onde  $F$  é o módulo do vetor  $\vec{F}$  projetado na direção do deslocamento e  $s$  é a posição escalar ao longo da trajetória, teremos todos os valores da componente tangencial da força:

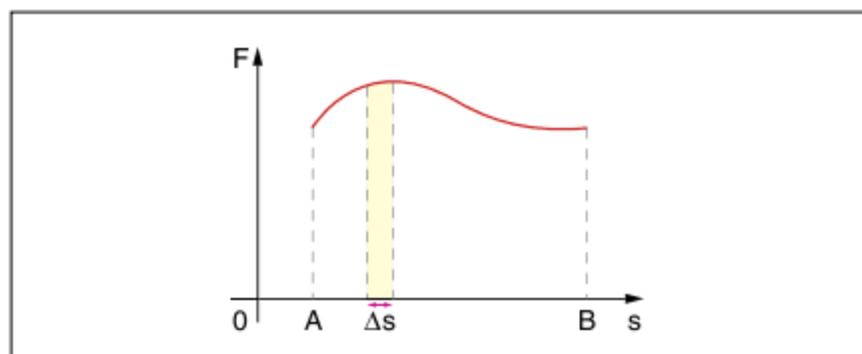


Fig. 13 Trabalho de uma força em um deslocamento infinitesimal.

Se dividirmos o gráfico em pequenos retângulos de base  $\Delta s$ , o trabalho total da força será igual à soma das áreas dos pequenos retângulos. Portanto, o trabalho de uma força variável é numericamente igual à área do gráfico  $F \times s$ :

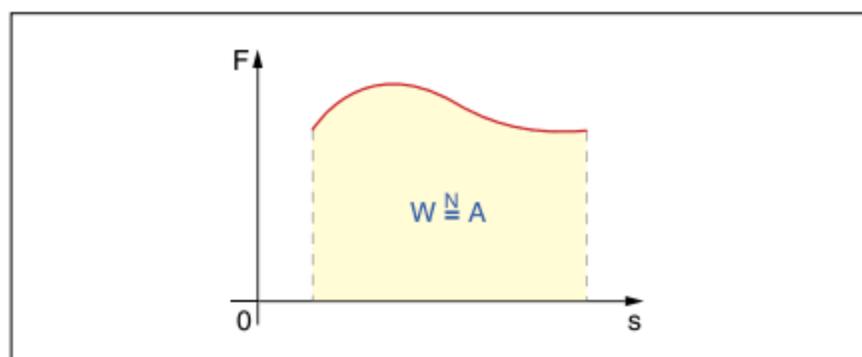


Fig. 14 Trabalho de uma força variável em um gráfico  $F \times s$ .

Se a área estiver abaixo do eixo das abscissas, o trabalho será numericamente igual à área, tomada com sinal negativo.

Se a força for constante, o trabalho será a área de um retângulo:

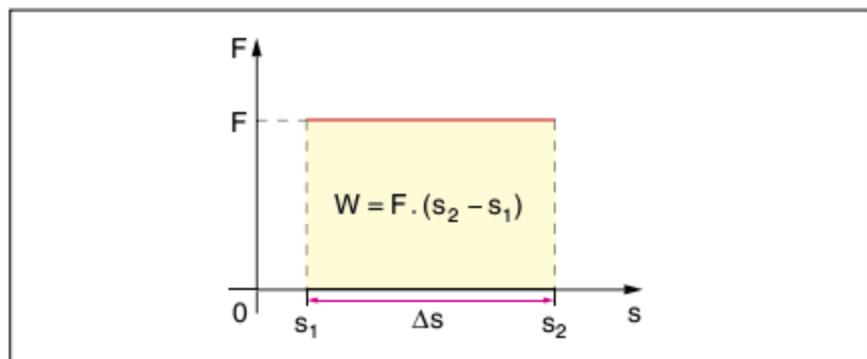


Fig. 15 Trabalho de uma força constante em um gráfico  $F \times s$ .

### Trabalho da força peso

Se um corpo de massa  $m$  vai de um ponto A a outro ponto B, com desnível igual a  $h$ , então, como consideramos o peso uma força constante, o trabalho da força peso pode ser calculado como sendo o produto da força pela projeção do deslocamento na direção da força, que tem módulo igual a  $h$ .

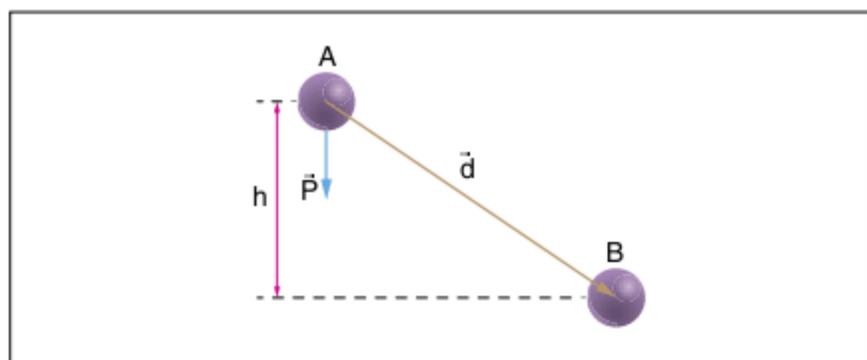


Fig. 16 Força peso atuando na descida de um corpo.

Como a força tem o mesmo sentido do deslocamento, então o trabalho é positivo:

$$W_p = P \cdot h = mgh$$

Quando o corpo vai do ponto B ao ponto A, temos:

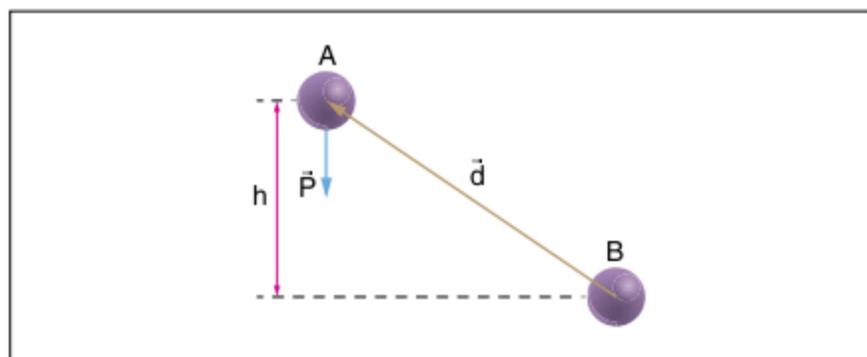


Fig. 17 Força peso atuando na subida de um corpo.

Como a força tem sentido contrário ao do deslocamento, então o trabalho é negativo:

$$W_p = -P \cdot h = -mgh$$

Vamos tomar agora o mesmo movimento de A até B, porém passando pelo ponto C.

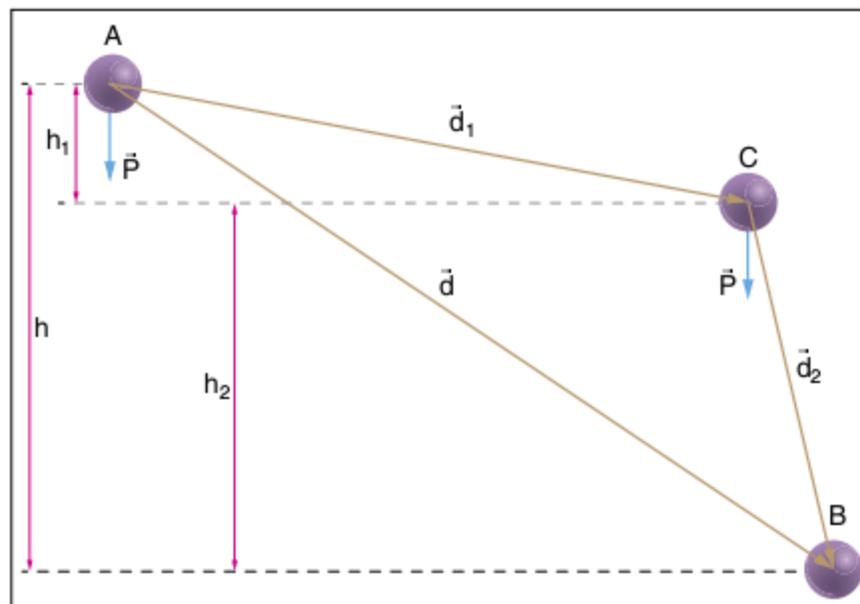


Fig. 18 Força peso atuando na descida de um corpo por trechos sucessivos.

O trabalho do peso de A até B será igual ao trabalho de A até C somado ao trabalho de C até B:

$$W_{P,A \rightarrow B} = W_{P,A \rightarrow C} + W_{P,C \rightarrow B}$$

Mas:

$$W_{P,A \rightarrow C} = P \cdot h_1 = mg \cdot h_1$$

$$W_{P,C \rightarrow B} = P \cdot h_2 = mg \cdot h_2$$

Logo:

$$W_{P,A \rightarrow B} = mg \cdot h_1 + mg \cdot h_2 = mg(h_1 + h_2) = mgh$$

Podemos tomar quantas trajetórias quisermos, que o trabalho do peso entre os pontos A e B será sempre o mesmo:  $mgh$ .

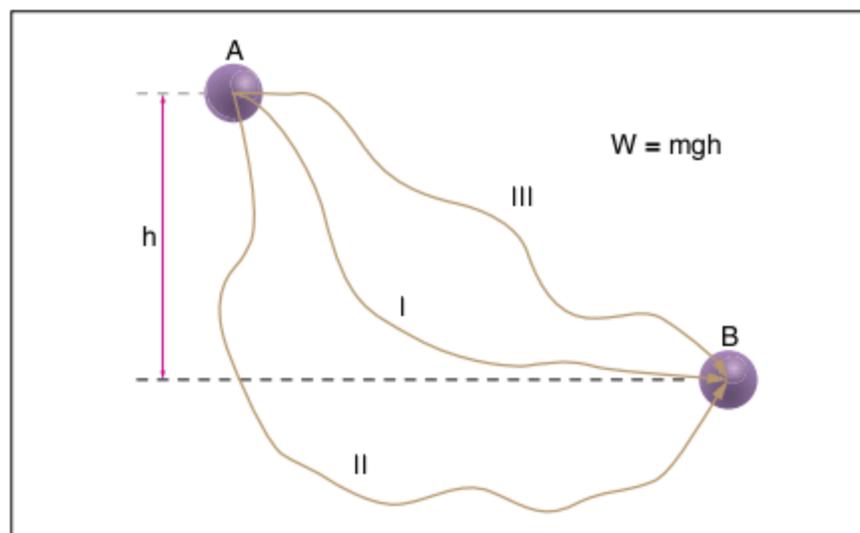


Fig. 19 Várias trajetórias para o mesmo deslocamento.

De modo geral, se um corpo de massa  $m$  vai de um ponto A, a uma altura  $h_1$  em relação a um dado referencial, a outro ponto B, a uma altura  $h_2$ , o trabalho, conforme já estudamos, é dado por:

$$W_p = P(h_1 - h_2) = mg(h_1 - h_2)$$

Então:

$$W_p = -mg(h_2 - h_1)$$

que é uma fórmula geral para o cálculo do trabalho realizado pela força peso, onde  $h_2$  é a altura final e  $h_1$  é a altura inicial.

Assim:

- se  $h_2 > h_1$  (corpo sobe):  $W_p < 0$
- se  $h_2 < h_1$  (corpo desce):  $W_p > 0$

## Trabalho da força elástica

Consideremos um sistema composto de uma mola presa a uma parede em uma de suas extremidades e a uma massa em outra.

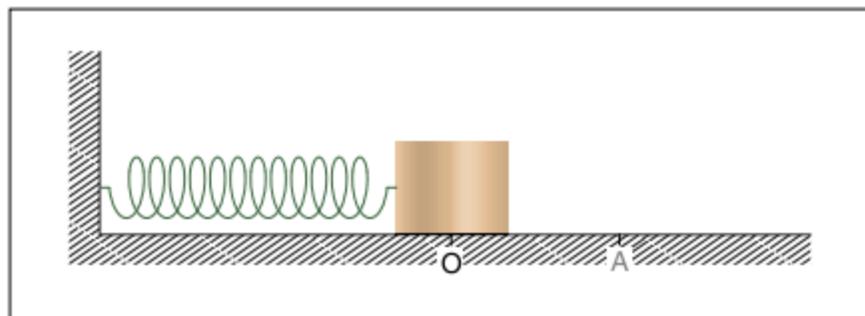


Fig. 20 Sistema massa-mola.

Se a massa for puxada até o ponto A, distendendo a mola de uma deformação  $x$ :

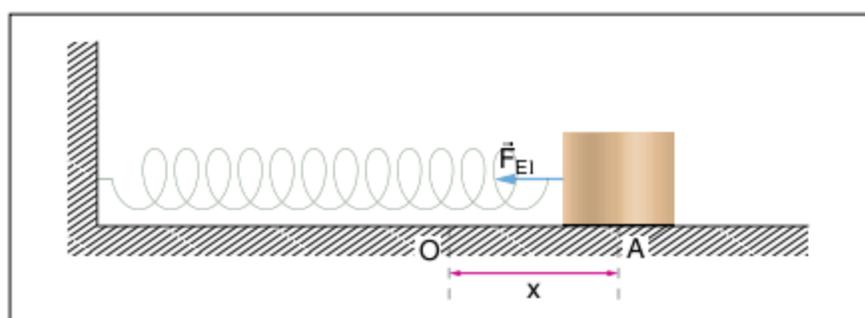


Fig. 21 Deformação  $x$  na mola após deslocamento.

A mola exerce uma força elástica ( $F_{El}$ ) sobre o corpo, tentando trazê-lo à posição de equilíbrio da mola. Já sabemos que a força elástica exercida pela mola é dada por:

$$F_{El} = -kx$$

onde  $k$  é a constante elástica da mola.

Para calcularmos o valor do trabalho da força elástica, devemos utilizar o gráfico  $F \times s$ , pois a força elástica é variável.

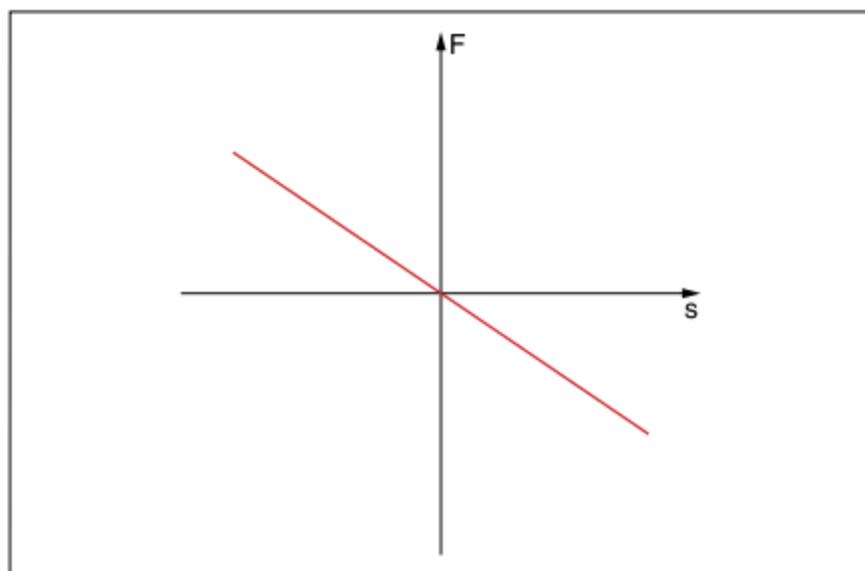


Fig. 22 Gráfico  $F \times s$  para a força elástica.

O módulo do trabalho realizado pela força elástica exercida pela mola sobre o corpo, enquanto o corpo desloca-se de uma posição inicial, em que a deformação vale  $x_1$ , até uma posição final, em que a deformação vale  $x_2$ , é calculado pela área do gráfico  $F \times s$ :

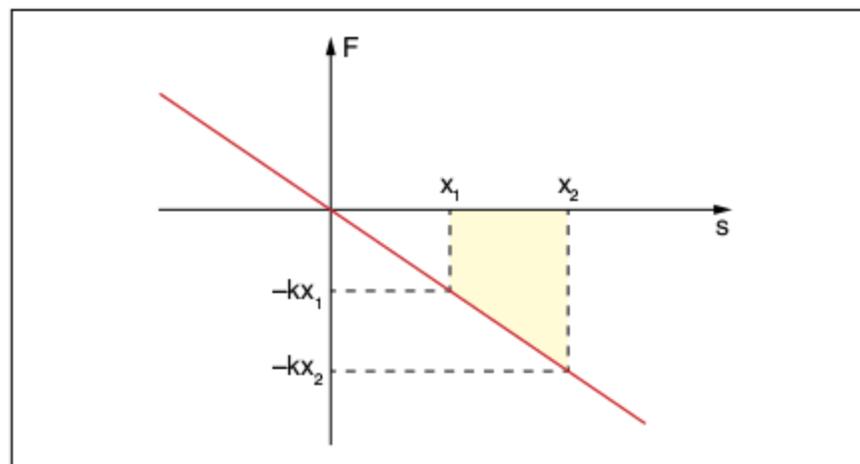


Fig. 23 Trabalho da força elástica calculado pela área do gráfico  $F \times s$ .

Da figura 23, temos:

$$\begin{aligned} |W_{F_{El}}| &= \frac{1}{2} \cdot (\text{base maior} + \text{base menor}) \cdot \text{altura} \\ &= \frac{1}{2} (kx_2 + kx_1) \cdot (x_2 - x_1) = \frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2) \end{aligned}$$

O sinal do trabalho é obtido pela multiplicação de dois sinais:

- Sinal 1: positivo se a área está acima do eixo das abscissas e negativo se a área está abaixo do eixo das abscissas.
- Sinal 2: positivo se  $x_{\text{final}} > x_{\text{inicial}}$  (o movimento se dá em sentido a favor do eixo  $s$ ) e negativo se  $x_{\text{final}} < x_{\text{inicial}}$  (o movimento se dá em sentido contrário ao do eixo  $s$ ).

Assim, no exemplo da figura 23, se o corpo vai de  $x_1$  a  $x_2$ :

- Sinal 1: (-), pois a área está abaixo do eixo das abscissas
- Sinal 2: (+), pois  $x_{\text{final}} > x_{\text{inicial}}$  ( $x_2 > x_1$ )

Logo:

$$\text{Sinal} = (-) \cdot (+) = (-)$$

E o trabalho é dado por:

$$W_{F_{El}} = -\frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2)$$

que é uma fórmula geral para o cálculo do trabalho realizado pela força elástica, onde  $x_2$  é a posição final e  $x_1$  é a posição inicial.

Assim:

- se  $x_2 > x_1$  (mola aumentando sua deformação):  $W_{F_{El}} < 0$
- se  $x_2 < x_1$  (mola reduzindo sua deformação):  $W_{F_{El}} > 0$

Um outro modo de obter o sinal do trabalho é fazer uma análise mais simples. Enquanto a mola vai da deformação  $x_1$  a  $x_2$ , a força elástica é contrária ao deslocamento.

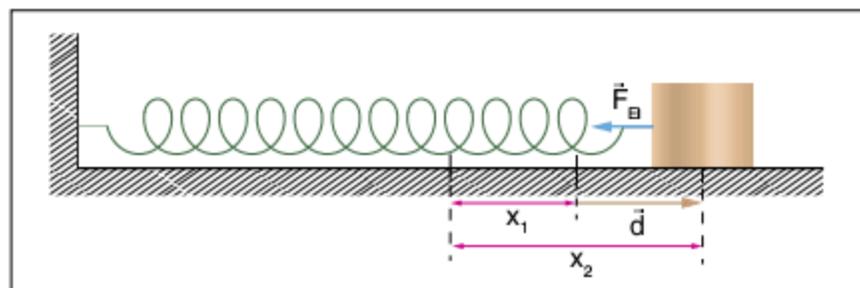


Fig. 24 Força elástica contrária ao vetor deslocamento.

Portanto, o sinal do trabalho é negativo.

Tomemos uma mola, presa a um corpo, que oscila passando pelos pontos A, B, C e D:

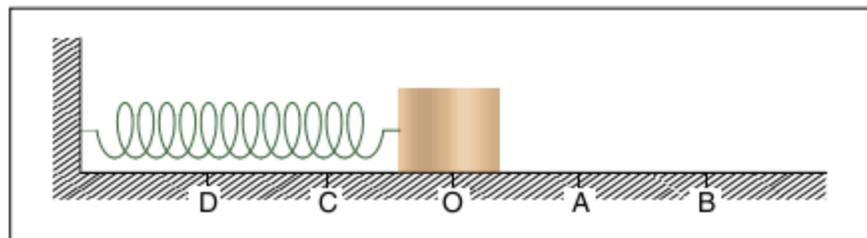


Fig. 25 Posições ocupadas pelo corpo que oscila sob a ação da força elástica.

Quer pela análise gráfica, multiplicando os dois sinais (sinal 1 e sinal 2), quer pela análise de sentido de força e de deslocamento, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} A \rightarrow B &: W_{\text{FEI}} < 0 \\ B \rightarrow A &: W_{\text{FEI}} > 0 \\ C \rightarrow D &: W_{\text{FEI}} < 0 \\ D \rightarrow C &: W_{\text{FEI}} > 0 \end{aligned}$$

Esse resultado também pode ser obtido a partir da fórmula geral:

$$W_{\text{FEI}} = -\frac{1}{2}k(x_{\text{final}}^2 - x_{\text{inicial}}^2)$$

Já se quisermos saber o sinal do trabalho quando o corpo vai de A até C, o melhor é utilizar diretamente a fórmula acima.

Assim:

- se  $x_{\text{final}} > x_{\text{inicial}}$  ( $x_C > x_A$ ):  $W_{\text{FEI}} < 0$
- se  $x_{\text{final}} < x_{\text{inicial}}$  ( $x_C < x_A$ ):  $W_{\text{FEI}} > 0$

É fácil demonstrar que o trabalho da força elástica em uma trajetória ACB é igual ao seu trabalho na trajetória AB. Isso acontece pois o trabalho da força elástica, a exemplo do trabalho da força peso, também independe da trajetória.

## Potência

É importante conhecermos não só o trabalho realizado por uma força como também o tempo em que o trabalho é realizado. Quanto menor o tempo, maior a potência do dispositivo que realiza o trabalho.

### Potência média

Se uma força  $\vec{F}$  realiza um determinado trabalho  $W$  em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , então a potência média é definida como sendo:

$$P_m = \frac{W}{\Delta t}$$

No caso particular de a força ser constante, sabemos que:

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \theta$$

onde  $|\vec{F}|$  e  $|\vec{d}|$  são, respectivamente, módulo da força e módulo do deslocamento a que está submetido o corpo.

Então:

$$P_m = \frac{|\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \theta}{\Delta t}$$

Mas  $\frac{|\vec{d}|}{\Delta t}$  é o módulo da velocidade vetorial média ( $\vec{v}_m$ ) do corpo no intervalo de tempo  $\Delta t$ .

Logo:

$$P_m = |\vec{F}| \cdot |\vec{v}_m| \cdot \cos \theta$$

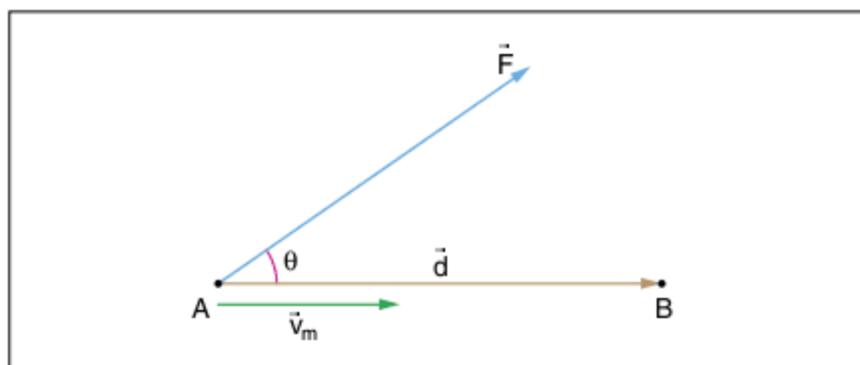


Fig. 26 Força aplicada sobre um corpo que sofre um deslocamento qualquer.

Como  $\vec{v}_m = \frac{\vec{d}}{\Delta t}$ , então  $\vec{v}_m$  e  $\vec{d}$  têm a mesma direção e o mesmo sentido. Logo,  $\theta$  também será o ângulo entre a força ( $\vec{F}$ ) e o vetor velocidade média ( $\vec{v}_m$ ).

### Potência instantânea

A potência instantânea pode ser definida como a potência média quando o intervalo de tempo se torna extremamente pequeno, ou seja, tendendo a zero ( $\Delta t \rightarrow 0$ ).

Nesse caso,  $W$  também tende a zero, porém o quociente  $\frac{W}{\Delta t}$  tende a um valor limite, que é a potência instantânea:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P_m$$

Logo:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W}{\Delta t}$$

No caso particular de a força ser constante, sabemos que:

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \theta$$

Então:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \theta}{\Delta t}$$

Como  $|\vec{F}|$  e  $\cos \theta$  são constantes:

$$P = (|\vec{F}| \cdot \cos \theta) \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\vec{d}|}{\Delta t} = (|\vec{F}| \cdot \cos \theta) \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\vec{v}_m|$$

Mas sabemos que:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m \Rightarrow |\vec{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\vec{v}_m|$$

onde  $\vec{v}$  é a velocidade instantânea.

Logo, quando  $\vec{F}$  é constante:

$$P = |\vec{F}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta$$

Aqui também teremos  $\theta$  como o ângulo entre  $\vec{F}$  e  $\vec{v}$ .

Quando  $\theta = 90^\circ$ , então  $\cos\theta = 0 \Rightarrow P = 0$ . Isso ocorre quando  $\vec{F}$  e  $\vec{v}$  são perpendiculares entre si.

A potência é uma grandeza escalar e sua unidade é o quociente entre a unidade do trabalho e a unidade do tempo:

$$\text{unid}(P) = \frac{\text{unid}(W)}{\text{unid}(t)}$$

No SI, a unidade de potência recebe o nome de watt (W):

$$1 \text{ W} = \frac{1 \text{ J}}{1 \text{ s}} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^3$$

Outras duas unidades de potência muito utilizadas são:

- cavalo-vapor (cv):  $1 \text{ cv} = 735,49875 \text{ W} \cong 735 \text{ W}$
- horse-power (hp):  $1 \text{ hp} = 745,69987 \text{ W} \cong 746 \text{ W}$

Há uma unidade de trabalho muito importante, expressa pelo produto da unidade de potência (kW) pela unidade de tempo (h):

$$1 \text{ kWh} = 1 \text{ kW} \cdot 1 \text{ h}$$

Do mesmo modo que  $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$  e  $\Delta s$  é numericamente igual à área do gráfico  $v \times t$ , então, se  $P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W}{\Delta t}$ , podemos demonstrar que o trabalho é numericamente igual à área do gráfico  $P \times t$ .

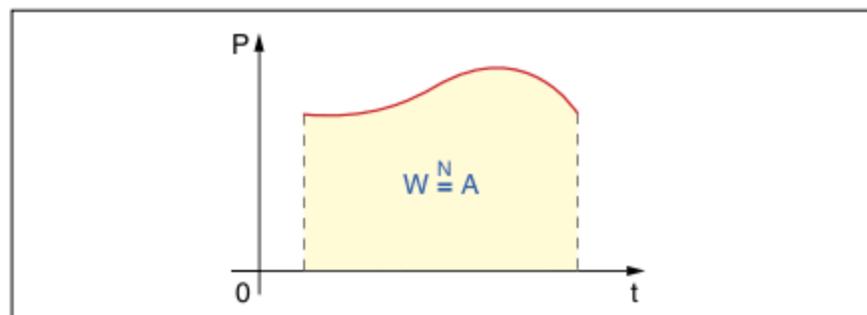


Fig. 27 Trabalho para potência variável em um gráfico  $P \times t$ .

No caso particular de potência instantânea constante:

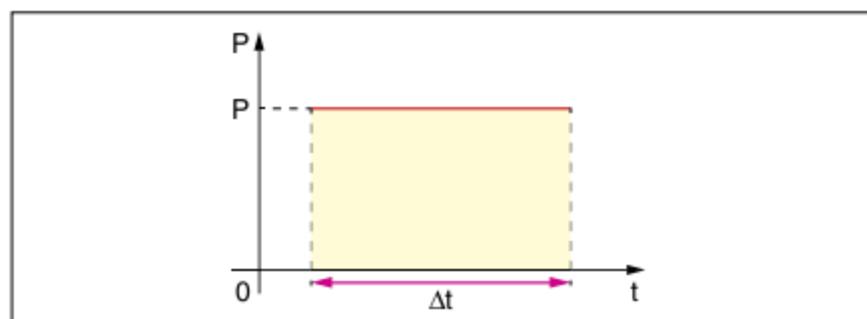


Fig. 28 Trabalho para potência constante em um gráfico  $P \times t$ .

$$W = P \cdot \Delta t \Rightarrow P = \frac{W}{\Delta t}$$

ou seja, quando a potência instantânea é constante, ela é igual à potência média.

### Rendimento

A definição de rendimento pode ser utilizada tanto para potência quanto para trabalho. Se uma máquina recebe uma potência total  $P_T$ , utiliza uma potência útil  $P_U$  e perde uma potência  $P_P$ , então definimos o rendimento da máquina como:

$$\eta = \frac{P_U}{P_T}$$

O rendimento também pode ser definido como a razão entre o trabalho útil  $W_U$  e trabalho total  $W_T$ :

$$\eta = \frac{W_U}{W_T}$$

Por ser o quociente entre duas grandezas de mesma dimensão, o rendimento é uma grandeza adimensional e não possui unidade.

Como  $0 \leq P_U \leq P_T$ , então:

$$0 \leq \eta \leq 1$$

## Energia

### Energia cinética

Um corpo de massa  $m$  e velocidade  $v$  tem sua energia cinética definida como:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

A energia cinética de um corpo está associada a seu movimento e claramente depende do referencial. Quando nada for dito, assumiremos que a velocidade será tomada em relação à superfície da Terra, que é considerada, para os exercícios da Frente 1, como referencial inercial.

Como a velocidade está elevada ao quadrado, mesmo que ela seja negativa, a energia cinética será sempre positiva. A mínima energia cinética será igual a zero, quando a velocidade for nula.

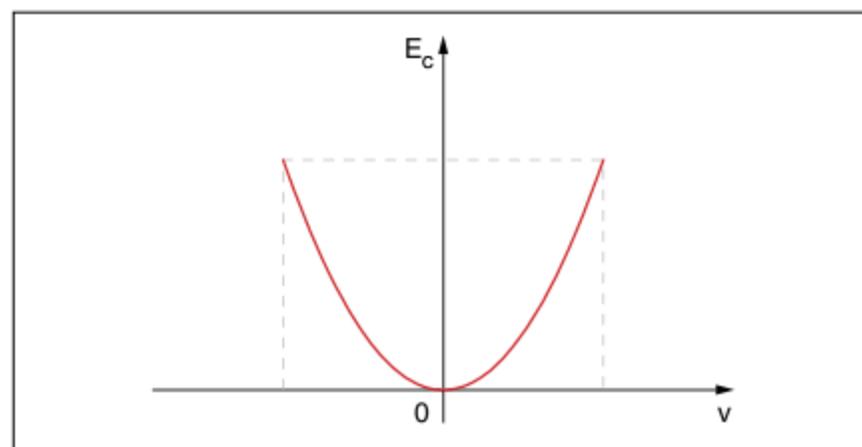


Fig. 29 Energia cinética em função da velocidade de um corpo.

### Teorema da energia cinética

Vamos considerar um corpo de massa  $m$ , que, ao passar pelo ponto A com velocidade  $\vec{v}_A$ , passa a receber a ação de uma força resultante constante  $\vec{F}_R$ , que atua por um deslocamento  $\vec{d}$ , quando, então, o corpo chega ao ponto B com velocidade  $\vec{v}_B$ .

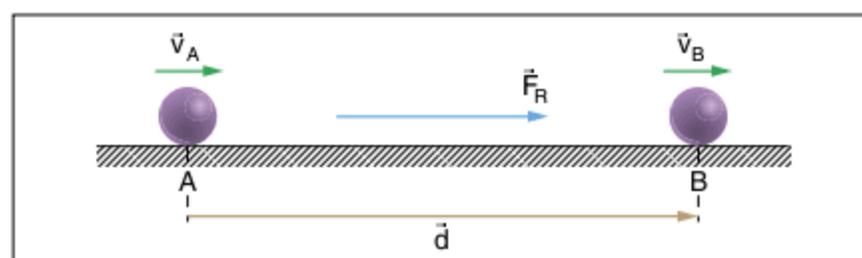


Fig. 30 Resultante altera a velocidade de um corpo.

Como  $\vec{F}_R$  é constante, seu trabalho é calculado como:

$$W_{F_R} = F_R \cdot d$$

com  $F_R = |\vec{F}_R|$  e  $d = |\vec{d}|$ .

Pela Segunda Lei de Newton:

$$F_R = m \cdot a \Rightarrow W_{F_R} = m \cdot a \cdot d$$

Como  $F_R$  é constante, então  $a$  é constante, e o movimento é uniformemente variado. Pela equação de Torricelli:

$$v_B^2 = v_A^2 + 2 \cdot a \cdot d \Rightarrow a \cdot d = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2}$$

Substituindo no cálculo do trabalho:

$$W_{F_R} = m \left( \frac{v_B^2 - v_A^2}{2} \right) = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2}$$

Podemos ver que:

$$\frac{mv_B^2}{2} = E_{C,B}: \text{energia cinética em B}$$

$$\frac{mv_A^2}{2} = E_{C,A}: \text{energia cinética em A}$$

Então:

$$W_{F_R} = E_{C,B} - E_{C,A} = E_{C,\text{final}} - E_{C,\text{inicial}}$$

Logo:

$$W_{F_R} = \Delta E_C$$

Esta expressão é conhecida como Teorema da Energia Cinética e nos diz que o trabalho da resultante das forças sobre um sistema é igual à variação da energia cinética deste sistema.

Apesar de termos feito a demonstração para uma resultante constante, esse teorema é válido para uma resultante qualquer.

Da relação  $W_{F_R} = \Delta E_C$ , temos que:

- se  $W_{F_R} > 0$  (trabalho motor): há aumento da energia cinética.
- se  $W_{F_R} < 0$  (trabalho resistente): há diminuição da energia cinética.

Verificamos que, como trabalho e energia se relacionam, ambos têm a mesma dimensão e ambos são grandezas escalares. A unidade da energia é, portanto, também o joule (J).

Assim o trabalho de uma força fornece, retira ou transforma a energia de um sistema.

**Observação:** Quando um sistema é composto por mais de uma partícula, a energia cinética total desse sistema é a soma das energias cinéticas de cada partícula.

## Energia potencial gravitacional

Tem-se um corpo de massa  $m$  situado no ponto A, com uma altura  $h$  em relação ao solo.

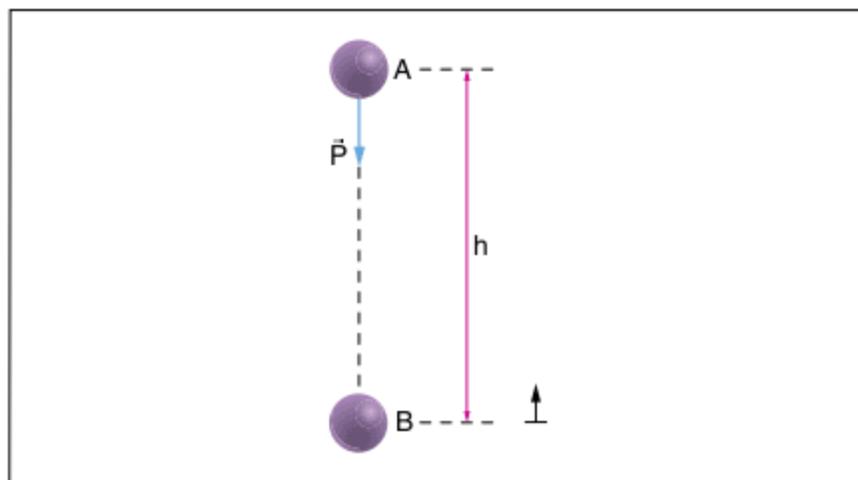


Fig. 31 Corpo solto do repouso de altura  $h$ .

Ao ser solto do repouso em A, o corpo não possui velocidade e, portanto, sua energia cinética é nula. No entanto, se o peso for a única força a atuar sobre o corpo, então, pelo Teorema da Energia Cinética, o seu trabalho ( $mg \cdot h$ ), realizado quando o corpo é levado ao ponto B, é igual à variação de sua energia cinética. Embora o corpo não possuísse energia cinética em A, ele possuía uma energia, chamada de energia potencial gravitacional, que seria transformada, através do trabalho realizado pelo peso, em energia cinética no ponto B.

Portanto, a energia potencial gravitacional necessita, para a sua definição, de um plano horizontal de referência. Se o corpo de massa  $m$  se encontra a uma altura  $h$  desse plano de referência, então sua energia potencial gravitacional é dada por:

$$E_{PG} = mgh$$

Essa expressão corresponde ao trabalho do peso quando o corpo vai de sua posição até o plano de referência.

Desse modo, quando o corpo estiver abaixo do plano de referência, o trabalho do peso será negativo, e teremos:

$$E_{PG} = -mgh$$

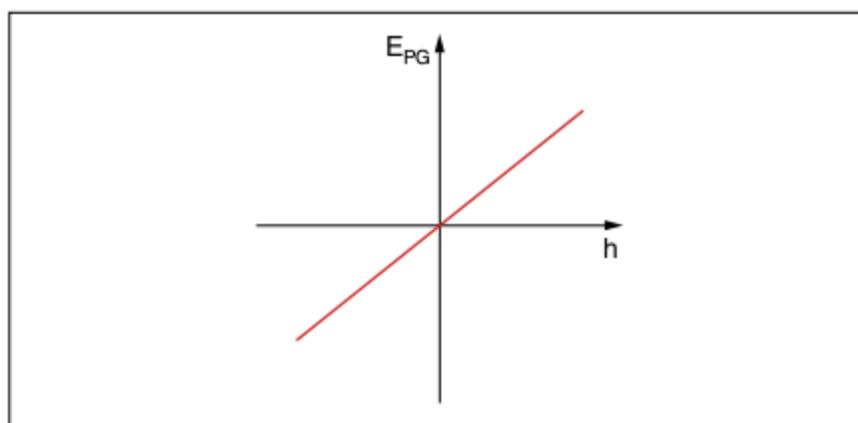


Fig. 32 Gráfico de energia potencial gravitacional.

**Observação:** O plano horizontal de referência é arbitrário, pois o importante é a variação de energia potencial. A energia potencial gravitacional é nula quando o corpo estiver no plano de referência.

## ATENÇÃO!

Apesar de o plano horizontal de referência poder ser arbitrário, o sentido do eixo para a determinação da altura do corpo é obrigatoriamente para cima.

Seja um corpo que vai de um ponto A de altura  $h_A$  a outro ponto B de altura  $h_B$ :

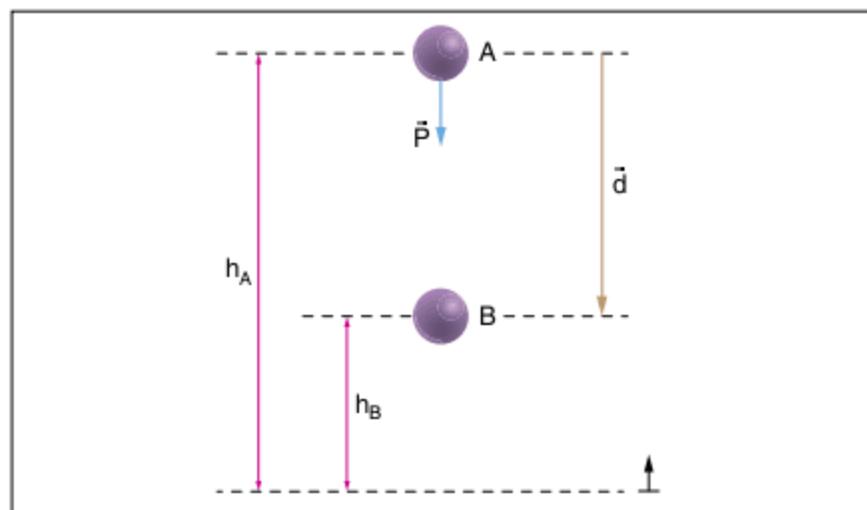


Fig. 33 Força peso atuando na descida de um corpo entre duas posições.

Então, conforme já vimos, o trabalho do peso é dado por:

$$W_p = -mg(h_B - h_A) = mgh_A - mgh_B$$

Podemos ver que:

$mgh_A = E_{PG,A}$ : energia potencial gravitacional em A

$mgh_B = E_{PG,B}$ : energia potencial gravitacional em B

Então:

$$W_p = E_{PG,A} - E_{PG,B} = -(E_{PG,B} - E_{PG,A}) \\ = -(E_{PG,final} - E_{PG,inicial})$$

Logo:

$$W_p = -\Delta E_{PG}$$

ou seja, o trabalho do peso é igual a menos a variação da energia potencial gravitacional.

### Energia potencial elástica

Empurramos um corpo de massa  $m$ , preso a uma mola de constante elástica  $k$ , de uma distância  $x$ , a partir da posição de equilíbrio do sistema, em O, até a posição A.

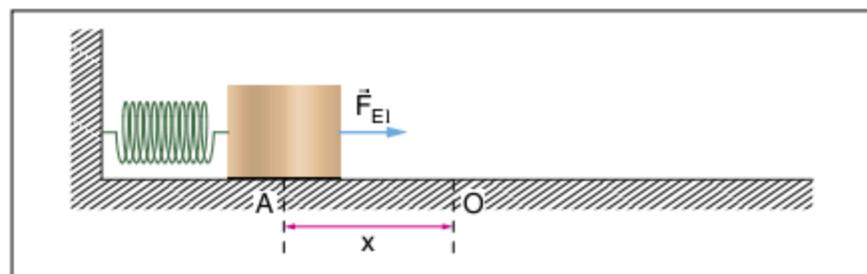


Fig. 34 Força elástica atuando em corpo, com mola comprimida de  $x$ .

Ao ser solto do repouso em A, o corpo não possui velocidade e, portanto, sua energia cinética é nula. No entanto, se a força elástica for a única força a atuar sobre o corpo, além do peso e da normal, que se anulam, então, pelo Teorema da Energia

Cinética, o seu trabalho  $\left(\frac{kx^2}{2}\right)$ , realizado quando o corpo é de-

volvido à posição O, é igual à variação de sua energia cinética. Embora o corpo não possuísse energia cinética em A, o sistema possuía uma energia, chamada de energia potencial elástica, acumulada na mola, que seria transformada, através do trabalho realizado pela força elástica, em energia cinética no ponto O.

Definimos, então, a energia potencial elástica de uma mola de constante elástica  $k$ , deformada de  $x$ , como:

$$E_{PEI} = \frac{1}{2} kx^2$$

Como a deformação da mola está elevada ao quadrado, mesmo que ela seja negativa, a energia potencial elástica será sempre positiva. A mínima energia potencial elástica será igual a zero, quando a deformação for nula.

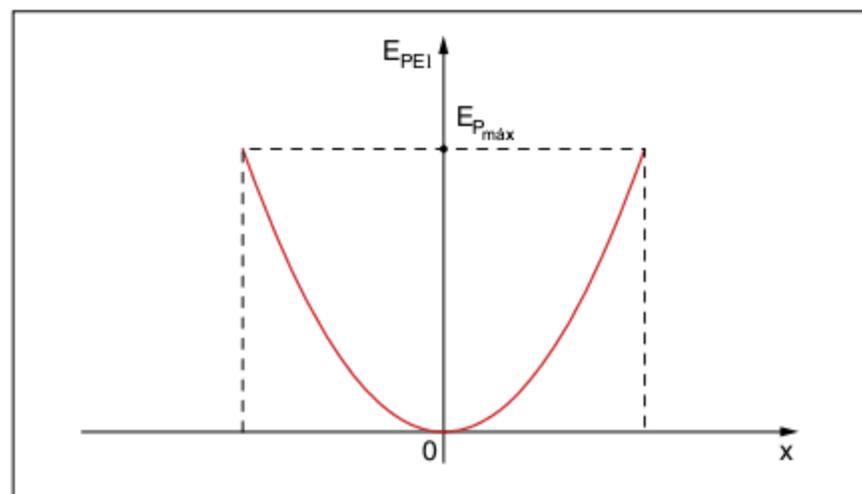


Fig. 35 Gráfico de energia potencial elástica.

Seja um corpo, preso a uma mola de constante elástica  $k$ , que vai de uma posição A, em que a mola está deformada de  $x_A$ , a uma posição B, em que a mola está deformada de  $x_B$ .

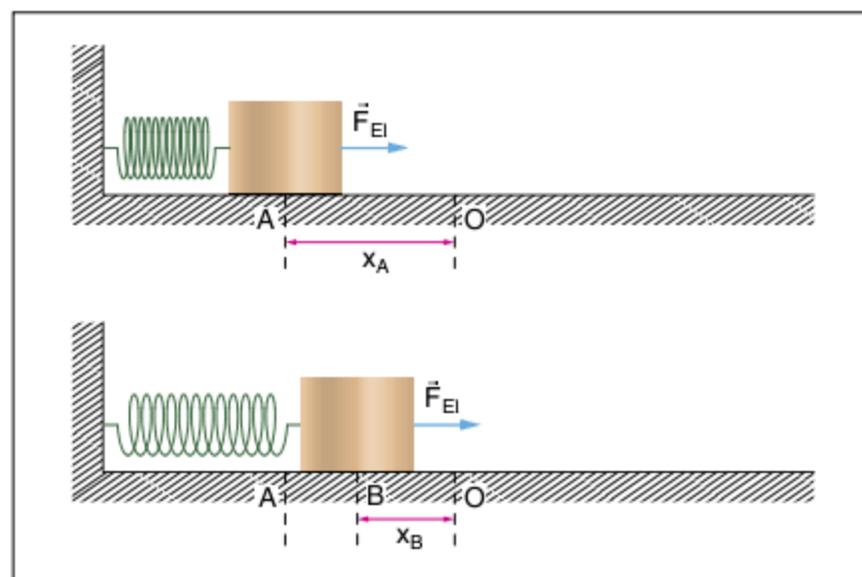


Fig. 36 Força elástica atuando entre duas posições.

Então, conforme já vimos, o trabalho da força elástica é dado por:

$$W_{F_{El}} = -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2) = \frac{kx_A^2}{2} - \frac{kx_B^2}{2}$$

Podemos ver que:

$$\frac{kx_A^2}{2} = E_{PEI,A}$$
 : energia potencial elástica em A

$$\frac{kx_B^2}{2} = E_{PEI,B}$$
 : energia potencial elástica em B

Então:

$$W_{F_{El}} = E_{PEI,A} - E_{PEI,B} = -(E_{PEI,B} - E_{PEI,A}) \\ = -(E_{PEI,final} - E_{PEI,inicial})$$

Logo:

$$W_{F_{El}} = -\Delta E_{PEl}$$

ou seja, o trabalho da força elástica é igual a menos a variação da energia potencial elástica.

Enquanto a energia cinética é função da velocidade, a energia potencial (gravitacional ou elástica) é função da posição (altura em relação a um referencial ou deformação).

## Energia mecânica

Já estudamos algumas formas de energia, entre elas:

- energia cinética:  $E_C = \frac{1}{2}mv^2$   
m: massa da partícula  
v: velocidade da partícula
- energia potencial gravitacional:  $E_{PG} = mgh$   
m: massa da partícula  
g: módulo da aceleração da gravidade  
h: altura da partícula em relação a um referencial
- energia potencial elástica:  $E_{PEl} = \frac{1}{2}kx^2$   
k: constante elástica da mola  
x: deformação da mola

A energia mecânica de um sistema é definida como a soma de suas energias cinética e potencial:

$$E_M = E_C + E_P$$

onde a energia potencial do sistema é a soma de todas as energias que dependem da posição desse sistema, por exemplo, energia potencial gravitacional, energia potencial elástica e energia potencial elétrica.

**Observação:** No nosso estudo da Frente 1, não resolveremos problemas que envolvam energia potencial elétrica.

## Forças conservativas

São chamadas de forças conservativas aquelas cujos trabalhos entre dois pontos dados independem da trajetória.

São exemplos de forças conservativas a força gravitacional, a força elástica e a força elétrica.

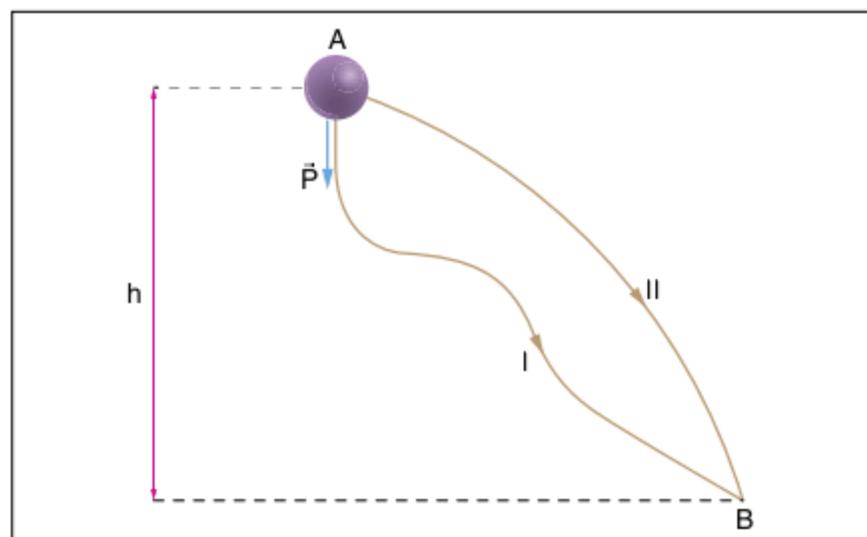


Fig. 37 O trabalho do peso no deslocamento da partícula de A a B em duas trajetórias distintas é o mesmo.

Dessa forma, o trabalho da força peso entre os pontos A e B da figura é o mesmo para as trajetórias I e II:

$$W_{P,A \rightarrow B}^I = W_{P,A \rightarrow B}^{II}$$

Mas sabemos que o trabalho do peso para ir de A a B tem sinal contrário ao trabalho do peso para ir de B a A:

$$W_{P,A \rightarrow B}^{II} = -W_{P,B \rightarrow A}^{II} \Rightarrow W_{P,A \rightarrow B}^I = -W_{P,B \rightarrow A}^{II}$$

Então:

$$W_{P,A \rightarrow B}^I + W_{P,B \rightarrow A}^{II} = 0$$

Portanto, outra maneira de definir forças conservativas é dizer que são aquelas cujos trabalhos fechados, isto é, para sair de um ponto e retornar ao mesmo ponto, são nulos.

## Conservação de energia mecânica

A atuação de forças conservativas sobre um sistema não altera a sua energia mecânica total. Portanto, quando um sistema recebe a ação somente de forças conservativas, a sua energia mecânica se conserva:

$$E_M = \text{constante}$$

As forças cujos trabalhos dependem da trajetória entre dois pontos dados são chamadas de forças não conservativas.

São exemplos de forças não conservativas o atrito e a resistência do ar.

Quando as forças não conservativas realizam trabalho, a energia mecânica não se conserva, podendo aumentar ou diminuir.

Uma forma mais ampla de estudar a variação da energia mecânica é dada por:

$$W_{F_{nc}} = \Delta E_M$$

ou seja, o trabalho das forças não conservativas é igual à variação da energia mecânica do sistema.

Se não existirem forças não conservativas ou se elas existirem, mas o trabalho for nulo, então:

$W_{F_{nc}} = 0 \Rightarrow \Delta E_M = 0 \Rightarrow E_M = \text{constante}$   
que é um caso particular da não conservação de energia.

- Se  $W_{F_{nc}} > 0 \Rightarrow \Delta E_M > 0 \Rightarrow E_{M,final} > E_{M,inicial}$   
Logo, a energia mecânica aumenta.
- Se  $W_{F_{nc}} < 0 \Rightarrow \Delta E_M < 0 \Rightarrow E_{M,final} < E_{M,inicial}$   
Logo, a energia mecânica diminui.

## Transformação de energia

Um corpo é solto do repouso em um ponto A, de altura  $h_A$  em relação a um referencial:

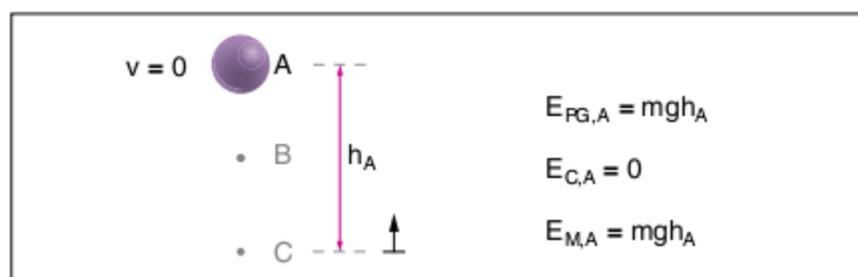


Fig. 38 Corpo solto do repouso de altura  $h_A$ .

Ao passar pelo ponto B, de altura  $h_B$ , o corpo possui velocidade  $v_B$ :

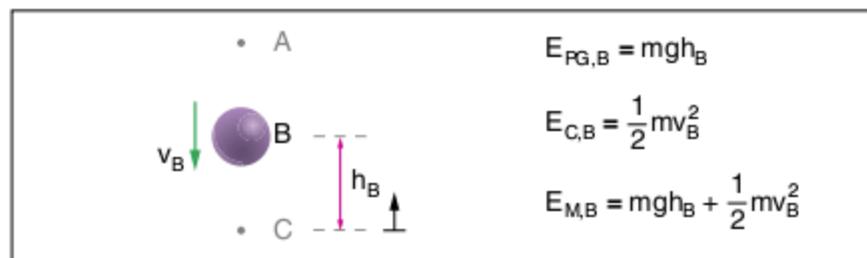


Fig. 39 Corpo passa pela altura  $h_B$  com velocidade  $v_B$

Ao passar pelo plano de referência em C, o corpo possui velocidade  $v_C$ :

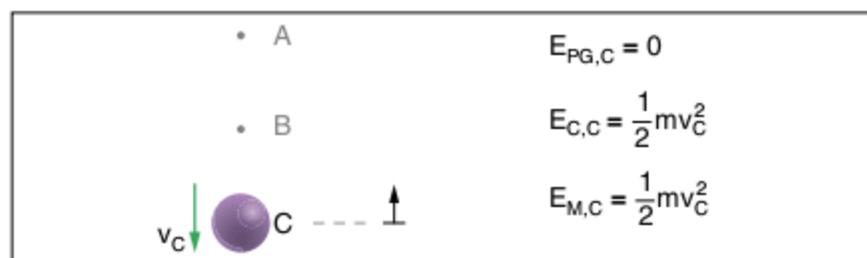


Fig. 40 Corpo passa pelo ponto de referência com velocidade  $v_C$

Constatamos, então, que, à medida que o corpo cai, ele perde energia potencial e ganha energia cinética.

Na ausência de forças não conservativas, como a resistência do ar, a energia mecânica do sistema se conserva:

$$E_{M,A} = E_{M,B} = E_{M,C}$$

Graficamente:

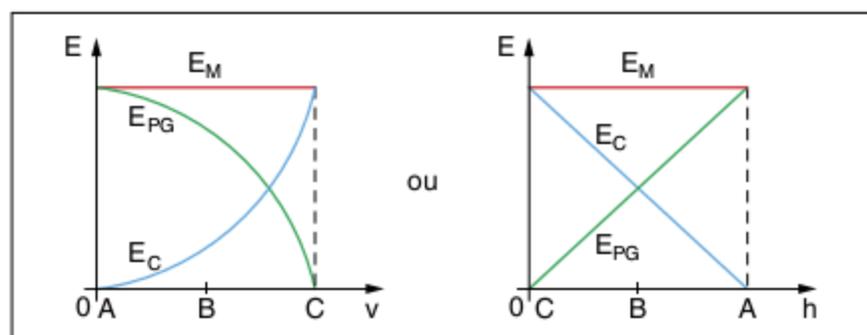


Fig. 41 Gráficos de energia de um corpo em queda livre.

Um corpo preso a uma mola é solto de uma posição A, em que a deformação da mola vale  $x_A$ :

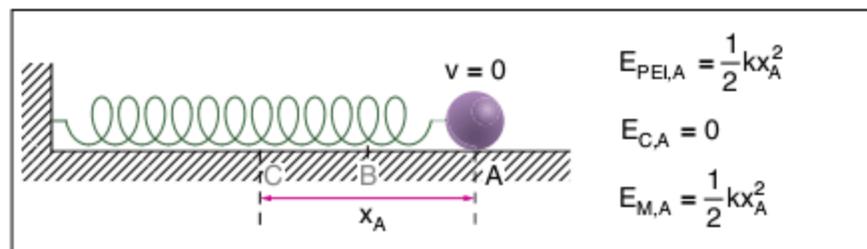


Fig. 42 Corpo solto do repouso com mola deformada de  $x_A$ .

Ao passar pelo ponto B, a deformação da mola vale  $x_B$  e o corpo possui velocidade  $v_B$ :

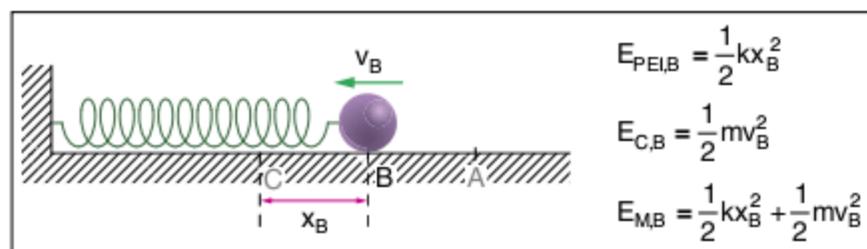


Fig. 43 Corpo passa pela posição em que a mola está deformada de  $x_B$  com velocidade  $v_B$

Ao passar pelo ponto C, a deformação da mola é nula e o corpo possui velocidade  $v_C$ :

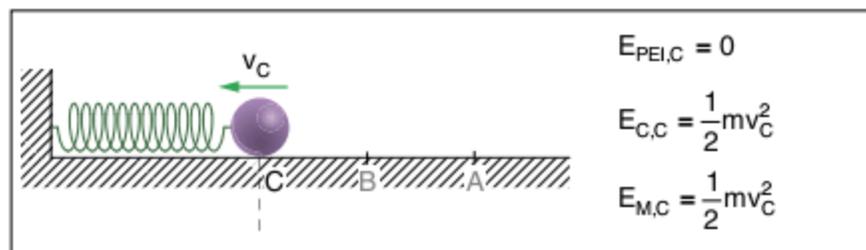


Fig. 44 Corpo passa pela posição de não deformação da mola com velocidade  $v_C$

Constatamos, então, que, à medida que o corpo se aproxima da posição de equilíbrio do sistema massa-mola, o sistema perde energia potencial elástica e ganha energia cinética.

Na ausência de forças não conservativas, como o atrito, a energia mecânica do sistema se conserva:

$$E_{M,A} = E_{M,B} = E_{M,C}$$

Graficamente:

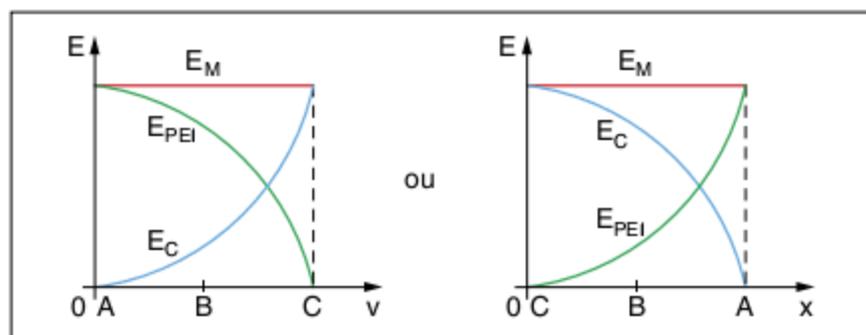


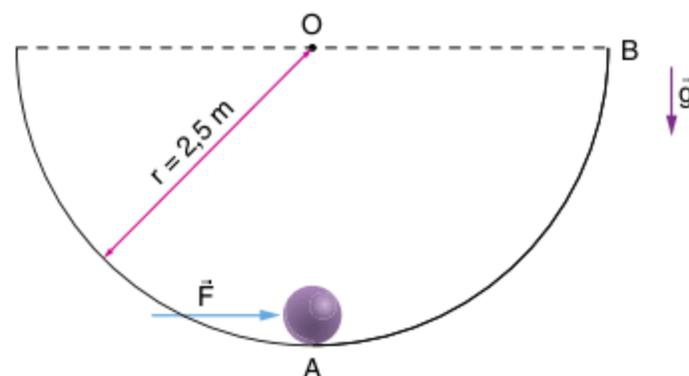
Fig. 45 Gráficos de energia de um corpo em movimento preso a uma mola.

Na verdade, a não conservação de energia mecânica não implica em não conservação de energia, pois quando se perde energia mecânica, ela se transforma em outras formas de energia, como a térmica e a química.

Sendo assim, podemos afirmar que a energia não se cria ou se destrói, apenas se transforma.

### Exercícios resolvidos

1 Uma partícula de massa 4 kg, inicialmente em repouso no ponto A, é levada ao ponto B de uma calha vertical de raio igual a 2,5 m, devido à ação da força  $\vec{F}$ , sempre horizontal, orientada para a direita, de módulo constante e igual a 60 N.

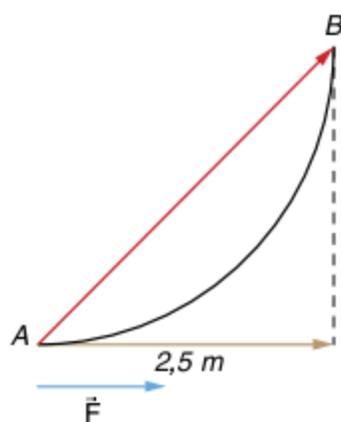


Considerando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , determine:

- o trabalho de  $\vec{F}$  ao longo do deslocamento AB.
- o trabalho do peso ao longo do deslocamento AB.
- o trabalho da normal ao longo do deslocamento AB.
- a velocidade com que o corpo atinge o ponto B.

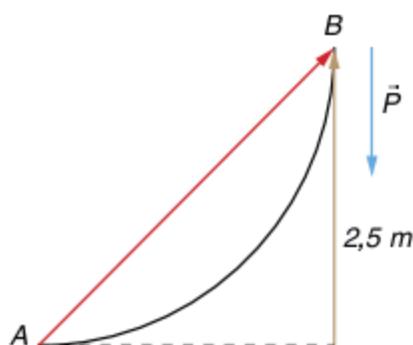
**Resolução:**

a) A força  $\vec{F}$  tem módulo, direção e sentido constantes. Logo, o trabalho de  $\vec{F}$  pode ser calculado como o produto do módulo de  $\vec{F}$  pela projeção de  $\overline{AB}$  na direção de  $\vec{F}$ , que é o raio.



Como o deslocamento e a força têm o mesmo sentido, então:  
 $W_F = +F \cdot r = 60 \cdot 2,5 \Rightarrow W_F = 150 \text{ J}$

b) A força  $\vec{P}$  tem módulo, direção e sentido constantes. Logo, o trabalho de  $\vec{P}$  pode ser calculado como o produto do módulo de  $\vec{P}$  pela projeção de  $\overline{AB}$  na direção de  $\vec{P}$ , que é o raio.



Como o deslocamento e o peso têm sentidos contrários, então:  
 $W_P = -P \cdot r = -40 \cdot 2,5 \Rightarrow W_P = -100 \text{ J}$

c) Como a normal, durante todo o deslocamento, é perpendicular à trajetória, então:  
 $W_N = 0$

d) O Teorema da Energia Cinética nos diz:

$$W_{FR} = \Delta E_C$$

Mas a resultante, neste caso, é a soma das forças peso, normal e F:

$$W_{FR} = W_P + W_N + W_F = -100 + 0 + 150 = 50 \text{ J}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_C &= E_{C,final} - E_{C,inicial} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 0^2 = 2v_B^2 \end{aligned}$$

Então:

$$W_R = \Delta E_C \Rightarrow 50 = 2v_B^2 \Rightarrow v_B^2 = 25 \Rightarrow v_B = 5 \text{ m/s}$$

**2** Um tambor de massa 40 kg está cheio com 160 L de água. O tambor é içado por uma força F a 10 m de altura. A água escoar uniformemente através de um orifício, de modo que o tambor chegue à parte superior no instante em que fica completamente vazio. Sabendo que a velocidade de subida é constante e a densidade da água é de 1 kg/L, determine o trabalho da força F do solo até a altura de 10 m. Considere  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

**Resolução:**

Como a velocidade é constante, então a aceleração é nula e a resultante das forças que atuam no sistema é nula durante todo o tempo. Como só atuam F e o peso, então:

$$F = P \Rightarrow F = mg$$

Para  $h = 0$ :

$$m = m_{\text{tambor}} + m_{\text{água}} = 40 \text{ kg} + 160 \text{ kg} = 200 \text{ kg}$$

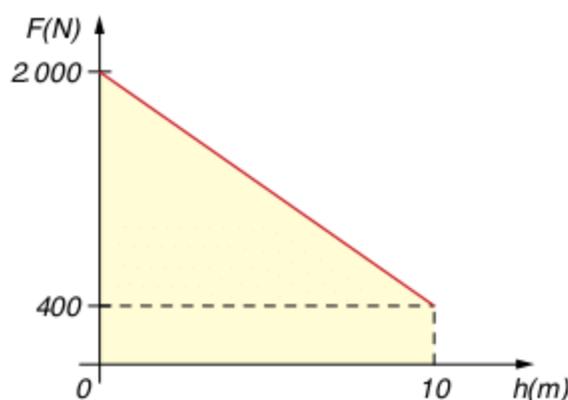
$$F = 200 \cdot 10 = 2.000 \text{ N}$$

Para  $h = 10 \text{ m}$ :

$$m = m_{\text{tambor}} + m_{\text{água}} = 40 \text{ kg} + 0 = 40 \text{ kg}$$

$$F = 40 \cdot 10 = 400 \text{ N}$$

Como a água escoar uniformemente, o gráfico  $F \times h$  é linear:

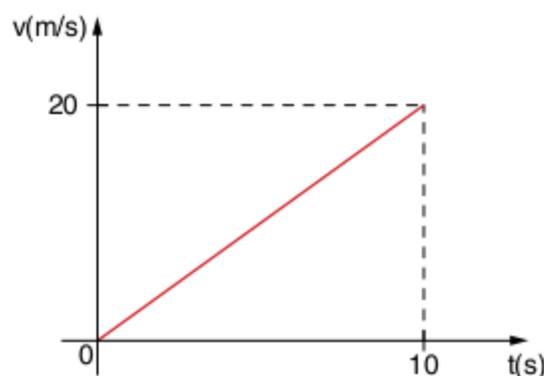


No gráfico, o trabalho de F é numericamente igual à área destacada:

$$\begin{aligned} W_F &= \frac{1}{2} \cdot (\text{base maior} + \text{base menor}) \cdot \text{altura} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2.000 + 400) \cdot 10 = \frac{1}{2} \cdot 2.400 \cdot 10 \end{aligned}$$

$$W_F = 12.000 \text{ J}$$

**3** Um corpo de massa 5 kg desloca-se ao longo de uma trajetória retilínea, sujeito à força resultante F. Sua velocidade varia com o tempo, conforme o gráfico a seguir.



Determine:

- a potência desenvolvida por F entre 0 e 10 s.
- a potência de F para o instante  $t = 8 \text{ s}$ .

**Resolução:**

a) A potência desenvolvida entre 0 e 10 s é a potência média nesse intervalo. Do gráfico, vemos que a aceleração é constante. Logo,  $F$  é constante e a sua potência média pode ser escrita como:

$$P_m = F \cdot v_m$$

Mas:

$$F = m \cdot a \text{ e } v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Do gráfico, temos:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20 - 0}{10 - 0} = 2 \text{ m/s}^2$$

$$\Delta s = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} \Rightarrow \Delta s = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 20 = 100 \text{ m}$$

Logo:

$$F = m \cdot a = 5 \cdot 2 = 10 \text{ N}$$

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{100}{10} = 10 \text{ m/s}$$

Assim:

$$P_m = 10 \cdot 10 \Rightarrow P_m = 100 \text{ W}$$

b) Como a força é constante, então a potência instantânea em 8 s pode ser escrita como:

$$P(8) = F \cdot v(8)$$

Como a aceleração é constante, temos:

$$v(t) = v_0 + a \cdot t \Rightarrow v(8) = 0 + 2 \cdot 8 = 16 \text{ m/s}$$

Como  $F = 10 \text{ N}$ :

$$P(8) = 10 \cdot 16 \Rightarrow P(8) = 160 \text{ W}$$

**4** Uma bomba hidráulica deve retirar água de um poço à razão de 3 L/s e levá-la até a caixa-d'água de um prédio, localizada a 30 m de altura em relação ao poço. Sabendo que o rendimento da bomba é de 60%, a densidade da água é de 1 kg/L,  $g = 10 \text{ m/s}^2$  e  $1 \text{ hp} \cong 750 \text{ W}$ , determine a potência da bomba em hp.

**Resolução:**

A potência média útil é dada por:

$$P_U = \frac{W_U}{\Delta t} \text{ e } W_U = \Delta E_{PG} = mgh$$

Logo:

$$P_U = \frac{mgh}{\Delta t} = \frac{m}{\Delta t} gh$$

Sabemos que:

$$\frac{V}{\Delta t} = 3 \text{ L/s} \Rightarrow \frac{m}{\Delta t} = 3 \text{ kg/s}$$

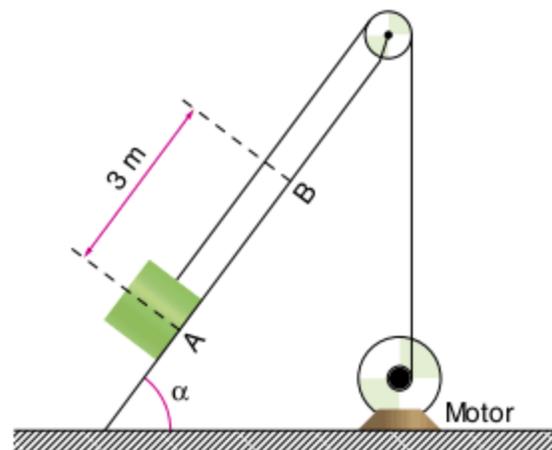
Logo, como  $h = 30 \text{ m}$ :

$$P_U = 3 \cdot 10 \cdot 30 \Rightarrow P_U = 900 \text{ W}$$

Mas:

$$\eta = \frac{P_U}{P_T} \Rightarrow P_T = \frac{P_U}{\eta} = \frac{900}{0,6} = 1.500 \text{ W} \Rightarrow P_T = 2 \text{ hp}$$

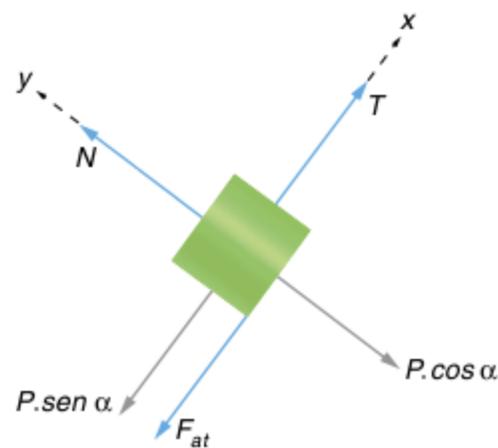
**5** O motor da figura a seguir leva o bloco de 2 kg da posição A para a posição B, com velocidade constante, em 6 s. O coeficiente de atrito entre o bloco e o plano inclinado vale 0,5. Sabendo que  $\cos \alpha = 0,6$  e  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , determine a potência do motor.



**Resolução:**

A potência do motor é a potência da força de tração no fio. Como a velocidade é constante, então a aceleração é nula e a resultante é nula.

Para o cálculo de  $T$ , vamos isolar o bloco:



Em  $y$ , há equilíbrio de forças:

$$N = P \cdot \cos \alpha$$

Em  $x$ , há equilíbrio de forças:

$$T = P \cdot \sin \alpha + F_{at} = P \cdot \sin \alpha + \mu \cdot N = P \cdot \sin \alpha + \mu \cdot P \cdot \cos \alpha = mg(\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) = 2 \cdot 10 \cdot (0,8 + 0,5 \cdot 0,6) = 22 \text{ N}$$

Como a tração é constante, sua potência pode ser escrita como:

$$P = T \cdot v$$

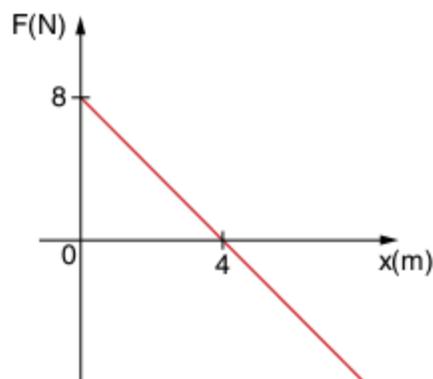
Como  $v$  é constante:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3}{6} = 0,5 \text{ m/s}$$

Logo:

$$P = 22 \cdot 0,5 \Rightarrow P = 11 \text{ W}$$

**6** O gráfico a seguir representa a força resultante que atua sobre um corpo de massa 2 kg, em função de sua posição.



Sabendo que, para  $x = 0$ , a velocidade do corpo vale 3 m/s, determine:

- a posição em que a velocidade é máxima.
- a velocidade máxima.
- a velocidade para  $x = 7$  m.

**Resolução:**

a) Se  $F$  é a resultante das forças, então:

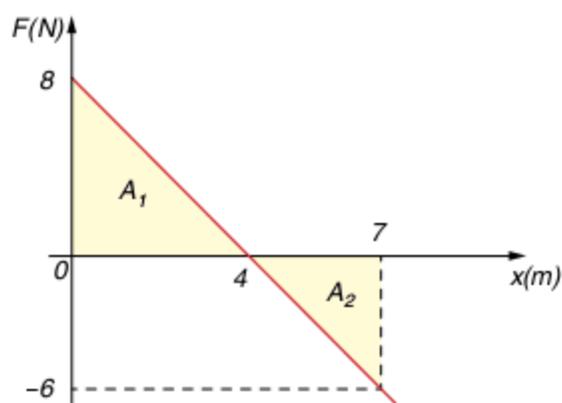
$$W_F = \Delta E_C = E_{C,final} - E_{C,inicial}$$

A velocidade será máxima quando a energia cinética final for máxima. Isso acontece para o máximo trabalho de  $F$ , contado a partir de  $x = 0$ , que é o ponto para o qual conhecemos a energia cinética inicial. A partir de  $x = 0$ , a área do gráfico, que representa o trabalho de  $F$ , vai aumentando à medida que  $x$  aumenta, até o limite em que  $x = 4$  m, pois, a partir daí, começa a diminuir.

Então:

$v$  é máxima para  $x = 4$  m.

O gráfico de  $x = 0$  a  $x = 7$  m é dado por:



b) De  $x = 0$  a  $x = 4$  m:

$$W_F = A_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16 \text{ J}$$

$$E_{C,inicial} = \frac{1}{2} m \cdot v_{inicial}^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3^2 = 9 \text{ J}$$

$$E_{C,final} = \frac{1}{2} m \cdot v_{final}^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot v_{final}^2 = v_{final}^2$$

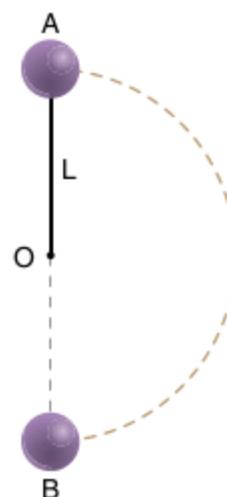
$$W_F = E_{C,final} - E_{C,inicial} \Rightarrow 16 = v_{final}^2 - 9 \Rightarrow v_{final} = 5 \text{ m/s}$$

c) De  $x = 0$  a  $x = 7$  m:

$$W_F = A_1 - A_2 = 16 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \Rightarrow W_F = 7 \text{ J}$$

$$W_F = E_{C,final} - E_{C,inicial} \Rightarrow 7 = v_{final}^2 - 9 \Rightarrow v_{final} = 4 \text{ m/s}$$

**7** A figura a seguir mostra um corpo de massa  $m$ , preso por uma haste de comprimento  $L$  a um ponto  $O$ . O sistema é abandonado do ponto  $A$ .



Determine a tração na haste quando o corpo passa pelo ponto  $B$ , nos seguintes casos:

- ausência de atritos.
- quando, devido ao atrito, o sistema perde 50% de sua energia mecânica inicial, de  $A$  até  $B$ , adotando o referencial em  $B$ .

**Resolução:**

a) Na ausência de atritos, temos:

$$E_{M,A} = E_{M,B}$$

Com o referencial em  $B$ :

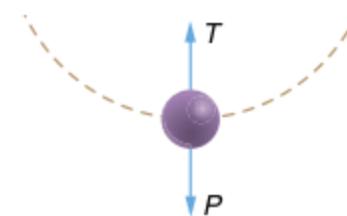
$$E_{M,A} = E_{PG,A} + E_{C,A} = mgh_A + 0 = mg \cdot 2L = 2mgL$$

$$E_{M,B} = E_{PG,B} + E_{C,B} = 0 + \frac{1}{2} mv_B^2 = \frac{1}{2} mv_B^2$$

Assim:

$$2mgL = \frac{1}{2} mv_B^2 \Rightarrow v_B^2 = 4gL$$

Isolando o corpo em  $B$ :



Como o corpo descreve um movimento circular:

$$F_{R,cp} = T - P \Rightarrow \frac{mv_B^2}{R} = T - P \Rightarrow \frac{mv_B^2}{L} = T - mg$$

$$T = \frac{m \cdot 4gL}{L} + mg \Rightarrow T = 5mg$$

b) Com atrito:

$$W_{F_{at}} = \Delta E_M \Rightarrow W_{F_{at}} = E_{M,B} - E_{M,A}$$

Mas:

$$W_{F_{at}} = -50\% \cdot E_{M,A} = -0,5 \cdot 2mgL = -mgL$$

Assim:

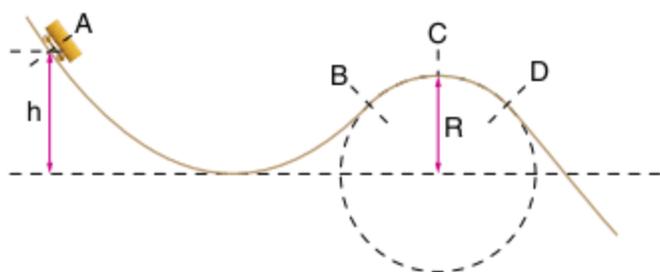
$$-mgL = \frac{1}{2} mv_B^2 - 2mgL \Rightarrow mgL = \frac{1}{2} mv_B^2 \Rightarrow v_B^2 = 2gL$$

Isolando o corpo em B, do mesmo modo como no item a):

$$F_{R,cp} = T - P \Rightarrow \frac{mv_B^2}{R} = T - P \Rightarrow \frac{mv_B^2}{L} = T - mg$$

$$T = \frac{m \cdot 2gL}{L} + mg \Rightarrow T = 3mg$$

**8** Um carrinho de massa  $m$  percorre uma montanha-russa cujo trecho BCD é um arco de circunferência de raio  $R$ , conforme a figura. Se o carrinho é solto do repouso em A, de uma altura  $h = 1,25R$ , determine, desprezando o atrito, a força feita pelos trilhos sobre o carrinho no ponto C.



**Resolução:**

Entre A e C, não existe atrito:

$$E_{M,A} = E_{M,C}$$

Tomando o referencial na linha tracejada horizontal:

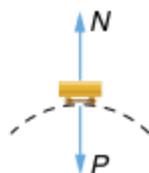
$$E_{M,A} = E_{PG,A} + E_{C,A} = mgh_A + 0 = mg \cdot 1,25R = 1,25mgR$$

$$E_{M,C} = E_{PG,C} + E_{C,C} = mgh_C + \frac{1}{2}mv_C^2 = mgR + \frac{1}{2}mv_C^2$$

Assim:

$$1,25mgR = mgR + \frac{1}{2}mv_C^2 \Rightarrow \frac{v_C^2}{2} = 0,25gR \Rightarrow v_C^2 = 0,5gR$$

Isolando o corpo em C:

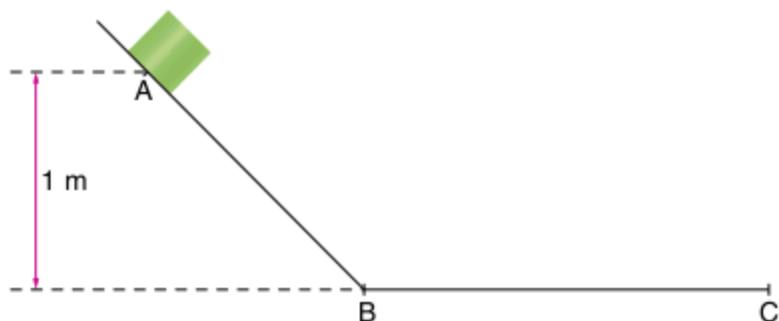


Como o corpo descreve um movimento circular:

$$F_{R,cp} = P - N \Rightarrow \frac{mv_C^2}{R} = mg - N$$

$$N = mg - \frac{m \cdot 0,5gR}{R} \Rightarrow N = 0,5mg$$

**9** Um corpo de massa  $3 \text{ kg}$  possui velocidade de  $4 \text{ m/s}$  no ponto A. Sabe-se que o corpo percorre a trajetória ABC, parando em C. O trecho AB é perfeitamente liso, mas, a partir do ponto B, existe atrito, com  $\mu = 0,5$ . Dado:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



Determine:

- a velocidade do corpo ao atingir o ponto B.
- o trabalho realizado pela força de atrito no trecho BC.
- a distância BC.

**Resolução:**

a) Entre A e B, não existe atrito:

$$E_{M,A} = E_{M,B}$$

Tomando o referencial em B:

$$E_{M,A} = E_{PG,A} + E_{C,A} = mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2$$

$$= 3 \cdot 10 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4^2 = 54 \text{ J}$$

$$E_{M,B} = E_{PG,B} + E_{C,B} = 0 + \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{3v_B^2}{2}$$

Assim:

$$\frac{3v_B^2}{2} = 54 \Rightarrow v_B^2 = 36 \Rightarrow v_B = 6 \text{ m/s}$$

b) Entre B e C, existe atrito:

$$W_{F_{nc}} = \Delta E_M \Rightarrow W_{F_{at}} = E_{M,C} - E_{M,B}$$

Como  $E_{M,C} = 0$  e  $E_{M,B} = E_{M,A} = 54 \text{ J}$ , então:

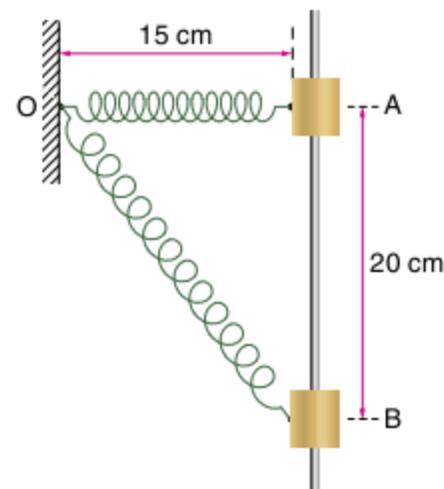
$$W_{F_{at}} = 0 - 54 \Rightarrow W_{F_{at}} = -54 \text{ J}$$

c) Como a força de atrito é constante:

$$W_{F_{at}} = -F_{at} \cdot BC = -\mu \cdot N \cdot BC = -\mu \cdot mg \cdot BC$$

$$W_{F_{at}} = -54 \text{ J} \Rightarrow -0,5 \cdot 3 \cdot 10 \cdot BC = -54 \Rightarrow BC = 3,6 \text{ m}$$

**10** Na figura a seguir, o cilindro de  $4 \text{ kg}$  de massa, acoplado a uma barra, desliza sem atrito sobre ela. O cilindro está ligado ao ponto O através de uma mola de constante elástica igual a  $600 \text{ N/m}$  e comprimento natural de  $10 \text{ cm}$ . Sabendo que o sistema foi solto do repouso e que  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , determine a velocidade do cilindro ao passar pelo ponto B,  $20 \text{ cm}$  abaixo de A.



**Resolução:**

Entre A e B, não existe atrito:

$$E_{M,A} = E_{M,B}$$

Tomando o referencial em B:

$$E_{M,A} = E_{PG,A} + E_{C,A} + E_{PEI,A} = mgh_A + 0 + \frac{1}{2}kx_A^2$$

$$E_{M,B} = E_{PG,B} + E_{C,B} + E_{PEI,B} = 0 + \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}kx_B^2$$

Como  $OA = 15 \text{ cm}$  e  $h_A = AB = 20 \text{ cm}$ , então  $OB = 25 \text{ cm}$ .

Se o comprimento natural da mola ( $\ell_0$ ) é  $10 \text{ cm}$ :

$$x_A = OA - \ell_0 = 15 \text{ cm} - 10 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$$

$$x_B = OB - \ell_0 = 25 \text{ cm} - 10 \text{ cm} = 15 \text{ cm}$$

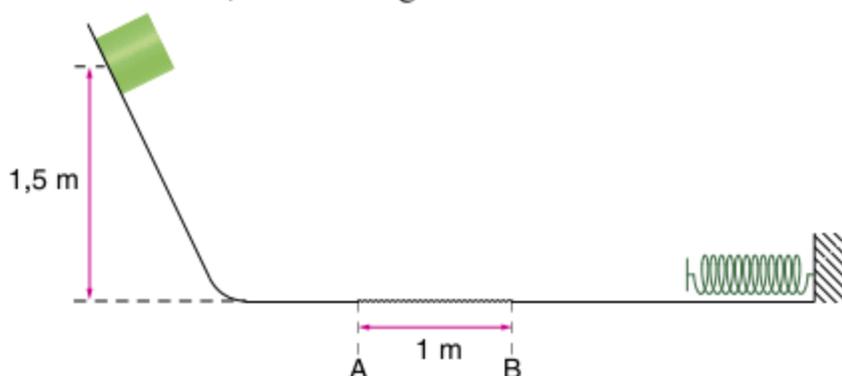
Assim:

$$mgh_A + \frac{1}{2}kx_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}kx_B^2 \Rightarrow$$

$$4 \cdot 10 \cdot 0,2 + \frac{1}{2} \cdot 600 \cdot 0,05^2 = \frac{1}{2} \cdot 4v_B^2 + \frac{1}{2} \cdot 600 \cdot 0,15^2 \Rightarrow$$

$$8 + 0,75 = 2v_B^2 + 6,75 \Rightarrow 2v_B^2 = 2 \Rightarrow v_B = 1 \text{ m/s}$$

**11** Um corpo de  $1 \text{ kg}$  de massa é solto do repouso de uma altura de  $1,5 \text{ m}$  e desce uma rampa até atingir a mola de constante elástica  $500 \text{ N/m}$ . Sabe-se que o atrito só atua no trecho  $AB$  e que o seu coeficiente vale  $0,5$ . Determine a deformação máxima da mola, assumindo  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



**Resolução:**

Ao longo do percurso existe atrito:

$$W_{F_{nc}} = \Delta E_M \Rightarrow W_{F_{at}} = E_{M,final} - E_{M,initial}$$

Mas:

$$W_{F_{at}} = -F_{at} \cdot d = -\mu \cdot N \cdot d = -\mu \cdot mg \cdot d = -0,5 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 1 = -5 \text{ J}$$

Tomando o referencial em A:

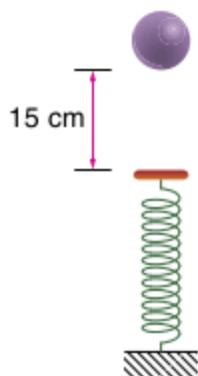
$$E_{M,initial} = mgh = 1 \cdot 10 \cdot 1,5 = 15 \text{ J}$$

$$E_{M,final} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \cdot 500x^2 = 250x^2$$

Assim:

$$-5 = 250x^2 - 15 \Rightarrow 10 = 250x^2 \Rightarrow x^2 = 0,04 \Rightarrow x = 20 \text{ cm}$$

**12** Um corpo de massa  $2 \text{ kg}$  é solto do repouso de uma altura de  $15 \text{ cm}$  em relação a uma mola não deformada, de constante elástica igual a  $200 \text{ N/m}$ .



Sabendo que  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , determine:

- a deformação da mola quando a velocidade do corpo for máxima.
- a velocidade máxima do corpo.

**Resolução:**

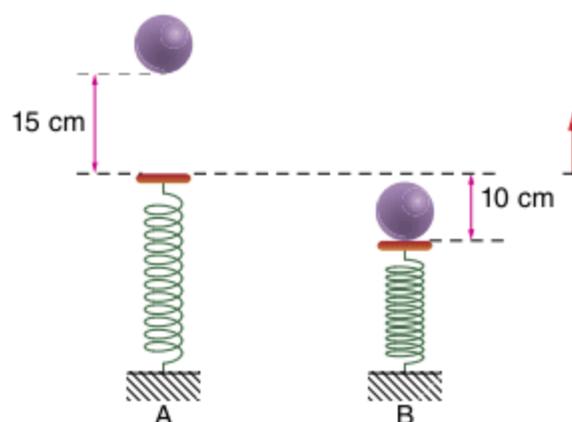
- O corpo terá velocidade máxima na posição em que a força elástica for igual ao peso, pois, a partir deste ponto, com o aumento da deformação, a força elástica, dirigida para cima, será maior que o peso, o que começará a desacelerar o corpo. Chegamos à mesma conclusão se soubermos que a velocidade é máxima (ou mínima) quando a aceleração (que é a derivada da velocidade em relação ao tempo) for nula, o que implica em resultante nula.

Logo:

$$v_{max} \Rightarrow F_R = 0 \Rightarrow kx = mg \Rightarrow$$

$$x = \frac{mg}{k} = \frac{2 \cdot 10}{200} \Rightarrow x = 10 \text{ cm}$$

- Analisando a posição inicial e a posição de máxima velocidade:



Entre as situações A e B, há conservação de energia mecânica:

$$E_{M,A} = E_{M,B}$$

Com o referencial da figura:

$$E_{M,A} = E_{PG,A} + E_{C,A} + E_{PEI,A} = mgh_A + 0 + 0$$

$$= 2 \cdot 10 \cdot 0,15 = 3 \text{ J}$$

$$E_{M,B} = E_{PG,B} + E_{C,B} + E_{PEI,B} = -mgx + \frac{1}{2}mv_{max}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

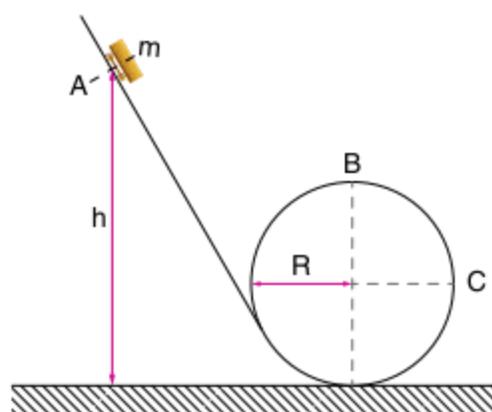
$$= -2 \cdot 10 \cdot 0,10 + \frac{1}{2} \cdot 2v_{max}^2 + \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 0,10^2$$

$$= -2 + v_{max}^2 + 1 = v_{max}^2 - 1$$

Assim:

$$3 = v_{max}^2 - 1 \Rightarrow v_{max} = 2 \text{ m/s}$$

**13** A figura a seguir ilustra um carrinho de massa  $m$  percorrendo um trecho de montanha-russa, cujo trecho circular tem raio  $R$ .



Desprezando todos os atritos e supondo que o carrinho seja abandonado em A, determine:

- o menor valor de  $h$  para que o carrinho efetue a trajetória completa.
- o valor da força que o trilho exerce sobre o carrinho no ponto C, neste caso.

**Resolução:**

a) Entre A e B, há conservação de energia mecânica:

$$E_{M,A} = E_{M,B}$$

Tomando o referencial no solo:

$$E_{M,A} = E_{PG,A} + E_{C,A} = mgh_A + 0 = mgh$$

$$E_{M,B} = E_{PG,B} + E_{C,B} = mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2 = mg \cdot 2R + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$= 2mgR + \frac{1}{2}mv_B^2$$

Assim:

$$mgh = 2mgR + \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow gh = 2gR + \frac{v_B^2}{2} \quad (I)$$

A mínima altura  $h$  será aquela para a qual o carrinho chegará ao ponto B na iminência de perder o contato com o trilho, ou seja, com a normal tendendo a zero.

Isolando o carrinho em B:



Como o corpo descreve um movimento circular:

$$F_{R,cp} = P + N = P \Rightarrow \frac{mv_B^2}{R} = mg \Rightarrow v_B^2 = gR \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I):

$$gh = 2gR + \frac{gR}{2} \Rightarrow h = \frac{5R}{2}$$

b) Entre A e C, há conservação de energia mecânica:

$$E_{M,A} = E_{M,C}$$

Mas:

$$E_{M,A} = mgh = mg \cdot \frac{5R}{2} = \frac{5mgR}{2}$$

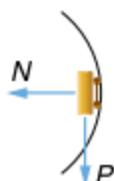
$$E_{M,C} = E_{PG,C} + E_{C,C} = mgh_C + \frac{1}{2}mv_C^2 = mgR + \frac{1}{2}mv_C^2$$

Logo:

$$mgR + \frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{5mgR}{2} \Rightarrow \frac{v_C^2}{2} = \frac{5gR}{2} - gR \Rightarrow$$

$$v_C^2 = 3gR$$

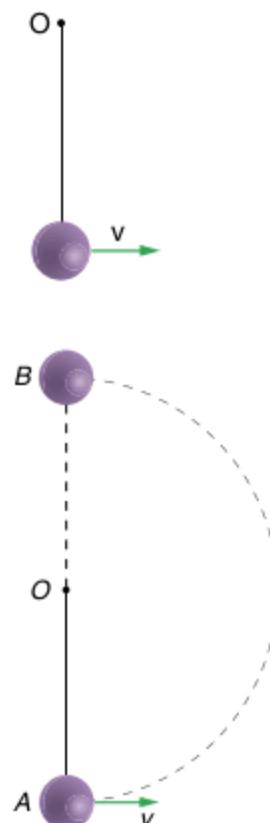
Isolando o carrinho em C:



Como o corpo descreve um movimento circular:

$$F_{R,cp} = N \Rightarrow \frac{mv_C^2}{R} = N \Rightarrow N = \frac{m \cdot 3gR}{R} \Rightarrow N = 3mg$$

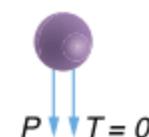
- 14** Uma pequena esfera de aço está em repouso, presa por um fio ideal de comprimento 0,5 m. Determine a mínima velocidade  $v$  que se deve fornecer à esfera para que ela consiga dar uma volta completa, sabendo que  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



**Resolução:**

A mínima velocidade  $v$  será aquela com a qual a esfera atingirá a altura máxima, em B, na iminência do fio perder a tração, ou seja, com a tração tendendo a zero.

Isolando a esfera em B:



Como a esfera descreve um movimento circular:

$$F_{R,cp} = P + T = P \Rightarrow \frac{mv_B^2}{R} = mg \Rightarrow v_B^2 = gR = 10 \cdot 0,5 = 5$$

Entre A e B, há conservação de energia mecânica:

$$E_{M,A} = E_{M,B}$$

Tomando o referencial em A:

$$E_{M,A} = E_{PG,A} + E_{C,A} = 0 + \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_{M,B} = E_{PG,B} + E_{C,B} = mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2 = mg \cdot 2R + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$= 2mgR + \frac{1}{2}mv_B^2$$

Assim:

$$\frac{1}{2}mv^2 = 2mgR + \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v^2 = 4gR + v_B^2 = 4 \cdot 10 \cdot 0,5 + 5$$

$$v^2 = 25 \Rightarrow v = 5 \text{ m/s}$$

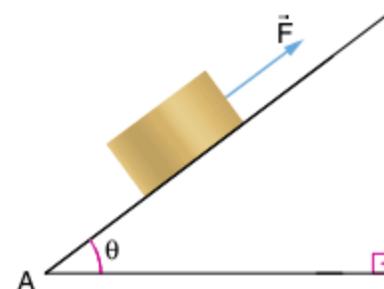
## Revisando

Considere, quando necessário,  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

**1** Na figura, um bloco de massa  $5 \text{ kg}$  é empurrado por uma força  $F$  constante, paralela ao plano, de módulo  $90 \text{ N}$ , a partir do repouso em A.

Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre as superfícies do bloco e do plano vale  $0,25$ , que  $\sin\theta = 0,6$  e que o bloco atinge um ponto B  $4 \text{ s}$  após iniciado o movimento em A, determine:

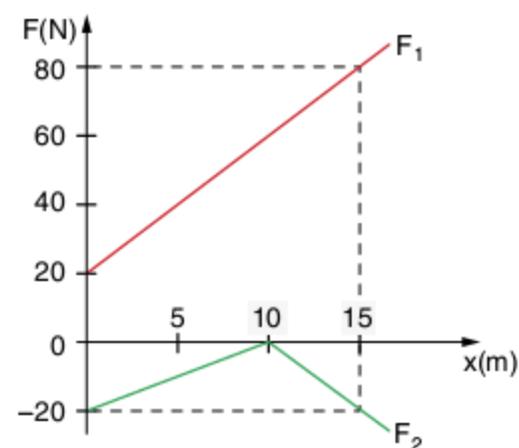
- a aceleração do bloco.
- a distância entre A e B.
- o trabalho da normal entre A e B.
- o trabalho de  $F$  entre A e B.
- o trabalho do peso entre A e B.
- o trabalho da força de atrito entre A e B.
- o trabalho da resultante entre A e B.



**2** O gráfico ao lado representa a variação das forças  $F_1$  e  $F_2$ , que são as únicas forças que agem em um corpo que se desloca sobre o eixo Ox.

Determine, para os primeiros  $15 \text{ m}$  de movimento:

- o trabalho de  $F_1$ .
- o trabalho de  $F_2$ .
- o trabalho da resultante.



- 3** Um bloco de 2,0 kg de massa foi lançado sobre uma mesa horizontal, rugosa, sendo-lhe comunicada uma velocidade inicial de módulo 4,0 m/s. Devido à força de atrito, suposta constante, o bloco percorreu 4,0 m até parar. Determine:
- a potência média da força de atrito ao longo do deslocamento considerado.
  - a potência instantânea da força de atrito no instante do lançamento.
  - a potência instantânea da força de atrito no instante em que a velocidade do bloco foi reduzida à metade da velocidade inicial.

**4 Fuvest (Adapt.)** Um automóvel possui um motor de potência máxima  $P_0$ . O motor transmite sua potência completamente às rodas. Movendo-se em uma estrada retilínea horizontal, na ausência de vento, o automóvel sofre a resistência do ar, que é expressa por uma força cuja magnitude é  $F = Av^2$ , onde  $A$  é uma constante positiva e  $v$  é a velocidade do automóvel. O sentido dessa força é oposto ao da velocidade do automóvel. Não há outra força resistindo ao movimento. Nessas condições, a velocidade máxima que o automóvel pode atingir é  $v_0$ . Se quiséssemos trocar o motor desse automóvel por um outro de potência máxima  $P$ , de modo que a velocidade máxima atingida nas mesmas condições fosse  $v = 2v_0$ , qual deveria ser a relação entre  $P$  e  $P_0$ ?

- 5 Unicamp (Adapt.)** Um carro tem 1.200 kg e pode acelerar, do repouso até uma velocidade de 108 km/h, em 10 s, com aceleração constante. Adotando  $1 \text{ hp} = 750 \text{ W}$ , determine:
- o trabalho realizado durante esses 10 s.
  - a potência média do carro durante esses 10 s, em hp.

- 6** Uma bomba hidráulica deve tirar água de um poço à razão de 7,5 L/s. O poço possui 10 m de profundidade e o rendimento da bomba é de 80%. Sabendo que  $1 \text{ hp} \cong 750 \text{ W}$  e que a massa específica da água é igual a  $1 \text{ g/cm}^3$ , determine:
- a potência da bomba, em hp.
  - baseado na potência da bomba do item a, o volume de água, em L, que poderia ser tirado em 1 h se o rendimento fosse de apenas 40%.

**7** Os geradores de uma usina hidrelétrica, trabalhando por duas horas, asseguram uma energia elétrica capaz de suprir o consumo domiciliar médio de 4 kWh de uma cidade com 200.000 domicílios. A usina possui 5 turbinas e por cada uma delas passa água a uma vazão de  $100 \text{ m}^3/\text{s}$ . Sabendo que o desnível da queda-d'água é de 100 m e que a densidade da água é de  $1 \text{ g/cm}^3$ , determine o percentual de potência dissipada no processo de transformação de energia mecânica em elétrica.

**8** Um corpo de massa 10 kg está preso a uma mola de constante elástica 100 N/m e comprimento natural 8 m. Adotando  $x = 8 \text{ m}$  para a posição da mola não deformada, determine a energia potencial elástica para as posições:

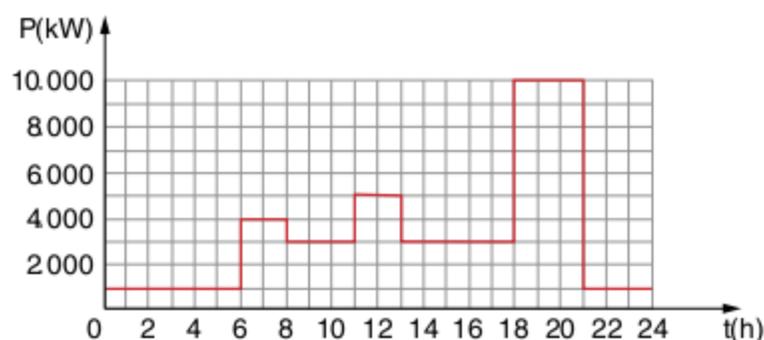
- a)  $x = 4 \text{ m}$
- b)  $x = 6 \text{ m}$
- c)  $x = 8 \text{ m}$
- d)  $x = 10 \text{ m}$
- e)  $x = 12 \text{ m}$

Determine o trabalho realizado pela força elástica para deslocar o corpo da posição:

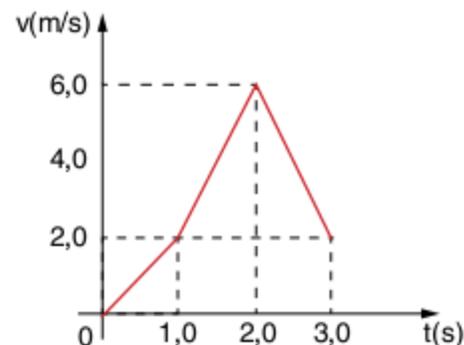
- f)  $x = 8 \text{ m}$  para  $x = 12 \text{ m}$
- g)  $x = 12 \text{ m}$  para  $x = 10 \text{ m}$
- h)  $x = 6 \text{ m}$  para  $x = 4 \text{ m}$
- i)  $x = 4 \text{ m}$  para  $x = 8 \text{ m}$
- j)  $x = 6 \text{ m}$  para  $x = 10 \text{ m}$
- k)  $x = 12 \text{ m}$  para  $x = 6 \text{ m}$

- 9** Um corpo de massa 5 kg é solto do repouso do ponto A, a uma altura de 100 m em relação ao solo. Ao passar pelo ponto B, a uma altura de 20 m, sua velocidade vale 20 m/s. Sabendo que a energia potencial gravitacional é tomada como nula no solo, determine:
- a energia potencial em A.
  - a energia cinética em A.
  - a energia potencial em B.
  - a energia cinética em B.
  - a variação da energia mecânica entre A e B.
  - o trabalho do peso entre A e B.

- 10 Ence** O gráfico ao lado mostra como a potência gerada por uma usina elétrica, em quilowatts (kW), varia ao longo das horas do dia. Calcule a energia fornecida por essa usina, em quilowatts-hora (kWh), entre 16 h e 21 h.

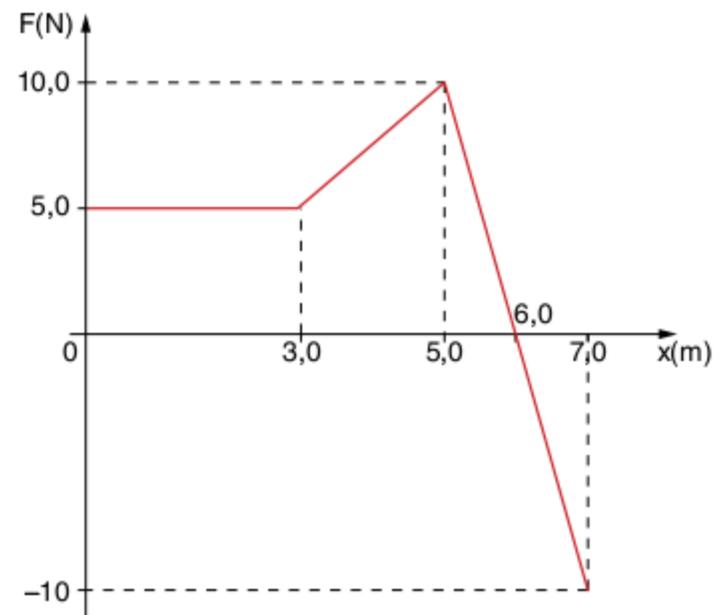


- 11 UFF-RJ (Adapt.)** O gráfico ao lado representa a velocidade de um carrinho de massa 0,50 kg em função do tempo, no intervalo de 0 a 3,0 s. Calcule o trabalho realizado pela resultante de forças que atuam no carrinho nesse intervalo.



**12 PUC-SP (Adapt.)** A força resultante que atua sobre uma partícula de 100 g, em movimento retilíneo, na direção e no sentido de sua velocidade, varia com a posição  $x$  da partícula, como é indicado no gráfico. Sabendo que a energia cinética da partícula era de 10 J ao passar por  $x = 0$ , determine:

- a velocidade da partícula quando  $x = 2$  m.
- a posição da partícula em que sua velocidade é máxima.
- a velocidade máxima.

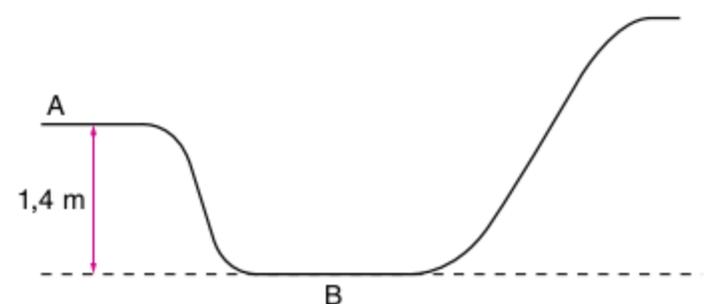


**13** Um corpo é lançado com velocidade de 10 m/s, formando um ângulo de  $60^\circ$  com a horizontal, de uma altura de 15 m em relação ao solo e começa a subir. Determine:

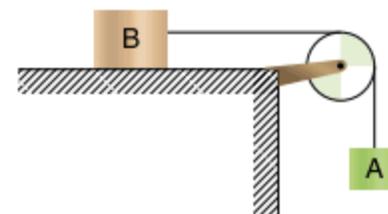
- a altura em que o corpo terá velocidade igual a 8 m/s.
- a velocidade do corpo ao atingir o solo.
- a mínima velocidade do corpo durante todo o trajeto.
- a altura em que a velocidade é mínima.

**14** Um corpo rola sobre uma pista sem atrito, a partir do ponto A, com velocidade igual a 6 m/s, como na figura ao lado. Determine:

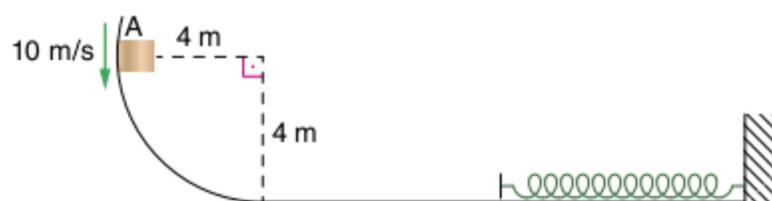
- a velocidade do corpo em B.
- a altura máxima atingida pelo corpo.



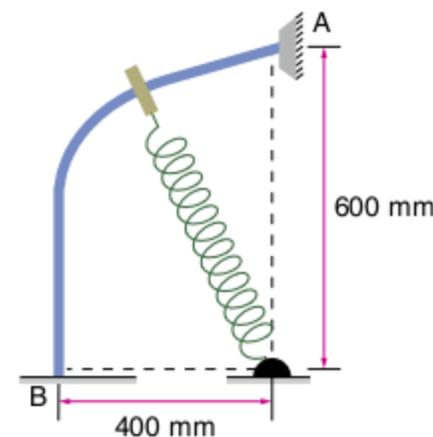
**15** Na figura ao lado, os fios e as polias são ideais e não há atrito. Os corpos A e B, de massas 4 kg e 6 kg, respectivamente, são soltos a partir do repouso. Determine as velocidades dos corpos quando A tiver descido 2 m.



**16** Um corpo de massa 500 g é lançado do ponto A de uma pista cujo corte vertical é um quadrante de circunferência de raio 4 m, com velocidade de 10 m/s para baixo. Considerando desprezível o atrito, determine a máxima deformação que sofre a mola de constante elástica 1.000 N/m.

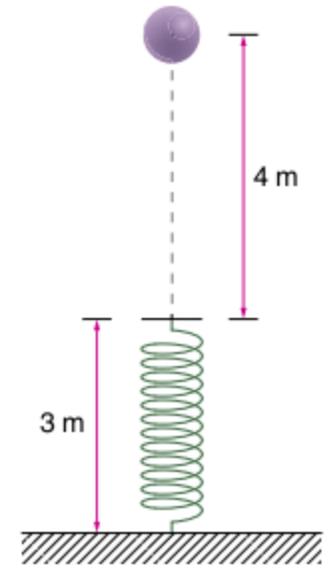


**17** Um cursor de dimensões desprezíveis e de massa  $m = 1$  kg está ligado a uma mola de constante elástica 200 N/m e comprimento livre 200 mm. O sistema encontra-se em um plano vertical. Se o cursor é liberado a partir do repouso em A e se desloca sem atrito, ao longo da guia, determine a velocidade com que ele atinge o ponto B.



**18** Um corpo de massa 1 kg é abandonado do repouso, 4 m acima de uma mola ideal vertical de comprimento 3 m e constante elástica 100 N/m, conforme a figura ao lado. Determine:

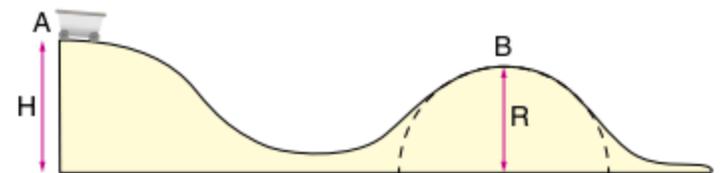
- o menor comprimento que a mola atingirá.
- a deformação da mola quando o corpo atinge sua velocidade máxima.
- a velocidade máxima do corpo.



**19** Um pêndulo de peso  $P$ , preso a um fio inextensível, é abandonado do repouso de uma posição em que o fio forma um ângulo  $\theta$  com a vertical. Sabendo que  $\cos \theta = 0,25$ , determine o valor da tração no fio quando o corpo passa pelo ponto mais baixo da trajetória.

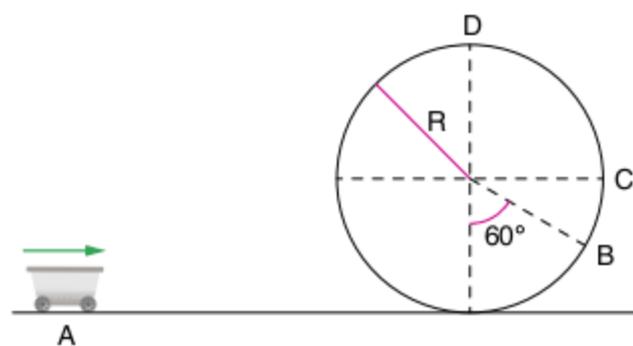
**20** Um carrinho de massa 300 kg escorrega sem atrito em uma montanha-russa, partindo do repouso no ponto A, a uma altura  $H$ , e sobe o trecho seguinte em forma de um semicírculo de raio  $R$ . Sabendo que  $H = 10$  m e  $R = 8$  m, determine:

- a velocidade do carrinho em B.
- a força que o carrinho exerce sobre o trilho em B.



**21** Na figura ao lado, podemos observar a montanha-russa de um parque de diversões. Um carrinho de massa total  $m$  é lançado do ponto A, de tal modo que execute o *looping* completo no limite de perder o contato com o trilho. Determine a velocidade do carrinho e a força que o trilho exerce sobre ele:

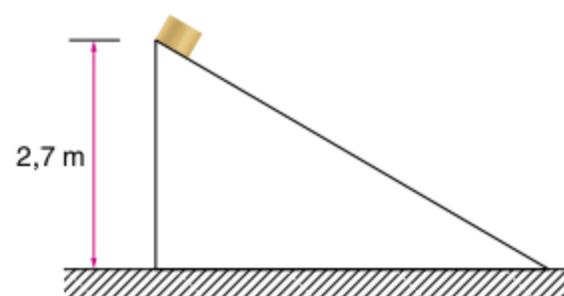
- a) no ponto D.
- b) no ponto A.
- c) no ponto B.
- d) no ponto C.



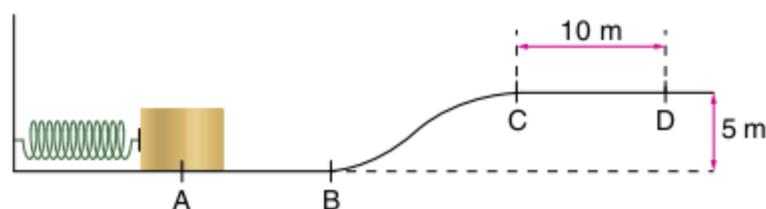
**22 Vunesp** Um fruto de 0,10 kg, inicialmente em repouso, desprende-se de uma árvore à beira de um penhasco e caiu 55 m, esborrachando-se numa rocha. Se a velocidade imediatamente antes do impacto com a rocha era 30 m/s e a aceleração da gravidade local vale  $10 \text{ m/s}^2$ , calcule as quantidades de energia mecânica dissipadas:

- a) na interação do fruto com a rocha, ao se esborrachar.
- b) na interação do fruto com o ar, durante a queda.

**23 UFSC** Um corpo parte do repouso deslizando do topo de um plano inclinado, de uma altura de 2,7 m em relação ao plano horizontal (veja figura a seguir). Devido ao atrito, ele perde  $\frac{1}{3}$  de sua energia mecânica inicial, no percurso do topo até a base do plano inclinado. Calcule, então, a velocidade, em m/s, com que o corpo chega na base. Obs.: Adote o referencial na base do plano.



**24 Mackenzie (Adapt.)** Um corpo de 2 kg repousa em A à frente de uma mola de constante elástica  $1 \cdot 10^4 \text{ N/m}$ , que está comprimida de 20 cm. Os trechos AB e BC são lisos e CD é rugoso. Liberando a mola, o corpo para em D, sem perder o contato com a pista. Calcule o coeficiente de atrito no trecho CD.



# Exercícios propostos

Considere, quando necessário,  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

## Trabalho

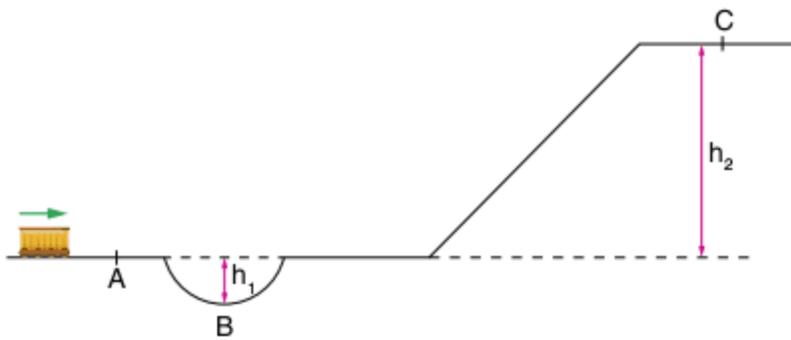
**1 UEMS** Considere as seguintes afirmações.

- I. O trabalho realizado pela força peso de um corpo não depende da forma da trajetória do corpo.
- II. O trabalho realizado pela força elástica de uma mola é proporcional à deformação da mola.
- III. O trabalho de uma força é igual à variação da energia cinética do corpo em que atua.

Dentre essas afirmações, somente:

- (a) I é correta.
- (b) II é correta.
- (c) III é correta.
- (d) I e II são corretas.
- (e) I e III são corretas.

**2 Uerj** Um pequeno vagão, deslocando-se sobre trilhos, realiza o percurso entre os pontos A e C, segundo a forma representada na figura a seguir, onde  $h_1$  e  $h_2$  são os desníveis do trajeto.



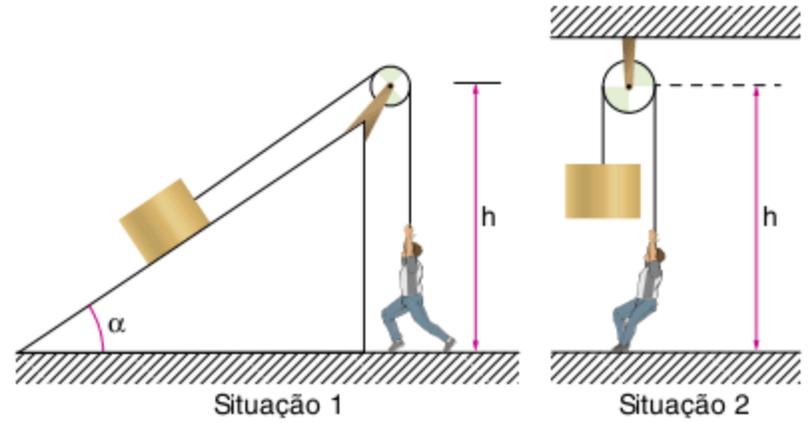
Os módulos dos trabalhos realizados entre os pontos A e C, pelo peso ( $P$ ) do carrinho e pela reação normal ( $N$ ) exercida pelos trilhos sobre o vagão, correspondem, respectivamente, a:

- (a)  $|P| \cdot (h_1 + h_2)$  e  $|N| \cdot (h_1 + h_2)$
- (b)  $|P| \cdot (h_1 + h_2)$  e 0
- (c)  $|P| \cdot h_2$  e  $|N| \cdot h_2$
- (d)  $|P| \cdot h_2$  e 0

**3 Fuvest** Uma partícula de massa 20 kg, partindo do repouso, está sujeita à ação exclusiva de duas forças constantes,  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , perpendiculares entre si e de intensidades, respectivamente, iguais a 6,0 N e 8,0 N, que atuam durante 4,0 s.

- a) Qual a intensidade da força resultante entre  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ ?
- b) Qual o módulo do deslocamento durante os 4,0 s?
- c) Qual o trabalho realizado pela força:
  - c<sub>1</sub>)  $\vec{F}_1$ ?
  - c<sub>2</sub>)  $\vec{F}_2$ ?
  - c<sub>3</sub>) resultante?

**4** Nas duas situações representadas a seguir, uma mesma carga de peso  $P$  é elevada a uma mesma altura  $h$ .



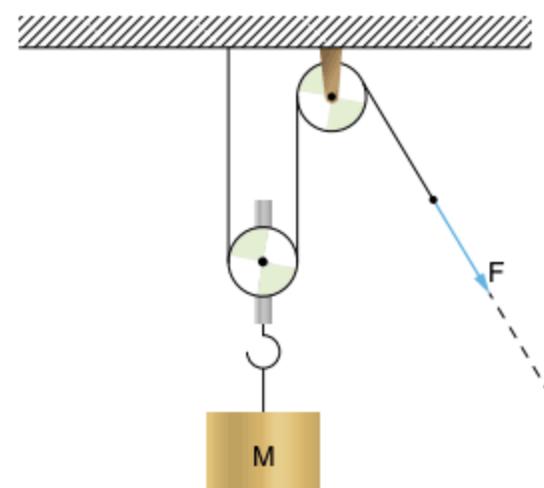
Nos dois casos, o bloco parte do repouso, parando ao atingir a altura  $h$ . Desprezando todas as forças dissipativas, analise as proposições seguintes.

- I. Na situação 1, a força média exercida pelo homem é menor que na situação 2.
- II. Na situação 1, o trabalho realizado pela força do homem é menor que na situação 2.
- III. Em ambas as situações, o trabalho do peso da carga é calculado por  $-P \cdot h$ .
- IV. Na situação 1, o trabalho realizado pela força do homem é calculado por  $P \cdot h$ .

Responda mediante o código:

- (a) todas são corretas.
- (b) todas são incorretas.
- (c) somente II e III são corretas.
- (d) somente I, III e IV são corretas.
- (e) somente III é correta.

**5 FGV** Uma caixa de massa  $M = 50,0 \text{ kg}$  está sendo erguida lentamente através de um sistema de polias, conforme a figura. Nesse processo, um operador aplica uma força  $F$  à corda, puxando-a por uma distância de 3,0 m, na direção da força.



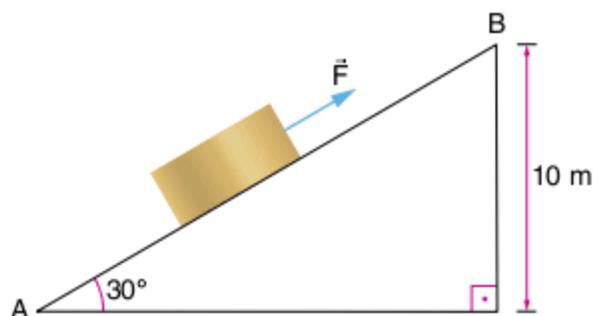
Desprezando os efeitos de atritos e as massas das polias e da corda, determine, considerando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ :

- a) a intensidade da força  $F$ .
- b) o trabalho realizado pelo operador.

**6 Unicamp** Um carregador em um depósito empurra uma caixa de 20 kg, que inicialmente estava em repouso. Para colocar a caixa em movimento, é necessária uma força horizontal de 30 N. Uma vez iniciado o deslizamento, são necessários 20 N para manter a caixa movendo-se com velocidade constante.

- Determine os coeficientes de atrito estático e cinético entre a caixa e o solo.
- Determine o trabalho realizado pelo carregador ao arrastar a caixa por 5 m.
- Qual seria o trabalho realizado pelo carregador se a força horizontal aplicada inicialmente fosse de 20 N?

**7 Mackenzie** O bloco de peso 100 N, da figura, sobe o plano inclinado com velocidade constante, sob a ação da força  $F$  paralela ao plano e de intensidade 71 N.

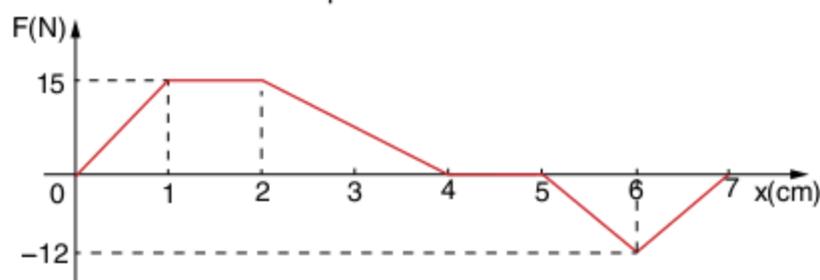


Devido ao atrito, a quantidade de calor liberada no trajeto de A para B é:

Considere  $1 \text{ cal} = 4,2 \text{ J}$ .

- 700 cal
- 420 cal
- 210 cal
- 100 cal
- 10 cal

**8 UFPR** Um engenheiro mecânico projetou um pistão que se move na direção horizontal dentro de uma cavidade cilíndrica. Ele verificou que a força horizontal  $F$ , a qual é aplicada ao pistão por um agente externo, pode ser relacionada à sua posição horizontal  $x$  por meio do gráfico a seguir. Para ambos os eixos do gráfico, valores positivos indicam o sentido para a direita, enquanto valores negativos indicam o sentido para a esquerda. Sabe-se que a massa do pistão vale 1,5 kg e que ele está inicialmente em repouso.



Com relação ao gráfico, considere as seguintes afirmativas.

- O trabalho realizado pela força sobre o pistão entre  $x = 0$  e  $x = 1 \text{ cm}$  vale  $7,5 \cdot 10^{-2} \text{ J}$ .
- A aceleração do pistão entre  $x = 1 \text{ cm}$  e  $x = 2 \text{ cm}$  é constante e vale  $10 \text{ m/s}^2$ .
- Entre  $x = 4 \text{ cm}$  e  $x = 5 \text{ cm}$ , o pistão se move com velocidade constante.
- O trabalho total realizado pela força sobre o pistão entre  $x = 0$  e  $x = 7 \text{ cm}$  é nulo.

Assinale a alternativa correta.

- Somente as afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.
- Somente a afirmativa 3 é verdadeira.
- Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
- Somente as afirmativas 2 e 4 são verdadeiras.
- Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.

## Potência e rendimento

**9 Vunesp** No sistema da figura, o motor elétrico estacionário  $M$  puxa um bloco de massa  $m = 500 \text{ kg}$ , com velocidade de  $0,50 \text{ m/s}$ , sobre uma superfície horizontal, cujo coeficiente de atrito cinético é  $0,10$ .  
Dado:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

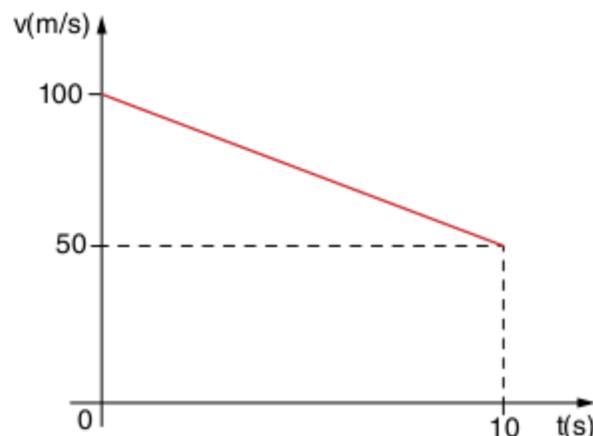


Qual deve ser a potência útil do motor?

**10** Um trólebus trafega com velocidade escalar constante de  $72 \text{ km/h}$  em um trecho retilíneo e horizontal de uma avenida. Sabendo que a potência elétrica que ele recebe da rede é de  $4.000 \text{ kW}$  e que seu rendimento é de  $80\%$ , determine:

- a potência dissipada pelos mecanismos do trólebus.
- a intensidade da força resistente ao movimento do trólebus.

**11 FEI (Adapt.)** Um corpo de massa  $m = 2 \text{ kg}$  desloca-se ao longo de uma trajetória retilínea. Sua velocidade varia com o tempo, segundo o gráfico dado.



A potência média desenvolvida pela resultante de forças entre 0 e 10 s e a potência instantânea da resultante de forças em  $t = 10 \text{ s}$  valem, respectivamente, em valor absoluto:

- 750 W e 500 W
- 750 W e 750 W
- 500 W e 750 W
- 100 W e 50 W
- 50 W e 100 W

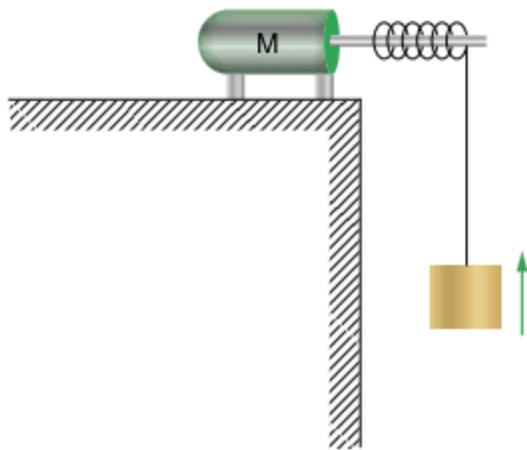
**12 UFRJ** A potência desenvolvida por um certo carro vale, no máximo,  $48 \text{ kW}$ . Suponha que esse carro esteja se deslocando numa estrada plana, retilínea e horizontal, em alta velocidade. Nessas condições, o módulo da resultante das diversas forças de resistência que se opõem ao movimento é dado pela expressão empírica:  $|\vec{f}_r| = kv^2$ , onde  $k = 0,75 \text{ kg/m}$  e  $v$  é a velocidade do carro.

Calcule a velocidade máxima que este carro consegue atingir.

**13 Vunesp** Certa máquina  $M_1$  eleva verticalmente um corpo de massa  $m_1 = 1,0 \text{ kg}$  a  $20,0 \text{ m}$  de altura em  $10,0 \text{ s}$ , em movimento uniforme. Outra máquina  $M_2$  acelera em uma superfície horizontal, sem atrito, um corpo de massa  $m_2 = 3,0 \text{ kg}$ , desde o repouso até a velocidade de  $10,0 \text{ m/s}$ , em  $2,0 \text{ s}$ .

- De quanto foi o trabalho realizado por cada uma das máquinas?
- Qual a potência média desenvolvida por cada máquina?

**14 Mackenzie** A figura a seguir representa um motor elétrico  $M$ , que eleva um bloco de massa  $20 \text{ kg}$  com velocidade constante de  $2 \text{ m/s}$ . A resistência do ar é desprezível e o fio que sustenta o bloco é ideal. Nessa operação, o motor apresenta um rendimento de  $80\%$ .



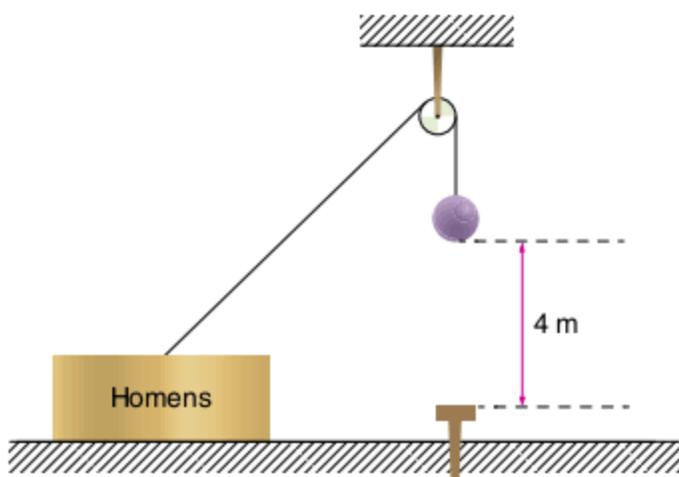
Considerando o módulo da aceleração da gravidade como sendo  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , a potência dissipada por esse motor tem valor:

- |                     |                     |
|---------------------|---------------------|
| (a) $500 \text{ W}$ | (d) $200 \text{ W}$ |
| (b) $400 \text{ W}$ | (e) $100 \text{ W}$ |
| (c) $300 \text{ W}$ |                     |

**15 PUC-SP** Uma pessoa de massa de  $80 \text{ kg}$  sobe uma escada de  $20$  degraus, cada um com  $20 \text{ cm}$  de altura.

- Calcule o trabalho que a pessoa realiza contra a gravidade.
- Se a pessoa subir a escada em  $20 \text{ s}$ , ela se cansará mais do que se subir em  $40 \text{ s}$ . Como se explica isso, já que o trabalho realizado é o mesmo nos dois casos?

**16 Faap-SP** Vários homens levantam, cinco vezes por minuto, um peso de  $3 \text{ kN}$ , que é abandonado e cai sobre uma estaca. A distância entre o peso e a estaca é sempre de  $4 \text{ m}$ .



Quantos homens são necessários, sendo que cada um deles desenvolve  $200 \text{ W}$  de potência?

**17 Enem (Não aplicado)** Os motores elétricos são dispositivos com diversas aplicações, dentre elas, destacam-se aquelas que proporcionam conforto e praticidade para as pessoas. É inegável a preferência pelo uso de elevadores quando o objetivo é o transporte de pessoas pelos andares de prédios elevados. Nesse caso, um dimensionamento preciso da potência dos motores utilizados nos elevadores é muito importante e deve levar em consideração fatores como economia de energia e segurança.

Considere que um elevador de  $800 \text{ kg}$ , quando lotado com oito pessoas ou  $600 \text{ kg}$ , precisa ser projetado. Para tanto, alguns parâmetros deverão ser dimensionados. O motor será ligado à rede elétrica que fornece  $220 \text{ volts}$  de tensão. O elevador deve subir  $10$  andares, em torno de  $30 \text{ metros}$ , a uma velocidade constante de  $4 \text{ metros por segundo}$ . Para fazer uma estimativa simples da potência necessária e da corrente que deve ser fornecida ao motor do elevador para ele operar com lotação máxima, considere que a tensão seja contínua, que a aceleração da gravidade valha  $10 \text{ m/s}^2$  e que o atrito possa ser desprezado. Nesse caso, para um elevador lotado, a potência média de saída do motor do elevador e a corrente elétrica máxima que passa no motor serão, respectivamente, de:

- $24 \text{ kW}$  e  $109 \text{ A}$
- $32 \text{ kW}$  e  $145 \text{ A}$
- $56 \text{ kW}$  e  $255 \text{ A}$
- $180 \text{ kW}$  e  $818 \text{ A}$
- $240 \text{ kW}$  e  $1.090 \text{ A}$

**18 Esal-MG** Um guindaste consome uma potência de  $15 \text{ kW}$  para realizar um trabalho de  $120 \text{ kJ}$  em  $10 \text{ s}$ , erguendo cargas de  $10$  toneladas, com velocidade constante.

Considerando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , pode-se afirmar que:

- o rendimento do guindaste é  $0,2$ .
- a velocidade de deslocamento das cargas é de  $0,8 \text{ m/s}$ .
- a potência útil do guindaste é de  $15 \text{ kW}$ .
- a potência dissipada na realização desse trabalho é de  $10 \text{ kW}$ .
- o tempo necessário para erguer uma carga de  $10$  toneladas a uma altura de  $30 \text{ m}$  é de  $250 \text{ s}$ .

**19 Uerj (Adapt.)** Em um edifício, deseja-se instalar uma bomba hidráulica capaz de elevar  $500$  litros de água até uma caixa-d'água vazia, situada a  $20 \text{ m}$  de altura acima desta bomba, em  $1$  minuto e  $40$  segundos.

Essa caixa-d'água tem a forma de um paralelepípedo cuja base mede  $2 \text{ m}^2$ . Espera-se que o rendimento máximo desse sistema seja de  $50\%$ .

Calcule:

- a potência mínima, em  $\text{W}$ , que deverá ter o motor dessa bomba.
- a pressão (força por área), em  $\text{N/m}^2$ , que os  $500$  litros de água exercerão sobre o fundo da caixa-d'água.

Energia

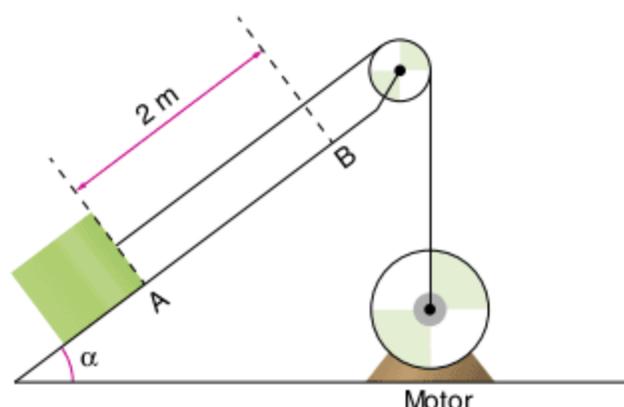
**20** Uma bomba de rendimento igual a 40% é acionada por um motor que lhe fornece uma potência de  $\frac{1}{4}$  cv. Essa bomba coleta água em repouso e a deposita num reservatório a 49 m de altura, chegando lá com velocidade desprezível. Considerando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , quantos litros de água o reservatório recebe por hora?

Dado:  $1 \text{ cv} = 735 \text{ W}$ .

**21 Fuvest** Uma esteira rolante transporta 15 caixas de bebida por minuto, de um depósito no subsolo até o andar térreo. A esteira tem comprimento de 12 m, inclinação de  $30^\circ$  com a horizontal e move-se com velocidade constante. As caixas a serem transportadas já são colocadas com a velocidade da esteira. Se cada caixa pesa 200 N, o motor que aciona esse mecanismo deve fornecer a potência de:

- (a) 20 W
- (b) 40 W
- (c) 300 W
- (d) 600 W
- (e) 1.800 W

**22 Mackenzie** O motor da figura a seguir leva o bloco de 10 kg da posição A para a B, com velocidade constante, em 10 s. O coeficiente de atrito entre o bloco e o plano inclinado é 0,5. Adote  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

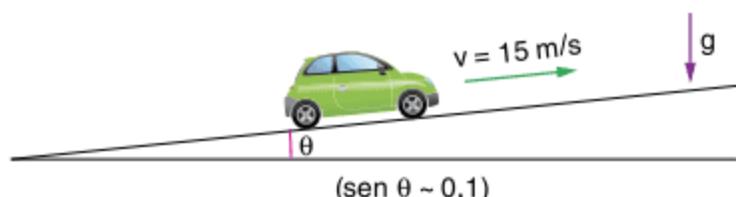


A potência do motor nesse deslocamento é de:

Dados:  $\cos \alpha = 0,8$ ;  $\sin \alpha = 0,6$ .

- (a) 500 W
- (b) 200 W
- (c) 100 W
- (d) 50 W
- (e) 20 W

**23 Fuvest** Nos manuais de automóveis, a caracterização dos motores é feita em cv (cavalo-vapor). Essa unidade, proposta no tempo das primeiras máquinas a vapor, correspondia à capacidade de um cavalo típico, que conseguia erguer, na vertical, com auxílio de uma roldana, um bloco de 75 kg, à velocidade de 1 m/s.



Para subir uma ladeira, inclinada como na figura, um carro de 1.000 kg, mantendo uma velocidade constante de 15 m/s (54 km/h), desenvolve uma potência útil que, em cv, é, aproximadamente, de:

- (a) 20 cv
- (b) 40 cv
- (c) 50 cv
- (d) 100 cv
- (e) 150 cv

**24 Enem** Observe a situação descrita na tirinha a seguir.



Francisco Caruso e Luiza Daou. *Tirinhas de Física*. v. 2. CBPF. Rio de Janeiro, 2000.

Assim que o menino lança a flecha, há transformação de um tipo de energia em outra. A transformação, nesse caso, é de energia:

- (a) potencial elástica em energia gravitacional.
- (b) gravitacional em energia potencial.
- (c) potencial elástica em energia cinética.
- (d) cinética em energia potencial elástica.
- (e) gravitacional em energia cinética.

**25 Enem**

“Águas de março definem se falta luz este ano”

Esse foi o título de uma reportagem em jornal de circulação nacional, pouco antes do início do racionamento do consumo de energia elétrica, em 2001.

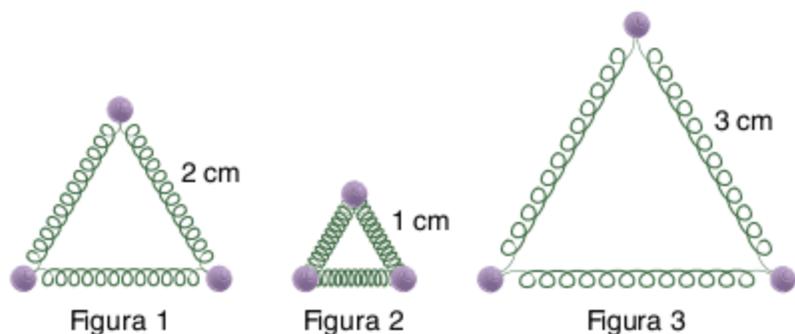
No Brasil, a relação entre a produção de eletricidade e a utilização de recursos hídricos, estabelecida nessa manchete, justifica-se porque:

- (a) a geração de eletricidade nas usinas hidrelétricas exige a manutenção de um dado fluxo de água nas barragens.
- (b) o sistema de tratamento da água e sua distribuição consomem grande quantidade de energia elétrica.
- (c) a geração de eletricidade nas usinas termelétricas utiliza grande volume de água para refrigeração.
- (d) o consumo de água e de energia elétrica utilizadas na indústria compete com o da agricultura.
- (e) é grande o uso de chuveiros elétricos, cuja operação implica abundante consumo de água.

**26 UFPR** Em uma prova de atletismo, conhecida como arremesso de peso, um atleta realiza um lançamento tal que o peso, ao deixar sua mão, tem uma velocidade inicial  $v_0$  que forma um ângulo  $\theta_0$  com a horizontal. Desprezando-se o efeito da resistência do ar, é correto afirmar:

- (a) a altura máxima atingida pelo peso depende do quadrado da componente vertical da velocidade inicial.
- (b) a energia mecânica do peso é dada por  $mgh$ , sendo  $h$  a posição vertical instantânea em que o peso se encontra.
- (c) a energia cinética é constante durante o movimento.
- (d) as componentes vertical e horizontal do vetor posição descrevem o mesmo tipo de movimento.
- (e) a energia potencial é constante durante o movimento.

**27 UEL** A figura 1 representa um sistema composto de três esferas de mesma massa unidas por três molas idênticas. O sistema é posto a oscilar, deslocando-se entre as posições indicadas nas figuras 2 e 3.



Pode-se dizer que a energia potencial elástica máxima do sistema ocorre:

- (a) somente na posição da figura 1.
- (b) somente na posição da figura 2.
- (c) somente na posição da figura 3.
- (d) nas posições das figuras 1 e 2.
- (e) nas posições das figuras 2 e 3.

**28 Enem** Na avaliação da eficiência de usinas quanto à produção e aos impactos ambientais, utilizam-se vários critérios, tais como: razão entre produção efetiva anual de energia elétrica e potência instalada ou razão entre potência instalada e área inundada pelo reservatório. No quadro seguinte, esses parâmetros são aplicados às duas maiores hidrelétricas do mundo: Itaipu, no Brasil, e Três Gargantas, na China.

Parâmetros	Itaipu	Três Gargantas
Potência instalada	12.600 MW	18.200 MW
Produção efetiva de energia elétrica	93 bilhões de kWh/ano	84 bilhões de kWh/ano
Área inundada pelo reservatório	1.400 km <sup>2</sup>	1.000 km <sup>2</sup>

Com base nessas informações, avalie as afirmativas que se seguem.

- I. A energia elétrica gerada anualmente e a capacidade nominal máxima de geração da hidrelétrica de Itaipu são maiores que as da hidrelétrica de Três Gargantas.
- II. Itaipu é mais eficiente que Três Gargantas no uso da potência instalada na produção de energia elétrica.
- III. A razão entre potência instalada e área inundada pelo reservatório é mais favorável na hidrelétrica Três Gargantas do que em Itaipu.

É correto apenas o que se afirma em:

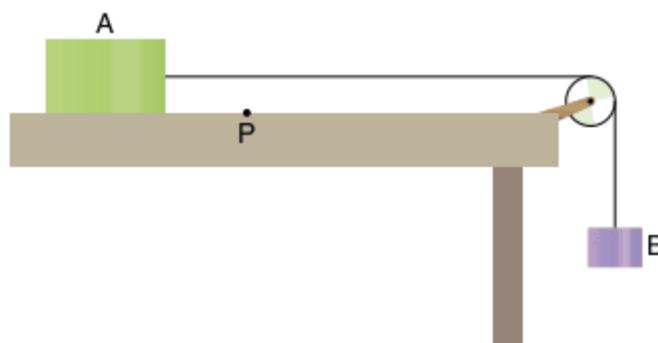
- (a) I.
- (b) II.
- (c) III.
- (d) I e III.
- (e) II e III.

**29 Enem** Os números e cifras envolvidos, quando lidamos com dados sobre produção e consumo de energia em nosso país, são sempre muito grandes. Apenas no setor residencial, em um único dia, o consumo de energia elétrica é da ordem de 200 mil MWh. Para avaliar esse consumo, imagine uma situação em que o Brasil não dispusesse de hidrelétricas e tivesse de depender somente de termelétricas, onde cada kg de carvão, ao ser queimado, permite obter uma quantidade de energia da ordem de 10 kWh.

Considerando que um caminhão transporta, em média, 10 toneladas de carvão, a quantidade de caminhões de carvão necessária para abastecer as termelétricas, a cada dia, seria da ordem de:

- (a) 20
- (b) 200
- (c) 1.000
- (d) 2.000
- (e) 10.00

**30 UFG** O bloco A da figura desliza sobre uma superfície horizontal, sem atrito, puxado pelo bloco B. O fio e a polia são ideais.



O gráfico que representa qualitativamente a energia cinética do sistema em função do tempo, a partir do instante em que o bloco A atinge o ponto P, é:

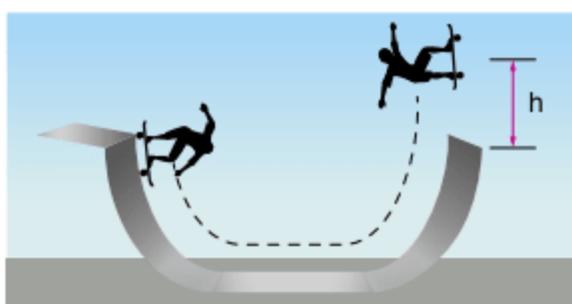
- (a)
- (b)
- (c)
- (d)
- (e)

**31 UFC** Um carro acelera a partir do repouso até uma velocidade de 30 km/h, gastando, para isso, uma energia  $E_1$ . A seguir, acelera de 30 km/h até alcançar 60 km/h, gastando, para tal, uma energia  $E_2$ .

Considerando que todas as condições externas (atrito, resistência do ar etc.) são idênticas nos dois trechos do percurso, compare as energias gastas nos dois trechos e indique a alternativa correta.

- (a)  $E_2 = \frac{E_1}{2}$       (c)  $E_2 = 2E_1$       (e)  $E_2 = 4E_1$   
 (b)  $E_2 = E_1$       (d)  $E_2 = 3E_1$

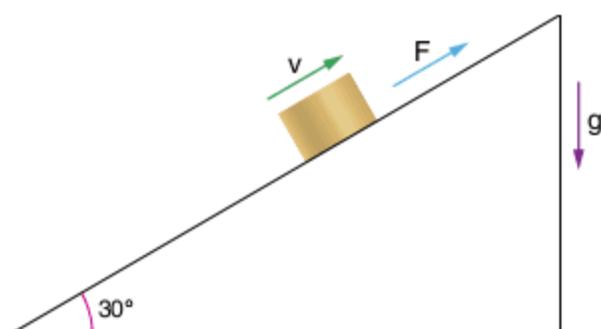
**32 UFG** Uma das competições dos *X-games* são as manobras dos esquetistas em uma rampa em U. Um atleta parte do repouso do topo da rampa e, através do movimento do seu corpo, de peso 800 N, consegue ganhar 600 J a cada ida e vinda na rampa, conforme ilustração a seguir.



Desprezando as perdas de energia e o peso do *skate*, o número mínimo de idas e vindas que o atleta deve realizar para atingir uma altura ( $h$ ) de 3 m acima do topo da rampa é:

- (a) 2      (c) 4      (e) 8  
 (b) 3      (d) 6

**33 Fuvest** Uma pessoa puxa um caixote com uma força  $F$ , ao longo de uma rampa inclinada  $30^\circ$  com a horizontal, conforme a figura a seguir, sendo desprezível o atrito entre o caixote e a rampa.



O caixote, de massa  $m$ , desloca-se com velocidade  $v$  constante, durante um certo intervalo de tempo  $\Delta t$ .

Considere as seguintes afirmações.

- I. O trabalho realizado pela força  $F$  é igual a  $Fv \cdot \Delta t$   
 II. O trabalho realizado pela força  $F$  é igual a  $\frac{mgv \cdot \Delta t}{2}$   
 III. A energia potencial gravitacional varia de  $\frac{mgv \cdot \Delta t}{2}$ .

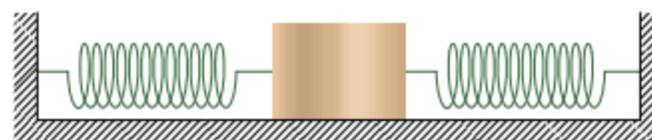
Está correto apenas o que se afirma em:

- (a) III.      (c) I e III.      (e) I, II e III.  
 (b) I e II.      (d) II e III.

**34 Cesgranrio** Uma partícula de massa  $m$  é abandonada, sem velocidade inicial, de uma altura  $h$  em relação ao solo em um lugar onde a intensidade do campo gravitacional é constante e igual a  $g$ . Seja  $t = 0$  o instante em que ela foi solta, e  $t = T$  aquele em que ela tocou o solo. Despreze a resistência do ar e considere a energia potencial igual a zero no solo. Qual das expressões a seguir fornece o valor da energia potencial gravitacional da partícula para  $t = \frac{T}{2}$ ?

- (a)  $0,20mgh$       (c)  $0,50mgh$       (e)  $mgh$   
 (b)  $0,25mgh$       (d)  $0,75mgh$

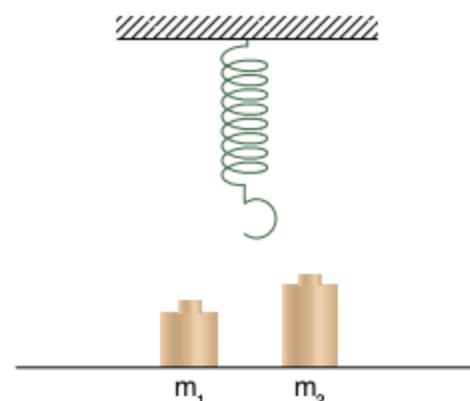
**35 Fuvest** Um corpo está preso nas extremidades de duas molas idênticas, não deformadas, de constante elástica 100 N/m, conforme ilustra a figura.



Quando o corpo é afastado de 1,0 cm do ponto central, na direção do eixo longitudinal das molas:

- a) qual a intensidade da resultante das forças que a mola exerce sobre ele?  
 b) qual a energia armazenada nas molas?

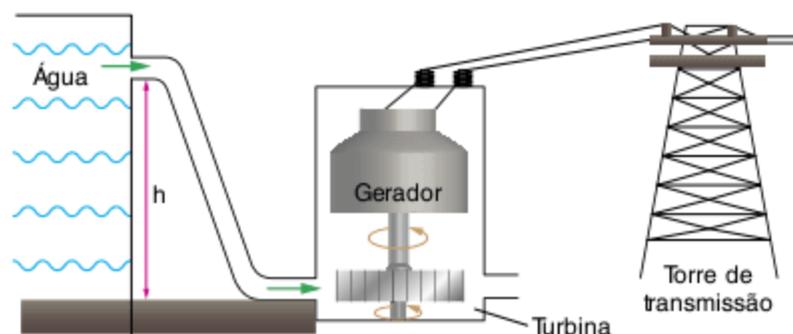
**36 UFPE** Duas massas,  $m_1 = 2,0$  kg e  $m_2 = 4,0$  kg, são suspensas sucessivamente em uma mesma mola vertical.



Se  $U_1$  e  $U_2$  são, respectivamente, as energias elásticas armazenadas na mola quando as massas  $m_1$  e  $m_2$  foram penduradas, e  $U_1 = 2,0$  J, qual o valor de  $U_2$ ?

Texto para as questões 37 e 38.

Na figura a seguir, está esquematizado um tipo de usina utilizada na geração de eletricidade.



**37 Enem** A eficiência de uma usina, do tipo da representada na figura, é da ordem de 0,9, ou seja, 90% da energia da água no início do processo transforma-se em energia elétrica. A usina Ji-Paraná, do estado de Rondônia, tem potência instalada de 512 milhões de watt, e a barragem tem altura de, aproximadamente, 120 m. A vazão do rio Ji-Paraná, em litros de água por segundo, deve ser da ordem de:

- (a) 50 (c) 5.000 (e) 500.000  
(b) 500 (d) 50.000

**38 Enem** No processo de obtenção de eletricidade, ocorrem várias transformações de energia. Considere duas delas:

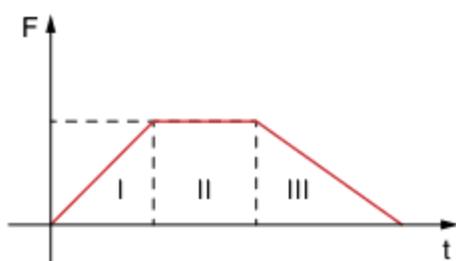
I cinética em elétrica	II. potencial gravitacional em cinética
------------------------	---

Analisando o esquema, é possível identificar que elas se encontram, respectivamente, entre:

- (a) I. a água no nível h e a turbina;  
II. o gerador e a torre de distribuição.  
(b) I. a água no nível h e a turbina;  
II. a turbina e o gerador.  
(c) I. a turbina e o gerador;  
II. a turbina e o gerador.  
(d) I. a turbina e o gerador;  
II. a água no nível h e a turbina.  
(e) I. o gerador e a torre de distribuição;  
II. a água no nível h e a turbina.

### Teorema da energia cinética

**39 UEL** Um corpo, inicialmente em repouso, é submetido a uma força resultante  $F$ , cujo valor algébrico varia com o tempo, de acordo com o gráfico a seguir.



Considerando os intervalos de tempo I, II e III, a energia cinética do corpo aumenta:

- (a) apenas no intervalo I. (d) apenas nos intervalos I e II.  
(b) apenas no intervalo II. (e) nos intervalos I, II e III.  
(c) apenas no intervalo III.

**40 ITA** Uma partícula está submetida a uma força com as seguintes características: seu módulo é proporcional ao módulo da velocidade da partícula e atua numa direção perpendicular àquela do vetor velocidade. Nessas condições, a energia cinética da partícula deve:

- (a) crescer linearmente com o tempo.  
(b) crescer quadraticamente com o tempo.  
(c) diminuir linearmente com o tempo.  
(d) diminuir quadraticamente com o tempo.  
(e) permanecer inalterada.

**41 Unicamp** Sob a ação de uma força constante, um corpo de massa  $m = 4,0$  kg adquire, a partir do repouso, a velocidade de 10 m/s.

- a) Qual é o trabalho realizado por essa força?  
b) Se o corpo se deslocou 25 m, qual o valor da força aplicada?

**42 Ufac** Um corpo de 12 kg de massa desliza sobre uma superfície horizontal sem atrito, com velocidade de 10 m/s, e passa para uma região onde o coeficiente de atrito cinético é 0,50. Qual é o trabalho realizado pela força de atrito após ter o bloco percorrido 5,0 m na região com atrito? E qual é a velocidade do bloco ao final desses 5,0 m?

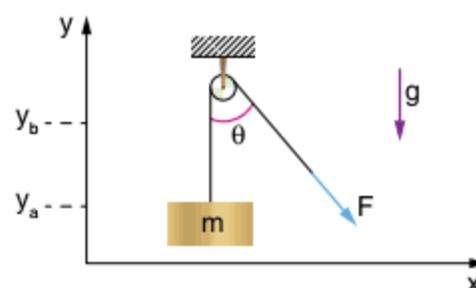
Dado:  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

- (a) -300 J e  $6\sqrt{5}$  m/s (d) 900 J e  $5\sqrt{6}$  m/s  
(b) -300 J e  $5\sqrt{6}$  m/s (e) -300 J e  $5\sqrt{2}$  m/s  
(c) -900 J e  $6\sqrt{5}$  m/s

**43 UFPR** Um caminhão transporta um bloco de mármore de 4.000 kg por uma estrada plana e horizontal e, num dado instante, sua velocidade é de 20 m/s. O bloco não está amarrado nem encostado nas laterais da carroceria. Considere o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a carroceria igual a 0,40 e a aceleração da gravidade 10 m/s<sup>2</sup>. É correto afirmar:

- necessitando parar o caminhão em menos de 50 m, o bloco escorregará em direção à cabina do motorista.  
 a carroceria exerce uma força vertical sobre o bloco de módulo igual a 40 kN.  
 se num certo instante o caminhão necessitar parar, o trabalho realizado sobre o bloco será igual a -160 kJ.  
 a força resultante exercida pela carroceria sobre o bloco tem direção vertical quando o caminhão está acelerado.  
 para percorrer com segurança uma curva com raio 225 m, de modo que o bloco não escorregue lateralmente, a velocidade do caminhão deve ser menor ou igual a 30 m/s.

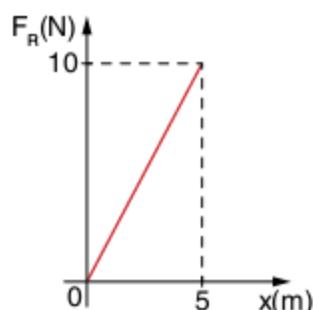
**44 Fuvest 2011** Usando um sistema formado por uma corda e uma roldana, um homem levanta uma caixa de massa  $m$ , aplicando na corda uma força  $F$ , que forma um ângulo  $\theta$  com a direção vertical, como mostra a figura.



O trabalho realizado pela resultante das forças que atuam na caixa – peso e força da corda –, quando o centro de massa da caixa é elevado, com velocidade constante  $v$ , desde a altura  $y_a$  até a altura  $y_b$ , é:

- (a) nulo. (d)  $F \cdot \cos \theta \cdot (y_b - y_a)$   
(b)  $F \cdot (y_b - y_a)$  (e)  $mg(y_b - y_a) + \frac{mv^2}{2}$   
(c)  $mg(y_b - y_a)$

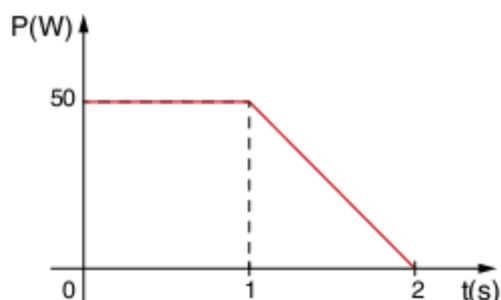
**45 FEI** O gráfico a seguir é uma reta e representa a variação da força resultante que atua em um corpo de 1,2 kg em função do deslocamento. Sabe-se que a velocidade na posição  $x = 2$  m é de 4 m/s.



Qual é a velocidade do corpo na posição  $x = 4$  m?

- (a) 10 m/s                      (c) 8 m/s                      (e) 9,6 m/s  
 (b) 6 m/s                        (d) 16 m/s

**46 FEI-SP** Um corpo de peso  $P = 20$  N sobe um plano inclinado sem atrito, puxado por uma força  $F$  paralela a esse plano. O corpo parte do repouso e, após dois segundos, atinge uma altura de dois metros acima do ponto de partida. A potência desenvolvida pela força  $F$  é dada pelo gráfico a seguir.



Determine o trabalho realizado pela força  $F$  nos dois primeiros segundos do movimento e a velocidade do corpo no fim desse tempo. Adote para os cálculos o valor  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

**47** Uma partícula de massa = 10 kg acha-se em repouso na origem do eixo  $Ox$ , quando passa a agir sobre ela uma força resultante  $F$ , paralela ao eixo.

De  $x = 0$  a  $x = 4,0$  m, a intensidade de  $F$  é constante, de modo que  $F = 120$  N. De  $x = 4,0$  m em diante,  $F$  adquire a intensidade que obedece à função:  $F = 360 - 60x$  (SI).

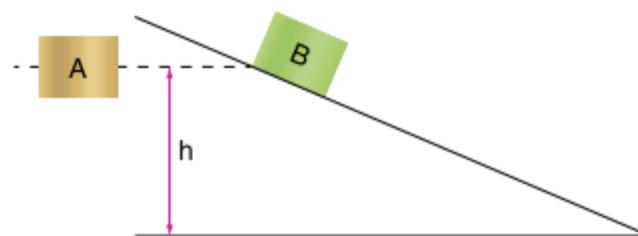
- a) Trace o gráfico da intensidade de  $F$  em função de  $x$ .  
 b) Determine a velocidade escalar da partícula no ponto de abscissa  $x = 7,0$  m.

**48 UEL** Partindo do repouso, e utilizando sua potência máxima, uma locomotiva sai de uma estação puxando um trem de 580 toneladas. Somente após 5 minutos, o trem atinge sua velocidade máxima, 50 km/h. Na estação seguinte, mais vagões são agregados e, desta vez, o trem leva 8 minutos para atingir a mesma velocidade limite. Considerando que, em ambos os casos, o trem percorre trajetórias aproximadamente planas e que as forças de atrito são as mesmas nos dois casos, é correto afirmar que a massa total dos novos vagões é:

- (a) 238 t                      (c) 348 t                      (e) 728 t  
 (b) 328 t                      (d) 438 t

### Conservação de energia

**49 Fuvest** Dois móveis, A e B, são abandonados simultaneamente de uma altura  $h$  acima do solo.



O móvel A cai em queda livre e o móvel B escorrega por um plano inclinado sem atrito. Podemos afirmar que:

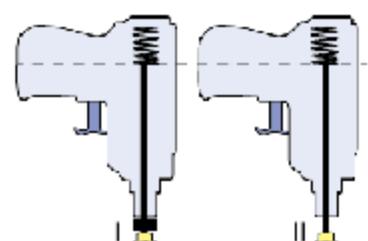
- (a) A atinge o solo ao mesmo tempo em que B e com velocidade maior que a de B.  
 (b) A atinge o solo ao mesmo tempo em que B e com velocidade menor que a de B.  
 (c) A atinge o solo ao mesmo tempo em que B e com velocidade igual à de B.  
 (d) A atinge o solo antes de B e com velocidade igual à de B.  
 (e) A atinge o solo antes de B e com velocidade maior que a de B.

**50 UFMS** Sobre o trabalho de uma força de módulo constante atuante sobre uma partícula, assinale a(s) alternativa(s) correta(s).

- 01 Será nulo se não houver deslocamento da partícula.  
 02 Será nulo se a força for perpendicular ao deslocamento da partícula.  
 04 Será o mesmo qualquer que seja a trajetória seguida entre dois pontos pela partícula se a força for conservativa.  
 08 Se a força atuante sobre a partícula for única, seu trabalho será maior do que a variação da energia cinética da partícula.  
 16 Se a força atuante sobre a partícula for centrípeta, seu trabalho será negativo.

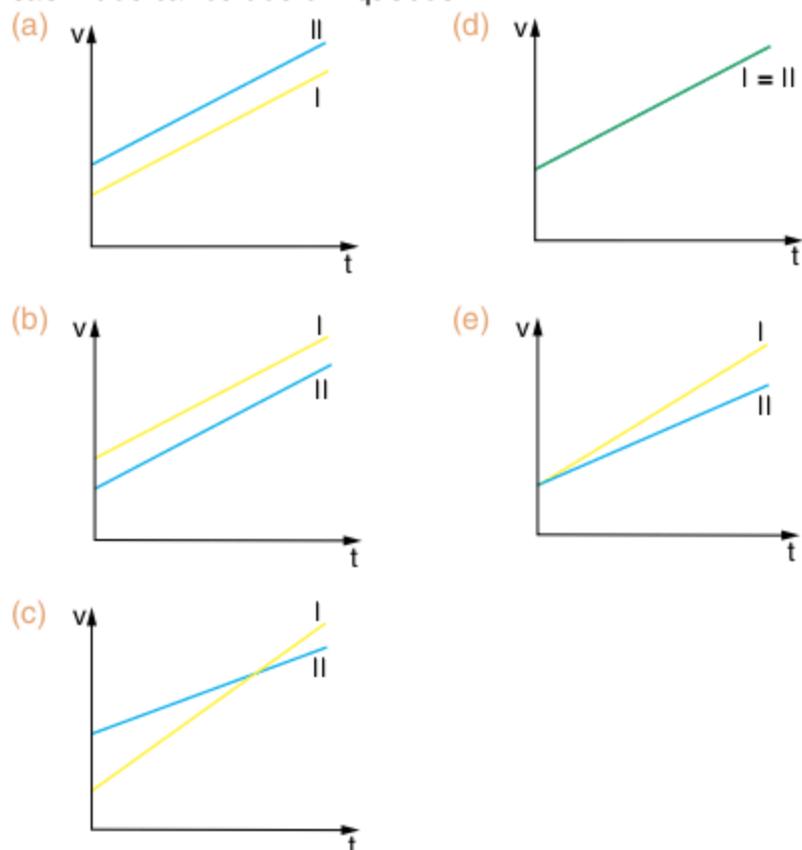
Soma =

**51 UFF** Dois brinquedos idênticos, que lançam dardos usando molas, são disparados simultaneamente na vertical para baixo.

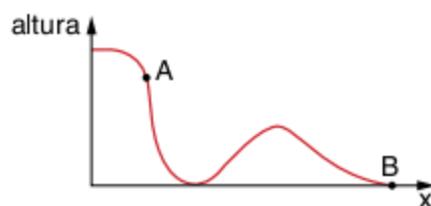


As molas com os respectivos dardos foram inicialmente comprimidas até a posição 1 e, então, liberadas. A única diferença entre os dardos I e II, conforme mostra a figura, é que I tem um pedaço de chumbo grudado nele, que não existe em II.

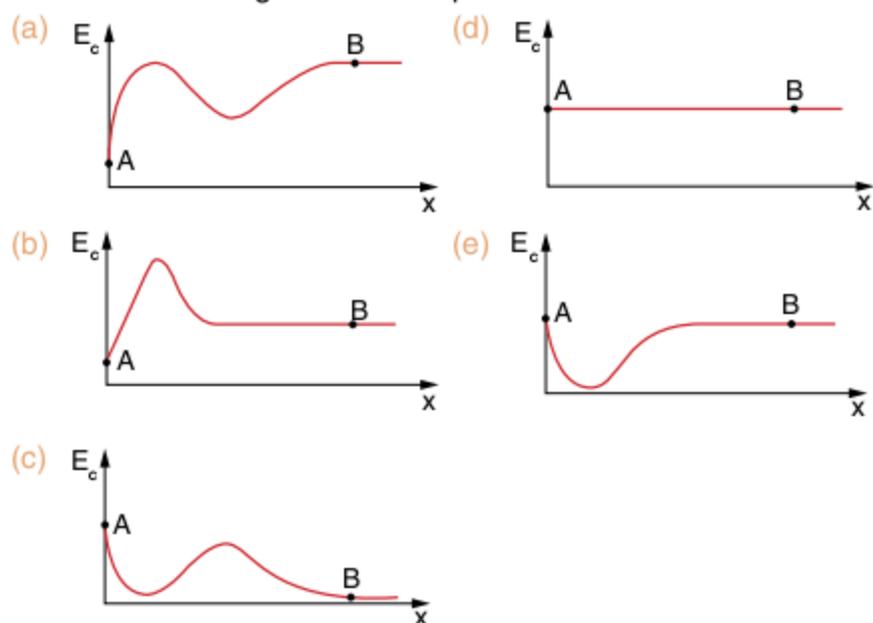
Escolha o gráfico que representa as velocidades dos dardos I e II, como função do tempo, a partir do instante em que eles saem dos canos dos brinquedos.



**52 UFPB** Ao brincar em sua casa com carrinhos de corrida, um garoto constrói uma rampa que tem o perfil da figura a seguir.

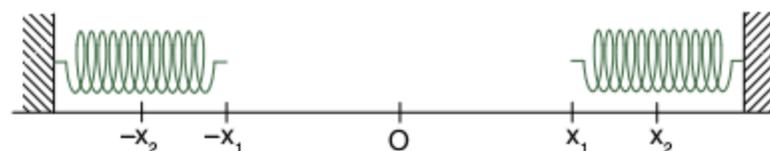


O garoto solta uma bola de gude do ponto A, com velocidade inicial  $v_0$ , e, à medida que a bola percorre a pista, verifica como varia sua velocidade. Desprezando-se o atrito, pode-se concluir que o gráfico que melhor representa a variação da energia cinética da bola de gude entre os pontos A e B é:



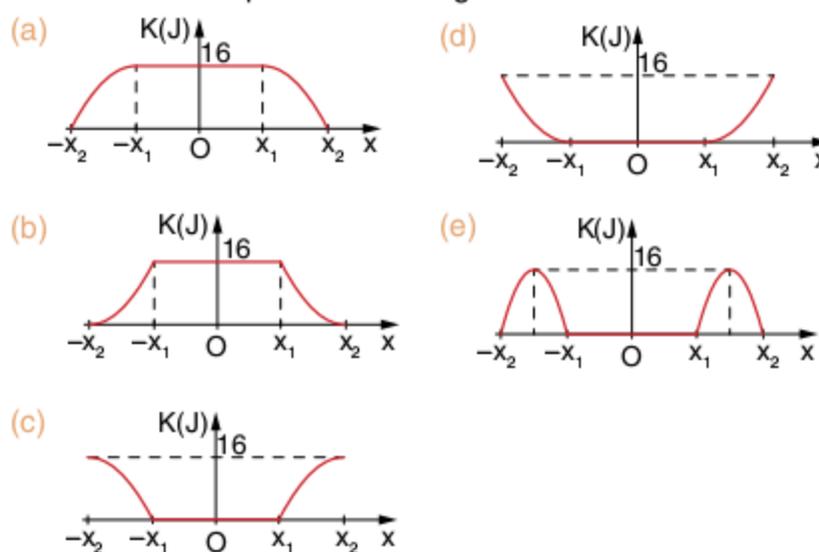
**53 UFPB** Para analisar mudanças entre energias cinética e potencial elástica em um sistema mecânico massa-mola, um estudante de Física realiza o experimento descrito e representado a seguir.

- fixa duas molas idênticas em paredes verticais opostas;
- assinala o ponto O como o de referência e as posições das extremidades livres das molas  $x_1$  e  $-x_1$ ;
- comprime a mola da direita com um bloco até um ponto assinalado por  $x_2$ ;
- verifica que a energia potencial do sistema é de 16 J;
- libera o bloco a partir do repouso.

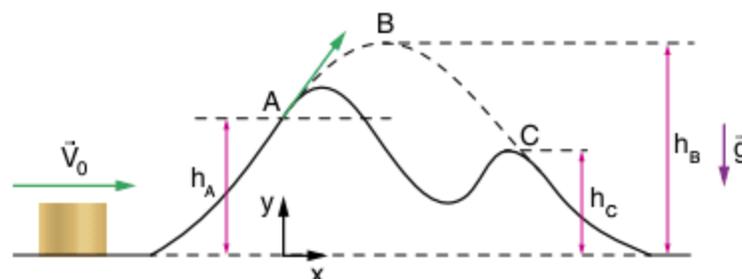


A partir desse momento, o estudante observa que o bloco é arremessado em direção à mola da esquerda, que sofre uma compressão até a posição  $-x_2$ . Dessa forma, o bloco fica oscilando entre as molas.

Desprezando as perdas de energia, verifica-se que o comportamento da energia cinética do bloco, em função da sua posição, está mais bem representado no gráfico:



**54 Fuvest** Um corpo de massa  $m$  é lançado com velocidade inicial  $\vec{V}_0$  na parte horizontal de uma rampa, como indicado na figura a seguir. Ao atingir o ponto A, ele abandona a rampa, com uma velocidade  $\vec{V}_A (V_{AX}, V_{AY})$ , segue uma trajetória que passa pelo ponto de máxima altura B e retorna à rampa no ponto C. Despreze o atrito. Sejam  $h_A$ ,  $h_B$  e  $h_C$  as alturas dos pontos A, B e C, respectivamente,  $\vec{V}_B (V_{BX}, V_{BY})$  a velocidade do corpo no ponto B e  $\vec{V}_C (V_{CX}, V_{CY})$  a velocidade do corpo no ponto C.



Considere as afirmações:

- I.  $V_0 = V_{AX} = V_{BX} = V_{CX}$
- II.  $V_{AX} = V_B = V_{CX}$
- III.  $\frac{1}{2} m V_B^2 = \frac{1}{2} m V_A^2 - mg(h_B - h_A)$
- IV.  $\frac{1}{2} m V_0^2 = mgh_B$
- V.  $\frac{1}{2} m V_{AY}^2 = mg(h_B - h_A)$

São corretas as afirmações:

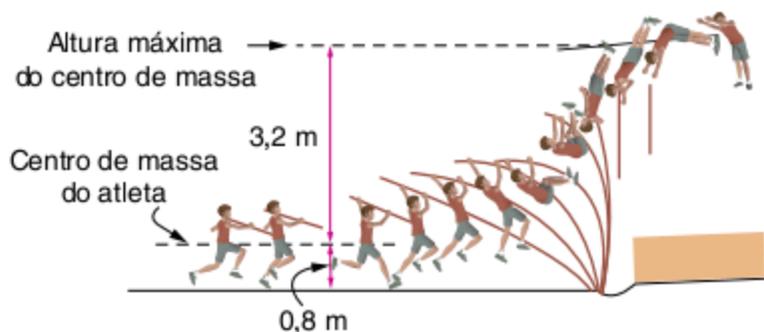
- (a) todas. (d) somente II, III, IV e V.  
 (b) somente I e II. (e) somente II, III e V.  
 (c) somente II, III e IV.

**55 UFC** Uma partícula de massa  $m$  é lançada a partir do solo, com velocidade  $v_0$ , numa direção que forma um ângulo  $\theta$  com a horizontal. Considere que a aceleração da gravidade tem intensidade  $g$  e que  $y$  é a altura medida a partir do solo. A energia cinética da partícula em função da altura  $y$  é dada por:

- (a)  $\frac{1}{2}mv_0^2 \sin^2 \theta - mgy$  (d)  $\frac{1}{2}mv_0^2 \sin^2 \theta + mgy$   
 (b)  $\frac{1}{2}mv_0^2 - mgy$  (e)  $\frac{1}{2}mv_0^2 \cos^2 \theta + mgy$   
 (c)  $\frac{1}{2}mv_0^2 + mgy$

**56 UFPE** Considere uma partícula em queda livre no vácuo. Em um dado instante, a velocidade da partícula vale  $v_1$ , a energia cinética vale 4 J e a energia potencial gravitacional vale - 1 J. Em um instante posterior, a velocidade vale  $v_2$  e a energia potencial gravitacional vale - 33 J. Calcule a razão  $\frac{v_2}{v_1}$ .

**57 Fuvest**



No "salto com vara", um atleta corre segurando uma vara e, com perícia e treino, consegue projetar seu corpo por cima de uma barra. Para uma estimativa da altura alcançada nesses saltos, é possível considerar que a vara sirva apenas para converter o movimento horizontal do atleta (corrida) em movimento vertical, sem perdas ou acréscimos de energia. Na análise de um desses saltos, foi obtida a sequência de imagens reproduzida anteriormente. Nesse caso, é possível estimar que a velocidade máxima atingida pelo atleta, antes do salto, foi de, aproximadamente: Desconsidere os efeitos do trabalho muscular após o início do salto.

- (a) 4 m/s (c) 7 m/s (e) 9 m/s  
 (b) 6 m/s (d) 8 m/s

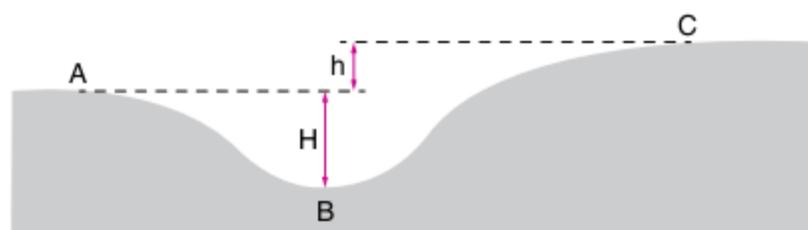
**58 Cesgranrio** Um corpo de massa igual a 2,0 kg é lançado verticalmente para cima, a partir do solo, com velocidade de 30 m/s. Desprezando-se a resistência do ar e sendo  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , a razão entre a energia cinética e a energia potencial do corpo, respectivamente, quando este se encontra num ponto correspondente a  $\frac{1}{3}$  da altura máxima, é:

- (a) 3 (c) 1 (e)  $\frac{1}{3}$   
 (b) 2 (d)  $\frac{1}{2}$

**59 Unama** Uma pequena esfera que pesa 100 N está suspensa por uma corda cujo comprimento é de 6 m. A esfera é deslocada lateralmente, distando horizontalmente de  $3\sqrt{3}$  m em relação à vertical, e, em seguida, é solta a partir do repouso. Desprezando-se os atritos, podemos afirmar que a velocidade máxima atingida pela esfera, em m/s, é de:

- Considere  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .  
 (a)  $12\sqrt{3}$  (c)  $4\sqrt{15}$  (e)  $2\sqrt{15}$   
 (b)  $5\sqrt{6}$  (d)  $6\sqrt{3}$

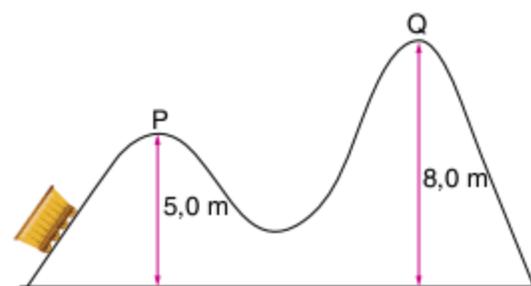
**60 UFPR** O desafio numa das etapas de um concurso de skate consiste em, passando pelos pontos A e B, atingir a elevação C, conforme mostra a figura a seguir. Considere que seja nulo o atrito entre os eixos e as rodas do skate e que não exista deslizamento entre as rodas e a superfície da pista.



Avalie as seguintes afirmativas.

- I. Se a velocidade do concorrente no ponto A for maior que  $\sqrt{2gh}$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade, ele passará pelo ponto C.
  - II. A velocidade mínima no ponto A, para vencer esta etapa, depende da massa do concorrente.
  - III. No ponto B, a energia cinética do concorrente é máxima.
- Assinale a alternativa correta.  
 (a) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.  
 (b) Somente a afirmativa I é verdadeira.  
 (c) Somente a afirmativa II é verdadeira.  
 (d) Somente a afirmativa III é verdadeira.  
 (e) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.

**61 Unirio** A figura a seguir representa um carrinho de massa  $m$  se deslocando sobre o trilho de uma montanha-russa num local onde a aceleração da gravidade é  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

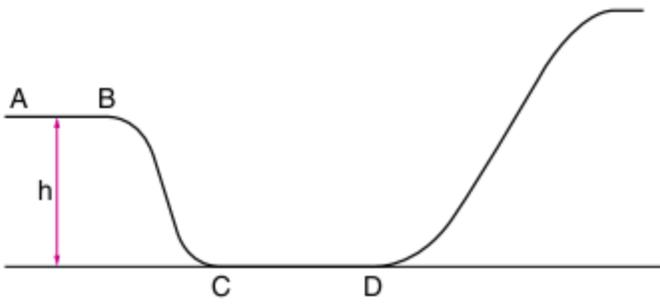


Considerando que a energia mecânica do carrinho se conserva durante o movimento e que, em P, o módulo de sua velocidade é 8,0 m/s, teremos no ponto Q uma velocidade de módulo igual a:

- (a) 5,0 m/s (d) 2,0 m/s  
 (b) 4,8 m/s (e) zero.  
 (c) 4,0 m/s

**62 Fuvest 2011** Um esquetista treina em uma pista cujo perfil está representado na figura a seguir. O trecho horizontal AB está a uma altura  $h = 2,4$  m em relação ao trecho, também horizontal, CD. O esquetista percorre a pista no sentido de A para D. No trecho AB, ele está com velocidade constante, de módulo

$v = 4 \text{ m/s}$ ; em seguida, desce a rampa BC, percorre o trecho CD, o mais baixo da pista, e sobe a outra rampa até atingir uma altura máxima H, em relação a CD.

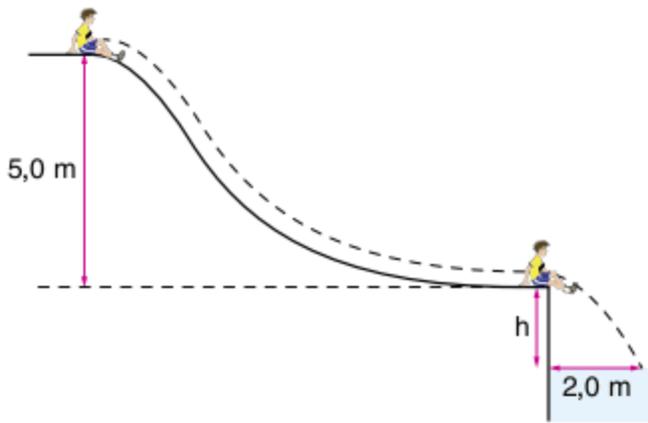


A velocidade do esquetista no trecho CD e a altura máxima H são, respectivamente, iguais a:

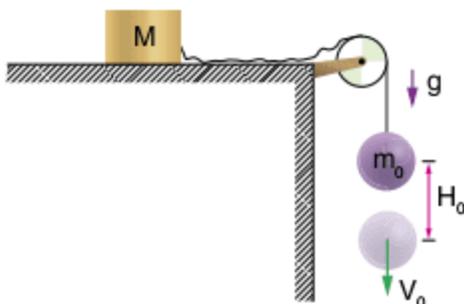
Note e adote:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ; desconsiderar efeitos dissipativos e movimentos do esquetista em relação ao esquite.

- (a)  $5 \text{ m/s}$  e  $2,4 \text{ m}$     (c)  $7 \text{ m/s}$  e  $3,2 \text{ m}$     (e)  $8 \text{ m/s}$  e  $3,2 \text{ m}$   
 (b)  $7 \text{ m/s}$  e  $2,4 \text{ m}$     (d)  $8 \text{ m/s}$  e  $2,4 \text{ m}$

**63 UFPE** Um garoto desliza sobre um escorregador, sem atrito, de  $5,0 \text{ m}$  de altura. O garoto é lançado em uma piscina e entra em contato com a água a uma distância horizontal de  $2,0 \text{ m}$ , em relação à borda. Calcule a distância vertical h entre a superfície da água e a borda da piscina. Dê sua resposta em cm.



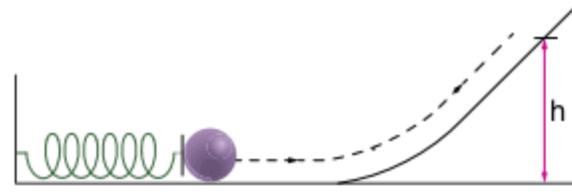
**64 Fuvest** Uma esfera de massa  $m_0$  está pendurada por um fio, ligado em sua outra extremidade a um caixote, de massa  $M = 3m_0$ , sobre uma mesa horizontal. Quando o fio entre eles permanece não esticado e a esfera é largada, após percorrer uma distância  $H_0$ , ela atingirá uma velocidade  $V_0$ , sem que o caixote se mova.



Na situação em que o fio entre eles estiver esticado, a esfera, puxando o caixote, após percorrer a mesma distância  $H_0$ , atingirá uma velocidade V igual a:

- (a)  $\frac{1}{4} V_0$     (c)  $\frac{1}{2} V_0$     (e)  $3V_0$   
 (b)  $\frac{1}{3} V_0$     (d)  $2V_0$

**65 PUC-MG** Comprime-se uma mola de constante elástica k, através de uma esfera de massa M, produzindo-se uma deformação X. Abandonando-se o sistema, a esfera atinge uma altura h na rampa, mostrada na figura.

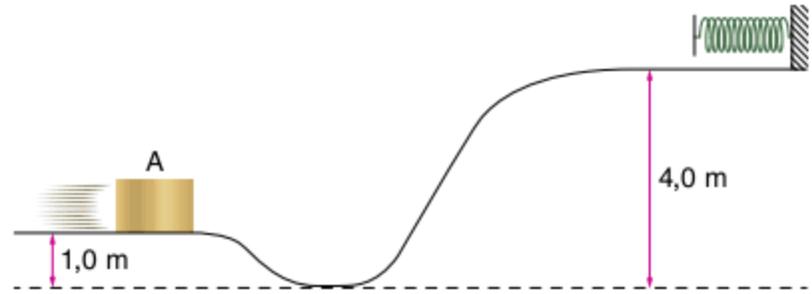


Provocando-se uma deformação  $2X$  na mola, a nova altura atingida pela esfera, na rampa, será igual a:

Dado: Despreze todas as formas de atrito.

- (a)  $2h$     (c)  $h\sqrt{2}$     (e)  $h$   
 (b)  $\frac{h}{2}$     (d)  $4h$

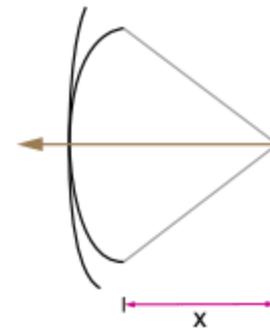
**66 Unifor-CE** Numa pista, cujo perfil está representado a seguir, um móvel de  $2,0 \text{ kg}$  de massa se desloca sem atrito. A velocidade com que o corpo passa pelo ponto A é de  $10 \text{ m/s}$ . Despreze o trabalho de forças não conservativas e adote  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



Sabendo que a mola colocada no plano superior apresenta deformação máxima de  $0,20 \text{ m}$  quando atingida pelo corpo, sua constante elástica vale, em  $\text{N/m}$ :

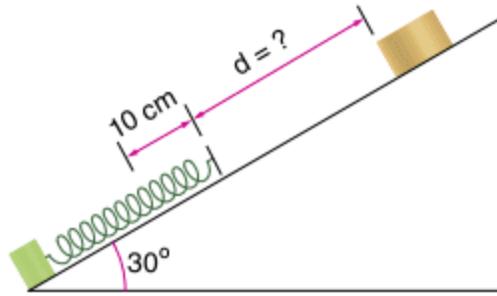
- (a)  $2,0 \cdot 10^3$     (d)  $20$   
 (b)  $2,0 \cdot 10^2$     (e)  $4,0$   
 (c)  $40$

**67 Unicamp** Num conjunto arco e flecha, a energia potencial elástica é transformada em energia cinética da flecha durante o lançamento. A força da corda sobre a flecha é proporcional ao deslocamento x, como ilustrado na figura.



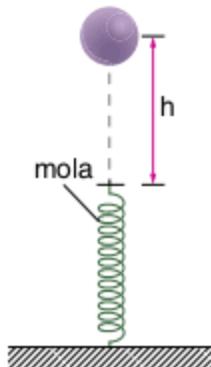
- a) Quando a corda é solta, o deslocamento é  $x = 0,6 \text{ m}$  e a força é de  $300 \text{ N}$ . Qual a energia potencial elástica nesse instante?  
 b) Qual será a velocidade da flecha ao abandonar a corda? A massa da flecha é de  $50 \text{ g}$ . Despreze a resistência do ar e a massa da corda.

**68 UFPR** Um corpo de massa igual a 2 kg parte do repouso e desliza, sem atrito, sobre um plano inclinado  $30^\circ$  com a horizontal, indo de encontro a uma mola de constante elástica igual a 1.000 N/m, que experimenta uma compressão máxima de 10 cm. Em seguida, a mola lança o corpo para cima.



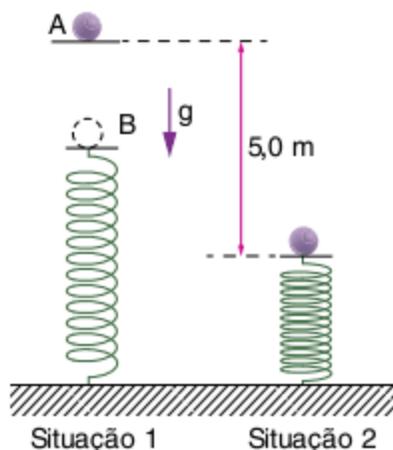
Qual a distância máxima  $d$  percorrida pelo corpo no retorno, medida a partir do ponto em que cessa o contato entre ele e a mola? Dado:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

**69 UFPE** Uma bolinha de massa  $m = 200 \text{ g}$  é largada do repouso a uma altura  $h$ , acima de uma mola ideal, de constante elástica  $k = 1.240 \text{ N/m}$ , que está fixada no piso (ver figura). Ela colide com a mola, comprimindo-a em  $\Delta x = 10 \text{ cm}$ .



Calcule, em metros, a altura inicial  $h$ . Despreze a resistência do ar.

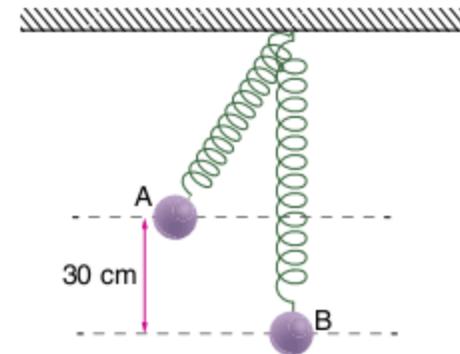
**70 Vunesp** Na figura a seguir, uma esfera de massa  $m = 2 \text{ kg}$  é abandonada do ponto A, caindo livremente e colidindo com o aparador, que está ligado a uma mola de constante elástica  $k = 2 \cdot 10^4 \text{ N/m}$ . As massas da mola e do aparador são desprezíveis. Não há perda de energia mecânica. Admita  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Na situação 2, a compressão da mola é máxima.



As deformações da mola, quando a esfera atinge sua velocidade máxima e quando ela está na situação 2, medidas em relação à posição inicial B da mola, valem, respectivamente:

- (a) 2 mm e 10 cm
- (b) 1 mm e 5 cm
- (c) 1 mm e 10 cm
- (d) 2 mm e 20 cm
- (e) 3 mm e 10 cm

**71 UFSC** Na figura a seguir, a esfera tem massa igual a 2,0 kg e encontra-se presa na extremidade de uma mola de massa desprezível e constante elástica 500 N/m. A esfera encontra-se, inicialmente, em repouso, mantida na posição A, onde a mola não está deformada. A posição A situa-se a 30 cm de altura em relação à posição B. Soltando-se a esfera, ela desce sob a ação da gravidade. Ao passar pelo ponto B, a mola se encontra na vertical e distendida de 10 cm. Desprezam-se as dimensões da esfera e os efeitos da resistência do ar.

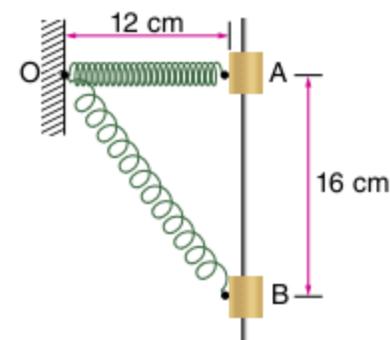


Considerando-se a situação física descrita, assinale a(s) proposição(ões) correta(s).

- 01 A velocidade da esfera no ponto mais baixo da trajetória, ponto B, é igual a  $\sqrt{6,0} \text{ m/s}$ .
- 02 Toda a energia potencial gravitacional da esfera, na posição A, é transformada em energia cinética, na posição B.
- 04 A velocidade da esfera no ponto B é igual a  $\sqrt{3,5} \text{ m/s}$ .
- 08 A força resultante sobre a esfera na posição B é igual a 30 N.
- 16 A energia mecânica da esfera, na posição B, é igual à sua energia potencial gravitacional na posição A.
- 32 Parte da energia potencial gravitacional da esfera, na posição A, é convertida em energia potencial elástica, na posição B.
- 64 A energia cinética da esfera, na posição B, é igual à sua energia potencial gravitacional, na posição A.

Soma =

**72** Na figura, tem-se um cilindro de 2,5 kg de massa, dotado de um furo, tal que, acoplado à barra vertical indicada, pode deslizar sem atrito ao longo dela. Ligada ao cilindro, existe uma mola de constante elástica igual a  $5,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}$  e comprimento natural 8,0 cm, cuja outra extremidade está fixada no ponto O. O sistema encontra-se em repouso (posição A) quando o cilindro é solto, descendo pela barra e alongando a mola.



Calcule o módulo da velocidade do cilindro, depois de ter descido 16 cm (posição B), adotando nos cálculos  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

**73 Unicamp** Bungee-jump é um esporte radical, muito conhecido hoje em dia, em que uma pessoa salta de uma grande altura, presa a um cabo elástico. Considere o salto de uma pessoa de 80 kg. Quando a força elástica do cabo começa a agir, a velocidade da pessoa é de 20 m/s. O cabo atinge o dobro de seu comprimento normal quando a pessoa atinge o ponto mais baixo de sua trajetória. Despreze a resistência do ar.

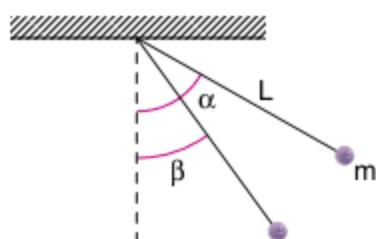
- Calcule o comprimento normal do cabo.
- Determine a constante elástica do cabo.

### Conservação da energia e a dinâmica do movimento circular

**74 ITA** Considere um pêndulo simples de comprimento  $L$  e massa  $m$  abandonado da horizontal. Então, para que não arrebente, o fio do pêndulo deve ter uma resistência à tração pelo menos igual a:

- (a)  $mg$     (b)  $2mg$     (c)  $3mg$     (d)  $4mg$     (e)  $5mg$

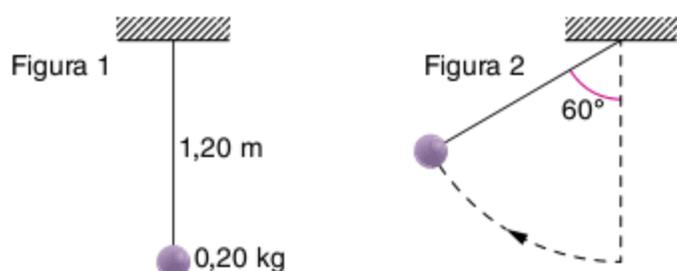
**75 UFMS** Um fio de comprimento ( $L$ ) e massa desprezível tem sua extremidade superior fixa e, na outra extremidade, há um pequeno objeto de massa ( $m$ ). O fio esticado é deslocado de um ângulo ( $\alpha$ ) em relação à vertical e abandonado. A figura a seguir mostra dois instantes do movimento do pêndulo.



Desprezando-se forças dissipativas de energia e sendo ( $g$ ) a aceleração da gravidade local, é correto afirmar que:

- a energia mecânica do objeto na posição definida pelo ângulo  $\beta$  é maior do que aquela definida pelo ângulo  $\alpha$ .
- a energia potencial do objeto na posição definida pelo ângulo  $\beta$  é maior do que aquela definida pelo ângulo  $\alpha$ .
- a força centrípeta atuante sobre o objeto na posição definida pelo ângulo  $\beta$  é menor do que aquela definida pelo ângulo  $\alpha$ .
- a velocidade escalar ( $v$ ) do objeto na posição definida pelo ângulo  $\beta$  é  $v = \sqrt{2gL \cdot \cos(\beta - \alpha)}$ .
- o trabalho ( $W$ ) realizado pelo peso do objeto durante o movimento entre as posições definidas pelos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  é  $W = mgL(\cos \beta - \cos \alpha)$ .

**76 UFRJ** Uma bolinha de massa 0,20 kg está em repouso, suspensa por um fio ideal de comprimento 1,20 m preso ao teto, conforme indica a figura 1. A bolinha recebe uma pancada horizontal e sobe em movimento circular até que o fio faça um ângulo máximo de  $60^\circ$  com a vertical, como indica a figura 2. Despreze os atritos e considere  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

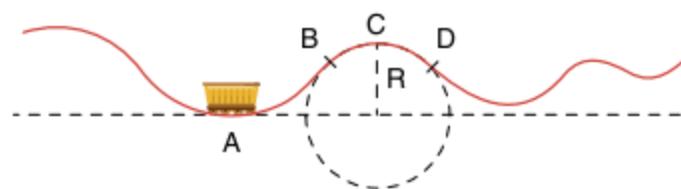


- Calcule o valor  $T_0$  da tensão no fio na situação inicial em que a bolinha estava em repouso antes da pancada.
- Calcule o valor  $T_1$  da tensão no fio quando o fio faz o ângulo máximo de  $60^\circ$  com a vertical e o valor  $T_2$  da tensão quando ele passa de volta pela posição vertical.

**77 FEI** Uma pedra gira em um plano vertical, amarrada à extremidade de um fio de comprimento  $\ell$ , inextensível, e de massa desprezível, fixo na outra extremidade, no limite em que o fio permanece esticado.

- Sendo  $g$  a aceleração da gravidade, qual a velocidade da pedra no ponto mais alto da sua trajetória?
- Sendo  $P$  o peso da pedra, qual a tração no fio no ponto mais baixo da trajetória?

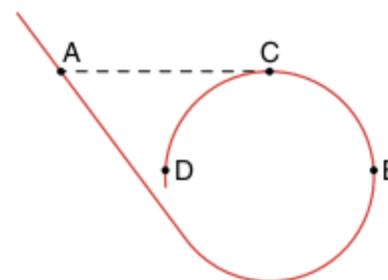
**78 Unicamp** Um carrinho de massa  $m = 300 \text{ kg}$  percorre uma montanha-russa cujo trecho BCD é um arco de circunferência de raio  $R = 5,4 \text{ m}$ , conforme a figura. A velocidade do carrinho no ponto A é  $v_A = 12 \text{ m/s}$ .



Considerando  $g = 10 \text{ m/s}^2$  e desprezando o atrito, calcule:

- a velocidade do carrinho no ponto C.
- a aceleração do carrinho no ponto C.
- a força feita pelos trilhos sobre o carrinho no ponto C.

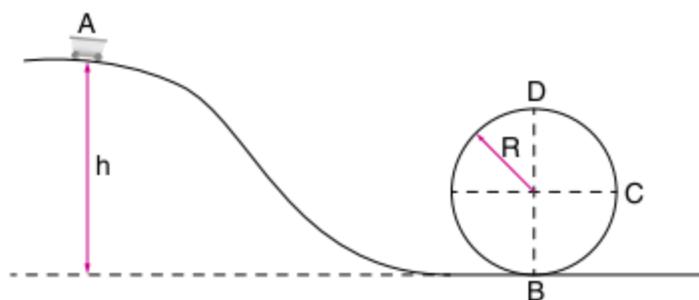
**79 UFPB** Uma pista de brinquedo, inteiramente contida num plano vertical, tem o formato mostrado na figura a seguir. Um carrinho em repouso é largado no ponto A e inicia o seu movimento de descida acelerado pela força gravitacional.



Considerando-se que os pontos A e C estão na mesma altura e que não há atrito entre a pista e o carrinho, pode-se afirmar que este carrinho:

- perderá contato com a pista no ponto B.
- perderá contato com a pista entre os pontos B e C.
- perderá contato com a pista no ponto C.
- perderá contato com a pista entre os pontos C e D.
- não perderá contato com a pista.

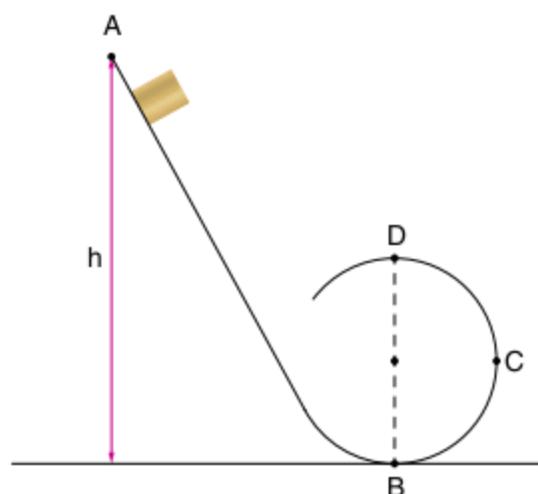
**80 UFG** A montanha-russa de um parque de diversão, esquematizada na figura a seguir, foi projetada com segurança para que a força resultante sobre um carrinho de massa  $m$ , ao passar pelo ponto C num trilho circular de raio  $R$ , fosse de  $\sqrt{17}mg$ , após ter sido abandonado no ponto A.



Dessa forma, determine:

- a altura  $h$  em função do raio  $R$  do trilho.
- a força exercida pelo trilho sobre o carrinho no ponto  $D$ , em função de  $m$  e  $g$ .

**81 Mackenzie** Um pequeno bloco de massa  $m$  é abandonado do ponto  $A$  e desliza ao longo de um trilho sem atrito, como mostra a figura a seguir.



Para que a força que o trilho exerce sobre o bloco no ponto  $D$  seja igual ao seu peso, supondo ser  $R$  o raio do arco de circunferência de diâmetro  $BD$ , a altura  $h$  deve ser igual a:

- $2R$
- $2,5R$
- $3R$
- $3,5R$
- $4R$

### Variação de energia mecânica e forças não conservativas

**82 ITA** Um pingo de chuva de massa  $5,0 \cdot 10^{-5}$  kg cai com velocidade constante de uma altitude de 120 m, sem que sua massa varie, num local onde a aceleração da gravidade é de  $10 \text{ m/s}^2$ . Nessas condições, a força de atrito  $F_A$  do ar sobre a gota e a energia  $E_A$  dissipada durante a queda são, respectivamente:

- $5,0 \cdot 10^{-4} \text{ N}$ ;  $5,0 \cdot 10^{-4} \text{ J}$
- $1,0 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ ;  $1,0 \cdot 10^{-1} \text{ J}$
- $5,0 \cdot 10^{-4} \text{ N}$ ;  $5,0 \cdot 10^{-2} \text{ J}$
- $5,0 \cdot 10^{-4} \text{ N}$ ;  $6,0 \cdot 10^{-2} \text{ J}$
- $5,0 \cdot 10^{-4} \text{ N}$ ; 0

**83 UFMS** Um objeto é lançado verticalmente para cima, a partir do solo, com uma velocidade inicial de  $19,6 \text{ m/s}$ , atingindo uma altura máxima de  $14,7 \text{ m}$ . Adotando a aceleração da gravidade  $9,8 \text{ m/s}^2$ , é correto afirmar que:

- a energia mecânica do objeto não variou.
- houve perda de energia mecânica, pois o objeto deveria ter alcançado uma altura de  $19,6 \text{ m}$ .
- sobre o objeto atuou apenas a força da gravidade.

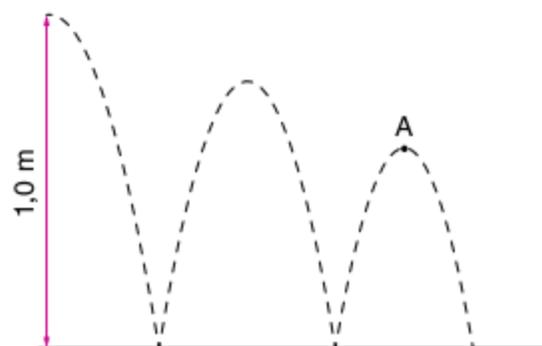
**08** o objeto perdeu 25% de sua energia mecânica no movimento de subida.

**16** o objeto retornará ao ponto de lançamento com a mesma velocidade, em módulo.

Soma =

**84 Unicamp** Uma bola metálica cai da altura de  $1,0 \text{ m}$  sobre um chão duro. A bola repica no chão várias vezes, conforme a figura adiante. Em cada colisão, a bola perde 20% de sua energia. Despreze a resistência do ar.

Dado:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



- Qual é a altura máxima que a bola atinge após duas colisões (ponto  $A$ )?
- Qual é a velocidade com que a bola atinge o chão na terceira colisão?

**85 Unifav** Um exaustor, ao descarregar grãos do porão de um navio, ergue-os até uma altura de  $10,0 \text{ m}$  e, depois, lança-os com uma velocidade de  $4,00 \text{ m/s}$ . Se os grãos são descarregados à razão de  $2,00 \text{ kg}$  por segundo, conclui-se que, para realizar esta tarefa, o motor do exaustor deve ter uma potência mínima de:

Considere  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

- $1,96 \cdot 10^2 \text{ W}$
- $2,16 \cdot 10^2 \text{ W}$
- $2,00 \cdot 10^2 \text{ W}$
- $1,00 \cdot 10^2 \text{ W}$
- $16 \text{ W}$

**86 UFSC** O bloco representado na figura a seguir desce a partir do repouso, do ponto  $A$ , sobre o caminho que apresenta atrito entre as superfícies de contato. A linha horizontal  $AB$  passa pelos pontos  $A$  e  $B$ .



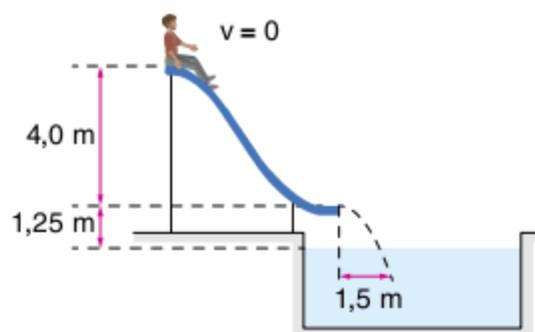
Assinale a(s) proposição(ões) correta(s).

- O bloco certamente atingirá o ponto  $B$ .
- A força de atrito realiza trabalho negativo durante todo o percurso e faz diminuir a energia mecânica do sistema.
- Tanto a força peso como a força normal realizam trabalho.
- A energia potencial gravitacional permanece constante em todo o percurso do bloco.
- A energia cinética do bloco não se conserva durante o movimento.

- 32 O bloco sempre descerá com velocidade constante, pois está submetido a forças constantes.
- 64 A Segunda Lei de Newton não pode ser aplicada ao movimento deste bloco, pois existem forças dissipativas atuando durante o movimento.

Soma =

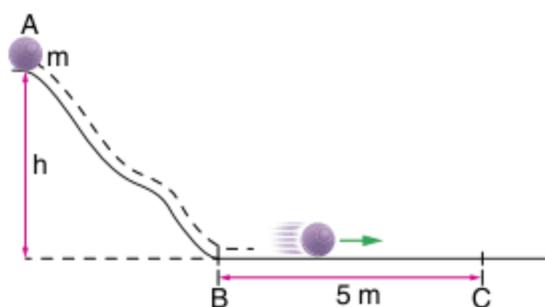
- 87 **UFF** Um tobogã de 4,0 m de altura é colocado à beira de uma piscina com sua extremidade mais baixa a 1,25 m acima do nível da água. Uma criança de massa 50 kg escorrega do topo do tobogã a partir do repouso, conforme indicado na figura.



Considerando  $g = 10 \text{ m/s}^2$  e sabendo que a criança deixa o tobogã com uma velocidade horizontal  $V$  e cai na água a 1,5 m da vertical que passa pela extremidade mais baixa do tobogã, determine:

- a velocidade horizontal  $V$  com que a criança deixa o tobogã.
- a perda de energia mecânica da criança durante a descida no tobogã.

- 88 **Fuvest** Um corpo de massa  $m$  é solto no ponto A de uma superfície e desliza, sem atrito, até atingir o ponto B. A partir deste ponto, o corpo desloca-se numa superfície horizontal com atrito até parar no ponto C, a 5 metros de B.

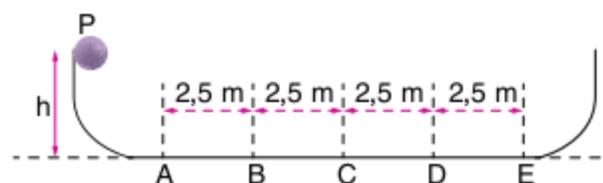


Sendo  $m$  medido em quilogramas e  $h$  em metros, o valor da força de atrito  $F$ , suposta constante enquanto o corpo se movimenta, vale, em newtons:

Considere:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

- |                            |            |
|----------------------------|------------|
| (a) $\frac{1}{2} \cdot mh$ | (d) $5mh$  |
| (b) $mh$                   | (e) $10mh$ |
| (c) $2mh$                  |            |

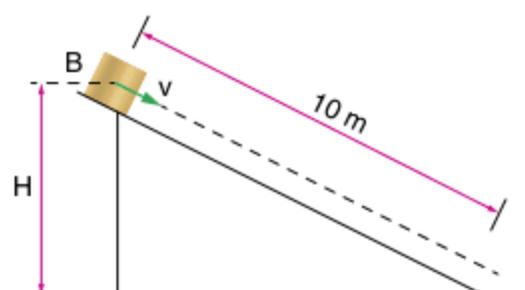
- 89 **Fuvest** Uma partícula desliza sobre o trilho que possui extremidades elevadas e uma parte central plana, conforme a figura. As partes curvas não apresentam atrito e o coeficiente de atrito cinético da parte plana é  $\mu = 0,2$ . Abandona-se a partícula do ponto P, cuja altura é  $h = 2,5 \text{ m}$  acima da parte plana.



O ponto no qual a partícula vai parar é:

- A
- B
- C
- D
- E

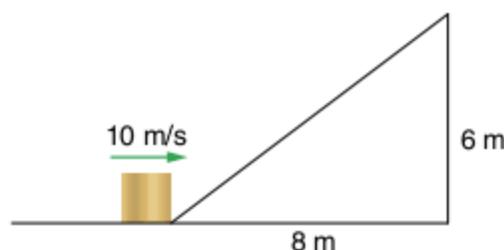
- 90 **Fuvest** Um bloco B de 2,0 kg é lançado do topo de um plano inclinado, com velocidade de 5,0 m/s, conforme indica a figura. Durante a descida, atua uma força de atrito constante de 7,5 N, que faz o bloco parar após deslocar-se 10 m.



Calcule a altura H.

- 1,25 m
- 2,00 m
- 2,50 m
- 3,75 m
- 5,00 m

- 91 **UFPR** Uma caixa se movimenta sobre uma superfície horizontal e, quando sua velocidade tem módulo 10 m/s, passa a subir uma rampa, conforme indicado na figura.

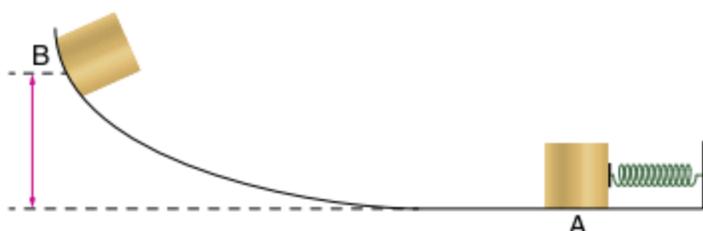


Sabendo que o coeficiente de atrito entre o bloco e o material da rampa é 0,75, calcule até que altura, em relação à superfície horizontal, a caixa irá subir nessa rampa.

- 92 **IME** Um bloco de massa  $m = 4 \text{ kg}$  parte de um plano horizontal sem atrito e sobe um plano inclinado com velocidade inicial de 6 m/s. Quando o bloco atinge a altura de 1 m, sua velocidade se anula; em seguida, o bloco escorrega de volta, passando pela posição inicial. Admitindo que a aceleração da gravidade seja igual a  $10 \text{ m/s}^2$  e que o atrito do plano inclinado produza a mesma perda de energia mecânica no movimento de volta, a velocidade do bloco, ao passar pela posição inicial, é:

- |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|
| (a) 1 m/s | (c) 3 m/s | (e) 5 m/s |
| (b) 2 m/s | (d) 4 m/s |           |

**93 UFSC** A figura mostra um bloco de massa  $m = 500 \text{ g}$ , mantido encostado em uma mola comprimida de  $x = 20 \text{ cm}$ . A constante elástica da mola é  $k = 400 \text{ N/m}$ . A mola é solta e empurra o bloco, que, partindo do repouso no ponto A, atinge o ponto B, onde para. No percurso entre os pontos A e B, a força de atrito da superfície sobre o bloco dissipa 20% da energia mecânica inicial no ponto A. Considere nula a energia potencial gravitacional no ponto A.

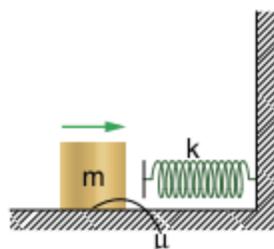


Assinale a(s) proposição(ões) correta(s).

- 01 Na situação descrita, não há conservação da energia mecânica.
- 02 A energia mecânica do bloco no ponto B é igual a  $6,4 \text{ J}$ .
- 04 O trabalho realizado pela força de atrito sobre o bloco, durante o seu movimento, foi de  $1,6 \text{ J}$ .
- 08 O ponto B situa-se a  $80 \text{ cm}$  de altura, em relação ao ponto A.
- 16 A força peso não realizou trabalho no deslocamento do bloco entre os pontos A e B, por isso não houve conservação da energia mecânica do bloco.
- 32 A energia mecânica total do bloco, no ponto A, é igual a  $8,0 \text{ J}$ .
- 64 A energia potencial elástica do bloco, no ponto A, é totalmente transformada na energia potencial gravitacional do bloco, no ponto B.

Soma =

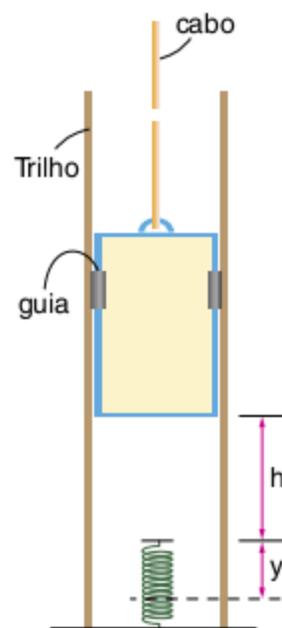
**94 Unicamp** Um bloco de massa  $m = 0,5 \text{ kg}$  desloca-se sobre um plano horizontal, cujo coeficiente de atrito  $\mu$  vale  $0,4$ , e comprime uma mola de constante elástica  $k = 1,6 \cdot 10^2 \text{ N/m}$ .



Sabendo-se que a máxima compressão da mola pela ação do bloco é  $x = 0,1 \text{ m}$ , calcule:

- a) o trabalho da força de atrito durante a compressão da mola.
- b) a velocidade do bloco no instante em que ele tocou a mola.

**95 UFF** Um elevador de massa  $M$  encontra-se em repouso quando seu cabo de sustentação rompe-se. O elevador cai de uma altura  $h$  até atingir uma mola amortecedora, situada no fundo do poço, comprimindo-a. Durante a queda, um sistema de segurança pressiona as guias do elevador contra os trilhos laterais, provocando uma força de atrito resultante, constante, de valor igual a  $F$  (menor que o peso do elevador).



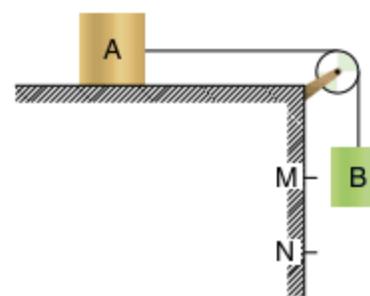
Sabendo-se que a aceleração da gravidade é  $g$ , calcule, em função de  $M$ ,  $h$ ,  $F$  e  $g$ :

- a) a aceleração do elevador após o rompimento do cabo.
- b) a velocidade do elevador ao atingir a mola.

Suponha que a mola seja ideal e que a força de atrito não atue durante a sua compressão. Desprezando-se as perdas de energia no choque do elevador com a mola e sabendo-se que a compressão máxima sofrida pela mesma é  $y$ , calcule:

- c) a variação da energia potencial gravitacional do elevador entre o instante do choque com a mola e o instante em que esta atinge sua compressão máxima.
- d) a constante elástica da mola.

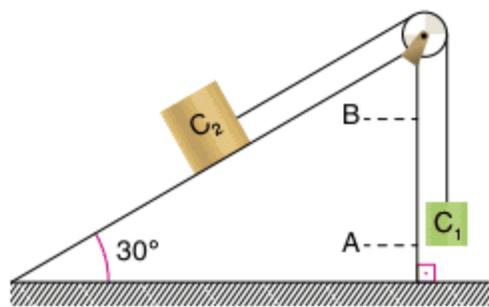
**96 Cesgranrio** Dois blocos, A e B, de massas  $m_A = 0,60 \text{ kg}$  e  $m_B = 0,40 \text{ kg}$ , apresentados na figura a seguir, estão ligados por um fio que passa por uma roldana. Tanto o fio quanto a roldana têm massas desprezíveis. O sistema é solto com o bloco B na posição M, indo atingir a posição N,  $80 \text{ cm}$  abaixo, com velocidade de  $2,0 \text{ m/s}$ .



O módulo do trabalho realizado pela força de atrito durante esse movimento, vale, em joules:

- (a)  $0,80$
- (b)  $1,0$
- (c)  $1,2$
- (d)  $1,8$
- (e)  $2,0$

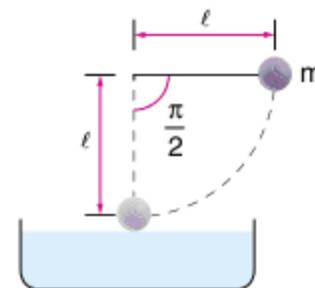
**97 Mackenzie** No sistema a seguir, de fio e polia ideais, o corpo  $C_1$ , de massa 5,0 kg, sobe 50 cm desde o ponto A até o ponto B, com velocidade constante.



O trabalho realizado pela força de atrito existente entre o corpo  $C_2$ , de massa 20 kg, e o plano inclinado, neste intervalo, foi:  
Dado:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

- (a) -15 J
- (b) 20 J
- (c) -25 J
- (d) 40 J
- (e) -50 J

**98 ITA** Um pêndulo de comprimento  $\ell$  é abandonado na posição indicada na figura e, quando passa pelo ponto mais baixo da sua trajetória, tangencia a superfície de um líquido, perdendo, em cada uma dessas passagens, 30% da energia cinética que possui.



Após uma oscilação completa, qual será, aproximadamente, o ângulo que o fio do pêndulo fará com a vertical?

- (a) 75°
- (b) 60°
- (c) 55°
- (d) 45°
- (e) 30°

## TEXTO COMPLEMENTAR

### Montanhas-russas e o Princípio de Conservação de Energia

As montanhas-russas são uma das maiores atrações dos parques de diversões. Originadas no século XVII como estruturas cobertas de gelo, na região de São Petersburgo, na Rússia, as montanhas-russas só ganharam rodas em 1784.

Montanhas-russas típicas funcionam somente sob a ação da gravidade, um motor só fornece energia inicial para levar os vagões até o topo. Em uma sucessão de quedas, curvas e loops, essas grandes estruturas planejadas estão sujeitas a um dos princípios fundamentais da Física, o Princípio de Conservação de Energia.

Em um sistema isolado, a energia total deve permanecer constante. Energia não pode ser criada espontaneamente ou destruída, ela pode converter-se de uma forma qualquer em outra.

Ao sair da plataforma, o vagão de uma montanha-russa percorre o trilho empurrado por um motor elétrico até o ponto mais alto do circuito, adquirindo energia potencial ao longo do trajeto. A partir daí, o vagão começa a descer, acelerado pela ação da gravidade, e a energia potencial armazenada durante a subida é transformada em energia cinética. Durante a queda, a velocidade do vagão aumenta e, conseqüentemente, sua energia cinética. Ao subir a próxima colina, a energia cinética do vagão é transformada em energia potencial novamente. Essa transformação é sucessiva, a velocidade obtida em uma descida é usada para superar a próxima subida. Em circuitos com inversões, como os loops, a velocidade adquirida na transformação de energia potencial em cinética permite que haja resultante centrípeta capaz de manter o passageiro no assento.

Em uma montanha-russa ideal, a energia mecânica seria conservada, garantindo um passeio infinito. Em montanhas-russas reais, a energia mecânica não é totalmente conservada, há dissipação de energia em forma de calor, devido ao atrito das peças, rodas e

trilhos. Assim, se mais energia não é fornecida ao sistema, os picos devem ser cada vez mais baixos até o final do trajeto.

Na verdade, em muitos brinquedos, a velocidade adquirida durante a queda acaba sendo muito alta e um sistema de freios deve ser acionado, dissipando energia, para que o vagão possa continuar percorrendo o circuito. A energia do sistema também pode ser utilizada para abastecer geradores, fornecendo energia elétrica às lâmpadas que iluminam o brinquedo.

Atualmente, as montanhas-russas são projetadas e testadas por meio de modelos computacionais sofisticados. Em um dos circuitos mais rápidos do mundo, os vagões podem atingir velocidades de cerca de 240 km/h. Circuitos mais elaborados utilizam-se de propulsão eletromagnética para impulsionar os vagões em curvas, loops e "parafusos".



©ANTHONY ANEESSE TOTAH JR. | DREAMSTIME.COM

# RESUMINDO

Estudamos, neste capítulo, o conceito de trabalho.

O **trabalho (W) de uma força constante**  $\vec{F}$  que atua sobre uma partícula, formando um ângulo  $\theta$  com o vetor deslocamento  $\vec{d}$  dessa partícula, é calculado como:

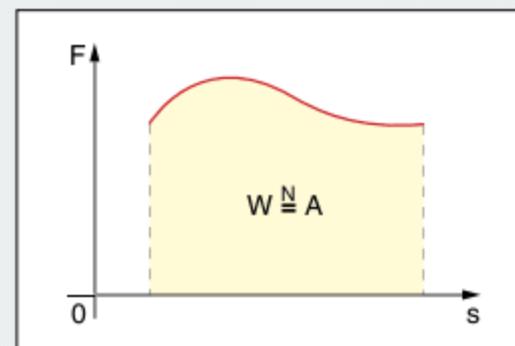
$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos\theta$$

Já o **trabalho de uma força variável** é igual, numericamente, à área do gráfico  $F \times s$ , em que  $F$  é o módulo do vetor  $\vec{F}$  projetado na direção do deslocamento e  $s$  é a posição escalar ao longo da trajetória.

Calculamos o trabalho de algumas importantes forças:

**Trabalho da força peso:**  $W_p = -(mgh_2 - mgh_1)$

**Trabalho da força elástica:**  $W_{FEI} = -\left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right)$



Estudamos também os conceitos de potência média, potência instantânea e rendimento.

A **potência média** de uma força  $\vec{F}$  que realiza um trabalho  $W$  em um intervalo de tempo  $\Delta t$  é calculada como:

$$P_m = \frac{W}{\Delta t}$$

Quando a força for constante, a potência média também pode ser escrita como:

$$P_m = |\vec{F}| \cdot |\vec{v}_m| \cdot \cos\theta$$

A **potência instantânea** de uma força  $\vec{F}$  que realiza um trabalho  $W$  pode ser calculada como:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P_m \Rightarrow P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W}{\Delta t}$$

Quando a força for constante, a potência instantânea também pode ser escrita como:

$$P = |\vec{F}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\theta$$

O **rendimento ( $\eta$ )** de uma máquina pode ser definido como a razão entre a potência utilizada e a potência recebida, ou como a razão entre o trabalho realizado e o trabalho recebido:

$$\eta = \frac{P_U}{P_T} = \frac{W_U}{W_T}$$

Estudamos o conceito de energia e vimos as definições de algumas formas de energia.

A **energia cinética** é a energia associada ao movimento de um corpo de massa  $m$  e velocidade de módulo  $v$ .

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

A **energia potencial gravitacional** é a energia associada à posição de um corpo de massa  $m$ , sujeito a um campo gravitacional de módulo  $g$ , estando o corpo a uma altura  $h$  em relação a um referencial escolhido:

$$E_{PG} = mgh$$

A **energia potencial elástica** é a energia associada à posição de uma mola de constante elástica  $k$  que se encontra deformada de  $x$ :

$$E_{PEI} = \frac{1}{2}kx^2$$

A **energia mecânica** é a soma das energias cinética e potencial:

$$E_M = E_C + E_P$$

Quando atuam sobre um sistema somente **forças conservativas**, que são aquelas cujos trabalhos entre dois pontos dados independem da trajetória, a energia mecânica do sistema se conserva:

$$E_M = \text{constante}$$

Vimos também algumas importantes relações entre trabalho e energia.

O **Teorema da Energia Cinética** nos diz que o trabalho da resultante de forças sobre um sistema é igual à variação da energia cinética desse sistema:

$$W_{FR} = \Delta E_C$$

Aprendemos também que o **trabalho das forças não conservativas** sobre um sistema é igual à variação da energia mecânica desse sistema:

$$W_{Fnc} = \Delta E_M$$



## SITES

- Atrito e transformação de energia  
[www.fisica.ufpb.br/~romero/objetosaprendizagem/Rived/06aRotacao/animacao/anim.html](http://www.fisica.ufpb.br/~romero/objetosaprendizagem/Rived/06aRotacao/animacao/anim.html)
- Sistema massa-mola com atrito  
[http://phet.colorado.edu/sims/mass-spring-lab/mass-spring-lab\\_pt\\_BR.html](http://phet.colorado.edu/sims/mass-spring-lab/mass-spring-lab_pt_BR.html)
- Transformação de energia – Experimento  
[www.pontociencia.org.br/experimentos-interna.php?experimento=9&CONVERSAO+DE+ENERGIA#top](http://www.pontociencia.org.br/experimentos-interna.php?experimento=9&CONVERSAO+DE+ENERGIA#top)

- Teorema da energia cinética – Cinto de segurança (em inglês)  
<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/seatb.html#cc1>
- Conservação de energia – Podemos fabricar matéria?  
<http://ciencia.hsw.uol.com.br/fabricar-materia.htm>
- Conservação de energia – Parque energético para esqueteistas  
[http://phet.colorado.edu/pt\\_BR/simulation/energy-skate-park](http://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/energy-skate-park)

## Exercícios complementares

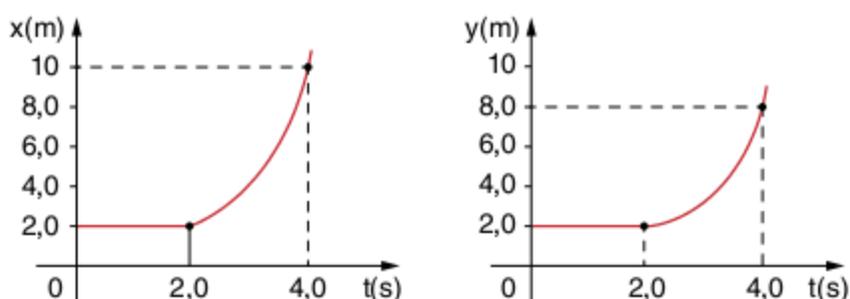
Considere, quando necessário,  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

### Trabalho

**1 UFPE** Um projétil de massa  $0,1 \text{ kg}$  é lançado do solo, segundo um ângulo de  $30^\circ$  com a horizontal e com velocidade de módulo  $40 \text{ m/s}$ . Despreze a resistência do ar. Qual é, em joules, o trabalho realizado pela força peso durante o movimento ascendente desse projétil?

Dado:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

**2** Uma partícula de  $8,0 \text{ kg}$  de massa parte do repouso de um ponto A pertencente a um plano horizontal sem atrito, deslocando-se para um ponto B sob a ação de uma força constante. Sua posição sobre o plano é registrada em relação a um referencial cartesiano  $Oxy$ , de modo que as coordenadas  $x$  e  $y$  variem com o tempo, conforme os gráficos a seguir.

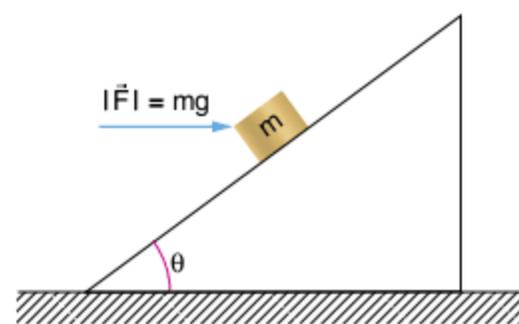


Sabendo que a partícula parte de A no instante  $t_1 = 2,0 \text{ s}$  e que atinge B no instante  $t_2 = 4,0 \text{ s}$ :

- esboce, em um diagrama  $y$  versus  $x$ , o deslocamento vetorial da partícula desde A até B, destacando o seu módulo.
- calcule o trabalho total realizado sobre a partícula, bem como a intensidade da força que a deslocou desde A até B.

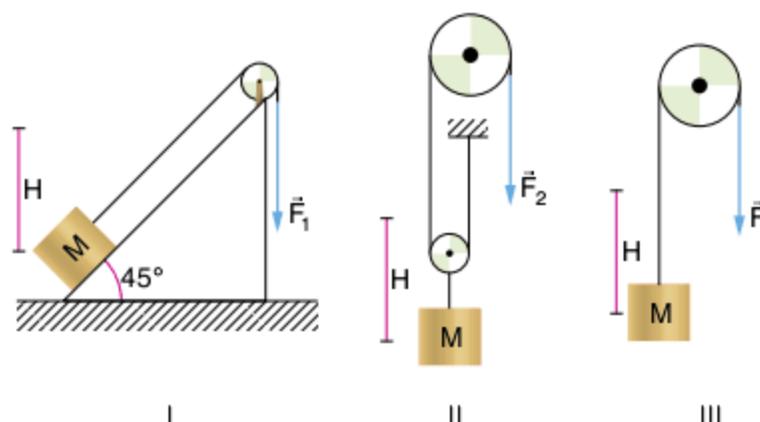
**3 UFRJ** Um plano está inclinado, em relação à horizontal, de um ângulo  $\theta$ , cujo seno é igual a  $0,6$  (o ângulo é menor do que  $45^\circ$ ).

Um bloco de massa  $m$  sobe nesse plano inclinado sob a ação de uma força horizontal  $\vec{F}$ , de módulo exatamente igual ao módulo de seu peso, como indica a figura a seguir.



- Supondo que não haja atrito entre o bloco e o plano inclinado, calcule o módulo da aceleração do bloco.
- Calcule a razão entre o trabalho  $W_F$  da força  $\vec{F}$  e o trabalho  $W_P$  do peso do bloco, ambos em um deslocamento no qual o bloco percorre uma distância  $d$  ao longo da rampa.

**4 UFG** Faz-se um objeto de massa  $M$  elevar-se de uma mesma altura  $H$  utilizando um dos três mecanismos mostrados na figura. As forças são ajustadas para vencer a gravidade sem transferir energia cinética ao corpo. O atrito e a inércia das polias são desprezíveis.

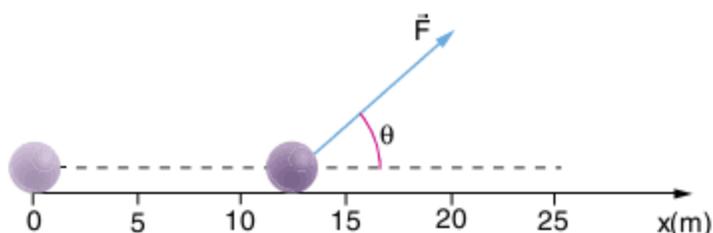


Em relação a essa situação, é correto afirmar:

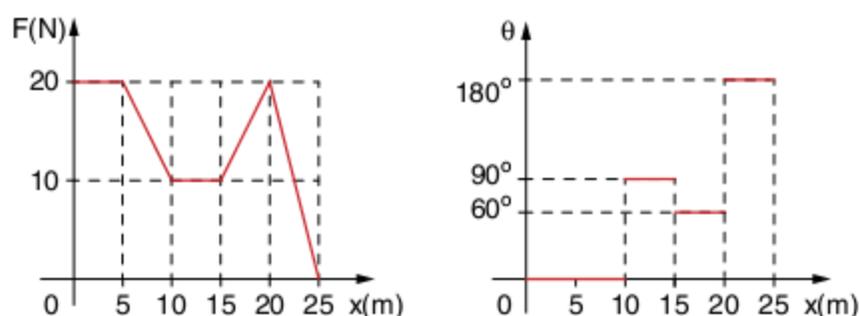
- o mecanismo I é mais vantajoso, porque  $\vec{F}_1$  e o trabalho que ela realiza são os menores.
- o mecanismo II é mais vantajoso, porque  $\vec{F}_2$  realiza o menor trabalho.
- o mecanismo III é mais vantajoso, porque  $\vec{F}_3$  é a menor força.
- o trabalho de  $\vec{F}_3$  é menor do que o trabalho de  $\vec{F}_2$ .
- o trabalho de  $\vec{F}_1$  é igual ao trabalho de  $\vec{F}_3$ .

**5 UFPE** O trabalho realizado para levantar uma caixa até uma altura  $h$ , arrastando-a sobre um plano inclinado com coeficiente de atrito  $\mu_1$  e inclinação de  $30^\circ$  relativa à horizontal é o mesmo se usarmos outro plano com coeficiente de atrito  $\mu_2$  e inclinação de  $45^\circ$ . Calcule o quadrado da razão entre os coeficientes de atrito  $\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2$ .

**6** Um corpo se move sobre o eixo  $x$ , partindo de sua origem. Uma das forças atuantes nesse corpo é a força  $\vec{F}$ , que forma com o eixo um ângulo  $\theta$ .



São dados os gráficos do módulo de  $\vec{F}$  e de  $\theta$  em função de  $x$ :



Calcule o trabalho de  $\vec{F}$ :

- de  $x = 0$  a  $x = 5$  m.
- de  $x = 5$  m a  $x = 10$  m.
- de  $x = 10$  m a  $x = 15$  m.
- de  $x = 15$  m a  $x = 20$  m.
- de  $x = 20$  m a  $x = 25$  m.

**7 FEI** Um tambor de massa 50 kg está cheio com 200 L de água. O tambor é içado por uma força  $F$  a 20 m de altura. A água escoar uniformemente através de um orifício, de modo que o tambor chegue à parte superior completamente vazio. Sabendo-se que a velocidade de subida é constante, determinar o trabalho da força  $F$  do solo até a altura de 20 m.

- 10.000 J
- 15.000 J
- 20.000 J
- 25.000 J
- 30.000 J

### Potência e rendimento

**8 UFRJ** Um avião "A" reboca um planador "P" com velocidade constante de 60 m/s numa trajetória horizontal, como ilustra a figura. O cabo utilizado para o reboque tem massa desprezível e está sob uma tensão, considerada uniforme, de 2.000 N. As forças horizontais (forças de arrasto) que o ar opõe aos movimentos do avião e do planador são tais que a força de arrasto no avião é 20% maior do que no planador.



Calcule:

- o módulo da força horizontal que o ar exerce sobre o planador P.
- a potência mínima em kW que o motor do avião tem de desenvolver para efetuar o reboque nessas condições.

**9 Fuvest** Um carro de corrida com massa total  $m = 800$  kg parte do repouso e, com aceleração constante, atinge, após 15 segundos, a velocidade de 270 km/h (ou seja, 75 m/s). A figura representa o velocímetro, que indica a velocidade instantânea do carro. Despreze as perdas por atrito e as energias cinéticas de rotação (como a das rodas do carro). Suponha que o movimento ocorre numa trajetória retilínea e horizontal.

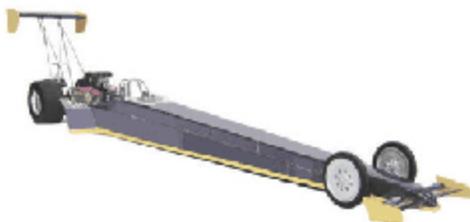


- Qual a velocidade angular  $\omega$  do ponteiro do velocímetro durante a aceleração do carro?
- Qual o valor do módulo da aceleração do carro nesses 15 segundos?
- Qual o valor da componente horizontal da força que a pista aplica ao carro durante sua aceleração?
- Qual a potência fornecida pelo motor quando o carro está a 180 km/h?

**10 UnB** Um automóvel de massa  $m$  é acelerado uniformemente pelo seu motor. Sabe-se que ele parte do repouso e atinge a velocidade  $v_0$  em  $t_0$  segundos. Então, a potência que o motor desenvolve após transcorridos  $t$  segundos da partida é:

- $\frac{mv_0^2}{2t_0^3} t^2$
- $\frac{mv_0^2}{t_0^2} t$
- $\frac{mv_0^2}{t^2} t_0$
- Nenhuma dessas.

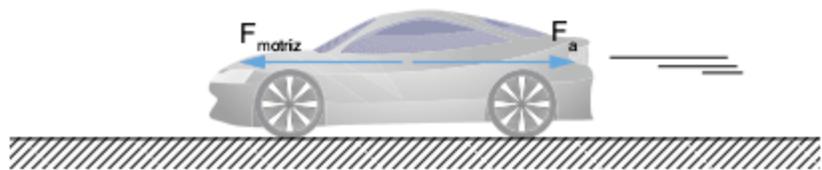
**11 Fuvest** Um veículo para competição de aceleração (*drag racing*) tem massa  $M = 1.100$  kg, motor de potência máxima  $P = 2,64 \cdot 10^6$  W ( $\approx 3.500$  cavalos) e possui um aerofólio que lhe imprime uma força aerodinâmica vertical para baixo,  $F_A$ , desprezível em baixas velocidades. Tanto em altas quanto em baixas velocidades, a força vertical que o veículo aplica à pista horizontal está praticamente concentrada nas rodas motoras traseiras, de 0,40 m de raio. Os coeficientes de atrito estático e dinâmico, entre os pneus e a pista, são iguais e valem  $\mu = 0,50$ .



Determine:

- a máxima aceleração do veículo quando sua velocidade é de 120 m/s (432 km/h), supondo que não haja escorregamento entre as rodas traseiras e a pista. Despreze a força horizontal de resistência do ar.
- o mínimo valor da força vertical  $F_A$ , aplicada ao veículo pelo aerofólio, nas condições do item anterior.
- a potência desenvolvida pelo motor no momento da largada, quando: a velocidade angular das rodas traseiras é  $\omega = 600 \text{ rad/s}$ , a velocidade do veículo é desprezível e as rodas estão escorregando (derrapando) sobre a pista.

**12 UFMS** O motor de um veículo desenvolve uma potência máxima de 45.000 W (~ 60 hp) em uma estrada plana e horizontal, alcançando uma velocidade máxima e constante de 100 km/h. Nessa condição, toda a potência do motor é consumida pelo trabalho realizado pela força de arrasto  $\vec{F}_a$ , que é proporcional e contrária à velocidade, isto é,  $\vec{F}_a = -b\vec{V}$ , onde  $b$  é uma constante de proporcionalidade e  $\vec{V}$  é o vetor velocidade do veículo. A potência instantânea de um veículo é dada pelo produto da força motriz pela velocidade do veículo, isto é, Potência =  $F_{\text{motriz}} \times V$ . Veja a figura ilustrando essas forças aplicadas no veículo quando está desenvolvendo a potência máxima.



Com base nos conceitos da dinâmica dos corpos rígidos e dos fluidos, assinale a alternativa correta.

- A força motriz, quando o carro desenvolve a potência máxima, é menor que 1.500 N.
- A força de arrasto aplicada no carro, quando ele desenvolve a potência máxima, é menor que a força motriz.
- A constante de proporcionalidade  $b$  é maior que 60 Ns/m.
- A constante  $b$  de proporcionalidade não depende da área da seção transversal do carro.
- Para o veículo desenvolver uma velocidade constante igual a 50 km/h, nessa mesma pista, basta o motor desenvolver uma potência igual a  $\frac{1}{4}$  da potência máxima.

**13 Fuvest** A figura I representa um cabide dependurado na extremidade de uma mola de constante elástica  $k = 50 \text{ N/m}$ . Na figura II, tem-se a nova situação de equilíbrio logo após a roupa molhada ser colocada no cabide e exposta ao Sol para secar, provocando na mola uma deformação inicial  $x = 18 \text{ cm}$ . O tempo de insolação foi mais do que suficiente para secar a roupa completamente. A variação da deformação da mola (em cm) em função do tempo (em horas) em que a roupa ficou sob a ação dos raios solares está registrada na figura III a seguir.

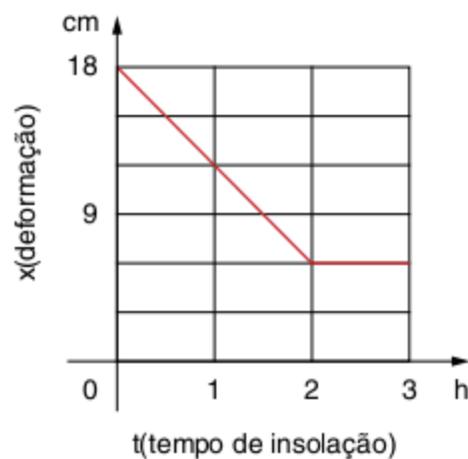
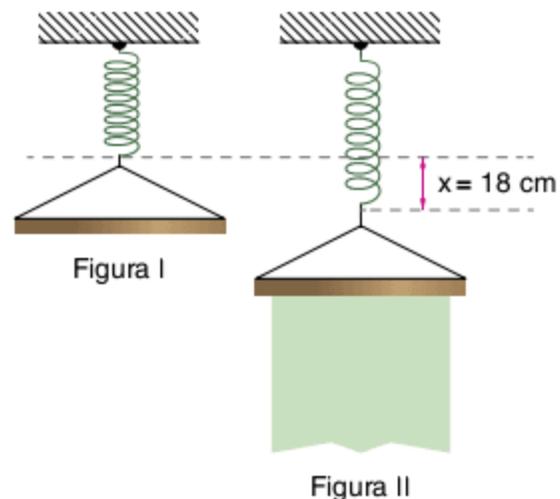
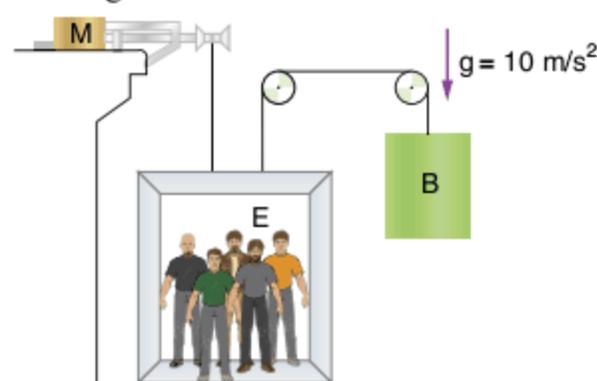


Figura III

Considere que cada grama de água para vaporizar absorve 500 cal de energia e determine:

- o peso da água que evaporou.
- a potência média de radiação solar absorvida pela roupa, supondo ser ela a única responsável pela evaporação da água.

**14 Fuvest** A figura a seguir representa, esquematicamente, um elevador E com massa 800 kg e um contrapeso B, também de 800 kg, acionados por um motor M. A carga interna do elevador é de 500 kg.

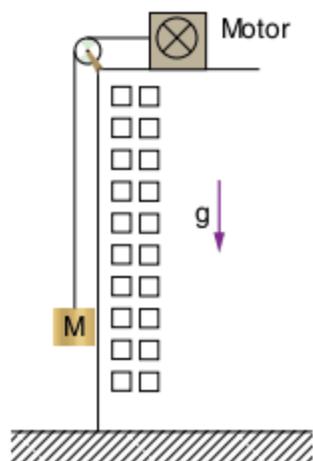


- Qual a potência fornecida pelo motor com o elevador subindo com uma velocidade constante de 1 m/s?
- Qual a força aplicada pelo motor através do cabo, para acelerar o elevador em ascensão, à razão de  $0,5 \text{ m/s}^2$ ?

**15 ITA** Projetado para subir com velocidade média constante a uma altura de 32 m em 40 s, um elevador consome a potência de 8,5 kW de seu motor. Considere que seja de 370 kg a massa do elevador vazio e a aceleração da gravidade  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Nessas condições, o número máximo de passageiros, de 70 kg cada um, a ser transportado pelo elevador é:

- |       |        |        |
|-------|--------|--------|
| (a) 7 | (c) 9  | (e) 11 |
| (b) 8 | (d) 10 |        |

**16 Fuvest** Um elevador de carga com massa  $M = 5.000 \text{ kg}$  é suspenso por um cabo na parte externa de um edifício em construção.

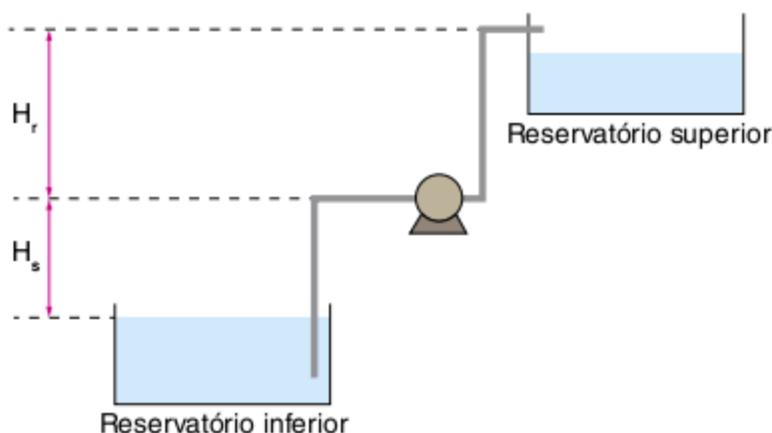


Nas condições das questões a seguir, considere que o motor fornece a potência  $P = 150 \text{ kW}$ .

- Determine a força  $F_1$ , em N, que o cabo exerce sobre o elevador, quando ele é puxado com velocidade constante.
- Determine a força  $F_2$ , em N, que o cabo exerce sobre o elevador, no instante em que ele está subindo com uma aceleração para cima de módulo  $a = 5 \text{ m/s}^2$ .
- Levando em conta a potência  $P$  do motor, determine a velocidade  $V_2$ , em m/s, com que o elevador estará subindo, nas condições do item b ( $a = 5 \text{ m/s}^2$ ).
- Determine a velocidade máxima  $V_L$ , em m/s, com que o elevador pode subir quando puxado pelo motor.

Note e adote: A potência  $P$ , desenvolvida por uma força  $F$ , é igual ao produto da força pela velocidade  $V$  do corpo em que atua, quando  $V$  tem a direção e o sentido da força.

**17 IME 2011** A figura a seguir representa o sistema de bombeamento de água de uma residência. As alturas de sucção ( $H_s$ ) e recalque ( $H_r$ ) valem, respectivamente, 10 e 15 m. O sistema é projetado para trabalhar com uma vazão de  $54 \text{ m}^3/\text{h}$ . A bomba que efetua o recalque da água é acionada por um motor elétrico de corrente contínua, que é alimentado por uma tensão de 200 V.



A corrente de operação do motor, em ampères, para que o sistema opere com a vazão projetada é, aproximadamente:

Observação: As perdas internas do motor elétrico e da bomba são desprezíveis.

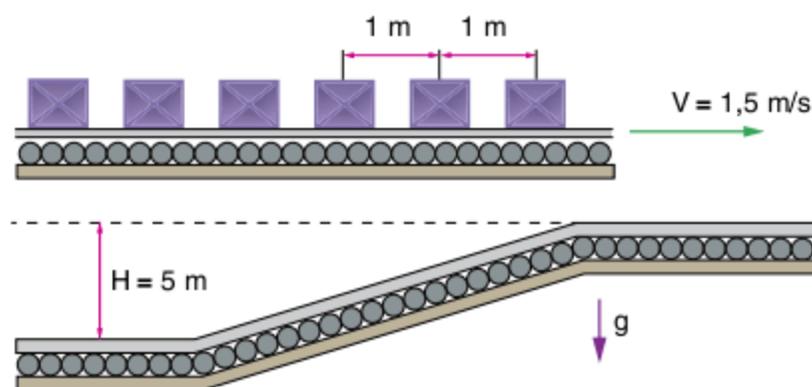
Dados: As perdas, devido ao acoplamento entre o motor e a bomba, são de 30%; aceleração da gravidade:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ; massa específica da água:  $1 \text{ kg/L}$ .

- 13
- 19
- 27
- 33
- 39

**18 ITA** Um bloco maciço requer uma potência  $P$  para ser empurrado com uma velocidade constante, para subir uma rampa inclinada um ângulo  $\theta$  em relação à horizontal. O mesmo bloco requer uma potência  $Q$  quando empurrado com a mesma velocidade em uma região plana de mesmo coeficiente de atrito. Supondo que a única fonte de dissipação seja o atrito entre o bloco e a superfície, conclui-se que o coeficiente de atrito entre o bloco e a superfície é:

- $\frac{Q}{P}$
- $\frac{Q}{P-Q}$
- $\frac{Q \cdot \sin \theta}{P-Q}$
- $\frac{Q}{P-Q \cdot \cos \theta}$
- $\frac{Q \cdot \sin \theta}{P-Q \cdot \cos \theta}$

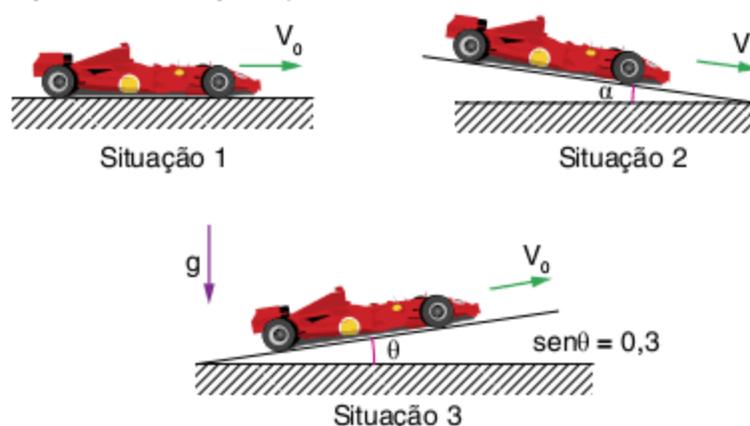
**19 Fuvest** Em um terminal de cargas, uma esteira rolante é utilizada para transportar caixas iguais, de massa  $M = 80 \text{ kg}$ , com centros igualmente espaçados de  $1 \text{ m}$ . Quando a velocidade da esteira é  $1,5 \text{ m/s}$ , a potência dos motores para mantê-la em movimento é  $P_0$ . Em um trecho de seu percurso, é necessário planejar uma inclinação para que a esteira eleve a carga a uma altura de  $5 \text{ m}$ , como indicado.



Para acrescentar essa rampa e manter a velocidade da esteira, os motores devem passar a fornecer uma potência adicional aproximada de:

- 1.200 W
- 2.600 W
- 3.000 W
- 4.000 W
- 6.000 W

**20 Fuvest** Um carro de corrida de massa  $M = 800 \text{ kg}$  percorre uma pista de provas plana, com velocidade constante  $V_0 = 60 \text{ m/s}$ . Nessa situação, observa-se que a potência desenvolvida pelo motor,  $P_1 = 120 \text{ kW}$ , é praticamente toda utilizada para vencer a resistência do ar (situação 1, pista horizontal). Prosseguindo com os testes, faz-se o carro descer uma ladeira, com o motor desligado, de forma que mantenha a mesma velocidade  $V_0$  e que enfrente a mesma resistência do ar (situação 2, inclinação  $\alpha$ ). Finalmente, faz-se o carro subir uma ladeira, com a mesma velocidade  $V_0$ , sujeito à mesma resistência do ar (situação 3, inclinação  $\theta$ ).



Note e adote: Considere, nessas três situações, que apenas a resistência do ar dissipa energia.

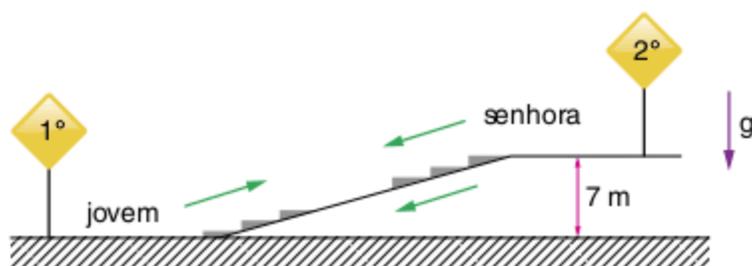
- Estime, para a situação 1, o valor da força de resistência do ar  $F_R$ , em newtons, que age sobre o carro no sentido oposto a seu movimento.
- Estime, para a situação 2, o seno do ângulo de inclinação da ladeira,  $\text{sen } \alpha$ , para que o carro mantenha a velocidade  $V_0 = 60 \text{ m/s}$ .
- Estime, para a situação 3, a potência  $P_3$  do motor, em kW, para que o carro suba uma ladeira de inclinação dada por  $\text{sen } \theta = 0,3$ , mantendo a velocidade  $V_0 = 60 \text{ m/s}$ .

**21 ITA** Uma escada rolante transporta passageiros do andar térreo A ao andar superior B, com velocidade constante. A escada tem comprimento total igual a 15 m, degraus em número de 75 e inclinação igual a  $30^\circ$ . Determine:

Dados:  $\text{sen } 30^\circ = 0,5$ ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

- o trabalho da força motora necessária para elevar um passageiro de 80 kg de A até B.
- a potência, correspondente ao item anterior, empregada pelo motor que aciona o mecanismo efetuando o transporte em 30 s.
- o rendimento do motor, sabendo-se que sua potência total é de 400 watts.

**22 Fuvest** Um jovem sobe correndo, com velocidade constante, do primeiro ao segundo andar de um *shopping*, por uma larga escada rolante de descida, ou seja, sobe “na contramão”. No instante em que ele começa a subir, uma senhora, que está no segundo andar, toma a mesma escada para descer normalmente, mantendo-se sempre no mesmo degrau. Ambos permanecem sobre essa escada durante 30 s, até que a senhora, de massa  $M_S = 60 \text{ kg}$ , desça no primeiro andar e o rapaz, de massa  $M_J = 80 \text{ kg}$ , chegue ao segundo andar, situado 7,0 m acima do primeiro.



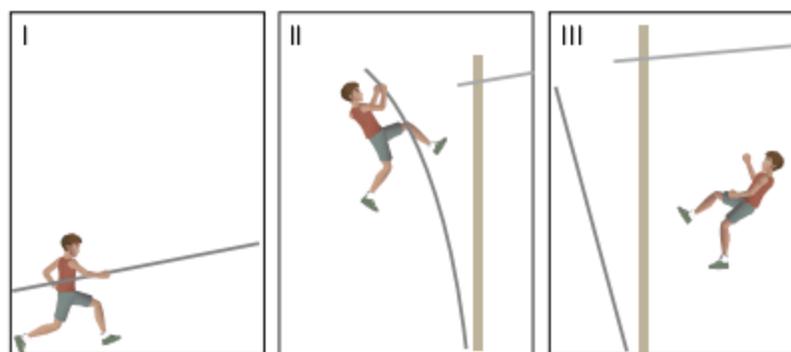
Supondo desprezíveis as perdas por atrito, determine:

- a potência  $P$ , em watts, que a senhora cede ao sistema da escada rolante, enquanto permanece na escada.
- o número  $N$  de degraus que o jovem de fato subiu para ir do 1º ao 2º andar, considerando que cada degrau mede 20 cm de altura.
- o trabalho  $T$ , em joules, realizado pelo jovem, para ir do 1º ao 2º andar, na situação descrita.

## Energia

**23 UFF** O salto com vara é, sem dúvida, uma das disciplinas mais exigentes do atletismo. Em um único salto, o atleta executa cerca de 23 movimentos em menos de 2 segundos. Na última Olimpíada de Atenas, a atleta russa, Svetlana Feofanova, bateu o recorde feminino, saltando 4,88 m.

A figura a seguir representa um atleta durante um salto com vara, em três instantes distintos.

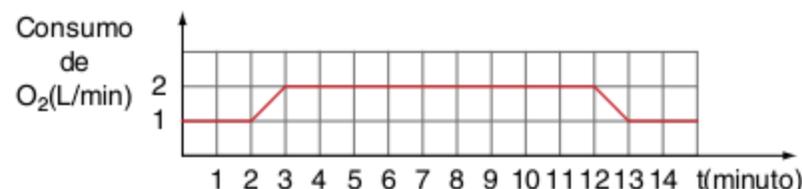


Assinale a opção que melhor identifica os tipos de energia envolvidos em cada uma das situações I, II, e III, respectivamente.

- Cinética – cinética e gravitacional – cinética e gravitacional.
- Cinética e elástica – cinética, gravitacional e elástica – cinética e gravitacional.
- Cinética – cinética, gravitacional e elástica – cinética e gravitacional.
- Cinética e elástica – cinética e elástica – gravitacional.
- Cinética e elástica – cinética e gravitacional – gravitacional.

**24 Fuvest** Em uma caminhada, um jovem consome 1 litro de  $O_2$  por minuto, quantidade exigida por reações que fornecem a seu organismo 20 kJ/minuto (ou 5 “calorias dietéticas”/minuto). Em dado momento, o jovem passa a correr, voltando depois a caminhar.

O gráfico representa seu consumo de oxigênio em função do tempo.



Por ter corrido, o jovem utilizou uma quantidade de energia a mais do que se tivesse apenas caminhado durante todo o tempo, aproximadamente, de:

- 10 kJ
- 21 kJ
- 200 kJ
- 420 kJ
- 480 kJ

**25 Fuvest** Um pai de 70 kg e seu filho de 50 kg pedalam lado a lado, em bicicletas idênticas, mantendo sempre velocidade uniforme. Se ambos sobem uma rampa e atingem um patamar plano, podemos afirmar que, na subida da rampa até atingir o patamar, o filho, em relação ao pai:

- realizou mais trabalho.
- realizou a mesma quantidade de trabalho.
- possuía mais energia cinética.
- possuía a mesma quantidade de energia cinética.
- desenvolveu potência mecânica menor.

Texto para as questões 26 e 27.

O carneiro hidráulico, ou aríete, dispositivo usado para bombear água, não requer combustível ou energia elétrica para funcionar, visto que usa a energia da vazão de água de uma fonte.

A figura a seguir ilustra uma instalação típica de carneiro em um sítio e a tabela apresenta dados de seu funcionamento.



$h/H$ altura da fonte dividida pela altura da caixa	$V_f$ água da fonte necessária para o funcionamento do sistema (litros/hora)	$V_b$ água bombeada para a caixa (litros/hora)
$\frac{1}{3}$	720 a 1.200	180 a 300
$\frac{1}{4}$		120 a 210
$\frac{1}{6}$		80 a 140
$\frac{1}{8}$		60 a 105
$\frac{1}{10}$		45 a 85

A eficiência energética  $\varepsilon$  de um carneiro pode ser obtida pela expressão:

$$\varepsilon = \frac{H}{h} \times \frac{V_b}{V_f}, \text{ cujas variáveis estão definidas na tabela e na figura.}$$

**26 Enem** No sítio ilustrado, a altura da caixa-d'água é o quádruplo da altura da fonte. Comparado a motobombas a gasolina, cuja eficiência energética é cerca de 36%, o carneiro hidráulico do sítio apresenta:

- menor eficiência, sendo, portanto, inviável economicamente.
- menor eficiência, sendo desqualificado do ponto de vista ambiental pela quantidade de energia que desperdiça.
- mesma eficiência, mas constitui alternativa ecologicamente mais apropriada.
- maior eficiência, o que, por si só, justificaria o seu uso em todas as regiões brasileiras.
- maior eficiência, sendo economicamente viável e ecologicamente correto.

**27 Enem** Se, na situação apresentada,  $H = 5h$ , então, é mais provável que, após 1 hora de funcionamento ininterrupto, o carneiro hidráulico bombeie para a caixa-d'água:

- de 70 a 100 litros de água.
- de 75 a 210 litros de água.
- de 80 a 220 litros de água.
- de 100 a 175 litros de água.
- de 110 a 240 litros de água.

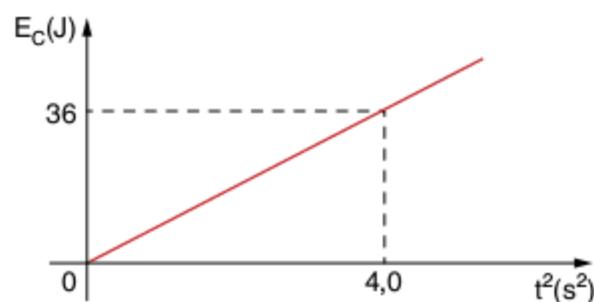
**28 Fuvest** Segundo uma obra de ficção, o Centro Europeu de Pesquisas Nucleares, CERN, teria recentemente produzido vários gramas de antimatéria. Sabe-se que, na reação de antimatéria com igual quantidade de matéria normal, a massa total

$m$  é transformada em energia  $E$ , de acordo com a equação  $E = mc^2$ , onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo.

Note e adote:  $1 \text{ MW} = 10^6 \text{ W}$ ; a explosão de *Little Boy* produziu  $60 \cdot 10^{12} \text{ J}$  (15 quilotons);  $1 \text{ mês} \approx 2,5 \cdot 10^6 \text{ s}$ ; velocidade da luz no vácuo,  $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .

- Com base nessas informações, quantos joules de energia seriam produzidos pela reação de 1 g de antimatéria com 1 g de matéria?
- Supondo que a reação matéria-antimatéria ocorra numa fração de segundo (explosão), a quantas *Little Boy* (a bomba nuclear lançada em Hiroshima, em 6 de agosto de 1945) corresponde a energia produzida nas condições do item a)?
- Se a reação matéria-antimatéria pudesse ser controlada e a energia produzida na situação descrita em a fosse totalmente convertida em energia elétrica, por quantos meses essa energia poderia suprir as necessidades de uma pequena cidade que utiliza, em média, 9 MW de potência elétrica?

**29 Unip** Uma partícula de 2,0 kg de massa, em trajetória retilínea, tem energia cinética ( $E_C$ ) variando com o quadrado do tempo ( $t^2$ ), de acordo com o gráfico a seguir.



A força resultante na partícula:

- é variável.
- tem intensidade igual a 3,0 N.
- tem intensidade igual a 9,0 N.
- tem intensidade igual a 72 N.
- tem intensidade igual a 6,0 N.

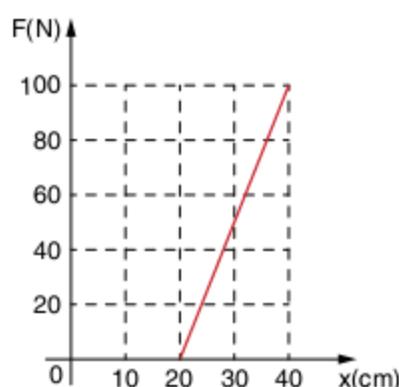
**30 UFMS** Um cabo preso a um helicóptero que se mantém estacionário é utilizado para resgatar um surfista 25 m abaixo do helicóptero. Desprezando a resistência do ar, considerando que a aceleração da gravidade é de  $9,8 \text{ m/s}^2$ , que o surfista pesa 60 kgf e que ele é puxado até o helicóptero com aceleração constante de  $0,2 \text{ m/s}^2$ , a partir do repouso, assinale a(s) alternativa(s) correta(s).

- O trabalho realizado pela força tensora, no cabo, foi de 15 MJ.
  - O trabalho realizado pela força resultante, sobre o surfista, foi de 300 J.
  - O surfista teve sua energia potencial gravitacional aumentada em 14,7 kJ.
  - O trabalho do peso do surfista foi negativo durante a subida.
  - A variação da energia cinética do surfista foi de 750 J.
- Soma =

**31 Unicamp** Um cartaz de uma campanha de segurança nas estradas apresenta um carro acidentado com a legenda “de 100 km/h a 0 km/h em 1 segundo”, como forma de alertar os motoristas para o risco de acidentes.

- Qual é a razão entre a desaceleração média e a aceleração da gravidade,  $\frac{a_c}{g}$ ?
- De que altura o carro deveria cair para provocar uma variação de energia potencial igual à sua variação de energia cinética no acidente?
- A propaganda de um carro recentemente lançado no mercado apregoa uma “aceleração de 0 a 100 km/h em 14 segundos”. Qual é a potência mecânica necessária para isso, considerando que essa aceleração seja constante? Despreze as perdas por atrito e considere a massa do carro igual a 1.000 kg.

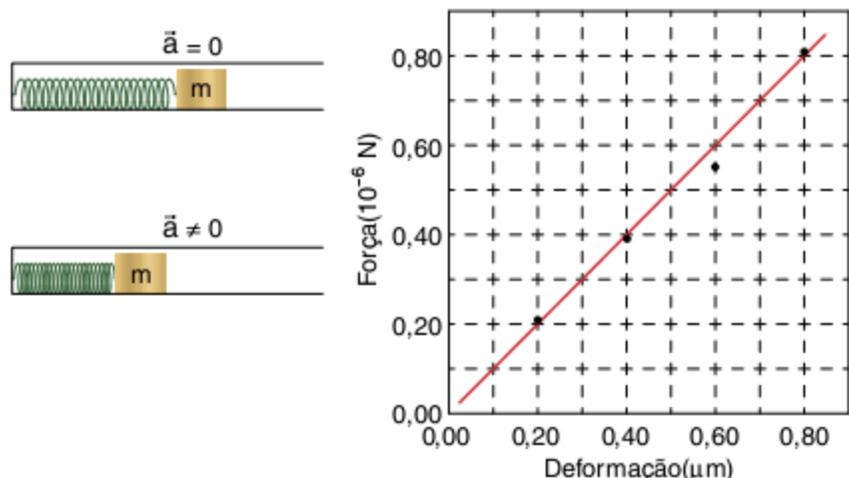
**32 Fuvest** Uma mola pendurada num suporte apresenta comprimento igual a 20 cm. Na sua extremidade livre, pendura-se um balde vazio, cuja massa é 0,50 kg. Em seguida, coloca-se água no balde até que o comprimento da mola atinja 40 cm. O gráfico ilustra a força que a mola exerce sobre o balde em função de seu comprimento.



Pede-se:

- a massa de água colocada no balde.
- a energia potencial elástica acumulada na mola no final do processo.

**33 Unicamp** Sensores de dimensões muito pequenas têm sido acoplados a circuitos microeletrônicos. Um exemplo é um medidor de aceleração que consiste de uma massa  $m$  presa a uma micromola de constante elástica  $k$ . Quando o conjunto é submetido a uma aceleração  $\vec{a}$ , a micromola se deforma, aplicando uma força  $\vec{F}_{el}$  na massa (ver diagrama a seguir). O gráfico ao lado do diagrama mostra o módulo da força aplicada versus a deformação de uma micromola utilizada num medidor de aceleração.



- Qual é a constante elástica  $k$  da micromola?
- Qual é a energia necessária para produzir uma compressão de 0,10 μm na micromola?

- O medidor de aceleração foi dimensionado de forma que essa micromola sofra uma deformação de 0,50 μm quando a massa tem uma aceleração de módulo igual a 25 vezes o da aceleração da gravidade. Qual é o valor da massa  $m$  ligada à micromola?

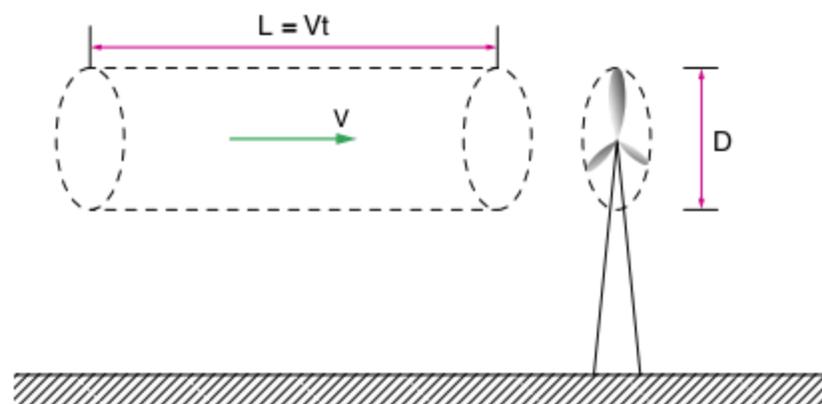
**34 Unicamp** Uma hidrelétrica gera  $5,0 \cdot 10^9$  W de potência elétrica utilizando-se de uma queda-d'água de 100 m. Suponha que o gerador aproveita 100% da energia da queda-d'água e que a represa coleta 20% de toda a chuva que cai em uma região de 400.000 km<sup>2</sup>. Considere que 1 ano tem  $32 \cdot 10^6$  segundos e  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

- Qual a vazão de água (m<sup>3</sup>/s) necessária para fornecer os  $5,0 \cdot 10^9$  W?
- Quantos mm de chuva devem cair por ano nessa região para manter a hidrelétrica operando nos  $5,0 \cdot 10^9$  W?

**35 Fuvest** A usina hidrelétrica de Itaipu possui 20 turbinas, cada uma fornecendo uma potência elétrica útil de 680 MW, a partir de um desnível de água de 120 m. No complexo, construído no rio Paraná, as águas da represa passam em cada turbina com vazão de 600 m<sup>3</sup>/s. Note e adote: Densidade da água = 10<sup>3</sup> kg/m<sup>3</sup>; 1 MW = 1 megawatt = 10<sup>6</sup> W; 1 kWh = 1.000 W · 3.600 s = 3,6 · 10<sup>6</sup> J. Os valores mencionados foram aproximados para facilitar os cálculos.

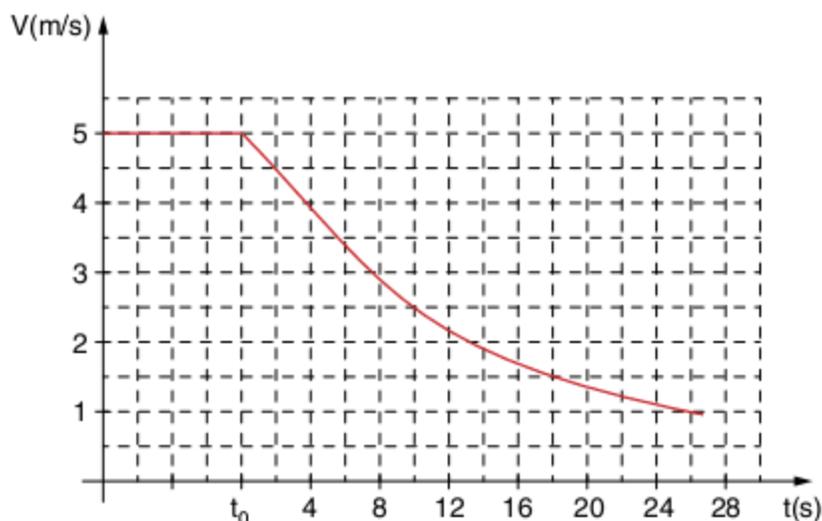
- Estime o número de domicílios,  $N$ , que deixariam de ser atendidos se, pela queda de um raio, uma dessas turbinas interrompesse sua operação entre 17h30min e 20h30min, considerando que o consumo médio de energia, por domicílio, nesse período, seja de 4 kWh.
- Estime a massa  $M$ , em kg, de água do rio que entra em cada turbina, a cada segundo.
- Estime a potência mecânica da água  $P$ , em MW, em cada turbina.

**36 Unicamp** Um cata-vento utiliza a energia cinética do vento para acionar um gerador elétrico. Para determinar essa energia cinética, deve-se calcular a massa de ar contida em um cilindro de diâmetro  $D$  e comprimento  $L$ , deslocando-se com a velocidade do vento  $V$  e passando pelo cata-vento em  $t$  segundos. Veja a figura a seguir. A densidade do ar é 1,2 kg/m<sup>3</sup>,  $D = 4,0$  m e  $V = 10$  m/s. Aproxime  $\pi \approx 3$ .



- Determine a vazão da massa de ar em kg/s que passa pelo cata-vento.
- Admitindo que esse cata-vento converte 25% da energia cinética do vento em energia elétrica, qual é a potência elétrica gerada?

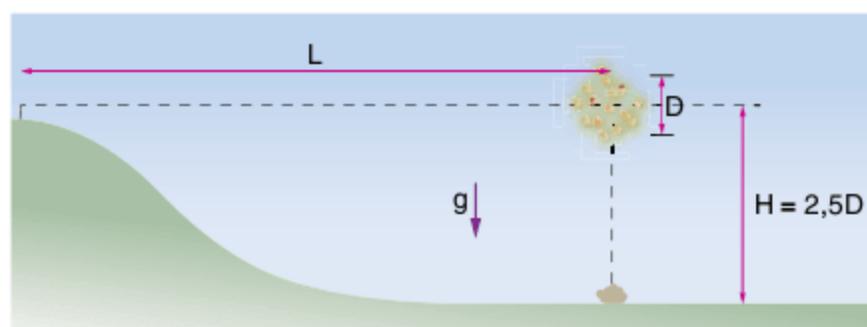
**37 Fuvest** Um ciclista, em estrada plana, mantém velocidade constante  $V_0 = 5,0 \text{ m/s}$  (18 km/h). Ciclista e bicicleta têm massa total  $M = 90 \text{ kg}$ . Em determinado momento,  $t = t_0$ , o ciclista para de pedalar e a velocidade  $V$  da bicicleta passa a diminuir com o tempo, conforme o gráfico a seguir.



Assim, determine:

- a aceleração  $A$ , em  $\text{m/s}^2$ , da bicicleta, logo após o ciclista deixar de pedalar.
- a força de resistência horizontal total  $F_R$ , em newtons, sobre o ciclista e sua bicicleta, devida principalmente ao atrito dos pneus e à resistência do ar, quando a velocidade é  $V_0$ .
- a energia  $E$ , em kJ, que o ciclista “queimaria”, pedalando durante meia hora, à velocidade  $V_0$ . Suponha que a eficiência do organismo do ciclista (definida como a razão entre o trabalho realizado para pedalar e a energia metabolizada por seu organismo) seja de 22,5%.

**38 Fuvest** De cima de um morro, um jovem assiste a uma exibição de fogos de artifício, cujas explosões ocorrem na mesma altitude em que ele se encontra. Para avaliar a que distância  $L$  os fogos explodem, verifica que o tempo decorrido entre ver uma explosão e ouvir o ruído correspondente é de 3 s. Além disso, esticando o braço, segura uma régua a 75 cm do próprio rosto e estima que o diâmetro  $D$  do círculo aparente, formado pela explosão, é de 3 cm. Finalmente, avalia que a altura  $H$  em que a explosão ocorre é de, aproximadamente, 2,5 vezes o diâmetro  $D$  dos fogos.



Note e adote: A velocidade do som, no ar,  $v_{\text{som}} \approx 333 \text{ m/s}$ ; despreze o tempo que a luz da explosão demora para chegar até o observador; a combustão de 1 g de pólvora libera uma energia de 2.000 J; apenas 1% da energia liberada na combustão é aproveitada no lançamento do rojão.

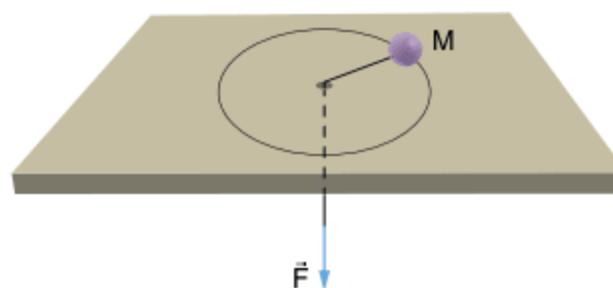
Nessas condições, avalie:

- a distância,  $L$ , em metros, entre os fogos e o observador.
- o diâmetro  $D$ , em metros, da esfera formada pelos fogos.

- a energia  $E$ , em joules, necessária para enviar o rojão até a altura da explosão, considerando que ele tenha massa constante de 0,3 kg.
- a quantidade de pólvora  $Q$ , em gramas, necessária para lançar esse rojão a partir do solo.

### Teorema da energia cinética

**39 ITA** Um corpo de massa  $M$ , mostrado na figura, é preso a um fio leve, inextensível, que passa através de um orifício central de uma mesa lisa. Considere que, inicialmente, o corpo se move ao longo de uma circunferência, sem atrito. O fio é, então, puxado para baixo, aplicando-se uma força  $\vec{F}$ , constante, a sua extremidade livre.



Podemos afirmar que:

- o corpo permanecerá ao longo da mesma circunferência.
- a força  $\vec{F}$  não realiza trabalho, pois é perpendicular à trajetória.
- a potência instantânea de  $\vec{F}$  é nula.
- o trabalho de  $\vec{F}$  é igual à variação da energia cinética do corpo.
- o corpo descreverá uma trajetória elíptica sobre a mesa.

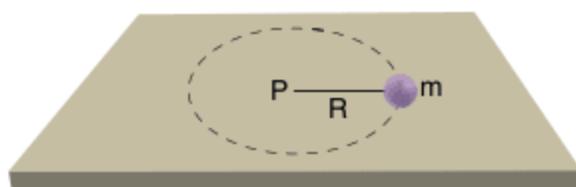
**40 Unicamp** Em determinados meses do ano, observa-se significativo aumento do número de estrelas cadentes em certas regiões do céu, número que chega a ser da ordem de uma centena de estrelas cadentes por hora. Esse fenômeno é chamado de chuva de meteoros ou chuva de estrelas cadentes, e as mais importantes são as chuvas de Perseidas e de Leônidas. Isso ocorre quando a Terra cruza a órbita de algum cometa que deixou uma nuvem de partículas no seu caminho. Na sua maioria, essas partículas são pequenas como grãos de poeira, e, ao penetrarem na atmosfera da Terra, são aquecidas pelo atrito com o ar e produzem os rastros de luz observados.

- Uma partícula entra na atmosfera terrestre e é completamente freada pela força de atrito com o ar após se deslocar por uma distância de 1,5 km. Se sua energia cinética inicial é igual a  $E_C = 4,5 \cdot 10^4 \text{ J}$ , qual é o módulo da força de atrito média? Despreze o trabalho do peso nesse deslocamento.
- Considere que uma partícula de massa  $m = 0,1 \text{ g}$  sofre um aumento de temperatura de  $\Delta\theta = 2.400 \text{ }^\circ\text{C}$  após entrar na atmosfera. Calcule a quantidade de calor necessária para produzir essa elevação de temperatura se o calor específico do material que compõe a partícula é  $c = 0,90 \text{ J/(g} \cdot \text{ }^\circ\text{C)}$ .

**41 ITA** Um projétil de massa  $m = 5,00 \text{ g}$  atinge, perpendicularmente, uma parede com a velocidade  $V = 400 \text{ m/s}$  e penetra 10,0 cm na direção do movimento. Considere constante a desaceleração do projétil na parede.

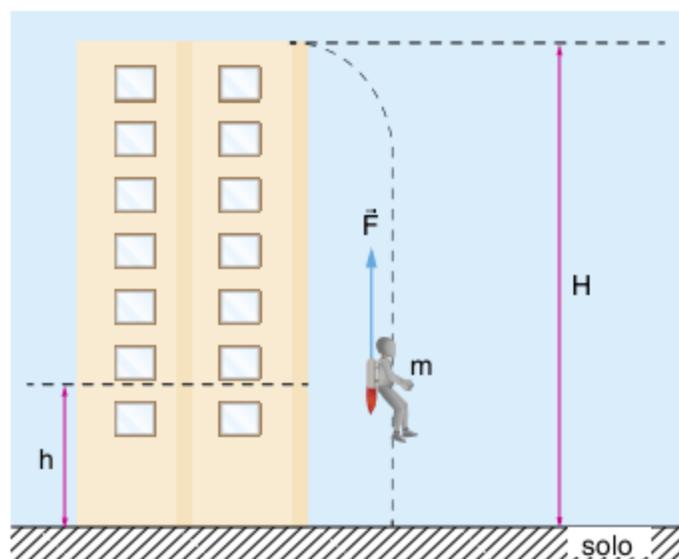
- (a) Se  $V = 600 \text{ m/s}$ , a penetração seria de  $15,0 \text{ cm}$ .
- (b) Se  $V = 600 \text{ m/s}$ , a penetração seria de  $225 \text{ cm}$ .
- (c) Se  $V = 600 \text{ m/s}$ , a penetração seria de  $22,5 \text{ cm}$ .
- (d) Se  $V = 600 \text{ m/s}$ , a penetração seria de  $150 \text{ cm}$ .
- (e) A intensidade da força imposta pela parede à penetração da bala é  $2 \text{ N}$ .

**42 Fuvest** Um corpo de massa  $m$  está em movimento circular sobre um plano horizontal, preso por uma haste rígida de massa desprezível e comprimento  $R$ . A outra extremidade da haste está presa a um ponto fixo  $P$ , como mostra a figura a seguir (em perspectiva). O coeficiente de atrito entre o corpo e o plano é  $\mu$ , constante. Num dado instante, o corpo tem velocidade de módulo  $V$  e direção paralela ao plano e perpendicular à haste.



- a) Qual deve ser o valor de  $V$  para que o corpo pare após 2 (duas) voltas completas?
- b) Qual o tempo gasto pelo corpo para percorrer a última volta antes de parar?
- c) Qual o trabalho realizado pela força de atrito durante a última volta?

**43 ITA** Equipado com um dispositivo a jato, o homem-foguete da figura cai livremente do alto de um edifício até uma altura  $h$ , onde o dispositivo a jato é acionado. Considere que o dispositivo forneça uma força vertical para cima de intensidade constante  $F$ .



Determine a altura  $h$  para que o homem pouse no solo com velocidade nula. Expresse sua resposta como função da altura  $H$ , da força  $F$ , da massa  $m$  do sistema homem-foguete e da aceleração da gravidade  $g$ , desprezando a resistência do ar e a alteração da massa  $m$  no acionamento do dispositivo.

**44 UnB** Existem, pelo menos, dois problemas básicos na construção de automóveis movidos a energia solar. O primeiro é que, atualmente, o rendimento da maioria das células solares é de 25%, isto é, elas convertem em energia elétrica apenas 25% da energia solar que absorvem. O segundo problema é que

a quantidade de energia solar disponível na superfície da Terra depende da latitude e das condições climáticas. Considere um automóvel movido a energia solar, com massa de  $1.000 \text{ kg}$  e com um painel de  $2 \text{ m}^2$  de células solares com rendimento de 25% localizado em seu teto.

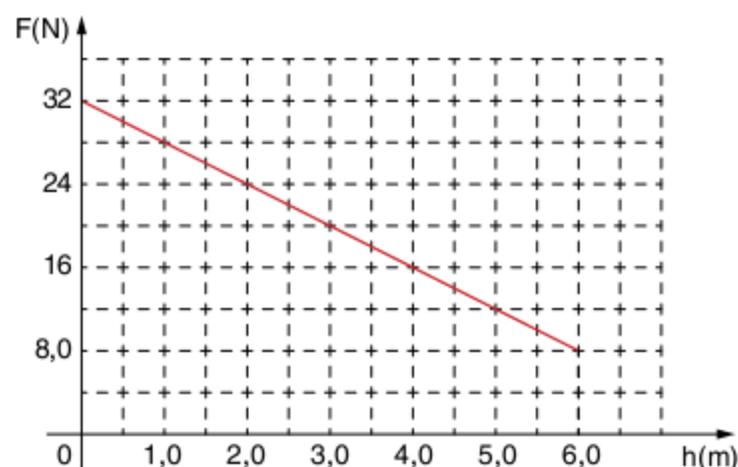
Desconsiderando as perdas por atrito de qualquer espécie e admitindo que  $1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J}$  e que a aceleração da gravidade é igual a  $10 \text{ m/s}^2$ , julgue os itens que se seguem.

- Se a quantidade de energia solar absorvida por esse painel em 30 dias for de  $20 \text{ kcal/cm}^2$ , a potência gerada por ele será inferior a  $200 \text{ W}$ .
- A energia necessária para que o automóvel, partindo do repouso, atinja a velocidade de  $72 \text{ km/h}$  é superior a  $3 \cdot 10^5 \text{ J}$ .
- Supondo que o painel de células solares fornecesse  $200 \text{ W}$ , para que o carro fosse acelerado a partir do repouso, em uma pista horizontal, até adquirir a velocidade de  $72 \text{ km/h}$ , seriam necessários mais de 15 min.
- Suponha que o automóvel, partindo com velocidade inicial nula do topo de uma colina de  $20 \text{ m}$  de altura e sendo acelerado com o auxílio da energia fornecida pelas células solares, chegue ao nível do solo em  $60 \text{ s}$ , com uma velocidade de  $21 \text{ m/s}$ . Então, durante a descida, a potência fornecida pelas células solares foi inferior a  $350 \text{ W}$ .

**45 UFRJ** Um carro de corrida, incluindo o piloto, tem  $800 \text{ kg}$  de massa e seu motor é capaz de desenvolver, no máximo,  $160 \text{ kW}$  de potência. O carro acelera na largada, primeiramente, utilizando a tração de  $4.000 \text{ N}$ , que no caso é a máxima permitida pela pista e pelos pneus, até atingir a potência máxima do motor. A partir daí, o piloto passa a acelerar o carro utilizando a potência máxima do motor até atingir  $60 \text{ m/s}$ . Suponha que não haja perda de energia por atrito e que todo o trabalho realizado pelo motor resulte no aumento de energia cinética de translação do carro.

- a) Calcule a velocidade do carro ao final da primeira etapa de aceleração.
- b) Calcule o tempo gasto na segunda etapa da aceleração.

**46** Uma partícula de  $2,0 \text{ kg}$  de massa, inicialmente em repouso sobre o solo, é puxada verticalmente para cima por uma força  $F$ , cuja intensidade varia com a altura  $h$ , atingida pelo seu ponto de aplicação, conforme mostra o gráfico a seguir.

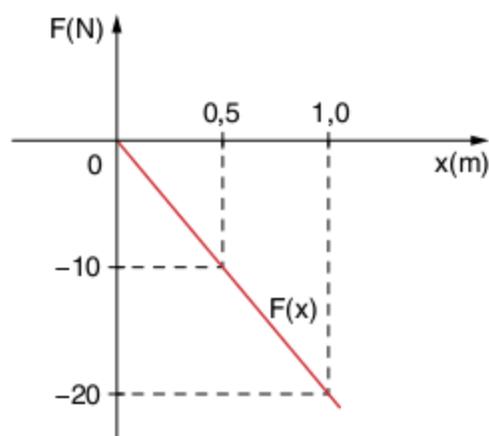


No local,  $g = 10 \text{ m/s}^2$  e despreza-se a influência do ar.

Considerando a ascensão da partícula de  $h_0 = 0$  a  $h_1 = 6,0$  m, determine:

- a altura em que a velocidade tem intensidade máxima.
- a intensidade da velocidade máxima.
- a intensidade da velocidade para  $h_1 = 6,0$  m.

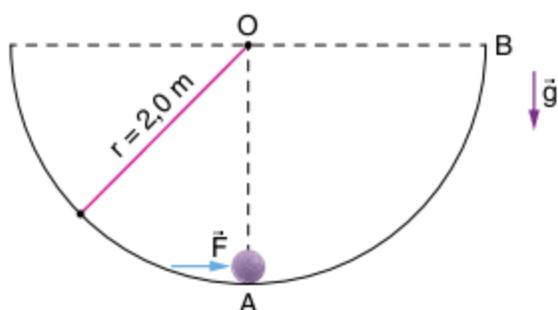
**47 UFBA** Um corpo de massa  $m = 2,0$  kg, descrevendo uma trajetória retilínea com velocidade constante de  $4,0$  m/s, aproxima-se da origem do sistema de coordenadas, por valores negativos de  $x$ . Ao atingi-la, passa a sofrer a ação da força,  $F(x)$ , representada no gráfico.



A partir dessas informações:

- determine a função  $F(x)$ .
- encontre o ponto onde a velocidade do corpo se anula.
- descreva o movimento do corpo após o instante em que a força passou a atuar sobre ele.
- dê um exemplo de sistema mecânico que apresente essas características.

**48** Uma partícula, inicialmente em repouso no ponto A, é levada ao ponto B da calha vertical de raio igual a  $2,0$  m, indicada na figura.



Uma das forças que agem sobre ela é  $\vec{F}$ , horizontal, orientada sempre para a direita e de intensidade igual a  $10$  N. Considerando a massa da partícula igual a  $2,0$  kg e assumindo  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>, determine:

- o trabalho de  $\vec{F}$  ao longo do deslocamento AB.
- o trabalho do peso da partícula ao longo do deslocamento AB. Admitindo que não haja atrito entre o corpo e a calha e que sobre o corpo atuem somente a força peso, a força  $\vec{F}$  e a força da calha, determine:
  - por que a partícula não consegue atingir B partindo do repouso em A.
  - o ângulo  $\alpha$  que a reta OC faz com a vertical, em que C é o ponto de máxima altura atingido pela partícula.
  - o ângulo  $\theta$  que a reta OD faz com a vertical, em que D é o ponto em que a partícula atinge a máxima velocidade.
  - a relação entre  $\alpha$  e  $\theta$ .

- o tipo de movimento que a partícula descreve.
- o mínimo módulo de  $\vec{F}$  necessário para que a partícula consiga atingir o ponto B.
- o mínimo módulo de  $\vec{F}$  necessário para que a partícula consiga atingir o ponto B, se a força  $\vec{F}$  for tangente à superfície da calha.

### Conservação de energia

**49 ITA** A variação da energia cinética de uma partícula em movimento, num dado referencial inercial, entre dois pontos distintos, P e Q, é sempre igual:

- à variação da energia potencial entre esses dois pontos.
- ao trabalho da resultante das forças aplicadas à partícula para deslocá-la entre esses dois pontos.
- à variação da energia potencial entre esses dois pontos, a menos do sinal, quando a força resultante aplicada à partícula for conservativa.

Pode-se afirmar que:

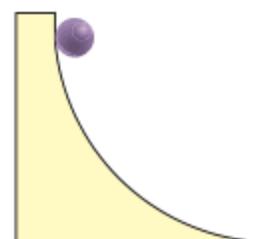
- somente I é correta.
- I e II são corretas.
- somente III é correta.
- II e III são corretas.
- somente II é correta.

**50 UFSC** Em relação ao conceito de trabalho, é correto afirmar que:

- quando atuam somente forças conservativas em um corpo, a energia cinética deste não se altera.
- em relação à posição de equilíbrio de uma mola, o trabalho realizado para comprimi-la em uma distância  $x$  é igual ao trabalho para distendê-la em  $x$ .
- a força centrípeta realiza um trabalho positivo em um corpo em movimento circular uniforme, pois a direção e o sentido da velocidade variam continuamente nessa trajetória.
- se um operário arrasta um caixote em um plano horizontal entre dois pontos, A e B, o trabalho efetuado pela força de atrito que atua no caixote será o mesmo, quer o caixote seja arrastado em uma trajetória em zigue-zague, quer seja arrastado ao longo da trajetória mais curta entre A e B.
- quando uma pessoa sobe uma montanha, o trabalho efetuado sobre ela pela força gravitacional, entre a base e o topo, é o mesmo, quer o caminho seguido seja íngreme e curto, quer seja menos íngreme e mais longo.
- o trabalho realizado sobre um corpo por uma força conservativa é nulo quando a trajetória descrita pelo corpo é um percurso fechado.

Soma =

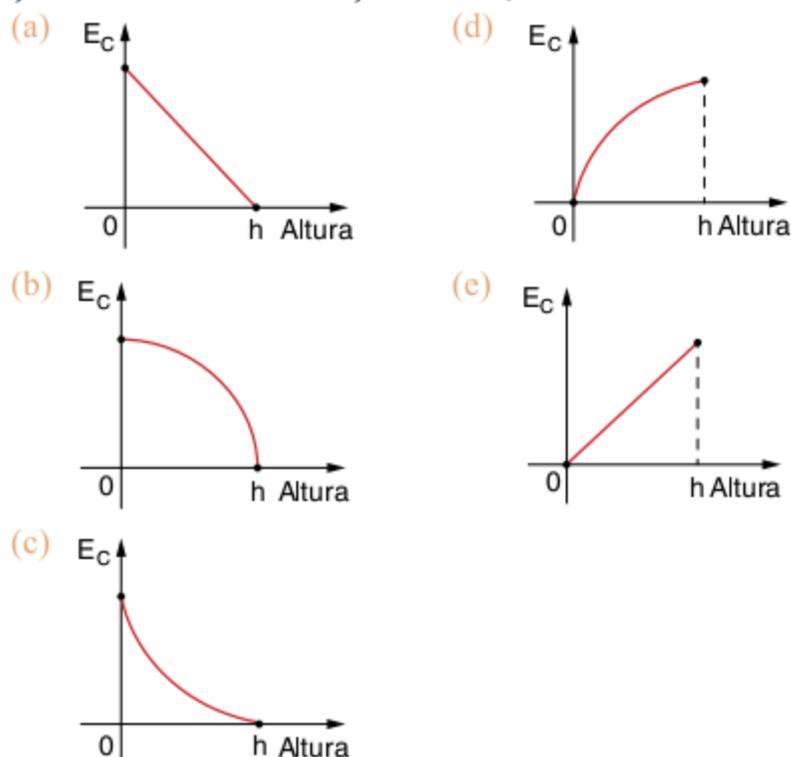
**51 ITA** Considere uma partícula maciça que desce uma superfície côncava e sem atrito, sob a influência da gravidade, como mostra a figura.



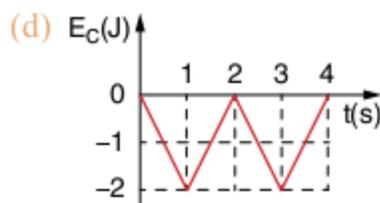
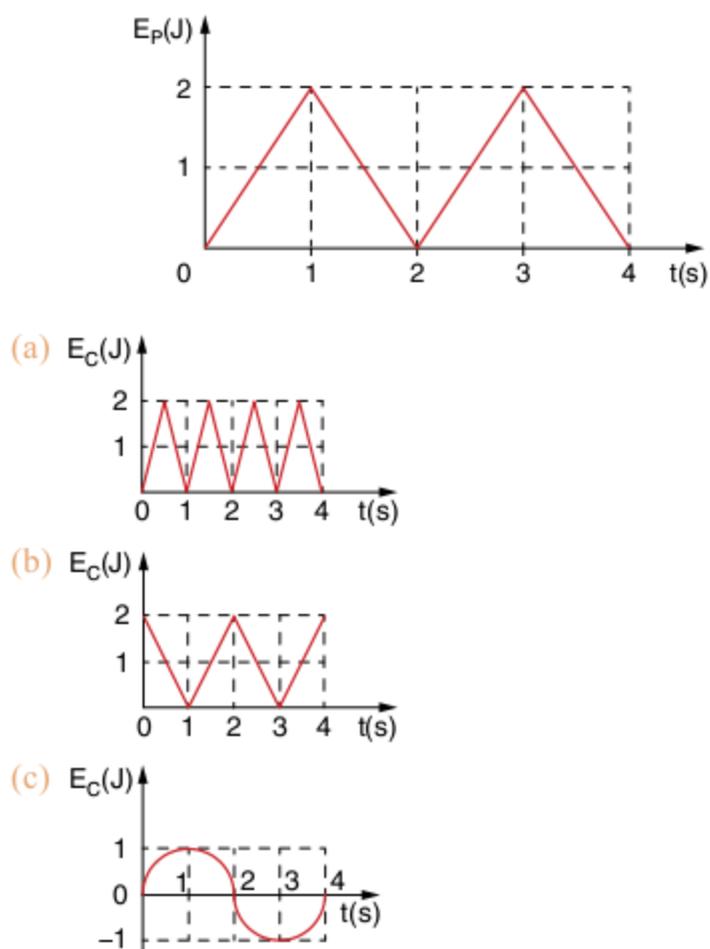
Na direção do movimento da partícula, ocorre que:

- (a) a velocidade e a aceleração crescem.
- (b) a velocidade cresce e a aceleração decresce.
- (c) a velocidade decresce e a aceleração cresce.
- (d) a velocidade e a aceleração decrescem.
- (e) a velocidade e a aceleração permanecem constantes.

**52 FCC-SP** Partindo do repouso, uma pedra começa a cair, em queda livre, de uma altura  $h$ . Dentre os gráficos seguintes, o que melhor representa a energia cinética  $E_C$  da pedra, em função de sua altura em relação ao solo, é:

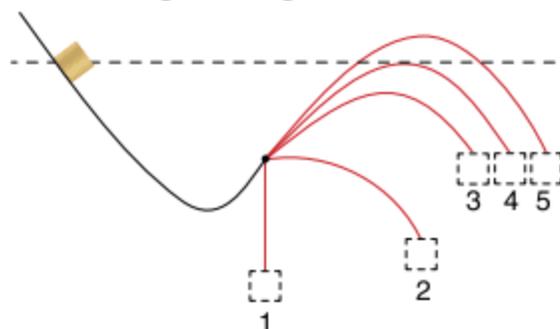


**53 ITA** Suponha uma partícula que se move sob a ação de uma força conservativa. A variação da energia potencial  $E_p$  com respeito ao tempo  $t$  é mostrada na figura a seguir. Qual dos gráficos seguintes pode representar a energia cinética da partícula?



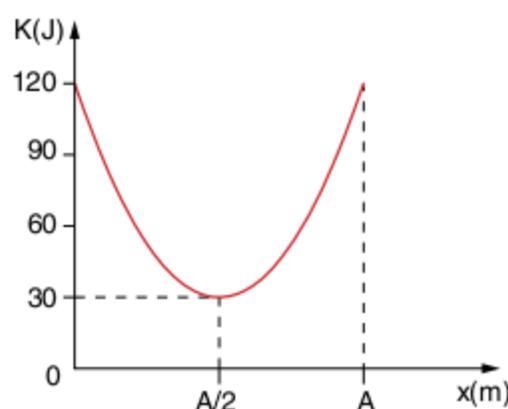
(e) Mais de um gráfico mostrado anteriormente pode representar a energia cinética da partícula.

**54 UFPE** Um corpo desce uma rampa partindo do repouso da posição indicada na figura a seguir.



- a) Considerando a inexistência de atrito, indique quais das trajetórias mostradas são fisicamente possíveis:
- (a) somente 4      (c) 4 e 5      (e) 1 e 2
  - (b) somente 3      (d) 3 e 4
- b) Considerando que existe atrito entre o corpo e a superfície da rampa, indique quais das trajetórias mostradas são fisicamente possíveis:
- (a) 1 e 3      (c) 2 e 3      (e) 3 e 5
  - (b) 3 e 4      (d) 2 e 4

**55 UFC** Uma bola de massa  $m = 500 \text{ g}$  é lançada do solo com velocidade  $v_0$  e ângulo de lançamento  $\theta_0$  menor que  $90^\circ$ . Despreze qualquer movimento de rotação da bola e a influência do ar. O valor da aceleração da gravidade, no local, é  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . O gráfico a seguir mostra a energia cinética  $K$  da bola como função do seu deslocamento horizontal  $x$ .



Analisando o gráfico, podemos concluir que a altura máxima atingida pela bola é:

- (a) 60 m      (c) 30 m      (e) 15 m
- (b) 48 m      (d) 18 m

**56 Uneb-BA** Um corpo cai livremente, a partir do repouso, durante um tempo  $t$  e adquire energia cinética  $E$ . Caindo durante um tempo metade de  $t$ , deverá adquirir energia cinética:

- (a)  $\frac{E}{8}$       (c)  $\frac{E}{2}$       (e)  $4E$
- (b)  $\frac{E}{4}$       (d)  $2E$

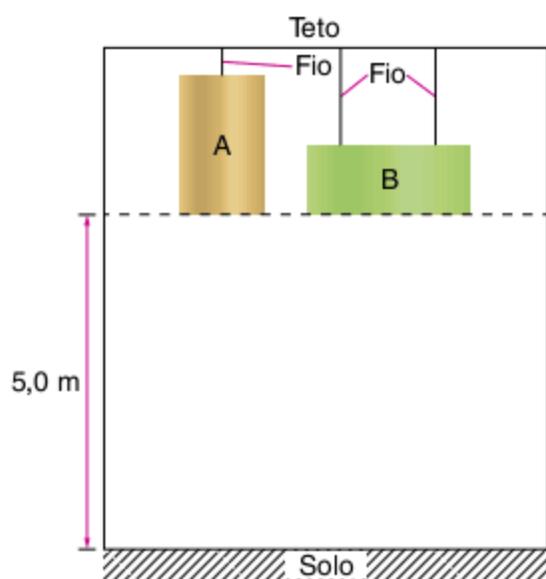
**57 Unicamp** Que altura é possível atingir em um salto com vara? Essa pergunta retorna sempre que ocorre um grande evento esportivo como os jogos olímpicos do ano passado em Sydney. No salto com vara, um atleta converte sua energia cinética obtida na corrida em energia potencial elástica (flexão da vara), que por sua vez se converte em energia potencial gravitacional. Imagine um atleta com massa de 80 kg que atinge uma velocidade horizontal de 10 m/s no instante em que a vara começa a ser flexionada para o salto.

- Qual é a máxima variação possível da altura do centro de massa do atleta, supondo que, ao transpor a barra, sua velocidade é praticamente nula?
- Considerando que o atleta inicia o salto em pé e ultrapassa a barra com o corpo na horizontal, devemos somar a altura do centro de massa do atleta à altura obtida no item anterior para obtermos o limite de altura de um salto. Faça uma estimativa desse limite para um atleta de 2,0 m de altura.
- Um atleta com os mesmos 2,0 m de altura e massa de 60 kg poderia saltar mais alto?

**58 UFG** Uma partícula de massa 2,0 kg move-se em trajetória retilínea passando, respectivamente, pelos pontos A e B, distantes 3,0 m, sob a ação de uma força conservativa constante. No intervalo AB, a partícula ganhou 36 J de energia potencial, logo, a:

- aceleração da partícula é  $12 \text{ m/s}^2$ .
- energia cinética no ponto A é nula.
- força realizou um trabalho igual a 36 J.
- energia cinética em B é maior do que em A.
- força atuou na partícula no sentido de B para A.

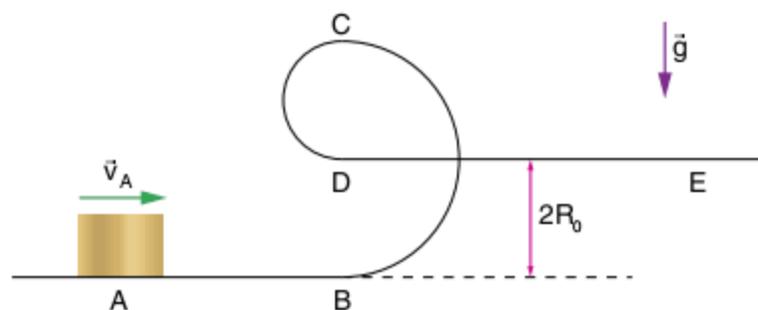
**59 Unicamp** Dois blocos homogêneos estão presos ao teto de um galpão por meio de fios, como mostra a figura a seguir.



Os dois blocos medem 1,0 m de comprimento por 0,4 m de largura por 0,4 m de espessura. As massas dos blocos A e B são, respectivamente, iguais a 5,0 kg e 50 kg. Despreze a resistência do ar.

- Calcule a energia mecânica de cada bloco em relação ao solo.
- Os três fios são cortados simultaneamente. Determine as velocidades dos blocos imediatamente antes de tocarem o solo.
- Determine o tempo de queda de cada bloco.

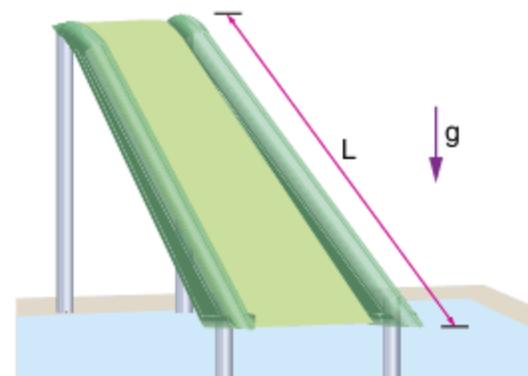
**60 UFPE** A figura mostra uma pista que consiste de duas caixas horizontais, AB e DE, e de uma parte vertical. O trecho vertical da pista é formado por duas metades de circunferências de raios diferentes. O trecho BC tem raio  $2R_0$ , enquanto o trecho CD tem raio  $R_0 = 1,1 \text{ m}$ .



Um objeto é lançado no ponto A com velocidade  $v_A = 12 \text{ m/s}$ . Desprezando o atrito, qual a velocidade do objeto no ponto E?

- 12 m/s
- 10 m/s
- 8,0 m/s
- 6,0 m/s
- 4,0 m/s

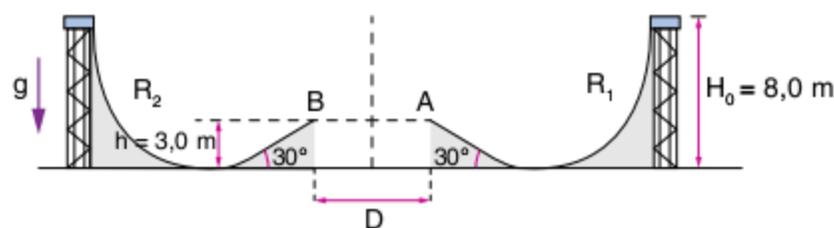
**61 Fuvest** Um jovem escorrega por um tobogã aquático, com uma rampa retilínea, de comprimento L, como na figura, podendo o atrito ser desprezado. Partindo do alto, sem impulso, ele chega ao final da rampa com uma velocidade de cerca de 6 m/s.



Para que essa velocidade passe a ser de 12 m/s, mantendo-se a inclinação da rampa, será necessário que o comprimento dessa rampa passe a ser aproximadamente de:

- $\frac{L}{2}$
- L
- 1,4L
- 2L
- 4L

**62 Fuvest** Uma pista de skate para esporte radical é montada a partir de duas rampas,  $R_1$  e  $R_2$ , separadas entre A e B por uma distância D, com as alturas e ângulos indicados na figura. A pista foi projetada de tal forma que um esquetista, ao descer a rampa  $R_1$ , salte no ar, atingindo sua altura máxima no ponto médio entre A e B, antes de alcançar a rampa  $R_2$ .

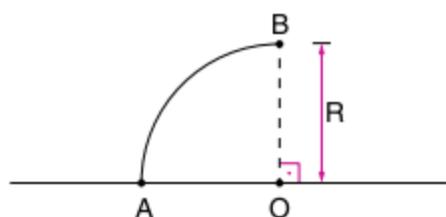


Note e adote: Desconsidere a resistência do ar, o atrito e os efeitos das acrobacias dos esquetistas;  $\sin 30^\circ = 0,5$ ;  $\cos 30^\circ \cong 0,87$ .

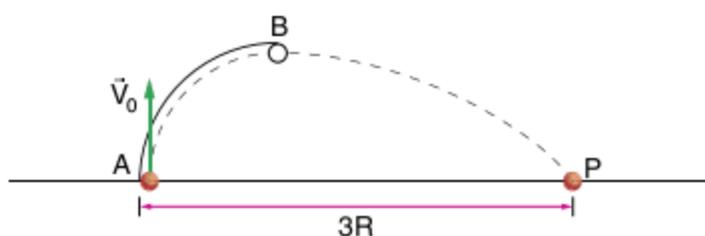
- Determine o módulo da velocidade  $V_A$ , em m/s, com que o esquetista atinge a extremidade A da rampa  $R_1$ .

- b) Determine a altura máxima  $H$ , em metros, a partir do solo, que o esquetista atinge, no ar, entre os pontos A e B.
- c) Calcule qual deve ser a distância  $D$ , em metros, entre os pontos A e B, para que o esquetista atinja a rampa  $R_2$  em B, com segurança.

**63 UFRJ** Um trilho em forma de arco circular, contido em um plano vertical, está fixado num ponto A de um plano horizontal. O centro do arco está em um ponto O desse mesmo plano. O arco é de  $90^\circ$  e tem raio  $R$ , como ilustra a figura.

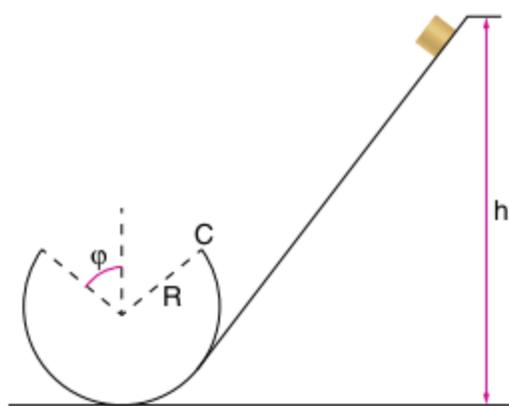


Um pequeno objeto é lançado para cima, verticalmente, a partir da base A do trilho e desliza apoiado a ele, sem atrito, até o ponto B, onde escapa horizontalmente, caindo no ponto P do plano horizontal onde está fixado o trilho. A distância do ponto P ao ponto A é igual a  $3R$ .



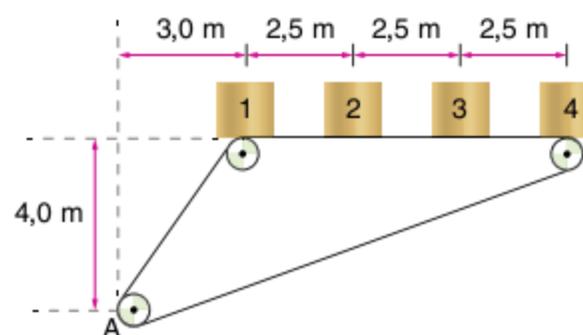
Calcule o módulo da velocidade inicial  $\vec{V}_0$  com que o bloco foi lançado, em função do raio  $R$  e da aceleração  $g$  da gravidade.

**64 ITA** Um pequeno bloco desliza sobre uma rampa e logo em seguida por um *loop* circular de raio  $R$ , onde há um rasgo de comprimento de arco  $2R\phi$ , como ilustrado na figura. Sendo  $g$  a aceleração da gravidade e desconsiderando qualquer atrito, obtenha a expressão para a altura inicial em que o bloco deve ser solto de forma que vença o rasgo e continue em contato com o restante da pista.



**65 Mapofei** Quatro corpos, considerados como pontos materiais, de massas  $m$  iguais, estão sobre uma esteira transportadora que se encontra parada e travada na posição indicada na figura. O corpo 1 está no início do trecho indicado da esteira e as massas desta e dos roletes podem ser consideradas desprezíveis quando comparadas com as massas dos quatro corpos. Num determinado instante, destrava-se o sistema e a esteira começa a movimentar-se, transportando os corpos sem escorregamento.

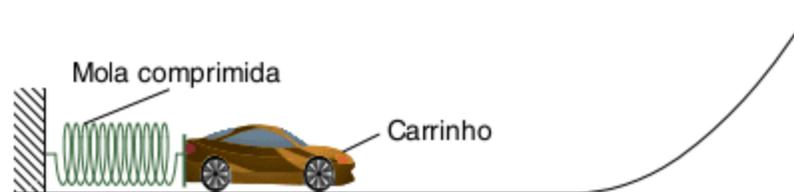
Dado:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



Calcule a velocidade do corpo 1 quando deixar a esteira no ponto A.

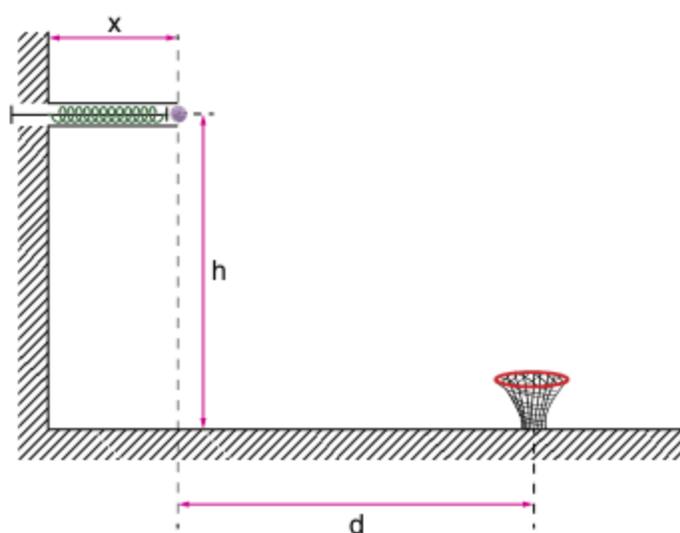
**66 Unicamp** Um brinquedo que muito agrada às crianças são os lançadores de objetos em uma pista. Considere que a mola da figura a seguir possui uma constante elástica  $k = 8.000 \text{ N/m}$  e massa desprezível.

Inicialmente, a mola está comprimida em  $2,0 \text{ cm}$  e, ao ser liberada, empurra um carrinho de massa igual a  $0,20 \text{ kg}$ . O carrinho abandona a mola quando esta atinge o seu comprimento relaxado e percorre uma pista que termina em uma rampa. Considere que não há perda de energia mecânica por atrito no movimento do carrinho.



- a) Qual é a velocidade do carrinho quando ele abandona a mola?
- b) Na subida da rampa, a que altura o carrinho tem velocidade de  $2,0 \text{ m/s}$ ?

**67 UFF** Um brinquedo infantil tem como objetivo acertar uma bolinha de massa  $m$  numa cesta. A bolinha é disparada por uma mola ideal, de constante elástica  $k$  e comprimento  $x$ , quando relaxada. A mola está confinada em um tubo guia, de paredes polidas, podendo ser comprimida através de uma haste. O tubo é fixado, horizontalmente, de tal forma que sua saída se encontra a uma distância  $d$  e a uma altura  $h$  da cesta, conforme mostra a figura.



Uma criança puxa a haste, reduzindo o comprimento da mola a  $\frac{x}{2}$ . Ao soltar a haste, permitindo que a mola volte ao comprimento  $x$ , a bola é arremessada para fora do tubo, atingindo o solo no centro da cesta.

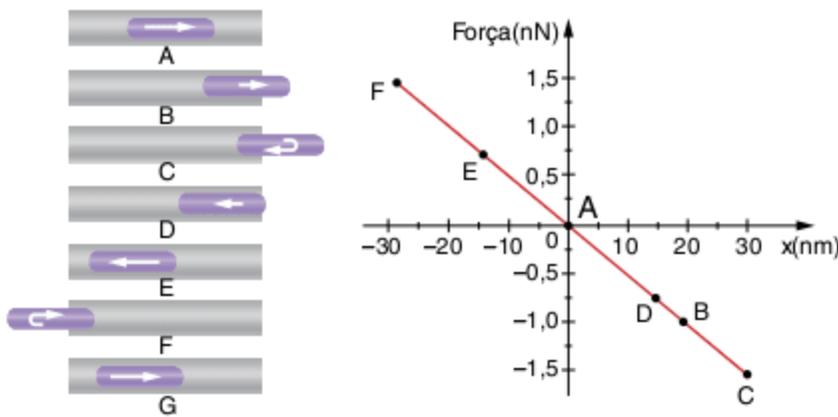
Considere como dados  $m$ ,  $k$ ,  $x$ ,  $h$  e a aceleração da gravidade  $g$ . Despreze o atrito, a resistência do ar e a massa da haste para resolver os itens a seguir.

Determine uma expressão para:

- a velocidade com que a bolinha sai do tubo.
- a distância  $d$  da cesta à saída do tubo.

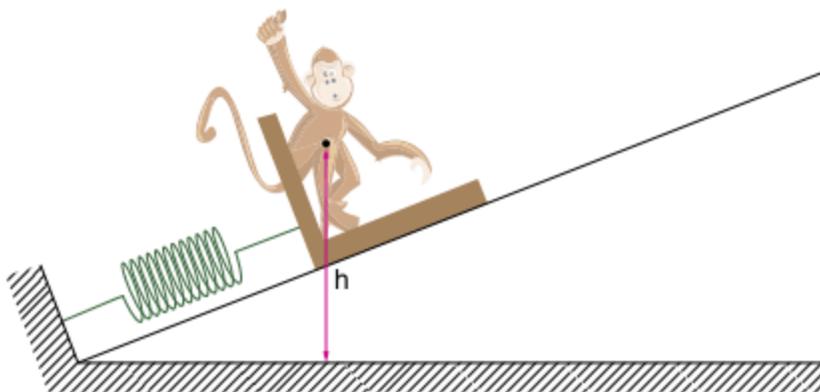
**68 Unicamp** Os átomos de carbono têm a propriedade de se ligarem formando materiais muito distintos entre si, como o diamante, a grafite e os diversos polímeros. Há alguns anos, foi descoberto um novo arranjo para esses átomos: os nanotubos, cujas paredes são malhas de átomos de carbono. O diâmetro desses tubos é de apenas alguns nanômetros ( $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$ ). No ano passado, foi possível montar um sistema no qual um “nanotubo de carbono” fechado nas pontas oscila no interior de um outro nanotubo de diâmetro maior e aberto nas extremidades, conforme ilustração a seguir. As interações entre os dois tubos dão origem a uma força restauradora representada no gráfico.

Dado:  $1 \text{ nN} = 10^{-9} \text{ N}$ .

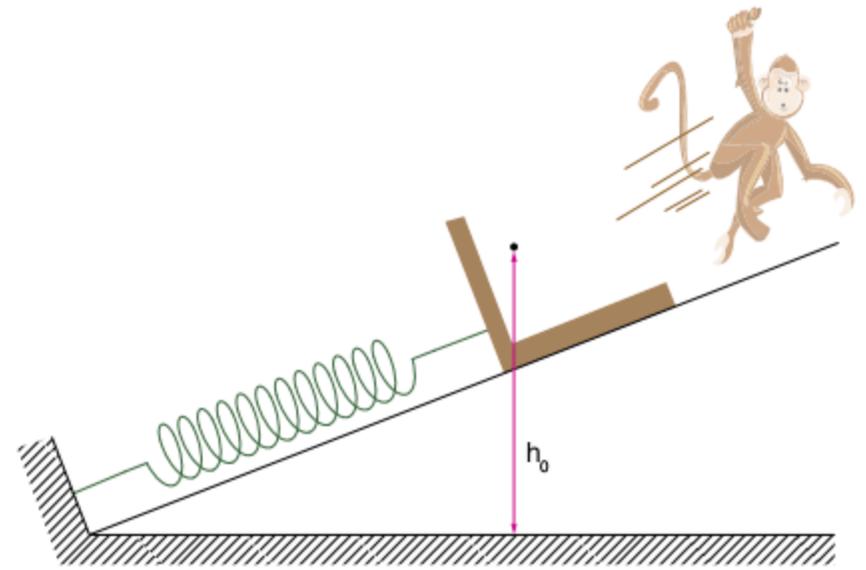


- Encontre, por meio do gráfico, a constante de mola desse oscilador.
- O tubo oscilante é constituído de 90 átomos de carbono. Qual é a velocidade máxima desse tubo, sabendo-se que um átomo de carbono equivale a uma massa de  $2 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$ .

**69 Uerj (Adapt.)** Considere que fosse utilizada uma rampa de lançamento inclinada para impulsionar um macaquinho de  $4,0 \text{ kg}$ . Uma mola ideal, de coeficiente  $k$  e comprimento  $\ell_0 = 2\sqrt{2} \text{ m}$ , é inicialmente comprimida até que o macaquinho fique a uma altura  $h = 1,5 \text{ m}$  do solo.



O macaquinho se desprende da rampa no momento em que a mola volta à sua posição inicial de relaxamento, a uma altura  $h_0 = \frac{4}{3} h$  do solo.

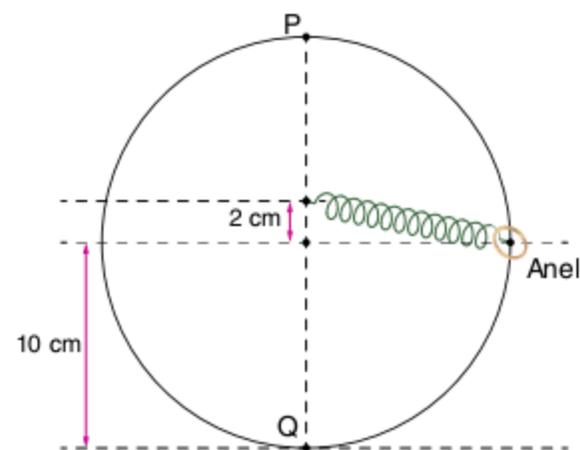


Considerando desprezível a distância do macaquinho ao plano inclinado, se comparada com  $h_0$ , e desprezando as forças não conservativas, determine o valor de  $k$ , de modo que o módulo da velocidade inicial de lançamento seja igual a  $20 \text{ m/s}$ .

- 70 ITA** Um bloco com massa  $0,20 \text{ kg}$ , inicialmente em repouso, é derrubado de uma altura  $h = 1,20 \text{ m}$  sobre uma mola cuja constante de força é  $k = 19,6 \text{ N/m}$ . Desprezando a massa da mola, a distância máxima que a mola será comprimida é:  
Dado:  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .
- |                      |                      |                      |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| (a) $0,24 \text{ m}$ | (c) $0,48 \text{ m}$ | (e) $0,60 \text{ m}$ |
| (b) $0,32 \text{ m}$ | (d) $0,54 \text{ m}$ |                      |

- 71 UFG** Uma mola de constante elástica  $k = 50 \text{ N/m}$  e massa desprezível tem uma extremidade fixa no teto e a outra presa a um corpo de massa  $m = 0,2 \text{ kg}$ . O corpo é mantido inicialmente numa posição em que a mola está relaxada e na vertical. Ao ser abandonado, ele passa a realizar um movimento harmônico simples, em que a amplitude e a energia cinética máxima são, respectivamente:  
Dado:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .
- |                                       |                                       |                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| (a) $4 \text{ cm}$ e $0,04 \text{ J}$ | (c) $8 \text{ cm}$ e $0,04 \text{ J}$ | (e) $8 \text{ cm}$ e $0,16 \text{ J}$ |
| (b) $4 \text{ cm}$ e $0,08 \text{ J}$ | (d) $8 \text{ cm}$ e $0,08 \text{ J}$ |                                       |

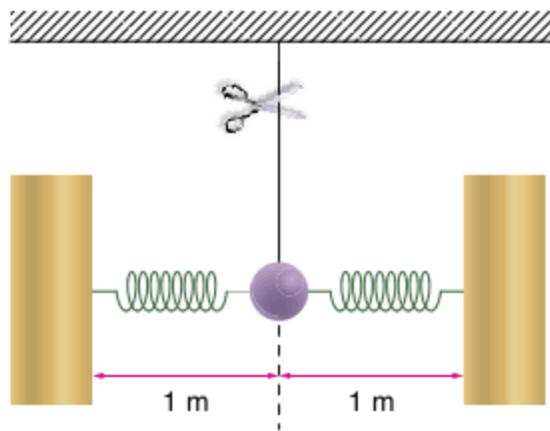
**72 ITA** Um anel de peso  $30 \text{ N}$  está preso a uma mola e desliza sem atrito num fio circular situado num plano vertical, conforme mostrado na figura.



Considerando que a mola não se deforma quando o anel se encontra na posição P e que a velocidade do anel seja a mesma nas posições P e Q, a constante elástica da mola deve ser de:

(a) $3,0 \cdot 10^3 \text{ N/m}$	(c) $7,5 \cdot 10^3 \text{ N/m}$	(e) $3,0 \cdot 10^4 \text{ N/m}$
(b) $4,5 \cdot 10^3 \text{ N/m}$	(d) $1,2 \cdot 10^4 \text{ N/m}$	

**73 UFG (Adapt.)** No sistema representado na figura a seguir, as duas molas são iguais, têm 1 m de comprimento e estão relaxadas. Quando o fio é cortado, a esfera de massa 12,8 kg desce 1 m até parar momentaneamente.

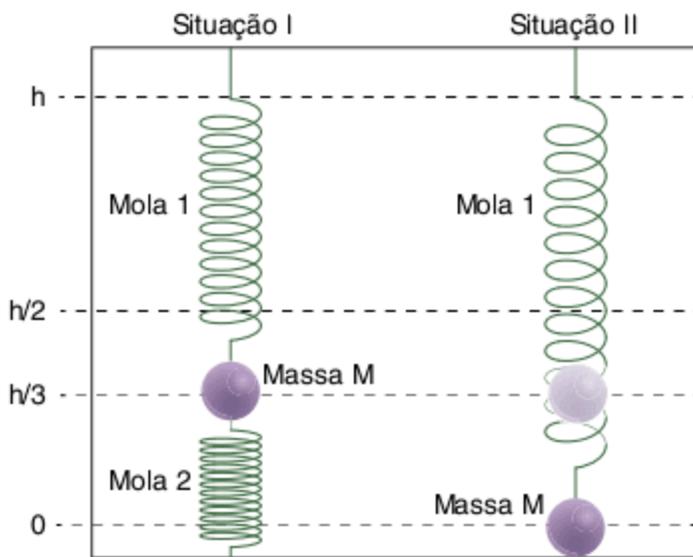


Dados:  $\sqrt{2} = 1,4$ ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

Calcule:

- o valor da constante elástica  $k$  das molas.
- a energia cinética da massa após ter descido 75 cm.

**74 IME**



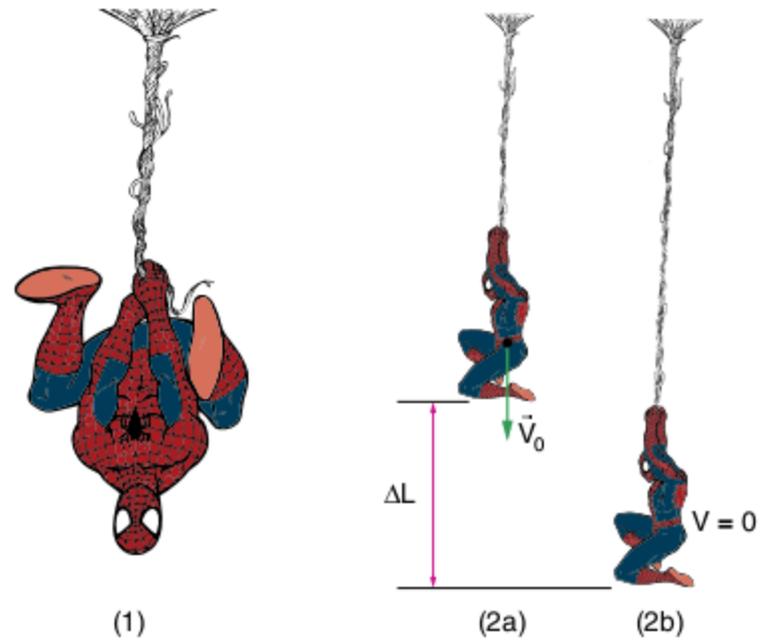
Na situação I da figura, em equilíbrio estático, a massa  $M$ , presa a molas idênticas, está a uma altura  $\frac{h}{3}$ . Na situação II, a mola inferior é subitamente retirada. As molas, em repouso, têm comprimento  $\frac{h}{2}$ . O módulo da velocidade da massa  $M$  na iminência de tocar o solo na situação II é:

Observação:  $g =$  aceleração da gravidade.

- $\frac{4gh}{2\sqrt{2}}$
- $\frac{3gh}{2\sqrt{2}}$
- $\frac{2gh}{2\sqrt{2}}$
- $\frac{gh}{2\sqrt{2}}$
- 0

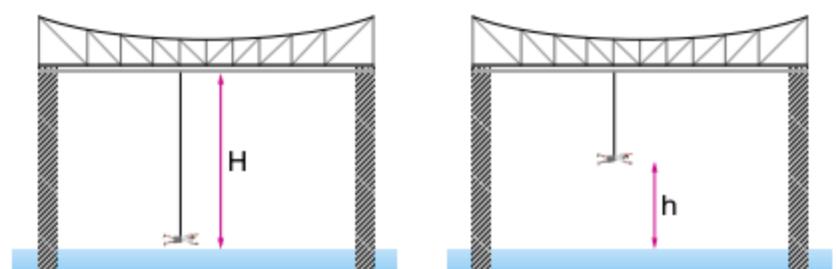
**75 Unicamp** Nas cenas dos filmes e nas ilustrações gráficas do Homem-aranha, a espessura do cabo de teia de aranha que seria necessário para sustentá-lo é normalmente exagerada. De fato, os fios de seda da teia de aranha são materiais extremamente resistentes e elásticos. Para deformações  $\Delta L$  relativamente pequenas, um cabo feito de teia de aranha pode ser aproximado a uma mola de constante elástica  $k$ , dada pela

fórmula  $\left(10^{10} \cdot \frac{A}{L}\right) \text{ N/m}$ , onde  $L$  é o comprimento inicial e  $A$  a área da seção transversal do cabo. Para os cálculos, considere a massa do Homem-aranha  $M = 70 \text{ kg}$ .



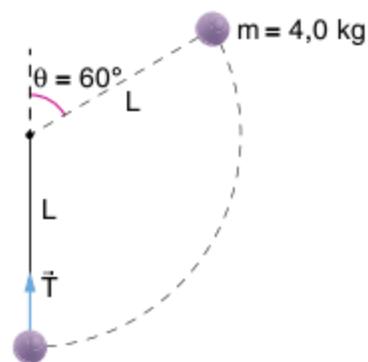
- Calcule a área  $A$  da seção transversal do cabo de teia de aranha que suportaria o peso do Homem-aranha com uma deformação de 1,0% do comprimento inicial do cabo.
- Suponha que o Homem-aranha, em queda livre, lance verticalmente um cabo de fios de teia de aranha para interromper a sua queda. Como ilustra a figura (2a), no momento em que o cabo se prende, a velocidade de queda do Homem-aranha tem módulo  $V_0$ . No ponto de altura mínima mostrado em (2b), o cabo de teia atinge uma deformação máxima de  $\Delta L = 2,0 \text{ m}$  e o Homem-aranha tem, nesse instante, velocidade  $V = 0$ . Sendo a constante elástica do cabo de teia de aranha, neste caso,  $k = 7.700 \text{ N/m}$ , calcule  $V_0$ .

**76 UFPE** Em um dos esportes radicais da atualidade, uma pessoa de 70 kg pula de uma ponte de altura  $H = 50 \text{ m}$  em relação ao nível do rio, amarrada à cintura por um elástico. O elástico, cujo comprimento livre é  $L = 10 \text{ m}$ , se comporta como uma mola de constante elástica  $k$ . No primeiro movimento para baixo, a pessoa fica no limiar de tocar a água e, depois de várias oscilações, fica em repouso a uma altura  $h$  em relação à superfície do rio. Calcule  $h$ , em m.



### Conservação de energia e a dinâmica do movimento circular

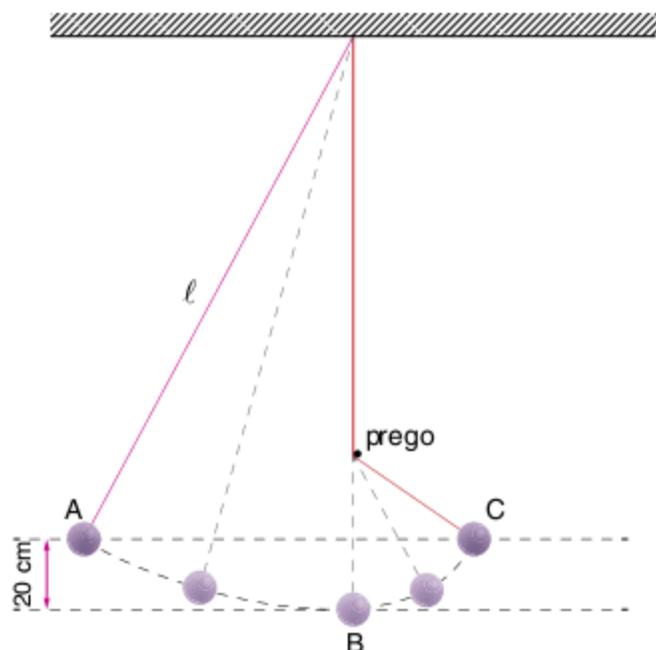
**77 ITA** Uma haste rígida, de comprimento  $L$  e massa desprezível, é suspensa numa das extremidades de tal maneira que oscila sem atrito. Na outra extremidade da haste, está fixado um bloco de massa  $m = 4,0 \text{ kg}$ . A haste é abandonada do repouso, fazendo um ângulo  $\theta = 60^\circ$  com a vertical.



Nessas condições, e adotando  $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ , a tração  $|\vec{T}|$  sobre a haste, quando o bloco passa pela posição mais baixa, vale:

- (a) 40 N                      (c) 160 N                      (e) 210 N  
 (b) 80 N                      (d) 190 N

**78 UFSC** Um pêndulo simples de comprimento 4,0 m possui em sua extremidade uma esfera de 2,0 kg de massa. O pêndulo é colocado para oscilar a partir do repouso, em A. Quando o fio estiver na vertical, passando por B, ele terá parte do seu movimento interrompido por um prego. A esfera percorre a trajetória tracejada representada na figura, alcançando só até o ponto C.



Em relação ao exposto, assinale a(s) proposição(ões) correta(s).

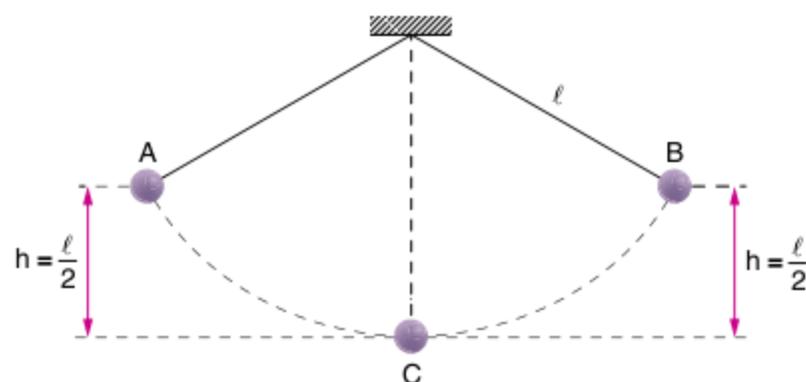
- 01 O módulo da velocidade da esfera em A é igual ao módulo da velocidade em C.  
 02 O tempo que a esfera leva de A até B é igual ao tempo de B até C, pois este tempo não depende do comprimento do pêndulo.  
 04 A velocidade da esfera em B é máxima e vale 4,0 m/s.  
 08 A tensão no fio em C é maior do que em A.  
 16 A velocidade angular da esfera em A é igual à velocidade angular em B e menor que a velocidade angular em C.  
 32 A energia potencial gravitacional da esfera em A é a mesma que em C e a variação da energia potencial entre B e C vale 4,0 J.

Soma =

**79 ITA** Um pêndulo simples é constituído de um fio de comprimento  $L$ , ao qual se prende um corpo de massa  $m$ . Porém, o fio não é suficientemente resistente, suportando no máximo uma força tensora de intensidade  $1,4mg$ , sendo  $g$  a intensidade da aceleração da gravidade local. O pêndulo é abandonado de uma posição em que o fio forma um ângulo  $\alpha$  com a vertical.

Sabendo que o fio se rompe no instante em que o pêndulo atinge a posição vertical, calcule o valor de  $\cos \alpha$ .

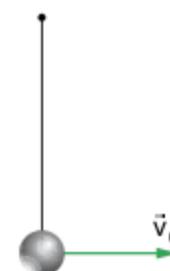
**80 UFRJ** Uma pequena esfera metálica, suspensa por um fio ideal de comprimento  $\ell$  a um suporte, está oscilando num plano vertical, com atritos desprezíveis, entre as posições extremas, A e B, localizadas a uma altura  $h = \frac{\ell}{2}$  acima do ponto mais baixo C de sua trajetória, como ilustra a figura a seguir.



Considere  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

- a) Calcule o módulo da aceleração da esfera nos instantes em que ela passa pelos pontos A e B.  
 b) Calcule o módulo da aceleração da esfera nos instantes em que ela passa pelo ponto C.

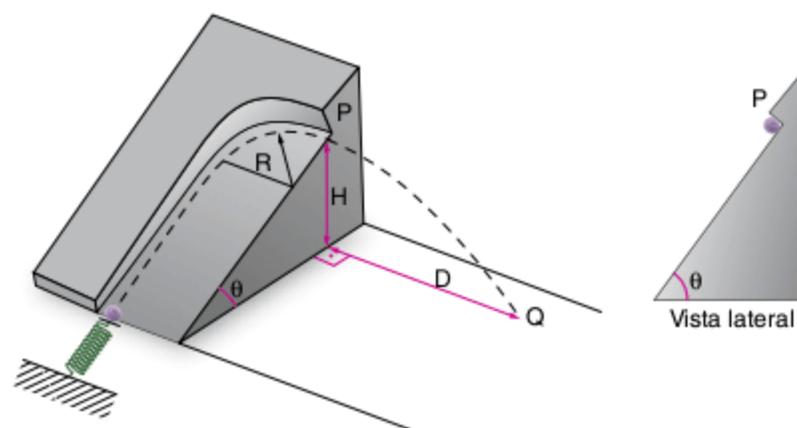
**81 UFRJ** Uma pequena esfera de aço está em repouso, presa por um fio ideal de 1,6 m de comprimento a um suporte fixo. Num determinado instante, dá-se um impulso à esfera, de modo que ela adquira uma velocidade horizontal  $\vec{v}_0$  de módulo 8 m/s, como ilustra a figura.



Despreze a resistência do ar e considere  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

Calcule o ângulo  $\theta$  que o fio forma com a vertical, a partir da posição inicial, no instante em que o módulo da tensão no fio for igual à metade do peso da esfera.

**82 UFG** Uma bolinha de massa  $m$  é lançada por uma mola horizontal de constante elástica  $k$ , em uma rampa lisa de ângulo de inclinação  $\theta$  com a horizontal, que possui no topo uma curva de raio  $R$ , conforme a figura a seguir.

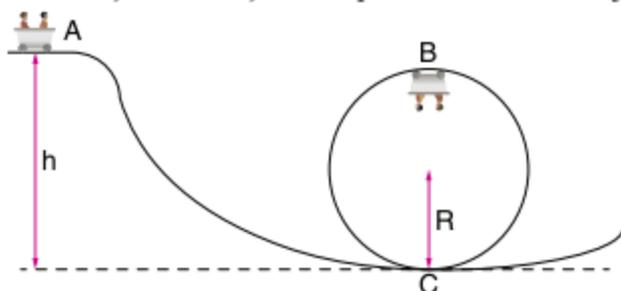


A bolinha move-se rente a uma parede lisa perpendicular à rampa e, ao fazer a curva, passa por P, que se encontra a uma altura  $H$  da base do plano, atingindo o ponto Q a uma distância  $D$  da vertical que passa por P. Nessas condições, calcule:

Considere: Aceleração gravitacional =  $g$ .

- a deformação da mola.
- a força que a parede exerce sobre a bolinha no ponto mais alto da trajetória.

**83 UFSC** Nos trilhos de uma montanha-russa, um carrinho com seus ocupantes é solto, a partir do repouso, de uma posição A situada a uma altura  $h$ , ganhando velocidade e percorrendo um círculo vertical de raio  $R = 6,0$  m, conforme mostra a figura. A massa do carrinho com seus ocupantes é igual a 300 kg e despreza-se a ação de forças dissipativas sobre o conjunto.

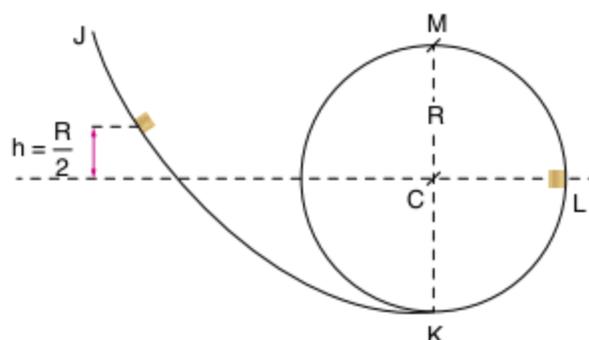


Assinale a(s) proposição(ões) correta(s).

- A energia mecânica mínima para que o carrinho complete a trajetória, sem cair, é igual a 4.500 J.
- A velocidade mínima na posição B, ponto mais alto do círculo vertical da montanha-russa, para que o carrinho não caia é de  $\sqrt{60}$  m/s.
- A posição A, de onde o carrinho é solto para iniciar seu trajeto, deve situar-se na altura mínima  $h = 15$  m para que o carrinho consiga completar a trajetória, passando pela posição B sem cair.
- Na ausência de forças dissipativas, a energia mecânica do carrinho se conserva, isto é, a soma da energia potencial gravitacional e da energia cinética tem igual valor nas posições A, B e C, respectivamente.
- Podemos considerar a conservação da energia mecânica, porque, na ausência de forças dissipativas, a única força atuante sobre o sistema é a força peso, que é uma força conservativa.
- A posição A, de onde o carrinho é solto para iniciar seu trajeto, deve situar-se na altura mínima  $h = 12$  m para que o carrinho consiga completar a trajetória, passando pela posição B sem cair.
- A energia mecânica do carrinho no ponto C é menor do que no ponto A.

Soma =

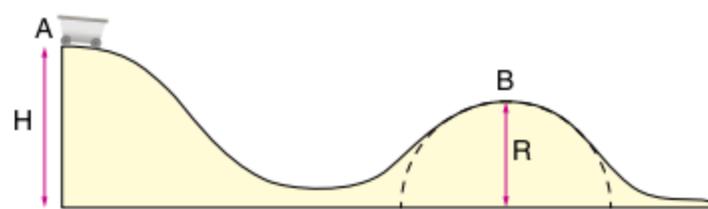
**84 UFRJ** A figura mostra o perfil de um trilho vertical JKLM, cujo trecho KLM é circular de centro em C e raio R.



Um bloco de pequenas dimensões é abandonado a uma altura  $h = \frac{R}{2}$  acima do plano horizontal que contém o centro C e passa a deslizar sobre o trilho com atrito desprezível.

- Determine a direção e o sentido da velocidade  $\vec{v}$  do bloco no instante em que ele passa pelo ponto L e calcule seu módulo em função de R e da aceleração da gravidade  $g$ .
- Determine a direção e o sentido da resultante  $\vec{F}$  das forças que atuam sobre o bloco no instante em que ele passa pelo ponto L (informando o ângulo que ela forma com a horizontal) e calcule seu módulo em função da massa  $m$  do bloco e da aceleração da gravidade  $g$ .

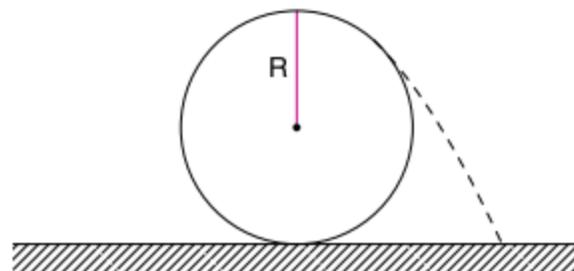
**85 UFPE** Um carrinho escorrega sem atrito em uma montanha-russa, partindo do repouso no ponto A, a uma altura  $H$ , e sobe o trecho seguinte em forma de um semicírculo de raio R.



Qual a razão  $\frac{H}{R}$  para que o carrinho permaneça em contato com o trilho no ponto B?

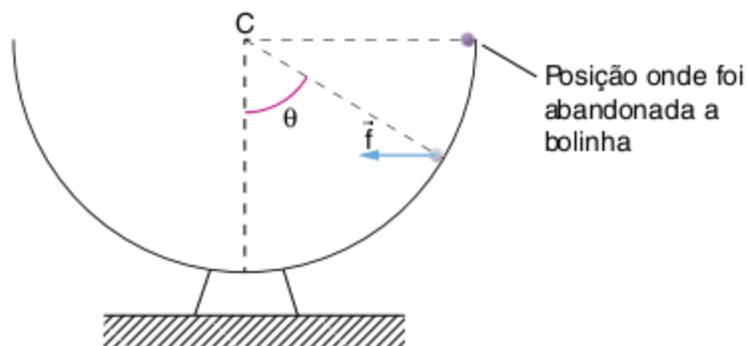
- $\frac{5}{4}$
- $\frac{4}{3}$
- $\frac{7}{5}$
- $\frac{3}{2}$
- $\frac{8}{5}$

**86 UFSC** Uma formiga de massa  $m$  encontra-se no topo de uma bola de bilhar rigidamente presa ao solo, conforme a figura. A bola possui raio R e superfície altamente polida. Considere  $g$  a aceleração da gravidade e despreze os possíveis efeitos dissipativos. A formiga começa a deslizar na bola com velocidade inicial nula.



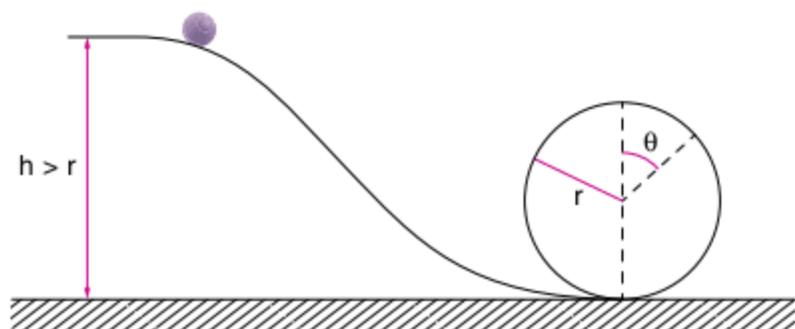
- Calcule o módulo da velocidade da formiga no ponto em que ela perde contato com a bola.
- Calcule a altura, a partir do solo, em que a formiga perde o contato com a bola.

**87 UFRJ** Uma bolinha de gude de dimensões desprezíveis é abandonada, a partir do repouso, na borda de um hemisfério oco e passa a deslizar, sem atrito, em seu interior.



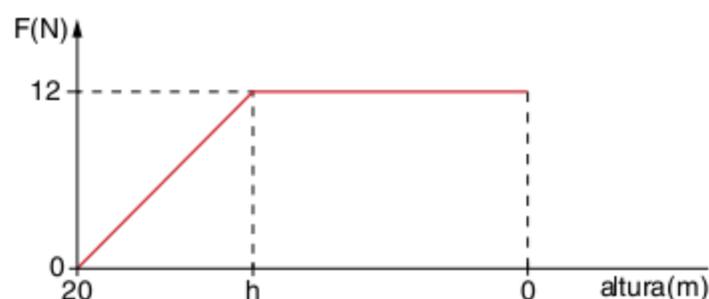
Calcule o ângulo  $\theta$  entre o vetor posição da bolinha em relação ao centro C e a vertical para o qual a força resultante  $\vec{f}$  sobre a bolinha é horizontal.

**88 ITA** Uma massa é liberada a partir do repouso de uma altura  $h$  acima do nível do solo e desliza sem atrito em uma pista que termina em um *loop* de raio  $r$ , conforme indicado na figura. Determine o ângulo  $\theta$  relativo à vertical e ao ponto em que a massa perde o contato com a pista. Expresse sua resposta como função da altura  $h$ , do raio  $r$  e da aceleração da gravidade  $g$ .



**Variação de energia mecânica e forças não conservativas**

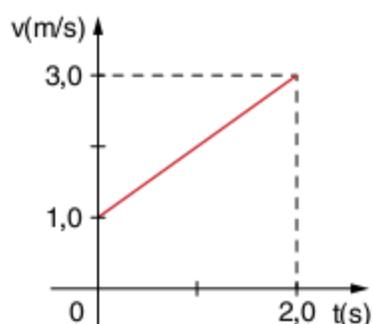
**89 IME** Um objeto com massa 1 kg é largado de uma altura de 20 m e atinge o solo com velocidade de 10 m/s. Sabe-se que a força  $F$  de resistência do ar que atua sobre o objeto varia com a altura, conforme o gráfico a seguir.



Considerando que  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , a altura  $h$ , em metros, em que a força de resistência do ar passa a ser constante é:

- (a) 4                      (c) 6                      (e) 10
- (b) 5                      (d) 8

**90 UEL** O módulo  $v$  da velocidade de um corpo de 4,0 kg, que cai verticalmente, está representado no gráfico em função do tempo  $t$ .



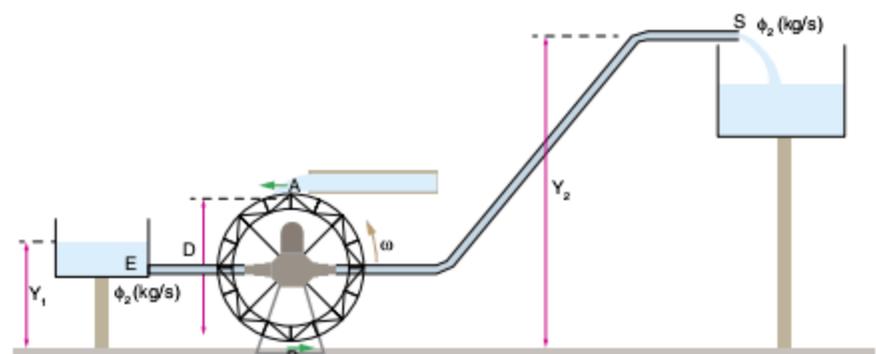
Adotando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , os dados do gráfico indicam que a queda não foi livre e a energia mecânica dissipada, em joules, no intervalo de tempo representado, vale:

- (a) 144                      (c) 18                      (e) 2,0
- (b) 72                      (d) 9,0

**91 Vunesp** Uma esfera de aço de  $3 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$ , abandonada de uma altura de 2,0 m, cai sobre uma superfície plana, horizontal, rígida e volta atingindo a altura máxima de 0,75 m. Despreze a resistência do ar e admita  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

- a) Qual a energia dissipada no choque da esfera contra a superfície?
  - b) Considerando a mesma perda de energia percentual do item a, qual deveria ser o valor da velocidade vertical inicial da esfera para que, na volta, ela atingisse a posição inicial?
- Observação: Considere a energia potencial nula na superfície.

**92 UFMS** A roda-d'água de uma bomba hidráulica está girando com velocidade angular constante igual a  $\omega$ . A roda-d'água possui diâmetro  $D$  e está sendo alimentada pelo topo, no ponto A, por uma vazão constante de água. Depois de meia-volta, a água é despejada na parte inferior da roda, no ponto B, com a mesma vazão e velocidade do ponto A. A bomba hidráulica retira água, no ponto E, de um reservatório, a uma vazão constante e igual a  $\phi_2 \text{ (kg/s)}$ , cujo nível de água está a uma altura  $Y_1$  do solo, e a bombeia até uma altura  $Y_2$  do solo, no ponto S, com a mesma vazão e velocidade que no ponto E, veja a figura.

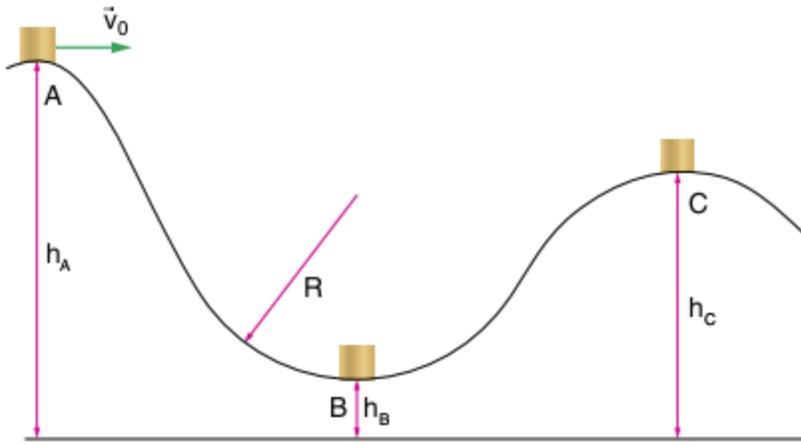


Considere a água como um fluido ideal. Com fundamentos na mecânica dos fluidos, assinale a(s) proposição(ões) correta(s).

- 01 O trabalho realizado pelo campo gravitacional, em um elemento de massa de água que foi despejado no topo superior da roda, no ponto A, até ser despejado na parte inferior da roda, no ponto B, não depende da velocidade angular  $\omega$  da roda-d'água.
- 02 A potência motriz média, realizada pela roda-d'água, depende da velocidade angular  $\omega$  da roda.
- 04 O torque motriz médio, realizado pela roda com relação ao eixo de rotação, depende do diâmetro da roda.
- 08 O trabalho realizado pelo campo gravitacional em um elemento de massa que foi bombeado desde a entrada na bomba, no ponto E, até a saída no condutor, no ponto S, depende da vazão  $\phi_2$  em que a água é bombeada e do desnível  $(Y_2 - Y_1)$ .
- 16 Se multiplicarmos a vazão  $\phi_2 \text{ (kg/s)}$  pela altura  $Y_2 \text{ (m)}$  e pela aceleração da gravidade  $(\text{m/s}^2)$ , teremos um resultado em unidades de energia em joules.

Soma =

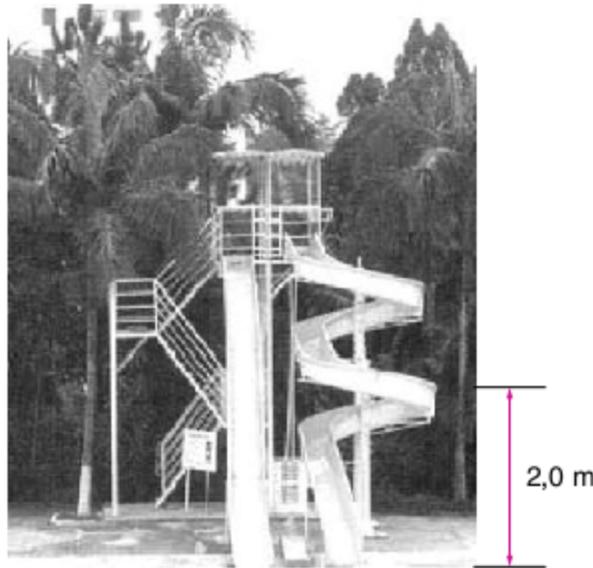
**93 UFPR** Um corpo de massa  $m = 1,0 \text{ kg}$  desliza por uma pista, saindo do ponto A com velocidade  $\vec{v}_0$  de módulo igual a  $3,0 \text{ m/s}$ , passando pelo ponto B com a mesma velocidade  $\vec{v}_0$  e parando no ponto C (figura a seguir). A resistência do ar ao movimento do corpo é desprezível, mas pode haver atrito entre o corpo e a pista. O trecho da pista que contém B é parte de uma circunferência de raio  $R = 0,30 \text{ m}$ . As alturas de A, B e C em relação a um nível de referência são  $h_A$ ,  $h_B$  e  $h_C$ , respectivamente.



Com base nesses dados, é correto afirmar:

- existe uma força de atrito entre a pista e o corpo entre os pontos A e B, que realiza trabalho igual a  $-mg(h_A - h_B)$ .
- nenhuma força realiza trabalho sobre o corpo entre A e B, pois não houve variação da energia cinética.
- o trabalho total realizado sobre o corpo entre os pontos B e C é  $9,0 \text{ J}$ .
- se não houvesse atrito entre a pista e o corpo, este teria no ponto C uma velocidade com módulo maior que  $v_0$ .
- a aceleração centrípeta do corpo no ponto B é  $30 \text{ m/s}^2$ .

**94 Unifesp (Adapt.)** Um dos brinquedos prediletos de crianças, no verão, é o toboágua. A emoção do brinquedo está associada à grande velocidade atingida durante a descida, uma vez que o atrito pode ser desprezado devido à presença da água em todo o percurso do brinquedo, bem como à existência das curvas fechadas na horizontal, de forma que a criança percorra esses trechos encostada na parede lateral (vertical) do toboágua.

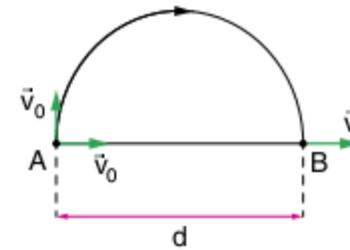


Disponível em: <www.pt.wikipedia.org/wiki/Toboágua>.

Sabendo que a criança de  $36 \text{ kg}$  parte do repouso, de uma altura de  $6,0 \text{ m}$  acima da base do toboágua, colocado à beira de uma piscina, calcule:  
Dado:  $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ .

- a) a força normal, na horizontal, exercida sobre a criança pela parede lateral do toboágua, no ponto indicado na figura (curva do toboágua situada a  $2,0 \text{ m}$  da sua base) onde o raio de curvatura é igual a  $80 \text{ cm}$ .
- b) a força dissipativa média exercida pela água da piscina, necessária para fazer a criança parar ao atingir  $1,5 \text{ m}$  de profundidade, considerando que a criança entra na água da piscina com velocidade, na vertical, aproximadamente igual a  $10,0 \text{ m/s}$ , desprezando-se, neste cálculo, a perda de energia mecânica no impacto da criança com a água da piscina.

**95 UFC** Um corpo de massa  $m$  desloca-se da posição A para a posição B, seguindo a trajetória semicircular mostrada na figura a seguir.



Em outro instante, o mesmo corpo desloca-se da posição A para a posição B, seguindo a trajetória retilínea, de comprimento  $d$ , indicada na mesma figura. Essas trajetórias localizam-se sobre uma mesa (considere a mesa plana e horizontal). O módulo da velocidade inicial em ambos os casos é  $v_0$  e a velocidade final no trajeto semicircular é zero. O coeficiente de atrito cinético entre o corpo e a mesa, em ambos os casos, é  $\mu$ . Determine o módulo da velocidade final,  $v$ , em função de  $v_0$ , quando a partícula segue a trajetória retilínea.

**96 Fuvest** Uma pista é formada por duas rampas inclinadas, A e B, e por uma região horizontal de comprimento  $L$ . Soltando-se, na rampa A, de uma altura  $H_A$ , um bloco de massa  $m$ , verifica-se que ele atinge uma altura  $H_B$  na rampa B (conforme a figura), em experimento realizado na Terra. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a pista é nulo nas rampas e igual a  $\mu$  na região horizontal.

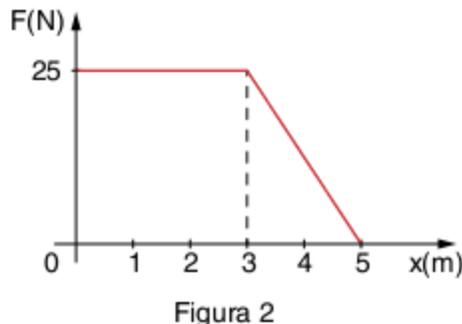
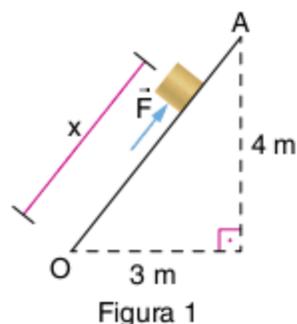


Suponha que esse mesmo experimento seja realizado em Marte, onde a aceleração da gravidade é  $g_M \equiv \frac{g}{3}$ , e considere que o bloco seja solto na mesma rampa A e da mesma altura  $H_A$ . Determine:

- a) a razão  $R_a = \frac{v_{A \text{ Terra}}}{v_{A \text{ Marte}}}$  entre as velocidades do bloco no final da rampa A (ponto A), em cada uma das experiências (Terra e Marte).
- b) a razão  $R_b = \frac{W_{\text{Terra}}}{W_{\text{Marte}}}$  entre as energias mecânicas dissipadas pela força de atrito na região horizontal, em cada uma das experiências (Terra e Marte).

- c) a razão  $R_c = \frac{H_{B \text{ Terra}}}{H_{B \text{ Marte}}}$  entre as alturas que o bloco atinge na rampa B, em cada uma das experiências (Terra e Marte).

**97 Mackenzie** O bloco de peso igual a 10 N parte do repouso e sobe a rampa indicada na figura 1 mediante a aplicação da força  $F$  de direção constante e cuja intensidade varia com a abscissa  $x$ , de acordo com o gráfico da figura 2. O trabalho de  $O$  até  $A$  realizado pelo atrito existente entre o bloco e a rampa é igual a 10 J, em valor absoluto. Adote  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



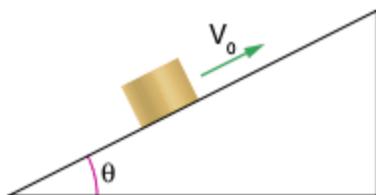
Nessas condições, a velocidade do bloco, ao atingir o ponto culminante  $A$ , é igual a:

- (a) 2 m/s      (c) 6 m/s      (e) 15 m/s  
 (b) 5 m/s      (d) 10 m/s

**98 IME** Um bloco de 4 kg e velocidade inicial de 2 m/s percorre 70 cm em uma superfície horizontal rugosa até atingir uma mola de constante elástica 200 N/m. A aceleração da gravidade é  $10 \text{ m/s}^2$  e o bloco comprime 10 cm da mola até que sua velocidade se anule. Admitindo que, durante o processo de compressão da mola, o bloco desliza sem atrito, o valor do coeficiente de atrito da superfície rugosa é:

- (a) 0,15      (c) 0,25      (e) 0,35  
 (b) 0,20      (d) 0,30

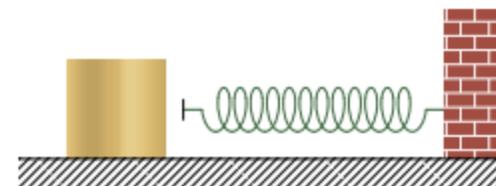
**99 ITA** Na figura, um bloco sobe um plano inclinado, com velocidade inicial  $V_0$ . Considere  $\mu$  o coeficiente de atrito entre o bloco e a superfície.



Indique a sua velocidade na descida ao passar pela posição inicial.

- (a)  $V_0 \sqrt{\frac{\text{sen } \theta - \mu \cdot \text{sen } \theta}{\text{cos } \theta - \mu \cdot \text{cos } \theta}}$       (d)  $V_0 \sqrt{\frac{\mu \cdot \text{sen } \theta + \text{cos } \theta}{\mu \cdot \text{sen } \theta - \text{cos } \theta}}$   
 (b)  $V_0 \sqrt{\frac{\text{sen } \theta - \mu \cdot \text{cos } \theta}{\text{sen } \theta + \mu \cdot \text{cos } \theta}}$       (e)  $V_0 \sqrt{\frac{\mu \cdot \text{sen } \theta - \text{cos } \theta}{\mu \cdot \text{sen } \theta + \text{cos } \theta}}$   
 (c)  $V_0 \sqrt{\frac{\text{sen } \theta + \mu \cdot \text{cos } \theta}{\text{sen } \theta - \mu \cdot \text{cos } \theta}}$

**100** Um bloco de massa igual a 2,0 kg escorrega num plano horizontal e, a 4,0 m/s, colide com uma mola de massa desprezível e constante elástica igual a 700 N/m, deformando-a elasticamente.



Sabendo-se que os coeficientes de atrito estático e cinético entre o bloco e o plano são, respectivamente, iguais a 0,60 e 0,50, considerando  $g = 10 \text{ m/s}^2$  e desprezando influências do ar, calcule:

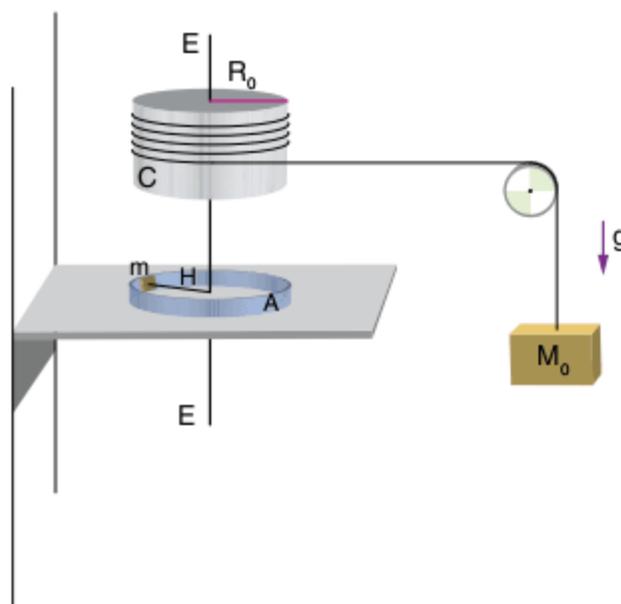
- a) a máxima deformação sofrida pela mola.  
 b) a velocidade do bloco ao cessar seu contato com a mola.

**101 UFC** Uma força constante, horizontal, de módulo  $F$  é aplicada a um corpo de peso 10 N, que está sobre uma mesa horizontal e preso a uma mola de constante elástica 2 N/m. Inicialmente, a mola não está deformada e a força  $F$  está na direção de deformação da mola. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre o corpo e a mesa são, respectivamente,  $\mu_e = 0,5$  e  $\mu_c = 0,4$ . Considere que o módulo da aceleração da gravidade local é  $g = 10 \text{ m/s}^2$  e que, durante o movimento, o corpo não muda o sentido da sua velocidade. Determine:

- a) o valor da força  $F$  mínima para colocar o corpo em movimento.  
 b) o espaço percorrido pelo corpo, em função de  $F$ , até parar.  
 c) o valor máximo de  $F$  para que ocorra este movimento.

**102 Fuvest** Um sistema mecânico faz com que um corpo de massa  $M_0$ , após um certo tempo em queda, atinja uma velocidade descendente constante  $V_0$ , devido ao efeito do movimento de outra massa  $m$ , que age como freio. A massa  $m$  é vinculada a uma haste  $H$ , presa ao eixo  $E$  de um cilindro  $C$ , de raio  $R_0$ , conforme mostrado na figura.

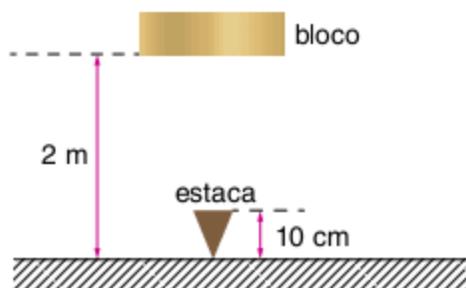
Quando a massa  $M_0$  cai, desenrola-se um fio que movimentará o cilindro e o eixo, fazendo com que a massa  $m$  descreva um movimento circular de raio  $R_0$ . A velocidade  $V_0$  é mantida constante, pela força de atrito, entre a massa  $m$  e a parede  $A$ , devido ao coeficiente de atrito  $\mu$  entre elas e à força centrípeta que age sobre essa massa.



Note e adote: O trabalho dissipado pela força de atrito em uma volta é igual ao trabalho realizado pela força peso, no movimento correspondente da massa  $M_0$  com velocidade  $V_0$ . Para tal situação, em função dos parâmetros  $m$ ,  $M_0$ ,  $R_0$ ,  $V_0$ ,  $\mu$  e  $g$ , determine:

- a) o trabalho  $T_g$ , realizado pela força da gravidade, quando a massa  $M_0$  percorre uma distância vertical correspondente a uma volta completa do cilindro C.
- b) o trabalho  $T_A$ , dissipado pela força de atrito, quando a massa  $m$  realiza uma volta completa.
- c) a velocidade  $V_0$ , em função das demais variáveis.

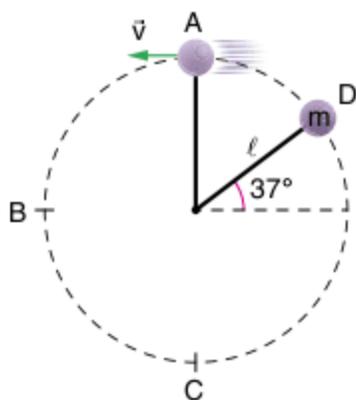
**103 FEB-SP** Um bloco de 500 kg é solto de uma altura de 2 m sobre uma estaca de 10 cm de altura, enterrando-a no solo.



Assinale a alternativa que indica, em newtons, a força média e constante exercida pelo bloco sobre a estaca, considerando que a aceleração da gravidade é  $10 \text{ m/s}^2$ .

- (a) 500
- (b) 1.000
- (c) 10.000
- (d) 100.000
- (e) 1.000.000

**104 UFSC** Em um parque de diversões, um pêndulo de brinquedo é constituído por uma esfera metálica de massa  $m$ , amarrada a uma barra fina, de massa desprezível e comprimento  $\ell$ . O pêndulo deve ser lançado da altura máxima no ponto A, girando em um plano vertical, com o objetivo de tentar completar a volta e se aproximar, o máximo possível, novamente, do ponto A. Suponha que o pêndulo seja lançado com velocidade de módulo  $\sqrt{2g\ell}$ , a partir do ponto A, chegando só até o ponto D, na primeira oscilação. Após oscilar repetidas vezes, para no ponto C. Despreze o atrito da esfera com o ar. Considere:  $\cos 37^\circ \cong 0,8$ ;  $\sin 37^\circ \cong 0,6$ .

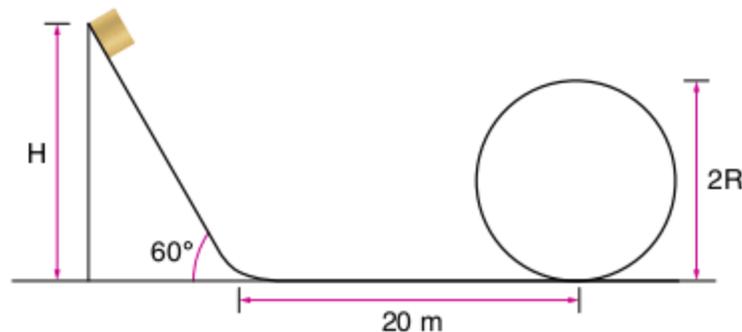


Assinale a(s) proposição(ões) correta(s).

- 01 Se o atrito entre a barra e o eixo de suspensão fosse desprezível, a tensão na barra, no ponto C, seria três vezes o peso da esfera.
- 02 Se o atrito entre a barra e o eixo de suspensão fosse desprezível, o módulo da velocidade que a esfera teria ao passar pelo ponto D seria  $\sqrt{2,4g\ell}$ .
- 04 Durante todo o movimento do pêndulo, a tensão não realiza trabalho.
- 08 O trabalho realizado pelo atrito entre os pontos A e D é  $0,4mg\ell$ .
- 16 O trabalho realizado pelo atrito desde o ponto A até a parada definitiva do pêndulo no ponto C é  $-3mg\ell$ .

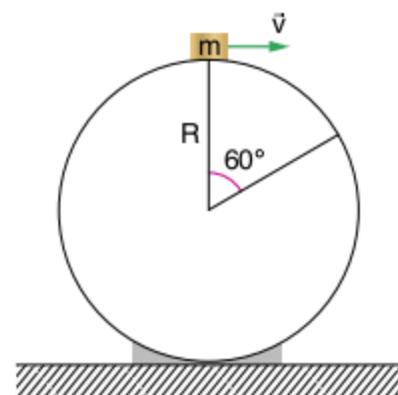
Soma =

**105 ITA** A partir do repouso, um carrinho de montanha-russa desliza de uma altura  $H = 20\sqrt{3} \text{ m}$  sobre uma rampa de  $60^\circ$  de inclinação e corre 20 m num trecho horizontal antes de chegar a um loop circular, de pista sem atrito. Sabendo que o coeficiente de atrito da rampa e do plano horizontal é  $\frac{1}{2}$ , assinale o valor do raio máximo que pode ter esse loop para que o carrinho faça todo o percurso sem perder o contato com a sua pista.



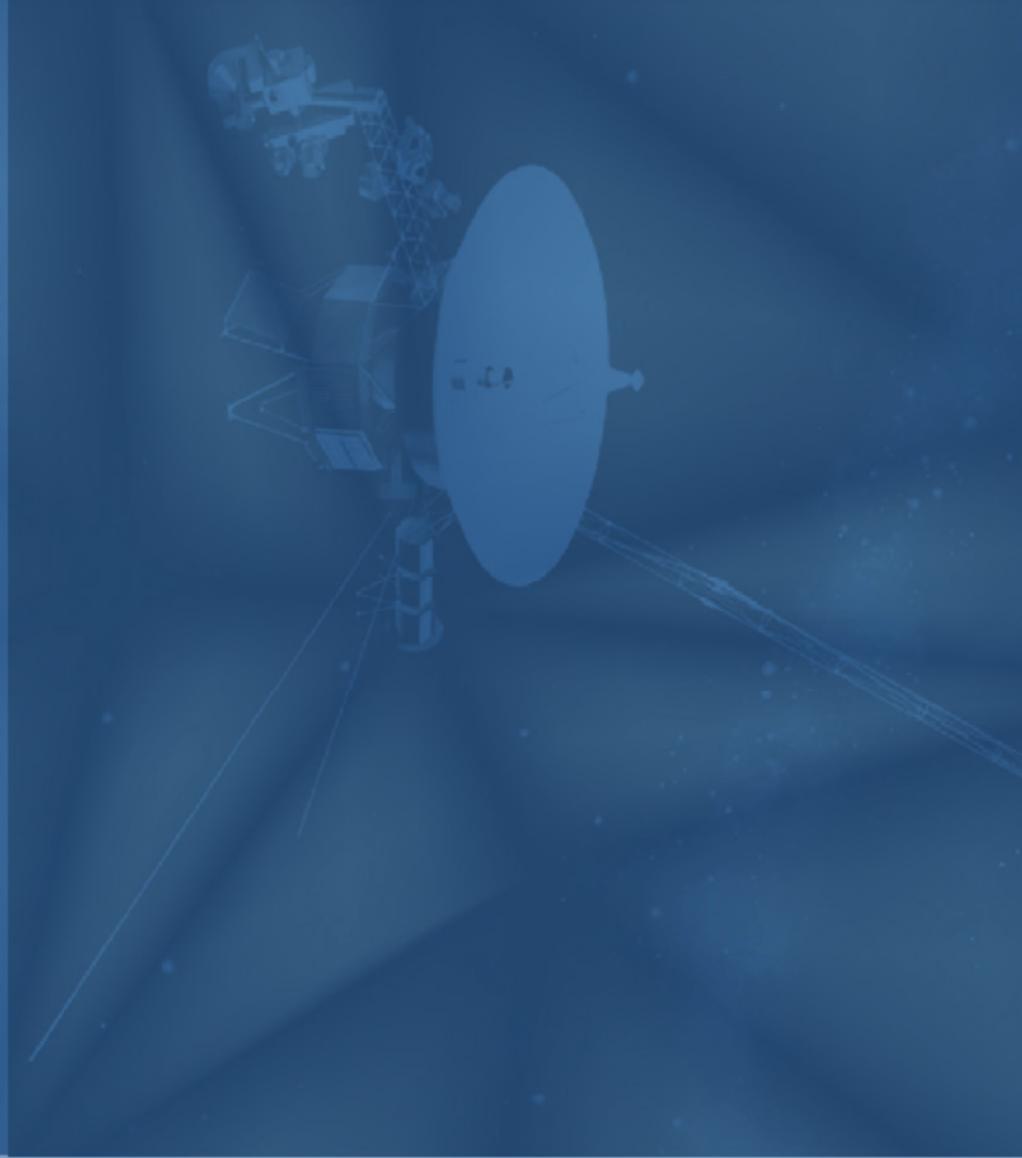
- (a)  $R = 8\sqrt{3} \text{ m}$
- (b)  $R = 4(\sqrt{3} - 1) \text{ m}$
- (c)  $R = 8(\sqrt{3} - 1) \text{ m}$
- (d)  $R = 4(2\sqrt{3} - 1) \text{ m}$
- (e)  $R = \frac{40(\sqrt{3} - 1)}{3} \text{ m}$

**106 ITA** Um objeto pontual de massa  $m$  desliza com velocidade inicial  $\vec{v}$ , horizontal, do topo de uma esfera em repouso, de raio  $R$ . Ao escorregar pela superfície, o objeto sofre uma força de atrito de módulo constante dado por  $f = \frac{7mg}{4\pi}$ .



Para que o objeto se desprenda da superfície esférica após percorrer um arco de  $60^\circ$  (veja figura), sua velocidade inicial deve ter o módulo de:

- (a)  $\sqrt{\frac{2gR}{3}}$
- (b)  $\sqrt{\frac{3gR}{2}}$
- (c)  $\frac{\sqrt{6gR}}{2}$
- (d)  $3\sqrt{\frac{gR}{2}}$
- (e)  $3\sqrt{gR}$



# Frente 2

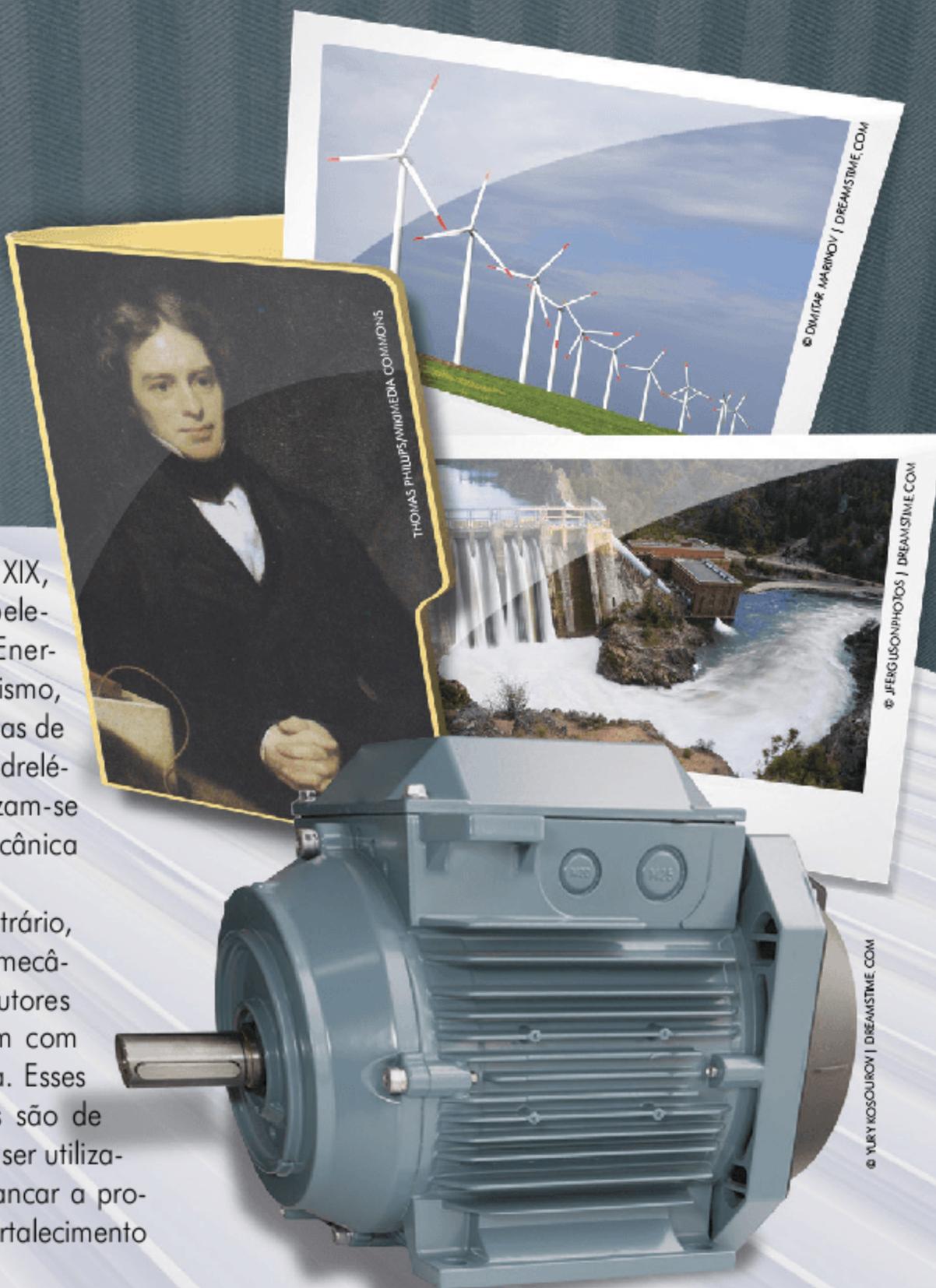
# 9

FRENTE 2

## Forças magnéticas e indução magnética

O inglês Michael Faraday, no século XIX, contribuiu significativamente para o estabelecimento do Princípio da Conservação de Energia. Ao relacionar eletricidade e magnetismo, Faraday levou-nos a ver que as várias formas de energia estavam conectadas. As usinas hidrelétricas e os geradores movidos a vento utilizam-se desse princípio, ao transformar energia mecânica em energia elétrica.

Os motores elétricos fazem o contrário, transformam energia elétrica em energia mecânica. Dentro de um motor elétrico, condutores percorridos por corrente elétrica interagem com um campo magnético, gerando uma força. Esses motores são extremamente versáteis, pois são de construção simples e baixo custo, podendo ser utilizados em eletrodomésticos, bem como alavancar a produção industrial, tão importante para o fortalecimento da economia e a geração de empregos.



THOMAS PHILIPS/WIKIMEDIA COMMONS

© DMITAR MARINOV | DREAMSTIME.COM

© JFENGUSONPHOTOS | DREAMSTIME.COM

© YURY KOSOUROV | DREAMSTIME.COM

## Conceitos iniciais

Vimos, no capítulo 7 do livro 2, que sempre que uma carga elétrica se movimenta em um campo magnético, desde que não paralelamente a ele, aparece sobre essa carga uma força magnética. Se pensarmos que a corrente elétrica consiste na movimentação ordenada de cargas elétricas, fica fácil perceber que se colocarmos um condutor percorrido por uma corrente elétrica em um campo magnético, respeitada a condição de não paralelismo, aparecerá sobre ele uma força magnética.

Este é o princípio de funcionamento de motores elétricos, alto-falantes etc. O que iremos fazer agora é dar um tratamento quantitativo ao problema.

## Força magnética em um fio retilíneo percorrido por corrente

O que se quer é determinar o vetor força magnética  $\vec{F}_m$  que age sobre um fio retilíneo percorrido por corrente elétrica e, para tal, é necessário determinar o seu módulo, direção e sentido. Para a determinação da direção e do sentido, devemos nos lembrar de que o sentido convencional da corrente é o da movimentação das cargas positivas. Portanto, de posse da regra da mão direita espalmada, podemos determinar a direção e o sentido da força magnética, como pode ser visto na figura 1.

A figura 1 nos mostra a utilização da regra da mão direita. O polegar aponta no sentido da corrente e os demais dedos apontam na direção do vetor indução magnética. A força magnética é, então, perpendicular à palma da mão, tendendo a empurrar o fio na direção indicada.

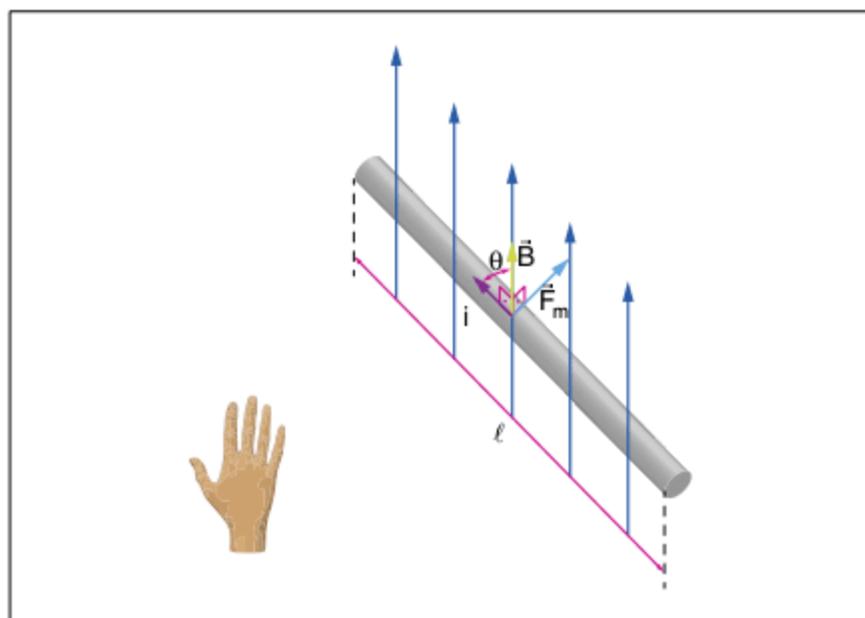


Fig. 1 Regra da mão direita espalmada.

Determinados a direção e o sentido do vetor força magnética, resta agora o cálculo do módulo. Para tal, iremos lançar mão da equação que nos dá a força magnética que age sobre uma carga em movimento. Desta forma chegaremos a uma expressão que nos dá o módulo da força que age em um condutor em função da intensidade da corrente que o circula, da intensidade do vetor indução  $\vec{B}$  e do trecho do fio  $\ell$  exposto ao campo magnético. Lembrando que a força magnética que age sobre uma carga em movimento é:

$$F_m = B \cdot q \cdot v \cdot \text{sen}\theta$$

Se multiplicarmos por  $\Delta t$  (variação do tempo) o numerador e o denominador do 2º termo da igualdade, teremos:

$$F_m = \frac{Bqv \text{sen}\theta \cdot \Delta t}{\Delta t}$$

Lembrando que  $\frac{q}{\Delta t} = i$  (corrente elétrica) e que  $v \cdot \Delta t = \ell$

(trecho do condutor imerso no campo magnético), temos:

$$F_m = B \cdot i \cdot \ell \cdot \text{sen}\theta$$

onde  $\theta$  é o ângulo formado entre o sentido da corrente e o campo magnético.

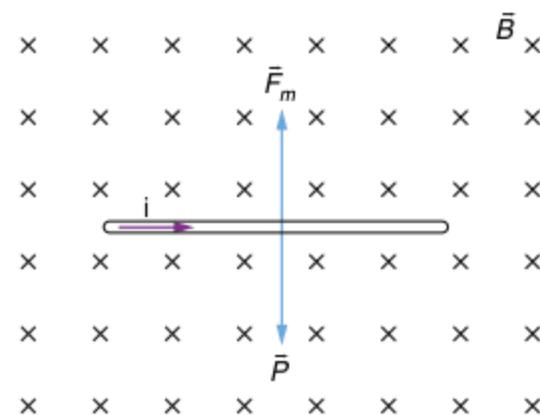
### Exercício resolvido

1 Um campo magnético  $\vec{B}$ , uniforme, é capaz de impedir a queda de um condutor retilíneo de comprimento  $\ell = 0,10$  m e massa  $m = 10$  g, horizontal e ortogonal às linhas do campo, quando por ele circula uma corrente  $i = 2,0$  A.

- Calcule a intensidade do campo magnético.
- O que ocorreria se o sentido da corrente que circula no condutor fosse invertido? Justifique.  
Adote:  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

### Resolução:

- Para a resolução deste exercício, é interessante que se visualize geometricamente o problema. Observe a figura adiante:



A força magnética equilibra a força peso; como o ângulo  $\theta$  é  $90^\circ$ , tem-se:

$$F_m = P \Rightarrow Bil = mg$$

$$B = \frac{mg}{il}$$

Substituindo os dados do problema, tem-se:

$$B = \frac{10^{-2} \cdot 10}{0,1 \cdot 2} = 0,5 \text{ T}$$

- Caso o sentido da corrente fosse invertido, o módulo da força magnética continuaria o mesmo, porém com sentido contrário (verifique!). A resultante seria, portanto, igual a duas vezes o peso, e a aceleração seria de  $20$  m/s<sup>2</sup>.

## Espira retangular percorrida por corrente e imersa em um campo magnético uniforme

Inicialmente, deve ser recordado o cálculo do momento de um binário de forças, que pode ser definido como sendo duas forças de mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos. Na figura 2, observa-se uma haste de comprimento  $\ell$  sob a ação de um binário de forças.

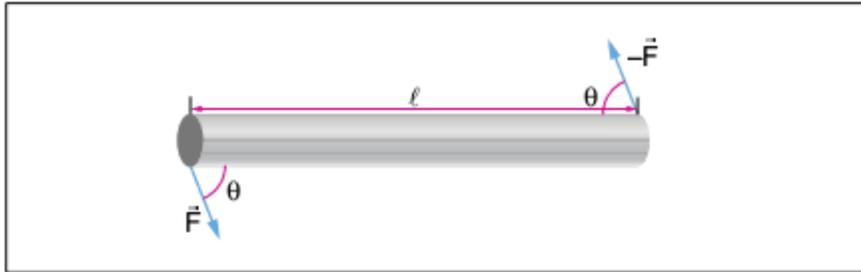


Fig. 2 Haste sujeita a um binário.

Nesta situação, o módulo do momento dessas forças, em relação a qualquer ponto do universo, é dado por:

$$M = F \cdot \ell \cdot \text{sen } \theta$$

Na figura a seguir, uma espira retangular percorrida por corrente elétrica é submetida a um campo magnético uniforme.

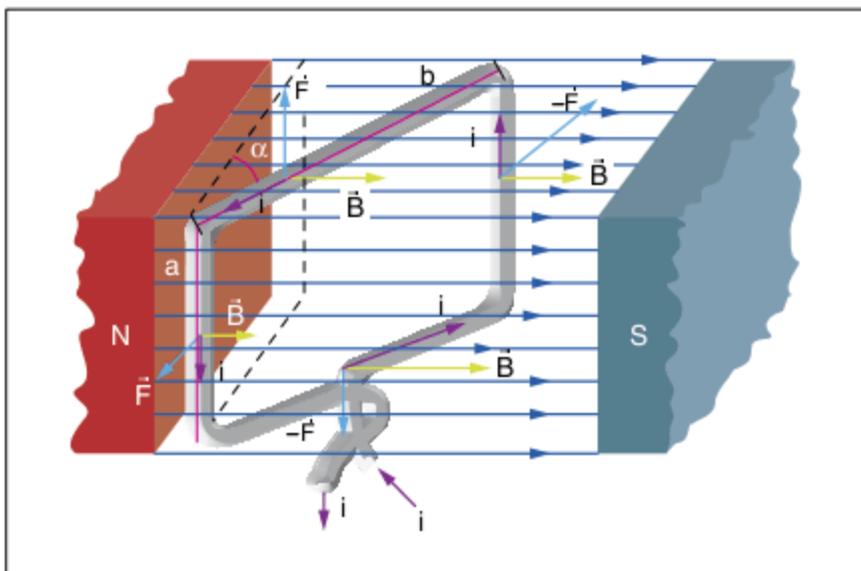


Fig. 3 Espira retangular imersa em campo magnético.

Observe que a espira fica sujeita a um binário de forças, pois as forças que agem ao longo da sua altura  $a$  têm mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos, assim como as forças que agem ao longo do seu comprimento  $b$ , conforme se observa na figura 4, onde o versor  $\hat{n}$  indica a direção normal à espira.

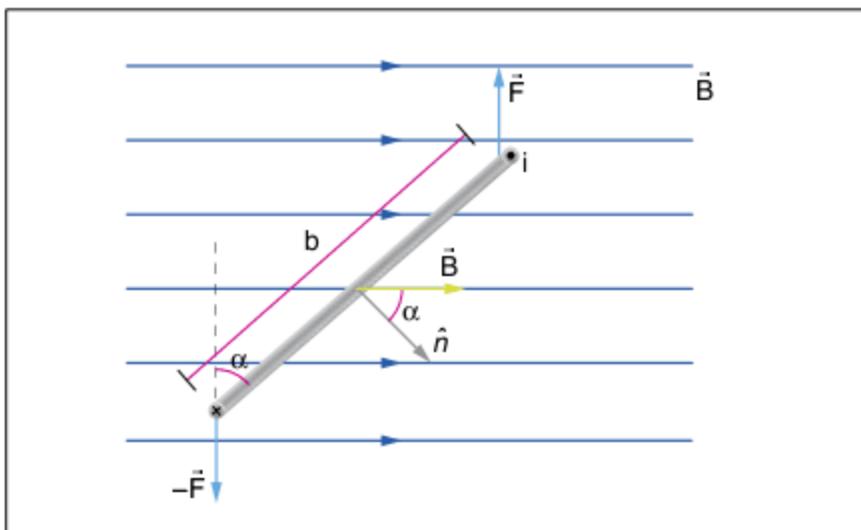


Fig. 4 Binário de forças. Espira vista de cima.

A figura 4 mostra claramente que o binário de forças faz com que a espira gire dentro do campo magnético buscando a situação de equilíbrio, indicada na figura 5.

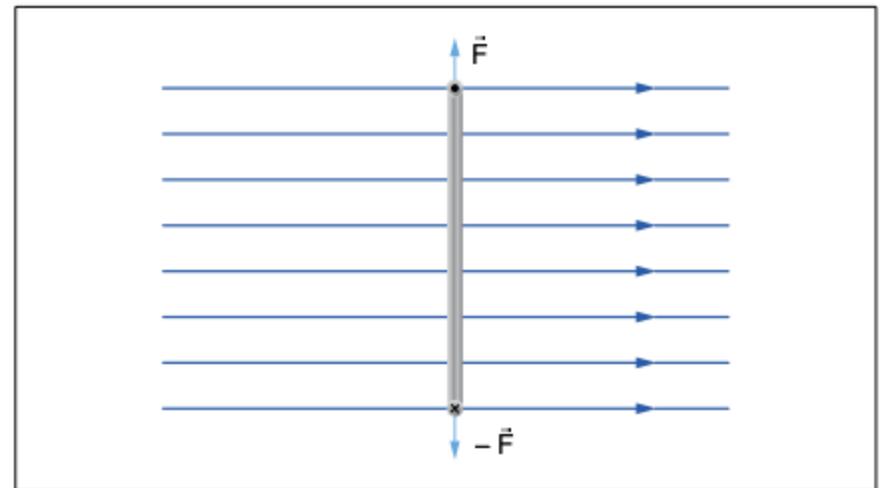


Fig. 5 Haste em equilíbrio estável sujeita a um campo magnético.

Na situação indicada na figura 4, o momento do binário de forças que age sobre a espira retangular é dado por:

$$M = F_m \cdot \ell \cdot \text{sen } \theta = B \cdot i \cdot a \cdot b \cdot \text{sen } \alpha$$

É importante notar que  $a$  é o comprimento do fio percorrido pela corrente elétrica,  $b$  é a distância entre os pontos de aplicação das forças na espira e  $\alpha$  é o ângulo entre a direção normal à espira e o vetor indução magnética. Assim, o máximo torque ocorre quando o ângulo  $\alpha$  é igual a  $90^\circ$ , conforme se vê na figura 6.

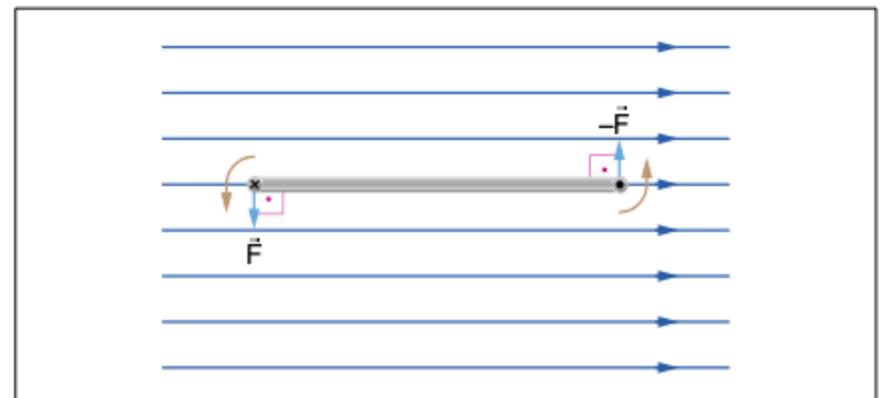


Fig. 6 Binário máximo aplicado a uma espira.

O que também chama a atenção na expressão do momento sobre a espira retangular é o produto  $a \cdot b$ , que é exatamente o valor da área da espira retangular. Esse resultado é importante porque é válido para qualquer outro formato de espira, tal como se vê na figura a seguir, onde uma espira de área  $A$  é submetida a um campo magnético uniforme, cujo vetor indução magnética tem módulo  $B$ .

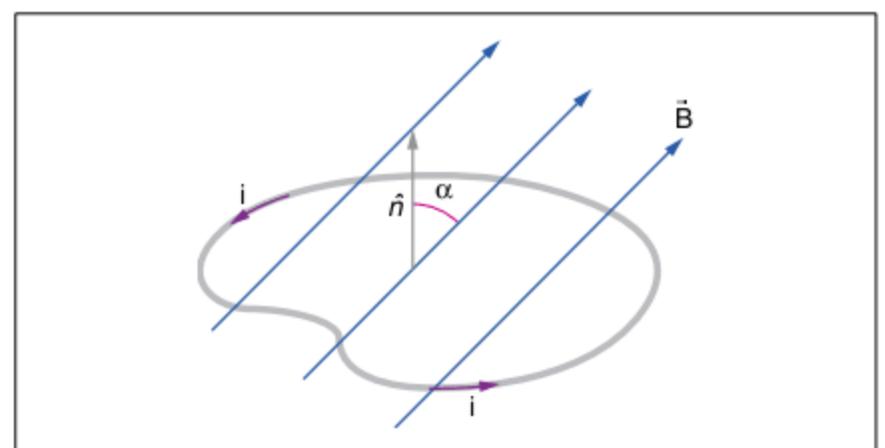


Fig. 7 Espira de área A submetida a um campo magnético uniforme.

Para o caso da espira mostrada na figura 7, o módulo do momento que sobre ela age é dado por:

$$M = B \cdot i \cdot A \cdot \text{sen } \alpha$$

Finalmente, para o caso em que há  $n$  espiras enroladas com o mesmo formato e paralelas entre si, a expressão do módulo do momento do binário que age na bobina é:

$$M = n \cdot B \cdot i \cdot A \cdot \text{sen } \alpha$$

**Observação:** É exatamente esse binário de forças, que tende a fazer a espira girar, que está relacionado ao princípio de funcionamento dos motores elétricos, tão importantes no dia a dia. Dentro de um motor elétrico, seja ele de corrente contínua ou alternada, há um rotor que gira, composto de várias espiras justapostas e que é percorrido por corrente elétrica e de um estator, que cria o campo magnético externo necessário para que surja no rotor um momento devido às forças magnéticas que surgem. A figura a seguir ilustra o que foi explicado.

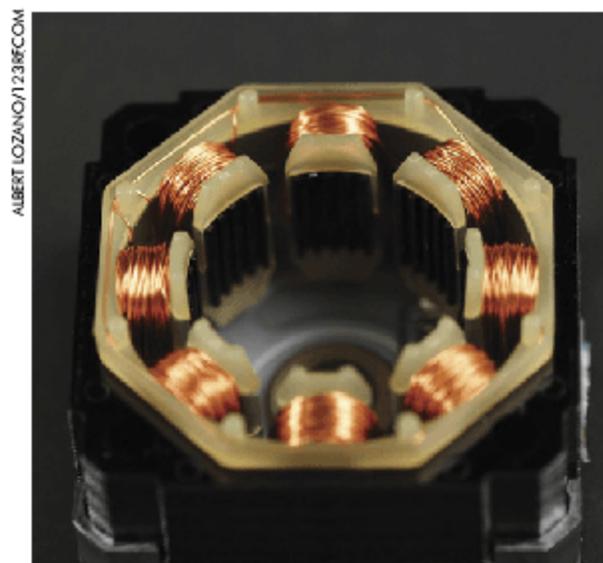
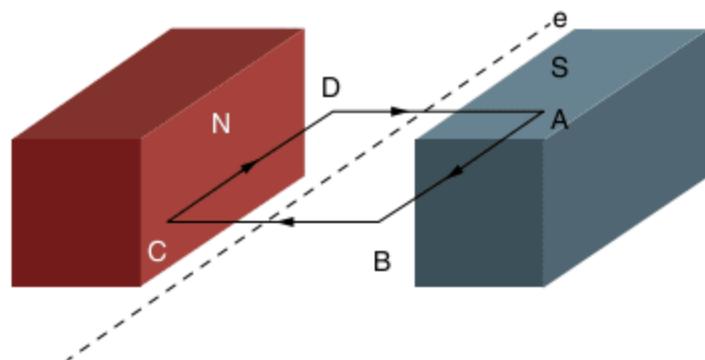


Fig. 8 Os enrolamentos que se observam na figura fazem parte do estator que gera o campo magnético para que o rotor (centro da figura) possa girar quando percorrido por corrente elétrica).

### Exercício resolvido

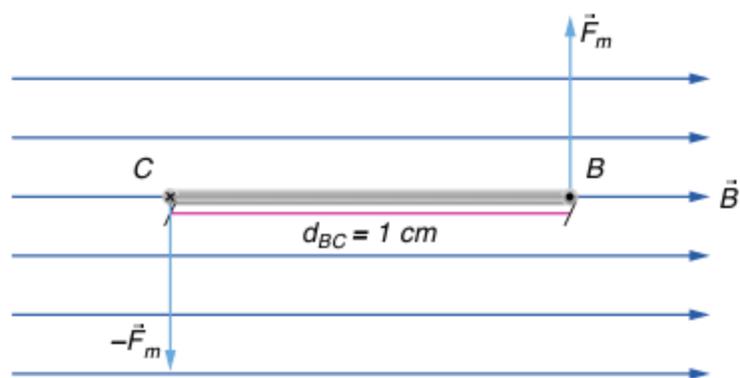
2 Uma espira retangular ABCD de dimensões  $AB = 2 \text{ cm}$  e  $BC = 1 \text{ cm}$  localiza-se entre os polos N e S de um ímã permanente conforme a figura; o campo de indução pode ser considerado uniforme nessa região, com intensidade  $B = 0,8 \text{ T}$ . A bobina pode girar em torno do eixo de simetria  $e$ , e é percorrida pela corrente  $i = 5 \text{ A}$ , no sentido ABCDA.



- Calcule o momento magnético da espira, na posição indicada.
- Indique o sentido em que a espira irá girar e qual a posição de equilíbrio.

### Resolução:

a) Inicialmente, observe que as linhas de indução vão da esquerda para a direita (polo norte magnético para o polo sul magnético). Assim, olhando a figura de perfil, tem-se:



No ponto B, a corrente sai do plano do papel e, aplicando-se a regra da mão direita, obtém-se o vetor  $\vec{F}_m$  para o alto da página. No ponto C, utilizando-se do mesmo procedimento, obtém-se o vetor  $-\vec{F}_m$  para baixo. Como as correntes são as mesmas e o campo magnético é uniforme, os dois vetores têm o mesmo módulo. Trata-se portanto de um binário.

Dos dados do problema, temos:

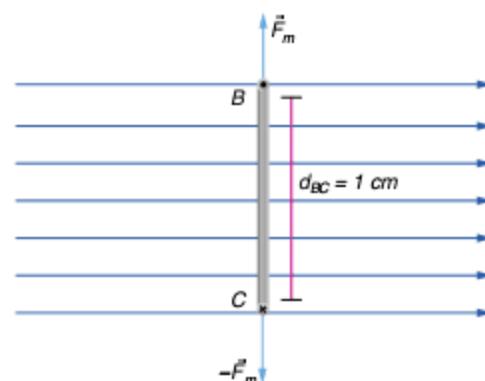
$$F_m = Bi\ell = 0,8 \cdot 5 \cdot d_{AB} = 0,8 \cdot 5 \cdot 0,02 = 0,08 \text{ N}$$

O momento do binário será dado por:

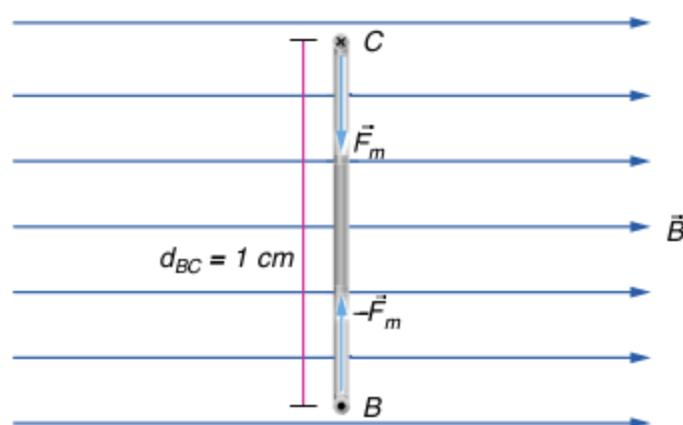
$$M = F_m \cdot d_{BC} = 0,08 \cdot 0,01 = 8 \cdot 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}$$

b) As duas posições de equilíbrio são aquelas onde o binário é nulo. Uma dessas posições de equilíbrio é estável e a outra é instável, conforme mostram as figuras a seguir.

**Equilíbrio estável:**



**Equilíbrio instável:**



## Força magnética entre fios retilíneos infinitos e paralelos percorridos por corrente elétrica

O que acontece quando colocamos dois fios paralelos entre si, percorridos por correntes elétricas, imersos em um meio de permeabilidade magnética  $\mu$ ?

De fato, quando isso acontece, aparece entre eles uma força magnética. Devido ao fato de que a corrente que circula em um deles faz surgir um campo magnético que irá agir sobre o outro e vice-versa.

### Fios percorridos por correntes de mesmo sentido

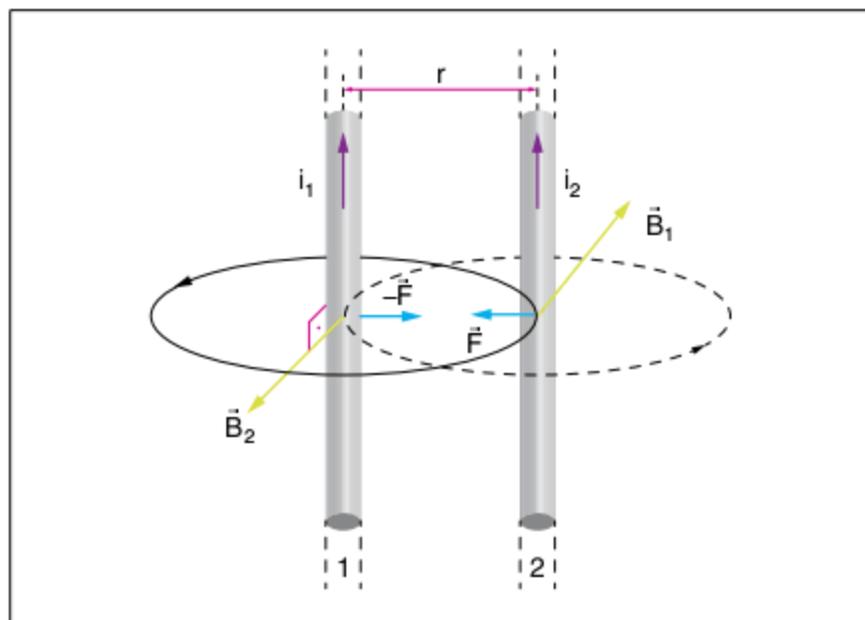


Fig. 9 Fios retilíneos paralelos percorridos por correntes de mesmo sentido.

Conforme visto na figura 9, o condutor 1 cria um campo  $\vec{B}_1$  em 2, tal que pela regra da mão direita espalmada temos o sentido da força  $\vec{F}$  que age em 2. Da mesma forma, o condutor 2 cria um campo  $\vec{B}_2$  em 1, e pelo mesmo procedimento determinamos o sentido da força  $-\vec{F}$  que age em 1.

Assim, temos que:

- para o condutor 1:

$$F_m = B_2 \cdot i_1 \cdot \ell \cdot \text{sen}90^\circ$$

Do capítulo anterior, temos:

$$B_2 = \frac{\mu \cdot i_2}{2\pi R}$$

Assim:  $F_m = \frac{\mu \cdot i_1 \cdot i_2 \cdot \ell}{2\pi R}$ , onde  $R = r$ .

Você poderá observar que o resultado é o mesmo se feito para o condutor 2, ou seja, se os condutores paralelos entre si são percorridos por correntes de mesmo sentido, temos uma **força de atração**. As forças nos condutores constituem um par ação-reação.

### Fios percorridos por correntes de sentidos opostos

Agora, a força que aparece entre os fios é de repulsão, conforme pode ser visto na figura 10. Porém o módulo da força é calculado pela mesma expressão anterior.

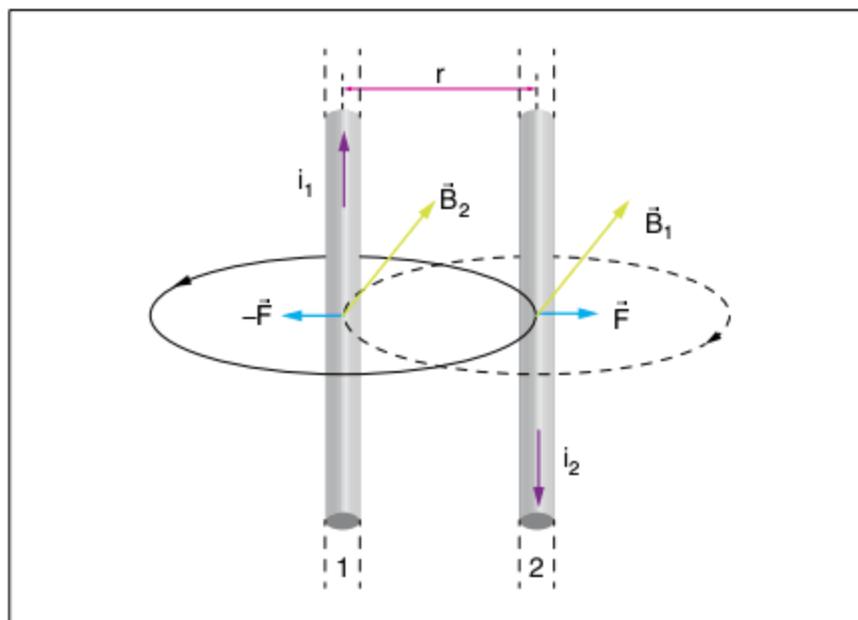


Fig. 10 Fios retilíneos paralelos percorridos por correntes de sentido oposto.

### Definição de ampère

A unidade de corrente elétrica no Sistema Internacional de unidades (SI), o ampère (A), é definida no magnetismo. Para tal, toma-se dois fios longos, separados entre si pela distância de 1 m, no vácuo. Faz-se, então, percorrer pelos dois condutores correntes de mesmo módulo e sentido. Aparece então uma força de atração entre esses fios; medindo-se essa força, quando esta for de  $2 \cdot 10^{-7}$  N por metro de fio, tem-se uma corrente de 1 A.

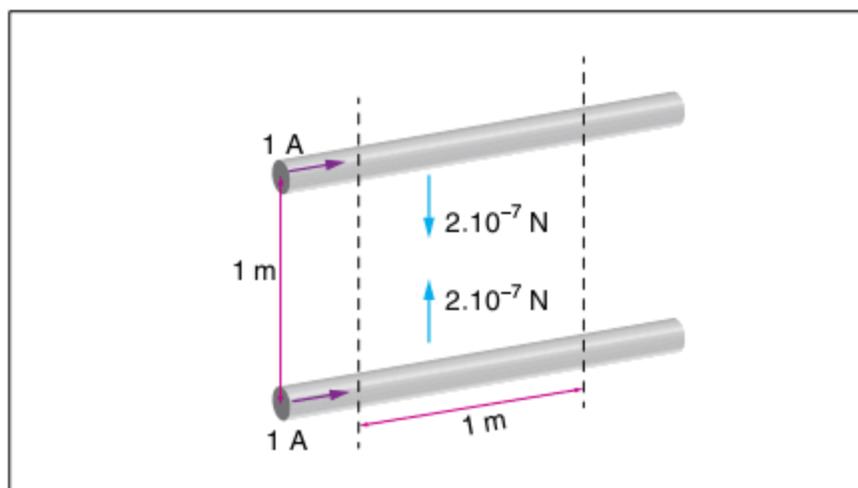


Fig. 11 Determinação da corrente de 1 ampère.

De fato, quando  $i_1$  e  $i_2 = 1$  A, e  $R = 1$  m, tem-se que:

$$F_m = \frac{\mu \cdot i_1 \cdot i_2 \cdot \ell}{2\pi R}$$

Substituindo-se os valores, temos:

$$F_m = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1A \cdot 1A \cdot 1m}{2\pi \cdot 1m} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

Portanto, 1A é a intensidade de corrente que faz aparecer uma força de atração de  $2 \cdot 10^{-7}$  N por metro de condutor entre dois fios paralelos retilíneos de comprimento infinito e de área de seção desprezível, separados pela distância de 1 m no vácuo.

### Funcionamento do alto-falante

Os alto-falantes são uma importante utilização das forças que aparecem em condutores percorridos por correntes quando imersos em um campo magnético. Eles são dispositivos que

transformam sinal elétrico (sinal de áudio) em sinal mecânico (ondas sonoras). Na figura 12, temos um alto-falante em corte.

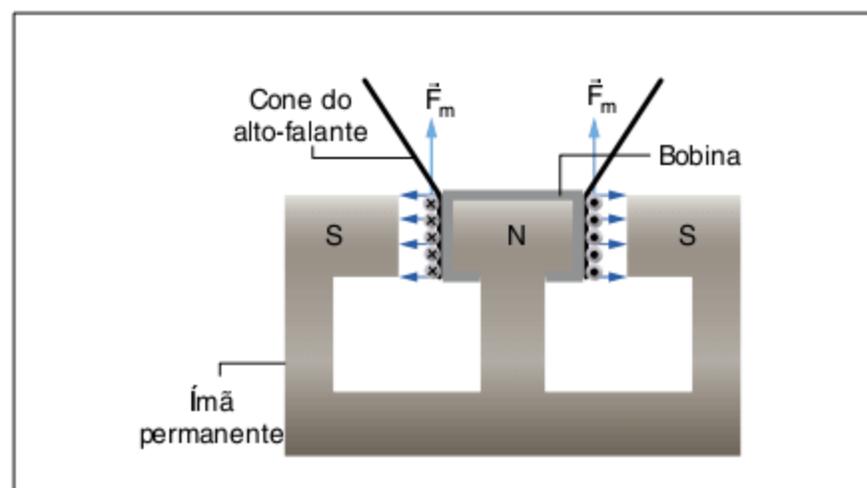


Fig. 12 Representação esquemática do alto-falante.

Na figura, vemos que na base do cone do alto-falante é colocada uma bobina, essa bobina é imersa em um campo magnético uniforme gerado por um ímã permanente. Dessa forma, qualquer força magnética que surja na bobina devido a correntes elétricas será comunicada ao cone.

Assim, o sinal vindo do amplificador, ou seja, o sinal elétrico do áudio, é comunicado à bobina do alto-falante. Esse sinal gera nessa bobina correntes ora em um sentido ora em outro, criando uma força magnética variável no cone, já que o campo magnético é constante (ímã permanente). Essa força magnética variável produz então uma vibração no alto-falante correspondente à onda sonora que o sinal elétrico carregava.

### A indução magnética – breve histórico

Quando, em 1820, Oersted provou que corrente elétrica cria campo magnético, ficou a interrogação na comunidade científica se o fenômeno reverso era possível. Em 1831, Michael Faraday provou que sim, era possível criar corrente elétrica a partir de campo magnético.

O fenômeno acima descrito denomina-se **Indução magnética** e é o assunto que trataremos a seguir. A corrente elétrica gerada é chamada de **corrente induzida**.

Assim, descreveremos as leis que regem esse fenômeno, mas, inicialmente, vamos definir o conceito de fluxo do vetor indução magnética  $\vec{B}$ .

### Fluxo do vetor indução magnética ( $\phi_B$ )

Considere uma superfície plana  $S$ , de área  $A$ , colocada em uma região de campo magnético uniforme com vetor indução magnética  $\vec{B}$ , conforme mostra a figura 13.

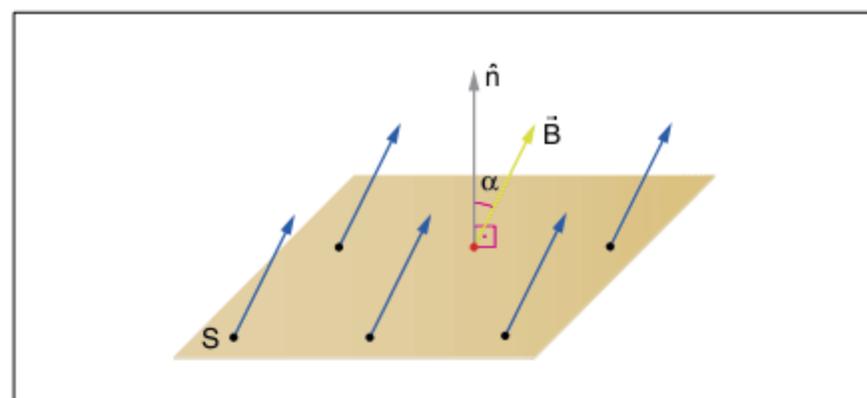


Fig. 13 Fluxo do vetor indução  $\vec{B}$  em uma superfície  $S$ .

Seja  $\hat{n}$  um vetor unitário normal a essa superfície, que faz um ângulo  $\alpha$  com o vetor  $\vec{B}$ , o fluxo do vetor  $\vec{B}$  através da superfície  $S$  é dado pela expressão:

$$\phi_B = B \cdot A \cdot \cos \alpha$$

A unidade no SI de fluxo magnético é o weber (Wb), tal que:

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 \text{ ou ainda } 1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2.$$

“Fisicamente, o fluxo de um campo vetorial (no caso o do vetor indução magnética) pode ser compreendido como sendo proporcional ao número de linhas de campo que perfuram uma dada superfície.”

## ATENÇÃO!

Da mesma forma que na eletrostática a densidade de linhas de campo elétrico nos dá informações sobre a intensidade desse campo, a densidade de linhas de indução magnética nos dá informações sobre a intensidade do campo magnético, conforme pode ser visto na figura 14.

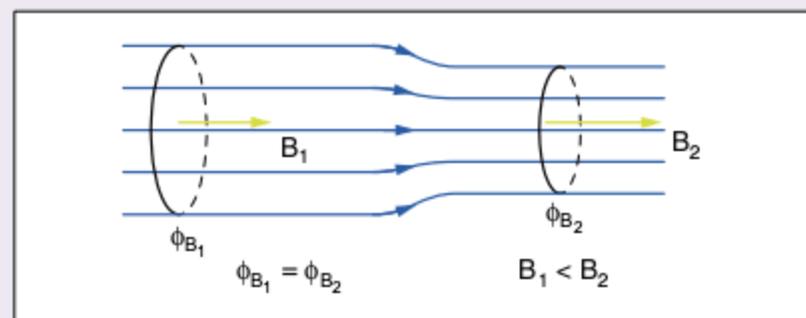


Fig. 14 Comparação dos fluxos em duas áreas.

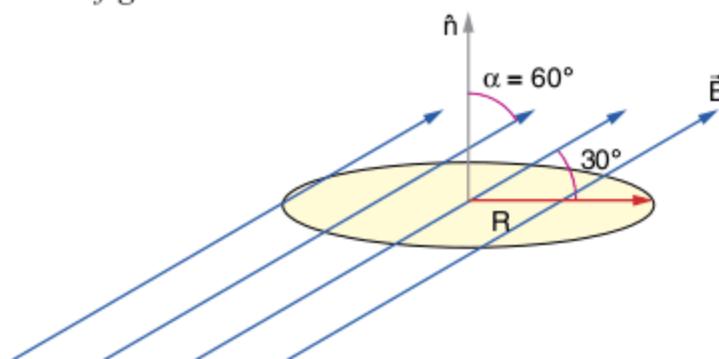
Como pode ser observado na figura acima, o fluxo através das duas superfícies planas é o mesmo, pois o número de linhas que perfuram a superfície é o mesmo.

### Exercício resolvido

**3** Um fio condutor, em forma de anel, com raio  $R = 5 \text{ cm}$ , está em uma região do espaço em que existe um campo magnético constante e uniforme, de módulo  $B = 1 \text{ Wb/m}^2$ . A direção de  $\vec{B}$  forma com o plano do anel um ângulo de  $30^\circ$ . Calcule o fluxo de  $\vec{B}$  através do anel.

#### Resolução:

Observe a figura:



O único detalhe do exercício é que o ângulo dado foi de  $30^\circ$  com o plano do anel. Para o cálculo do fluxo, é necessário o

ângulo que o vetor normal ao plano do anel faz com o vetor indução magnética  $\vec{B}$ . Pela figura, podemos observar que esse ângulo é de  $60^\circ$ .

Dessa forma, o fluxo do campo magnético é dado por:

$$\phi_B = BA \cos 60^\circ = 1\pi(5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot \frac{1}{2} \cong 3,927 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

## Indução eletromagnética

Vamos agora imaginar uma espira formada de um material condutor. Faraday notou que, quando o fluxo magnético através da espira sofria qualquer variação, aparecia nesta espira uma corrente elétrica dada por:

$$i = \frac{\epsilon}{R}$$

Onde  $\epsilon$  é a força eletromotriz induzida (em V) e  $i$  é a corrente induzida (em A) e  $R$  é a resistência da espira (em  $\Omega$ ).

Esse princípio é de uso geral, ou seja, podemos ter correntes induzidas em solenoides, bobinas etc.

## ATENÇÃO!

De maneira geral, podemos escrever que:

Toda vez que o fluxo de indução magnética, através de um circuito qualquer, sofrer variações, aparecerá nesse circuito uma força eletromotriz induzida. Se o circuito estiver fechado, surgirá uma corrente induzida.

O circuito onde a corrente induzida aparece é chamado de circuito induzido.

Através da expressão matemática do fluxo magnético, pode-se perceber que o fluxo do vetor indução magnética através do induzido pode ser variado seja pela intensidade de  $\vec{B}$ , pelo módulo da área exposta ao campo magnético, ou pela variação do ângulo  $\alpha$ , conforme mostram as figuras 15, 16 e 17.

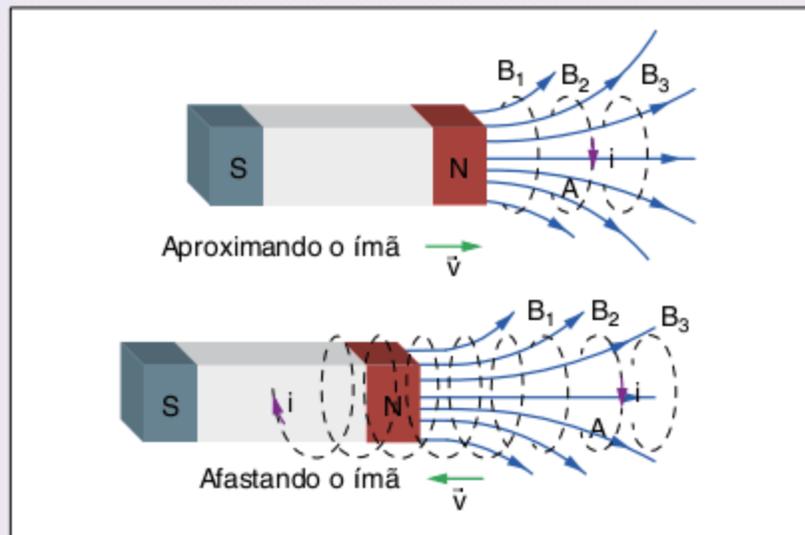


Fig. 15 Variação do fluxo pela variação do módulo de  $\vec{B}$ .

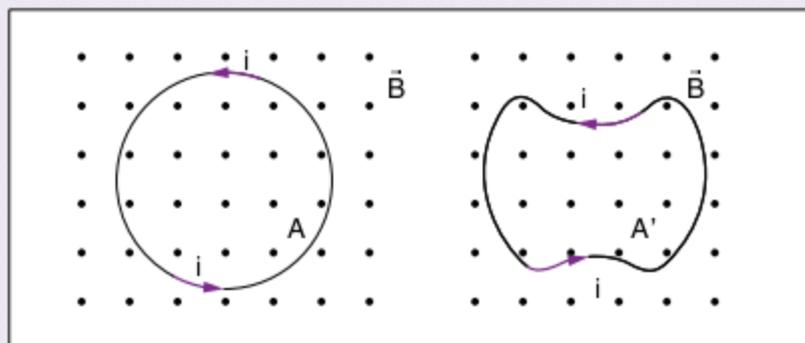


Fig. 16 Variação do fluxo pela variação da área.

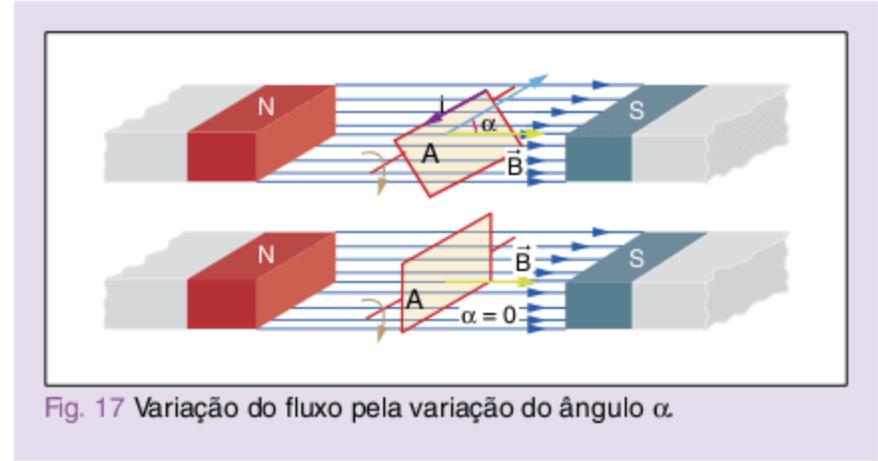


Fig. 17 Variação do fluxo pela variação do ângulo  $\alpha$ .

## Variação do fluxo causada pela variação do módulo do vetor indução magnética

Tomemos um ímã em forma de barra, como na figura 18.

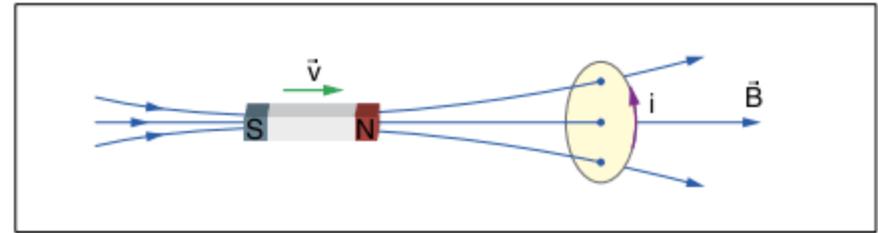


Fig. 18 Variação do fluxo pela variação do módulo de  $\vec{B}$ .

É sabido que o campo fica mais fraco à medida que nos afastamos do ímã. Se aproximarmos o ímã da espira, perpendicularmente ao seu plano, estaremos causando uma variação do fluxo nessa espira, pois a intensidade do vetor indução magnética  $\vec{B}$  no seu interior estará variando. Surge então, nessa espira, uma força eletromotriz induzida e, conseqüentemente, uma corrente induzida. Há de se notar que o mesmo aconteceria se afastássemos o ímã da espira, pois isso também causaria uma variação do fluxo magnético.

Fica fácil perceber que poderíamos ter uma variação de fluxo causada pela variação da intensidade de  $\vec{B}$  na espira, se nós a aproximássemos ou a afastássemos do ímã.

Outra maneira de obter o campo magnético seria utilizando um circuito tal como na figura 19. Esse circuito gera um campo magnético que, por sua vez, causa um fluxo na espira N. É importante ressaltar que a corrente induzida faz surgir uma força magnética que se opõe ao movimento relativo das espiras.

O sentido da corrente induzida varia quando a intensidade do fluxo aumenta ou diminui na espira (este sentido será determinado mais tarde através da Lei de Lenz).

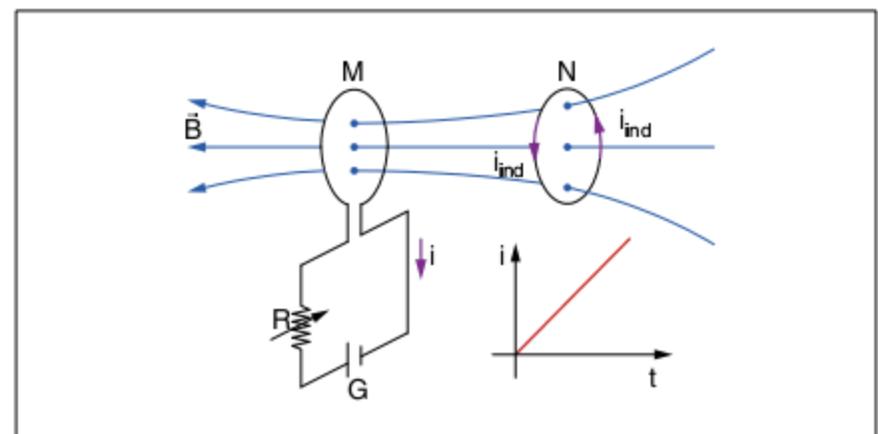


Fig. 19 Variação do fluxo na espira N pela variação da corrente M, que cresce no tempo.

### Varição no fluxo causada pela variação de $A$ exposta ao vetor $\vec{B}$

Considere uma espira retangular imersa parcialmente e perpendicularmente a um campo magnético uniforme, conforme visto na figura 20.

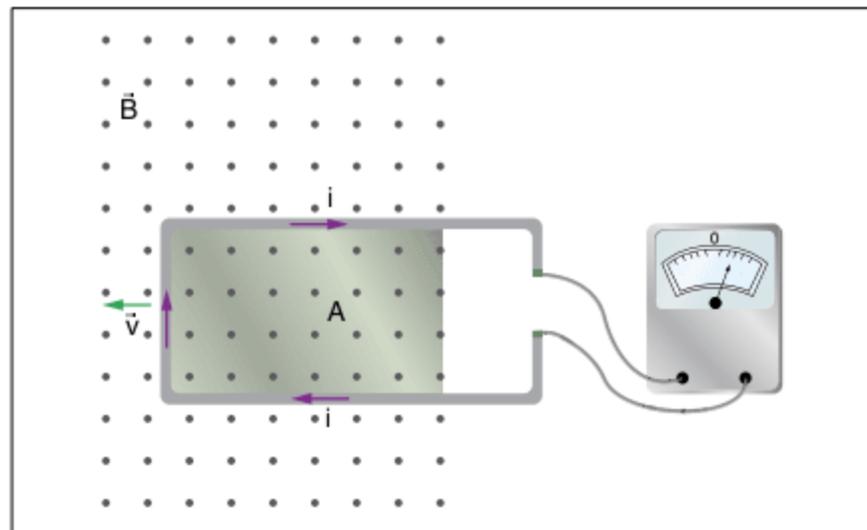


Fig. 20 Variação do fluxo pela variação da área.

Observe que, quando fazemos a espira penetrar mais ou menos no campo magnético, aparece uma corrente induzida cujo sentido depende de estarmos penetrando a espira no campo (aumentando o fluxo, pois  $A$  aumenta) ou retirando a espira do campo (diminuindo o fluxo, pois  $A$  diminui).

Portanto, a área  $A$  que aparece na equação do fluxo magnético não é a área total do circuito, mas sim aquela que efetivamente está imersa em um campo magnético.

## ATENÇÃO!

É importante ressaltar que a velocidade de variação do fluxo, seja por qualquer motivo, influencia na intensidade da corrente induzida, conforme veremos adiante na Lei de Faraday-Neumann.

Outro fato importante é que a corrente induzida também fará aparecer aqui uma força magnética no sentido oposto ao movimento da espira.

### Varição do fluxo causada por variação do ângulo $\alpha$

Considere uma espira girando com velocidade angular  $\omega$ , imersa em um campo magnético uniforme, conforme a figura 21.

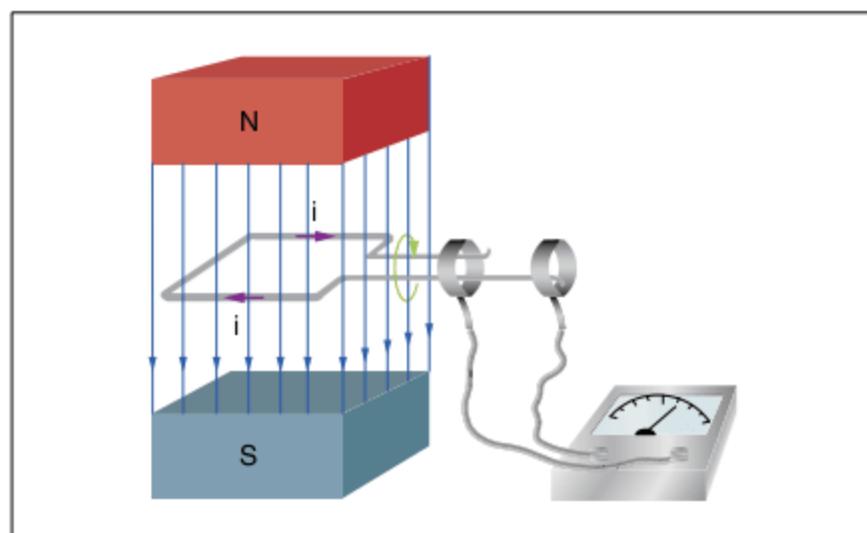


Fig. 21 Variação do fluxo pela variação do ângulo  $\alpha$ .

Fica fácil observar que o vetor normal  $\hat{n}$  perpendicular à superfície varia em direção e sentido, ou seja, o ângulo  $\alpha$  varia de  $0$  a  $2\pi$ , portanto, temos que:

$$-BA < \phi_B < BA$$

Dessa forma, surge na espira uma força eletromotriz induzida e uma corrente induzida, que dependem do sentido de giro da espira e de sua velocidade angular.

Esse é o princípio de funcionamento dos geradores mecânicos de energia. Essa corrente pode ser contínua, caso em que o gerador é chamado de dínamo, ou ser alternada e, nesse caso, o gerador é chamado de alternador.

Tendo, então, tratado da indução magnética de forma qualitativa, vamos agora dar um tratamento quantitativo ao problema. Isso será feito através da Lei de Lenz, que nos dará o sentido da corrente induzida, e através da Lei de Faraday-Neumann, que nos dará o valor da força eletromotriz induzida; assim, poderemos calcular o valor da corrente induzida.

## Lei de Lenz

A Física é uma ciência eminentemente experimental, e, como tal, muitas de suas leis são experimentais.

A Lei de Lenz foi obtida através de resultados experimentais e diz respeito ao sentido da corrente induzida, ela foi descoberta pelo físico russo Heinrich Lenz e podemos enunciá-la da seguinte forma:

**O sentido da corrente induzida é tal que se opõe à variação do fluxo que a produziu.**

O que iremos fazer agora é aprender como aplicar a Lei de Lenz.

Inicialmente, consideremos uma espira circular e um ímã em forma de barra, conforme a figura 22.

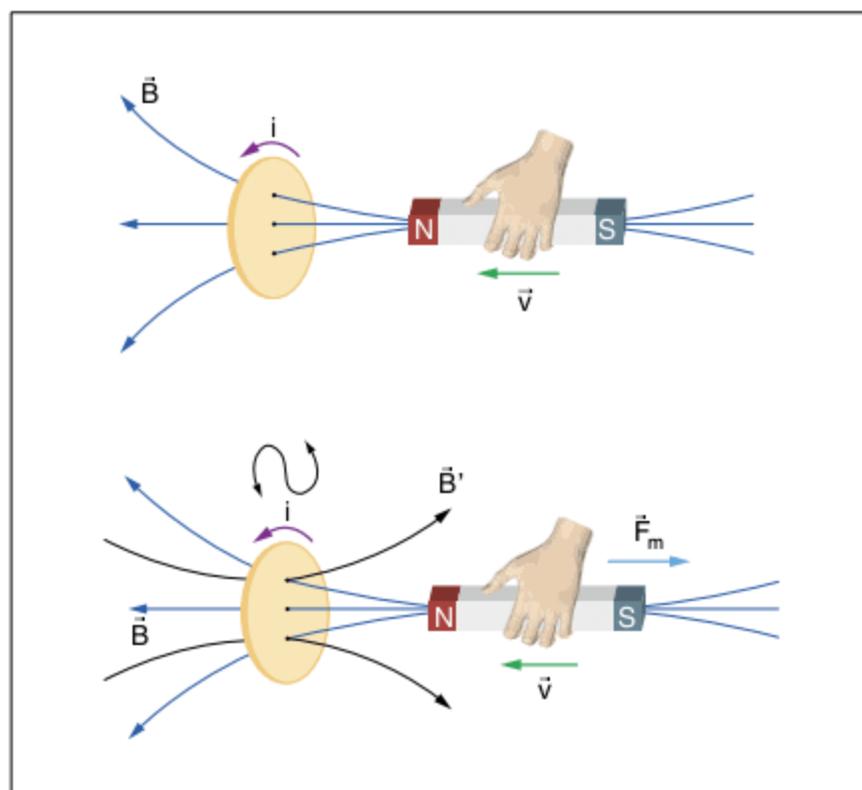


Fig. 22 Utilização da Lei de Lenz.

Ao aproximarmos o polo norte do ímã da espira, pela Lei de Lenz, a corrente induzida será tal que se oporá às causas que lhe deram origem. Como ela fará isso? Basta pensarmos

que a corrente induzida será tal que irá gerar, na face da espira voltada para o ímã, um campo magnético induzido  $\vec{B}'$  que fará aparecer uma força  $\vec{F}$  que contrarie a aproximação do ímã, ou seja, irá aparecer um polo norte na face da espira voltada para o ímã, sendo a corrente vista, nesta face, em sentido anti-horário.

Da mesma forma, se afastarmos o ímã da espira, a corrente será tal que tentará trazê-lo de volta, ou seja, aparecerá, na face da espira voltada para o ímã, um polo sul, sendo a corrente vista, nesta face, em sentido horário.

O raciocínio é idêntico se o lado do ímã voltado para a espira for o polo sul magnético.

## ATENÇÃO!

Da eletrodinâmica vimos que, para que haja corrente elétrica, é necessário energia; dessa forma, a energia necessária para o surgimento da corrente na espira vem do trabalho realizado para se ter o movimento relativo entre espira e ímã, já que é necessário fazer uma força contra o campo para mantê-lo. O trabalho realizado para ocasionar esse movimento é dissipado em efeito joule na espira, ou seja, a Lei de Lenz obedece ao princípio de conservação da energia.

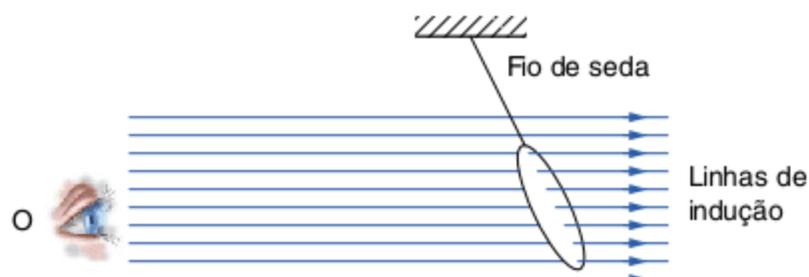
O que foi visto acima é de uso geral, ou seja, em qualquer situação em que seja necessária a utilização da Lei de Lenz, basta observarmos os seguintes passos:

- Verificar o sentido das linhas de indução no induzido.
- Observar se o movimento relativo está fazendo com que a intensidade do fluxo no induzido aumente ou diminua.

Com isso, o sentido da corrente induzida será aquele que tenderá a se opor a essas causas, ou seja, enfraquecer fluxos que aumentam com o tempo ou fortalecer fluxos que diminuem com o tempo.

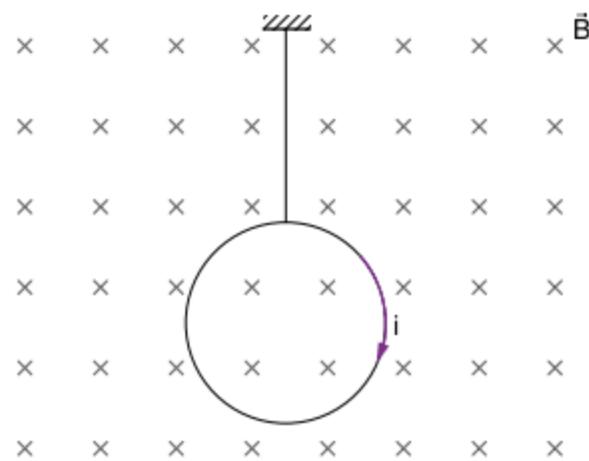
### Exercício resolvido

**4** Uma espira circular oscila como um pêndulo em um campo magnético uniforme, conforme mostra a figura. Qual é o sentido da corrente induzida na espira, durante seu movimento de subida, quando vista pelo observador O? Justifique sua resposta.



#### Resolução:

Inicialmente, analisaremos o problema a partir do ponto de vista do observador, conforme mostra a figura:



Na subida, a espira está penetrando no plano do papel. Aplicamos, então, os passos da utilização da Lei de Lenz:

- Verificamos o sentido das linhas de indução no induzido: para dentro do plano do papel.
- Observamos o movimento relativo da espira dentro do campo: o movimento da espira na subida diminui o fluxo através dela, pois cada vez menos linhas de fluxo penetram na espira.
- Consequentemente, a corrente induzida tenderá a gerar um fluxo que aumente o fluxo que diminuiu. Isso acontece se, na espira, circular uma corrente no sentido horário (verifique pela regra da mão direita). Essa corrente gerará um vetor indução magnética para dentro do plano do papel, tendendo a fortalecer o fluxo original que diminuiu com o tempo.

## Lei de Faraday-Neumann

Antes de entrarmos propriamente na formalização matemática da Lei de Faraday-Neumann, vamos inicialmente considerar um fio condutor retilíneo de comprimento  $\ell$ , perpendicular a um campo magnético uniforme, inicialmente em repouso, conforme a figura 23.

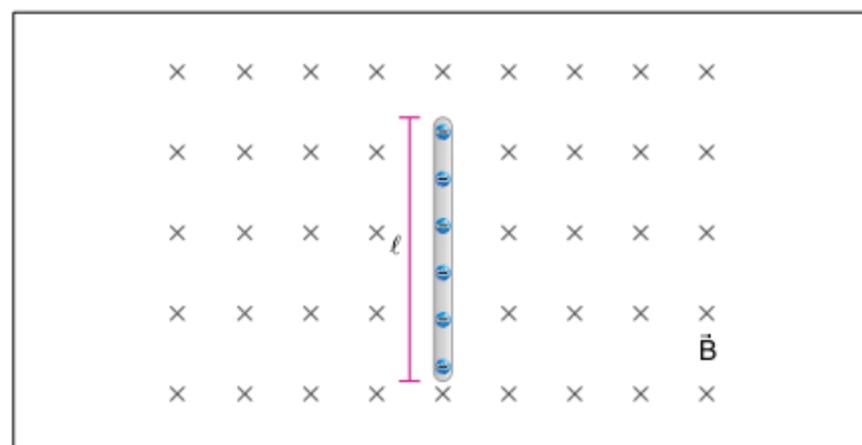


Fig. 23 Condutor retilíneo imerso em um campo magnético.

Nesse caso, os elétrons livres do condutor estão em repouso, e, portanto, nenhuma força magnética age sobre eles.

Se, no entanto, movimentarmos esse fio com velocidade  $\vec{v}$ , perpendicular ao campo magnético, irá aparecer uma força magnética que irá polarizar o fio. Veja a figura 24.

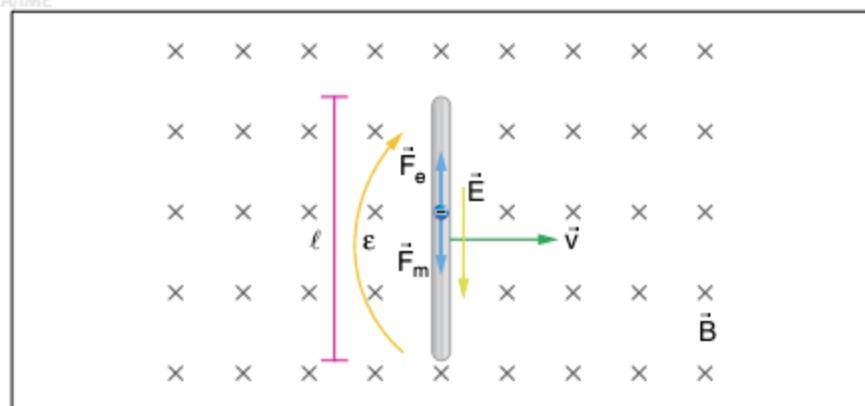


Fig. 24 Condutor retilíneo imerso em um campo magnético deslocando-se com velocidade  $v$ .

Se continuarmos esse movimento, chegaremos ao ponto em que a força magnética, que age sobre os elétrons do fio, será igual à força de repulsão de coulomb, causada pelo campo elétrico gerado pela polarização deste, assim sendo, podemos escrever que:

$$\vec{F}_m = \vec{F}_e$$

$$B \cdot q \cdot v = q \cdot E$$

Se pensarmos que o campo elétrico no interior do fio é uniforme, podemos escrever que:

$$\varepsilon = E \cdot \ell,$$

onde  $\ell$  é o comprimento do fio, e  $\varepsilon$  é a força eletromotriz que surge no fio. Assim, temos que:

$$B \cdot v = \frac{\varepsilon}{\ell}, \text{ ou } \varepsilon = B \cdot \ell \cdot v$$

De acordo com o discutido anteriormente, a fem surge quando há uma variação temporal do fluxo do vetor indução magnética. Matematicamente, esta lei, conhecida como Lei de Faraday-Neumann, pode ser escrita como:

$$\varepsilon = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi_B}{\Delta t} = - \frac{d\phi_B}{dt}$$

Onde  $\varepsilon$  é força eletromotriz instantânea gerada no induzido, e  $\phi_B$  é o fluxo através do induzido.

Podemos ainda definir a força eletromotriz média pela expressão abaixo:

$$\varepsilon_m = - \frac{\Delta \phi_B}{\Delta t}$$

Se a variação do fluxo for constante, teremos o caso onde a força eletromotriz  $\varepsilon$  coincide com a  $\varepsilon_m$ .

Duas coisas nos saltam aos olhos, a primeira é o sinal negativo na expressão, este sinal se deve à Lei de Lenz, já que a força eletromotriz induzida que gerará a corrente induzida deve se opor à variação do fluxo que lhe deu origem.

A outra, já vista na análise qualitativa feita no início do capítulo, é que, quanto mais rápida for a variação do fluxo, maior será a força eletromotriz induzida.

Para se confirmar o resultado obtido anteriormente, para o condutor retilíneo se movimentando em um campo magnético uniforme, consideremos um condutor retangular imerso perpendicularmente a um campo magnético, onde um dos lados pode deslizar sem atrito ao longo do mesmo, com velocidade constante  $\vec{v}$ , conforme veremos na figura 25.

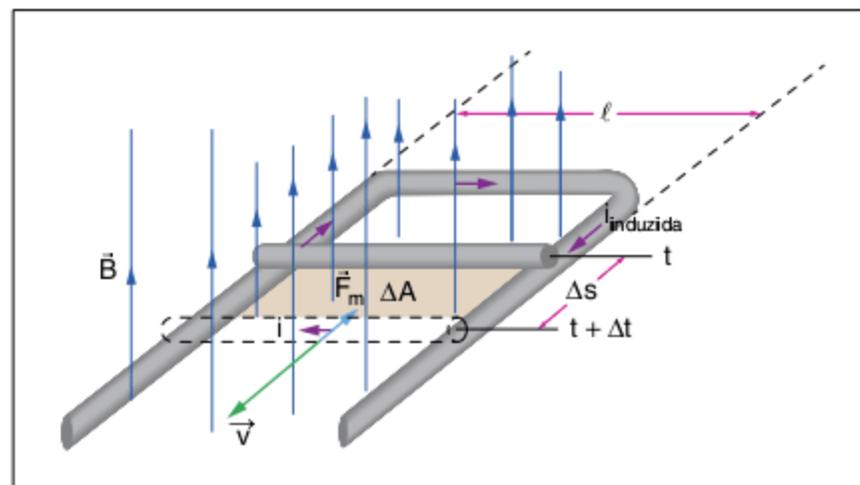


Fig. 25 Espira retangular imersa em campo magnético.

Percebemos que, dentro do plano definido pelo condutor, há uma variação do fluxo ocasionada pela variação da área, ou seja:

$$\Delta \phi_B = B \cdot \Delta A$$

mas

$$\Delta A = \ell \cdot \Delta s$$

onde  $\Delta s = v \cdot \Delta t$ , assim, temos:

$$\Delta \phi_B = B \cdot \ell \cdot v \cdot \Delta t$$

Aplicando-se a Lei de Faraday-Neumann, temos que:

$$\varepsilon = - \frac{\Delta \phi_B}{\Delta t} = - \frac{B \cdot \ell \cdot v \cdot \Delta t}{\Delta t} = -B \cdot \ell \cdot v$$

Resultado esse que confere com o resultado obtido anteriormente.

Nesse caso, o sentido da corrente pode ser obtido através da Lei de Lenz, utilizando-se os passos descritos anteriormente. Assim, temos de:

- verificar o sentido das linhas de indução no induzido:* Percebemos que as linhas de indução no induzido estão dirigidas para cima verticalmente.
- observar se o movimento relativo está fazendo com que a intensidade do fluxo aumente ou diminua:* Percebemos que o deslizamento do lado do condutor está aumentando a área exposta ao campo e, portanto, causando um aumento do fluxo.

Portanto, a corrente induzida será tal que causará um campo magnético dirigido para baixo, para tentar se opor a um aumento do fluxo. Pela regra da mão direita envolvente, percebemos que o sentido da corrente, olhando o condutor retangular por cima, deve ser horário.

## ATENÇÃO!

É importante perceber que uma força magnética constante irá se opor ao movimento do lado condutor, pois se isso não acontecesse, haveria corrente sendo produzida do nada. Dessa forma, o trabalho realizado para se movimentar o lado que desliza é dissipado por efeito joule no condutor. Se quisermos aumentar a velocidade, e com isso a corrente, será necessária uma força maior, já que a força magnética aumentará devido a esse aumento da corrente.

## Indutância

No capítulo 6, citamos os capacitores como dispositivos capazes de gerar no seu interior um campo elétrico no qual é possível armazenar energia potencial elétrica.

Os solenoides são dispositivos capazes de gerar no seu interior um campo magnético uniforme. Será possível, então, armazenar energia no campo magnético? A resposta é sim. Estes dispositivos capazes de criar no seu interior campos magnéticos são denominados indutores, do qual o solenoide faz parte. O indutor ( $L$ ) é representado pelo símbolo:



É muito interessante observarmos essas simetrias e paralelismos da natureza.

O indutor está para o magnetismo assim como o capacitor está para a eletricidade. Observe a figura 26.

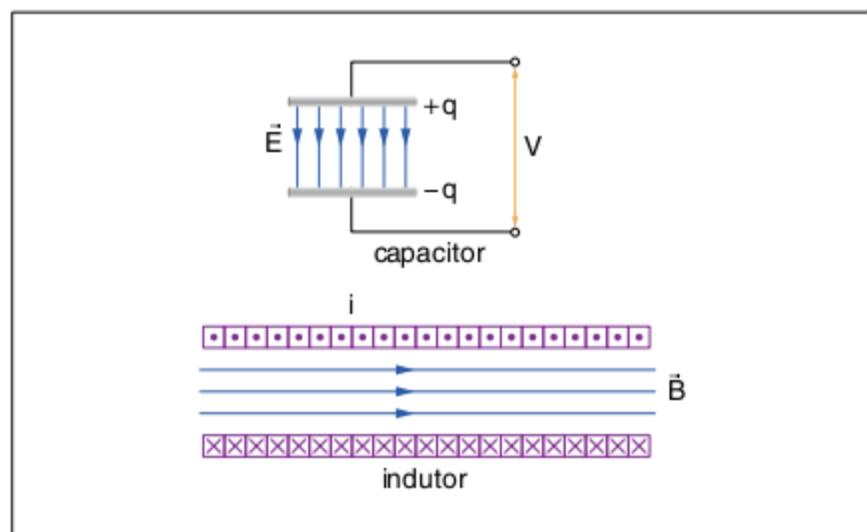


Fig. 26 Analogia entre o capacitor e o indutor.

Da mesma forma que na eletricidade, a indutância de um indutor depende somente da sua geometria e do meio que o preenche. Definamos então a indutância de um indutor:

$$L = \frac{n\phi_B}{i}$$

Nesta equação,  $n$  é o número de espiras,  $\phi_B$  é o fluxo magnético e  $i$  é a corrente elétrica que percorre o indutor. O produto  $n \cdot \phi_B$  é chamado de **fluxo concatenado**.

A unidade de indutância no sistema internacional é o H (henry), em homenagem a Joseph Henry, coautor da Lei de indução e contemporâneo de Faraday.

$$1 \text{ H} = 1 \frac{\text{T} \cdot \text{m}^2}{\text{A}}$$

Como exemplo da utilização da expressão acima, vamos calcular a indutância de um solenoide.

O campo magnético  $B$ , no interior de um solenoide de área  $A$ , é dado por:

$$B = \mu \cdot \frac{n}{\ell} \cdot i$$

Assim sendo, o fluxo em cada espira é dado por:

$$\phi_B = B \cdot A = \mu \cdot \frac{n}{\ell} \cdot i \cdot A$$

E o fluxo concatenado é dado por:

$$n \cdot \phi_B = n \cdot \mu \cdot \frac{n}{\ell} \cdot i \cdot A = \frac{n^2 \mu i A}{\ell}$$

Finalmente, a indutância é calculada como:

$$L = \frac{n \cdot \phi_B}{i} = \frac{n^2 \mu i A}{i \ell} = \frac{n^2 \mu A}{\ell}$$

Observa-se, através da análise da equação acima, que a indutância, similarmente à capacitância, depende somente da geometria do indutor e do meio que o preenche.

O cálculo da indutância equivalente é feito similarmente ao da resistência equivalente, ou seja:

- se há  $n$  indutores  $L_i$  em série, a indutância equivalente é calculada somando-se as indutâncias de todos os indutores:

$$L_{eq} = \sum_{i=1}^n L_i$$

- se há  $n$  indutores  $L_i$  em paralelo, o inverso da indutância equivalente é igual ao somatório dos inversos das indutâncias de todos os indutores:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i}$$

### Exercício resolvido

**5** Um solenoide é enrolado com uma única camada de fio de cobre isolado (diâmetro = 2,5 mm). Ele tem 4,0 cm de diâmetro e 1,0 m de comprimento.

- Quantas espiras possui o solenoide?
- Qual é a indutância, por metro de comprimento, na região central do solenoide?

Suponha que as espiras sejam adjacentes e se toquem e que a espessura do isolamento seja desprezível.

#### Resolução:

- Como as espiras estão justapostas, há uma espira a cada diâmetro do fio, dessa forma, o número de espiras será dado dividindo-se o comprimento total pelo diâmetro:

$$n = \frac{\ell}{d} = \frac{1}{2,5 \cdot 10^{-3}} = 400 \text{ espiras}$$

- Utilizando-se da expressão calculada anteriormente para a indutância do solenoide, tem-se:

$$L = \frac{400^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \pi (4 \cdot 10^{-2})^2}{\ell} \cong \frac{1 \text{ mH}}{\ell}$$

Como o comprimento é de um metro, tem-se que a indutância por unidade de comprimento é tal que:

$$\frac{L}{\ell} \cong \frac{1 \text{ mH}}{1 \text{ m}} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ H/m}$$

### Autoindução

Em circuitos que envolvem capacitores, observa-se que, ao ligarmos um capacitor e um resistor em série com uma bateria, o circuito demora certo tempo para atingir o seu estado de equilíbrio. Isso se deve ao fato de que capacitores não “toleram” variações bruscas de tensões, devido à energia armazenada no seu campo elétrico que tende a manter o fluxo do campo elétrico constante.

Em circuitos que envolvem indutores, o comportamento é semelhante, ou seja, ao ligarmos um indutor e um resistor em série com uma bateria, o circuito também demora certo tempo para atingir o seu estado de equilíbrio. Aqui, o indutor não “tolera” variações bruscas de corrente, pois, devido à sua indutância, ele faz surgir uma fem induzida contrária à variação de fluxo que a bateria impõe ao circuito.

Essa explicação é facilmente entendida se lançarmos mão das equações já vistas.

Da Lei de Faraday, para o caso mais geral, onde temos  $n$  espiras, podemos escrever que:

$$\varepsilon = -\frac{d(n\phi_B)}{dt}$$

Mas, da definição de indutância, podemos escrever que:

$$n \cdot \phi_B = L \cdot i$$

Supondo-se a indutância constante, temos que:

$$\varepsilon = -L \frac{di}{dt}$$

Essa equação nos diz que em um circuito com indutores, caso haja uma variação temporal na corrente, surgirá uma fem induzida opondo-se a essa variação de corrente.

Assim, se a corrente estiver aumentando com o tempo (quando ligamos a chave), a força eletromotriz induzida se oporá a esta subida da corrente, fazendo com que demore um período de tempo para que a corrente atinja o seu valor de equilíbrio. O mesmo vale para quando levamos a fonte de tensão a zero. A corrente demorará a cair a zero em um certo período de tempo devido à fem induzida gerada no indutor.

Para ilustrar o explicado acima, as figuras a seguir mostram o circuito e a tela de um equipamento utilizado para se mostrar as tensões em função do tempo nos terminais de um indutor e um resistor ligados em série com uma bateria que fornece uma tensão variável entre 2 V e 0 V.

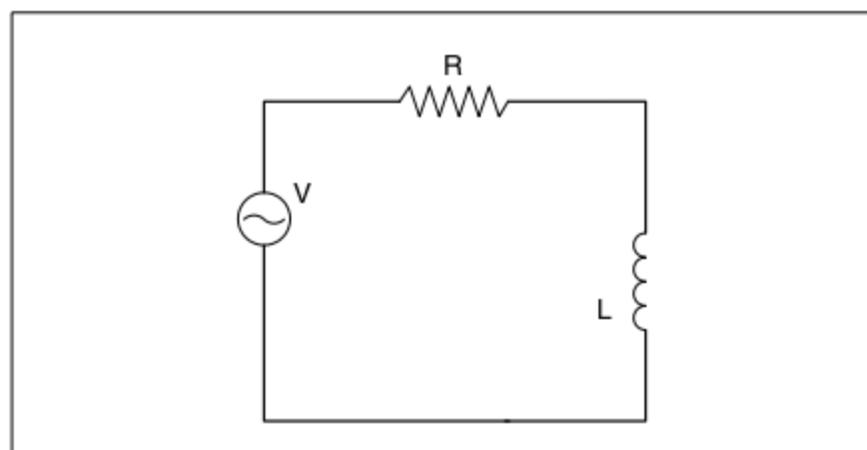


Fig. 27 Circuito resistor-indutor(RL).

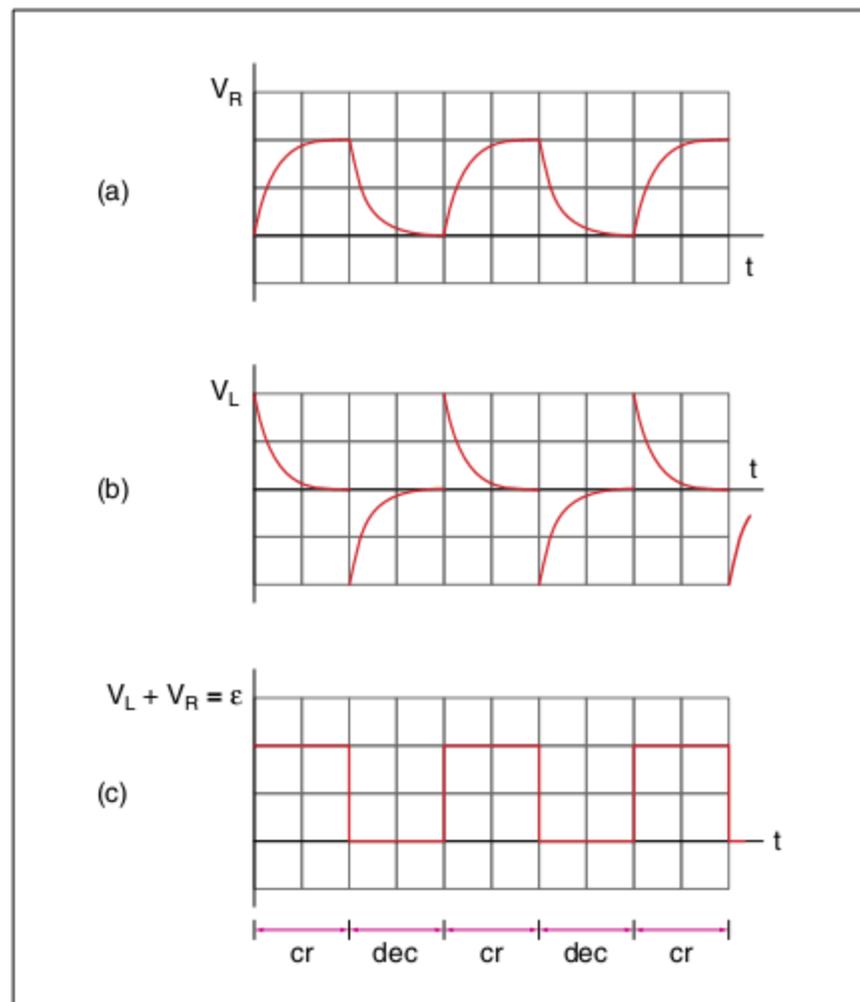


Fig. 28 Tela de um osciloscópio mostrando a variação da tensão com o tempo.

### ATENÇÃO!

Figura 28, (a) da diferença de potencial  $V_R$  entre os extremos do resistor, (b) da diferença de potencial  $V_L$  entre os extremos do indutor e (c) da fem  $\varepsilon$  aplicada ao circuito.

O fenômeno da autoindução leva-nos a crer que existe uma energia armazenada no campo magnético do indutor. Pois, caso contrário, como poderia circular corrente pelo circuito após a fonte ter sido levada a zero volts?

De fato, da mesma forma que a energia armazenada entre as placas de um capacitor depende da carga armazenada e da capacitância, tal que:

$$E_{\text{capacitor}} = \frac{Q^2}{2C} \text{ (J)}$$

a energia armazenada no interior de um indutor depende somente da corrente que o circula e da sua indutância, tal que:

$$E_{\text{indutor}} = \frac{1}{2} L \cdot i^2 \text{ (J)}$$

Dessa forma, não é muito seguro desligar instantaneamente motores onde circulam altas correntes, pois a força eletromotriz induzida pode ser capaz de provocar uma descarga elétrica mortal para o operador.

### Exercício resolvido

**6** Uma bobina de indutância igual a 10 H e resistência igual a 40 Ω é ligada a uma bateria de 200 V. Qual o valor da energia acumulada no campo magnético após a corrente ter atingido o seu valor máximo?

**Resolução:**

A corrente máxima é a própria corrente de equilíbrio, tal que:

$$i = \frac{200}{40} = 5 \text{ A}$$

A energia é então calculada através da expressão apresentada anteriormente, assim:

$$E = \frac{1}{2} L \cdot i^2 = \frac{1}{2} 10 \cdot 5^2 = 125 \text{ J}$$

Com o estudo dos indutores, encerra-se a teoria do magnetismo. Você é capaz agora de entender circuitos simples envolvendo resistências, fontes, capacitores e indutores.

### Transformadores

Uma interessante aplicação da indução de Faraday são os transformadores. Um transformador pode ser definido como sendo um dispositivo capaz de alterar a tensão para um valor conveniente para o uso, quer seja para aumentar o valor dessa tensão, quer seja para diminuir esse valor.

Para uma melhor compreensão, suponha que você tenha comprado um equipamento cuja tensão de alimentação seja 110 V AC (Corrente alternada) e que a tensão de alimentação da sua casa seja 220 V AC.

O transformador é uma ótima solução para o seu problema, vejamos como ele funciona.

Considere a figura 29, na qual se vê um bloco de material ferromagnético, que chamaremos núcleo. À esquerda, vê-se um enrolamento de  $n_1$  espiras e, à direita, um enrolamento de  $n_2$  espiras.

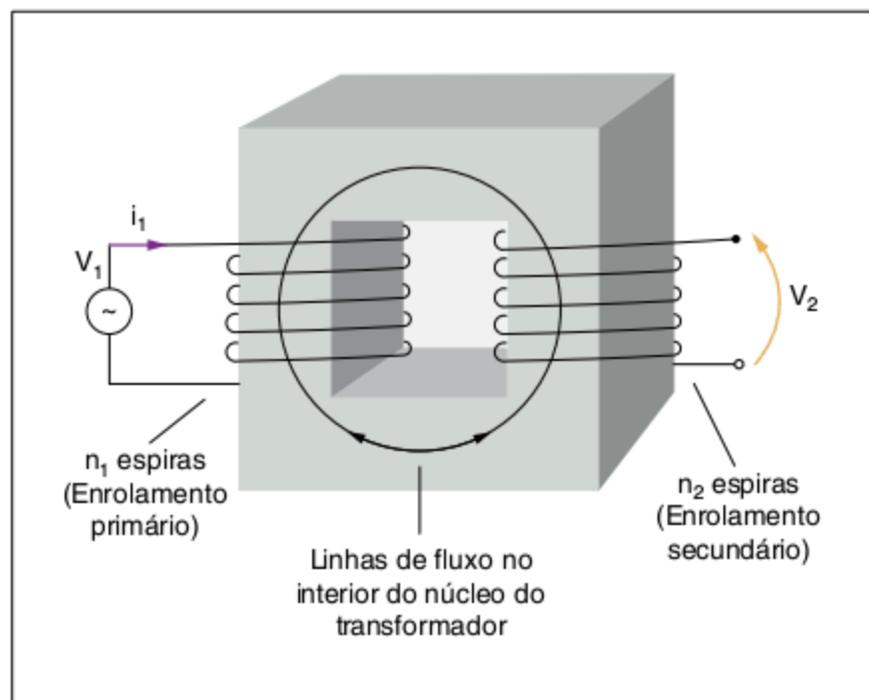


Fig. 29 Bloco de material ferromagnético.

Quando uma tensão alternada  $V_1$  é aplicada no enrolamento da esquerda, que chamaremos primário, surge no seu interior uma variação do fluxo do vetor de indução magnética  $\left(\frac{d\phi_B}{dt}\right)$ , a qual causa nos terminais do primário uma ddp idêntica à  $V_1$ , pois o enrolamento e a tensão de alimentação estão em paralelo, tal que, pela Lei da indução de Faraday:

$$V_1 = -n_1 \cdot \frac{d\phi_B}{dt}$$

Esse fluxo variante é, então, acoplado ao enrolamento da direita, o qual chamaremos secundário, através do núcleo do transformador, e surge nos terminais do secundário uma ddp  $V_2$ , de modo que:

$$V_2 = -n_2 \cdot \frac{d\phi_B}{dt}$$

A situação descrita anteriormente é válida para os transformadores ideais e, igualando as duas equações anteriores, tem-se que:

$$\frac{V_1}{n_1} = \frac{V_2}{n_2} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

A equação acima nos mostra que a relação de transformação é idêntica à relação entre o número de espiras. Assim, para resolvermos o problema do equipamento de 110 V AC, que deve ser ligado a uma tomada de 220 V AC, podemos utilizar um transformador cujo número de espiras no primário é igual a 400 e no secundário é igual a 200.

### ATENÇÃO!

Para o transformador, é importante notar que este dispositivo só funciona com corrente alternada, pois se a corrente fosse contínua, não teríamos um fluxo do vetor indução magnética variante no tempo e, assim, não teríamos ddp nos terminais do primário, nem do secundário. Só teríamos indicação de corrente do secundário nos instantes em que a chave do primário fosse ligada ou desligada.

### Transformação de corrente

Para o transformador ideal, podemos dizer que a potência na entrada é igual à potência na saída. Assim, podemos escrever que:

$$P_{\text{entrada}} = P_{\text{saída}}$$

$$V_1 \cdot i_1 = V_2 \cdot i_2$$

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow \frac{i_1}{i_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Verificamos que a relação de transformação de corrente é a inversa da relação de transformação de tensão.

Novamente, a relação anterior é válida somente para transformadores ideais, já que se considerou que não houve perdas. Para o caso de transformadores reais, devem ser considerados alguns efeitos, que serão analisados a seguir.

SAIBA MAIS

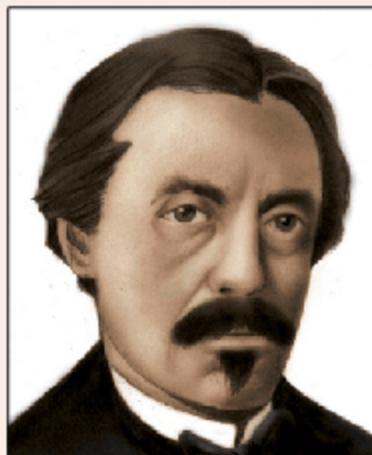


Fig. 30 Jean-Bernard.

Jean-Bernard Léon Foucault, físico francês, nasceu em 18/09/1819, em Paris, França, e faleceu em 11/02/1868, na mesma cidade. Embora tivesse iniciado seus estudos em Medicina, seus interesses voltaram-se principalmente para a Física. Foi capaz de medir a velocidade da luz com extrema precisão. Inventou o pêndulo de Foucault, que forneceu a prova experimental de que a Terra roda em torno do seu eixo. Descobriu também a existência de correntes no interior de discos de cobre que giravam na presença de fortes campos magnéticos. Trabalhou nos primórdios do processamento óptico de sinais, desenvolvendo um método preciso para testar defeitos em superfícies de espelhos usados em telescópios.

As correntes de Foucault são definidas como sendo as correntes que circulam quando blocos maciços de material condutor são expostos à variação do fluxo do vetor indução magnética. Devido ao fato de o bloco ser maciço, a sua resistência elétrica é baixa e, dessa forma, essas correntes têm valor bastante elevado.

Essas correntes podem ser utilizadas em fornos, chamados Fornos de Foucault, e em sistemas de freios, já que a força magnética é sempre oposta ao movimento relativo que lhe deu origem.

No esquema a seguir, observa-se um bloco que executa um movimento oscilatório dentro de uma região onde age um campo magnético.

Na figura 31, o bloco é abandonado no ponto A e entra na região de campo magnético. Nessa situação, há uma corrente induzida, tal que a força magnética que age no bloco se opõe ao movimento do bloco, freando-o. Ao entrar completamente na região de campo magnético, cessa a corrente induzida.

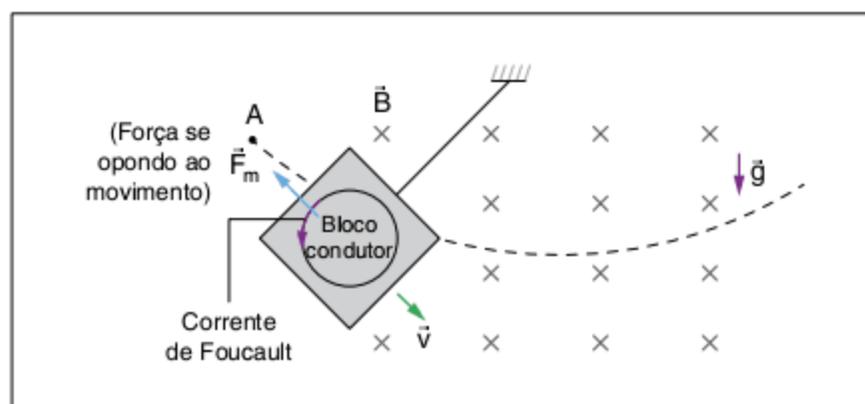


Fig. 31 Bloco condutor entrando na região de campo magnético.

Na figura 32, o bloco é abandonado no ponto A e entra na região de campo magnético. Nessa situação, há uma corrente induzida, tal que a força magnética que age no bloco se opõe ao movimento do bloco, freando-o. Ao entrar completamente na região de campo magnético, cessa a corrente induzida.

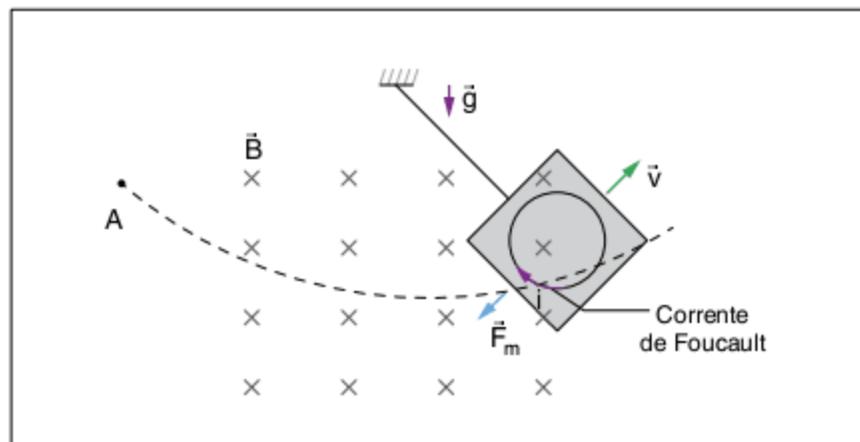


Fig. 32 Bloco condutor saindo da região de campo magnético.

Na figura 32, vê-se o bloco abandonando a região do campo magnético e, novamente, surge uma corrente induzida, sendo o bloco freado por ela.

Conclui-se, dessa forma, que o bloco para mais rapidamente com a presença do campo do que com a sua ausência, ou seja, a energia mecânica do bloco é parcialmente dissipada pelo efeito joule, por causa da presença das correntes de Foucault.

No caso dos transformadores, se o núcleo do transformador fosse maciço, ficaria fácil perceber que teríamos correntes de Foucault circulando no seu interior, ocasionando perdas. A solução para diminuir as perdas é laminar o núcleo do transformador de modo que uma lâmina seja eletricamente isolada da outra.

Assim, teremos um aumento da resistência elétrica, diminuindo as perdas pelas correntes de Foucault.



Fig. 33 Transformador elétrico.

Histerese magnética

Uma outra fonte de perdas é a histerese magnética. No “Texto Complementar” do capítulo 8, foi mostrada a curva de histerese magnética, que é o efeito pelo qual os materiais ferromagnéticos apresentam magnetismo residual. Esses materiais apresentam elevada permeabilidade magnética e a propriedade de fazer com que as linhas de fluxo do vetor de indução magnética circulem no seu interior.

Uma analogia pode ser feita para o melhor entendimento. Imagine que as linhas de fluxo do vetor de indução magnética sejam como uma corrente elétrica. Assim sendo, ao serem criadas no primário, elas podem se fechar passando pelo ar ou passando pelo núcleo e assim se acoplando ao secundário.

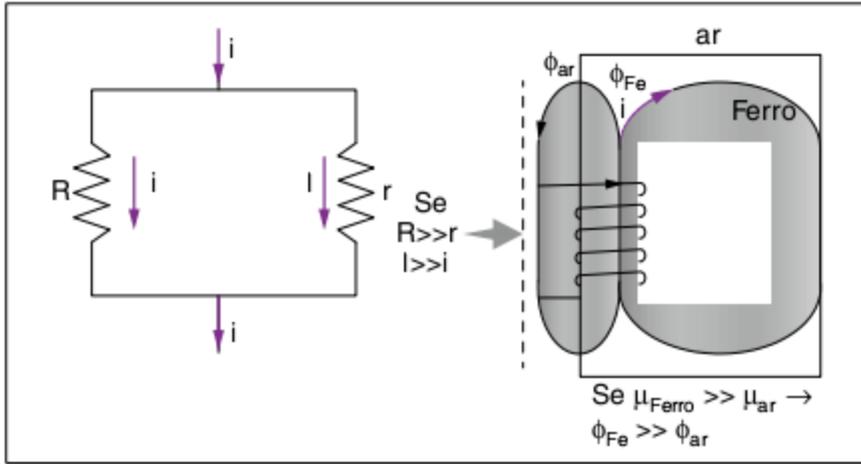


Fig. 34 Comparação entre eletrodinâmica e magnetismo.

É óbvio que se deseja que a grande maioria das linhas de fluxo se acoplem ao secundário circulando pelo núcleo do transformador. Da mesma forma que a corrente elétrica ao chegar

em dois ramos em paralelo de um circuito elétrico passa pelo ramo de menor resistência, as linhas de fluxo optam por circular em um material que possui maior permeabilidade magnética. O preço que se paga é a histerese magnética. Ao se variar o sentido da corrente, é gasta uma quantidade de energia para alterar o sentido dos domínios magnéticos no interior do material.

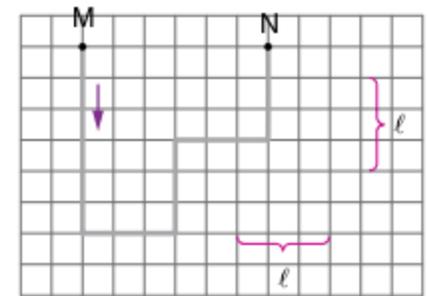
A solução é buscar materiais que apresentem característica que diminuam as perdas por histerese, apresentando simultaneamente elevada permeabilidade magnética.

### Perdas nos enrolamentos

Além disso, existem as perdas elétricas nos enrolamentos do secundário e do primário. Essas perdas são inevitáveis e a solução para diminuir os seus efeitos é utilizar fios de qualidade para diminuir as resistências e dimensioná-los para a potência nominal do transformador.

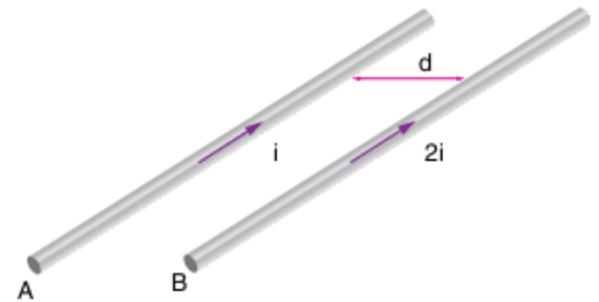
## Revisando

**1 Fuvest (Adapt.)** O condutor MN do esquema ao lado está imerso numa região onde o campo magnético  $\vec{B}$  é uniforme. O condutor, situado no plano desta folha, é percorrido por uma corrente elétrica  $i$ ; o campo magnético  $\vec{B}$  é perpendicular ao plano desta folha, com sentido dirigido para o leitor. Dê o módulo da resultante das forças que agem sobre o condutor devido ao campo magnético  $\vec{B}$ .



**2 UFRGS (Adapt.)** Complete o texto a seguir.

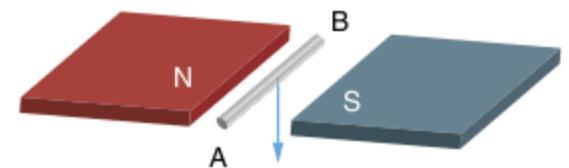
A figura ao lado representa dois fios metálicos paralelos, A e B, próximo um do outro, que são percorridos por correntes elétricas de mesmo sentido e de intensidades iguais a 1 A e 2 A, respectivamente. A força que o fio A exerce sobre o fio B é \_\_\_\_\_ e sua intensidade é \_\_\_\_\_ intensidade da força exercida pelo fio B sobre o fio A.



**3** A figura ao lado representa uma barra metálica AB, horizontal, caindo entre os polos norte e sul de um ímã.

Qual(is) proposição(ões) está(ão) correta(s)?

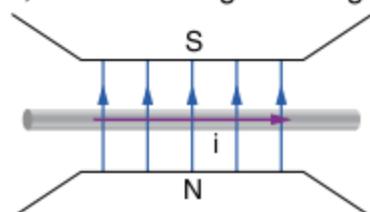
- I. O campo magnético do ímã, no espaço entre os polos, é orientado de N para S.
- II. Os elétrons da barra são deslocados para B.
- III. O potencial elétrico de A será maior que o potencial elétrico de B.



# Exercícios propostos

## Força magnética em fio percorrido por corrente elétrica e submetido ao campo magnético

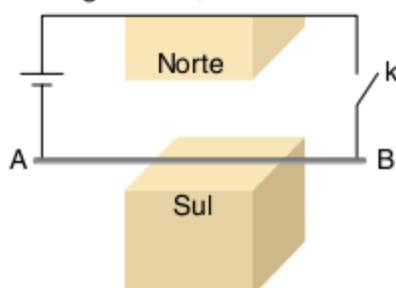
**1 UFRGS** Um fio metálico retilíneo, percorrido por corrente elétrica  $i$ , é colocado entre os polos de um ímã, paralelamente ao plano da página, conforme a figura a seguir.



A força magnética que atua sobre o fio terá:

- (a) direção perpendicular à página, sentido para fora da página.
- (b) direção perpendicular à página, sentido para dentro da página.
- (c) direção e sentido da corrente no fio.
- (d) direção das linhas de indução magnética, sentido contrário.
- (e) direção das linhas de indução magnética, mesmo sentido.

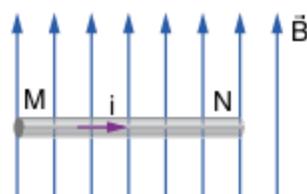
**2 Mackenzie** A barra condutora horizontal AB está suspensa entre dois polos magnéticos, como mostra a figura.



Ao fecharmos a chave  $k$ , observamos que a barra AB:

- (a) não se desloca.
- (b) desloca-se para trás.
- (c) desloca-se para frente.
- (d) desloca-se para a direita.
- (e) desloca-se para a esquerda.

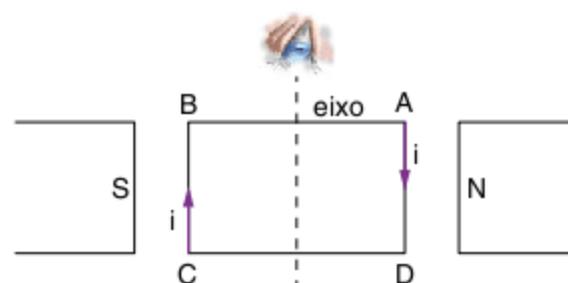
**3 FSC-SP** Um trecho MN de um fio retilíneo, com comprimento de 10 cm, conduzindo uma corrente elétrica de 10 A, está imerso em uma região, no vácuo, onde existe um campo de indução magnética de 1,0 T, conforme a figura.



A força que age no trecho do fio tem intensidade:

- (a) 1,0 N e para dentro do papel.
- (b) 0,5 N e para fora do papel.
- (c) 1,0 N e no sentido do campo.
- (d) 1,5 N e no sentido oposto ao do campo.
- (e) 1,0 N e para fora do papel.

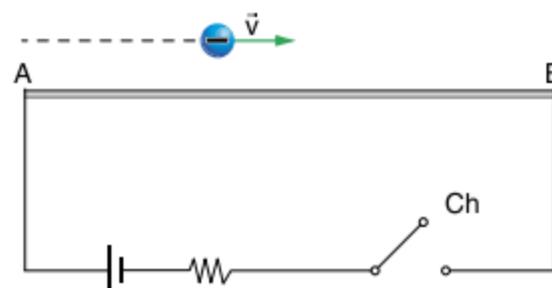
**4 Faap** Uma espira ABCD, suspensa como mostra a figura, pode girar em torno de seu eixo de simetria vertical. Quando ela for percorrida por uma corrente contínua e constante  $i$  em presença do ímã da figura, responda:



- a) Vista de cima, a espira girará no sentido horário ou anti-horário?
- b) Qual será sua posição de equilíbrio? Justifique as respostas.

**5 FEI** Calcule a intensidade da força magnética que age em um condutor de 20 cm, percorrido por corrente elétrica de 10 A, colocado perpendicularmente às linhas de indução de um campo magnético de intensidade 1 T. Indique, em um esquema, a direção e o sentido da força.

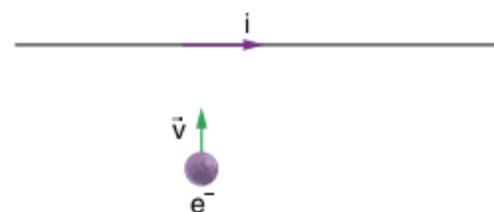
**6** Um elétron desloca-se paralelamente ao fio condutor AB.



Ao se fechar a chave  $Ch$ , o elétron:

- (a) aproxima-se de AB.
- (b) afasta-se de AB.
- (c) continua em trajetória paralela a AB.
- (d) tem velocidade alterada em módulo.
- (e) tem trajetória retilínea perpendicular a AB.

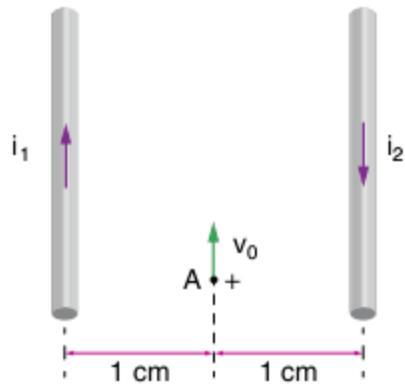
**7 UFU** Um elétron é lançado, com velocidade  $\vec{v}$ , em direção perpendicular a um fio que conduz uma corrente elétrica,  $i$ , conforme mostra a figura.



Imediatamente após o lançamento, o elétron sofre uma força, melhor representada pelo vetor:

- (a)
- (b)
- (c)
- (d)
- (e)

**8 Mackenzie** Dispõe-se de dois condutores infinitos, retilíneos e paralelos, percorridos pelas correntes  $i_1$  e  $i_2$  de intensidades iguais a 10 A e de sentidos contrários. Um próton ( $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C) é “disparado” do ponto A com uma velocidade  $v_0 = 1,0 \cdot 10^6$  m/s seguindo uma direção paralela aos condutores e sobre o plano que os contém.

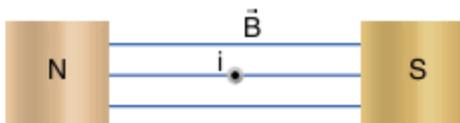


A intensidade da força a que esse próton fica sujeito no instante do disparo é:

Dado:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Tm/A.

- (a) zero. (c)  $6,4 \cdot 10^{-17}$  N (e)  $4,8 \cdot 10^{-17}$  N  
 (b)  $3,2 \cdot 10^{-17}$  N (d)  $1,6 \cdot 10^{-17}$  N

**9** No esquema, representa-se, em seção, um condutor reto (normal ao plano da figura) percorrido por corrente elétrica  $i$  orientada para o observador e imerso no campo de indução  $\vec{B}$ , mantido por um ímã (polos norte N e sul S); as horizontais representam linhas de indução. O campo  $\vec{B}$  exerce no condutor certa força  $\vec{F}$ .



- (a)  $\vec{B}$  é orientado para a esquerda.  
 (b)  $\vec{F}$  é orientada para a esquerda.  
 (c)  $\vec{F}$  é orientada para a direita.  
 (d)  $\vec{F}$  é orientada para cima.  
 (e) nenhuma das anteriores.

**10 Mackenzie** A figura ilustra duas molas flexíveis, condutoras, que sustentam uma haste AB também condutora, de massa 2 g e comprimento 1 m, imersa num campo magnético uniforme perpendicular a ela, de intensidade 1 T, num local onde a aceleração da gravidade é  $10 \text{ m/s}^2$ .



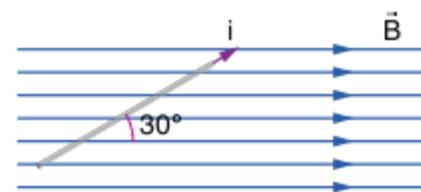
Para que se anulem as trações nos condutores helicoidais (molas), o sentido da corrente na haste e a sua intensidade são, respectivamente:

- (a) de A para B e 0,02 A. (d) de B para A e 0,02 A.  
 (b) de B para A e 0,01 A. (e) de B para A e 0,05 A.  
 (c) de A para B e 0,01 A.

**11 PUC-SP** Dois fios condutores longos, paralelos, imersos no ar e separados por uma pequena distância são percorridos por correntes de intensidades  $i_1$  e  $i_2$ . Pode-se afirmar que:

- (a) irão se atrair, se as correntes tiverem mesmo sentido.  
 (b) irão se repelir, se as correntes tiverem mesmo sentido.  
 (c) não aparece força alguma entre eles, desde que as correntes tenham mesma intensidade e sejam de mesmo sentido.  
 (d) não aparece força alguma entre eles, desde que as correntes tenham sentidos opostos e sejam de mesma intensidade.  
 (e) nenhuma das anteriores.

**12** Um condutor retilíneo de comprimento igual a 50 cm é percorrido por uma corrente elétrica de intensidade igual a 4,0 A. O condutor está totalmente imerso em um campo de indução magnética uniforme de intensidade igual a  $1,0 \cdot 10^{-3}$  T e forma, com as linhas de indução, um ângulo de  $30^\circ$ :



Calcule a intensidade da força magnética atuante no condutor.

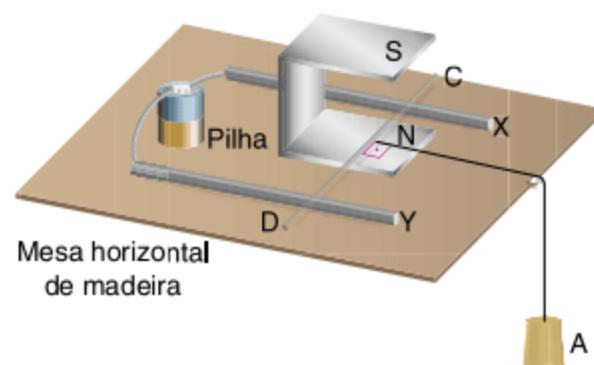
**13** Dois condutores paralelos, AB e CD, são interligados através de uma haste também condutora, que pode girar no plano da figura em torno do ponto D e que contata AB no ponto B. Na região em que se situa a haste, existe um campo magnético perpendicular ao plano dos condutores e apontando para o leitor.



Se uma corrente elétrica de intensidade  $i$  percorrer os condutores no sentido indicado, a tendência da haste será:

- (a) manter-se na posição inicial.  
 (b) girar no sentido horário.  
 (c) girar no sentido anti-horário.  
 (d) subir.  
 (e) descer.

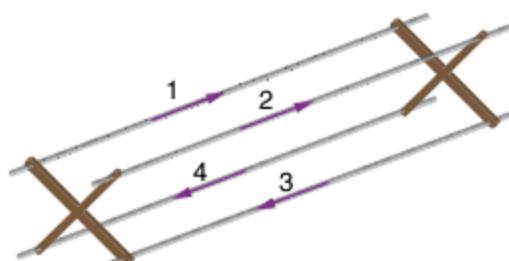
**14** Na figura, o condutor CD está em repouso, apoiado em duas barras condutoras fixas X e Y. Despreze atritos.



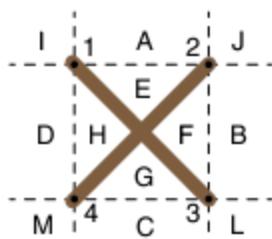
O módulo do vetor indução magnética entre os polos do ímã é  $B = 1 \text{ T}$  e o comprimento do condutor imerso no campo é  $\ell = 10 \text{ cm}$ . Sabendo que o corpo A pesa  $2 \text{ N}$  e que o fio que o suspende ao condutor é ideal, determine:

- o sentido da corrente no condutor.
- a intensidade dessa corrente.

**15 UFSCar** Quatro fios, submetidos a correntes contínuas de mesma intensidade e sentidos indicados na figura, são mantidos separados por meio de suportes isolantes em forma de X, conforme figura.



Observe as regiões indicadas:



Entre dois suportes, os fios 1, 2, 3 e 4 tendem a se movimentar, respectivamente, para as seguintes regiões do espaço:

- A; A; C; C.
- E; E; G; G.
- D; B; B; D.
- A; B; C; E.
- I, J; L; M.

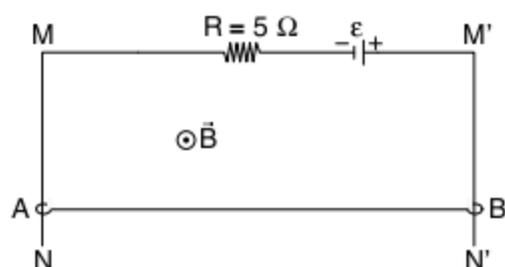
**16** O toca-fitas de um automóvel é alimentado por uma bateria de  $12 \text{ V}$ , através de um par de fios percorridos por uma corrente elétrica de  $2,0 \text{ A}$ . Os dois fios estão separados pela distância de  $2,0 \text{ mm}$ .



Admitindo  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$ :

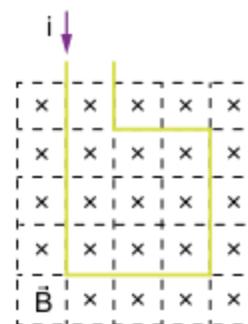
- calcule a intensidade da força magnética por centímetro de condutor.
- diga se a força é de atração ou de repulsão.

**17** No esquema da figura, a barra AB tem resistência  $R = 5 \Omega$ , peso de módulo  $P = 20 \text{ N}$  e comprimento  $\ell = 1 \text{ m}$ . Essa barra faz contato sem atrito com dois trilhos verticais MN e M' N', perfeitamente condutores. Perpendicularmente ao plano dos trilhos, existe um campo de indução magnética uniforme de intensidade  $B = 0,5 \text{ T}$ .



Sabendo que a barra AB mantém-se em repouso, determine a força eletromotriz  $\epsilon$  do gerador.

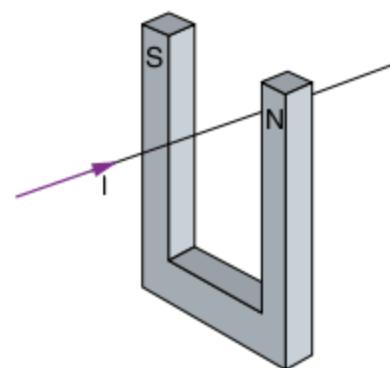
**18 Unifesp** Na região quadriculada da figura existe um campo magnético uniforme, perpendicular ao plano do reticulado e penetrando no plano da figura. Parte de um circuito rígido também passa por ela, como ilustrado na figura



A aresta de cada célula quadrada do quadrilátero tem comprimento  $u$ , e pelo fio passa uma corrente elétrica de intensidade  $i$ . Analisando a força magnética que age sobre cada elemento de comprimento  $u$  do fio do circuito, coincidente com a aresta das células quadradas, a intensidade da força magnética resultante sobre a parte do circuito exposta ao campo  $\vec{B}$  é:

- nula.
- $\frac{iBu}{2}$
- $iBu$ .
- $3iBu$ .
- $13iBu$ .

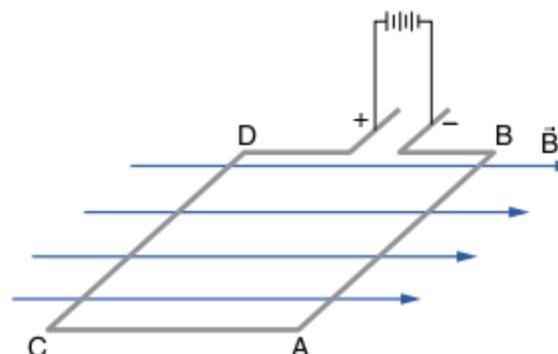
**19 UFSJ 2011** Considere a figura a seguir, que representa um fio condutor retilíneo longo conduzindo uma corrente  $I$  que atravessa o interior de um ímã em forma de U. Os polos norte e sul do ímã encontram-se indicados pelas letras N e S, respectivamente.



Devido à presença do campo magnético do eletroímã, o fio sofrerá a ação de uma força magnética, agindo:

- da direita para a esquerda da figura.
- de cima para baixo da figura.
- da esquerda para a direita da figura.
- de baixo para cima da figura.

**20 Unifesp** A figura mostra uma espira retangular imersa em um campo magnético uniforme, elemento básico de um motor elétrico de corrente contínua.



O plano da espira é paralelo ao vetor campo magnético. A extremidade da espira junto ao ponto D está ligada ao polo positivo da bateria e a extremidade B, ao polo negativo; a corrente percorre o circuito no sentido de D para B.

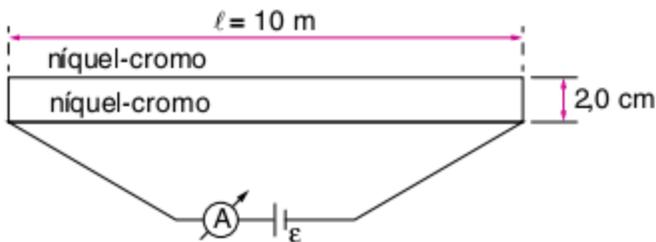
São dados:

- intensidade da corrente que percorre a espira:  $i = 0,80 \text{ A}$ ;
- resistência do fio no trecho DCAB:  $R = 2,5 \Omega$
- módulo do vetor campo magnético:  $B = 0,50 \text{ T}$ ;
- comprimento dos lados da espira:  $AB = CD = 0,050 \text{ m}$ .

Determine:

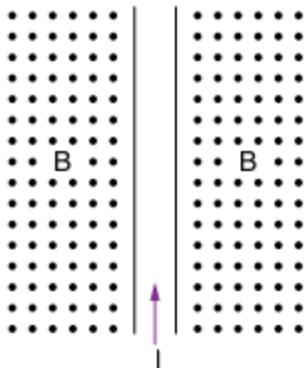
- a) a diferença de potencial entre os pontos D e B.
- b) o módulo da força magnética que atua em um dos lados, AB ou CD.

**21 Unifesp** Para demonstrar a interação entre condutores percorridos por correntes elétricas, um professor estende paralelamente dois fios de níquel-cromo de 2,0 mm de diâmetro e comprimento  $\ell = 10 \text{ m}$  cada um, como indica o circuito seguinte.



- a) Sendo  $\rho_{\text{Ni-Cr}} = 1,5 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$  a resistividade do níquel-cromo, qual a resistência equivalente a esse par de fios paralelos? (Adote  $\pi = 3$ )
- b) Sendo  $i = 2,0 \text{ A}$  a leitura do amperímetro A, qual a força de interação entre esses fios, sabendo que estão separados pela distância  $d = 2,0 \text{ cm}$ ? (Considere desprezíveis as resistências dos demais elementos do circuito.)  
Dada a constante de permeabilidade magnética:  
 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$ .

**22 Unifei** Um fio que transporta uma corrente elétrica  $I$  é colocado numa região de campo magnético uniforme  $\vec{B}$  dirigido para fora da página (vide figura).

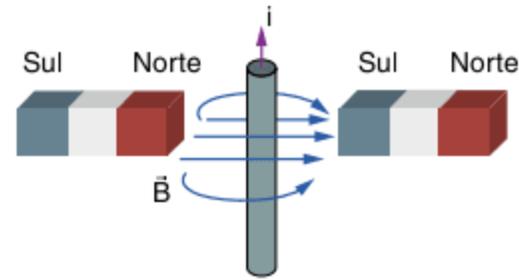


A força resultante sobre o fio é:

- (a) nula.
- (b) dirigida para a esquerda.
- (c) dirigida para a direita.
- (d) entrando no plano do papel.

**23 UFSC** O magnetismo e a eletricidade estão intimamente relacionados. A experiência mostra que poderá ser exercida uma força magnética sobre uma carga móvel que se desloca nas

proximidades de um campo magnético  $\vec{B}$ . A figura representa um fio condutor reto conduzindo uma corrente elétrica de intensidade  $i$ , posicionado entre os polos de um par de ímãs.

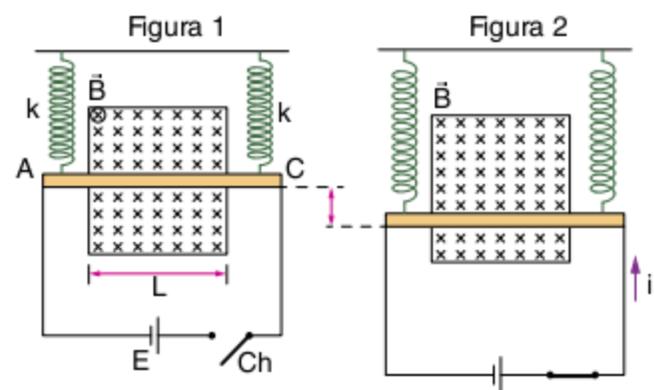


Assinale a(s) proposição(ões) correta(s).

- 01 Sobre o fio atuará uma força magnética no sentido da corrente.
- 02 Sobre o fio atuará uma força proporcional à intensidade da corrente.
- 04 Sobre o fio atuará uma força magnética horizontal, no sentido do polo norte para o polo sul.
- 08 Mesmo que a corrente seja muito intensa, não haverá força magnética aplicada sobre o fio condutor.
- 16 Se a corrente elétrica tiver o sentido invertido ao mostrado na figura acima, a força será nula.
- 32 Duplicando os valores da intensidade da corrente elétrica  $i$  e do campo magnético  $\vec{B}$ , a força magnética será quatro vezes maior.

Soma =

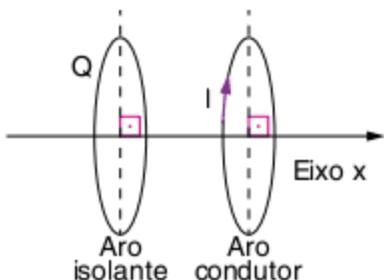
**24 UFABC** Uma barra metálica AC de massa desprezível está presa ao teto por duas molas ideais isolantes e idênticas de constante elástica  $k = 36 \text{ N/m}$ , inicialmente sem deformação. A barra é mantida na horizontal e está ligada a um gerador de força eletromotriz  $\mathcal{E} = 120 \text{ V}$  com resistência interna desprezível. Uma chave Ch aberta impede a passagem de corrente pelo circuito. Parte da barra está imersa numa região quadrada de lado  $L = 20 \text{ cm}$ , onde atua um campo magnético horizontal uniforme de intensidade  $B = 0,3 \text{ T}$ , perpendicular ao plano da figura e com sentido para dentro dela (Figura 1).



Ao fecharmos a chave Ch, uma corrente de intensidade  $i$  passa a circular e, devido à ação do campo magnético, surge uma força na barra, causando nessa um deslocamento vertical  $x$  (Figura 2). Sabendo que a resistência elétrica total desse circuito vale  $R = 2 \Omega$  e desconsiderando o campo magnético da Terra, determine  $x$ .

**25 UFMA** Dois aros de mesmas dimensões estão dispostos de acordo com a figura abaixo. Ambos estão com seus planos perpendiculares ao eixo  $x$  e em equilíbrio mecânico. Um dos aros

é isolante e contém uma carga  $Q$  uniformemente distribuída. O outro aro é condutor e por ele circula uma corrente constante  $I$ .



É correto afirmar que:

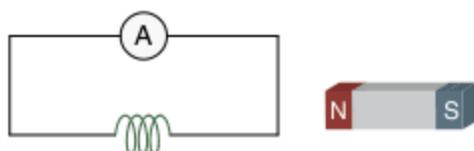
- (a) se a carga  $Q$  for positiva e o aro isolante girar em torno do eixo  $x$  no mesmo sentido da corrente  $I$ , os aros se atrairão.
- (b) se a carga  $Q$  for positiva e o aro isolante girar em torno do eixo  $x$  no mesmo sentido da corrente  $I$ , os aros se repelirão.
- (c) se a carga  $Q$  for negativa e o aro isolante girar em torno do eixo  $x$  no sentido contrário da corrente  $I$ , os aros se repelirão.
- (d) se a carga  $Q$  for negativa e o aro isolante girar em torno do eixo  $x$  no mesmo sentido da corrente  $I$ , os aros se atrairão.
- (e) não existirá nenhuma força de repulsão ou de atração entre os aros se o aro isolante girar.

### Lei da indução de Faraday – Lei de Lenz

**26** Para que ocorra o fenômeno de indução eletromagnética, é suficiente que:

- (a) exista um campo magnético em regiões próximas do observador.
- (b) uma corrente elétrica contínua produza um campo magnético.
- (c) ocorra a variação de um fluxo magnético através de uma bobina.
- (d) cargas elétricas, em número constante por segundo, atravessem o circuito.
- (e) cargas elétricas interajam com campos elétricos.

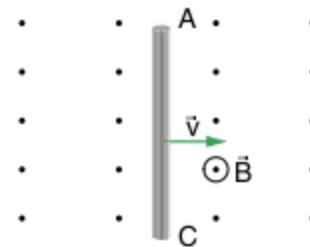
**27 UFMG** A figura a seguir mostra um ímã próximo a um circuito constituído por uma bobina e um medidor sensível de corrente. Colocando-se a bobina e o ímã em determinados movimentos, o medidor poderá indicar passagem de corrente na bobina.



Não haverá indicação de passagem de corrente pelo medidor quando:

- (a) o ímã e a bobina se movimentam, aproximando-se mutuamente.
- (b) a bobina se aproxima do ímã, que permanece parado.
- (c) o ímã se desloca para a direita e a bobina para a esquerda.
- (d) o ímã e a bobina se deslocam ambos para a direita, com a mesma velocidade.
- (e) o ímã se aproxima da bobina e esta permanece parada.

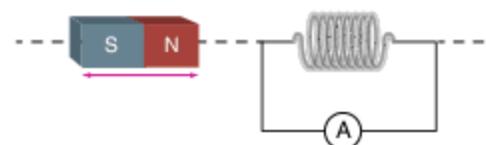
**28 Mackenzie** Uma barra condutora movimenta-se para a direita, com velocidade  $\vec{v}$ , num campo magnético  $\vec{B}$  perpendicular ao plano da figura, orientado para o observador.



As cargas negativas da barra sofrem a ação de uma força:

- (a) de sentido de C para A.
- (b) de sentido de A para C.
- (c) no sentido de  $\vec{v}$ .
- (d) no sentido de  $\vec{B}$ .
- (e) no sentido oposto ao de  $\vec{v}$ .

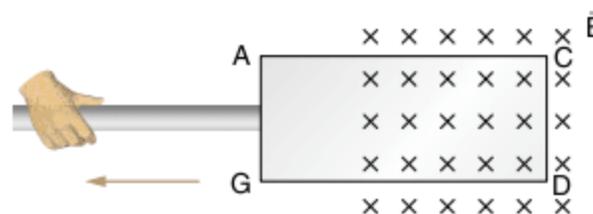
**29 UFG** Um ímã permanente realiza um movimento periódico para frente e para trás, ao longo do eixo de um solenoide, como mostra a figura a seguir.



Esse movimento produz:

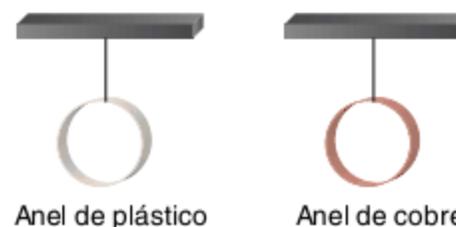
- (a) uma corrente induzida no fio que tem sentido anti-horário para um observador no ímã.
- (b) um fluxo estacionário de campo magnético através das espiras.
- (c) uma corrente contínua no fio que causa dissipação de energia por efeito Joule.
- (d) uma repulsão entre o solenoide e o ímã, quando eles se aproximam, a atração, quando eles se afastam.
- (e) uma força eletromotriz que independe da frequência de oscilação do ímã.

**30 FMIT** A figura a seguir representa a espira ACDG, rígida e condutora, sendo puxada para a esquerda através do campo magnético  $\vec{B}$ , uniforme e constante, normal ao plano da espira e dirigido para dentro desta folha de papel:



Qual o sentido da força magnética atuante no trecho CD da espira?

**31** Em uma aula, o Prof. Antonio apresenta uma montagem com dois anéis dependurados, como representado na figura a seguir. Um dos anéis é de plástico – material isolante – e o outro é de cobre – material condutor.



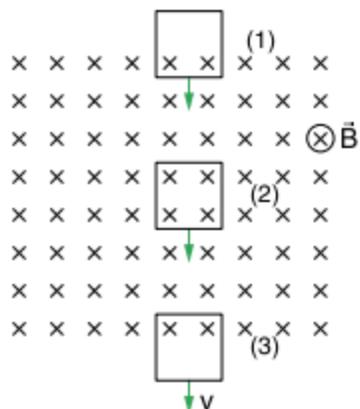
Em seguida, o Prof. Antonio mostra que o anel de plástico e o de cobre não são atraídos nem repelidos por um ímã que está parado em relação a eles.

Ele, então, aproxima rapidamente do ímã, primeiro, o anel de plástico e, depois, o anel de cobre.

Com base nessas informações, é correto afirmar que:

- (a) os dois anéis se aproximam do ímã.
- (b) o anel de plástico não se movimenta e o de cobre se afasta do ímã.
- (c) nenhum dos anéis se movimenta.
- (d) o anel de plástico não se movimenta e o de cobre se aproxima do ímã.

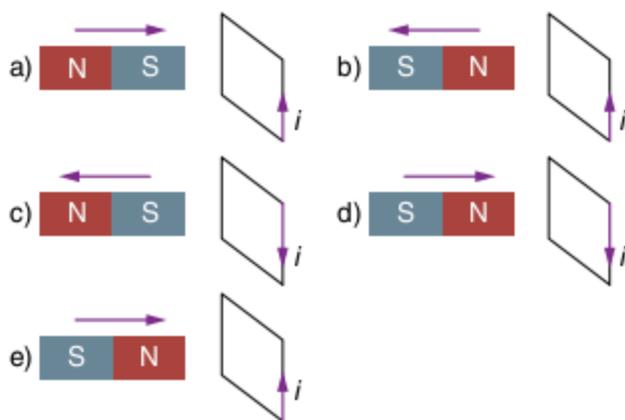
**32 UFRGS** A figura mostra três posições sucessivas de uma espira condutora que se desloca com velocidade constante numa região em que há um campo magnético uniforme, perpendicular à página e para dentro da página. Selecione a alternativa que supre as omissões nas frases seguintes.



- I. Na posição (1), a espira está penetrando na região onde existe o campo magnético e, conseqüentemente, está \_\_\_\_\_ o fluxo magnético através da espira.
- II. Na posição (2), não há \_\_\_\_\_ na espira.
- III. Na posição (3), a corrente elétrica induzida na espira, em relação à corrente induzida na posição (1), tem sentido \_\_\_\_\_.

- (a) aumentando, fluxo, igual
- (b) diminuindo, corrente, contrário
- (c) diminuindo, fluxo, contrário
- (d) aumentando, corrente, contrário
- (e) diminuindo, fluxo, igual

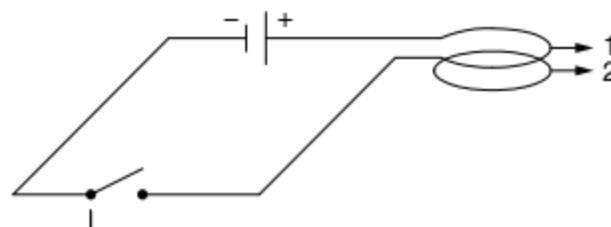
**33 PUC-SP** Aproximando ou afastando um ímã de uma espira condutora retangular, a variação do fluxo de indução magnética determina o aparecimento de uma corrente elétrica induzida  $i$ .



Qual a figura que melhor representa a corrente elétrica induzida?

- (a) A
- (b) B
- (c) C
- (d) D
- (e) E

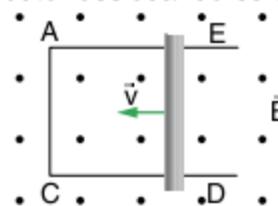
**34 UFPA** Duas espiras de fio condutor estão próximas entre si em planos paralelos. Uma delas (1) é ligada em série a uma bateria com um interruptor (I). A outra (2) é fechada (veja figura).



Com base nestas explicações, podemos afirmar corretamente:

- (a) No instante em que o interruptor é ligado, passa a haver na espira (2) uma corrente de mesmo sentido da espira (1).
- (b) No instante em que o interruptor é ligado, passa a haver na espira (2) uma corrente que muda de sentido periodicamente.
- (c) Algum tempo após a ligação do interruptor, a corrente na espira (2) tem o mesmo sentido da espira (1).
- (d) Algum tempo após a ligação do interruptor, a corrente na espira (2) é nula.
- (e) No instante em que o interruptor é desligado, existe mudança de sentido da corrente que circulava na espira (2).

**35 UFSC** A figura a seguir representa um condutor colocado sob a ação de um campo magnético constante, com uma barra metálica apoiada sobre o condutor deslocando-se com velocidade  $\vec{v}$ .



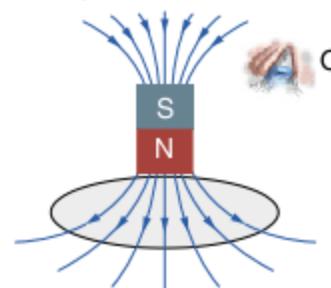
Dadas as afirmativas:

- I. O módulo do fluxo magnético no interior da espira ACDE está diminuindo.
- II. A corrente induzida circula na espira no sentido anti-horário.
- III. A força que atua na barra é perpendicular à velocidade.

Estão corretas:

- (a) somente I.
- (b) somente II.
- (c) somente III.
- (d) duas delas.
- (e) todas.

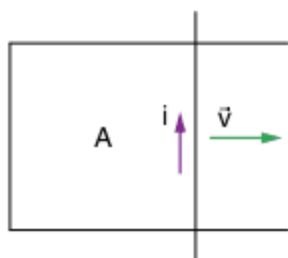
**36 PUC** Um ímã em forma de barra cai atravessando uma espira condutora, fixa num plano horizontal, como mostra a figura.



Para um observador O, que olha de cima, a corrente induzida na espira:

- (a) tem sempre sentido anti-horário.
- (b) tem sempre sentido horário.
- (c) tem sentido horário antes que o ímã a atravesse e anti-horário depois.
- (d) tem sentido anti-horário antes que o ímã a atravesse e horário depois.
- (e) é nula.

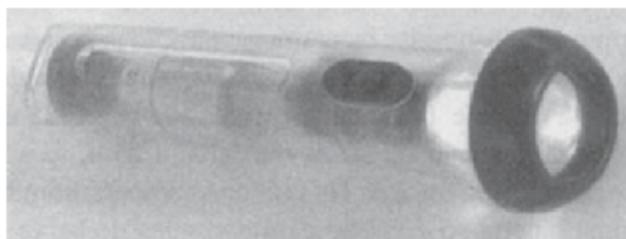
**37 UFU** Quando o fio móvel da figura é deslocado para a direita, aparece no circuito uma corrente induzida  $i$  no sentido mostrado.



O campo magnético existente na região A:

- (a) aponta para dentro do papel.
- (b) aponta para fora do papel.
- (c) aponta para a esquerda.
- (d) aponta para a direita.
- (e) é nulo.

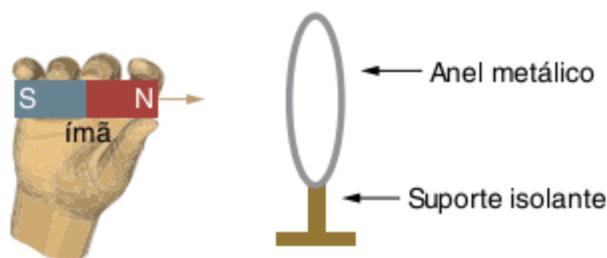
**38 Unifesp** A foto mostra uma lanterna sem pilhas, recentemente lançada no mercado. Ela funciona transformando em energia elétrica a energia cinética que lhe é fornecida pelo usuário – para isso, ele deve agitá-la fortemente na direção do seu comprimento. Como o interior dessa lanterna é visível, pode-se ver como funciona: ao agitá-la, o usuário faz um ímã cilíndrico atravessar uma bobina para frente e para trás. O movimento do ímã através da bobina faz aparecer nela uma corrente induzida que percorre e acende a lâmpada.



O princípio físico em que se baseia essa lanterna e a corrente induzida na bobina são, respectivamente:

- (a) indução eletromagnética; corrente alternada.
- (b) indução eletromagnética; corrente contínua.
- (c) Lei de Coulomb; corrente contínua.
- (d) Lei de Coulomb; corrente alternada.
- (e) Lei de Ampère; correntes alternada ou contínua podem ser induzidas.

**39 Fuvest** Aproxima-se um ímã de um anel metálico fixo em um suporte isolante, como mostra a figura.

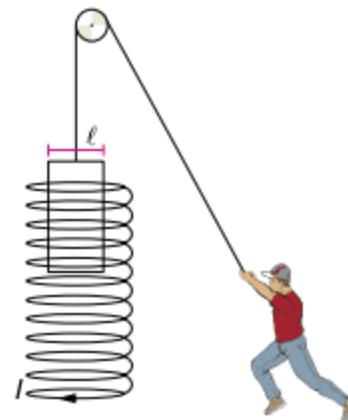


O movimento do ímã, em direção ao anel:

- (a) não causa efeitos no anel.
- (b) produz corrente alternada no anel.
- (c) faz com que o polo sul do ímã vire polo norte e vice-versa.

- (d) produz corrente elétrica no anel, causando uma força de atração entre anel e ímã.
- (e) produz corrente elétrica no anel, causando uma força de repulsão entre anel e ímã.

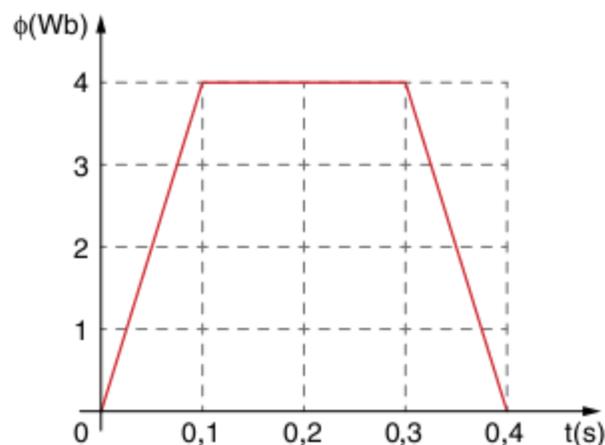
**40 ITA** Considere um aparato experimental composto de um solenoide com  $n$  voltas por unidade de comprimento, pelo qual passa uma corrente  $I$ , e uma espira retangular de largura  $\ell$ , resistência  $R$  e massa  $m$  presa por um de seus lados a uma corda inextensível, não condutora, a qual passa por uma polia de massa desprezível e sem atrito, conforme a figura. Se alguém puxar a corda com velocidade constante  $v$ , podemos afirmar que a força exercida por esta pessoa é igual a:



- (a)  $\frac{(\mu_0 n I \ell)^2 v}{R + mg}$  com a espira dentro do solenoide.
- (b)  $\frac{(\mu_0 n I \ell)^2 v}{R + mg}$  com a espira saindo do solenoide.
- (c)  $\frac{(\mu_0 n I \ell)^2 v}{R + mg}$  com a espira entrando no solenoide.
- (d)  $\mu_0 n I^2 \ell + mg$  com a espira dentro do solenoide.
- (e)  $mg$  e independe da posição da espira com relação ao solenoide.

### Lei de Faraday-Neumann

**41 FEI** Em uma bobina, o fluxo magnético varia com o tempo, conforme o gráfico a seguir. Construa o gráfico da fem induzida em função do tempo.



**42 Mackenzie** O fio retangular da figura (1) está em repouso relativamente ao eletroímã; este produz um campo de indução magnética cuja intensidade  $B$ , em função do tempo  $t$ , está representada na figura (2). Adotamos positivo o sentido da corrente indicado na figura (1).

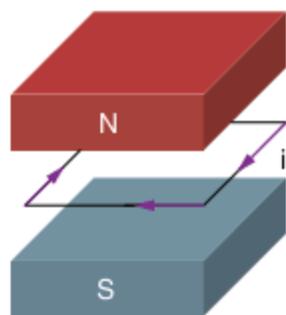


Figura 1

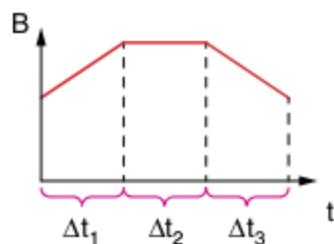


Figura 2

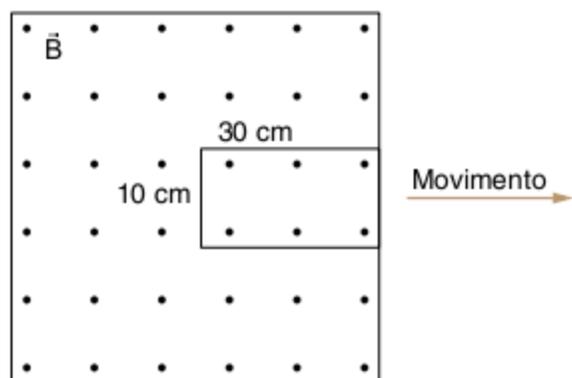
Com relação aos intervalos de tempo indicados na figura (2), a corrente será:

	$\Delta t_1$	$\Delta t_2$	$\Delta t_3$
(a)	-	0	+
(b)	+	0	-
(c)	0	0	0
(d)	-	-	-
(e)	+	+	+

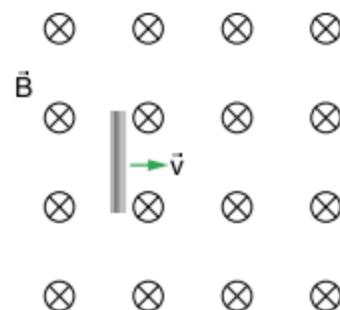
**43 Faap** Uma espira quadrada de 8 cm de lado é perpendicular a um campo magnético, tal que a indução magnética vale  $5 \cdot 10^{-3}$  T.

- Calcule o fluxo magnético através da espira.
- Se o campo cai a zero em 0,1 s, qual será a fem média induzida na espira nesse intervalo de tempo?

**44 Faap** Uma espira retangular, de dimensões 30 cm por 10 cm e resistência de 10 ohms, move-se com velocidade de 5 cm/s, perpendicularmente ao campo magnético uniforme de indução 2 T. Qual é a intensidade e sentido da corrente elétrica na espira, 2 s após a situação indicada na figura?



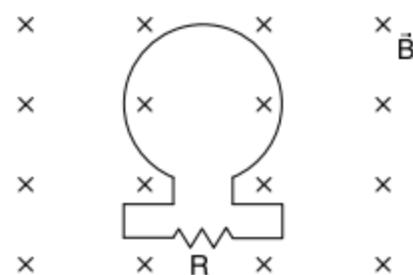
**45 ITA** Quando uma barra metálica se desloca num campo magnético, sabe-se que seus elétrons se movem para uma das extremidades, provocando entre elas uma polarização elétrica. Desse modo, é criado um campo elétrico constante no interior do metal, gerando uma diferença de potencial entre as extremidades da barra. Considere uma barra metálica descarregada, de 2,0 m de comprimento, que se desloca com velocidade constante de módulo  $v = 216$  km/h num plano horizontal (veja figura), próximo à superfície da Terra.



Sendo criada uma diferença de potencial (ddp) de  $3,0 \cdot 10^{-3}$  V entre as extremidades da barra, o valor do componente vertical do campo de indução magnética terrestre nesse local é de:

- $6,9 \cdot 10^{-6}$  T
- $1,4 \cdot 10^{-5}$  T
- $2,5 \cdot 10^{-5}$  T
- $4,2 \cdot 10^{-5}$  T
- $5,0 \cdot 10^{-5}$  T

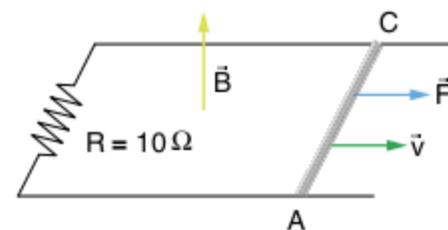
**46 Faap** A espira representada na figura tem área igual a  $1 \text{ cm}^2$  e resistência  $R = 2$  miliohms. O plano da espira é perpendicular a um campo de indução  $\vec{B}$  uniforme. No instante inicial, temos  $B = 0,2$  T e, decorridos dois segundos, temos  $B = 1,4$  T. Calcule a corrente média que circulou na espira nos dois segundos.



**47 UCMG** Uma espira de área  $1,0 \text{ m}^2$  é atravessada por um campo de indução magnética variável em módulo, porém de direção sempre perpendicular a ela. A indução magnética B oscila entre os valores  $+2,0$  T e  $-2$  T em 0,2 s. O módulo da fem induzida na espira vale, em volts:

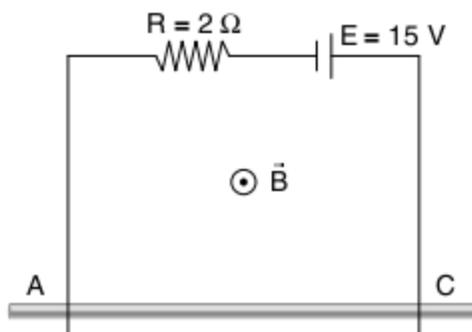
- 3
- 5
- 10
- 11
- 20

**48 Mauá** A barra condutora AC, de comprimento  $\ell = 1,0$  m e resistência elétrica desprezível, desloca-se com velocidade constante  $v = 10$  m/s, fazendo contato com dois trilhos paralelos perfeitamente condutores, sem atrito. Perpendicularmente ao plano dos trilhos, existe um campo magnético uniforme, de intensidade constante  $B = 0,5$  T. Determine a intensidade da força  $\vec{F}$  que deve ser aplicada à barra para manter constante a sua velocidade.



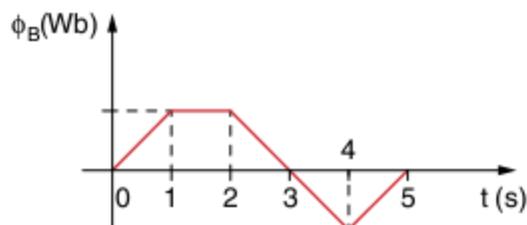
**49 FEI** A barra condutora AC da figura, de comprimento  $\ell = 50$  cm, peso  $P = 5$  N e resistência elétrica desprezível, cai verticalmente com velocidade  $\vec{v}$ , fazendo contato com dois trilhos verticais e paralelos com resistência também desprezível. Perpendicularmente ao plano dos trilhos, existe um campo de indução magnética uniforme, de intensidade  $B = 0,5$  T.

Determine a corrente na resistência R e a velocidade da barra.



- 50 UFV** Uma bobina retangular, com uma resistência total de  $4,0 \Omega$ , é constituída de 10 espiras de  $20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ . Essa bobina está imersa em um campo magnético perpendicular a seu plano, que varia uniformemente de  $8,0 \text{ T}$  a  $16,0 \text{ T}$  no intervalo de tempo de  $1,2 \text{ s}$ . Calcule, na bobina:
- a força eletromotriz induzida.
  - a intensidade da corrente.

**51 UFRGS** O gráfico a seguir registra o fluxo magnético através de anel metálico ao longo de 5 segundos.

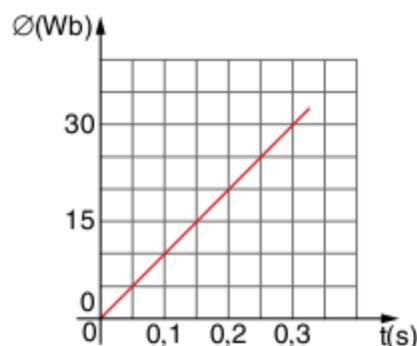


Em quais dos intervalos de tempo abaixo relacionados (valores em segundos) surgirá no anel uma corrente elétrica induzida?

- somente em (1, 2).
- somente em (0,1) e (2, 3).
- somente em (0, 1) e (4, 5).
- somente em (0,1), (1, 2) e (2, 3).
- somente em (0,1), (2, 3), (3, 4) e (4, 5).

**52 ITA** Uma bobina circular de raio  $R = 1,0 \text{ cm}$  e 100 espiras de fio de cobre, colocada num campo de indução magnética constante e uniforme, tal que  $B = 1,2 \text{ T}$ , está inicialmente numa posição tal que o fluxo de  $\vec{B}$  através dela é máximo. Em seguida, num intervalo de tempo  $\Delta t = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ , ela é girada para uma posição em que o fluxo de  $\vec{B}$  através dela é nulo. Qual é a força eletromotriz média induzida entre os terminais da bobina?

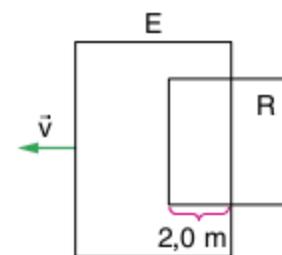
**53 Fuvest** Uma espira circular de fio condutor está sujeita a uma variação de fluxo magnético, dada em Weber, em relação ao tempo, conforme o gráfico a seguir.



Qual é, em volts, o módulo da força eletromotriz induzida na espira durante este intervalo de tempo?

- 100
- 10
- 9,0
- 1,0
- 0,01

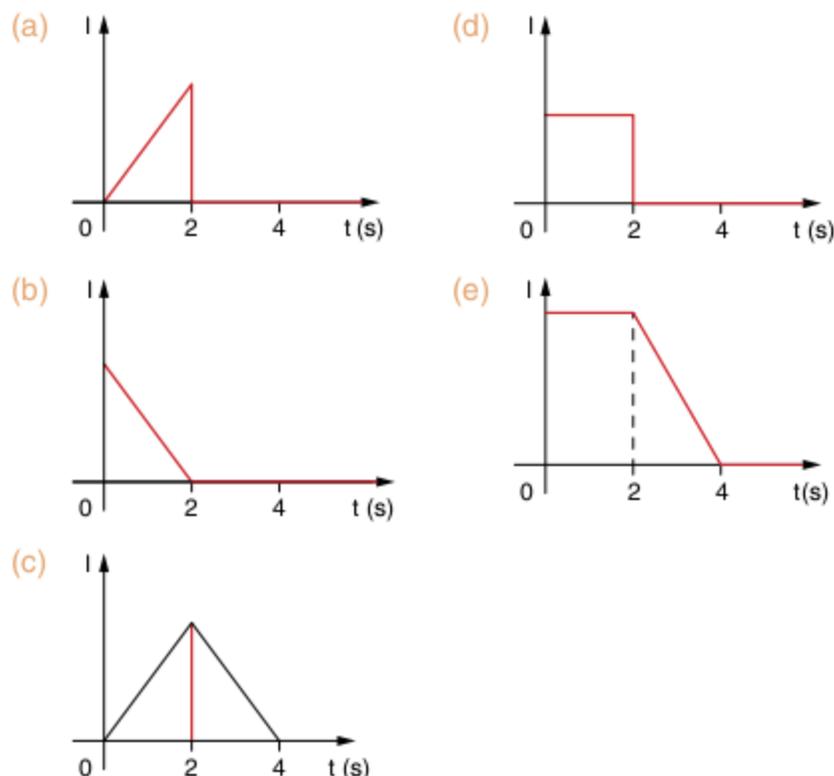
**54** No esquema:



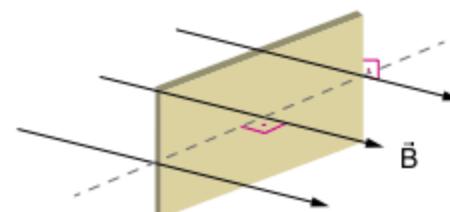
R: é uma região onde há um campo magnético, cuja direção é perpendicular a esta folha.

E: é uma espira condutora em movimento de velocidade constante  $\vec{v}$ , cujo módulo vale  $1,0 \text{ m/s}$ .

Supondo que o esquema represente a posição da espira no instante  $t = 0$ , a corrente elétrica  $I$ , induzida na espira, pode ser representada, em função do tempo  $t$ , pelo gráfico:



**55 Fatec** Em um campo de indução uniforme, com intensidade  $B = 1,0 \text{ T}$  (tesla =  $\text{Wb/m}^2$ ), situa-se uma espira retangular tendo área  $A = 100 \text{ cm}^2$ . A espira é giratória em torno da reta que passa pelos centros de dois lados opostos, normal ao campo e mantida fixa. Inicialmente, o plano da espira é normal ao campo (ver esquema). Gira-se a espira de um ângulo reto ( $90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ ) com duração  $\Delta t = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ .



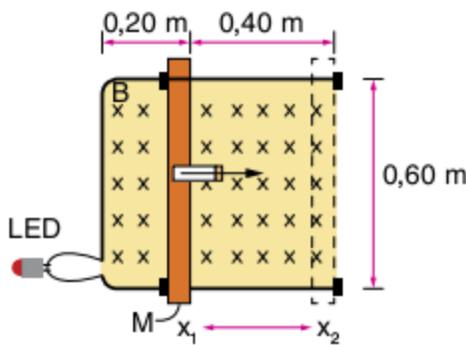
A força eletromotriz média induzida na espira é:

- $1,0 \cdot 10^{-2} \text{ V}$
- $1,0 \text{ V}$
- $1,0 \cdot 10^{-4} \text{ V}$
- $100 \text{ V}$
- nenhuma das anteriores.

**56 Mackenzie** Uma bobina de 100 espiras, de área  $8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$  cada uma, tem resistência de  $12 \Omega$ . Um campo de indução magnética, paralelo ao eixo da bobina, induz corrente  $1 \cdot 10^{-3} \text{ A}$ . A variação uniforme do campo, em 1 s, é de:

- (a)  $1,0 \cdot 10^{-2} \text{ T}$       (c)  $3,0 \cdot 10^{-2} \text{ T}$       (e)  $6,5 \cdot 10^{-2} \text{ T}$   
 (b)  $2,0 \cdot 10^{-2} \text{ T}$       (d)  $1,5 \cdot 10^{-2} \text{ T}$

**57 Fuvest** É possível acender um LED movimentando-se uma barra com as mãos? Para verificar essa possibilidade, um jovem utiliza um condutor elétrico em forma de U, sobre o qual pode ser movimentada uma barra M, também condutora, entre as posições  $X_1$  e  $X_2$ . Essa disposição delimita uma espira condutora, na qual é inserido o LED, cujas características são indicadas na tabela a seguir. Todo o conjunto é colocado em um campo magnético B (perpendicular ao plano dessa folha e entrando nela), com intensidade de 1,1 T.



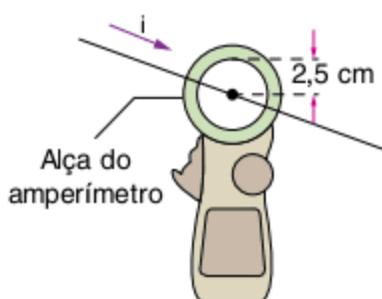
LED (diodo emissor de luz)	
Potência	24 mW
Corrente	20 mA
Luminosidade	2 Lumens

O jovem, segurando em um puxador isolante, deve fazer a barra deslizar entre  $X_1$  e  $X_2$ . Para verificar em que condições o LED acenderia durante o movimento, estime:

Note e Adote: A força eletromotriz induzida é tal que  $\varepsilon = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$ .

- a) a tensão V, em volts, que deve ser produzida nos terminais do LED, para que ele acenda de acordo com suas especificações.  
 b) a variação  $\Delta\phi$  do fluxo do campo magnético através da espira, no movimento entre  $X_1$  e  $X_2$ .  
 c) o intervalo de tempo  $\Delta t$ , em s, durante o qual a barra deve ser deslocada entre as duas posições, com velocidade constante, para que o LED acenda.

**58 Unicamp** O alicate-amperímetro é um medidor de corrente elétrica, cujo princípio de funcionamento baseia-se no campo magnético produzido pela corrente. Para se fazer uma medida, basta envolver o fio com a alça do amperímetro, como ilustra a figura a seguir.



a) No caso de um fio retilíneo e longo, pelo qual passa uma corrente i, o módulo do campo magnético produzido a uma distância r do centro do fio é dado por  $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ , onde

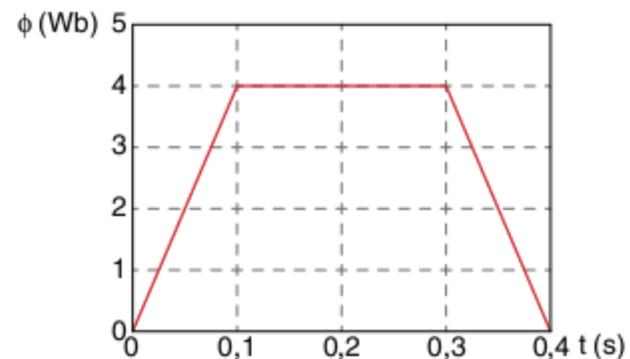
$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}}$$

Se o campo magnético num ponto da alça circular do alicate da figura for igual a  $1,0 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ , qual é a corrente que percorre o fio situado no centro da alça do amperímetro?

b) A alça do alicate é composta de uma bobina com várias espiras, cada uma com área  $A = 0,6 \text{ cm}^2$ . Numa certa medida, o campo magnético, que é perpendicular à área da espira, varia de zero a  $5,0 \cdot 10^{-6} \text{ T}$  em  $2,0 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ . Qual é a força eletromotriz induzida,  $\varepsilon$ , em uma espira? A Lei de indução de Faraday é dada por:  $\varepsilon = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$ , onde  $\phi$  é o fluxo magnético,

que, nesse caso, é igual ao produto do campo magnético pela área da espira.

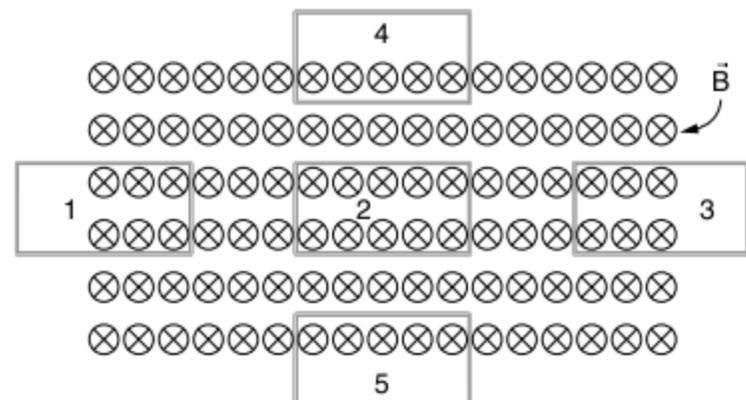
**59 Unesp** Uma espira, locomovendo-se paralelamente ao solo e com velocidade constante, atravessa uma região onde existe um campo magnético uniforme, perpendicular ao plano da espira e ao solo. O fluxo magnético registrado, a partir do instante em que a espira entra nessa região até o instante de sua saída, é apresentado no gráfico da figura.



Analisando o gráfico, pode-se dizer que a força eletromotriz induzida, em volts, no instante  $t = 0,2 \text{ s}$ , é:

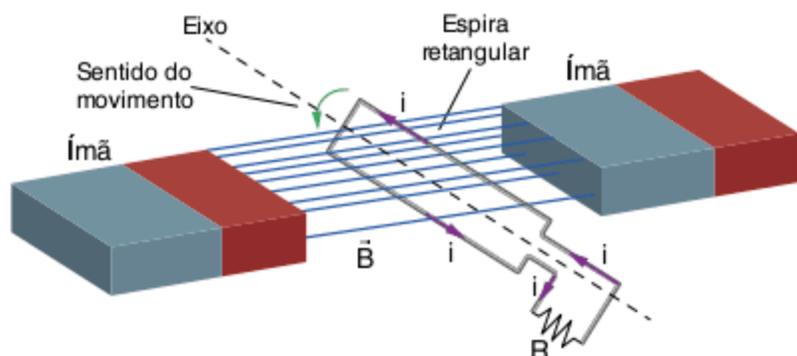
- (a) 80      (b) 60      (c) 40      (d) 20      (e) 0

**60 Unifei** Uma espira metálica de dimensões 1,0 m e 0,6 m desloca-se em linha reta com velocidade constante de 12,3 m/s e atravessa uma região de campo magnético constante, cuja intensidade é igual a 1,0 Tesla. Os movimentos possíveis dessa espira são de  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  e de  $5 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ . Neste caso, assinale a alternativa correta.



- (a) O sentido das correntes elétricas que surgem na espira nas posições 1 e 5 é igual, isto é, anti-horário.
- (b) Não há fluxo magnético através da espira quando esta se encontra na posição 2.
- (c) Durante o deslocamento de 1 para 3, o sentido da corrente elétrica que surge na espira na posição 1 é o mesmo de quando a espira se encontra em 3.
- (d) Quando a espira se encontra na posição 2, a variação do fluxo magnético é de 0,6 Wb.

**61 Unesp 2011** Um gerador eletromagnético é constituído por uma espira com seção reta e área  $S$ , que gira com velocidade angular  $\omega$  no interior de um campo magnético uniforme de intensidade  $B$ . À medida que a espira gira, o fluxo magnético  $\phi$  que a atravessa varia segundo a expressão  $\phi(t) = B \cdot S \cdot \cos \omega t$ , onde  $t$  é o tempo, produzindo uma força eletromotriz nos terminais do gerador eletromagnético, cujo sentido inverte-se em função do giro da espira. Assim, a corrente no resistor  $R$ , cujo sentido inverte a cada meia-volta, é denominada corrente alternada.



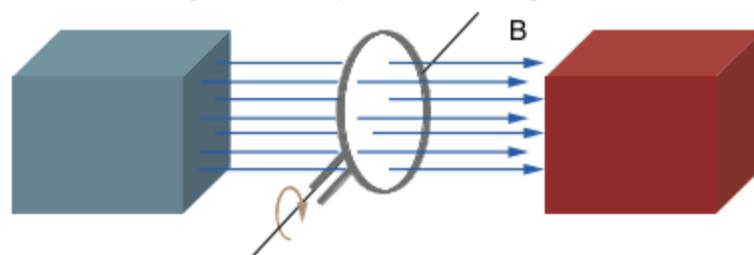
Considere a espira com seção reta de  $10 \text{ cm}^2$ , girando à razão de 20 voltas por segundo, no interior de um campo magnético de intensidade igual a  $2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ .

Trace o gráfico do fluxo magnético  $\phi(t)$  que atravessa a espira, em função do tempo, durante um período ( $T$ ), indicando os valores do fluxo magnético nos instantes  $\frac{T}{4}$ ,  $\frac{T}{2}$ ,  $\frac{3T}{4}$  e  $T$ .

**62 UFRGS** Um campo magnético cuja intensidade varia no tempo atravessa uma bobina de 100 espiras e de resistência elétrica desprezível. A esta bobina está conectada em série uma lâmpada cuja resistência elétrica é de  $10,0 \Omega$  e que está dissipando  $10,0 \text{ W}$ . A variação temporal do fluxo magnético através de cada espira é, em módulo, de:

- (a)  $0,01 \text{ Wb/s}$
- (b)  $0,10 \text{ Wb/s}$
- (c)  $1,0 \text{ Wb/s}$
- (d)  $10,0 \text{ Wb/s}$
- (e)  $100,0 \text{ Wb/s}$

**63 UFPR 2011** Uma das maneiras de gerar correntes elétricas é transformar energia mecânica em energia elétrica através de um gerador elétrico. Em uma situação simplificada, dispõem-se de ímãs para produzir o campo magnético e de uma bobina formada por 10 espiras circulares com  $10 \text{ cm}$  de diâmetro, montados conforme a figura a seguir. A bobina está presa a um eixo que passa pelo seu diâmetro e gira com velocidade constante de 2 rotações por segundo. A bobina possui dois terminais que permitem o aproveitamento da energia elétrica gerada. Num dado instante, as linhas do campo magnético atravessam perpendicularmente o plano das espiras e o fluxo magnético é máximo; após a bobina girar  $90^\circ$  em torno do eixo, esse fluxo é zero. Considere que na região da bobina o campo magnético é uniforme, com módulo igual a  $0,01 \text{ T}$ , e orientado conforme indicado na figura. Determine a força eletromotriz média induzida na bobina ao girar  $90^\circ$  a partir da situação de máximo fluxo.

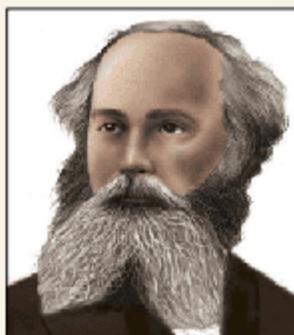


## TEXTO COMPLEMENTAR

### James Clerk Maxwell e a luz

Deve-se a James Clerk Maxwell a formulação matemática da inter-relação entre eletricidade e magnetismo.

James Clerk Maxwell nasceu na Escócia, em Edimburgo, no dia 13 de novembro de 1831. Aos onze anos de idade foi para a Academia de Edimburgo.



James Clerk Maxwell.

Em 1850, foi para a Universidade de Cambridge, onde ganhou vários prêmios em matemática. Teve passagem no Trinity College e no Marischall Faculty, onde se casou com a filha do diretor.

Dentre os seus principais trabalhos, podemos citar:

- Teorização sobre a constituição dos anéis de Saturno. Maxwell indicou que eles deveriam ser constituídos de partículas

sólidas, o que foi confirmado 100 anos depois através da sonda Voyager.

- Através de considerações estatísticas e independentemente de Ludwig Boltzmann, ele formulou a Teoria cinética dos gases de Maxwell-Boltzmann. Essa teoria mostra que calor e temperatura estão envolvidos somente com movimento molecular.

Mas o mais importante, sem dúvida, é a formulação matemática das teorias de Faraday, Ampère e Gauss da eletricidade e do magnetismo. Através dessas equações e das propostas feitas por Maxwell, foi possível, após a sua morte, a produção e detecção de ondas eletromagnéticas. Maxwell disse:

*"We can scarcely avoid the conclusion that light consists in the transverse undulations of the same medium which is the cause of electric and magnetic phenomena".*

“Nós mal podemos evitar a conclusão de que a luz consiste de ondulações transversais, no mesmo meio, causadas por fenômenos elétricos e magnéticos.”

Em 1873, Maxwell publicou um trabalho extenso e complexo denominado *Treatise on Electricity and Magnetism*, em que ele apresenta as equações, não da forma como hoje as conhecemos. Foi Oliver Heaviside, físico inglês, que muito contribuiu para o esclarecimento das equações, apresentando-as como conhecidas atualmente.

As consequências das equações de Maxwell e das suas conclusões são:

- Em 1888, Heinrich Hertz conduziu investigações baseadas nas teorias de Maxwell e demonstrou que um distúrbio elétrico pode ser transmitido no espaço através de ondas. Marconi, utilizando várias patentes de Nicola Tesla, foi o primeiro a conseguir, logo no século passado, transmitir ondas eletromagnéticas a distâncias intercontinentais, entre a costa leste americana e a Inglaterra. Atualmente, as ondas eletromagnéticas são largamente utilizadas em comunicações, radares, cobrindo um largo espectro de frequências. No Brasil, o paulista Landell de Moura, realizou, em 1892, uma experiência de transmissão de voz, através de ondas eletromagnéticas, com um aparelho patenteado nos Estados Unidos. Essa transmissão deu-se entre a Av. Paulista e Altos de Santana,

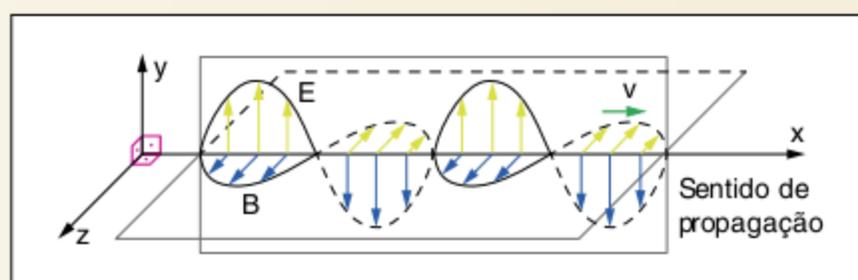
na cidade de São Paulo, em uma distância aproximada de 10 km. Recentemente, o seu aparelho foi reconstruído por alunos da USP, tendo funcionado perfeitamente.

A Teoria da relatividade restrita de Einstein (1905) surgiu aproximadamente 200 anos após a consolidação das leis de Newton e 40 anos após as teorias de Maxwell. As leis de Newton tiveram de ser drasticamente alteradas para velocidades próximas à da luz. Contudo, as equações de Maxwell ficaram inalteradas. Sendo uma das bases da teoria relativística, onde a velocidade da luz no vácuo independe do referencial, é dada por:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}}$$

Onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo,  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo e  $\epsilon_0$  é a permissividade elétrica do vácuo.

A figura a seguir mostra uma onda eletromagnética se propagando no vácuo, exatamente como a proposta de Maxwell.

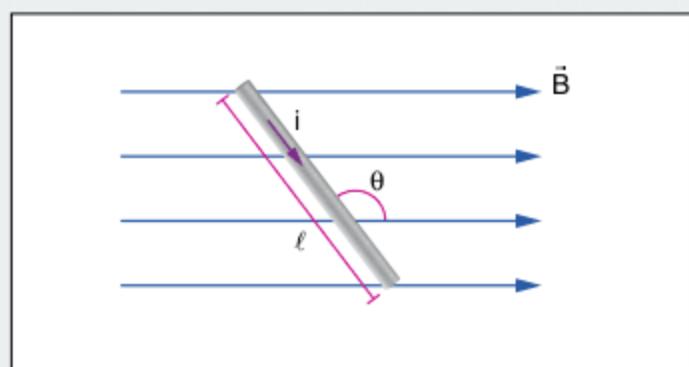


## RESUMINDO

Neste capítulo, foram estudados dois assuntos muito importantes:

- Força magnética em fio percorrido por corrente elétrica e submetido ao campo magnético.
- A Lei da indução de Faraday.

No primeiro assunto, foi desenvolvida a expressão para o cálculo da força magnética que age em um fio percorrido por corrente elétrica, tal que:



$$F_m = B \cdot i \cdot l \cdot \text{sen}(\theta)$$

O sentido da força magnética é determinado pela regra da mão direita espalmada.

Outro tópico importante é a força magnética entre fios retilíneos, infinitos e paralelos percorridos por corrente; nesse caso, tem-se que, se os fios são percorridos por correntes de mesmo sentido, a força entre eles é atrativa e, caso contrário,

a força entre eles é repulsiva. É importante ressaltar que a força que age nos fios tem mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos.

Na abordagem da Lei de Faraday, o estudo foi feito inicialmente com uma análise qualitativa e depois uma análise quantitativa.

Na análise qualitativa, foi mostrado que sempre que há a variação do fluxo do vetor indução magnética  $\Phi_B$  ao longo de um circuito, denominado induzido, surge uma força eletromotriz induzida tal que, se o circuito estiver fechado, tem-se associada a essa força eletromotriz induzida uma corrente elétrica induzida, cujo sentido é determinado pela Lei de Lenz.

A Lei de Lenz afirma que o sentido da corrente induzida é tal que se opõe às causas que a originaram. Assim, para se determinar o sentido da corrente induzida, deve-se observar o comportamento temporal do fluxo no induzido e a corrente induzida terá sentido tal que o campo por ela gerado tende a reforçar fluxos que diminuem no tempo ou a diminuir fluxos que aumentem no tempo.

Em seguida, foi feita uma análise quantitativa da força eletromotriz, chegando-se à expressão para o cálculo da força eletromotriz média no induzido dada por:

$$\epsilon_m = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$$

O sinal negativo na expressão deve-se à Lei de Lenz, indicando que a força eletromotriz induzida se opõe às causas que a originaram.

# QUER SABER MAIS?



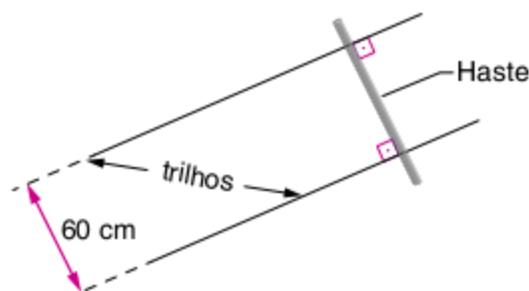
## SITES

- Funcionamento das hidrelétricas  
<http://ciencia.hsw.uol.com.br/usinas-hidreletricas.htm>
- Biografia de Michael Faraday  
[www.famouspeoplebiographyguide.com/Portuguese/scientist/michael-faraday/Michael-Faraday-Biography.html](http://www.famouspeoplebiographyguide.com/Portuguese/scientist/michael-faraday/Michael-Faraday-Biography.html)
- História dos transformadores  
<http://engenha.blogspot.com/2011/01/historia-do-transformador.html>

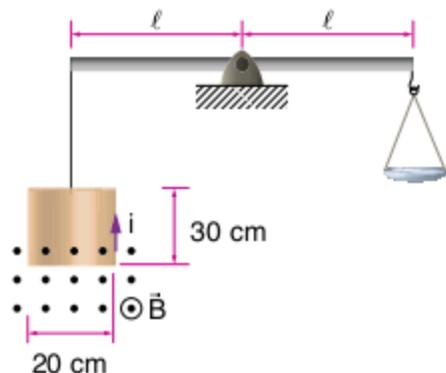
## Exercícios complementares

### Questões gerais

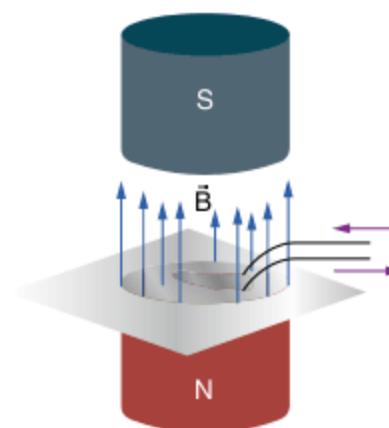
**1 Faap** Sobre dois trilhos horizontais, distantes 60 cm um do outro, repousa uma haste de cobre de 300 g, colocada perpendicularmente a ambos. Calcule a menor indução magnética capaz de tornar iminente o movimento da haste, quando por ela passar uma corrente de 10 A. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre a haste e os trilhos são, respectivamente, 0,5 e 0,4. Dado:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



**2** Na figura, o campo magnético uniforme existente tem intensidade  $B = 0,1 \text{ T}$ . A balança fica em equilíbrio horizontal quando o quadro condutor de 30 cm x 20 cm, ligado a ela por um fio isolante, não é percorrido por corrente. Faz-se passar pelo quadro uma corrente de 10 A em sentido anti-horário. Calcule a massa que deve ser colocada no prato, para que a balança volte ao equilíbrio horizontal. Dado:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

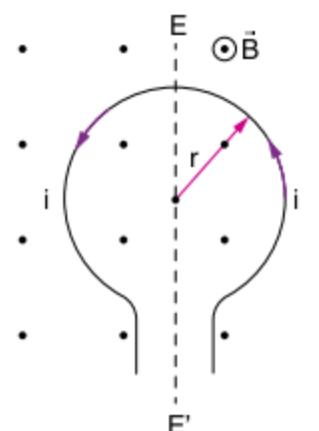


**3 Unimontes** Uma gominha elástica flexível é coberta com uma camada de tinta condutora de eletricidade e colocada em um campo magnético uniforme, do modo ilustrado na figura ao lado. Por meio de conexões elétricas, faz-se passar uma corrente na gominha com o sentido indicado na figura. Marque a alternativa que apresenta a forma que a gominha irá adquirir sob a ação magnética que nela atua.



- (a) (c)
- (b) (d)

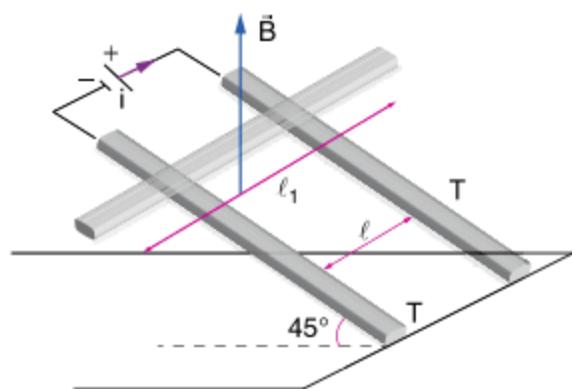
**4 ITA** Um campo magnético  $\vec{B}$  é perpendicular ao papel e orientado do papel para o observador. Uma corrente  $i$  passa na espira circular de raio  $r$ , cujo plano coincide com o papel.



As forças que agem sobre a espira são tais que tendem a produzir nela:

- (a) um encolhimento.
- (b) um alargamento.
- (c) uma rotação no sentido horário em torno de um eixo vertical, pelo seu centro.
- (d) uma rotação no sentido anti-horário em torno do eixo vertical, pelo centro.
- (e) uma rotação em torno do eixo  $EE'$  do plano da espira.

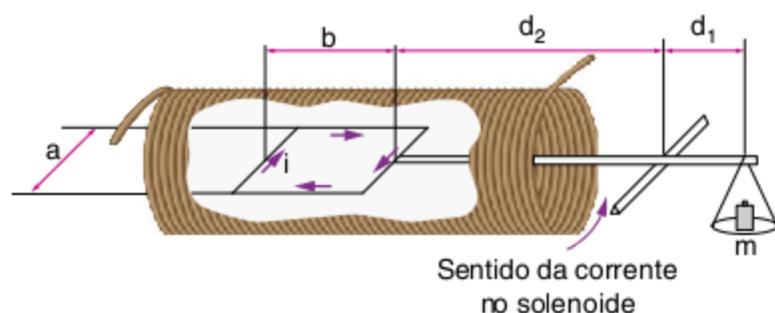
**5** Uma barra condutora metálica, de comprimento  $\ell_1 = 2$  m e peso  $P = 2$  N, apoia-se sobre dois trilhos T, também condutores, que formam com a horizontal o ângulo de  $45^\circ$ . A distância  $\ell$  entre os trilhos vale 1 m. As extremidades superiores dos trilhos estão ligadas a uma bateria e, nessa região do espaço, existe um campo magnético uniforme e vertical, orientado de baixo para cima, definido em cada ponto pelo vetor indução magnética de intensidade igual a 0,5 tesla, conforme indica a figura a seguir. O atrito é nulo. Calcule o valor da corrente  $i$  para que a barra permaneça em equilíbrio.



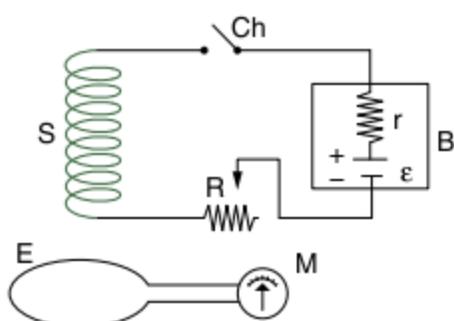
**6 ITA** Uma ddp constante é aplicada aos terminais de uma mola condutora helicoidal. A mola:

- (a) tende a se alongar.
- (b) tende a encurtar.
- (c) tende a girar em torno de seu eixo.
- (d) não tem tendência a se mover ou se deformar.
- (e) nenhuma das afirmações anteriores é correta.

**7** No interior de um solenoide longo, onde existe um campo de indução magnética  $\vec{B}$  uniforme e axial, coloca-se uma espira retangular de largura  $a = 0,050$  m e comprimento  $b = 0,20$  m, em posição horizontal, ligada rigidamente a uma balança de braços  $d_1 = 0,10$  m e  $d_2 = 0,30$  m. Quando não circula corrente na espira, a balança está em equilíbrio. Ao se fazer passar, pela espira, uma corrente  $i = 2,0$  A, o equilíbrio da balança é obtido colocando-se no prato a massa  $m = 8,0 \cdot 10^{-3}$  kg. Determine o campo de indução magnética no interior do solenoide. O sistema encontra-se no vácuo e  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Tm/A ( $g = 10$  m/s<sup>2</sup>).



**8** Na figura, Ch é uma chave, S um solenoide, B uma bateria, R um reostato, M um microamperímetro e E uma espira circular condutora.



Qual a afirmativa incorreta?

- (a) M registrará passagem de uma corrente ao abrirmos Ch.
- (b) M registrará passagem de corrente se, mantendo Ch fechada, variarmos R.
- (c) M registrará passagem de corrente se girarmos E em torno de um de seus diâmetros.
- (d) M registrará passagem de corrente sempre que uma corrente contínua passar pelo circuito de cima.
- (e) M registrará passagem de uma corrente quando, estando Ch aberta, ela for fechada.

**9** A armação abaixo é constituída por lâminas de ferro delgadas coladas umas nas outras. A bobina pode ser ligada a uma fonte de tensão e então passa a ser percorrida por uma corrente alternada (fonte de 110 V – 60 Hz). O aro de alumínio, em forma de calha, contém água e é atravessado pela armação conforme indica a figura:



Ao se ligar a bobina B à fonte de tensão alternada, deve-se notar que:

- (a) há um grande aquecimento da armação de ferro, por causa das lâminas de que é formada.
- (b) o aro de alumínio é percorrido por uma corrente contínua.
- (c) a água se aquece.
- (d) há um resfriamento lento da água, causado por correntes de Foucault.
- (e) a água se eletriza, adquirindo cargas de sinal oposto à da fonte indutora (Lei de Lenz).

**10 ITA** Faz-se o polo norte do ímã aproximar-se da extremidade de um solenoide, em circuito aberto, conforme ilustra a figura a seguir.

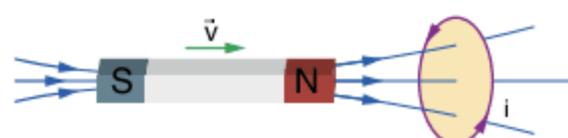


Nestas condições, durante a aproximação, aparece:

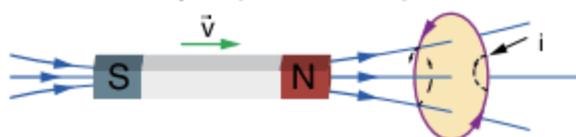
- (a) uma corrente elétrica que circula pela bobina.
- (b) um campo magnético paralelo ao eixo da bobina e contrário ao campo do ímã.
- (c) uma força eletromotriz entre os terminais da bobina.
- (d) um campo magnético perpendicular ao eixo da bobina.
- (e) um campo magnético paralelo ao eixo da bobina e de sentido oposto ao do ímã.

**11 ITA** Considere as situações representadas a seguir. A situação que contraria a Lei de indução de Faraday será:

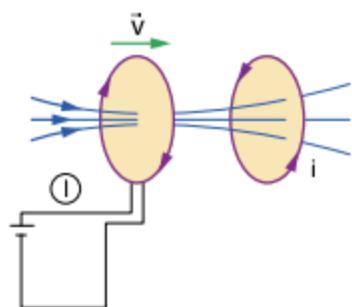
- (a) ímã que desloca com uma velocidade  $\vec{v}$



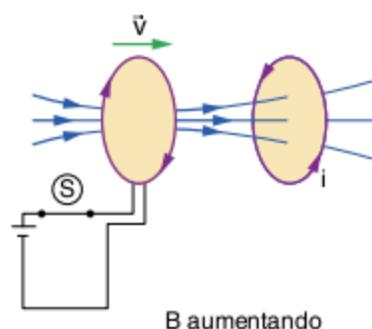
(b) espira em deformação (diminuindo)



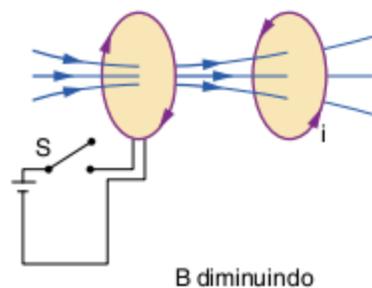
(c) circuito (I) deslocando-se com uma velocidade  $\vec{v}$ .



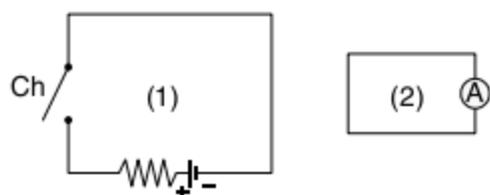
(d) logo após o instante em que se fecha a chave S



(e) logo após o instante em que se abre a chave S



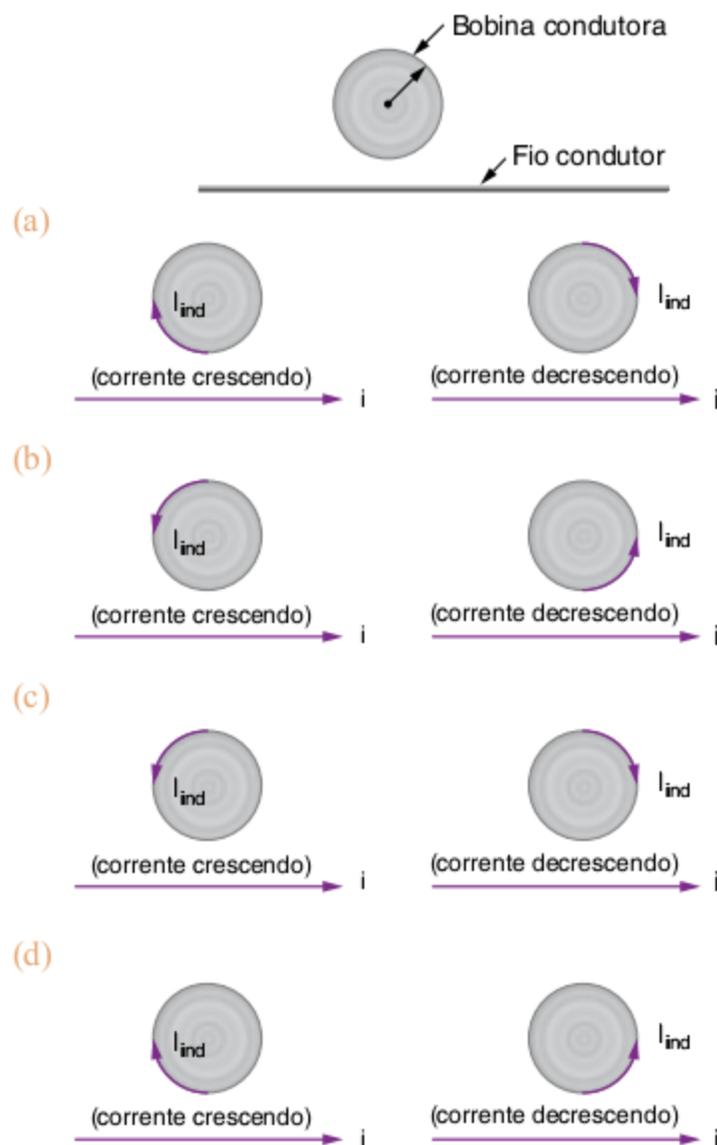
**12 FMI** Analisando a figura a seguir e sabendo-se que as espiras (1) e (2) são condutoras e estão no plano do papel, podemos afirmar que:



- I. no instante em que a chave Ch é fechada, o sentido da corrente na espira (2) será horário.
  - II. no instante em que a chave Ch é aberta, o sentido da corrente na espira (2) será horário.
  - III. enquanto a chave Ch permanece fechada e o conjunto constituído pelo circuito (1) e pela espira (2) se move para a direita, com velocidade relativa constante, o sentido da corrente na espira (2) é anti-horário.
- (a) Apenas I está correta.      (d) I e III estão corretas.  
 (b) Apenas II está correta.    (e) II e III estão corretas.  
 (c) Apenas III está correta.

**13 ITA** Um fio retilíneo e longo acha-se percorrido por uma corrente  $i$ , que pode aumentar ou diminuir com o tempo. Uma espira condutora circular de raio  $R$  acha-se nas proximidades desse fio, com o seu eixo de simetria disposto perpendicularmente

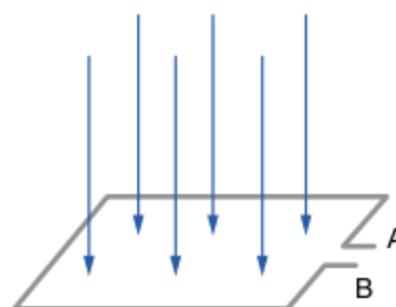
ao fio como mostra a figura. Qualquer variação na corrente  $i$  que percorre o fio irá, segundo a Lei de indução de Faraday, induzir uma corrente  $I_{ind}$  na bobina, cujo sentido será ditado pela Lei de Lenz, ou seja, essa corrente induzida  $I_{ind}$  tem sentido tal que tende a criar um fluxo de  $I_{ind}$  através da bobina, oposto à variação do fluxo de  $\vec{B}$  que lhe deu origem. Se a corrente  $i$  que percorre o fio estiver crescendo ou decrescendo no tempo, a corrente  $I_{ind}$  deverá ter seu sentido indicado na configuração:



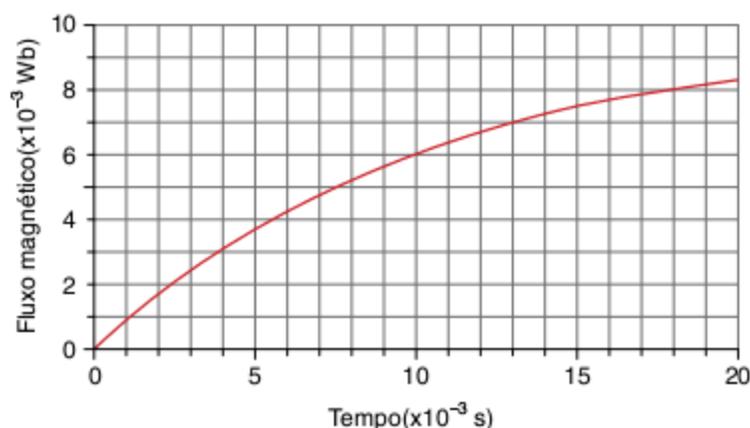
(e) nenhuma das configurações é correta.

**14 FEI** Uma espira condutora plana de área  $A = 0,5 \text{ m}^2$  está animada de movimento de translação no interior de um campo de indução magnética uniforme, de intensidade variável com o tempo de acordo com a expressão  $B = 2t$  (Sistema Internacional). Sendo o campo normal à espira, qual a força eletromotriz induzida na espira?

**15 UFU** Uma espira quadrada de lados  $0,10 \text{ m}$  e resistência total  $20 \Omega$  está imersa em um campo magnético orientado perpendicularmente ao plano de espira, conforme figura a seguir.



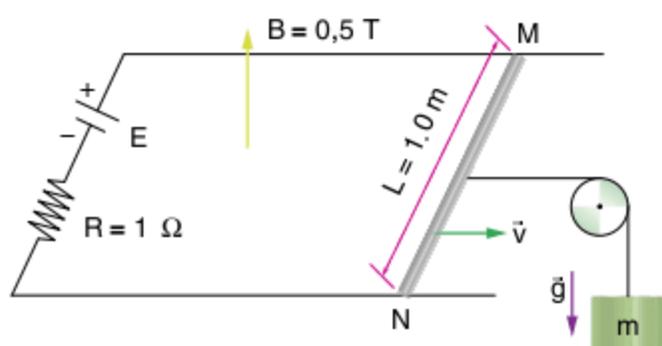
O fluxo magnético através da espira varia com o tempo de acordo com o seguinte gráfico.



A partir dessas informações, é correto afirmar que:

- (a) se o campo magnético varia apenas com o tempo, o seu módulo no instante  $t = 1,6 \cdot 10^{-2}$  s será igual a 8 T.
- (b) a força eletromotriz induzida entre os pontos A e B, entre os instantes  $t = 0$  s e  $t = 1,6 \cdot 10^{-2}$  s, será de 2 V.
- (c) de acordo com a Lei de Lenz, a corrente elétrica induzida na espira circulará de B para A.
- (d) a corrente elétrica induzida na espira entre os instantes  $t = 0$  s e  $t = 1,6 \cdot 10^{-2}$  s será de 0,025 A.

**16 FM-ABC** No sistema figurado a seguir, a barra condutora MN, de resistência desprezível, desloca-se com velocidade constante  $v = 20$  m/s, apoiada em trilhos condutores, retos, paralelos e de resistência desprezível, puxada por um corpo de massa  $m = 2$  kg. Nas extremidades do trilho, está ligado um gerador de força eletromotriz E e resistência interna R. A aceleração da gravidade é  $g = 10$  m/s<sup>2</sup> e o campo de indução magnética é B perpendicular ao plano do sistema.



A força eletromotriz induzida na barra é:

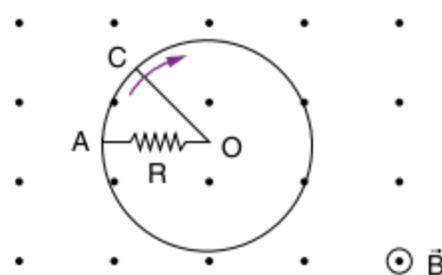
- (a) 12 V
- (b) 6 V
- (c) 110 V
- (d) 50 V
- (e) 10 V

**17 FM-ABC** Retomar o enunciado precedente. A força eletromotriz E do gerador vale:

- (a) 10 V
- (b) 20 V
- (c) 30 V
- (d) 40 V
- (e) 50 V

**18** No circuito da figura, representa-se uma espira metálica de centro O, com uma pequena abertura ao lado do ponto A, um resistor R e um condutor OC, de comprimento 0,4 m e que gira, no sentido horário, em torno de O com movimento de

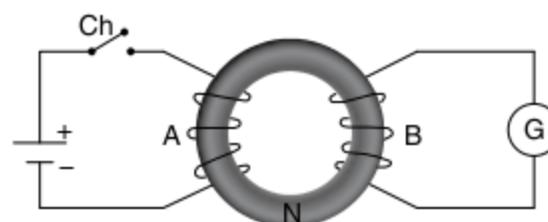
rotação uniforme de frequência 0,2 Hz. O circuito está imerso em um campo magnético de indução uniforme de intensidade 0,5 T, perpendicular ao plano do circuito e orientado para fora da folha.



Sabendo que no instante inicial a extremidade C do condutor OC estava sobre o ponto A, determine:

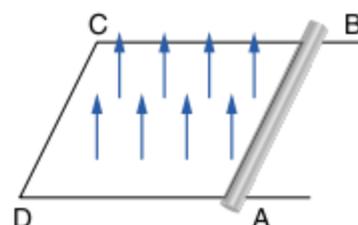
- a) o valor absoluto da fem média induzida no circuito fechado ACO.
- b) o sentido da corrente induzida no resistor R.

**19 ITA** Na montagem da figura, A e B são enrolamentos de fios condutores, G é um galvanômetro e N um núcleo de ferro.



- (a) Há uma corrente transitória em G, quando a chave Ch é fechada.
- (b) Há corrente em G, enquanto Ch estiver fechada.
- (c) Somente haverá corrente em G, quando Ch for aberta.
- (d) Nunca haverá corrente em G.
- (e) Nenhuma das afirmações é correta.

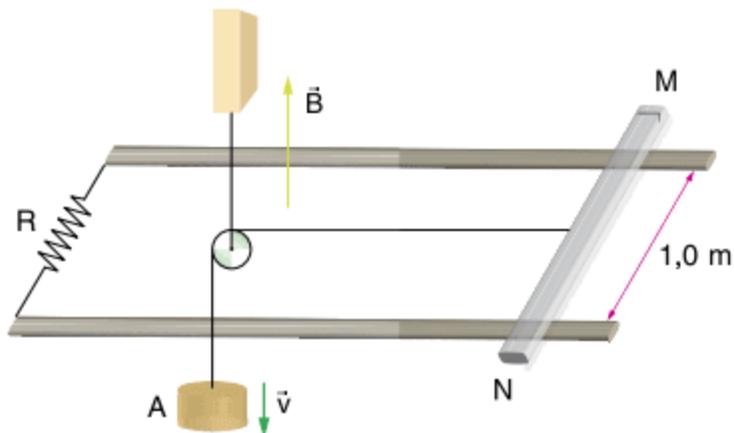
**20 ITA** No circuito da figura, a barra metálica AB é móvel e apoia-se num arame ABCD fixo e situado num plano horizontal. Existe um campo estático de indução magnética cuja direção é vertical. A barra AB recebeu um impulso e em seguida foi abandonada, de forma que, no instante considerado, desloca-se da direita para esquerda.



Podemos afirmar que:

- (a) não há corrente elétrica no circuito e o movimento de AB é uniforme até ser impedido mecanicamente.
- (b) há corrente elétrica no sentido ADCB e o movimento de AB é acelerado.
- (c) há corrente elétrica no sentido ABCD e o movimento de AB é retardado.
- (d) há corrente elétrica no sentido ABCD e o movimento de AB é acelerado.
- (e) há corrente elétrica no sentido ADCB e o movimento de AB é retardado.

**21** Uma barra metálica MN de 1,0 m de comprimento, traçada por um corpo A, desliza com velocidade constante de módulo  $V = 10 \text{ m/s}$ , apoiando-se em dois trilhos condutores paralelos interligados por um resistor de resistência  $R = 1,0 \Omega$ . A barra e os trilhos têm resistência elétrica desprezível. O conjunto está imerso num campo de indução magnética uniforme, de módulo  $B = 2,0 \text{ T}$ , perpendicular ao plano dos trilhos, que é horizontal.



São desprezados a massa do fio que traciona a barra, a influência do ar e todo e qualquer atrito. Determine:

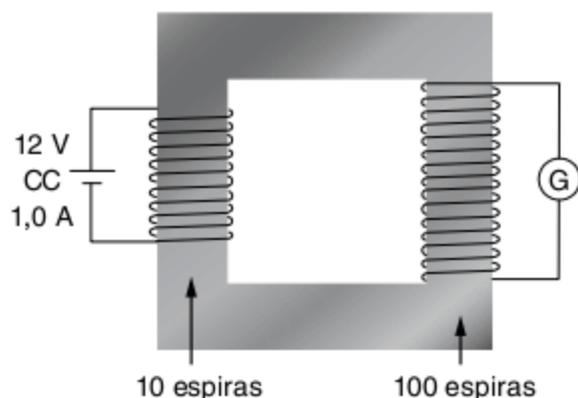
- o módulo da força eletromotriz induzida no circuito.
- o sentido da corrente que percorre a barra.
- a intensidade da corrente induzida.
- o módulo e o sentido da força magnética atuante na barra.
- o peso do corpo A.
- a potência dissipada no circuito.
- a potência desenvolvida pelo peso do corpo A.

**22** Um solenoide de 50 cm de comprimento e  $\frac{8}{\sqrt{\pi}}$  cm de diâmetro médio é percorrido por uma corrente elétrica de intensidade igual a 10 A. O enrolamento é feito em 5 camadas de 400 espiras cada uma. No interior do solenoide existe vácuo. Determine:

- o valor de  $\vec{B}$  no centro do solenoide.
- o fluxo magnético através de uma seção reta no centro do solenoide.

Dado:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$ .

**23 Efoa** O transformador, esquematizado na figura a seguir, é um dispositivo que permite a elevação ou o abaixamento da tensão fornecida, utilizando-se dos princípios da indução eletromagnética. Observe a figura atentamente.

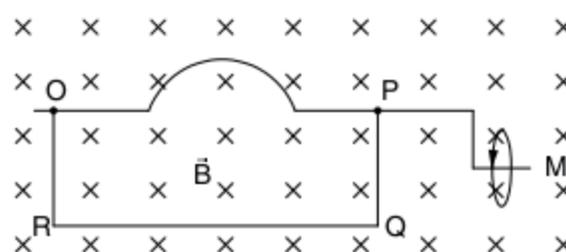


A diferença de potencial no medidor G e a corrente que flui através dele são, respectivamente:

- 120 V e 0,1 A.
- 120 V e 10 A.
- 1,2 V e 1,0 A.
- 0,0 V e 0,0 A.
- 1,2 V e 10 A.

**24 Mackenzie** Com um fio metálico de comprimento igual a 100 cm e de seção transversal de  $1 \text{ mm}^2$ , faz-se uma espira retangular de lados de 20 cm e 30 cm. A espira é colocada no campo de indução magnética, cuja direção é perpendicular ao plano da mesma e cuja intensidade varia na taxa constante de  $0,01 \text{ T} \cdot \text{s}^{-1}$ . Sendo a resistividade do fio metálico igual a  $2 \cdot 10^{-8} \text{ ohm} \cdot \text{m}$ , qual a potência dissipada na espira, por efeito joule?

**25 Unicamp** A figura a seguir representa um circuito condutor fechado OPQR, imerso num campo de indução magnética  $\vec{B}$  estático e uniforme, perpendicular ao plano OPQR e penetrando no papel. Por meio da manivela M, põe-se o trecho OP a girar uniformemente, mantendo-se os contatos elétricos em O e P. Esboce o gráfico da corrente elétrica induzida no circuito OPQR, em função do tempo.



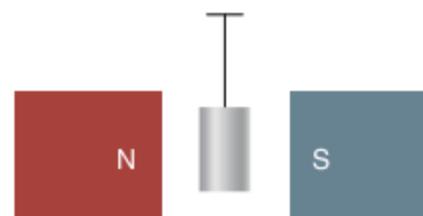
**26** Um quadro retangular de lados a e b é formado de fio condutor com resistência total R. Ele é disposto perpendicularmente às linhas de força de um campo de indução uniforme  $\vec{B}$ . A intensidade desse campo é reduzida a zero num tempo T. A carga elétrica total que circula pelo quadro nesse tempo é:

- zero.
- $\frac{Bab}{R}$
- $\frac{B \cdot \sqrt{ab}(a+b)}{R}$
- $\frac{Bab}{R \cdot T}$
- $\frac{B(a^2 + b^2)}{R}$

**27** O aparecimento de uma faísca elétrica entre os terminais de uma chave elétrica, ao se abrir o circuito elétrico, é devido:

- ao contato elétrico imperfeito dos terminais.
- à inércia da corrente interrompida.
- à autoindução do circuito.
- à histerese elétrica do circuito.
- à não linearidade da resistência da chave, quando aberta.

**28** Uma peça metálica maciça é posta a oscilar entre os polos de um ímã.

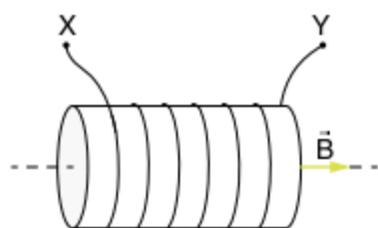


- (a) A peça levará mais tempo para atingir o repouso do que se oscilasse fora da região entre os dois polos, pois receberá energia do campo magnético.
- (b) A peça levará menos tempo para atingir o repouso, pois será freada pelo campo magnético.
- (c) Apareceu corrente induzida na peça sempre no mesmo sentido.
- (d) Não haverá influência do ímã sobre o movimento da peça.
- (e) Nenhuma das anteriores.

**29** Toda massa metálica móvel em campo magnético constante ou fixa em campo magnético variável dissipará calor, o que é explicado pela existência das correntes de Foucault. Para limitar essas correntes em máquinas elétricas, empregam-se:

- (a) peças metálicas maciças.
- (b) substâncias boas condutoras de calor.
- (c) lâminas metálicas finas empilhadas e isoladas.
- (d) substâncias de baixo calor específico.
- (e) nenhuma das anteriores.

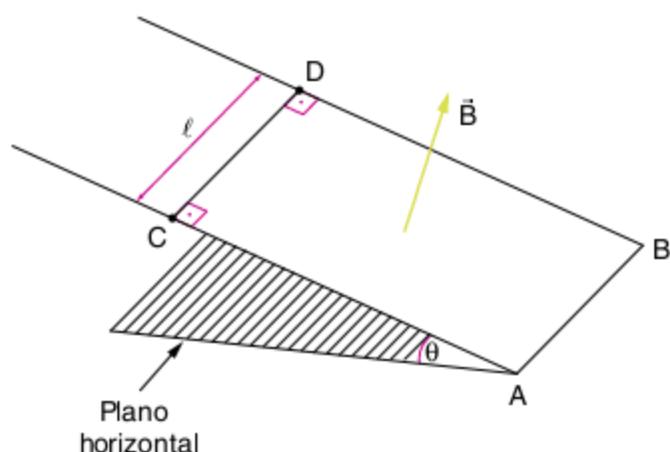
**30** Um solenoide é constituído por 100 espiras de raio igual a  $10/\sqrt{\pi}$  cm. Durante 0,10 s, provoca-se em seu interior uma variação de campo de indução  $\vec{B}$ , de 0 a  $4,0 \text{ Wb/m}^2$ . Esse campo surge e cresce de modo igual ao longo de todo o solenoide, sempre na direção e sentido indicados na figura:



Determine:

- a) a força eletromotriz média induzida em cada espira
- b) a força eletromotriz média induzida entre os pontos X e Y.
- c) as polaridades elétricas dos terminais X e Y, durante a variação de fluxo.

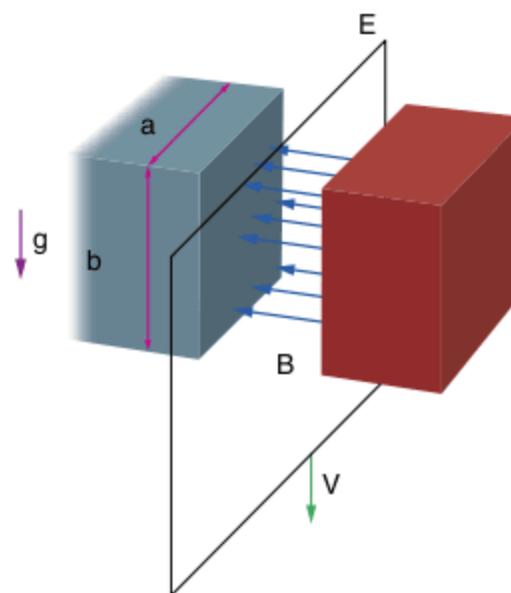
**31** Dois trilhos paralelos, inclinados de  $\theta$  em relação a um plano horizontal, são condutores ideais. As extremidades A e B dos trilhos são ligadas através de um condutor também ideal.



Uma haste CD, de comprimento  $l$ , massa  $m$  e resistência elétrica  $R$ , é abandonada a partir do repouso e desliza sem atrito, mantendo-se sempre perpendicular aos trilhos. Existe, no local, um campo magnético uniforme e perpendicular ao plano dos

trilhos, como mostra a figura. O campo de gravidade local tem módulo igual a  $g$ . Determine o módulo da velocidade máxima atingida pela haste, admitindo-se que isto ocorre antes de ela chegar aos extremos A e B. Despreze as influências do ar.

**32 Fuvest** Um procedimento para estimar o campo magnético de um ímã baseia-se no movimento de uma grande espira condutora E através desse campo. A espira retangular E é abandonada a ação da gravidade entre os polos do ímã de modo que, enquanto a espira cai, um de seus lados horizontais (apenas um) corta perpendicularmente as linhas de campo. A corrente elétrica induzida na espira gera uma força eletromagnética que se opõe a seu movimento de queda, de tal forma que a espira termina atingindo uma velocidade  $V$  constante. Essa velocidade é mantida enquanto esse lado da espira estiver passando entre os polos do ímã. A figura representa a configuração usada para medir o campo magnético, uniforme e horizontal, criado entre os polos do ímã.

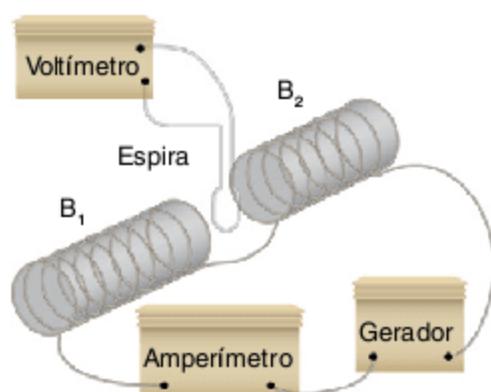


Espira:	
Massa M	0,016 kg
Resistência R	0,10 $\Omega$
Dimensões do ímã:	
Largura a	0,20 m
Altura b	0,15 m

As características da espira e do ímã estão apresentadas na tabela. Para a situação em que um dos lados da espira alcança a velocidade constante  $V = 0,40 \text{ m/s}$  entre os polos do ímã, determine:

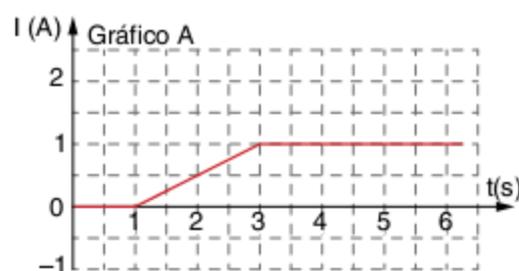
- a) a intensidade da força eletromagnética  $F$ , em N, que age sobre a espira, de massa  $M$ , opondo-se à gravidade no seu movimento de queda a uma velocidade constante.
- b) o trabalho realizado pela força de gravidade por unidade de tempo (potência), que é igual à potência  $P$  dissipada na espira, em watts.
- c) a intensidade da corrente elétrica  $i$ , em ampères, que percorre a espira, de resistência  $R$ .
- d) o campo magnético  $B$ , em tesla, existente entre os polos do ímã.

**33 Fuvest** Duas bobinas iguais,  $B_1$  e  $B_2$ , com seus eixos alinhados, são percorridas por uma mesma corrente elétrica e produzem um campo magnético uniforme no espaço entre elas. Nessa região, há uma espira, na qual, quando o campo magnético varia, é induzida uma força eletromotriz  $\varepsilon$ , medida pelo voltímetro. Quando a corrente  $I$ , que percorre as bobinas, varia em função do tempo, como representado no Gráfico A, mede-se  $\varepsilon_A = 1,0 \text{ V}$ , para o instante  $t = 2 \text{ s}$ .

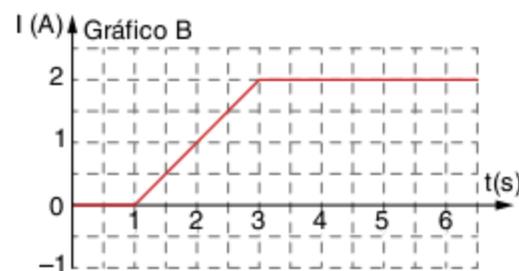


Para analisar esse sistema:

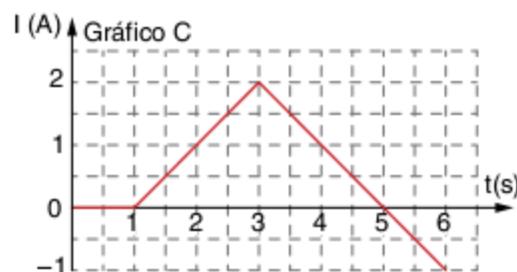
a) construa o gráfico  $R_A$ , da variação de  $\varepsilon$ , em função do tempo, para o intervalo entre 0 e 6 s, quando a corrente  $I$  varia como no Gráfico A.



b) determine o valor de  $\varepsilon_B$  para  $t = 2 \text{ s}$  e construa o gráfico  $R_B$ , da variação de  $\varepsilon$ , em função do tempo, para o intervalo entre 0 e 6 s, quando a corrente  $I$  varia como no Gráfico B.

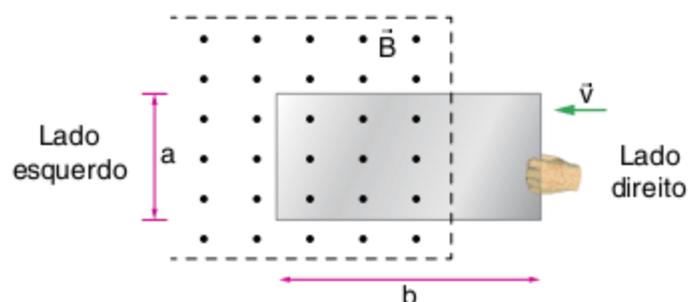


c) determine o valor de  $\varepsilon_C$  para  $t = 5 \text{ s}$  e construa o gráfico  $R_C$ , da variação de  $\varepsilon$ , em função do tempo, para o intervalo entre 0 e 6 s, quando a corrente  $I$  varia como no Gráfico C.



Note e Adote: A força eletromotriz induzida em uma espira é proporcional à variação temporal do fluxo do campo magnético em sua área.

**34 UFSC** Ao fazer uma demonstração em uma aula experimental, um professor de Física introduz uma espira metálica retangular de lados  $a$  e  $b$ , com velocidade constante  $\vec{v}$ , em uma região onde há um campo magnético  $\vec{B}$  constante, perpendicular ao plano da espira, como mostra a figura abaixo. O trecho esquerdo da espira, de comprimento  $a$ , tem resistência  $R$  e o restante dela tem resistência desprezível.



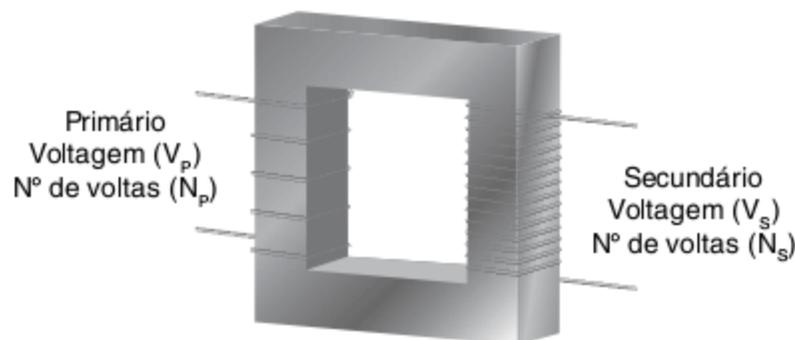
Assinale a(s) proposição(ões) correta(s).

- 01 Atua sobre o fio esquerdo da espira, de resistência  $R$  e comprimento  $a$ , uma força magnética de módulo  $\frac{B^2 a^2 v}{R}$ , direção horizontal e sentido da direita para a esquerda.
- 02 A transformação do trabalho mecânico realizado pelo professor em energia térmica na espira é explicada pelo princípio da conservação da energia.
- 04 O fluxo magnético dentro do plano da espira não varia, pois o campo magnético  $\vec{B}$ , na região, tem módulo constante.
- 08 A Lei de Lenz, que determina o sentido da corrente induzida na espira, é uma consequência do princípio da conservação da energia.
- 16 O sentido da corrente induzida na espira é horário.

Soma =

**35 UFSC** Na transmissão de energia elétrica das usinas até os pontos de utilização, não bastam fios e postes. Toda a rede de distribuição depende fundamentalmente dos transformadores, que ora elevam a tensão, ora a rebaixam. Nesse sobe e desce, os transformadores não só resolvem um problema econômico, como melhoram a eficiência do processo. O esquema abaixo representa esquematicamente um transformador ideal, composto por dois enrolamentos (primário e secundário) de fios enrolados nos braços de um quadro metálico (núcleo), e a relação entre as voltagens no primário e no secundário é dada

$$\text{por } \frac{V_p}{V_s} = \frac{N_p}{N_s}.$$

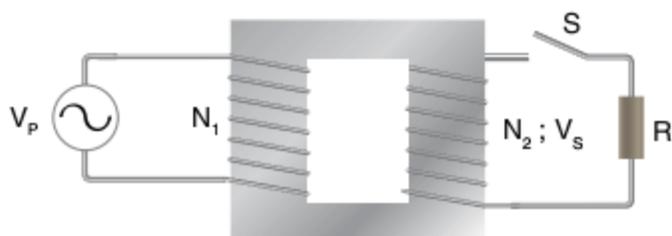


Em relação ao exposto, assinale a(s) proposição(ões) correta(s).

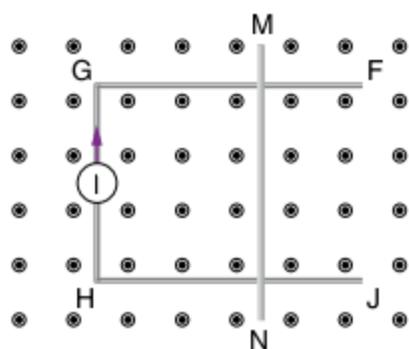
- 01 O princípio básico de funcionamento de um transformador é o fenômeno conhecido como indução eletromagnética: quando um circuito fechado é submetido a um campo magnético variável, aparece no circuito uma corrente elétrica cuja intensidade é proporcional às variações do fluxo magnético.
- 02 No transformador, pequenas intensidades de corrente no primário podem criar grandes intensidades de fluxo magnético, o que ocasionará uma indução eletromagnética e o aparecimento de uma voltagem no secundário.
- 04 O transformador acima pode ser um transformador de elevação de tensão. Se ligarmos uma bateria de automóvel de 12 V em seu primário (com 48 voltas), iremos obter uma tensão de 220 V em seu secundário (com 880 voltas).
- 08 Podemos usar o transformador invertido, ou seja, se o ligarmos a uma tomada em nossa residência (de corrente alternada) e aplicarmos uma tensão de 220 V em seu secundário (com 1000 voltas), obteremos uma tensão de 110 V no seu primário (com 500 voltas).
- 16 Ao acoplarmos um transformador a uma tomada e a um aparelho elétrico, como não há contato elétrico entre os fios dos enrolamentos primário e secundário, o que impossibilita a passagem da corrente elétrica entre eles, não haverá transformação dos valores da corrente elétrica, somente da tensão.
- 32 O fluxo magnético criado pelo campo magnético que aparece quando o transformador é ligado depende da área da seção reta do núcleo metálico.

Soma =

- 36 ITA** Considere o transformador da figura, onde  $V_p$  é a tensão no primário,  $V_s$  é a tensão no secundário,  $R$  um resistor,  $N_1$  e  $N_2$  são o número de espiras no primário e secundário, respectivamente, e  $S$  uma chave. Quando a chave é fechada, qual deve ser a corrente  $I_p$  no primário?



- 37 ITA** A figura mostra um circuito formado por uma barra fixa FGHI e uma barra móvel MN, imerso num campo magnético perpendicular ao plano desse circuito.



Considerando desprezível o atrito entre as barras e também que o circuito seja alimentado por um gerador de corrente constante  $I$ , o que deve acontecer com a barra móvel MN?

- (a) Permanece no mesmo lugar.
- (b) Move-se para a direita com velocidade constante.
- (c) Move-se para a esquerda com velocidade constante.
- (d) Move-se para a direita com aceleração constante.
- (e) Move-se para a esquerda com aceleração constante.

- 38 UFRN 2011** O inglês Michael Faraday (1791-1867) pode ser considerado um dos mais influentes cientistas de todos os tempos e seus trabalhos científicos ainda hoje têm repercussão na sociedade científico-tecnológica. Um dos mais importantes desses trabalhos é a lei de indução eletromagnética que leva seu nome – Lei de Faraday –, que trata de uma situação experimental envolvendo o ímã e uma espira. Essa lei pode ser enunciada como: “a força eletromotriz induzida em uma espira fechada é proporcional à variação do fluxo magnético que a atravessa e inversamente proporcional ao intervalo de tempo em que ocorre essa variação”.

Em relação à lei referida no texto, é correto afirmar que a força eletromotriz induzida na espira:

- (a) depende do produto da variação do fluxo magnético através da espira pelo intervalo de tempo.
- (b) não depende do movimento relativo entre o ímã e a espira.
- (c) depende do movimento relativo entre o ímã e a espira.
- (d) não depende da razão entre a variação do fluxo magnético através da espira pelo intervalo de tempo.

- 39 ITA** Considere uma espira retangular de lados  $a$  e  $b$  percorrida por uma corrente  $I$ , cujo plano da espira é paralelo a um campo magnético  $B$ . Sabe-se que o módulo do torque sobre essa espira é dado por  $\tau = IBab$ . Supondo que a mesma espira possa assumir qualquer outra forma geométrica, indique o valor máximo possível que se consegue para o torque.

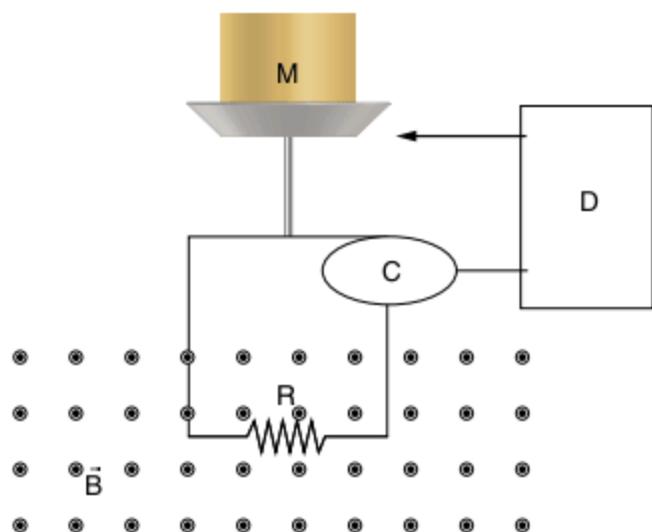
- (a)  $\frac{IB(a+b)^2}{\pi}$
- (b)  $IBab$
- (c)  $2IBab$
- (d)  $\frac{IBab}{2\pi}$
- (e)  $\frac{IBab}{\pi}$

- 40 Unifesp** Em uma balança analítica eletrônica, o prato que recebe a massa  $M$ , a ser aferida, fica sobre um suporte acoplado a uma bobina quadrada de lado 5,0 cm e com 10 voltas, que se ajusta perpendicularmente às linhas de campo magnético  $\vec{B}$  uniforme e constante, de módulo igual a 2,0 T, orientado para fora do plano da figura. A corrente elétrica produzida pela célula fotoelétrica  $C$ , ao percorrer a bobina, interage com o campo magnético, resultando em uma força magnética que sustenta o prato e o suporte na posição de equilíbrio mecânico. A balança está zerada quando o nível do braço indicador  $D$  coincide com o fundo do prato vazio. Quando a massa  $M$  é

colocada sobre o prato, o conjunto sai da posição de equilíbrio e tende a mover-se para baixo, desalinhando o braço indicador com o fundo do prato. Nesta situação surge uma corrente elétrica na bobina fazendo com que o fundo do prato volte à sua posição original.

Considere que a balança encontra-se inicialmente zerada e o fluxo do campo magnético sobre a bobina mantenha-se constante.

Dado:  $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ .



Determine:

- o módulo, a direção e o sentido da força magnética resultante sobre a bobina devido à massa de 10 g colocada sobre o prato.
- o sentido (horário ou anti-horário) da corrente elétrica na bobina necessária para equilibrar a massa de 10 g, bem como a potência elétrica dissipada pela bobina nessa situação. A resistência ôhmica  $R$  equivalente da bobina é  $50 \Omega$ .

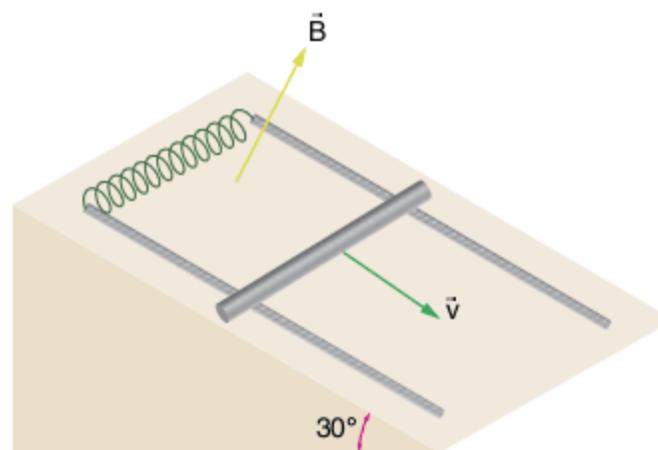
**41 ITA** A figura representa o campo magnético de dois fios paralelos que conduzem correntes elétricas.



A respeito da força magnética resultante no fio da esquerda, podemos afirmar que ela:

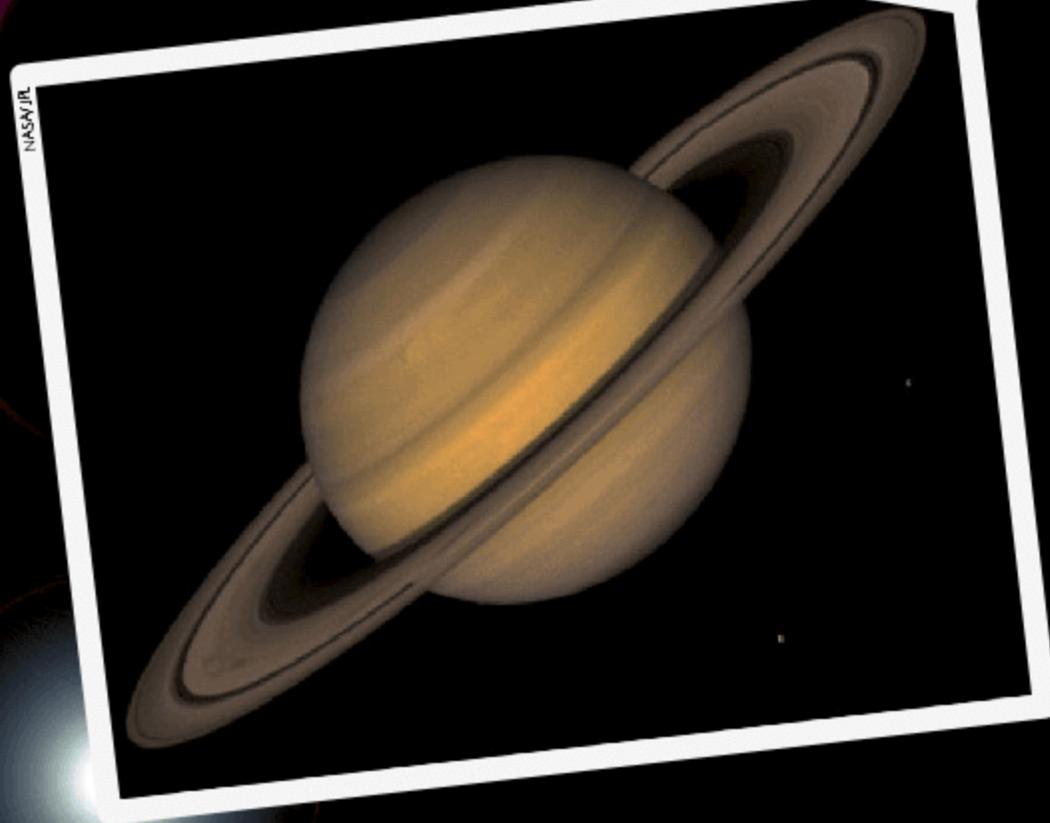
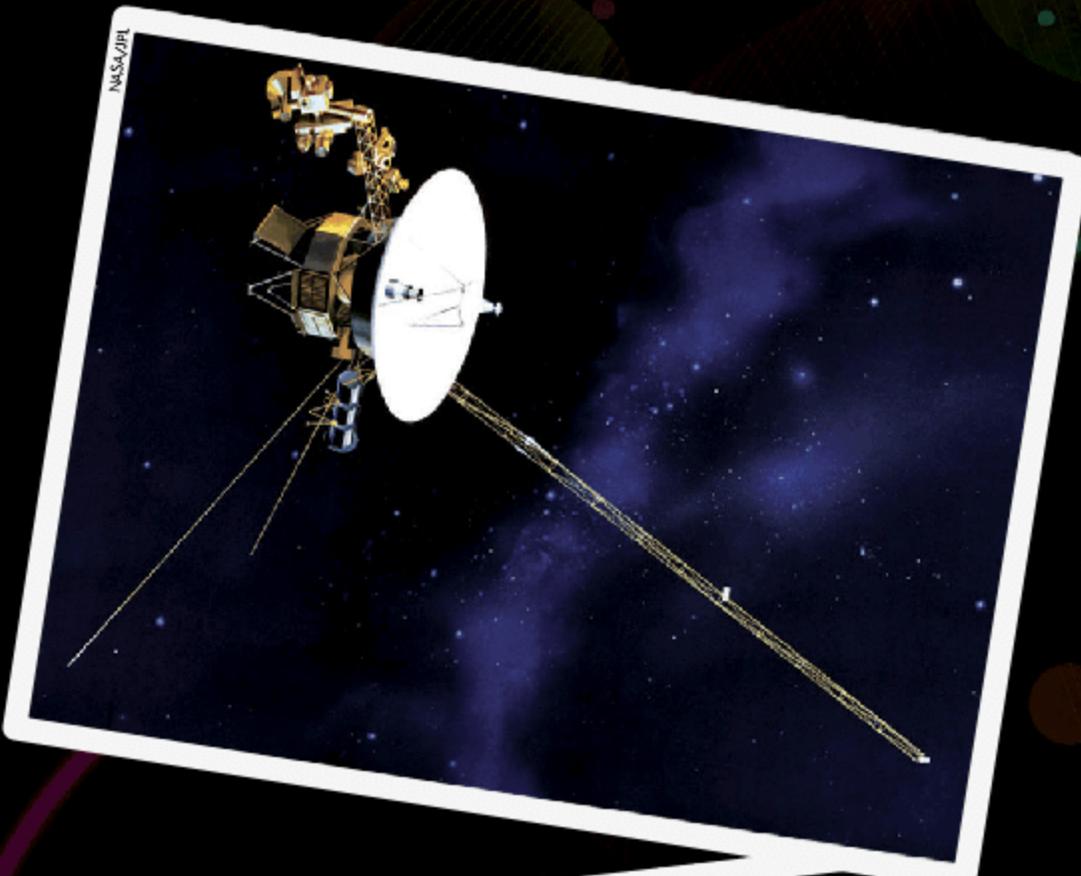
- atua para a direita e tem magnitude maior que a da força no fio da direita.
- atua para a direita e tem magnitude igual à da força no fio da direita.
- atua para a esquerda e tem magnitude maior que a da força no fio da direita.
- atua para a esquerda e tem magnitude igual à da força no fio da direita.
- atua para a esquerda e tem magnitude menor que a da força no fio da direita.

**42 ITA** Uma haste metálica com 5,0 kg de massa e resistência de  $2,0 \Omega$  desliza sem atrito sobre duas barras paralelas separadas de 1,0 m, interligadas por um condutor de resistência nula e apoiadas em um plano de  $30^\circ$  com a horizontal, conforme a figura. Tudo encontra-se imerso num campo magnético  $\vec{B}$ , perpendicular ao plano do movimento, e as barras de apoio têm resistência e atrito desprezíveis. Considerando que após deslizar durante um certo tempo a velocidade da haste permanece constante em 2,0 m/s, assinale o valor do campo magnético.



- 25,0 T
- 20,0 T
- 15,0 T
- 10,0 T
- 5,0 T

# Gravitação



"[...] eu derivo dos fenômenos celestes a força da gravidade, através da qual os corpos são atraídos para o Sol e para diversos planetas. Depois, a partir dessas forças gravitacionais e por proposições também matemáticas, deduzo o movimento dos planetas, dos cometas, da Lua e do mar."

Isaac Newton. *Princípios matemáticos da filosofia natural*. Londres: Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater, 1687.

Com base nas leis físicas enunciadas por Newton em sua obra *Princípios matemáticos de filosofia natural*, o homem foi capaz de compreender melhor o movimento dos astros e explorar o espaço. Neste capítulo, nós nos dedicaremos ao estudo da lei da gravitação universal e de outras leis físicas que regem o movimento do astros.

## Sistema Solar

Desde a antiguidade o homem busca uma maior compreensão dos fenômenos relacionados aos astros. Questões acerca do movimento dos corpos celestes, os eclipses, as fases da Lua, os cometas, o fenômeno das marés e outros fenômenos celestes sempre intrigaram o homem, que, ao longo dos séculos, desenvolveu modelos para descrevê-los e prevê-los.

O astrônomo grego Cláudio Ptolomeu propôs, no século II d.C., um dos modelos cosmológicos mais famosos, o **modelo geocêntrico**. Em sua famosa obra *Almagesto*, Ptolomeu colocou a Terra no centro do universo. Embora esse modelo não seja atualmente aceito, ele foi adotado por centenas de anos, e sua descrição matemática era capaz de explicar muitos dos fenômenos astronômicos observados na época. De acordo com o modelo geocêntrico de Ptolomeu, a Lua e o Sol se moveriam em órbitas circulares em torno da Terra, e os planetas descreveriam órbitas circulares em torno de um ponto, em uma trajetória chamada **epiciclo**; esse ponto, por sua vez, se moveria em outra órbita circular, em torno da Terra, em uma trajetória chamada **deferente**.

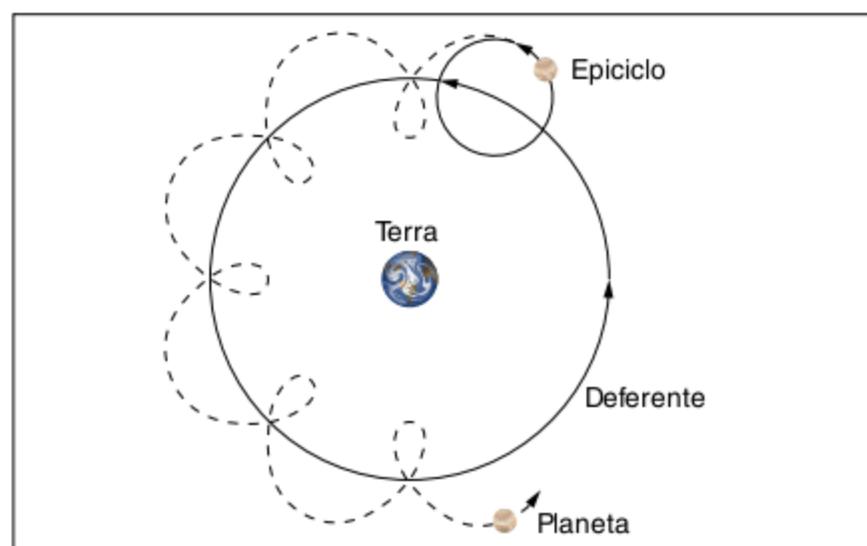


Fig. 1 Trajetória dos planetas em torno da Terra, de acordo com o modelo geocêntrico de Ptolomeu.

No século XVI, o astrônomo e matemático polonês Nicolau Copérnico (1473-1543) propôs um modelo distinto no qual o Sol ocupava o centro do universo. Esse modelo, conhecido como modelo **heliocêntrico**, já tinha sido proposto pelo astrônomo grego Aristarco no século III a.C., porém, Copérnico teria sido o primeiro a apresentar seu caráter científico, descrevendo de maneira satisfatória o movimento dos astros, embora tenha sofrido muitas resistências para ter seu modelo aceito na comunidade científica e religiosa da época.

Já no século XVII, utilizando as observações astronômicas do dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601), o alemão Johannes Kepler (1571-1630) iniciou uma revolução científica propondo leis que eram capazes de descrever com muita precisão o movimento dos planetas. Ao contrário de praticamente todos os seus antecessores, que insistiam que as órbitas planetárias precisavam ter a perfeição mística circular, Kepler afirmou que as órbitas eram elípticas. Embora as leis formuladas por Kepler fossem empíricas, já que ele não entendia ainda o conceito de força e não sabia por que os planetas seguiam aquelas órbitas, essas leis serviriam de base para os estudos do cientista inglês Isaac Newton (1643-1727) no desenvolvimento da Lei da Gravitação Universal.



Fig. 2 Retratos de Tycho Brahe (esquerda) e Johannes Kepler (direita) pintados no século XVII.

Newton é reconhecido como um dos cientistas que mais contribuíram para o desenvolvimento das ciências na história da humanidade. Dotado de inteligência e capacidade analítica extraordinárias, Newton contribuiu significativamente para o desenvolvimento da Física, principalmente nos ramos da Mecânica, Gravitação e Óptica e da Matemática com o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral.

Uma das grandes conclusões enunciadas em sua obra mais famosa, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (*Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*), mais conhecida como *Principia*, publicada em 1687, é que as leis da natureza são as mesmas para a Terra e nos corpos celestes. Hoje, essa afirmação pode parecer óbvia, porém, antes de Newton, existia uma convicção de que na Terra as leis que governavam o nosso dia a dia eram diferentes das que governavam os movimentos dos corpos celestes.

Antes mesmo das conclusões de Newton, o italiano Galileu Galilei (1564-1642) também havia estudado os efeitos da gravidade terrestre por meio de experimentos com corpos acelerados em planos inclinados. No entanto, Newton foi além e conseguiu formular matematicamente as leis que regem os movimentos dos corpos, as chamadas Leis de Newton.

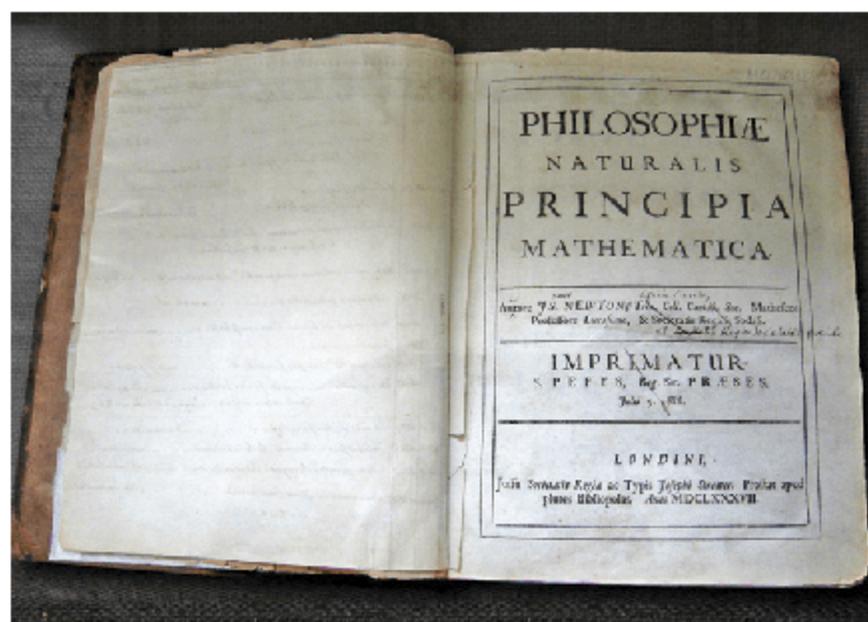


Fig. 3 Primeira edição do *Principia*, com anotações do próprio Newton.

Embora a teoria desenvolvida por Newton seja precisa, simples e prática, ela não explica de maneira satisfatória alguns fenômenos mais complexos, como a precessão do periélio de Mercúrio (uma variação periódica no formato da órbita de Mercúrio em torno do Sol).

Em 1915, um jovem físico alemão chamado Albert Einstein (1879-1955) publicou a sua Teoria da Relatividade Geral, que conseguiu explicar satisfatoriamente algumas anomalias observadas nos movimentos planetários.

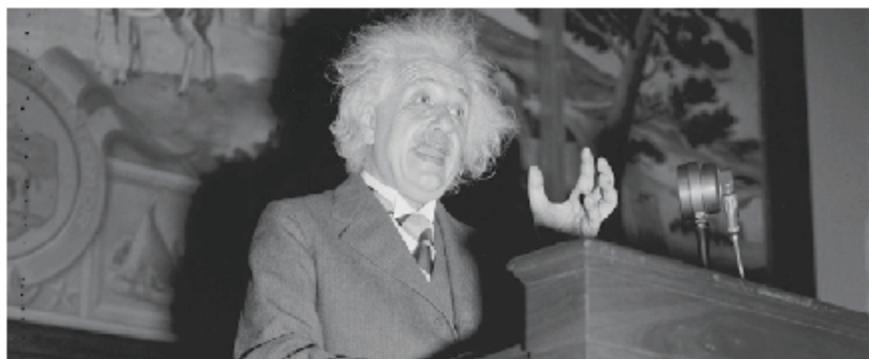


Fig. 4 Albert Einstein.

Atualmente, existem estudos avançados sobre buracos negros, expansão do universo, variações temporais da constante gravitacional e teorias que podem explicar de maneira unificada a gravitação e o eletromagnetismo.

Assim, focando o estudo em nosso Sistema Solar, pode-se observar uma estrela, o Sol, e **oito planetas**: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno, nessa ordem a partir do Sol. Plutão deixou de ser um planeta em 2006 e foi reclassificado como planeta-anão, de acordo com União Astronômica Internacional. Existem, também, vários satélites naturais (a Lua é um satélite natural da Terra, e Júpiter apresenta mais de 60 luas) e artificiais (satélites de telecomunicações e estações espaciais, por exemplo).

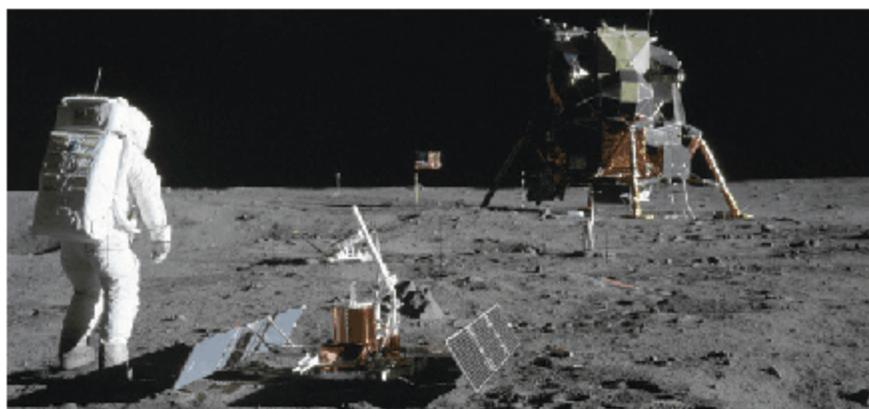


Fig. 5 Foto do astronauta Buzz Aldrin na superfície da Lua, tirada pelo astronauta Neil Armstrong em julho de 1969, durante a missão da Apollo 11.

Em Gravitação, como as distâncias entre planetas, estrelas e galáxias são muito grandes, é comum não se utilizar a unidade de medida de comprimento metro mas, sim, adotarmos outras unidades de medida, como o **ano-luz** e a **unidade astronômica (UA)**.

- **1 ano-luz:** é a distância que a luz percorre, no vácuo, durante um ano juliano (definido pela União Astronômica Internacional como o período de 365,25 dias) e vale aproximadamente  $9,5 \cdot 10^{15}$  metros. Lembrar que a velocidade da luz no vácuo é cerca de  $3 \cdot 10^8$  m/s.
- **1 UA:** é a distância média entre o Sol e a Terra, que vale aproximadamente  $1,5 \cdot 10^{11}$  m.

Devido às grandes dimensões envolvidas no estudo da Gravitação, é importante notar que boa parte das ilustrações do Sistema Solar não está em escala. Como exemplo, pode-se citar o diâmetro da Lua, que é aproximadamente 1/4 do diâmetro da Terra, enquanto que o diâmetro do Sol mede cerca de 109 vezes o diâmetro da Terra.

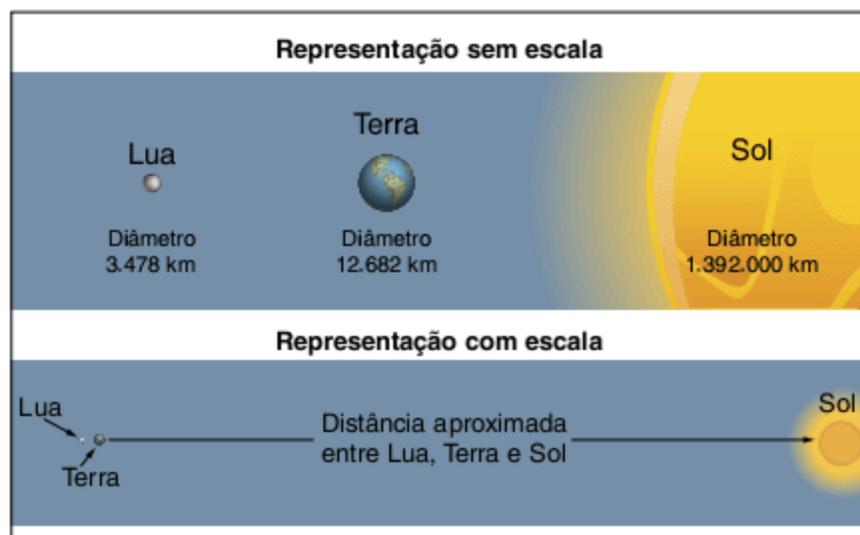


Fig. 6 Distância e tamanho relativos da Lua, Terra e Sol.

A Terra apresenta vários movimentos distintos, como a translação, rotação, precessão e nutação. Todos os planetas do Sistema Solar, exceto Vênus e Urano, têm o mesmo sentido de rotação, de Oeste para Leste. O movimento de translação da Terra em torno do Sol consiste em uma trajetória elíptica, que será analisada com mais detalhes na próxima seção.

As estações do ano (primavera, verão, outono e inverno) não estão relacionadas com o fato da órbita da Terra ser elíptica. Assim, não se pode afirmar que é verão porque a Terra está próxima do Sol (senão o verão aconteceria no Hemisfério Norte e no Hemisfério Sul ao mesmo tempo). As estações do ano existem pois o eixo de rotação terrestre está inclinado em relação ao plano da órbita do sistema Terra-Sol, o que faz com que a distribuição dos raios solares seja desigual nos hemisférios ao longo do ano.

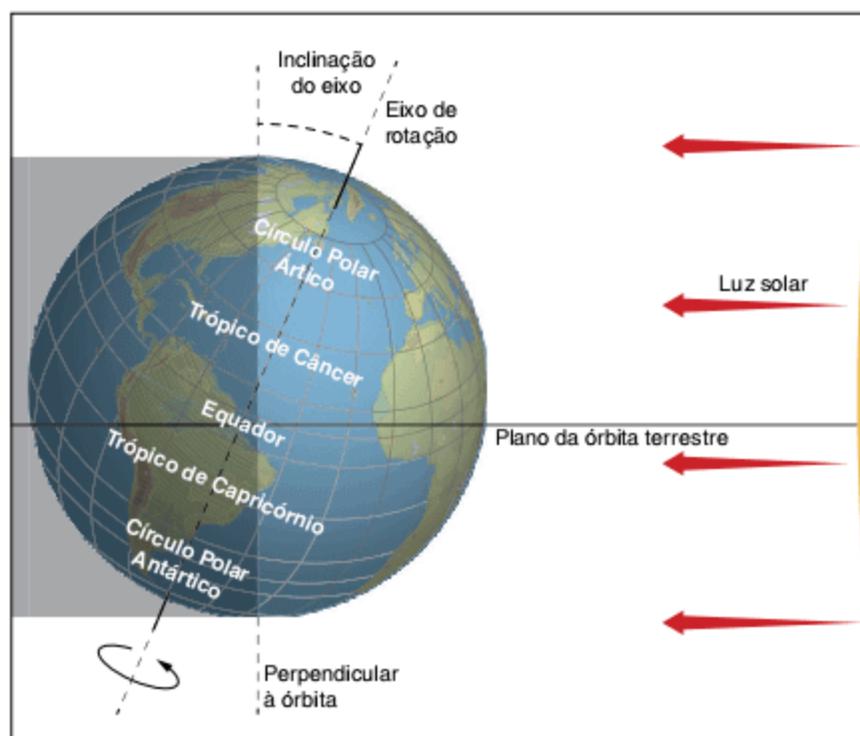


Fig. 7 Esquema com o Hemisfério Norte inclinado em direção ao Sol – nessa situação, é verão no Hemisfério Norte, e inverno no Hemisfério Sul.

**Exercício resolvido**

**1 UFRGS (Adapt.)** A astronomia estuda objetos celestes que, em sua maioria, se encontram a grandes distâncias da Terra. De acordo com a mecânica newtoniana, os movimentos desses objetos obedecem à Lei da Gravitação Universal.

Considere as seguintes afirmações, referentes às unidades empregadas em estudos astronômicos.

- I. Um ano-luz corresponde à distância percorrida pela luz em um ano.
- II. Uma unidade astronômica (1 UA) corresponde à distância média entre a Terra e o Sol.
- III. As estações do ano existem devido à trajetória elíptica da Terra em torno do Sol.

Quais estão corretas?

- (a) Apenas I.                      (c) Apenas III.                      (e) I, II e III.
- (b) Apenas II.                      (d) Apenas I e II.

**Resolução:**

- I. Correta, já que essa é a definição de ano-luz.
- II. Correta, já que essa é a definição de unidade astronômica.
- III. Falsa, já que as estações do ano são originadas pelo fato do eixo imaginário de rotação terrestre estar inclinado em relação ao plano da órbita da Terra em torno do Sol.

Alternativa: D.

**Leis de Kepler**

Com base em extensas observações, Kepler conseguiu realizar uma descrição geométrica muito precisa da órbita dos planetas em torno do Sol. Ele enunciou três leis básicas do movimento orbital, as chamadas **Leis de Kepler**.

Essas leis não valem somente para o Sistema Solar, mas também para quaisquer sistemas em que a massa do corpo central seja muito maior que a massa do corpo em órbita.

Antes de detalhar as Leis de Kepler, é essencial relembrar importantes conceitos geométricos da elipse e suas principais propriedades.

Uma elipse é um tipo de seção cônica, formada por um plano que corta um cone em uma curva fechada.

A construção da elipse pelo método geométrico não é complicada. Inicialmente, é necessário fixar dois pontos em uma folha de papel, com uma tachinha, por exemplo. Essas tachinhas são os focos da elipse. Depois, é preciso prender cada uma das extremidades de um pedaço de barbante em uma tachinha. Com um lápis apoiado no barbante, sempre esticado, contorna-se as tachinhas, desenhando uma elipse (Fig. 8).

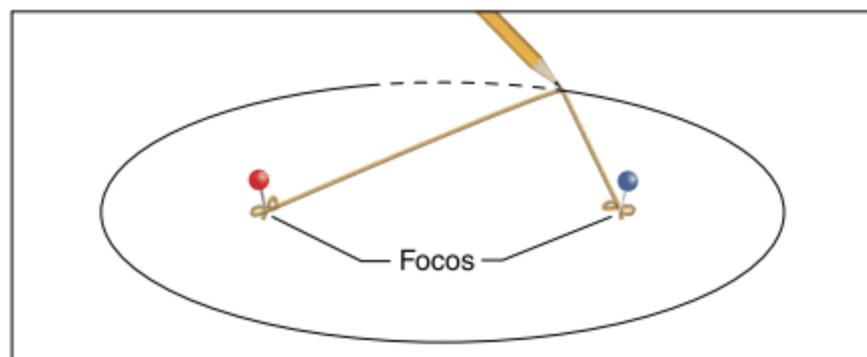


Fig. 8 Método de construção da elipse.

Todas as elipses apresentam dois pontos importantes chamados **focos**. Quando os focos estão muito distantes, a elipse se torna mais achatada, ou seja, mais excêntrica; conforme os focos se aproximam, ela vai se tornando mais próxima de uma circunferência, vai se tornando menos excêntrica. Se os focos coincidirem em um único ponto, temos um caso particular de elipse, a circunferência.

**SAIBA MAIS**

**Galerias do sussurro**

Algumas superfícies em formatos de elipsoides, obtidos com a rotação da elipse em torno de um dos seus eixos principais, têm aplicação em refletores odontológicos, em aparelhos para fragmentar cálculos renais (litotripsia extracorpórea) e na arquitetura, por conta das interessantes propriedades ópticas e acústicas. Raios sonoros ou luminosos que passam por um dos focos e são refletidos nas paredes do elipsoide passam pelo outro foco também.

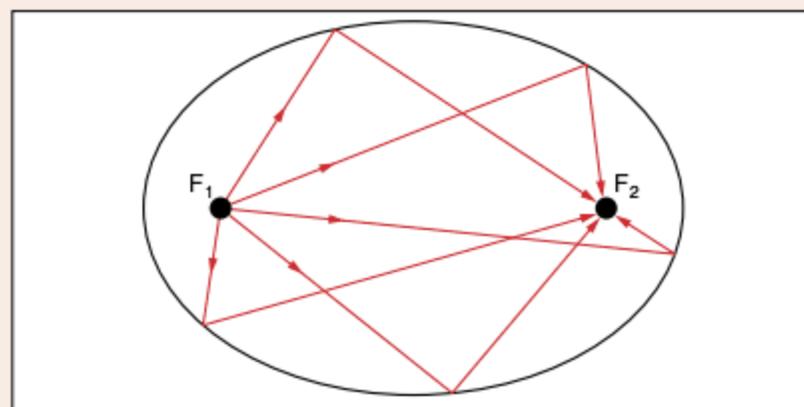


Fig. 9 Em superfícies elípticas, raios sonoros ou luminosos que passam pelo foco são refletidos para o outro foco.

Muitos prédios famosos são projetados para explorar essa propriedade das superfícies elípticas, como as chamadas galerias do sussurro (*whispering galleries*). A catedral de Saint Paul, maior igreja de Londres, projetada pelo arquiteto e matemático Christopher Wren e que foi palco de cerimônias importantes, como o casamento da princesa Diana e o funeral do político britânico Winston Churchill, é um exemplo clássico de galeria do sussurro. Apesar de a catedral ser muito grande, se uma pessoa está em um ponto específico da catedral, em um dos focos, e outra está exatamente sobre o outro foco, elas podem conversar sussurrando que vão se ouvir perfeitamente, mesmo que outras pessoas estejam falando em outros pontos no mesmo instante.

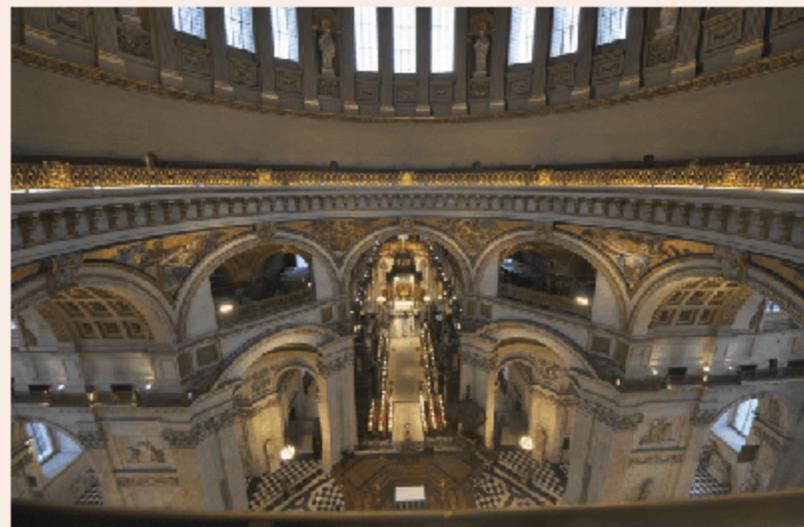


Fig. 10 Catedral de St Paul, Londres (2011).

Uma elipse tem dois eixos principais, o eixo maior e o eixo menor. O eixo maior tem comprimento que pode ser denominado de  $2a$ . Assim, metade do eixo maior da elipse – o **semieixo maior** – tem comprimento  $a$  e é também chamado de **raio médio** da elipse. Analogamente, o **semieixo menor**, tem comprimento  $b$ .

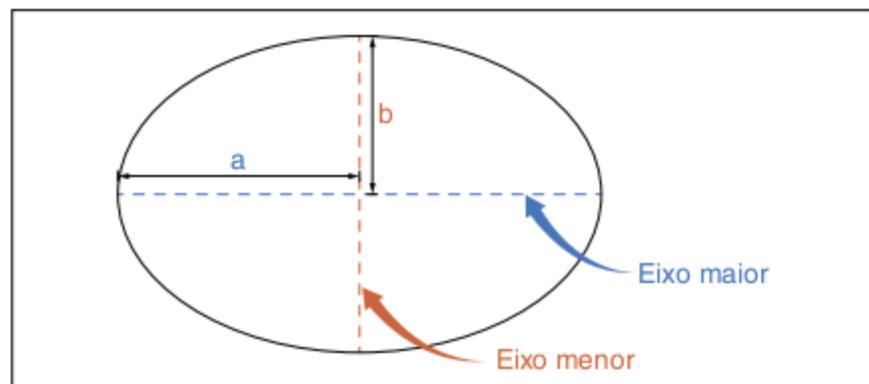


Fig. 11 Eixos principais da elipse.

### Primeira Lei de Kepler – Lei das Órbitas

**“Os planetas descrevem órbitas elípticas, onde o Sol ocupa um dos focos.”**

De acordo com Kepler, as órbitas dos planetas ao redor do Sol são **elípticas**, e o Sol ocupa um dos focos da elipse; com base nessa observação, postulou a Primeira Lei de Kepler. No outro foco e no centro da elipse, não existem corpos celestes. O ponto da órbita em que o planeta se encontra mais afastado do Sol é chamado de **afélio**; já o ponto no qual ele está mais próximo do Sol se chama **periélio**. Para satélites orbitando a Terra, esses pontos são chamados de apogeu e perigeu, respectivamente.

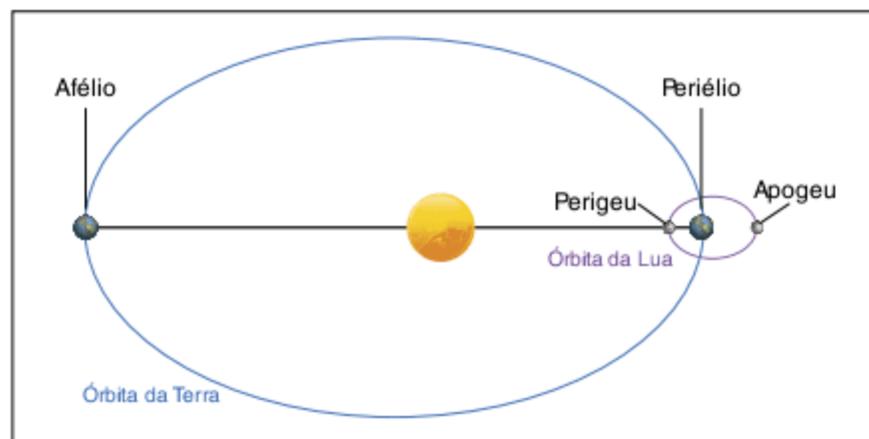


Fig. 12 Esquema das órbitas elípticas da Lua em torno da Terra e da Terra em torno do Sol. Ilustração fora de escala.

## ATENÇÃO!

As órbitas dos planetas do Sistema Solar não são circulares, são elípticas. O Sol está localizado em um dos focos, e não no centro da elipse.

Só se pode considerar que o Sol permanece em um dos focos da elipse pois sua massa é muito maior do que a massa de qualquer outro planeta ou satélite do Sistema Solar. A massa do Sol representa aproximadamente 99,9% da massa de todo o Sistema Solar. Veremos adiante que, em um sistema de dois corpos, é o centro de massa desse sistema que está no foco da elipse.

Apesar de serem todas elípticas, as órbitas dos planetas em torno do Sol apresentam excentricidades distintas. Enquanto a Terra tem uma órbita de baixa excentricidade, ou seja, sua órbita é aproximadamente circular – embora não seja exatamente uma circunferência –, Mercúrio, por sua vez, tem uma alta excentricidade em sua órbita.

Planeta	Excentricidade
Mercúrio	0,2056
Vênus	0,0068
Terra	0,0167
Marte	0,0934
Júpiter	0,0484
Saturno	0,0542
Urano	0,0472
Netuno	0,0097

Tab. 1 Excentricidade da órbita dos planetas do Sistema Solar. Quanto menor a excentricidade, mais próxima de uma circunferência é a órbita.

Newton, por meio do cálculo diferencial e integral, conseguiu deduzir que as órbitas fechadas devem ser elípticas se existir, entre os corpos, uma força gravitacional que dependa da razão direta das massas e do inverso do quadrado da distância. Se a força gravitacional não dependesse do inverso do quadrado da distância, a órbita dos planetas não seria necessariamente elíptica, e a Primeira Lei de Kepler poderia não ser válida.

### Segunda Lei de Kepler – Lei das Áreas

**“O vetor posição de um planeta varre áreas iguais em tempos iguais.”**

O vetor posição de um planeta liga o centro do Sol, que está em um dos focos da elipse, à posição do planeta. Conforme o planeta se movimentava na órbita elíptica, o vetor posição vai mudando de direção, sentido e módulo. Esse vetor varre uma certa área durante o movimento do planeta.

Kepler percebeu que, se duas áreas varridas, em regiões distintas da elipse, eram iguais, os intervalos de tempo para o vetor varrer essas áreas também seriam iguais e, com isso, foi postulada a Segunda Lei de Kepler (Fig. 13).

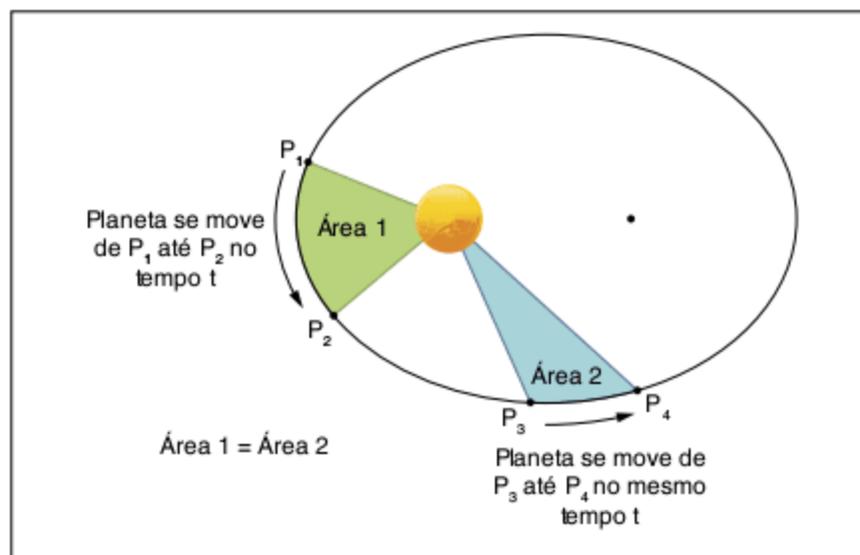


Fig. 13 Esquema da 2ª Lei de Kepler, segundo a qual as áreas varridas serão iguais em tempos iguais de percurso.

Uma das consequências importantes dessa lei é que a velocidade do planeta não pode ser constante durante o movimento orbital. Quando o planeta está em posições mais próximas do Sol, ele se movimenta com velocidade maior do que quando está em posições mais afastadas, ou seja, a velocidade é máxima no periélio e mínima no afélio, obedecendo, assim, à Lei das Áreas. Portanto, o movimento em um trecho da elipse é acelerado, enquanto, no outro trecho, é retardado.



Fig. 14 A velocidade é máxima no periélio e mínima no afélio.

## ATENÇÃO!

A velocidade de um planeta não é constante durante o movimento orbital. Na figura a seguir, repare que o intervalo de tempo para ir da posição A até a posição B não é o mesmo para ir da posição B até a posição A, pois as áreas varridas pelo vetor posição são distintas.

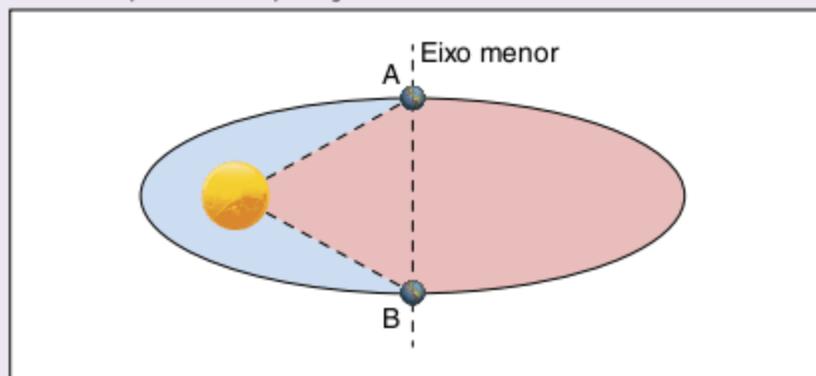


Fig. 15 A área varrida pelo vetor posição de A até B (azul) é menor do que a área varrida de B até A (vermelho). Portanto, os intervalos de tempo também são distintos, sendo  $t_{AB} < t_{BA}$ .

Outra consequência importante da 2ª Lei de Kepler é que a velocidade areolar do planeta é constante. Não confunda velocidade areolar com a velocidade escalar da Cinemática: a velocidade escalar do planeta, que pode ser dada em km/s, por exemplo, é variável, porém a área percorrida em um intervalo de tempo, denominada velocidade areolar, é constante. Lembrando que a área total de uma elipse é dada por  $A = \pi ab$ , temos:

$$v_{\text{Areolar}} = \frac{\text{Área}}{\Delta t} = \frac{\pi ab}{T} = \text{constante}$$

- a: semieixo maior (raio médio)
- b: semieixo menor
- T: período de revolução

Ainda em decorrência da Lei das Áreas, podemos citar a relação entre a velocidade do planeta e o módulo do vetor posição, tanto no afélio quanto no periélio. Nessas posições, para um pequeno intervalo de tempo, pode-se considerar que os arcos descritos pelo planeta são aproximadamente segmentos de reta. Como as áreas são iguais em tempos iguais, temos:

$$A_P = A_A \Rightarrow \Delta s_P r_P = \Delta s_A r_A$$

Dividindo ambos os membros da equação pelo intervalo de tempo, temos:

$$\frac{\Delta s_P}{\Delta t} r_P = \frac{\Delta s_A}{\Delta t} r_A \Rightarrow v_P r_P = v_A r_A$$

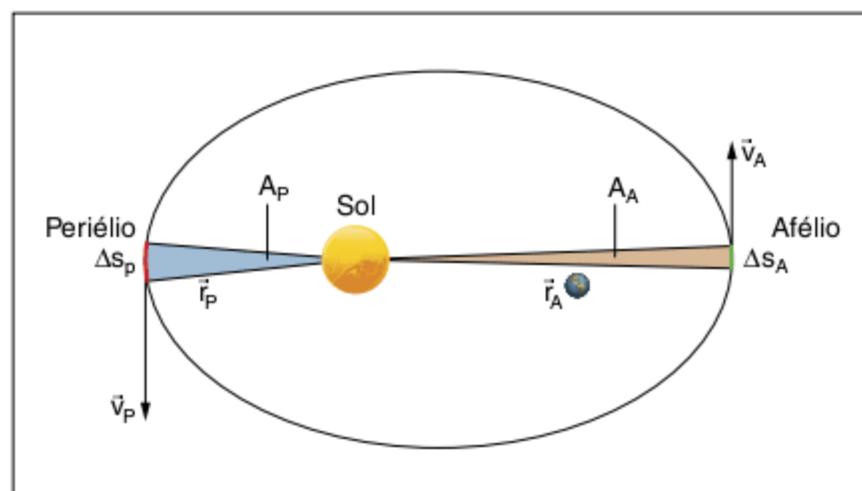


Fig. 16 Representação da Lei das Áreas.

Veremos a seguir que a força responsável por manter os planetas em órbita é a força gravitacional, que é um tipo de força central (com uma direção que passa sempre pela reta que une os corpos). Diferentemente da 1ª Lei de Kepler, a 2ª Lei é válida para todas as forças centrais, inclusive a força nula. Sendo assim, não é necessário que a força dependa do inverso do quadrado da distância.

## Terceira Lei de Kepler – Lei dos Períodos

**"O cubo do raio médio da órbita de um planeta é proporcional ao período de revolução ao quadrado"**

O período de revolução de um planeta é o tempo necessário para que ele complete uma volta em torno do Sol. Para a Terra, esse período dura aproximadamente 365 dias, chamado de ano terrestre. Kepler descobriu que existe uma relação matemática entre o período de um planeta e o raio médio (semieixo maior) da órbita, de tal modo que:

$$\frac{a^3}{T^2} = K$$

- a: semieixo maior (raio médio da órbita)
- T: período de revolução
- K: constante de Kepler

Dessa forma, quanto mais distante o planeta estiver do Sol, maior a duração de seu ano. Com a Lei dos Períodos, é possível prever qual a duração do ano de outros planetas que também se movimentam ao redor do Sol.

Planeta	Raio médio (UA)	Período (anos terrestres)
Mercúrio	0,387	0,24
Vênus	0,723	0,62
Terra	1,000	1,000
Marte	1,524	1,88
Júpiter	5,203	11,86
Saturno	9,539	29,46
Urano	19,191	84,01
Netuno	30,061	164,79

Tab. 2 Raio médio e período orbital dos planetas do Sistema Solar.

É importante ressaltar que essa relação só pode ser feita para corpos que orbitam em torno da mesma massa central, ou seja, a constante de Kepler muda se o corpo central for diferente do Sol.

A 3ª Lei de Kepler foi deduzida por Newton e só é válida para forças que dependam do inverso do quadrado da distância, como é o caso da força gravitacional. Essa lei independe da excentricidade, no caso das órbitas elípticas, e praticamente independe da massa do corpo em movimento orbital, já que estamos considerando a massa do corpo central muito maior que a massa dos corpos ao seu redor.

### Exercícios resolvidos

**2** Adotando o Sol como referencial, aponte a alternativa que condiz com a 1ª Lei de Kepler.

- (a) As órbitas planetárias são curvas quaisquer, desde que fechadas.
- (b) As órbitas planetárias são espiraladas.
- (c) As órbitas planetárias não podem ser circulares.
- (d) As órbitas planetárias são elípticas, com o Sol ocupando o centro da elipse.
- (e) As órbitas planetárias são elípticas, com o Sol ocupando um dos focos da elipse.

#### Resolução:

A 1ª Lei de Kepler afirma que as órbitas são elípticas, com o Sol em um dos focos da elipse.

Alternativa: E.

**3 Unesp** A Terra descreve uma elipse em torno do Sol cuja área é  $A = 6,98 \times 10^{22} \text{ m}^2$ .

- a) Qual a área varrida pelo raio que liga a Terra ao Sol desde zero hora do dia 1º de abril até as 24 horas do dia 30 de maio do mesmo ano?
- b) Qual foi o princípio ou lei que você usou para efetuar o cálculo acima?

#### Resolução:

- a) Nesse intervalo de tempo, temos 2 meses. Para 12 meses, a área varrida pelo vetor posição é a área total da elipse. Então, em 2 meses, temos:

$$A = \frac{60}{365} \cdot 6,98 \cdot 10^{22} \Rightarrow A \approx 1,15 \cdot 10^{22} \text{ m}^2$$

- b) Foi utilizada a 2ª Lei de Kepler, também denominada de Lei das Áreas; assim, as áreas serão iguais em tempos iguais. Portanto, 60/365 do tempo nos fornecerá 60/365 da área.

**4 Cesgranrio** O raio médio da órbita de Marte em torno do Sol é aproximadamente quatro vezes maior do que o raio médio da órbita de Mercúrio em torno do Sol. Assim, a razão entre os períodos de revolução,  $T_A$  e  $T_B$ , de Marte e de Mercúrio, respectivamente, vale aproximadamente:

#### Resolução:

Como Marte e Mercúrio orbitam em torno da mesma massa central, podemos aplicar a 3ª Lei de Kepler:

$$\frac{R_A^3}{T_A^2} = \frac{R_B^3}{T_B^2} \Rightarrow \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2 = \left(\frac{R_A}{R_B}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2 = 4^3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2 = 64 \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = 8$$

## Força gravitacional

Em seus estudos sobre o movimento planetário, Kepler considerava, erroneamente, que os planetas eram empurrados ao longo de sua órbita por uma força emanada pelo Sol. Kepler enunciou, inclusive, uma 4ª lei, pouco conhecida (justamente por não ser válida sempre), chamada lei das distâncias. Ela afirmava que a velocidade do planeta é, em qualquer instante de seu movimento orbital, proporcional à distância do planeta ao Sol. Hoje sabemos que essa relação só se mostra válida no afélio e no periélio.

Com base nas conclusões de Kepler sobre as órbitas dos planetas, Newton propôs que a força de interação entre massas é atrativa e depende da relação direta das massas e do inverso do quadrado da distância entre elas; ou seja, se a distância dobra, a força se reduz a um quarto, e se a distância cair pela metade, a força quadruplica de valor, e assim por diante.

Considerando essa força, denominada **força gravitacional**, é possível obter equações que descrevem as órbitas dos planetas de maneira muito precisa e que determinam a trajetória exata para enviar satélites a outros planetas.

A força gravitacional é a mais dominante em escala cósmica, pois atua a longas distâncias nos corpos celestes, sem a necessidade de contato direto entre os corpos, que geralmente têm grandes concentrações de massa. Ela é responsável por manter a órbita dos planetas em torno do Sol e manter a Terra agregada (senão houvesse a atração gravitacional, não haveria a formação de grandes corpos celestes como planetas, asteroides entre outros). Ela também mantém o Sol coeso, já que a força gravitacional se contrapõe a forças como aquelas resultantes das reações nucleares que acontecem no interior do Sol, impedindo, assim, que ele se desintegre. Embora as forças elétrica e magnética também atuem sem a necessidade de contato direto, elas são menos significativas em escala cósmica, já que o universo é considerado eletricamente neutro.

A força gravitacional é dada pela **Lei da Gravitação Universal**, chamada assim por atuar do mesmo modo entre todos os corpos e em qualquer região do universo. Essa lei pode ser expressa matematicamente por:

$$F_G = \frac{GMm}{d^2}$$

$F_G$  = força gravitacional [N]

$G$  = constante de gravitação universal  $\left[ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \right]$

$M$  e  $m$  = massas dos corpos [kg]

$d$  = distância entre os corpos [m]

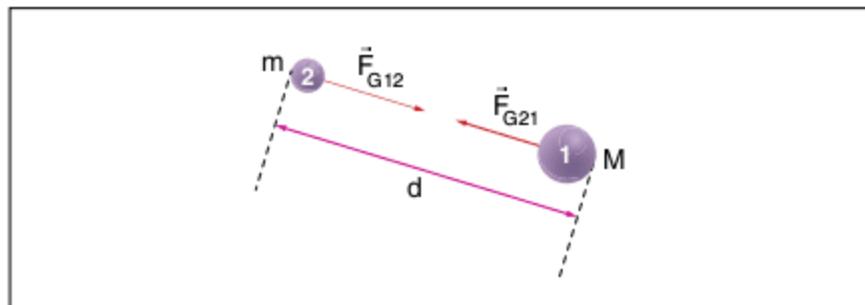


Fig. 17 Interação gravitacional entre dois corpos.

As forças  $\vec{F}_{G12}$  e  $\vec{F}_{G21}$  formam um par ação-reação, portanto apresentam as seguintes características:

- mesmo módulo (mesmo que as massas que interagem sejam diferentes).
- mesma direção.
- sentidos opostos.
- atuam em corpos distintos.
- mesma natureza (gravitacional).
- mesma linha de ação (alinhados).

## ATENÇÃO!

**Força gravitacional** e **força peso** são sinônimos. Ambos os termos se referem à interação entre massas.

Parece estranho, mas, quando alguém pula, a Terra está puxando a pessoa para baixo ao mesmo tempo em que a pessoa puxa a Terra para cima! Ou seja, a Terra se move em direção à pessoa quando ela pula, porém com uma aceleração muito pequena. No entanto, como calcular a aceleração da Terra nessa situação? Veja o exemplo:

### Exercício resolvido

**5** Determine a aceleração da Terra quando um homem, de massa  $m = 60 \text{ kg}$ , está na altura máxima de um salto vertical.

#### Resolução:

A força peso que atua no homem é dada por:

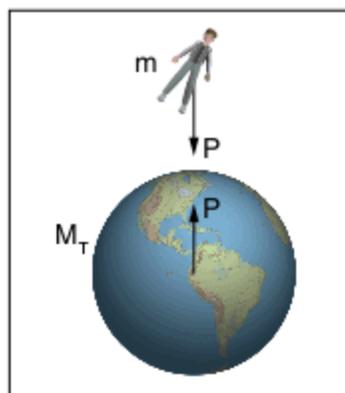
$$P = mg \Rightarrow P = 60 \cdot 10 \Rightarrow P = 600 \text{ N}$$

Porém, a reação dessa força peso está no centro da Terra e com sentido oposto, acelerando para cima. Essa aceleração é dada por:

$$P = M_T a_T \Rightarrow 600 = 6,0 \cdot 10^{24} a_T$$

$$a_T = 10^{-22} \text{ m/s}^2$$

Perceba que, pelo fato de a Terra ter uma massa muito grande, sua aceleração é muito pequena, praticamente desprezível.



Homem e Terra interagindo.

A constante  $G$ , chamada de constante de gravitação universal, tem o mesmo valor em todo o universo. Experimentalmente, não se verificou variação dessa constante em função da temperatura, do tempo ou do estado físico das massas envolvidas, embora ainda existam experimentos dedicados à detecção de possíveis variações dessa constante. A determinação do valor de  $G$  não foi uma tarefa simples, principalmente por ela ter um valor muito pequeno, fazendo-o praticamente desprezível para massas que costumamos interagir diariamente.

A primeira determinação em laboratório do valor de  $G$  aconteceu em 1798 pelo químico e físico Henry Cavendish (1731-1810) por meio de um experimento baseado na balança de torção. Esse foi um dos experimentos mais famosos e importantes da história da ciência. O objetivo inicial de Cavendish era determinar a massa específica da Terra, porém, para isso, ele precisou determinar o valor da constante  $G$ .

Cavendish posicionou duas esferas de aproximadamente 1 kg nas extremidades de uma barra leve, que, por sua vez, foi suspensa por uma fibra de quartzo. Duas outras esferas maiores, de aproximadamente 160 kg, foram colocadas próximas às menores. Assim, massas maiores atraíram as menores, ocasionando um torque gravitacional e fazendo com que o conjunto rotacionasse. Durante essa rotação, a fibra gerou um torque no sentido contrário, impedindo que o conjunto continuasse rotacionando além de um certo limite, ficando, assim, o sistema em equilíbrio. Pense em uma toalha que vai sendo torcida – apesar de conseguir dar algumas voltas, existe um “limite” de torção já que a toalha exerce uma resistência.

O ângulo de rotação da fibra pode ser medido por meio de um feixe de luz que incide sobre um espelho fixado no conjunto. Conhecendo a constante de torção da haste, Cavendish conseguiu medir a força entre as massas.

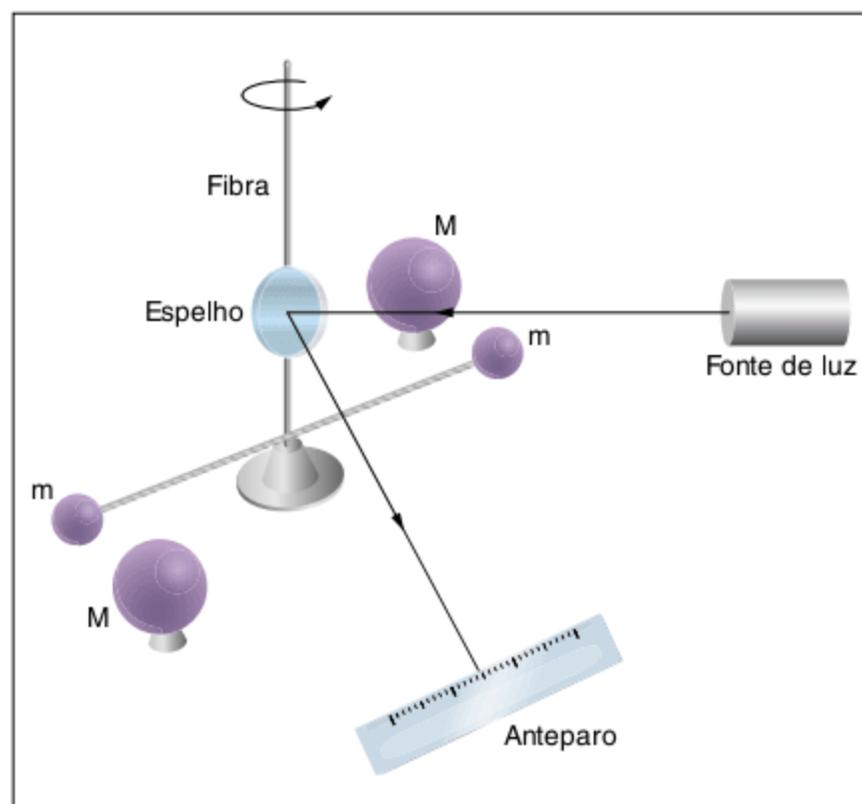


Fig. 18 Balança de torção. Ao posicionar as massas  $M$  próximas das massas  $m$ , a fibra de quartzo realiza um movimento de torção, cujo ângulo pode ser medido por meio da reflexão do raio de luz sobre o anteparo.

Por meio desse experimento, Cavendish determinou que a constante  $G$  valia aproximadamente  $6,75 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ , valor bem próximo do atualmente aceito, de aproximadamente  $6,673 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ , ou seja, uma excelente medição para uma grandeza com valor tão pequeno.

## ATENÇÃO!

É muito comum confundir os símbolos  $g$  e  $G$ , embora eles representem grandezas físicas bem distintas.

A letra maiúscula  $G$  representa a constante de gravitação universal, que relaciona a força de interação entre corpos com a distância entre eles e com suas massas; sua unidade de medida no Sistema Internacional (SI) é  $\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ , e seu valor é o mesmo para todas as regiões do universo.

A letra minúscula  $g$  representa a aceleração da gravidade. Sua unidade no SI é  $\text{m}/\text{s}^2$ .

### Exercícios resolvidos

**6** Qual é a força de atração gravitacional entre duas massas, de 100 kg cada, distantes 1 metro uma da outra? (Considere  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ )

#### Resolução:

$$F_G = \frac{GMm}{d^2} \Rightarrow F_G = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 100 \cdot 100}{1^2} \Rightarrow \boxed{F_G = 6,67 \cdot 10^{-7} \text{ N}}$$

Repare que, nesse exemplo, a força gravitacional é extremamente reduzida, logo, concluímos que ela pode ser considerada desprezível para massas pequenas.

**7 UFMA** Seja  $F$  a força de atração do Sol sobre um planeta. Se a massa do Sol se tornasse três vezes maior, a do planeta, cinco vezes maior, e a distância entre eles fosse reduzida à metade, a força de atração entre o Sol e o planeta passaria a ser:

- (a)  $3F$       (b)  $15F$       (c)  $7,5F$       (d)  $60F$

#### Resolução:

$$F = \frac{GMm}{d}$$

$$F' = G \cdot (3M) \cdot \frac{5m}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} = 15 \cdot \frac{4GMm}{d^2} = \frac{60GMm}{d^2} = 60F$$

Alternativa: D.

As descobertas de Newton relacionadas à lei da gravitação universal impactaram, de maneira profunda, o estudo das ciências naturais. Junto com o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, essa lei colaborou para o desenvolvimento mais rápido da ciência, pois forneceu subsídios para avanços em outras áreas das ciências naturais, além da Física.

Note que a força gravitacional tem uma descrição matemática parecida com a da força elétrica, a diferença é que a força gravitacional é sempre atrativa. Vale ressaltar que a força gravitacional é significativa quando consideramos a Terra e os corpos com os quais ela interage. Essa força, embora seja significativa na interação entre corpos celestes de grande massa, é muito pequena quando relaciona corpos com massa de ordem de grandeza bem menor, como os do nosso cotidiano.

## Campo gravitacional

O conceito de campo gravitacional vem sendo desenvolvido há milhares de anos e, até hoje, é estudado de maneira profunda em física moderna. A teoria da gravitação de Newton nos deu subsídios para modelar matematicamente e descrever de maneira satisfatória fenômenos astronômicos e do cotidiano. Einstein, por meio da Teoria da Relatividade Geral, relacionou a gravidade com as dimensões de espaço e tempo. Essa teoria englobou a teoria newtoniana e, ainda, vai muito além, nos possibilitando descrever com mais precisão eventos astronômicos complexos em uma escala cósmica. Porém, a modelagem matemática utilizada por Einstein é muito complexa e desnecessária para as questões que vamos tratar neste capítulo.

Toda partícula que apresenta massa tem campo de influência ao seu redor, que é responsável pela interação entre porções distintas de matéria. Assim como cargas elétricas criam ao seu redor campos elétricos, massas criam ao seu redor campos gravitacionais. Outras massas “sentem” a presença desse campo gravitacional através de uma força, a chamada força gravitacional. Dessa forma, quanto maior a massa, maior o campo gerado por ela. Se considerarmos a Terra como um referencial inercial, a força peso e a força gravitacional podem ser consideradas iguais. Assim temos:

$$P = F_G$$

$$mg = \frac{GMm}{(R_T + h)^2}$$

$$g = \frac{GM}{(R_T + h)^2}$$

Em que:

$R_T$  = raio da Terra.

$M$  = massa da Terra.

$m$  = massa do corpo.

$h$  = altura em relação à superfície terrestre.

$G$  = constante de gravitação universal.

$F_G$  = força gravitacional.

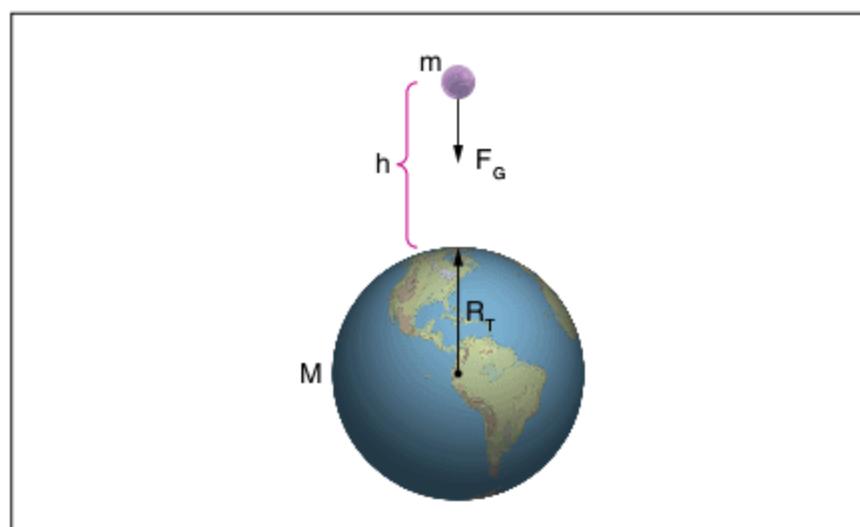


Fig. 19 Campo gravitacional gerado pela Terra.

## ATENÇÃO!

A massa que gera o campo gravitacional não é afetada pelo campo gerado por ela mesma. Portanto, é impossível um corpo ser acelerado pelo campo gravitacional que ele mesmo criou.

Em problemas de gravitação, vamos considerar os corpos com simetria esférica. Corpos desse tipo são comuns no universo, já que luas, estrelas e planetas de grande massa se aproximam desse formato devido à ação da força gravitacional, que tende a aproximar as partículas minimizando a distância entre elas. Embora a Terra, por exemplo, não seja uma esfera perfeita (ela é um elipsoide de revolução, quase como uma esfera achatada nos polos e saliente no Equador), para os nossos cálculos, a consideração de que a Terra é uma esfera perfeita é uma boa aproximação. Essa é uma hipótese importante, pois, para corpos com simetria esférica, podemos considerar toda a massa concentrada no centro de massa do corpo para cálculo de campos e forças gravitacionais (isso não é uma aproximação, mas sim uma relação exata que pode ser demonstrada por cálculo integral).

Observe que, para calcular o campo gravitacional gerado por um corpo, consideramos apenas a distância entre o centro desse corpo e um ponto do espaço; ou seja, se estamos falando do campo gravitacional gerado pela Terra, vamos considerar que toda a massa da Terra está concentrada no seu centro de massa. Só podemos fazer isso se:

- o corpo apresentar simetria esférica.
- a força gravitacional depender do inverso do quadrado da distância.
- o corpo tiver densidade constante em cada camada.

No caso da Terra, consideramos o formato esférico e sabemos, também, que a força gravitacional depende do inverso do quadrado da distância. A densidade da Terra não é constante, ou seja, não é a mesma em todas as profundidades, porém, em cada camada, podemos considerar a densidade aproximadamente constante, apesar de existirem pequenas variações locais.

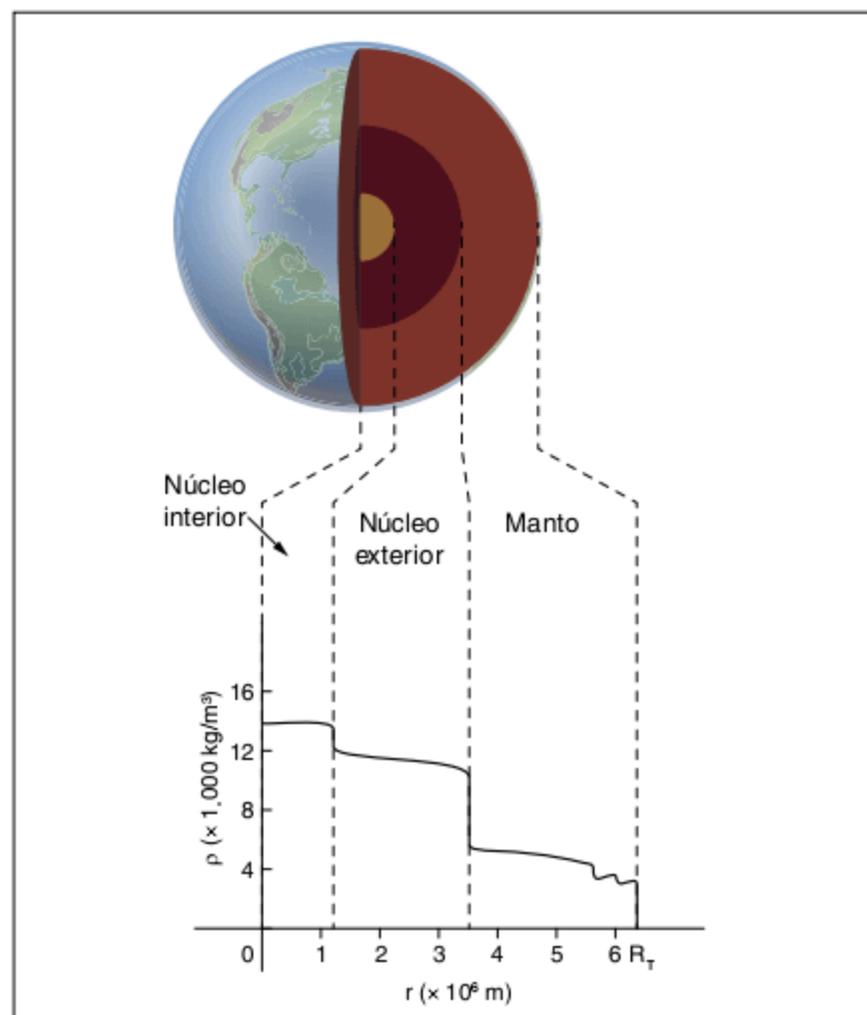


Fig. 20 Variação da densidade  $\rho$  da Terra em função da distância  $r$  ao centro da Terra.

É importante notar que a existência do campo gravitacional em uma região não implica que os corpos sujeitos a esse campo estão acelerados. É muito comum a confusão entre as expressões “campo gravitacional” e “aceleração da gravidade”. Um corpo em repouso em cima de uma mesa está sujeito ao campo gravitacional terrestre, porém não tem aceleração, já que permanece em repouso em relação à mesa. Esse corpo pode até estar acelerado para a direita, mas não necessariamente com aceleração da gravidade. No entanto, um corpo em queda livre, próximo à superfície terrestre (sujeito apenas à força gravitacional), apresenta, de acordo com a 2ª Lei de Newton, uma aceleração de  $10 \text{ m/s}^2$ , que é igual ao valor da intensidade do campo gravitacional naquela região.

A força gravitacional é essencialmente uma grandeza vetorial, pois, para ser bem definida, precisa de módulo, direção e sentido. Para seu módulo ser determinado, precisamos conhecer as massas que interagem e o campo gravitacional local. A massa de um corpo independe do campo gravitacional, ou seja, a massa de um corpo é a mesma independentemente do planeta ou astro no qual se situa. Podemos dizer que massa é uma propriedade intrínseca do corpo, pois independe de outros corpos.

	Peso	Massa
Classificação	Grandeza vetorial	Grandeza escalar
Unidade S.I.	N (newton)	kg (quilograma)
Depende do campo gravitacional (g)?	Depende	Independe

Tab. 3 Diferenças importantes entre peso e massa.

Agora, vamos analisar como varia o campo gravitacional em diferentes pontos da Terra.

### Campo gravitacional na superfície

Para determinar o campo gravitacional na superfície de corpos esféricos ( $g_{\text{SUP}}$ ), consideramos a altura  $h$  nula e a distância igual ao próprio raio  $R$  do corpo gerador do campo:

$$g_{\text{SUP}} = \frac{GM}{R^2}$$

Podemos considerar que o raio da Terra ( $R_T$ ) vale  $6.400 \text{ km}$  e que sua massa ( $M_T$ ) é  $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ , o que gera um campo gravitacional na superfície da Terra ( $g_{\text{SUP}}$ ) de aproximadamente  $10 \text{ m/s}^2$ . Esse valor não deve ser novidade, pois foi utilizado extensivamente nos capítulos iniciais de Cinemática e Dinâmica.

Corpos em queda livre estão sujeitos à mesma aceleração, independentemente da massa. Isso pode parecer contraintuitivo baseado em observações cotidianas, já que, quando abandona-se uma maçã e uma pena a partir da mesma altura, a maçã chega antes ao solo. Porém, nessa situação, a força de resistência do ar tem um papel importante, afetando mais o movimento da pena do que o da maçã. Quando abandonados em uma câmara de vácuo, os dois corpos chegam ao mesmo tempo ao chão, pois ambos estão sujeitos apenas à força gravitacional.

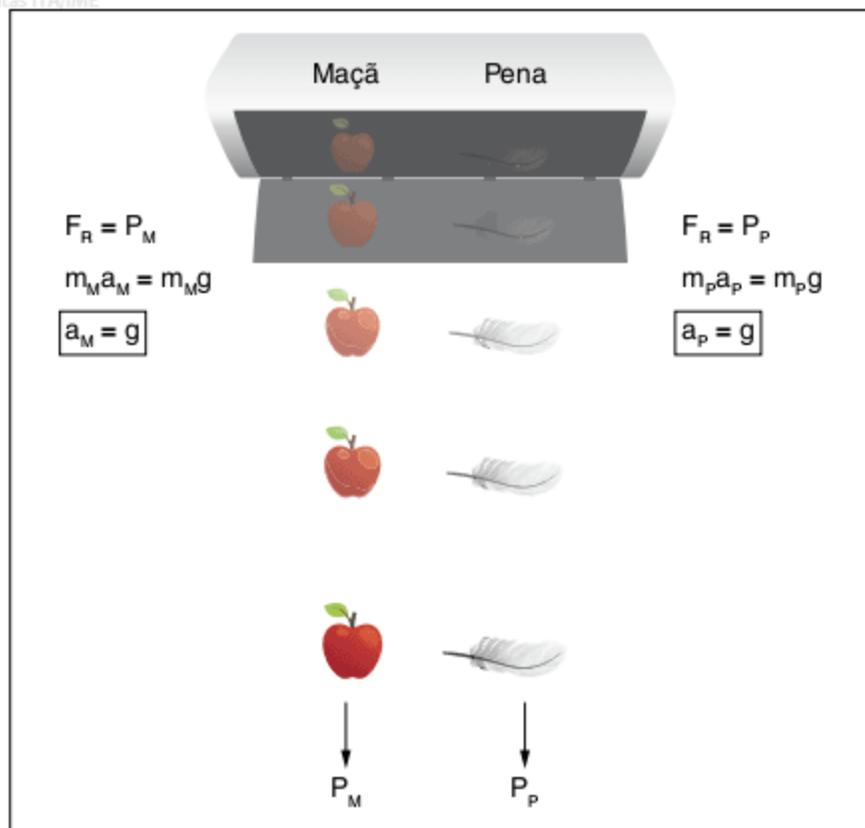


Fig. 21 Pena e maçã abandonadas em uma câmara a vácuo.

Para relacionar campos gravitacionais na superfície de corpos distintos, podemos usar a seguinte relação:

$$\frac{g_A}{g_B} = \frac{\frac{GM_A}{R_A^2}}{\frac{GM_B}{R_B^2}} = \left(\frac{M_A}{M_B}\right) \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^2$$

Podemos também relacionar esses campos com a densidade média ( $\rho$ ) do corpo. Sabendo que  $\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \rho V$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{g_A}{g_B} &= \left(\frac{M_A}{M_B}\right) \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^2 \Rightarrow \frac{g_A}{g_B} = \left(\frac{\rho_A V_A}{\rho_B V_B}\right) \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{g_A}{g_B} = \left(\frac{\rho_A \cdot \frac{4\pi R_A^3}{3}}{\rho_B \cdot \frac{4\pi R_B^3}{3}}\right) \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^2 \Rightarrow \frac{g_A}{g_B} = \frac{\rho_A R_A}{\rho_B R_B} \end{aligned}$$

## SAIBA MAIS

### Martelo e pena na Lua

Em 1971, durante a missão Apollo 15, o astronauta americano David Scott realizou uma experiência para demonstrar a teoria de Galileu de que os corpos caem com a mesma aceleração, independentemente da massa, na ausência de resistência do ar. Na superfície da Lua, quando Scott abandonou, da mesma altura, um martelo e uma pena, ambos chegaram ao mesmo tempo ao chão, já que na Lua a resistência do ar é desprezível, pois sua atmosfera é muito tênue. No entanto, quando o experimento é feito na Terra, o martelo chega antes, pois a resistência do ar afeta de maneira mais significativa o movimento da pena, já que sua área de contato é maior.

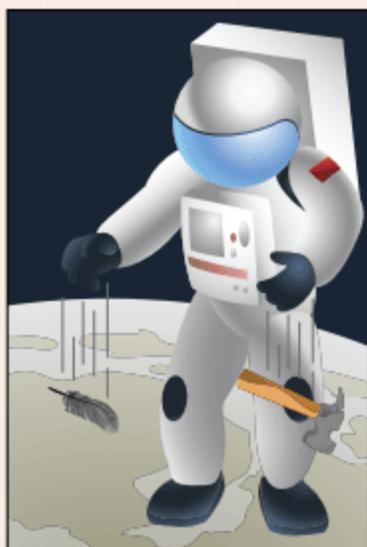


Fig. 45 Ilustração do experimento realizado pelo astronauta Dave Scott durante a missão Apollo 15.

A Lua cria, em sua superfície, um campo gravitacional menor do que o campo gerado pela Terra. Devido à relação entre massas e raios, temos que  $g_{\text{Lua}} \approx \frac{g_{\text{Terra}}}{6}$ .

Quando observamos as antigas filmagens de astronautas andando na Lua, percebemos que, quando eles saltam, demoram muito mais tempo para voltar ao chão do que na Terra, por conta do baixo campo gravitacional na superfície lunar.

O campo gravitacional na superfície de um corpo celeste não depende apenas de sua massa, pois o raio também influencia no cálculo. Existem planetas que apresentam massa maior que a da Terra, porém, devido ao seu grande raio, eles têm campos gravitacionais menores em sua superfície.

### Exercício resolvido

8 Considere um planeta que tenha raio e massa duas vezes maiores que os da Terra. Sendo que o campo gravitacional na superfície da Terra vale  $g_{\text{Terra}} = 10 \text{ m/s}^2$ , quanto vale, na superfície daquele planeta, o campo gravitacional, em  $\text{m/s}^2$ ?

**Resolução:**

$$\begin{aligned} \frac{g_x}{g_{\text{Terra}}} &= \left(\frac{M_x}{M_{\text{Terra}}}\right) \left(\frac{R_{\text{Terra}}}{R_x}\right)^2 \Rightarrow \frac{g_x}{g_{\text{Terra}}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{g_x}{g_{\text{Terra}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{g_x = 5 \text{ m/s}^2} \end{aligned}$$

Corpo celeste	Massa relativa (à massa da Terra)	Raio relativo (ao raio da Terra)	Intensidade do campo gravitacional na superfície ( $\text{m/s}^2$ )
Mercúrio	0,055	0,383	3,7
Vênus	0,815	0,949	8,9
Terra	1,000	1,000	9,8
Lua	0,012	0,272	1,6
Marte	0,107	0,532	3,7
Júpiter	317,800	11,210	24,8
Saturno	95,200	9,450	10,4
Urano	14,600	4,010	8,8
Netuno	17,200	3,880	11,1

Tab. 4 Comparações entre massas e raios de corpos celestes em relação aos da Terra e a intensidade dos campos gravitacionais.

## Campo gravitacional em pontos acima da superfície da Terra

Para determinar o campo gravitacional em pontos acima da superfície de um planeta, precisa-se levar em conta a distância entre o centro do planeta e o ponto considerado. Algumas questões se referem à altura de um corpo em relação à superfície de um planeta. Nesses casos, devemos lembrar de considerar o raio do planeta nos cálculos de campo gravitacional.

### Exercício resolvido

**9** Para que o valor da aceleração da gravidade seja reduzido à quarta parte de seu valor na superfície da Terra, é preciso que ele seja elevado a uma altura da superfície, medida em função do raio terrestre, igual a:

**Resolução:**

$$g_H = \frac{g_{SUP}}{4} \Rightarrow \frac{GM}{(R_T + h)^2} = 4 \frac{GM}{R_T^2} \Rightarrow (R_T + h)^2 = 4R_T^2 \Rightarrow R_T + h = 2R_T \Rightarrow \boxed{h = R_T}$$

O campo gravitacional diminui com o inverso do quadrado da distância. Porém, mesmo para grandes distâncias, a ação do campo gravitacional ainda é perceptível.

	Altitude (km)	Intensidade do campo gravitacional terrestre (m/s <sup>2</sup> )
Superfície terrestre	0	9,8
Pico do Monte Everest	9	9,772
Altura de cruzeiro de um avião	11	9,766
Ambiente de órbita da estação espacial internacional (ISS)	400	8,681
Órbita geoestacionária	36.000	0,223
Lua	384.000	0,003

Tab. 5 Intensidade do campo gravitacional da Terra em função da altitude.

## Campo gravitacional em pontos internos da Terra

Vamos abordar como calcular a intensidade do campo gravitacional em certo ponto de um poço muito profundo, em um planeta com densidade constante e formato esférico. Quando consideramos pontos internos desse planeta, **o campo gravitacional não varia mais em função do inverso do quadrado da distância, mas sim diminui com o aumento da profundidade.**

Para um ponto interno, só podemos considerar a massa do planeta até esse ponto, ou seja, para baixo. Toda a massa das cascas esféricas externas ao ponto considerado não geram campo gravitacional nesse ponto. Esse teorema, denominado **Teorema de Casca**, pode ser demonstrado por meio da Lei da Gravitação Universal e do cálculo diferencial.

Lembrando que:  $\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V$  e, para uma esfera  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ , temos:

$$g_{int} = \frac{GM_{int}}{r^2} \Rightarrow g_{int} = \frac{G(\rho V_{int})}{r^2} \Rightarrow g_{int} = \frac{G\left(\rho \frac{4\pi r^3}{3}\right)}{r^2} \Rightarrow g_{int} = \underbrace{G\rho \frac{4}{3}\pi}_{\text{constante}} r$$

Assim, o campo em pontos interiores ( $g_{int}$ ) depende linearmente da distância  $r$  entre o centro da Terra e o ponto em questão no interior dela.

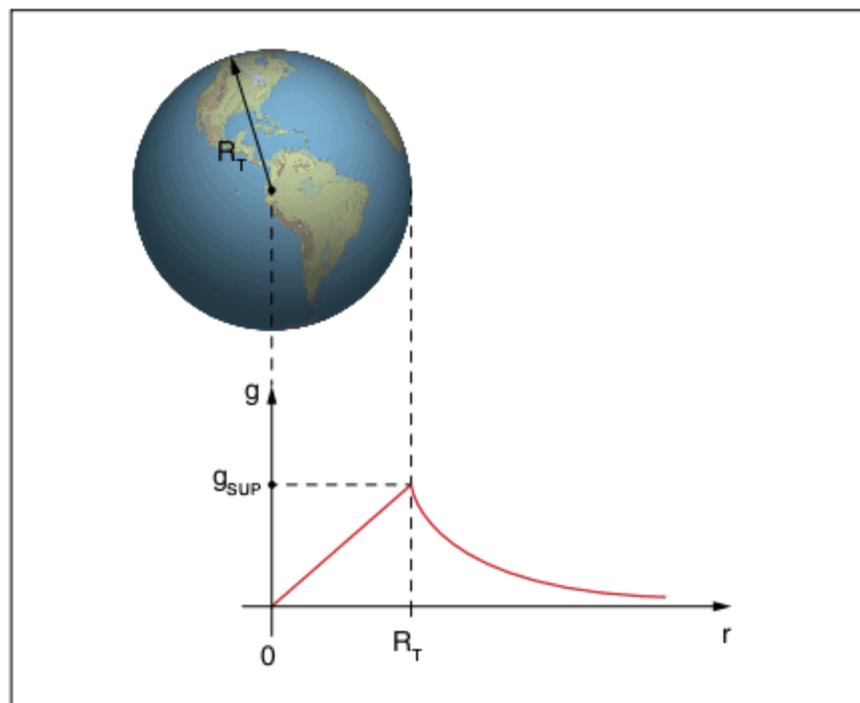


Fig. 22 Variação do campo gravitacional em relação à distância da superfície da Terra.

## ATENÇÃO!

Para pontos internos, o campo gravitacional varia linearmente com a distância ao centro do corpo.

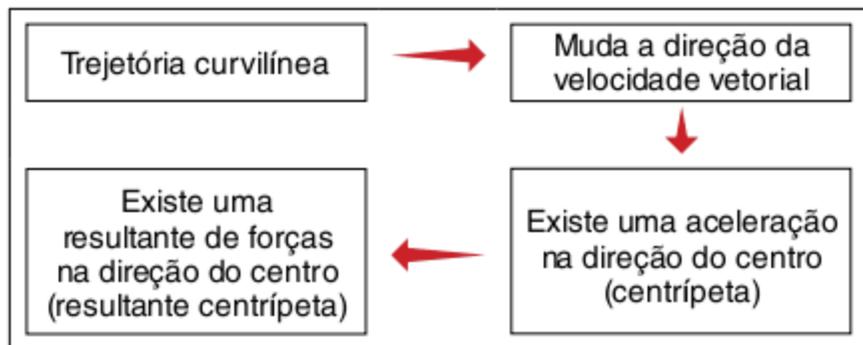
## Rotação da Terra e peso aparente

Em Dinâmica, aprendemos que a nossa sensação de estar pesado ou leve não é dada pela força peso, mas, sim, pela força normal. Dessa forma, podemos chamar a força normal de peso aparente. Quando uma pessoa está em equilíbrio sobre uma balança, a força peso é, em módulo, igual à força normal; a balança, que registra a intensidade da força normal, indica a sensação de peso da pessoa.

Em Gravitação, tem-se que considerar que a Terra também está rotacionando.

Vamos analisar um corpo que se situa na superfície da Terra, na linha do Equador. Esse corpo, por mais que esteja em repouso em relação à Terra, está se movendo com ela em um movimento circular. Ao estudar o conceito de resultante centrípeta, aprendemos que, se um objeto realiza uma trajetória circular,

ele muda a direção de sua velocidade vetorial. Existe uma grandeza física que mede a variação da direção da velocidade, chamada **aceleração centrípeta**. Para ter aceleração centrípeta é necessária uma resultante de forças na direção do centro da trajetória, chamada de **resultante centrípeta ou força centrípeta**.



Nessa situação, o peso não pode ser igual à normal, caso contrário não teríamos resultante de forças na direção do centro.

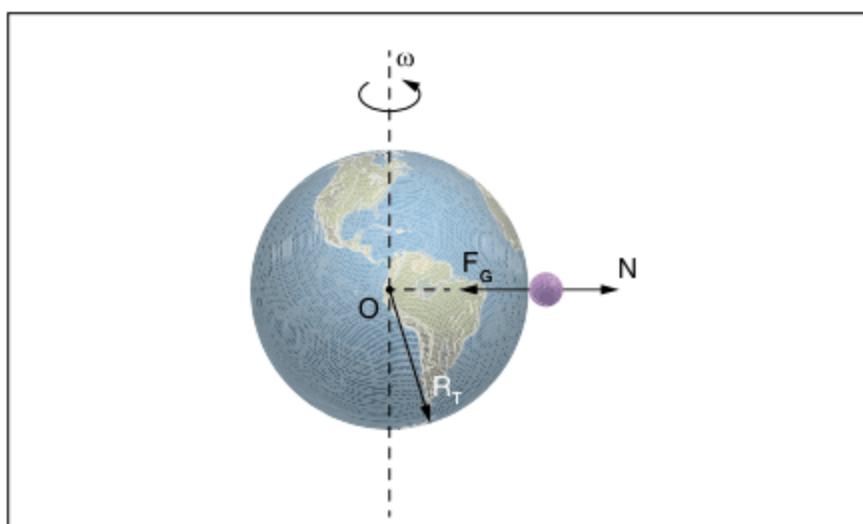


Fig. 23 Peso aparente de um corpo na superfície da Terra, levando-se em consideração sua rotação.

$$F_G - N = m\omega^2 R_T \Rightarrow mg_{SUP} - N = m\omega^2 R_T \Rightarrow N = m(g_{SUP} - \omega^2 R_T)$$

Como a normal é o peso aparente, também podemos escrever que  $N = mg_{AP}$ , em que  $g_{AP}$  é o campo gravitacional aparente. Logo:

$$mg_{AP} = m(g_{SUP} - \omega^2 R_T) \Rightarrow g_{AP} = g_{SUP} - \omega^2 R_T$$

O **peso aparente** (ou seja, a normal, que é a sensação de peso da pessoa) **varia em função da latitude**. Um corpo que está na linha equatorial e vai em direção ao Polo Norte aumenta sua latitude, o que faz com que o raio da trajetória diminua e, portanto, o peso aparente aumente. Dessa forma, o peso aparente (e a gravidade aparente) é máximo nos polos.

Latitude	$g_{AP}$ (m/s <sup>2</sup> )
0°	9,7804
30°	9,7933
60°	9,8192
90°	9,8322

Tab. 6 Variações do campo gravitacional aparente em relação à latitude.

Outra variação importante do peso aparente se dá em função da velocidade de rotação da Terra. A Terra apresenta uma velocidade angular  $\omega$  que pode ser calculada por:

$$\omega_T = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega_T = \frac{2\pi}{24h \cdot 60min \cdot 60s} \Rightarrow \omega_T \approx 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

Se, hipoteticamente, a Terra começasse a girar cada vez mais rápido, o peso aparente diminuiria. Para um corpo que está na linha do Equador, podemos determinar a velocidade angular da Terra para que ele tenha sensação nula de peso, ou seja,  $g_{AP} = 0$ :

$$g_{AP} = g_{SUP} - \omega^2 R_T \Rightarrow \omega^2 R_T = g_{SUP} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g_{SUP}}{R_T}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{10}{6,4 \cdot 10^6}} \Rightarrow \omega = \frac{1}{8 \cdot 10^2} \Rightarrow \omega = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$$

Para corpos em outras latitudes, a direção da força normal não coincide necessariamente com a linha de ação da força gravitacional.

## Movimento de satélites

O movimento dos satélites é uma análise fundamental no estudo da gravitação. Muito antes do Sputnik, o primeiro satélite artificial da Terra, Newton observou que qualquer objeto lançado horizontalmente é de alguma forma um satélite. Se a velocidade inicial de lançamento for suficientemente grande para o corpo não cair e colidir com o chão, ele entra em órbita com o centro da Terra em um dos focos dessa órbita.

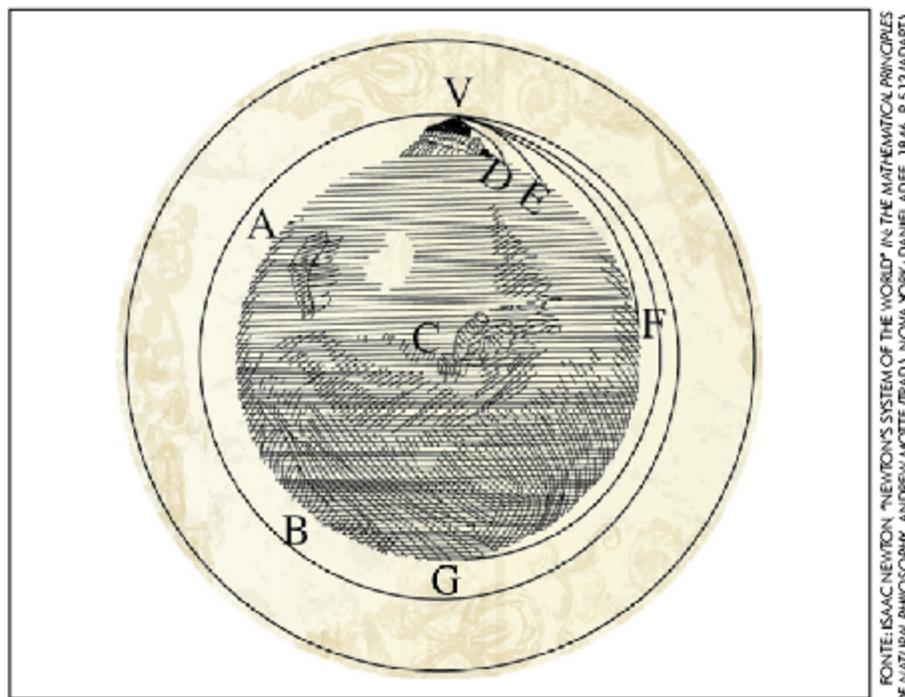


Fig. 24 Esquema da trajetória de um corpo lançado horizontalmente, publicado por Isaac Newton na obra *Principia*. As letras representam diferentes trajetórias.

Para as análises seguintes, adotaremos duas hipóteses importantes:

- 1) A massa central é muito maior que a massa do corpo em órbita.
- 2) As interações acontecem apenas entre dois corpos.

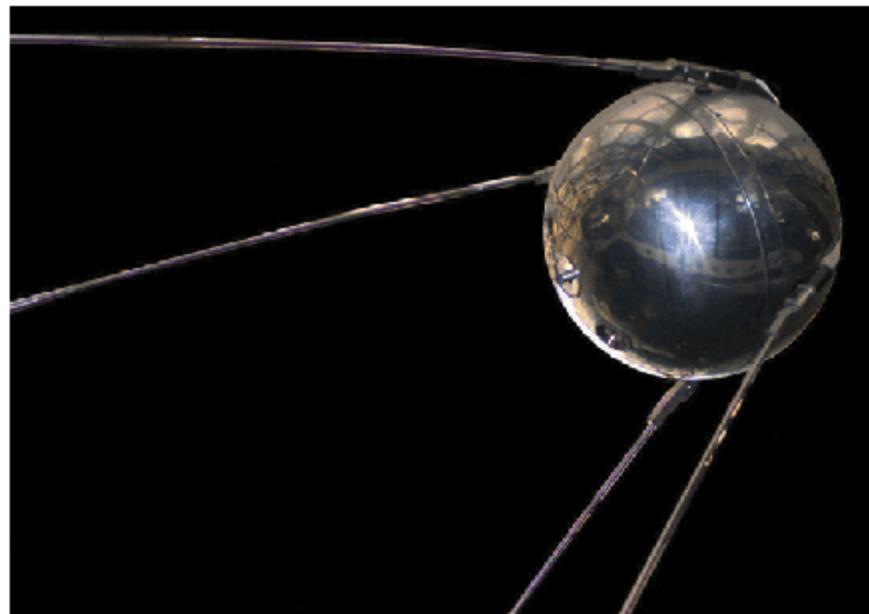


Fig. 25 Réplica do satélite Sputnik, o 1º satélite artificial da história, lançado pela antiga União Soviética em 1957, dando início à corrida espacial com os Estados Unidos durante a Guerra Fria.

### Velocidade orbital

Em um ambiente de órbita, o corpo central cria ao seu redor um campo gravitacional. Um satélite, em uma órbita circular, percebe a presença do campo através da força gravitacional, porém, como o satélite apresenta uma velocidade tangencial, a força gravitacional atua como resultante centrípeta, que não muda o módulo, mas, sim, altera a direção da velocidade vetorial.

Sem essa força gravitacional atuando como resultante centrípeta, o satélite sairia pela tangente (é análogo a uma pessoa rodando uma esfera presa por um fio – se o fio romper, a bola sairá pela tangente).

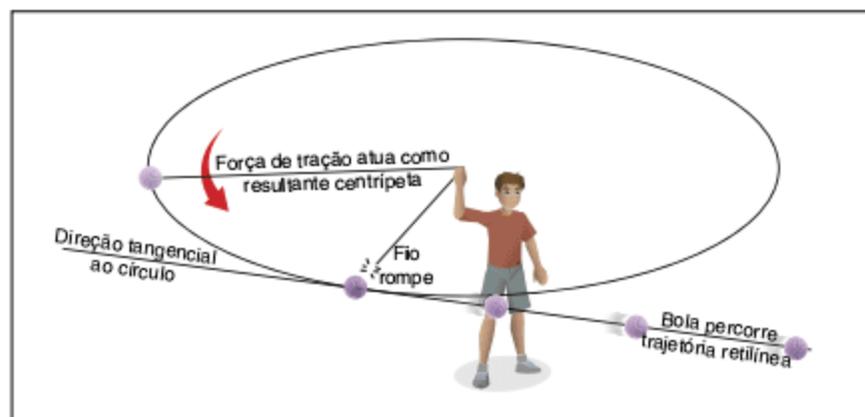


Fig. 26 Esquema de um sistema com movimento análogo ao movimento orbital. Se o fio romper, não existirá mais a força de tração (que atua como resultante centrípeta), e a esfera sairá pela direção tangencial à trajetória.

Vamos determinar a velocidade de um satélite no caso de órbitas circulares. Nessas situações, a força gravitacional atua como resultante centrípeta:

$$F_G = R_C \Rightarrow mg_{orb} = \frac{mv_{orb}^2}{R_{orb}} \Rightarrow v_{orb} = \sqrt{R_{orb}g_{orb}}$$

Note que  $R_{orb}$  não é necessariamente o raio do planeta e  $g_{orb}$  não é necessariamente o valor do campo em sua superfície. Para o caso da Terra, só poderíamos considerar  $g_{orb} = 10 \text{ m/s}^2$  em órbitas rasantes (tangentes à superfície terrestre), nas quais o raio da órbita seria o próprio raio da Terra.

Para estudar como varia a velocidade orbital em função do raio da órbita não podemos analisar apenas a equação anterior, já que, variando o raio  $R_{orb}$ , o campo gravitacional  $g_{orb}$  também muda (caso contrário, teríamos um aumento da  $v_{orb}$  com o aumento do  $R_{orb}$ , o que não é verdade). Logo, desenvolvendo com a equação do campo gravitacional, temos:

$$v_{orb} = \sqrt{R_{orb}g_{orb}} \Rightarrow v_{orb} = \sqrt{R_{orb} \frac{GM}{R_{orb}^2}} \Rightarrow v_{orb} = \sqrt{\frac{GM}{R_{orb}}}$$

Assim, um **aumento de  $R_{orb}$  ocasiona uma diminuição de  $v_{orb}$** . É importante notar que a velocidade orbital independe da massa do corpo em órbita (um astronauta dentro de uma estação espacial está orbitando a Terra com a mesma velocidade da estação, por exemplo). Essa conclusão é válida apenas nas situações em que **a massa central é muito maior que a massa do corpo em órbita**, como é o caso dos planetas em torno do Sol ou de satélites artificiais orbitando a Terra.

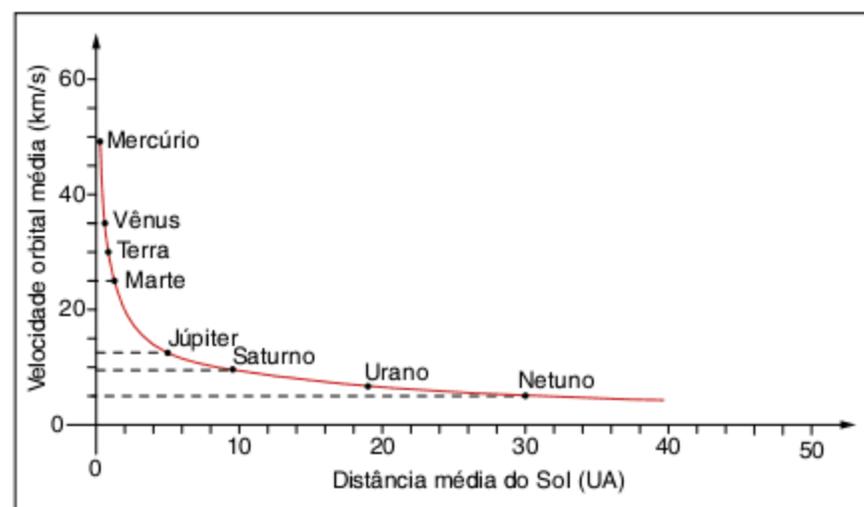


Fig. 27 Como a massa solar é muito maior que a massa dos outros planetas, o Sol é o corpo central, logo, a velocidade de cada um é proporcional ao inverso da raiz quadrada do raio da órbita. Assim, quanto maior o raio, menor a velocidade orbital.

Sem campo gravitacional no espaço, o satélite não conseguiria ficar em órbita, ou seja, existe gravidade no espaço. Se, subitamente, o campo gravitacional deixasse de existir, não haveria força gravitacional atuando no satélite, e, portanto, ele sairia pela tangente e percorreria uma trajetória retilínea em movimento uniforme. Outro detalhe importante: não é necessário o satélite ter propulsão para ficar em órbita, uma vez que a força gravitacional é responsável por mudar a direção da velocidade.



Fig. 28 Astronauta americano Rick Mastracchio em uma missão extraveicular na Estação Espacial Internacional, 2007. A estação orbita a uma altura de aproximadamente 400 km acima da superfície terrestre, onde o campo gravitacional vale cerca de  $8,7 \text{ m/s}^2$ .

É o fato de a força gravitacional atuar como resultante centrípeta que faz com que a Lua não “caia” na Terra. Se a Lua não tivesse velocidade, de fato ela estaria em rota de colisão na direção do centro da Terra, já que a força gravitacional atuaria como uma resultante de forças tangencial. Porém, como ela tem uma velocidade perpendicular à força, o peso atua como resultante centrípeta, alterando a direção da velocidade. Assim, a Lua consegue realizar o movimento curvilíneo.

Veremos adiante que, embora seja comum dizer que “a Lua orbita a Terra”, o movimento não é exatamente esse, já que ambos os corpos orbitam em torno do baricentro, o centro de massa do sistema.

### Exercício resolvido

**10** Determine a velocidade orbital de um satélite lançado horizontalmente em órbita circular rasante à superfície da Terra. Adote o raio da Terra igual a 6.400 km.

#### Resolução:

Em uma órbita circular rasante, o raio da trajetória é o próprio raio da Terra. Logo, o valor da intensidade do campo gravitacional é  $g_{SUP} = 10 \text{ m/s}^2$ . Portanto:

$$v_{orb} = \sqrt{R_{orb} g_{orb}} \Rightarrow v_{orb} = \sqrt{(6.400 \cdot 10^3) \cdot 10} \Rightarrow v_{orb} = 8.000 \text{ m/s}$$

No exemplo anterior, determinamos que a velocidade de uma órbita rasante à superfície da Terra deve ser de aproximadamente 8 km/s. Isso significa que um projétil lançado com essa velocidade entrará em órbita e não chegará ao solo.

### Período orbital

Já deduzimos que a equação da velocidade orbital  $v_{orb}$  de um satélite em órbita circular é dada por:

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Sabemos também, da Cinemática, que, quando um objeto percorre uma trajetória circular,  $V_{orb} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T}$ , em que R é o raio da circunferência e T é o período do movimento.

Elevando ambas equações ao quadrado e as igualando, temos:

$$\frac{GM}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} \Rightarrow \frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

Essa é a dedução da 3ª Lei de Kepler para órbitas circulares, na qual a **constante de Kepler** (K) é dada por  $K = \frac{GM}{4\pi^2}$ .

Para todos os corpos que orbitam em torno da mesma massa central, a constante de Kepler é sempre a mesma, e a razão entre  $R^3$  e  $T^2$  é constante. Para órbitas elípticas, podemos substituir o raio R pelo semieixo maior a, o raio médio da órbita.

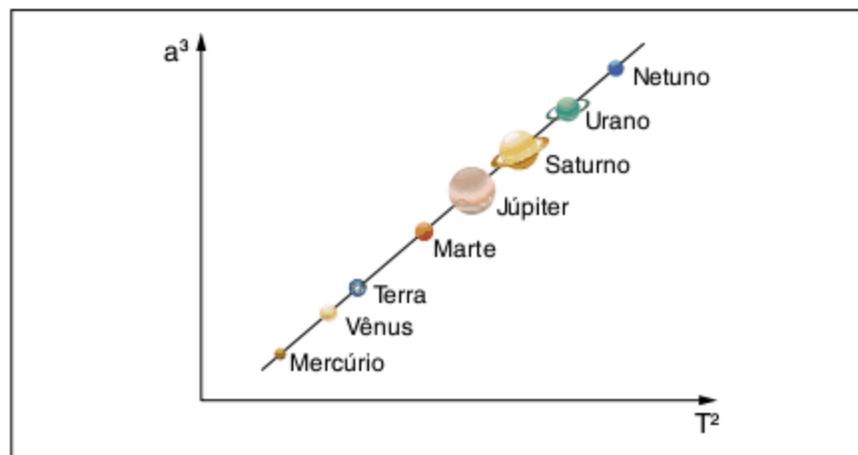


Fig. 29 A razão entre o semieixo maior (a) elevado ao cubo e o período de revolução (T) ao quadrado é uma constante para os planetas do Sistema Solar.

Um tipo de órbita especial é a órbita **geoestacionária (GEO)**. Um satélite nesse tipo de órbita acompanha o movimento de rotação terrestre, e a órbita está contida no plano equatorial. Nesse caso, o satélite sempre estará acima do mesmo ponto da Terra, não importa a hora do dia.

Outra órbita importante é a **geossíncrona (GSC)**, que apresenta um período de rotação de 24 horas, porém não precisa estar contida necessariamente no plano equatorial.

As órbitas naturais devem estar contidas em um plano que passa pelo centro do corpo central, já que a força gravitacional, que atua como resultante centrípeta, aponta para o centro desse corpo.

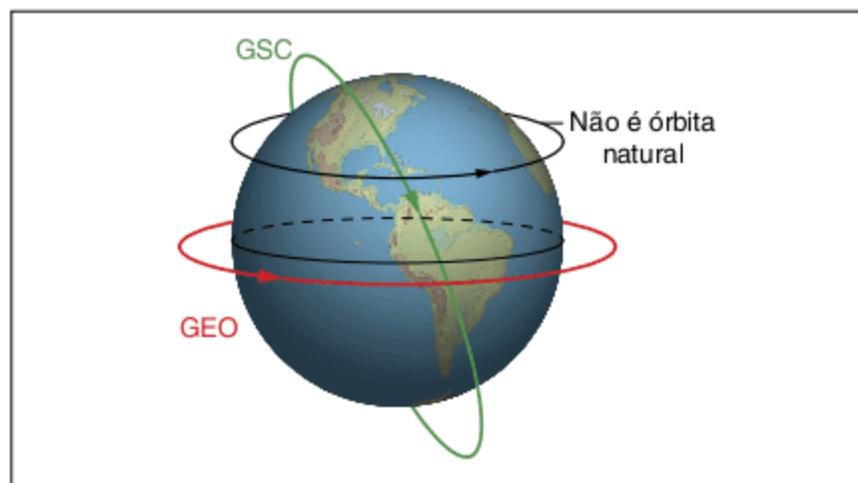


Fig. 30 Órbitas geoestacionária (GEO) e geossíncrona (GSC).

### Exercício resolvido

**11** Calcule o raio da órbita de um satélite geoestacionário.

#### Resolução:

De acordo com a 3ª Lei de Kepler, temos:

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

Substituindo os valores de G ( $6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ ),  $M_{Terra}$  ( $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ) e T (24 h), obtemos:

$$R = 4,2 \cdot 10^4 \text{ km}$$

Assim, a altitude do satélite (altura acima da superfície) é de:

$$h = 3,6 \cdot 10^4 \text{ km}$$

## Imponderabilidade

Quando observamos uma foto de um astronauta dentro de uma estação espacial, é comum imaginarmos que ele está em um ambiente de gravidade zero pelo fato de estar flutuando, mas esse é um erro conceitual muito frequente. Se o astronauta estivesse em uma região do espaço infinitamente longe de qualquer planeta, estrela ou outros corpos, ele realmente estaria flutuando na ausência de gravidade. Porém, nenhum corpo, em nosso universo, de aproximadamente  $10^{22}$  estrelas, está livre da ação da gravidade, já que sempre há com o que interagir. No caso de um astronauta em uma estação espacial, por mais que ele esteja flutuando, existe um campo gravitacional no espaço, pois, sem a gravidade, a estação espacial não conseguiria se manter em órbita e sairia pela direção tangencial à trajetória. Por que, então, o astronauta tem a sensação de ausência de peso?

É importante lembrar que a nossa sensação de estar pesado ou leve não é dada pela força peso, e sim pela força normal. Quando um astronauta está flutuando, ele não está sendo comprimido ou empurrado pelas paredes ou pelo chão da espaçonave. Isso acontece porque a aceleração da nave é a mesma do astronauta, já que o campo gravitacional criado pela Terra independe da massa do astronauta ou da nave, ou seja, a aceleração relativa entre o astronauta e a nave é zero, e, assim, o astronauta está em uma situação chamada de imponderabilidade. Astronautas em situação de imponderabilidade estão com uma aparente ausência de peso, porém, na prática, é uma **ausência de força normal**.



Fig. 31 Embora seja comum a mídia divulgar que ambientes de órbita não têm gravidade (“gravidade zero”), sem campo gravitacional a nave não conseguiria ficar em órbita.

A imponderabilidade não é uma situação exclusiva de ambientes de órbita. Se uma pessoa está dentro de um elevador e o elevador subitamente entra em queda livre, ou seja, cai sujeito apenas à aceleração da gravidade, a pessoa começa a flutuar com relação ao elevador, não sentindo a pressão das paredes ou do chão. Mesmo que, a princípio, ela esteja encostando no chão e em cima de uma balança, durante a queda livre não há força normal (lembre-se de que, para ter força normal, não basta contato, deve haver compressão entre as superfícies), e a indicação da balança é zero.

A imponderabilidade sempre ocorrerá quando um corpo estiver sujeito apenas à força gravitacional. Nessa situação, dizemos que o corpo está em queda livre.

## ATENÇÃO!

Um corpo está em queda livre quando nele só atua a força gravitacional. Apesar de ser contraintuitivo, um corpo em queda livre pode estar:

- 1) **Subindo ou descendo:** pense em uma maçã que é jogada para cima – durante a subida ela está em movimento retardado, sujeita apenas à força peso.
- 2) **Em trajetória parabólica:** em um lançamento oblíquo, na ausência de resistência do ar, somente o peso atua.
- 3) **Em trajetória elíptica ou circular:** naves em órbita têm a força peso como a única força atuante (e que atua como resultante centrípeta).



Fig. 32 O astronauta canadense Chris Hadfield em uma situação de imponderabilidade na Estação Espacial Internacional (2012).

A agência espacial norte-americana (NASA), para simular ambientes de órbita, utiliza um avião apelidado de “Vomit Comet” (“cometa do vômito”). Esse avião, ao atingir uma determinada altitude, entra em queda livre por aproximadamente 40 segundos, em uma trajetória parabólica, para que, assim, os astronautas consigam simular situações de imponderabilidade. Grande parte das filmagens do filme *Apollo 13*, com o ator Tom Hanks, foram feitas nesse avião. Uma réplica do ônibus espacial foi construída no interior da aeronave e, durante sucessivas quedas livres, foram realizadas as cenas das situações de imponderabilidade.

Uma das formas de simular o ambiente da superfície terrestre e impedir que os astronautas e objetos em uma estação espacial flutuem em seu interior é construir estações espaciais no formato toroidal, como uma rosquinha, de tal modo que a nave rotacione em torno de um eixo axial.

Porém, para que o astronauta consiga realizar o movimento circular em torno desse eixo, deve haver uma resultante de forças na direção do centro, sendo que essa força, no caso do astronauta, é a força de contato normal aplicada pelo chão da nave.

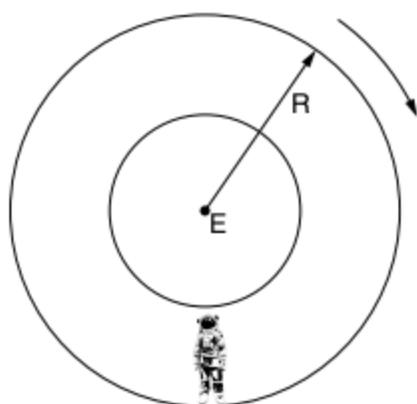
Dessa forma, além de não existir mais a situação de imponderabilidade, aumenta-se a mobilidade e melhora-se o gerenciamento das tarefas diárias da estação, diminuindo os efeitos físicos adversos da exposição à imponderabilidade a longo prazo. Apesar de ainda não existirem estações espaciais desse tipo, elas já foram popularizadas por filmes de ficção científica, como *2001: Uma Odisseia no Espaço* (1968).



Fig. 33 Conceito artístico de uma estação espacial que simula um ambiente de gravidade terrestre.

### Exercício resolvido

**12 Unicamp** Algo muito comum nos filmes de ficção científica é o fato dos personagens não flutuarem no interior das naves espaciais. Mesmo estando no espaço sideral, na ausência de campos gravitacionais externos, eles se movem como se existisse uma força que os prendesse ao chão das espaçonaves. Um filme que se preocupa com esta questão é *2001, Uma Odisseia no Espaço*, de Stanley Kubrick. Nesse filme, a gravidade é simulada pela rotação da estação espacial, que cria um peso efetivo agindo sobre o astronauta. A estação espacial, em forma de cilindro oco, mostrada a seguir, gira com velocidade angular constante de  $0,2 \text{ rad/s}$  em torno de um eixo horizontal  $E$  perpendicular à página. O raio  $R$  da espaçonave é  $40 \text{ m}$ .



- Calcule a velocidade tangencial do astronauta representado na figura.
- Determine a força de reação que o chão da espaçonave aplica no astronauta que tem massa  $m = 80 \text{ kg}$ .

### Resolução:

a)  $v = \omega R \Rightarrow v = 0,2 \cdot 40 \Rightarrow \boxed{v = 8 \text{ m/s}}$

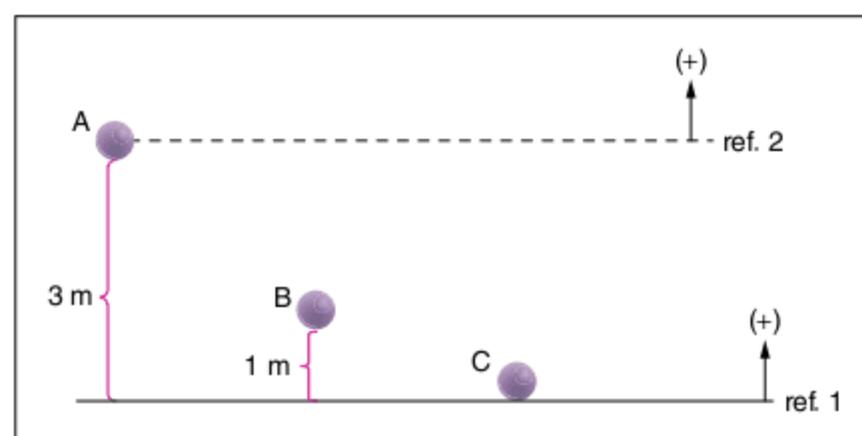
b)  $N = m\omega^2 R \Rightarrow N = 80 \cdot 0,2^2 \cdot 40 \Rightarrow \boxed{N = 128 \text{ N}}$

## Energia potencial gravitacional e conservação de energia mecânica

Agora, vamos analisar a energia em problemas de Gravitacão. Muitas vezes, é mais fácil trabalhar algebricamente com a energia em vez da força gravitacional para cálculo de velocidade e posição de satélites. Nos capítulos anteriores da Frente 1, estudamos como manipular a energia cinética e a energia potencial gravitacional, e, também, estudamos as situações nas quais se conserva a energia mecânica total do sistema.

### Energia potencial gravitacional

Para determinar a energia potencial gravitacional, é necessário inicialmente definir um referencial. Normalmente, esse referencial é o chão, embora não precise ser sempre assim. Veja o exemplo a seguir em que temos três corpos de mesma massa,  $m = 1 \text{ kg}$ , em alturas diferentes e em um local onde  $g = 10 \text{ m/s}^2$ :



Adotando o referencial 1, temos os seguintes valores de energia potencial gravitacional:

$$E_{PG,A} = mgh_A = 1 \cdot 10 \cdot 3 = 30 \text{ J}$$

$$E_{PG,B} = mgh_B = 1 \cdot 10 \cdot 1 = 10 \text{ J}$$

$$E_{PG,C} = mgh_C = 1 \cdot 10 \cdot 0 = 0 \text{ J}$$

Repare que  $E_{PG,A} > E_{PG,B} > E_{PG,C}$ .

Porém, adotando o referencial 2, temos:

$$E_{PG,A} = mgh_A = 1 \cdot 10 \cdot 0 = 0 \text{ J}$$

$$E_{PG,B} = mgh_B = 1 \cdot 10 \cdot (-2) = -20 \text{ J}$$

$$E_{PG,C} = mgh_C = 1 \cdot 10 \cdot (-3) = -30 \text{ J}$$

Repare que ainda temos:

$$E_{PG,A} > E_{PG,B} > E_{PG,C}, \text{ já que } 0 > -20 \text{ e } -20 > -30.$$

Analisando os problemas de gravitação, a situação torna-se um pouco mais complicada. Não podemos adotar o chão da Terra como referencial, pois, muitas vezes, tratamos de problemas que envolvem outros planetas ou astros. Outra questão importante: o valor do campo gravitacional não é constante, ou seja,  $g = 10 \text{ m/s}^2$  só vale nas proximidades da superfície da Terra, onde as variações de altura são pequenas se comparadas ao seu raio.

Portanto, a partir de agora, adotaremos o referencial no infinito. Parece um conceito estranho, pois não é usual, mas é importante para manter coerentes os cálculos de energia potencial gravitacional.

A equação da energia potencial gravitacional para esse referencial é:

$$E_{PG} = -\frac{GMm}{d}$$

G: constante de gravitação universal

M e m: massas que estão interagindo

d: distância entre o centro dos corpos

## ATENÇÃO!

No capítulo “Trabalho, potência e energia”, aprendemos a determinar a energia potencial gravitacional utilizando a equação  $E_{PG} = mgh$ , em que  $h$  é a altura em relação a um referencial. Porém, nos problemas de gravitação, ao utilizar a fórmula  $E_{PG} = -\frac{GMm}{d}$ , a distância  $d$  utilizada é aquela entre o centro dos dois corpos em questão.

É preciso muita atenção com o sinal negativo na equação, pois ele indica que, quanto mais afastados os corpos ( $\uparrow d$ ), maior a energia potencial gravitacional ( $\uparrow E_{PG}$ , pois ela vai se aproximando de zero). O sinal negativo aparece por conta do referencial no infinito. O maior valor de  $E_{PG}$  ocorre no infinito – a maior distância possível entre os corpos – e vale zero. Todos os outros valores de  $E_{PG}$  são negativos, portanto, menores do que zero.

Tente associar com o que foi aprendido no capítulo “Trabalho, potência e energia”: quanto maior a altura de um corpo em relação ao chão, maior a energia potencial gravitacional. Assim, quanto maior a distância entre dois corpos, maior a energia potencial gravitacional do sistema formado por eles.

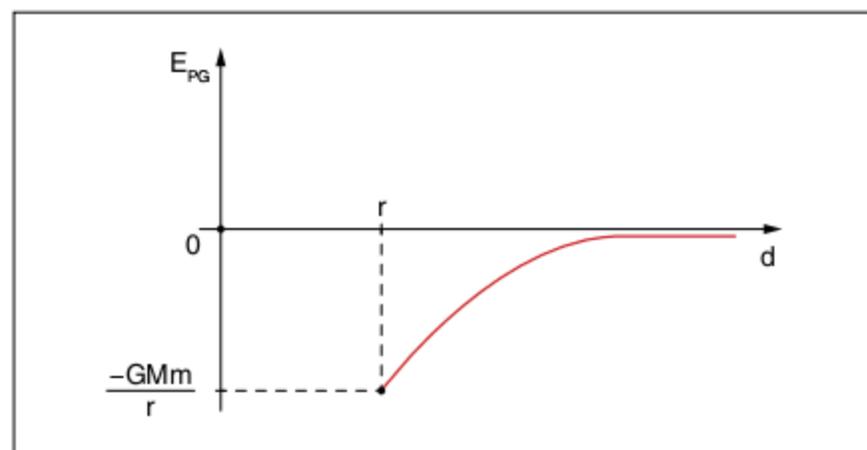


Fig. 34 Energia potencial gravitacional em função da distância entre o centro de dois corpos esféricos.

A energia potencial gravitacional é uma propriedade do sistema formado por dois corpos, e não de cada corpo separadamente. Por isso, está teoricamente errado afirmar que uma massa “tem” energia potencial gravitacional, já que essa energia é associada ao sistema das duas massas (na equação da  $E_{PG}$ , é necessário o valor de ambas as massas). Nos exercícios clássicos de conservação de energia, afirmamos que um objeto (uma pedra, por exemplo, que tem massa muito menor do que a da Terra) apresenta uma energia potencial; pois, durante o processo de transformação de energia potencial em cinética, como a massa da Terra é muito grande, ela praticamente não ganha energia cinética, sendo que a maior parte da energia é adquirida pelo objeto em questão.

### Exercício resolvido

**13** Determine a velocidade inicial que um objeto deve ter para que, lançado verticalmente da superfície terrestre, consiga atingir uma altura de  $3R_T$ , onde  $R_T$  é o raio da Terra.

#### Resolução:

De acordo com a conservação de energia mecânica desde a superfície da Terra até o ponto de altura máxima, onde a velocidade se anula, temos:

$$E_{M(\text{inicial})} = E_{M(\text{final})}$$

$$E_{PG(\text{inicial})} + E_{C(\text{inicial})} = E_{PG(\text{final})} + E_{C(\text{final})}$$

$$-\frac{GMm}{R_T} + \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{GMm}{4R_T} + 0$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{3GM}{4R_T}}$$

No ponto de altura máxima, a distância entre o centro da Terra e a posição do objeto é  $d = R_T + 3R_T = 4R_T$ .

### Velocidade de escape

Um objeto, ao ser arremessado verticalmente para cima, perde velocidade a uma taxa constante (para pequenas alturas) e, ao atingir a altura máxima, inverte o sentido do movimento e volta para o ponto de partida. Quanto maior a velocidade inicial de lançamento, maior a altura máxima atingida. Porém, para alturas de ordem de grandeza próximas do raio da Terra, quanto maior a altura atingida, menor o campo gravitacional, já que o campo decresce com o inverso do quadrado da distância. Se fosse possível esse objeto chegar ao infinito – a maior altura possível –, ele não voltaria mais para a Terra, pois, no infinito, o campo gravitacional terrestre não atua mais. Parece difícil compreender que um objeto poderia chegar ao infinito, mas talvez seja mais simples pensar que o infinito é um ponto do espaço longínquo, onde o campo gravitacional terrestre simplesmente parou de atuar.

A velocidade mínima necessária para que um corpo, sem propulsão, consiga escapar do campo gravitacional de um planeta é chamada **velocidade de escape**. Com essa velocidade, o corpo não volta mais para o local de origem.

A velocidade de escape pode ser calculada por meio do princípio de conservação de energia mecânica:

$$E_{M(\text{inicial})} = E_{M(\text{final})}$$

$$E_{PG(\text{inicial})} + E_{C(\text{inicial})} = E_{PG(\text{final})} + E_{C(\text{final})}$$

$$-\frac{GMm}{R} + \frac{mv_E^2}{2} = 0 + 0 \Rightarrow v_E = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

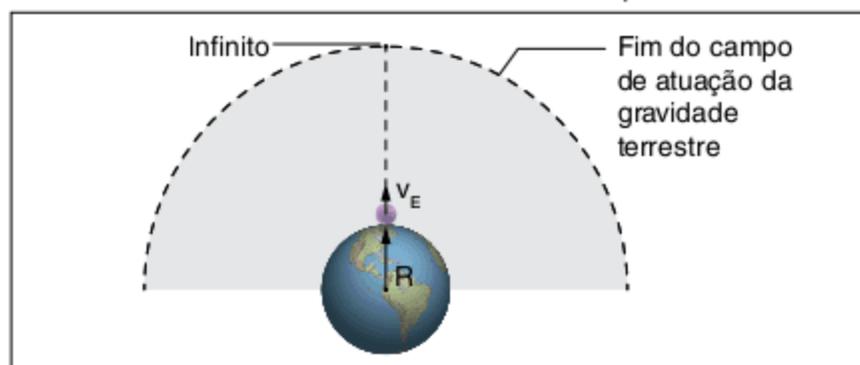


Fig. 35 Objeto sendo lançado da superfície da Terra com velocidade de escape ( $v_E$ ).

No infinito, adotamos a energia cinética como zero,  $E_{C(\text{final})} = 0$ , pois queremos a velocidade inicial **mínima** para o corpo chegar lá, ou seja, o corpo deve chegar no infinito com velocidade nula. Também temos que  $E_{PG(\text{final})} = 0$ , pois o infinito é o referencial adotado.

Para a Terra, a velocidade de escape é de aproximadamente 11,2 km/s, ou seja, um corpo **sem propulsão** precisaria dessa velocidade para escapar da Terra e nunca mais voltar para a superfície, desconsiderando os efeitos de resistência do ar. Obviamente, nessas análises, estamos desprezando os efeitos de outros planetas, estrelas e quaisquer outros corpos no espaço.

Um foguete ou ônibus espacial não precisa dessa velocidade para escapar da Terra, pois eles têm propulsores, o que faz com que a força impulsionadora, devido aos gases que são ejetados para baixo, seja maior que a força gravitacional.

## ATENÇÃO!

É importante notar que a velocidade de escape independe da direção na qual o projétil foi lançado.



U.S. NAVY PHOTO BY MASS COMMUNICATION SPECIALIST 1ST CLASS CINDY J. MCNEELY/RELEASED

Fig. 36 Decolagem do ônibus espacial Atlantis no Kennedy Space Center em Cabo Canaveral, Flórida (2011). O ônibus espacial, que possui propulsão, não precisa da velocidade de escape para sair da atmosfera.

Uma das grandes vantagens de as bases de lançamento de foguetes e satélites serem próximas à linha equatorial é aproveitar a já existente velocidade tangencial de rotação terrestre, necessitando, assim, de menos energia para escapar do campo gravitacional terrestre. Nas proximidades do Cabo Canaveral, na Flórida (EUA), a Terra já apresenta uma velocidade de aproximadamente 0,46 km/s, o que torna conveniente lançar foguetes (em direção ao Leste), já que eles possuem, por inércia, a mesma velocidade tangencial da Terra.

Se um satélite estiver em órbita circular em torno da Terra,

sua velocidade será  $v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{GM}{R_{\text{orb}}}}$ . Para esse satélite escapar da

órbita, é necessário que sua velocidade seja  $v_E = \sqrt{\frac{2GM}{R_{\text{orb}}}}$ , ou

seja, ela precisa aumentar de  $\sqrt{2} \approx 1,41$ , o que significa incrementar em torno de 41% a velocidade do satélite.

## SAIBA MAIS

### Buracos negros

Considere uma estrela esférica de massa  $M$  e raio  $R$ . Suponha que, por algum motivo, o volume dessa estrela diminua enquanto a massa permanece a mesma. A velocidade de escape

$v_E = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$  desse corpo aumenta com a diminuição do raio.

Suponha, também, que o raio é pequeno de tal forma que:

$$\sqrt{\frac{2GM}{R}} \geq c,$$

em que  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s é a velocidade da luz no vácuo. Isso significa que a velocidade de escape é maior que a velocidade da luz. Porém, de acordo com a Teoria da Relatividade Restrita, nenhum objeto consegue ultrapassar a velocidade da luz. Tais corpos, que apresentam uma velocidade de escape maior do que a da luz para pontos próximos de sua superfície, existem no universo e são conhecidos como **buracos negros**. Nem mesmo a luz consegue escapar de um buraco negro, devido ao seu intenso campo gravitacional em regiões próximas de sua superfície. Em 1916, um astrônomo alemão chamado Karl Schwarzschild usou a Teoria da Relatividade Geral de Einstein para determinar o menor raio que um corpo pode ter para se tornar um buraco negro. Esse

raio, denominado **raio crítico ( $R_C$ )** é dado por:  $R_C = \frac{2GM}{c^2}$ .

A superfície da esfera de raio  $R_C$ , que cerca o buraco negro, é chamada de horizonte de eventos, uma vez que, como nem a luz consegue escapar de seu interior, também não conseguimos ver nenhum evento que acontece nessa região.

### Conservação de energia mecânica em órbitas

Em interações entre dois corpos apenas, a única força que existe é a força gravitacional, sendo uma força conservativa. Em um sistema em que só atuam forças conservativas, a energia mecânica se conserva. Portanto, em órbitas, como só atua a força gravitacional, temos a conservação de energia mecânica. Observe o esquema a seguir:

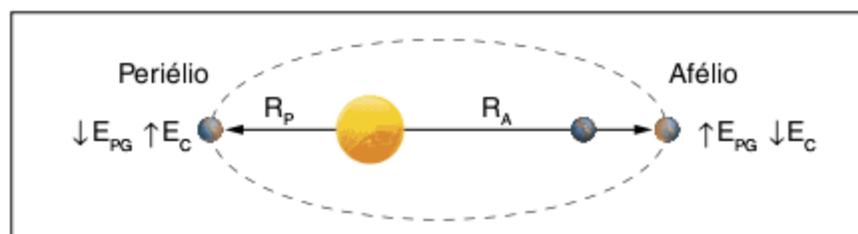


Fig. 37 Variação das energias potencial gravitacional e cinética no periélio e no afélio.

No periélio, a distância entre o planeta e o Sol é mínima. Assim, a energia potencial gravitacional também é mínima (muito negativa). Para compensar, temos que ter o máximo de energia cinética (ou seja, a velocidade é máxima no periélio). Analogamente, no afélio, a distância é grande, o que faz com que a energia potencial gravitacional também seja grande (pouco negativa, mais próxima de zero). Portanto, a energia cinética é mínima (ou seja, a velocidade é mínima no afélio). Esse resultado está em concordância com a 2ª Lei de Kepler.

Para órbitas circulares, a energia mecânica total ( $E_{\text{Total}}$ ) é dada por:

$$E_{\text{Total}} = E_{\text{Cinética}} + E_{\text{Potencial}} \Rightarrow E_{\text{Total}} = \frac{mv_{\text{orb}}^2}{2} - \frac{GMm}{R_{\text{orb}}}$$

Como  $v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{GM}{R_{\text{orb}}}}$ , temos:

$$E_{\text{Total}} = \frac{GMm}{2R_{\text{orb}}} - \frac{GMm}{R_{\text{orb}}} \Rightarrow E_{\text{Total}} = -\frac{GMm}{2R_{\text{orb}}}$$

Note que, no caso de órbitas circulares:

$$E_{\text{Potencial}} = -\frac{1}{2} E_{\text{Cinética}}$$

Para órbitas elípticas, a energia mecânica total é  $E_{\text{Total}} = -\frac{GMm}{2a}$ , em que  $a$  é o semieixo maior da elipse, o raio médio da órbita.

## SAIBA MAIS

### Órbita de transferência de Hohmann

Em 1925, o cientista alemão Walter Hohmann (1880-1945) publicou um trabalho sobre a transferência de uma nave espacial de uma órbita planetária para outra. Esse método de Hohmann tem a particularidade de ser o modo mais eficiente de transferência de órbitas, ou seja, requer o mínimo de energia possível (existem outras órbitas de transferência que minimizam tempo ou distância).

Se a órbita de partida e a órbita de destino forem circulares, a órbita de transferência de Hohmann será uma elipse cujo periélio tangencia a órbita de um dos planetas e o afélio tangencia a órbita do outro planeta.

Vamos supor que uma espaçonave está na órbita circular em azul (1) e deseja ir para a órbita circular vermelha (3), conforme a figura:

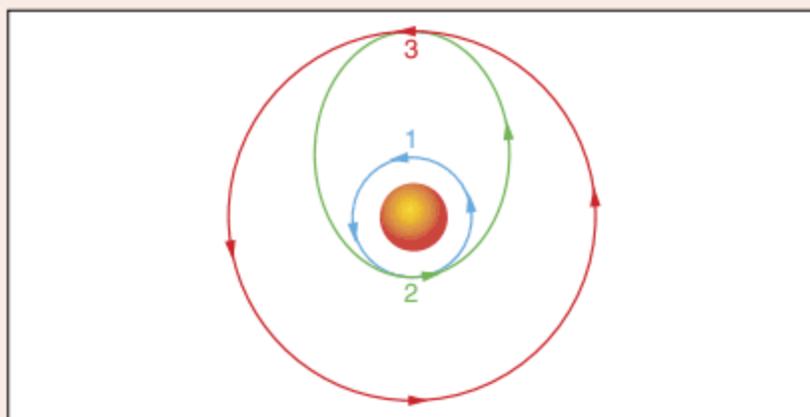


Fig. 38 Transferência da órbita circular 1 para a órbita circular 3 através da órbita elíptica 2.

Os foguetes são acionados brevemente na órbita de partida, no ponto 2. Assim, a espaçonave entra na órbita de transferência, com os foguetes já desligados, pois ocorrerá um aumento da energia mecânica total do sistema. Durante a órbita elíptica, a espaçonave viaja até atingir a outra órbita, conduzida pela força gravitacional. Ao chegar ao ponto 3, os foguetes são novamente acionados, por um breve intervalo de tempo, para que a espaçonave entre em sua nova órbita circular.

## Sistema binário

No estudo do movimento de satélites, analisamos apenas os casos nos quais o corpo central apresenta uma massa muito maior que a do corpo em órbita. Essa hipótese era válida para os movimentos dos planetas em torno do Sol, uma vez que este concentra cerca de 99,9% da massa de todo o Sistema Solar, ou seja, o centro do Sol é aproximadamente o centro de massa do Sistema Solar.

Agora, estudaremos sistemas em que as massas têm ordens de grandeza próximas. Esses casos não são tão incomuns quanto pensamos: a Lua e a Terra fazem parte de um exemplo de sistema no qual as massas, por terem ordem de grandeza não muito distintas, alteram a análise cinemática do movimento dos corpos.

Dessa forma, não há um corpo orbitando outro. Na verdade, ambos se movem em torno de um ponto em comum: o **baricentro**, que é o **centro de massa do sistema (CM)**.

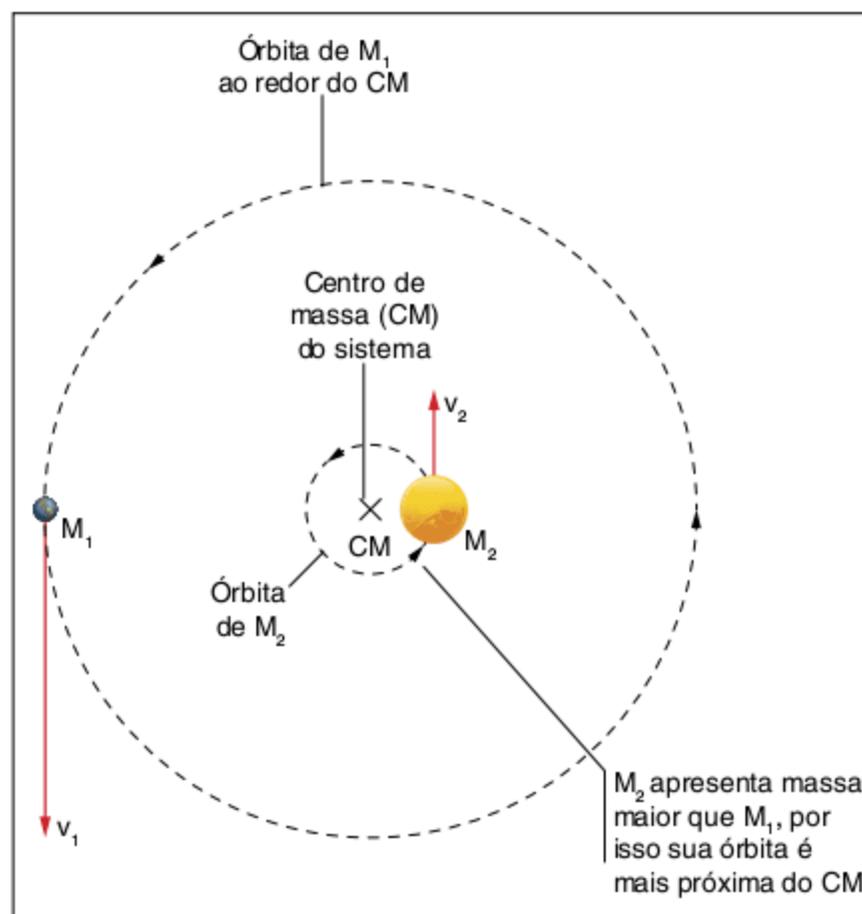


Fig. 39 Sistema binário.

Para determinar o centro de massa do sistema, podemos realizar uma média ponderada:

$$x_{\text{CM}} = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2}$$

No sistema Terra-Lua, o baricentro é um ponto mais próximo da Terra do que da Lua, já que a massa de nosso planeta é maior que a da Lua. De fato, esse ponto está localizado no interior terrestre, porém, não coincide com o centro de massa da Terra.

Nosso planeta não realiza somente rotação e translação. Além desses movimentos, ele realiza vários outros, incluindo o movimento em torno do centro de massa do sistema Terra-Lua. Na verdade, é o baricentro desse sistema que orbita em torno do Sol, em uma trajetória elíptica.

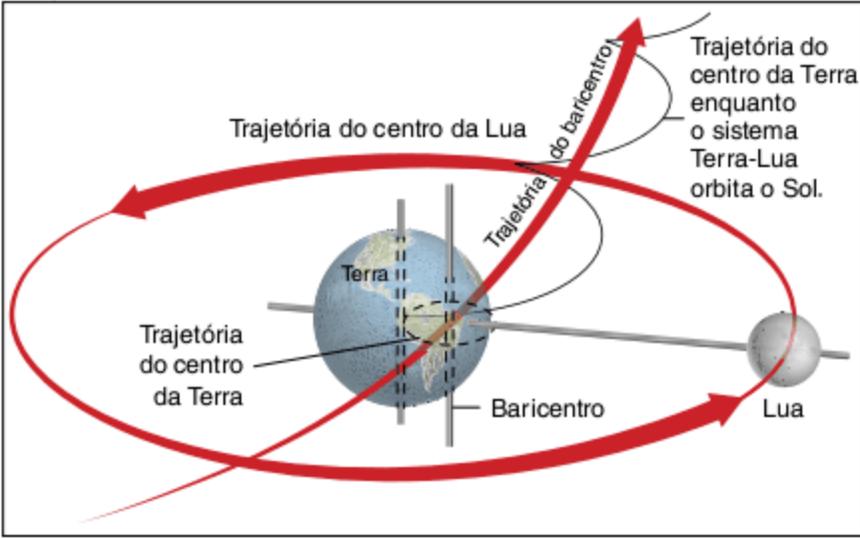


Fig. 40 O baricentro do sistema Terra-Lua se move em uma órbita elíptica (quase circular) em torno do Sol.

Vamos determinar o período da órbita de um sistema de dois corpos, de massas  $M_1$  e  $M_2$ . Para o corpo de massa  $m_1$ , a força gravitacional atua como resultante centrípeta. Considere o esquema a seguir:

$$F_G = R_C \Rightarrow \frac{Gm_1m_2}{d^2} = m_1\omega^2r_1 \Rightarrow \omega^2 = \frac{Gm_2}{d^2r_1}$$

Porém, a posição do centro de massa é dada por:

$$r_1 = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2d}{m_1 + m_2} \Rightarrow r_1 = \frac{m_2d}{m_1 + m_2}$$

Portanto, lembrando que  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , temos:

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{Gm_2}{d^2\left(\frac{m_2d}{m_1 + m_2}\right)} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{d^3}$$

$$\frac{d^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}$$

Essa é a 3ª Lei de Kepler para um sistema binário. A distância  $d$  é a distância entre os corpos e, no caso em que uma massa é muito maior que a outra, chegamos à equação original da 3ª Lei de Kepler, obtida anteriormente.

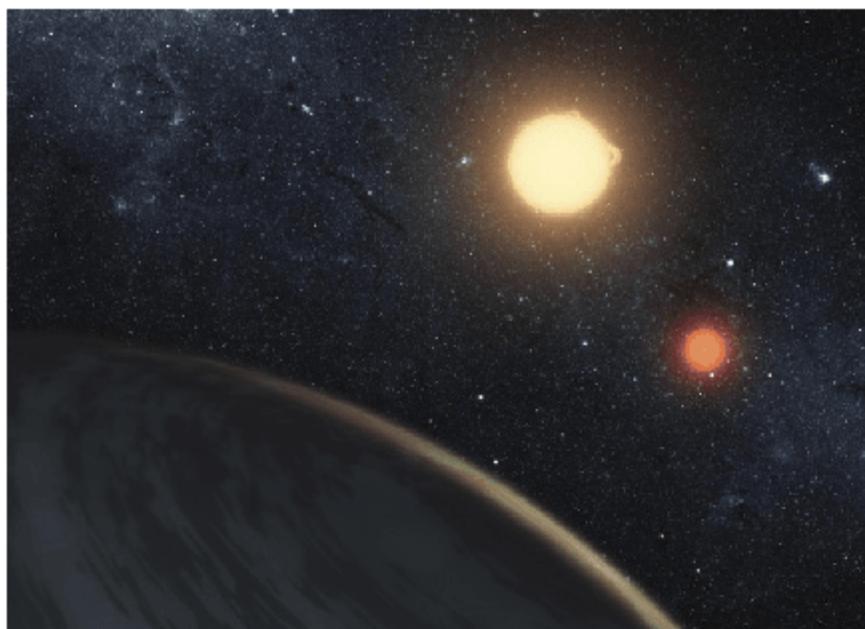


Fig. 41 Concepção artística do planeta Kepler-16b, o primeiro planeta conhecido que orbita um sistema binário de estrelas. Ele foi descoberto pela missão Kepler da NASA em 2011.

## Fases da Lua

Quando olhamos para o céu, nem sempre observamos a face visível da Lua com o mesmo formato. Algumas vezes, conseguimos vê-la durante o dia, outras vezes, durante a noite e, em alguns dias do mês, não conseguimos vê-la. Essas mudanças na face visível da Lua são denominadas fases da Lua.

O período lunar – tempo necessário para a Lua dar uma volta em torno da Terra – é de aproximadamente 28 dias e é também chamado de **mês lunar**. Durante o mês lunar, estão presentes as quatro principais fases da Lua, que acontecem na sequência: cheia, quarto minguante, nova e quarto crescente:

- **Lua cheia:** a face lunar visível está completamente iluminada; fase que acontece cerca de sete dias após a de quarto crescente.
- **Quarto minguante:** ocorre quando a iluminação da face visível da Lua está pela metade; antecede a fase de Lua nova.
- **Lua nova:** a face não iluminada está completamente voltada para a Terra. Logo, ela não é visível no céu.
- **Quarto crescente:** a esfera lunar que conseguimos ver está iluminada pela metade; acontece cerca de uma semana depois da Lua nova.

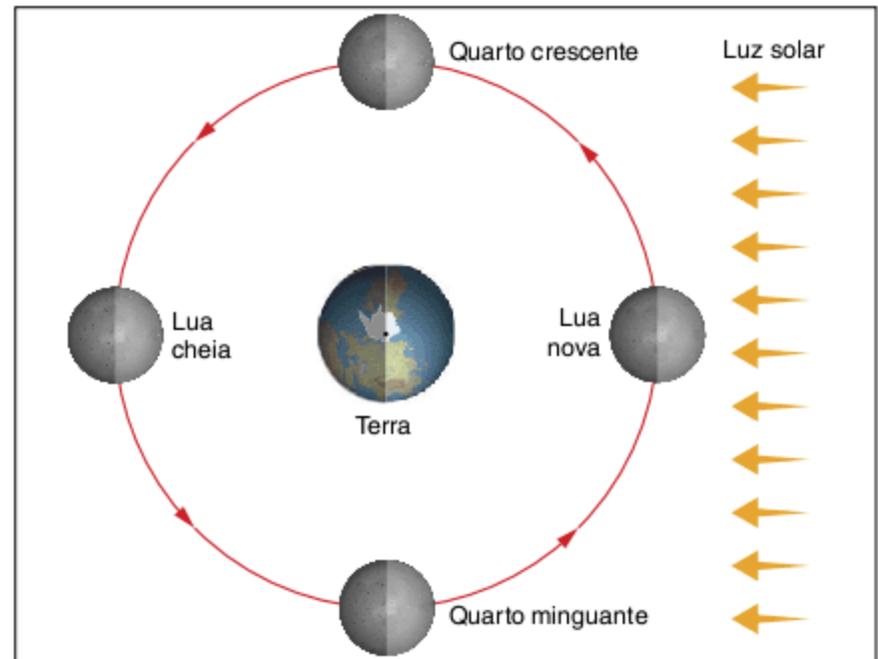


Fig. 42 Fases da Lua.

Uma particularidade importante do movimento lunar é que seu período de translação em torno da Terra está sincronizado com o período de rotação ao redor de seu eixo; a translação e a rotação ocorrem no mesmo sentido. Dessa forma, a Lua exibe sempre a mesma face para a Terra. Sobre isso, é comum ser utilizada, erroneamente, a expressão “lado escuro da Lua” para sua face não visível, porém a face não visível não necessariamente deixa de ser iluminada pelo Sol.

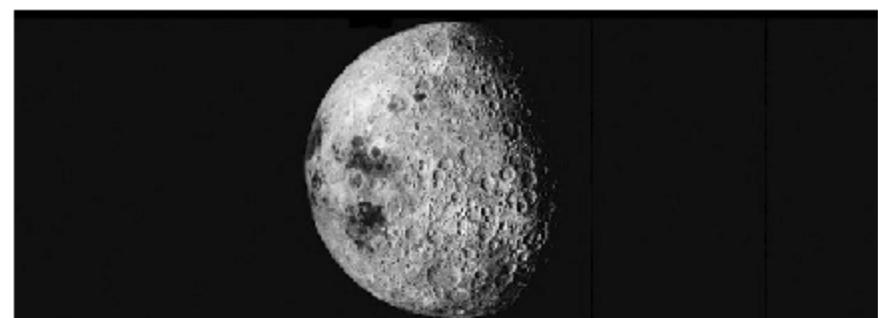


Fig. 43 Imagem registrada durante a missão Apollo 16, em que, por estar parcialmente iluminada pelo Sol, a face lunar não é visível da Terra.

## Eclipses

Em todos os meses, podemos observar pelo menos uma Lua cheia e uma Lua nova, entretanto, não são em todos os meses que observamos um eclipse solar e um eclipse lunar. Os eclipses não acontecem com essa frequência, pois o plano de órbita do sistema Terra-Lua não é o mesmo do sistema Terra-Sol. Isso faz com que os três corpos celestes não estejam sempre alinhados.

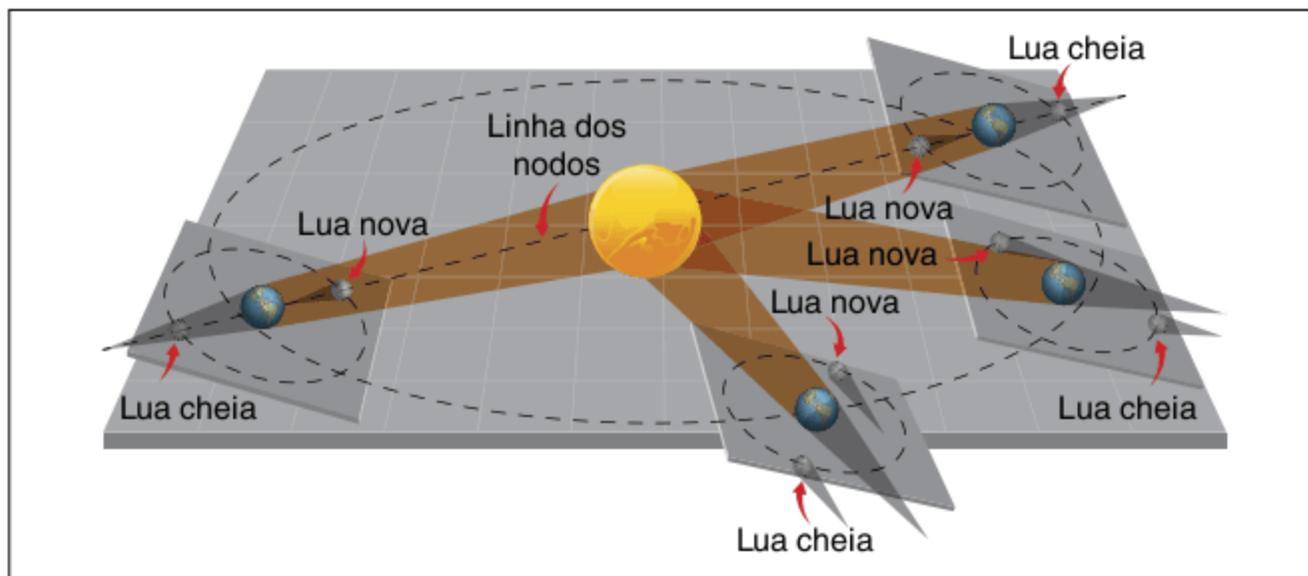


Fig. 44 O plano da órbita da Lua em torno da Terra não é o mesmo que o da órbita da Terra ao redor do Sol.

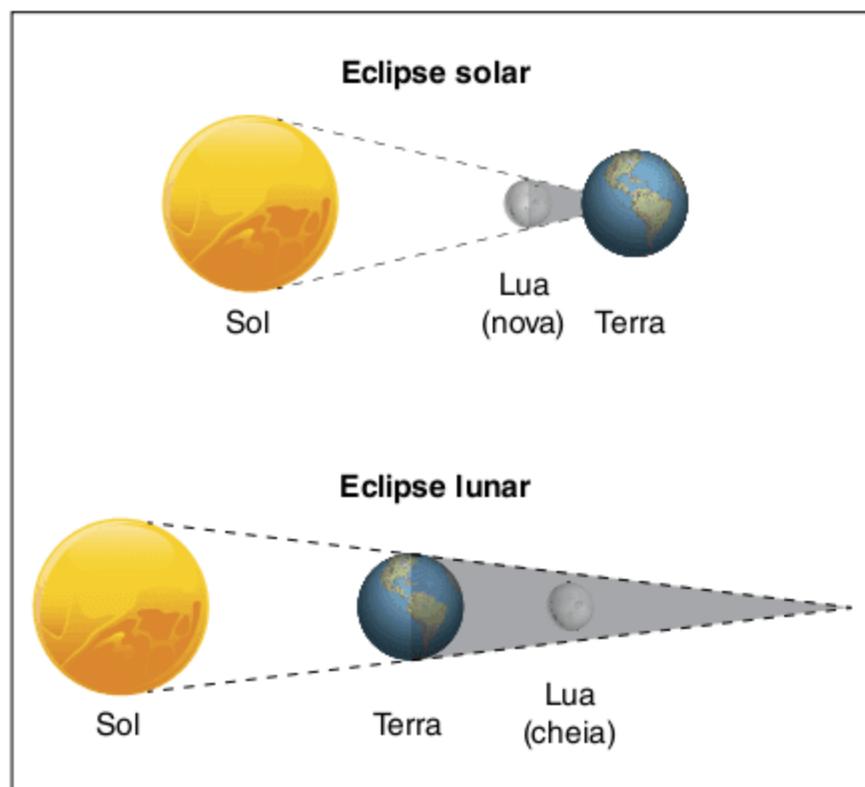


Fig. 45 Esquemas de eclipses solar e lunar.

Assim, temos duas condições para ter eclipse:

- 1) Lua nova (eclipse solar) ou Lua cheia (eclipse lunar).
- 2) Sol, Terra e Lua alinhados. A linha que une os três corpos, nesse caso, chama-se linha nodal ou **linha dos nodos**.

Embora ocorram mais eclipses solares do que lunares, estes são mais vistos, já que podem ser observados de todos os lugares da Terra em que a Lua se encontra acima do horizonte, enquanto os eclipses solares só são vistos em uma estreita faixa no hemisfério iluminado.



Fig. 46 Eclipse solar.

## Revisando

- 1 Sobre os conceitos fundamentais de astronomia e gravitação, responda:
  - a) Qual a diferença entre a teoria geocêntrica e a heliocêntrica?
  - b) Qual a diferença entre ano-luz e unidade astronômica?
  - c) Por que existem as estações do ano?

**2** Um planeta descreve uma órbita elíptica em torno do Sol. Em qual posição a velocidade de translação desse planeta é maior: no periélio ou no afélio? Qual lei de Kepler você utilizou para chegar à essa conclusão?

**3 UFRJ** Um satélite geoestacionário, portanto com período igual a um dia, descreve ao redor da Terra uma trajetória circular de raio  $R$ . Um outro satélite, também em órbita da Terra, descreve trajetória circular de raio  $R/2$ . Calcule o período desse segundo satélite.

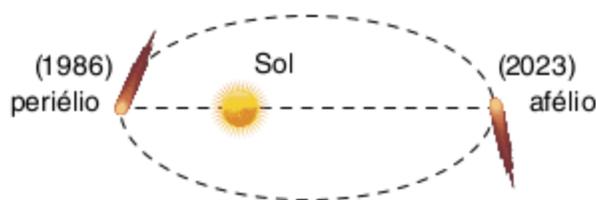
**4 UFSM** Dois corpos esféricos e homogêneos de mesma massa têm seus centros separados por uma certa distância, maior que o seu diâmetro. Se a massa de um deles for reduzida à metade e a distância entre seus centros, duplicada, o módulo da força de atração gravitacional que existe entre eles ficará multiplicado por qual valor?

**5** Que alteração sofreria o módulo da aceleração da gravidade se a massa da Terra fosse reduzida à metade e o seu raio diminuído  $\frac{1}{4}$  de seu valor real?

**6 Unicamp** Um míssil é lançado horizontalmente em órbita circular rasante à superfície da Terra. Adote o raio da Terra  $R = 6.400 \text{ km}$  e, para simplificar, tome 3 como valor aproximado de  $\pi$ .

- Qual é a velocidade de lançamento?
- Qual é o período da órbita?

**7 UFRGS (Adapt.)** O cometa de Halley atingiu, em 1986, sua posição mais próxima do Sol (periélio) e, no ano de 2023, atingirá sua posição mais afastada do Sol (afélio).



- Em qual posição a energia potencial gravitacional é maior, no afélio ou periélio?
- Em qual posição a energia cinética é maior, no afélio ou periélio?
- Qual a relação entre a energia mecânica total no periélio e no afélio?

## Exercícios propostos

### Introdução: conceitos básicos

**1 IFSP 2012** Muitos ainda acreditam que como a órbita da Terra em torno do Sol é uma elipse e o Sol não está no centro dessa elipse, as estações do ano ocorrem porque a Terra ora fica mais próxima do Sol, ora mais afastada. Se isso fosse verdade, como se explica o fato de o Natal ocorrer numa época fria (até nevar) nos países do hemisfério Norte e no Brasil ocorrer numa época de muito calor? Será que metade da Terra está mais próxima do Sol e a outra metade está mais afastada? Isso não faz sentido. A existência das estações do ano é mais bem explicada

- pelo fato de o eixo imaginário de rotação da Terra ser perpendicular ao plano de sua órbita ao redor do Sol.
- pelo fato de em certas épocas do ano a velocidade de translação da Terra ao redor do Sol ser maior do que em outras épocas.
- pela inclinação do eixo imaginário de rotação da Terra em relação ao plano de sua órbita ao redor do Sol.
- pela velocidade de rotação da Terra em relação ao seu eixo imaginário não ser constante.
- pela presença da Lua em órbita ao redor da Terra, exercendo influência no período de translação da Terra ao redor do Sol.

**2 UFRGS** Selecione a alternativa que preenche corretamente as lacunas nas afirmações a seguir, na ordem em que elas aparecem.

\_\_\_\_\_ descreveu movimentos acelerados sobre um plano inclinado e estudou os efeitos da gravidade terrestre local sobre tais movimentos.

\_\_\_\_\_ usando dados coletados por Tycho Brahe, elaborou enunciados concisos para descrever os movimentos dos planetas em suas órbitas em torno do Sol.

\_\_\_\_\_ propôs uma teoria que explica o movimento dos corpos celestes, segundo a qual a gravidade terrestre atinge a Lua, assim como a gravidade solar se estende à Terra e aos demais planetas.

- |                               |                               |
|-------------------------------|-------------------------------|
| (a) Newton – Kepler – Galileu | (d) Kepler – Newton – Galileu |
| (b) Galileu – Kepler – Newton | (e) Kepler – Galileu – Newton |
| (c) Galileu – Newton – Kepler |                               |

**3 UEL** É oficial: Plutão foi rebaixado. A partir de agora, o Sistema Solar é composto por oito planetas (de Mercúrio a Netuno), por planetas-anões (incluindo Plutão) e por corpos pequenos (asteroides, cometas). A decisão saiu da Assembleia Geral da União Astronômica Internacional (IAU), realizada em Praga, capital da República Checa. Os astrônomos seguirão trabalhando para classificar os casos duvidosos entre as categorias de “planeta-anão” e “corpo pequeno do Sistema Solar”.

Dois corpos celestes do Sistema Solar que tinham sido cotados para promoção a planetas, o asteroide Ceres e o planetóide 2003 UB313, de codinome Xena, ganham a condição de "planeta-anão". Com base no texto, é correto afirmar:

- (a) A partir de agora, o sistema solar é composto exclusivamente por oito planetas.
- (b) O planetóide 2003 UB313 pertence ao Sistema Solar e foi classificado como "planeta-anão".
- (c) A decisão de excluir Plutão do Sistema Solar foi tomada pela União Astronômica Internacional (IAU).
- (d) Corpos pequenos como asteroides e cometas serão agora classificados como "anões".
- (e) Os asteroides Ceres e o planetóide 2003 UB313 foram promovidos a planetas.

### Leis de Kepler

**4 UFRGS (Adapt.)** Sobre as três leis de Kepler são feitas as seguintes afirmações:

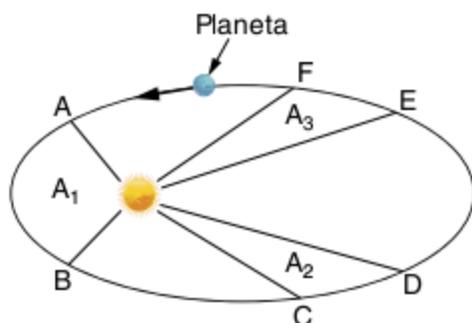
- I. A órbita de cada planeta é uma elipse com o Sol em um dos focos.
  - II. O segmento de reta que une cada planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.
  - III. O quadrado do período orbital de cada planeta é diretamente proporcional ao cubo da distância média do planeta ao Sol.
- Quais estão corretas?

- (a) Apenas I.                      (c) Apenas III.                      (e) I, II e III.
- (b) Apenas II.                      (d) Apenas I e II.

**5** Assinale a alternativa correta com relação às leis de Kepler para o movimento dos planetas.

- (a) As três leis de Kepler são o resultado de observações de natureza puramente empírica, que contrariam a mecânica newtoniana.
- (b) As leis de Kepler baseiam-se no fato de que a força gravitacional entre planetas varia com o inverso do cubo da distância entre os centros de tais planetas.
- (c) A 1ª Lei de Kepler diz que as órbitas descritas pelos planetas são circunferências perfeitas.
- (d) A 2ª Lei de Kepler diz que o módulo da velocidade de translação de um planeta (velocidade areolar) ao redor do Sol é constante.
- (e) A 3ª Lei de Kepler diz que a razão entre o cubo do raio médio da órbita de um planeta ao redor do Sol e o quadrado do período desta órbita é uma constante K.

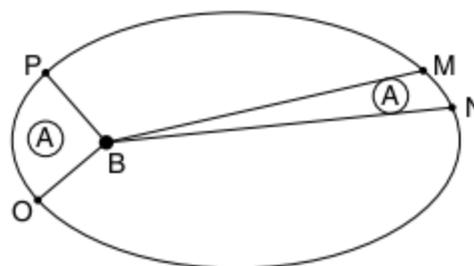
**6 Uerj** A figura ilustra o movimento de um planeta em torno do Sol.



Se os tempos gastos para o planeta se deslocar de A para B, de C para D e de E para F são iguais, então as áreas –  $A_1$ ,  $A_2$ , e  $A_3$  – apresentam a seguinte relação:

- (a)  $A_1 = A_2 = A_3$                       (c)  $A_1 < A_2 < A_3$                       (e)  $A_1 < A_2 > A_3$
- (b)  $A_1 > A_2 = A_3$                       (d)  $A_1 > A_2 > A_3$

**7 Unesp** A órbita de um planeta é elíptica e o Sol ocupa um de seus focos, como ilustrado (fora de escala). As regiões limitadas pelos contornos OPS e MNS tem áreas iguais a A.



Se  $t_{OP}$  e  $t_{MN}$  são os intervalos de tempo gasto para o planeta percorrer os trechos OP e MN, respectivamente com velocidade média  $v_{OP}$  e  $v_{MN}$  pode-se afirmar que:

- (a)  $t_{OP} > t_{MN}$  e  $v_{OP} < v_{MN}$                       (d)  $t_{OP} > t_{MN}$  e  $v_{OP} > v_{MN}$
- (b)  $t_{OP} = t_{MN}$  e  $v_{OP} < v_{MN}$                       (e)  $t_{OP} < t_{MN}$  e  $v_{OP} < v_{MN}$
- (c)  $t_{OP} = t_{MN}$  e  $v_{OP} > v_{MN}$

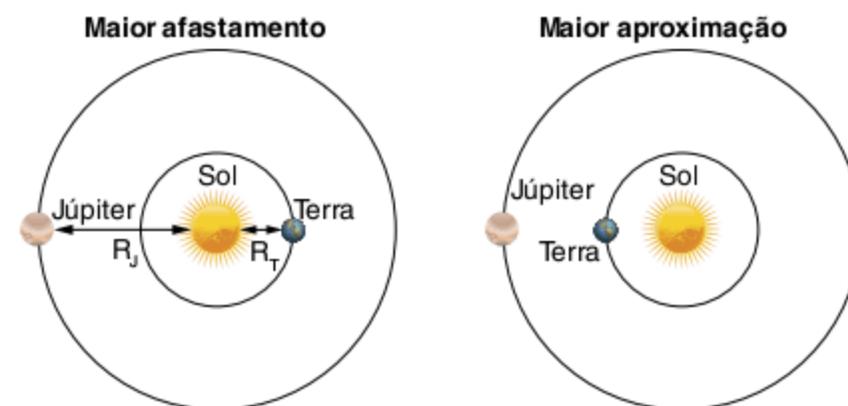
**8 Uespi 2012** Um planeta orbita em um movimento circular uniforme de período T e raio R, com centro em uma estrela. Se o período do movimento do planeta aumentar para 8T, por qual fator o raio da sua órbita será multiplicado?

- (a) 1/4                      (c) 2                      (e) 8
- (b) 1/2                      (d) 4

**9 UFRGS 2011** Considere o raio médio da órbita de Júpiter em torno do Sol igual a 5 vezes o raio médio da órbita da Terra. Segundo a 3ª Lei de Kepler, o período de revolução de Júpiter em torno do Sol é de aproximadamente

- (a) 5 anos.                      (c) 25 anos.                      (e) 125 anos.
- (b) 11 anos.                      (d) 110 anos.

**10 Unicamp 2012** Em setembro de 2010, Júpiter atingiu a menor distância da Terra em muitos anos. As figuras abaixo ilustram a situação de maior afastamento e a de maior aproximação dos planetas, considerando que suas órbitas são circulares, que o raio da órbita terrestre ( $R_T$ ) mede  $1,5 \cdot 10^{11}$  m e que o raio da órbita de Júpiter ( $R_J$ ) equivale a  $7,5 \cdot 10^{11}$  m.



De acordo com a terceira lei de Kepler, o período de revolução e o raio da órbita desses planetas em torno do Sol obedecem

à relação  $\left(\frac{T_J}{T_T}\right)^2 = \left(\frac{R_J}{R_T}\right)^3$  em que  $T_J$  e  $T_T$  são os períodos de

Júpiter e da Terra, respectivamente.

Considerando as órbitas circulares representadas na figura, o valor de  $T_J$  em anos terrestres é mais próximo de:

- (a) 0,1      (b) 5      (c) 12      (d) 125

**11 Unesp 2014** Saturno é o sexto planeta a partir do Sol e o segundo maior, em tamanho, do Sistema Solar. Hoje, são conhecidos mais de sessenta satélites naturais de Saturno, sendo que o maior deles, Titã, está a uma distância média de 1.200.000 km de Saturno e tem um período de translação de, aproximadamente, 16 dias terrestres ao redor do planeta.

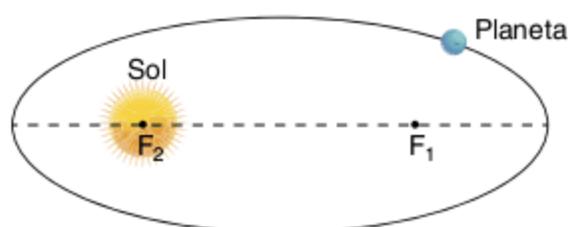


Fora de escala. Disponível em: <<http://caronteiff.blogspot.com.br>>.

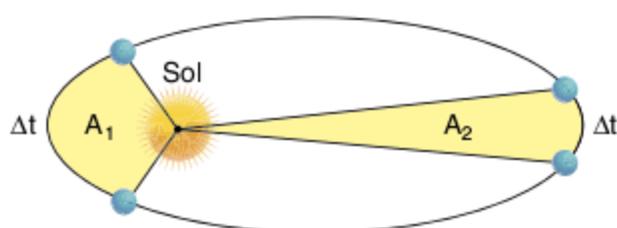
Tétis é outro dos maiores satélites de Saturno e está a uma distância média de Saturno de 300.000 km.

Considere:

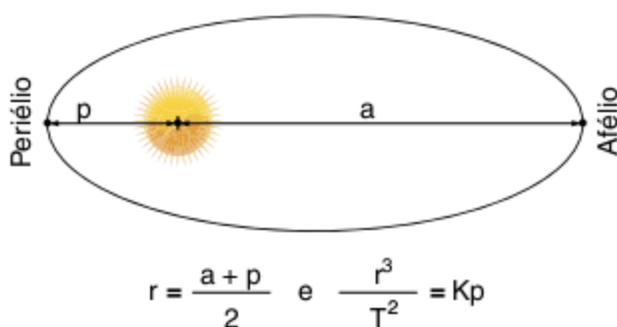
1ª Lei de Kepler – Lei das Órbitas



2ª Lei de Kepler – Lei das Áreas



3ª Lei de Kepler – Lei dos Períodos

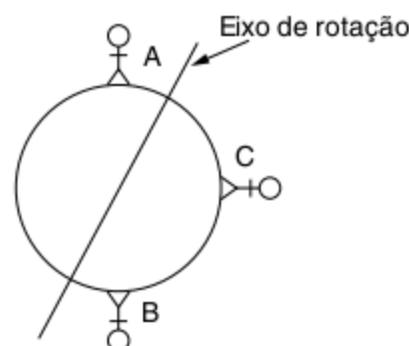


O período aproximado de translação de Tétis ao redor de Saturno, em dias terrestres, é

- (a) 4      (b) 2      (c) 6      (d) 8      (e) 10

## Força Gravitacional

**12 UFJF** Sabemos que o planeta Terra, onde habitamos sua superfície, pode ser considerado uma esfera achatada nos polos. A figura a seguir representa a Terra com pessoas em algumas posições sobre ela (A, B e C). Levando-se em consideração a Lei da Gravitação Universal, qual ou quais posições são realmente possíveis?



- (a) A      (d) A, B e C.  
 (b) A e B.      (e) B e C.  
 (c) A e C.

**13 PUC-PR** O movimento planetário começou a ser compreendido matematicamente no início do século XVII, quando Johannes Kepler enunciou três leis que descrevem como os planetas se movimentam ao redor do Sol, baseando-se em observações astronômicas feitas por Tycho Brahe. Cerca de cinquenta anos mais tarde, Isaac Newton corroborou e complementou as leis de Kepler com sua Lei da Gravitação Universal. Assinale a alternativa, dentre as seguintes, que não está de acordo com as ideias de Kepler e Newton:

- (a) A força gravitacional entre os corpos é sempre atrativa.  
 (b) As trajetórias dos planetas são elipses, tendo o Sol como um dos seus focos.  
 (c) O quadrado do período orbital de um planeta é proporcional ao cubo de sua distância média ao Sol.  
 (d) A força gravitacional entre duas partículas é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao cubo da distância entre elas.  
 (e) Ao longo de uma órbita, a velocidade do planeta, quando ele está mais próximo ao Sol (periélio), é maior do que quando ele está mais longe dele (afélio).

**14 UEM 2011** Sobre as leis de Kepler e a Lei da Gravitação Universal, assinale o que for correto.

- 01 A Terra exerce uma força de atração sobre a Lua.  
 02 Existe sempre um par de forças de ação e reação entre dois corpos materiais quaisquer.  
 04 O período de tempo que um planeta leva para dar uma volta completa em torno do Sol é inversamente proporcional à distância do planeta até o Sol.  
 08 O segmento de reta traçado de um planeta ao Sol varrerá áreas iguais, em tempos iguais, durante a revolução do planeta em torno do Sol.  
 16 As órbitas dos planetas em torno do Sol são elípticas, e o Sol ocupa um dos focos da elipse correspondente à órbita de cada planeta.

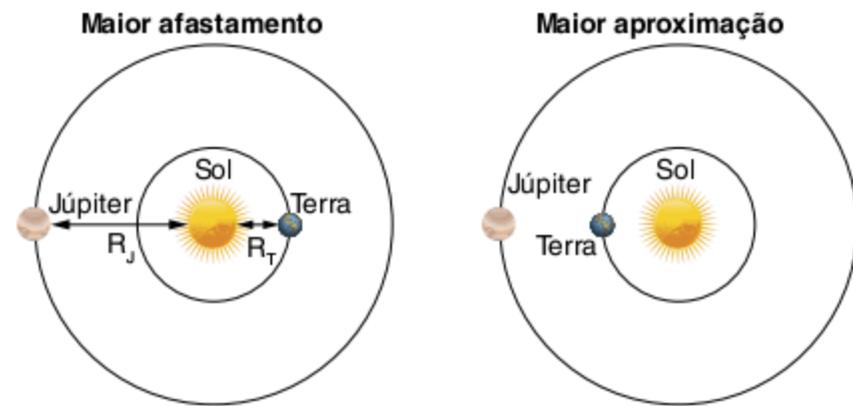
Soma =

**15 Unemat** Dois corpos de massas iguais a 110 kg e 30 kg estão a uma distância de 13 metros um do outro.

Sendo  $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ , logo, a força de atração aproximada entre eles é:

- (a)  $180,82 \cdot 10^{-11} \text{ N}$
- (b)  $160,82 \cdot 10^{-11} \text{ N}$
- (c)  $120,85 \cdot 10^{-11} \text{ N}$
- (d)  $130,8 \cdot 10^{-11} \text{ N}$
- (e)  $170,82 \cdot 10^{-11} \text{ N}$

**16 Unicamp 2012** Em setembro de 2010, Júpiter atingiu a menor distância da Terra em muitos anos. As figuras abaixo ilustram a situação de maior afastamento e a de maior aproximação dos planetas, considerando que suas órbitas são circulares, que o raio da órbita terrestre ( $R_T$ ) mede  $1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$  e que o raio da órbita de Júpiter ( $R_J$ ) equivale a  $7,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ .



A força gravitacional entre dois corpos de massas  $m_1$  e  $m_2$  tem módulo  $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$  em que  $r$  é a distância entre eles e  $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$ . Sabendo que a massa de Júpiter é  $M_J = 2,0 \cdot 10^{27} \text{ kg}$  e que a massa da Terra é  $M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ , o módulo da força gravitacional entre Júpiter e a Terra no momento de maior proximidade é:

- (a)  $1,4 \cdot 10^{18} \text{ N}$
- (b)  $2,2 \cdot 10^{18} \text{ N}$
- (c)  $3,5 \cdot 10^{19} \text{ N}$
- (d)  $1,3 \cdot 10^{30} \text{ N}$

**17 Cefet-SP** A Lei da Gravitação Universal, de Isaac Newton, afirma que dois corpos quaisquer se atraem com uma força proporcional ao produto entre as suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles. Se a distância entre o Sol e o pequeno Plutão fosse a metade, a força de atração entre esses dois corpos seria:

- (a) quatro vezes maior.
- (b) quatro vezes menor.
- (c) duas vezes maior.
- (d) duas vezes menor.
- (e) a mesma.

**18 FGV 2013** A massa da Terra é de  $6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ , e a de Netuno é de  $1,0 \cdot 10^{26} \text{ kg}$ . A distância média da Terra ao Sol é de  $1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$  e a de Netuno ao Sol é de  $4,5 \cdot 10^{12} \text{ m}$ . A razão entre as forças de interação Sol-Terra e Sol-Netuno, nessa ordem, é mais próxima de:

- (a) 0,05
- (b) 0,5
- (c) 5
- (d) 50
- (e) 500

**19 Fuvest** No Sistema Solar, o planeta Saturno tem massa cerca de 100 vezes maior do que a da Terra e descreve uma órbita, em torno do Sol, a uma distância média 10 vezes maior do que a distância média da Terra ao Sol (valores aproximados). A razão ( $F_{\text{Sat}} / F_T$ ) entre a força gravitacional com que o Sol atrai Saturno e a força gravitacional com que o Sol atrai a Terra é de aproximadamente:

- (a) 1.000
- (b) 10
- (c) 1
- (d) 0,1
- (e) 0,001

**20 UPE** Considere a massa do Sol  $2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ , a massa da Terra  $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ , a distância Terra-Sol (centro a centro) aproximadamente  $d_{\text{TS}} = 1 \cdot 10^{11} \text{ m}$  e a constante de gravitação universal  $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ . A ordem de grandeza da força de atração gravitacional entre o Sol e a Terra vale em N:

- (a)  $10^{23}$
- (b)  $10^{32}$
- (c)  $10^{54}$
- (d)  $10^{18}$
- (e)  $10^{21}$

**21 Mackenzie** Em uma história de ficção científica, um astronauta, ao descer no planeta Argus, de diâmetro igual a 1/4 do diâmetro da Terra, verifica que o módulo de seu peso é o dobro do que seria na Terra. Lembrando a Lei da Gravitação Universal de Newton,  $F = G(m_1m_2)/d^2$  concluímos que a massa do planeta Argus é:

- (a) metade da massa da Terra.
- (b) um quarto da massa da Terra.
- (c) um oitavo da massa da Terra.
- (d) o dobro da massa da Terra.
- (e) o quádruplo da massa da Terra.

**22 Unesp** A Lei da Gravitação Universal foi publicada em 1687 pelo físico e matemático inglês Isaac Newton. Através dessa lei, pode-se determinar as intensidades das forças de interação gravitacional entre a Terra e a Lua,  $F_{(TL)}$ , e entre o Sol e a Lua,  $F_{(SL)}$ .

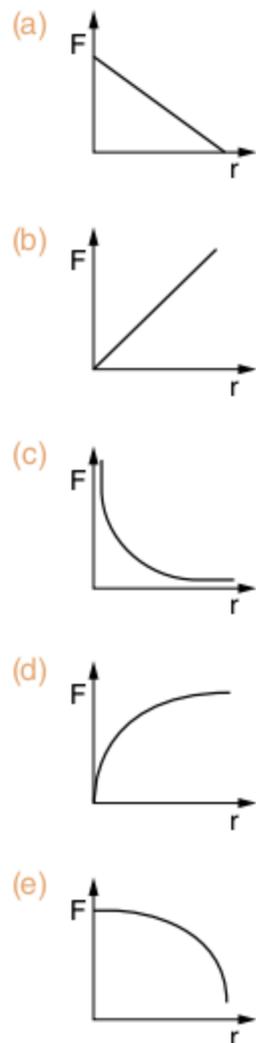
Considerando a massa do Sol de  $3,2 \times 10^5$  vezes a massa da Terra e a distância média do Sol à Lua de 400 vezes a distância média da Terra à Lua, a relação aproximada entre estas duas intensidades de força é:

- (a)  $F_{(TL)} = 0,5F_{(SL)}$
- (b)  $F_{(TL)} = F_{(SL)}$
- (c)  $F_{(TL)} = 1,5F_{(SL)}$
- (d)  $F_{(TL)} = 2F_{(SL)}$
- (e)  $F_{(TL)} = 2,5F_{(SL)}$

**23 Unemat** Um objeto de massa igual a 60 kg tem peso na superfície da Terra igual a 600 N. O peso deste objeto, estando ele a uma altura correspondente a 2/3 do raio da Terra, será igual a: (Considere na superfície da Terra:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ).

- (a) 400 N
- (b) 216 N
- (c) 900 N
- (d) 150 N
- (e) 780 N

**24 UFC** Considere duas massas puntiformes sob ação da força gravitacional mútua. Assinale a alternativa que contém a melhor representação gráfica da variação do módulo da força gravitacional sobre uma das massas, em função da distância entre ambas.



**25 UFRGS** O diagrama da figura 1 representa duas pequenas esferas, separadas entre si por uma certa distância. As setas representam as forças gravitacionais que as esferas exercem entre si.



Figura 1

A figura 2 mostra cinco diagramas, representando possibilidades de alteração daquelas forças, quando a distância entre as esferas é modificada.

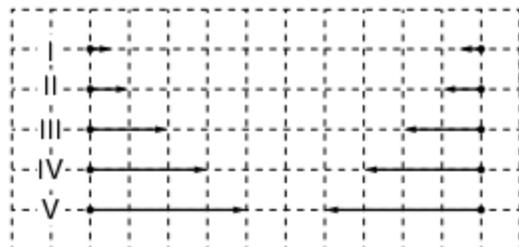
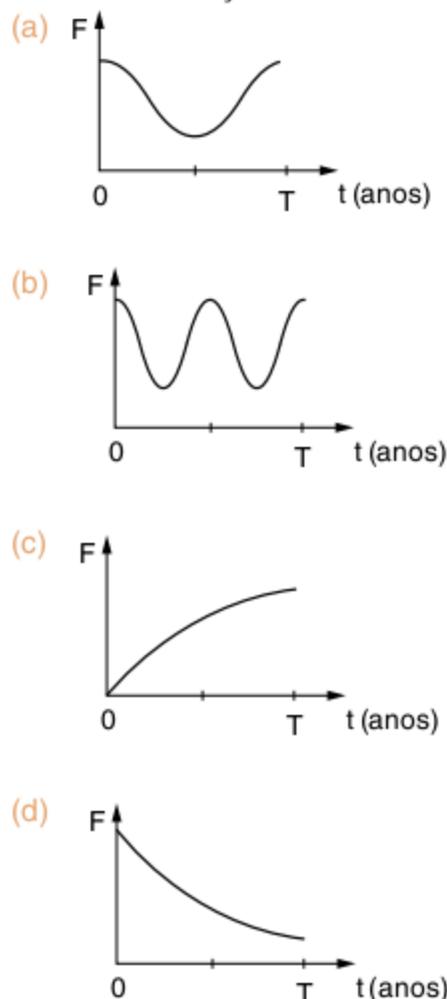


Figura 2

Segundo a Lei da Gravitação Universal, qual dos diagramas da figura 2 é coerente com o diagrama da figura 1?

- (a) I
- (b) II
- (c) III
- (d) IV
- (e) V

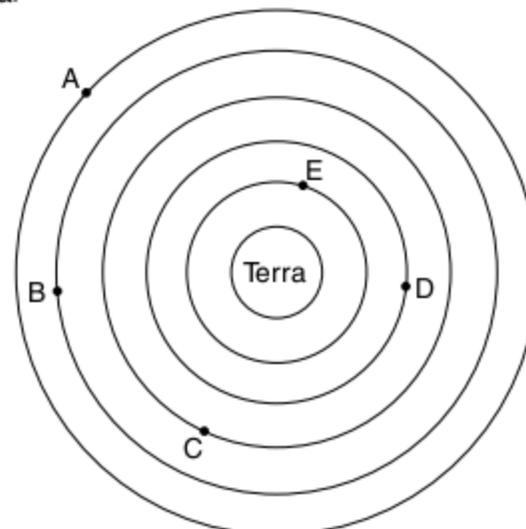
**26 UFV** Seja  $F$  o módulo da força da gravidade que o Sol faz sobre um cometa, de massa constante, cujo período orbital é  $T$  (em anos). Dos gráficos adiante, aquele que representa corretamente a variação de  $F$  com o tempo  $t$  é:



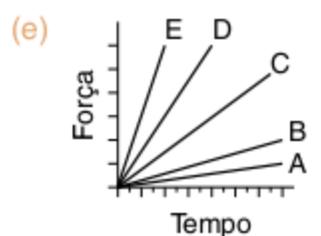
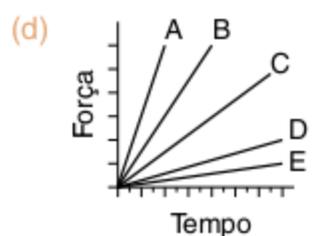
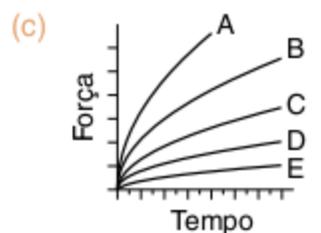
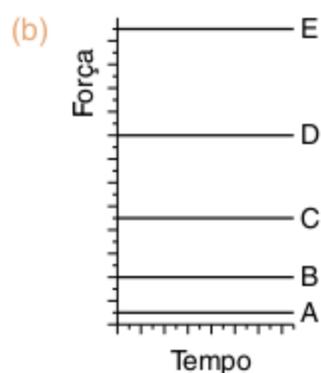
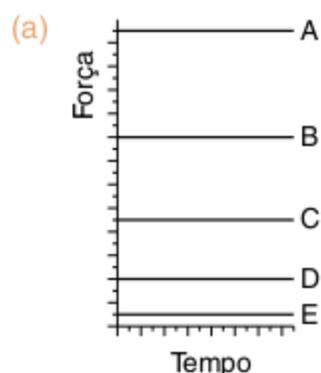
**27 Enem 2013** A Lei da Gravitação Universal, de Isaac Newton, estabelece a intensidade da força de atração entre duas massas. Ela é representada pela expressão:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

Onde  $m_1$  e  $m_2$  correspondem às massas dos corpos,  $d$  à distância entre eles,  $G$  à constante universal da gravitação e  $F$  à força que um corpo exerce sobre o outro. O esquema representa as trajetórias circulares de cinco satélites, de mesma massa, orbitando a Terra.



Qual gráfico expressa as intensidades das forças que a Terra exerce sobre cada satélite em função do tempo?



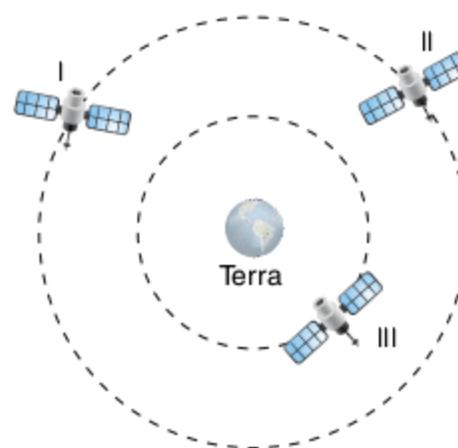
- (a) em problemas que envolvem a atração gravitacional de corpos sobre o planeta Terra, a constante de gravitação universal, inserida na expressão newtoniana da lei de gravitação, é chamada de aceleração da gravidade.
- (b) é o planeta que atrai os objetos sobre sua superfície e não o contrário, uma vez que a massa da Terra supera muitas vezes a massa de qualquer corpo que se encontre sobre sua superfície.
- (c) o que caracteriza o movimento orbital de um satélite terrestre é seu distanciamento do planeta Terra, longe o suficiente para que o satélite esteja fora do alcance da força gravitacional do planeta.
- (d) a força gravitacional entre dois corpos diminui linearmente conforme é aumentada a distância que separa esses dois corpos.
- (e) aqui na Terra, o peso de um corpo é o resultado da interação atrativa entre o corpo e o planeta e depende diretamente das massas do corpo e da Terra.

**29 UFMG** Três satélites – I, II e III – movem-se em órbitas circulares ao redor da Terra.

O satélite I tem massa  $m$  e os satélites II e III têm, cada um, massa  $2m$ .

Os satélites I e II estão em uma mesma órbita de raio  $r$  e o raio da órbita do satélite III é  $r/2$ .

Na figura (fora de escala), está representada a posição de cada um desses três satélites:



Sejam  $F(I)$ ,  $F(II)$  e  $F(III)$  os módulos das forças gravitacionais da Terra sobre, respectivamente, os satélites I, II e III.

Considerando-se essas informações, é correto afirmar que:

- (a)  $F(I) = F(II) < F(III)$
- (b)  $F(I) = F(II) > F(III)$
- (c)  $F(I) < F(II) < F(III)$
- (d)  $F(I) < F(II) = F(III)$

**30 Unifesp** Henry Cavendish, físico inglês, realizou em 1797 uma das mais importantes experiências da história da física com o objetivo, segundo ele, de determinar o peso da Terra. Para isso construiu uma balança de torção, instrumento extraordinariamente sensível e com o qual pôde medir a força de atração gravitacional entre dois pares de esferas de chumbo a partir do ângulo de torção que essa força causou em um fio. A figura mostra esquematicamente a ideia básica dessa experiência.

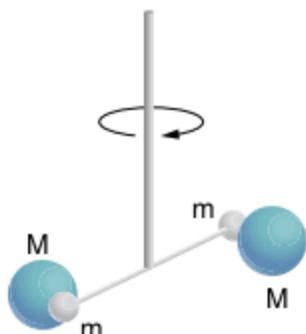
**28 UFSCar** Leia a tirinha.



Quino. *Toda Mafalda*. (Adapt.).

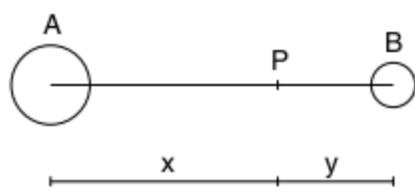
Não é difícil imaginar que Manolito desconheça a relação entre a força da gravidade e a forma de nosso planeta. Brilhantemente traduzida pela expressão criada por Newton, conhecida como a Lei de Gravitação Universal, esta lei é por alguns aclamada como a quarta lei de Newton. De sua apreciação, é correto entender que:

Ao final de seu experimento, Cavendish determinou a densidade média da Terra em relação à densidade da água, a partir da expressão matemática da Lei da Gravitação Universal,  $F = Gm_1m_2/r^2$ , mas a experiência celebrou-se pela determinação de  $G$ , constante gravitacional universal. Sendo  $F$  o módulo da força medido por meio de sua balança, conhecendo  $M$ , massa da esfera maior, e  $m$ , massa da esfera menor, Cavendish pôde determinar  $G$  pela seguinte expressão:



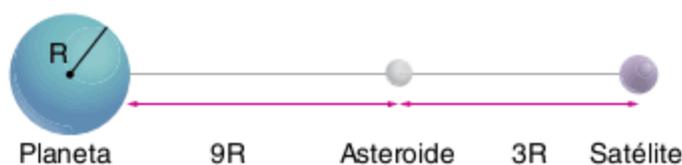
- (a)  $G = Fr^2/(Mm)$ , sendo  $r$  a distância entre os centros das esferas maior e menor.
- (b)  $G = Fr^2/(Mm)$ , sendo  $r$  o comprimento da barra que liga as duas esferas menores.
- (c)  $G = Fr^2/M^2$ , sendo  $r$  a distância entre os centros das esferas maiores.
- (d)  $G = Fr^2/m^2$ , sendo  $r$  o comprimento da barra que liga as duas esferas menores.
- (e)  $G = Mm/(Fr^2)$ , sendo  $r$  a distância entre os centros das esferas maior e menor.

**31** Dois corpos A e B, de massa  $16M$  e  $M$ , respectivamente, encontram-se no vácuo e estão separados por uma certa distância. Observa-se que um outro corpo, de massa  $M$ , fica em repouso quando colocado no ponto P, conforme a figura. A razão  $x/y$  entre as distâncias indicadas é igual a:



- (a) 2
- (b) 4
- (c) 6
- (d) 8
- (e) 16

**32** Em um certo sistema planetário, alinham-se, num dado instante, um planeta, um asteroide e um satélite, como indica a figura.



Sabendo-se que:

1. a massa do satélite é mil vezes menor que a massa do planeta;
  2. o raio do satélite é muito menor que o raio  $R$  do planeta.
- Determine a razão entre as forças gravitacionais exercidas pelo planeta e pelo satélite sobre o asteroide.

- 33 Fuvest** Um homem na Terra pesa 1.000 N. Adote  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .
- a) Qual a massa do homem?
  - b) Qual é o peso em Júpiter, sabendo que comparado com a Terra, esse planeta tem massa 320 vezes maior e raio 11 vezes maior?

### Campo Gravitacional

**34 UFRJ** Leia atentamente os quadrinhos a seguir.



A solução pensada pelo gato Garfield para atender à ordem recebida de seu dono está fisicamente correta? Justifique sua resposta.

- 35** Um astronauta tem massa de 120 kg. Na Lua, onde  $g = 1,6 \text{ m/s}^2$ , sua massa e seu peso serão, respectivamente:
- (a) 120 kg e 192 N.
  - (b) 192 kg e 192 N.
  - (c) 120 kg e 120 N.
  - (d) 192 kg e 120 N.
  - (e) 192 kg e 120 N.

**36 Uerj 2012** Na tirinha a seguir, o diálogo entre a maçã, a bola e a Lua, que estão sob a ação da Terra, faz alusão a uma lei da Física.



Luisa Daou; Francisco Caruso. *Tirinhas de Física*. Rio de Janeiro: CBPF, 2000.

- a) Aponte a constante física introduzida por essa lei.
- b) Indique a razão entre os valores dessa constante física para a interação gravitacional Lua-Terra e para a interação maçã-Terra.

**37 Unicamp 2011** Em 1665, Isaac Newton enunciou a Lei da Gravitação Universal, e dela pode-se obter a aceleração gravitacional a uma distância  $d$  de um corpo de massa  $M$ , dada por  $g = G \left( \frac{m}{d^2} \right)$ , sendo  $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$  a constante de gravitação universal. Sabendo-se o valor de  $G$ , o raio da Terra, e a aceleração da gravidade na superfície da Terra, foi possível encontrar a massa da Terra,  $M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ .

A aceleração gravitacional sobre um determinado satélite orbitando a Terra é igual a  $g = 0,25 \text{ m/s}^2$ .

A distância aproximada do satélite ao centro da Terra é de:

- (a)  $1,7 \cdot 10^3 \text{ km}$
- (b)  $4,0 \cdot 10^4 \text{ km}$
- (c)  $7,0 \cdot 10^3 \text{ km}$
- (d)  $3,8 \cdot 10^5 \text{ km}$

**38** Suponha que a Terra tivesse aceleração de gravidade igual a metade do atual e seu raio também tivesse a metade do seu valor atual. Se  $M$  é a massa atual da Terra, qual seria a massa desta Terra hipotética?

**39** Um satélite artificial de  $150 \text{ kg}$ , na superfície da Terra, é colocado em órbita a uma altura equivalente a  $1,5R$ .

Determine, na órbita do satélite, a aceleração da gravidade.

Dados:

Aceleração da gravidade na superfície da Terra  $g = 10 \text{ m/s}^2$

Raio da Terra =  $R$ .

**40 UFRGS 2012** Considerando que o módulo da aceleração da gravidade na Terra é igual a  $10 \text{ m/s}^2$ , é correto afirmar que, se existisse um planeta cuja massa e cujo raio fossem quatro vezes superiores aos da Terra, a aceleração da gravidade seria de:

- (a)  $2,5 \text{ m/s}^2$
- (b)  $5 \text{ m/s}^2$
- (c)  $10 \text{ m/s}^2$
- (d)  $20 \text{ m/s}^2$
- (e)  $40 \text{ m/s}^2$

**41 UFPR** A descoberta de planetas extrassolares tem sido anunciada, com certa frequência, pelos meios de comunicação. Numa dessas descobertas, o planeta em questão foi estimado como tendo o triplo da massa e o dobro do diâmetro da Terra. Considerando a aceleração da gravidade na superfície da Terra como  $g$ , assinale a alternativa correta para a aceleração na superfície do planeta em termos da  $g$  da Terra.

- (a)  $3/4 g$
- (b)  $2 g$
- (c)  $3 g$
- (d)  $4/3 g$
- (e)  $1/2 g$

**42 UFPR** Os astrônomos têm anunciado com frequência a descoberta de novos sistemas planetários. Observações preliminares em um desses sistemas constataram a existência de um planeta com massa  $m_p$  vezes maior que a massa da Terra e com

diâmetro  $d_p$  vezes maior que o da Terra. Sabendo que o peso de uma pessoa é igual à força gravitacional exercida sobre ela, determine o valor da aceleração da gravidade  $g_p$  a que uma pessoa estaria sujeita na superfície desse planeta, em  $\text{m/s}^2$ .

Dado: A aceleração da gravidade na superfície da Terra é  $10 \text{ m/s}^2$ .

$m_p =$ massa do planeta	$d_p =$ diâmetro do planeta	Fórmula geral	Resultado
$50 m_T$	$5 d_T$	$g_p = g_T \left( \frac{m_p}{m_T} \right) \left( \frac{R_T}{R_p} \right)^2$	
$40 m_T$	$4 d_T$		
$20 m_T$	$2 d_T$		
$60 m_T$	$10 d_T$		

Texto para a questão 43.

### Movimento

Entre os numerosos erros que afetam as medidas no campo do esporte, aquele que é mais frequentemente cometido e que, no entanto, poderia ser mais facilmente corrigido, está relacionado com a variação da aceleração da gravidade.

Sabe-se que o alcance de um arremesso, ou de um salto a distância, é inversamente proporcional ao valor de  $g$ , que varia de um local para o outro da Terra, dependendo da latitude e da altitude do local. Então, um atleta que arremessou um dardo, por exemplo, em uma cidade onde o valor de  $g$  é relativamente pequeno (grandes altitudes e pequenas latitudes) será beneficiado.

Para dar uma ideia da importância destas considerações, o professor americano P. Kirkpatrick, em um artigo bastante divulgado, mostra que um arremesso cujo alcance seja de  $16,75 \text{ m}$  em Boston constituía, na realidade, melhor resultado do que um alcance de  $16,78 \text{ m}$  na Cidade do México. Isto em virtude de ser o valor da aceleração da gravidade, na Cidade do México, menor do que em Boston.

As correções que poderiam ser facilmente feitas para evitar discrepâncias desta natureza não são sequer mencionadas nos regulamentos das Olimpíadas.

Antônio Máximo; Beatriz Alvarenga. Curso de Física. São Paulo: Scipione, 1997. p. 148. v. 1.

**43 Puccamp** O valor da aceleração da gravidade varia em função da altitude. Para que o valor da aceleração da gravidade reduza-se à quarta parte de seu valor na superfície da Terra, é preciso elevar-se a uma altura da superfície, medida em função do raio terrestre, igual a:

- (a)  $1/4$
- (b)  $1/2$
- (c)  $1$
- (d)  $3/2$
- (e)  $2$

**44 Udesc** A aceleração centrípeta de um satélite que gira em uma órbita circular em torno da Terra é aproximadamente 10 vezes menor do que a aceleração gravitacional na superfície da Terra. A distância aproximada do satélite a superfície da Terra é: Dado:  $R_{\text{Terra}} = 6.400 \text{ km}$

- (a)  $6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$
- (b)  $3,2 \cdot 10^8 \text{ m}$
- (c)  $1,4 \cdot 10^7 \text{ m}$
- (d)  $4,5 \cdot 10^7 \text{ m}$
- (e)  $4,5 \cdot 10^8 \text{ m}$

**45 UFSCar** No filme *Armageddon*, para salvar a Terra do impacto de um gigantesco asteroide, a NASA envia a esse asteroide um grupo de perfuradores de petróleo. Lá, sem nenhuma experiência em atividades no espaço, trabalhando na superfície do asteroide como se estivessem na superfície da Terra, esses trabalhadores perfuram um poço no fundo do qual colocam um artefato nuclear de 9,0 megatons (cerca de  $4,0 \cdot 10^{14}$  J). A explosão desse artefato dividiu o asteroide em duas metades de igual massa que, em relação ao asteroide, se deslocaram perpendicularmente à trajetória inicial de colisão, livrando a Terra do catastrófico impacto.

A partir de outras informações fornecidas no filme e admitindo-se o asteroide esférico, é possível concluir que o seu raio seria de  $6,5 \cdot 10^5$  m, a sua massa de  $6,0 \cdot 10^{21}$  kg e cada uma das metades em que ele se dividiu na explosão deveria ter adquirido velocidade inicial mínima de  $2,1 \cdot 10^3$  m/s, em relação ao centro de massa do asteroide, para que elas também não atingissem a Terra.

a) Qual seria a aceleração da gravidade na superfície desse asteroide? O valor obtido está de acordo com o que descrevemos do filme? Justifique.

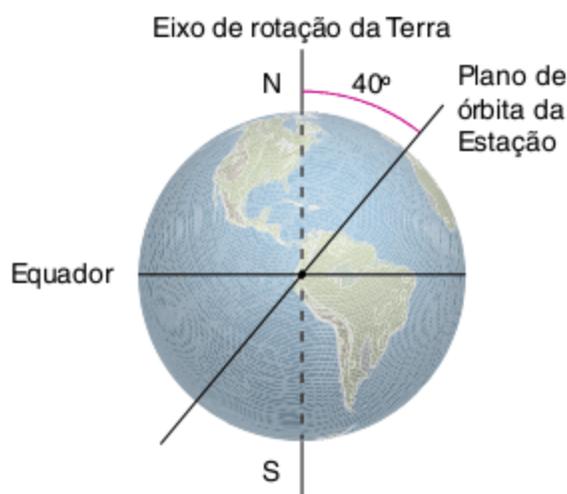
Dado:

constante da gravitação universal,  $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$  N. m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>.

b) A energia do artefato nuclear utilizado tinha o valor suficiente para separar o asteroide em duas metades e dar a elas a velocidade inicial necessária para livrar a Terra do choque? Justifique.

### Movimento de satélites

**46 Fuvest** A Estação Espacial Internacional mantém atualmente uma órbita circular em torno da Terra, de tal forma que permanece sempre em um plano, normal a uma direção fixa no espaço. Esse plano contém o centro da Terra e faz um ângulo de  $40^\circ$  com o eixo de rotação da Terra. Em um certo momento, a Estação passa sobre Macapá, que se encontra na linha do Equador. Depois de uma volta completa em sua órbita, a Estação passará novamente sobre o Equador em um ponto que está a uma distância de Macapá de, aproximadamente:



Dados da Estação:	Período aproximado: 90 minutos Altura acima da Terra = 350 km
Dados da Terra:	Circunferência no Equador = 40.000 km

- (a) zero km                      (c) 1.000 km                      (e) 5.000 km  
(b) 500 km                      (d) 2.500 km

**47 UEL** Considere um satélite artificial que tenha o período de revolução igual ao período de rotação da Terra (satélite geossíncrono).

É correto afirmar que um objeto de massa  $m$  dentro de um satélite desse tipo:

- (a) Fica sem peso, pois flutua dentro do satélite se ficar solto.  
(b) Apresenta uma aceleração centrípeta que tem o mesmo módulo da aceleração gravitacional do satélite.  
(c) Não sente nenhuma aceleração da gravidade, pois flutua dentro do satélite se ficar solto.  
(d) Fica sem peso porque dentro do satélite não há atmosfera.  
(e) Não apresenta força agindo sobre ele, uma vez que o satélite está estacionário em relação à Terra.

**48 Fuvest** Satélites utilizados para telecomunicações são colocados em órbitas geoestacionárias ao redor da Terra, ou seja, de tal forma que permaneçam sempre acima de um mesmo ponto da superfície da Terra. Considere algumas condições que poderiam corresponder a esses satélites:

- I. ter o mesmo período, de cerca de 24 horas.
- II. ter aproximadamente a mesma massa.
- III. estar aproximadamente à mesma altitude.
- IV. manter-se num plano que contenha o círculo do equador terrestre.

O conjunto de todas as condições, que satélites em órbita geoestacionária devem necessariamente obedecer, corresponde a:

- (a) I e III.    (d) II e III.  
(b) I, II, III.    (e) II, IV.  
(c) I, III e IV.

**49 FGV**



Gramática de hoje, 1994.

A sensação de leveza sentida pela personagem no segundo quadrinho, em contraste com a sensação de peso no primeiro quadrinho, quando na Terra, deve-se ao fato de que:

- (a) corpos sobre a superfície lunar têm seus pesos e suas massas reduzidas, uma vez que a atmosfera é rarefeita.  
(b) se um corpo for levado ao espaço, seu peso e sua massa assumem o menor valor possível, já que no espaço há vácuo.  
(c) devido ao maior distanciamento da Terra, corpos levados à superfície da Lua estão sujeitos a uma menor atração gravitacional do planeta, o que lhes confere menor peso.  
(d) a combinação entre a massa da Lua e seu raio gera uma força atrativa sobre a personagem, menor do que a equivalente força gerada pela Terra.  
(e) na Lua, ao contrário do que ocorre na Terra, a ausência de ar inibe a inércia dos corpos, diminuindo-lhes a massa.

**50 Unesp** Turistas que visitam Moscou podem experimentar a ausência de gravidade voando em aviões de treinamento de cosmonautas. Uma das maneiras de dar aos passageiros desses voos a sensação de ausência de gravidade, durante um determinado intervalo de tempo, é fazer um desses aviões:

- voar em círculos, num plano vertical, com velocidade escalar constante.
- voar em círculos, num plano horizontal, com velocidade escalar constante.
- voar verticalmente para cima, com aceleração igual a  $g$ .
- voar horizontalmente, em qualquer direção, com aceleração igual a  $g$ .
- cair verticalmente de grande altura, em queda livre.

**51 UFMS** Um satélite artificial está em órbita em torno da Terra, de forma que mantém sempre a mesma posição relativa a um ponto na superfície da Terra. Qual(is) da(s) afirmação(ões) a seguir é (são) correta(s)?

- A velocidade angular do satélite é igual à velocidade angular de rotação da Terra.
- A velocidade tangencial do satélite é igual à velocidade tangencial de um ponto na superfície da Terra.
- A força centrípeta que atua sob o satélite é a força gravitacional e tem o mesmo valor da força centrípeta de um corpo na superfície da Terra.
- A velocidade tangencial do satélite depende da altura de órbita em relação à Terra.
- A aceleração gravitacional do satélite é nula porque ele está em órbita.

Soma =

**52 PUC-RS** Durante cerca de oito dias, um astronauta brasileiro dividiu com astronautas estrangeiros uma missão a bordo da Estação Espacial Internacional (EEI). Inúmeras fotografias da parte interna da Estação mostraram objetos e os astronautas “flutuando” no seu interior. Este fenômeno ocorre porque:

- a aceleração da gravidade sobre eles é zero.
- os objetos e os astronautas têm a mesma aceleração da Estação.
- não há força resultante sobre eles.

Pela análise das afirmativas conclui-se que somente está/estão correta(s):

- a I.
- a II.
- a III.
- a I e a III.
- a II e a III.

**53 UFPE 2011** Descobre-se que uma estrela de massa igual a quatro vezes a massa do Sol, localizada na Via Láctea, possui um planeta orbitando ao seu redor, em movimento circular uniforme (MCU) de raio  $R$ . O tempo necessário para que esse exoplaneta percorra uma circunferência completa ao

redor da estrela é a metade de um ano terrestre. Considere que a Terra realiza um MCU ao redor do Sol de raio  $R_{TS}$  e despreze a influência gravitacional de outros corpos do Sistema Solar. Quanto vale a razão  $R/R_{TS}$ ?

**54 UFJF** Considere dois satélites A e B, com massas  $m_A$  e  $m_B$  ( $m_A > m_B$ ), respectivamente, que giram em torno da Terra em órbitas circulares, com velocidades constantes de módulo  $v$ . Considerando que somente atue sobre eles a força gravitacional da Terra, podemos afirmar que:

- a tem órbita de raio maior que B.
- a tem órbita de raio menor que B.
- os dois satélites têm órbitas de raios iguais.
- a razão entre os raios das órbitas de A e de B é  $m_A/m_B$ .
- a razão entre os raios das órbitas de A e de B é  $m_B/m_A$ .

Texto para as questões 55 e 56.

No dia 7 de fevereiro de 1984, a uma altura de 100 km acima do Havaí e com uma velocidade de cerca de 29.000 km/h, Bruce McCandless saindo de um ônibus espacial, sem estar preso por nenhuma corda, tornou-se o primeiro satélite humano. Sabe-se que a força de atração  $F$  entre o astronauta e a Terra é proporcional a  $(mM)/r^2$ , onde  $m$  é a massa do astronauta,  $M$  a da Terra, e  $r$  a distância entre o astronauta e o centro da Terra.

Halliday; Resnick; Walker. *Fundamentos de Física*. Rio de Janeiro: LTC, 2002. p. 36. v. 2.

**55 Puccamp** Na situação descrita no texto, com o referencial na Terra, o astronauta Bruce:

- não tem peso.
- sofre, além do peso, a ação de uma força centrífuga.
- sofre, além do peso, a ação de uma força centrípeta.
- tem peso, que é a resultante centrípeta.
- tem peso aparente nulo graças à ação da força centrífuga.

**56 Puccamp** Considerando outro astronauta, de massa  $\frac{3m}{2}$ ,

à distância  $2r$  do centro da Terra, a força de atração entre ele e a Terra será:

- $F/4$
- $(3/8)F$
- $F/2$
- $(3/4)F$
- $(3/2)F$

**57 UFPR** Neste ano, comemoram-se os 400 anos das primeiras descobertas astronômicas com a utilização de um telescópio, realizadas pelo cientista italiano Galileu Galilei. Além de revelar ao mundo que a Lua tem montanhas e crateras e que o Sol possui manchas, ele também foi o primeiro a apontar um telescópio para o planeta Júpiter e observar os seus quatro maiores satélites, posteriormente denominados de Io, Europa, Ganimedes e Calisto.

Satélite	Raio orbital ( $10^5$ km)	Massa ( $10^{22}$ kg)
Io	4	9
Europa	6	5
Ganimesdes	10	15
Calisto	20	11

Supondo que as órbitas desses satélites ao redor de Júpiter sejam circulares, e com base nas informações da tabela acima, assinale a alternativa correta. (Os valores da tabela foram arredondados por conveniência)

- (a) A força de atração entre Júpiter e Ganimesdes é maior do que entre Júpiter e Io.
- (b) Quanto maior a massa de um satélite, maior será o seu período orbital.
- (c) A circunferência descrita pelo satélite Calisto é quatro vezes maior que a circunferência descrita pelo satélite Europa.
- (d) A maior velocidade angular é a do satélite Calisto, por possuir maior período orbital.
- (e) O período orbital de Europa é aproximadamente o dobro do período orbital de Io.

**58 UFPR** De acordo com a Lei da Gravitação Universal e as leis de Kepler, é correto afirmar:

- 01 A unidade da constante gravitacional  $G$  pode ser expressa, no Sistema Internacional, como  $m^3/(s^2 \cdot kg)$ .
- 02 Um satélite geoestacionário mantém constante a sua posição relativa em relação à Terra.
- 04 A força resultante sobre a Lua é nula.
- 08 A velocidade de translação da Terra em torno do Sol independe da posição relativa entre ambos.
- 16 Usando os dados de um planeta cuja órbita em torno de uma estrela é conhecida, é possível encontrar o período de um outro planeta que se encontre em uma órbita de raio diferente.

Soma =

**59 FGV-RJ** Muitos satélites utilizados em telefonia, transmissões de rádio e TV, internet e outros serviços de telecomunicações ocupam a órbita geoestacionária. Nesta órbita, situada no plano da linha do Equador, os satélites permanecem sempre acima de um mesmo ponto da superfície terrestre, parecendo parados para um observador no Equador. A altura de um satélite geocêntrico, em relação à superfície da Terra, em órbita circular, é aproximadamente igual a:

Dados:  $G$  = constante de gravitação universal

$M$  = massa da Terra

$R$  = raio da Terra =  $6,4 \cdot 10^6$  m

$[GM/4\pi^2]^{1/3} = 2,2 \cdot 10^4$  m.s<sup>-2/3</sup>

$[24 \text{ horas}]^{2/3} = 2,0 \cdot 10^3$  s<sup>2/3</sup>

- (a) 37.600 km
- (b) 50.000 km
- (c) 64.000 km
- (d) 12.800 km
- (e) 25.000 km

**60 Unesp** Dois satélites giram ao redor da Terra em órbitas circulares de raios  $R_1$  e  $R_2$ , com velocidades  $v_1$  e  $v_2$ , respectivamente. Se  $R_2$  tiver o dobro do valor de  $R_1$ , pode-se dizer que:

- (a)  $v_2 = v_1/2$
- (b)  $v_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)v_1$
- (c)  $v_2 = (\sqrt{2})v_1$
- (d)  $v_2 = 2v_1$
- (e)  $v_2 = 4v_1$

Texto para a questão 61.

Constante da gravitação universal =  $6,7 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>

Massa do Sol =  $2,0 \cdot 10^{30}$  kg

Raio médio da órbita do Sol =  $3,0 \cdot 10^{20}$  m

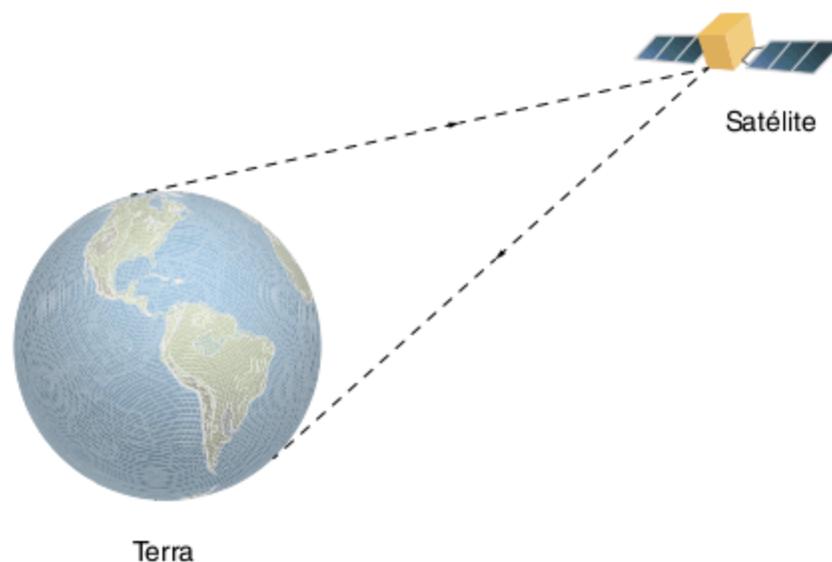
1 ano =  $3,14 \cdot 10^7$  s

$\pi = 3,14$

**61 Uerj** O período do movimento de translação do Sol em torno do centro de nossa galáxia, a Via Láctea, é da ordem de 200 milhões de anos. Esse movimento deve-se à grande aglomeração das estrelas da galáxia em seu centro.

Uma estimativa do número  $N$  de estrelas da Via Láctea pode ser obtida considerando que a massa média das estrelas é igual à massa do Sol. Calcule o valor de  $N$ .

**62 Uerj** As comunicações entre o transatlântico e a Terra são realizadas por meio de satélites que se encontram em órbitas geoestacionárias a 29.600km de altitude em relação à superfície terrestre, como ilustra a figura a seguir.



Para essa altitude, determine:

- a) a aceleração da gravidade;
- b) a velocidade linear do satélite.

Dado: aceleração na gravidade na superfície da Terra  $g = 10$  m/s<sup>2</sup> e raio da Terra  $R = 6.400$  km

**63 FEI-SP (Adapt.)** Analise as afirmações:

- I. Um satélite estacionário, apesar de apresentar-se aparentemente parado para um observador na Terra, apresenta um movimento circular uniforme, no plano do Equador terrestre, com período de 24h.
- II. Imagine um satélite, situado à mesma altura de um satélite geostacionário (cerca de 36.000 km), em movimento circular uniforme, com o plano de sua órbita passando pelos polos. Um esquimó verá esse satélite a cada 24 h.

Para que a trajetória de um satélite seja uma órbita circular em torno da Terra, sua velocidade  $v$  deverá ser  $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ , onde  $M$  é a massa da Terra,  $r$  é o raio da Terra e  $G$  é a constante de gravitação universal.

Podemos afirmar que:

- (a) apenas I é a correta. (d) apenas I e III são corretas.  
 (b) apenas I e II são corretas. (e) I, II e III são corretas.  
 (c) apenas II e III são corretas.

**64 ITA** Derive a 3ª Lei de Kepler do movimento planetário a partir da Lei da Gravitação Universal de Newton considerando órbitas circulares.

**65 Unifor 2011** Os satélites artificiais são artefatos de larga utilização nos nossos dias. São usados nas telecomunicações, como base para o funcionamento do GPS, como sensores de radiação, e no monitoramento do desmatamento global e das plantações, para fins militares etc.

Considere um satélite cuja altura em relação à superfície da Terra seja  $h$ .

Se a massa da Terra é  $M$ , o raio da Terra é  $R$  e a constante de gravitação universal é  $G$ , o período (tempo necessário para uma volta completa em torno da Terra) deste satélite é:

- (a)  $T = 2\pi \sqrt{\frac{GM}{(R+h)^3}}$  (d)  $T = 4\pi \sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}}$   
 (b)  $T = 4\pi \sqrt{\frac{(R+h)^2}{GM}}$  (e)  $T = 2\pi \sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}}$   
 (c)  $T = 2\pi \sqrt{\frac{(R+h)^2}{GM}}$

## Energia

**66 UFG** Considere que a Estação Espacial Internacional, de massa  $M$ , descreve uma órbita elíptica estável em torno da Terra, com um período de revolução  $T$  e raio médio  $R$  da órbita. Nesse movimento,

- (a) o período depende de sua massa.
- (b) a razão entre o cubo do seu período e o quadrado do raio médio da órbita é uma constante de movimento.
- (c) o módulo de sua velocidade é constante em sua órbita.
- (d) a energia mecânica total deve ser positiva.
- (e) a energia cinética é máxima no perigeu.

**67 UFB** O diâmetro médio da Terra é, aproximadamente, 2,6 vezes maior que o de Mercúrio. A massa de Mercúrio é 0,05 da massa da Terra. Calcule a razão entre a velocidade de escape na Terra ( $V_t$ ) e a velocidade de escape em Mercúrio ( $V_m$ ).

**68 UFB** Suponha que exista um planeta cuja massa seja 4 vezes maior que a massa da Terra e cujo raio seja 4 vezes menor que o raio da Terra. Calcule a relação entre a velocidade de escape no planeta e a velocidade de escape na Terra.

**69 Uesb** A aceleração da gravidade na superfície de um asteroide é igual a  $3,0 \text{ m/s}^2$ . Se o raio do asteroide é igual a 500,0 km, então, para que um foguete escape da atração gravitacional desse asteroide, ele deve ser lançado da sua superfície com uma velocidade, em km/s, de:

- (a) 5 (c)  $\sqrt{5}$  (e)  $\sqrt{3}$   
 (b) 4 (d)  $\sqrt{7}$

**70 Uerj** Leia as informações a seguir para a solução desta questão.

O valor da energia potencial  $E_p$ , de uma partícula de massa  $m$  sob a ação do campo gravitacional de um corpo celeste de massa  $M$  é dado pela seguinte expressão:  $E_p = \frac{GmM}{r}$

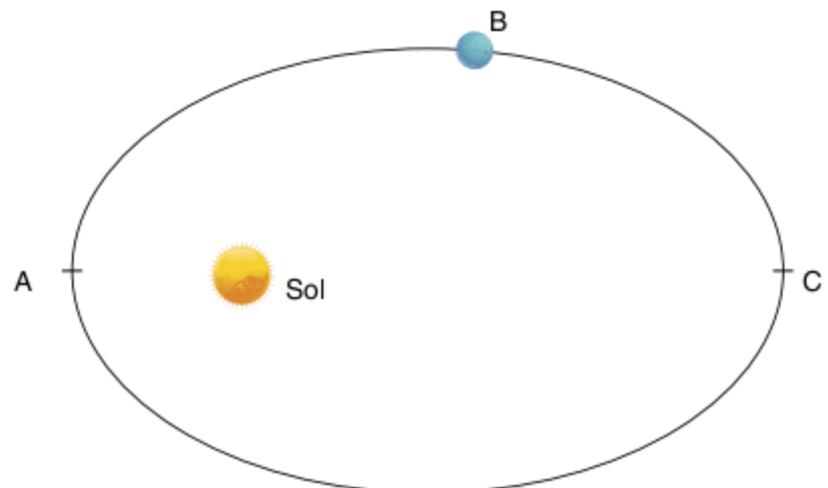
Nessa expressão,  $G$  é a constante de gravitação universal e  $r$  é a distância entre a partícula e o centro de massa do corpo celeste.

A menor velocidade inicial necessária para que uma partícula livre-se da ação do campo gravitacional de um corpo celeste, ao ser lançada da superfície deste, é denominada *velocidade de escape*. A essa velocidade, a energia cinética inicial da partícula é igual ao valor de sua energia potencial gravitacional na superfície desse corpo celeste.

Buracos negros são corpos celestes, em geral, extremamente densos. Em qualquer instante, o raio de um buraco negro é menor que o raio  $R$  de um outro corpo celeste de mesma massa, para o qual a velocidade de escape de uma partícula corresponde à velocidade  $c$  da luz no vácuo.

Determine a densidade mínima de um buraco negro, em função de  $R$ , de  $c$  e da constante  $G$ .

**71 UFPI (Adapt.)** Um planeta gira, em órbita elíptica, em torno do Sol. Considere as afirmações:



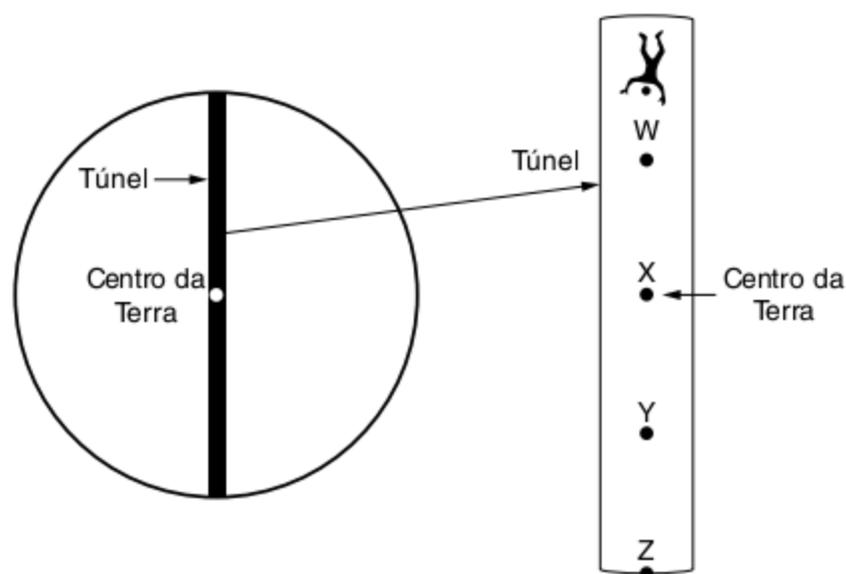
- I. Na posição A, a velocidade do planeta tem módulo máximo.
- II. Na posição C, a energia potencial do sistema (Sol + planeta) é máxima.
- III. Na posição B, a energia total do sistema (Sol + planeta) tem um valor intermediário, situado entre os correspondentes valores em A e C.

Assinale a alternativa correta.

- (a) I e III são verdadeiras.
- (b) I e II são verdadeiras.
- (c) II e III são verdadeiras.
- (d) Apenas II é verdadeira.
- (e) Apenas I é verdadeira.

**72 OBA** Sabemos que a velocidade de escape da Terra é aproximadamente 11 km/s. Entretanto, quando observamos o lançamento de um foguete, é fácil perceber que sua velocidade nos instantes iniciais é muito inferior a este valor. Por quê?

**73 Uerj** Embora sua realização seja impossível, imagine a construção de um túnel entre os dois polos geográficos da Terra, e que uma pessoa, em um dos polos, caia pelo túnel, que tem 12.800 km de extensão, como ilustra a figura a seguir.

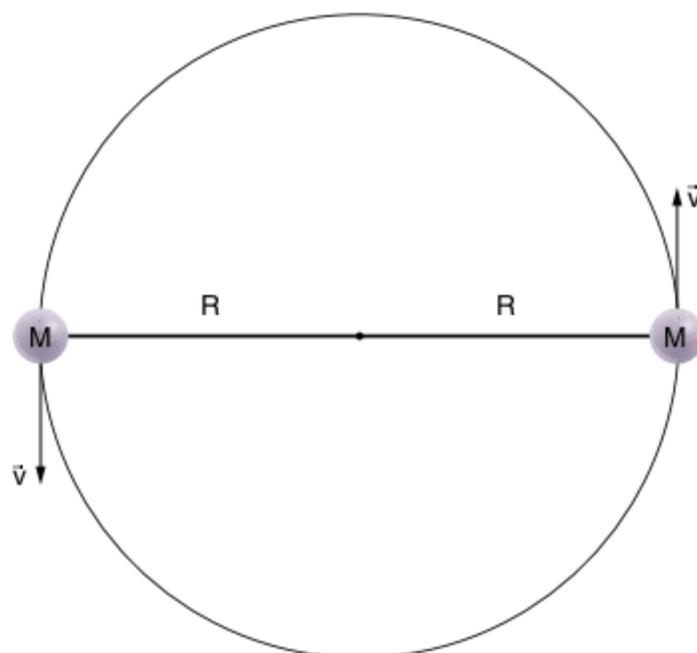


Admitindo que a Terra apresente uma constituição homogênea e que a resistência do ar seja desprezível, a aceleração da gravidade e a velocidade da queda da pessoa, respectivamente, são nulas nos pontos indicados pelas seguintes letras:

- (a) Y – W
- (b) W – X
- (c) X – Z
- (d) Z – Y

### Binário, fases da Lua e eclipses

**74 UPE** A figura a seguir representa a trajetória de duas estrelas idênticas (cada uma com massa  $M$ ) que giram em torno do centro de massa das duas estrelas. Cada órbita é circular e possui raio  $R$ , de modo que as duas estrelas estão sempre em lados opostos do círculo. Considere  $G$  a constante de gravitação universal.



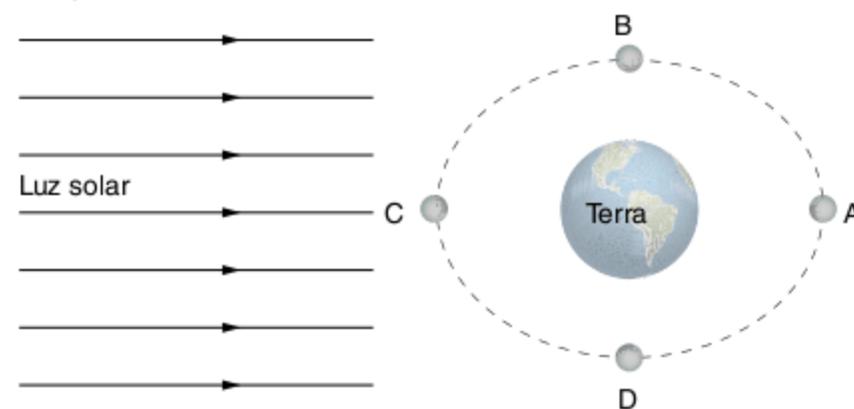
Analise as proposições que se seguem.

- (4) A força de atração gravitacional de uma estrela sobre a outra vale  $\frac{GM^2}{4R^2}$
- (8) A velocidade orbital de cada estrela vale  $\sqrt{\frac{4M}{GR}}$
- (12) O período de cada estrela vale  $4\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$

A soma dos números entre parênteses das proposições que corresponde aos itens corretos é igual a

- (a) 24
- (b) 12
- (c) 8
- (d) 20
- (e) 16

**75 CFTMG** Um eclipse ocorre quando um astro é ocultado, total ou parcialmente, por um outro astro que se interpõe entre ele e um observador. O eclipse entre o Sol, a Lua e a Terra pode ser solar ou lunar, conforme a posição relativa entre eles. Na figura a seguir representamos as fases da Lua (posições: A, B, C, D), a Terra e um feixe de luz solar.



Considerando a Terra como referencial, analise as afirmativas a seguir.

- I. A fase da Lua é cheia quando ela se encontra na posição A.
  - II. Quando ocorre o eclipse do Sol, a Lua encontra-se na posição C.
  - III. Durante um eclipse lunar, a Lua encontra-se na posição A.
- Sobre essas afirmativas, pode-se afirmar que:
- (a) todas são corretas.
  - (b) apenas I e II são corretas.
  - (c) apenas II e III são corretas.
  - (d) todas são incorretas.

**76 Unirio** Em 1973, o Pink Floyd, uma famosa banda do cenário musical, publicou seu disco *The dark side of the Moon*, cujo título pode ser traduzido como “O lado escuro da Lua”. Este título está relacionado ao fato de a Lua mostrar apenas uma de suas faces para nós, os seres humanos. Este fato ocorre por que:

- (a) os períodos de translação da Lua e da Terra em torno do Sol são iguais.
- (b) o período de rotação da Lua em torno do próprio eixo é igual ao período de rotação da Terra em torno de seu eixo.
- (c) o período de rotação da Lua em torno do próprio eixo é igual ao seu período de translação em torno da Terra.

- (d) o período de translação da Lua em torno da Terra é igual ao período de rotação desta em relação ao seu próprio eixo.
- (e) a luz do Sol não incide sobre o “lado escuro” da Lua.

**77 UFF** Os eclipses solar e lunar – fenômenos astronômicos que podem ser observados sem a utilização de instrumentos ópticos – ocorrem sob determinadas condições naturais. A época de ocorrência, a duração e as circunstâncias desses eclipses dependem da geometria variável do sistema Terra-Lua-Sol.

Nos eclipses solar e lunar as fases da Lua são, respectivamente:

- (a) minguante e nova.
- (b) minguante e crescente.
- (c) cheia e minguante.
- (d) nova e cheia.
- (e) cheia e cheia.

## TEXTO COMPLEMENTAR

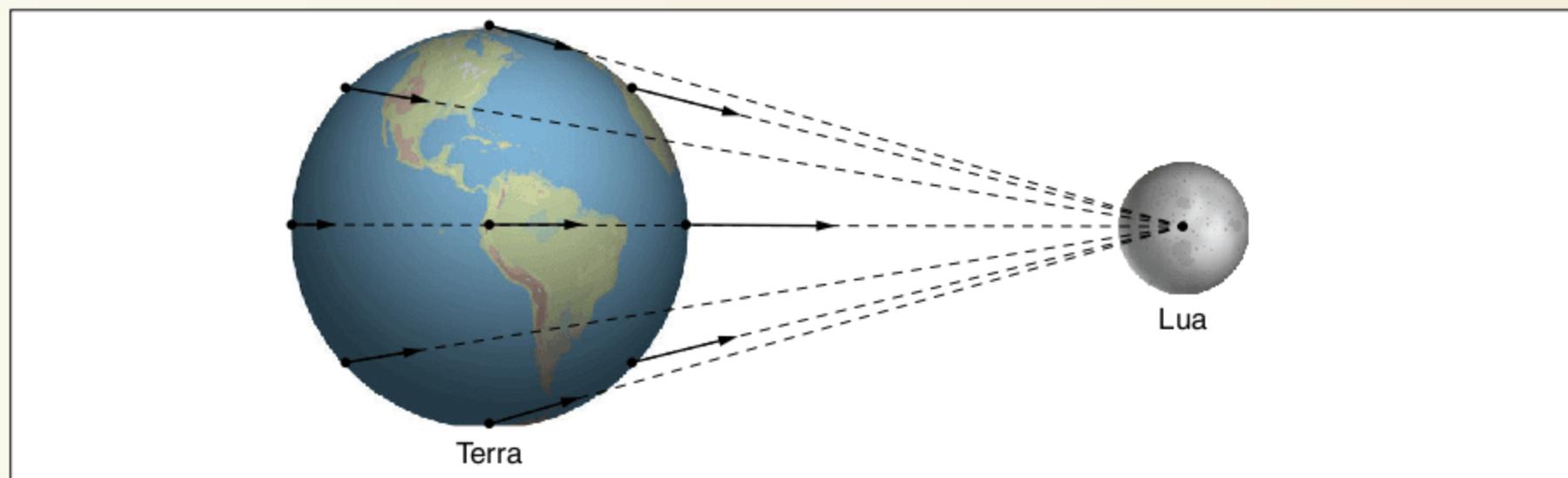
### Efeito das marés

Ao passar um dia no litoral, é possível notar o fenômeno de subida e descida da água do mar. Os motivos do aumento e da diminuição periódicos do nível da água dos oceanos, o chamado efeito de marés, foram questionados por vários cientistas ao longo da história. Desde a Antiguidade Clássica, esse efeito é observado e previsto, porém, não completamente compreendido. Já no século XVII, Galileu não foi bem-sucedido ao explicar o efeito das marés, já que não encontrou uma justificativa satisfatória para a existência das duas marés altas por dia, apenas para a existência de uma. Algumas literaturas afirmavam que as marés são originadas da rotação terrestre, o que hoje sabemos que é incorreto.

Conhecer o funcionamento das marés é importante para várias atividades, como atracar barcos, colecionar conchas, surfar, pescar, navegar e se preparar para tempestades. Engenheiros de petróleo, que monitoram a pressão nos imensos reservatórios naturais subterrâneos, percebem a variação da pressão do petróleo ao longo do dia devido às marés.

Coube a Newton explicar corretamente que a força de atração gravitacional entre a Lua e a Terra é a causa principal desse fenômeno.

A interação gravitacional da Lua com a Terra resulta em forças de intensidades diferentes sobre objetos localizados em diferentes partes do planeta, já que a força gravitacional depende do inverso do quadrado da distância. Observe o esquema a seguir:



Os vetores representam a força gravitacional em objetos situados em diferentes posições na Terra. A variação do módulo da força gravitacional é a grande responsável pela existência das marés.



Variação do nível das águas na Baía de Fundy, Canadá. Devido a sua forma, tamanho e profundidade, as marés nessa baía podem ter uma amplitude de até 16 metros.

A força resultante dada pela diferença entre a força gravitacional da Lua em um ponto da Terra e a força que ela exerce no centro da Terra é chamada força de maré. Observe o esquema:

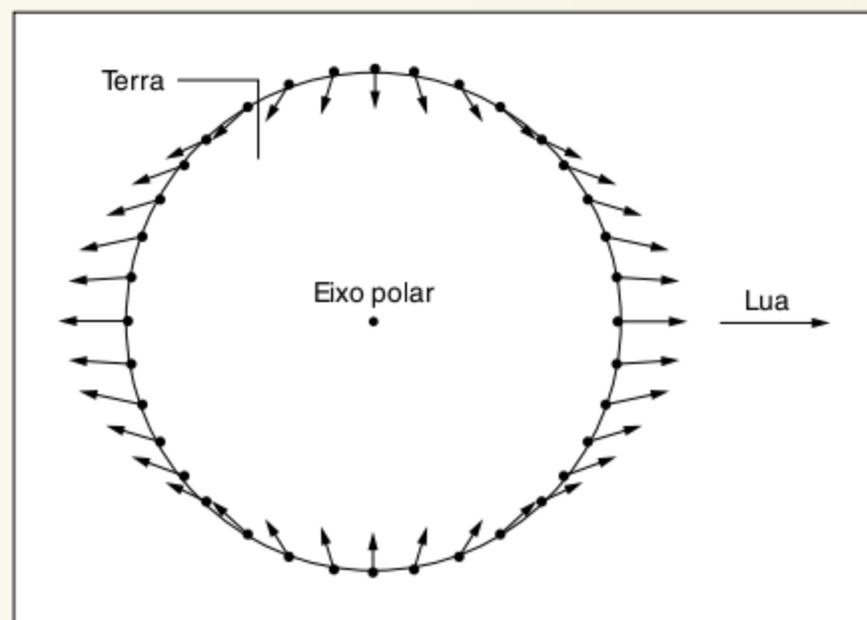
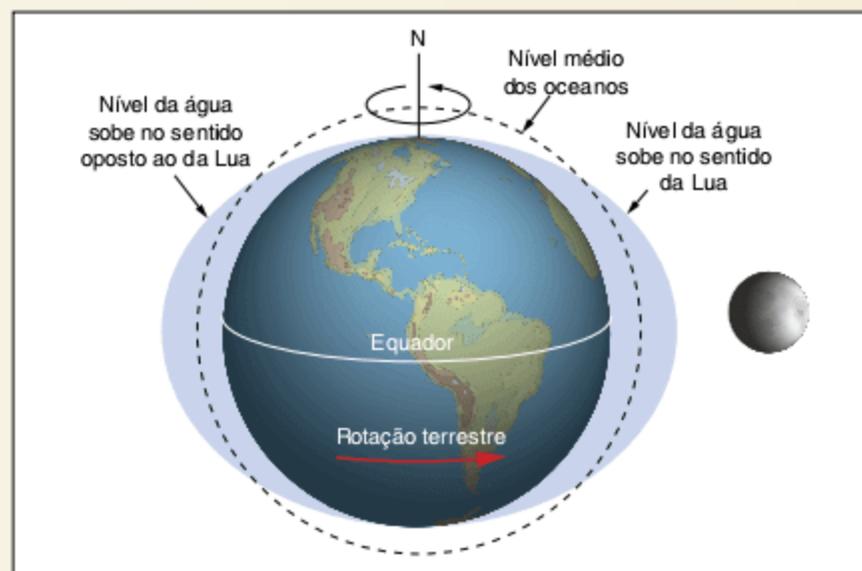


Diagrama das forças de maré em diferentes pontos da superfície da Terra devido à interação gravitacional do planeta com a Lua.

As forças de maré fazem com que ocorra uma pequena deformação da crosta terrestre e com que a massa de água se desloque em direção à linha que une a Terra e a Lua.

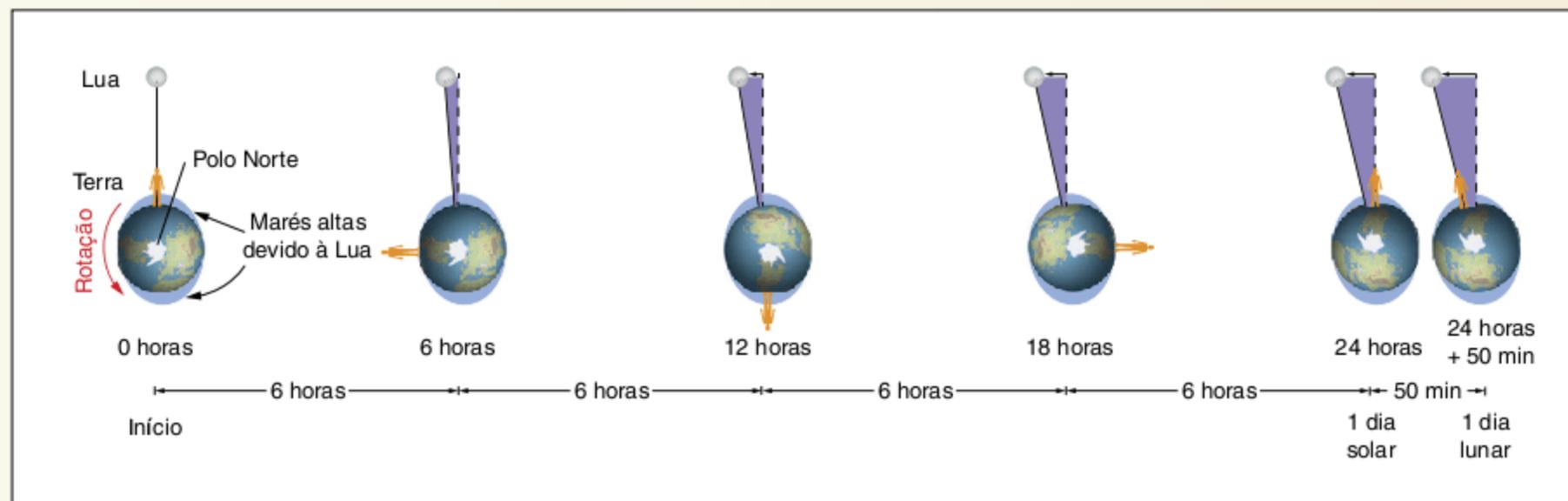
As forças de maré dependem do inverso do cubo da distância e é por isso que as forças de maré devido à Lua são muito mais significativas do que as devido ao Sol, que, embora tenha uma massa maior que a da Lua, está muito afastado da Terra. De fato, a contribuição solar para as marés é aproximadamente metade da contribuição lunar.



Em uma situação idealizada, a interação da Terra com a Lua resulta em duas marés altas, uma no lado da Terra que está mais próxima da Lua e outra no lado mais afastado.

Como a Terra rotaciona, temos, em um período de aproximadamente 24 horas, duas marés altas e duas baixas. Observe que existe uma maré alta na região mais próxima da Lua e também na região mais afastada.

É interessante notar que as marés altas, para uma determinada região, na verdade ocorrem a cada 12 horas e 25 minutos, já que a duração do dia lunar (aproximadamente 24 horas e 50 minutos) é diferente da duração do dia solar (24 horas). Isso é explicado pelo fato de a Lua não estar imóvel, mas sim se movimentando ao mesmo tempo em que a Terra rotaciona. Portanto, o dia lunar é medido desde o instante em que a Lua está diretamente acima de um observador na Terra até o próximo instante em que isso ocorre novamente. A diferença entre o dia lunar e o dia solar pode ser percebida pelo fato de as marés altas acontecerem com um atraso de 50 minutos a cada dia e da Lua nascer 50 minutos mais tarde a cada noite. Observe a figura:



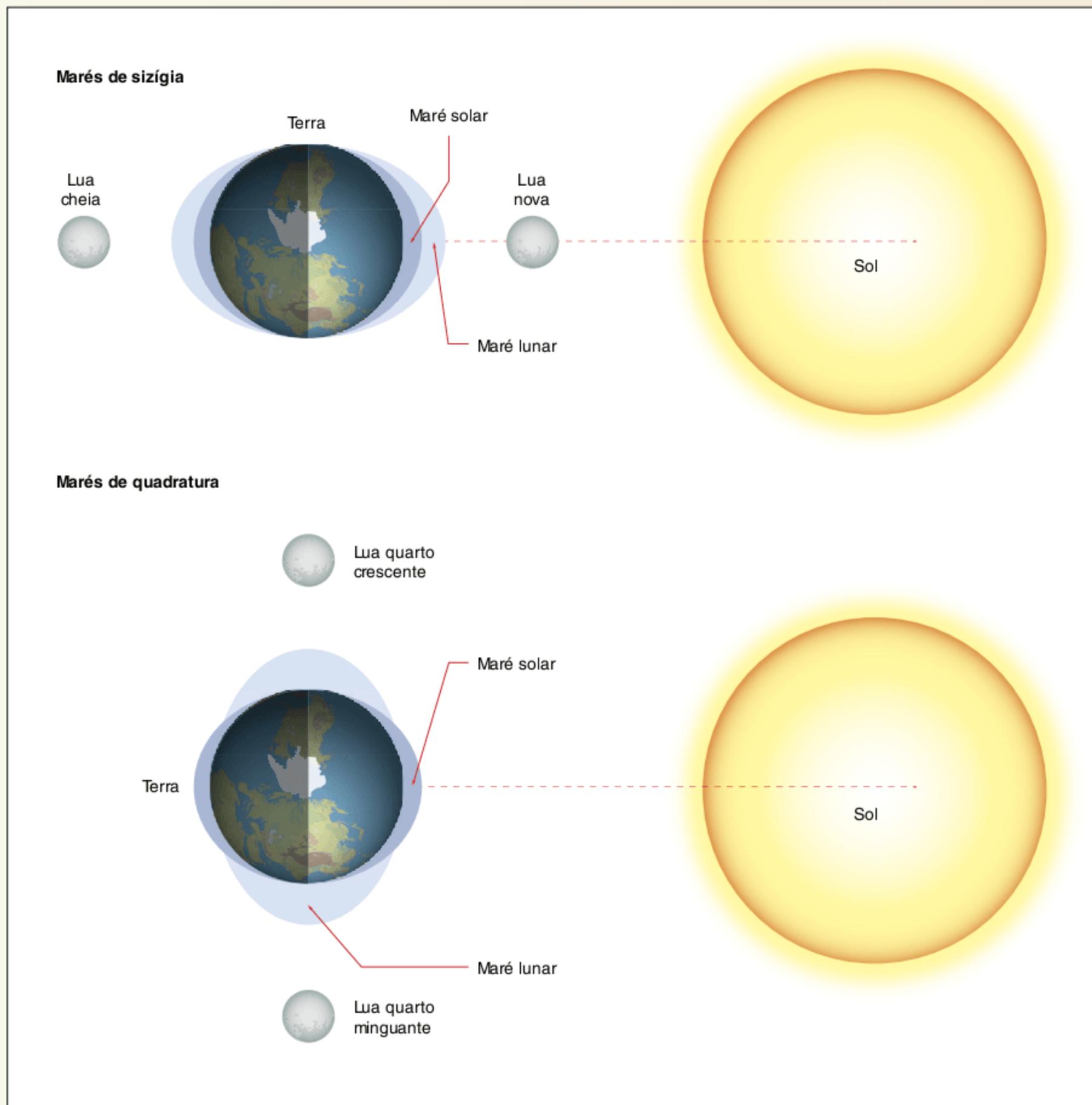
Diferença entre o dia lunar e o dia solar.

## ATENÇÃO!

Em pequenas porções de água, como em piscinas e lagos, a força de maré é tão reduzida que a consideramos desprezível.

Em situações de Lua cheia ou nova, ocorrem as marés mais altas, chamadas **marés de sizígia** (ou de águas vivas), que ocorrem a cada 2 semanas.

Nas situações de Lua quarto crescente ou quarto minguante, ocorrem as **marés de quadratura** (ou de águas mortas). Nesses casos, ainda existem as marés altas, mas não tão altas como as de sizígia, justamente pelo fato de o efeito gravitacional do Sol diminuir um pouco a amplitude máxima dessas marés.



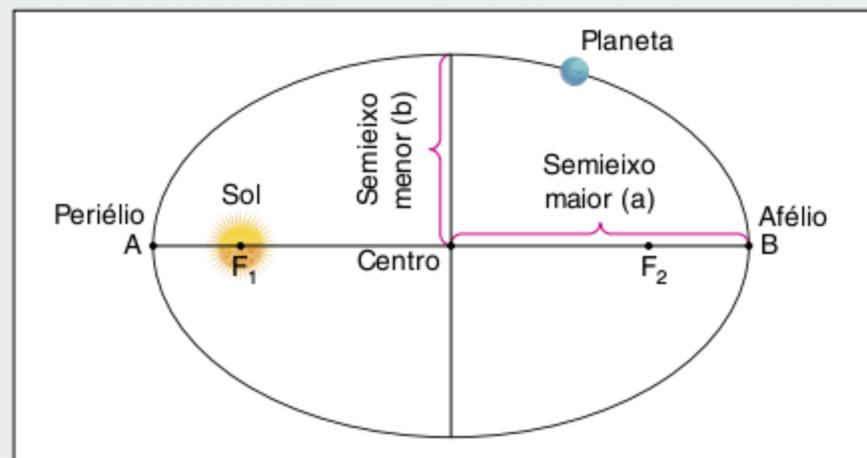
Posições da Terra, do Sol, da Lua e das marés correspondentes.

As marés de sizígia contribuem, teoricamente, para uma variação de amplitude de 0,83 metros, porém, podemos observar marés maiores, já que outros efeitos devem ser levados em conta, como o fato de a Terra não estar completamente coberta por água, a topografia do fundo dos oceanos, a geologia da região (estreitamentos continentais), a declinação do eixo de rotação lunar, entre outras perturbações.

# RESUMINDO

Neste capítulo, estudamos a gravitação e suas leis, que regem os movimentos planetários.

## Leis de Kepler



- **1ª Lei (Órbitas):** os planeta descrevem órbitas elípticas com o Sol ocupando um dos focos. Quanto mais distantes forem os focos, mais excêntrica (achatada) é a elipse.
- **2ª Lei (Áreas):** o vetor posição de um planeta varre áreas iguais em tempos iguais. Os planetas se movem mais rapidamente quando estão mais próximos do Sol.
- **3ª Lei (Períodos):** o cubo do raio médio da órbita de um planeta é proporcional ao período de revolução ao quadrado.

$$\frac{a^3}{T^2} = K$$

Só podemos utilizar essa relação para corpos que orbitam em torno da mesma massa central.

## Força gravitacional

A força de interação entre duas massas é dada por:

$$F_G = \frac{GMm}{d^2}$$

sabendo que  $d$  é a distância entre o centro dos corpos e  $G$  é a constante de gravitação universal, que vale aproximadamente  $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

## Campo gravitacional

Massas têm ao seu redor um campo gravitacional que pode ser calculado por:

$$g = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

Sendo que  $h$  é a altura acima da superfície do planeta e  $R$  é o raio da do planeta. Quando  $h = 0$ , para a Terra, temos  $g_{\text{SUP}} = 10 \text{ m/s}^2$ .

Para comparar campos gravitacionais em locais distintos, temos:

$$\frac{g_A}{g_B} = \left( \frac{GM_A}{R_A^2} \right) \cdot \left( \frac{R_B}{R_A} \right)^2$$

## Rotação da Terra e peso aparente

Corpos em repouso na superfície da Terra também estão em rotação com ela e, portanto, apresentam uma resultante centrípeta. Isso faz com que o peso aparente, dado pela força normal, varie em função da latitude. No Equador, temos:

$$N = m(g_{\text{SUP}} - \omega^2 R_T)$$

O campo gravitacional aparente no Equador é dado por:

$$g_{\text{AP}} = g_{\text{SUP}} - \omega^2 R_T$$

## Movimento de satélites

- **Velocidade orbital:**

$$v_{\text{orb}} = \sqrt{R_{\text{orb}} g_{\text{orb}}} \Rightarrow v_{\text{orb}} = \sqrt{R_{\text{orb}} \frac{GM}{R_{\text{orb}}^2}} \Rightarrow v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{GM}{R_{\text{orb}}}}$$

- **Período orbital:**

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

- **Imponderabilidade:** aparente ausência de peso devido à ausência de força de contato normal.
- **Queda livre:** quando um corpo em movimento vertical está sujeito apenas à força peso.

## Energia potencial gravitacional e conservação de energia mecânica

Para um sistema de dois corpos, a energia potencial gravitacional é dada por:

$$E_{\text{PG}} = -\frac{GMm}{d}$$

Sendo que  $d$  é a distância entre o centro dos corpos.

Em movimentos orbitais, existe conservação da energia mecânica, então, podemos considerar que:

$$E_{M(\text{inicial})} = E_{M(\text{final})}$$

$$E_{\text{PG}(\text{inicial})} + E_{C(\text{inicial})} = E_{\text{PG}(\text{final})} + E_{C(\text{final})}$$

## Velocidade de escape

A velocidade mínima para que um corpo, sem propulsão, consiga escapar do campo gravitacional terrestre é dada por:

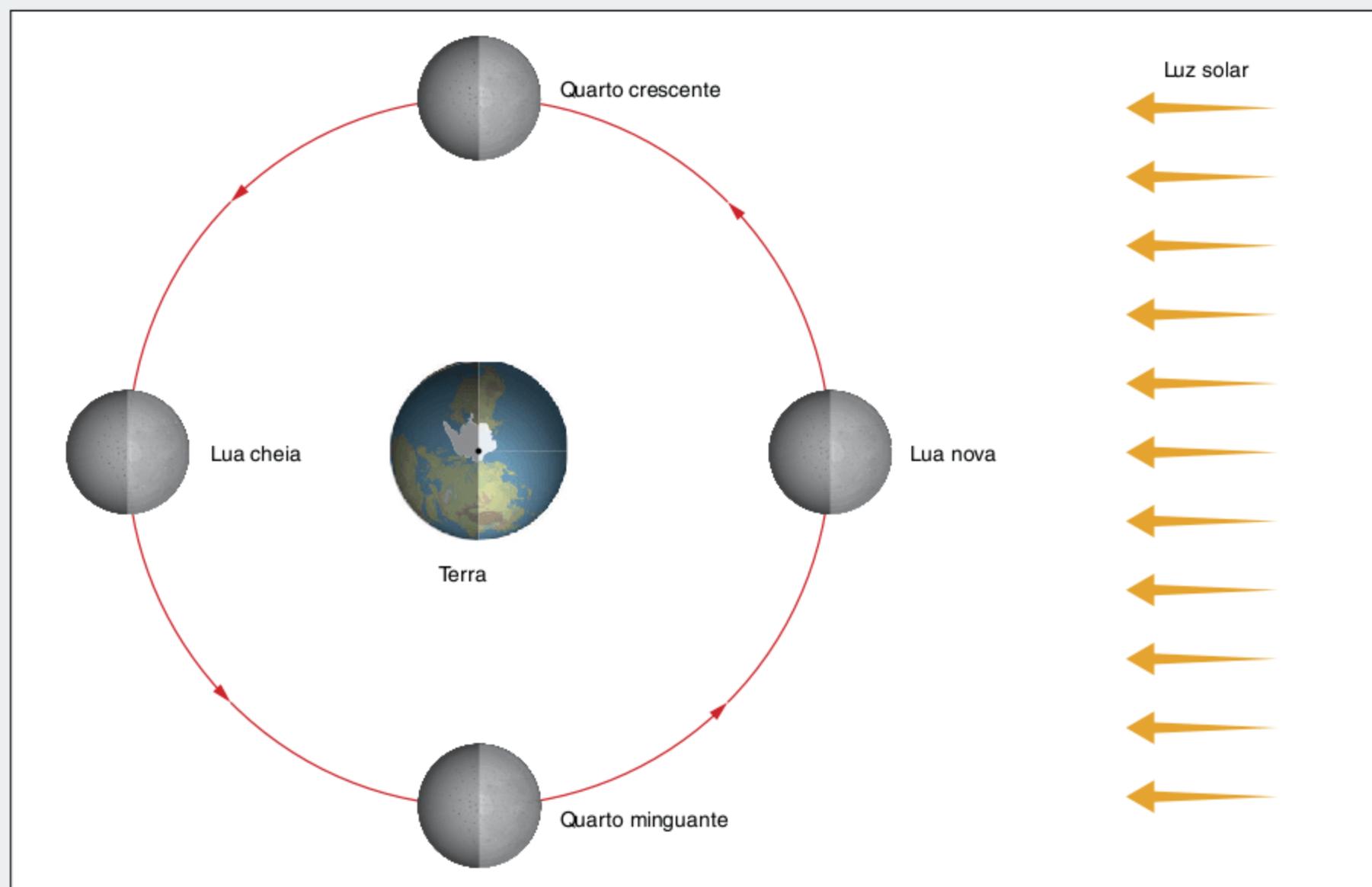
$$V_E = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

## Sistema binário

Em um sistema de massas de ordem de grandeza próximas, os corpos rotacionam em torno do centro de massa do sistema. Nessa situação, a 3ª Lei de Kepler é dada por:

$$\frac{d^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}$$

## Fases da Lua e eclipses



Para que ocorra eclipse, é necessário que o Sol, a Terra e a Lua estejam alinhados. Os eclipses solares ocorrem durante a Lua nova e os eclipses lunares ocorrem durante a Lua cheia.

## ■ QUER SABER MAIS?



### SITES

- Astronomia e Astrofísica  
<http://astro.if.ufrgs.br>  
[www.siteastronomia.com](http://www.siteastronomia.com)
- Curiosidades sobre gravitação  
[ednene.wordpress.com/2009/08/17/espaco/](http://ednene.wordpress.com/2009/08/17/espaco/)
- Litotripsia  
<http://mathcentral.uregina.ca/beyond/articles/Lithotripsy/lithotripsy1.html>

- Sistema binário  
<http://astropt.org/blog/2011/09/16/encontrado-o-planeta-tatooine-de-star-wars/>  
<http://g1.globo.com/ciencia-e-saude/noticia/2011/09/nasa-acha-planeta-aoredor-de-2-sois-como-no-filme-guerra-nas-estrelas.html>
- Marés  
[www.lhup.edu/~dsimanek/scenario/tides.htm](http://www.lhup.edu/~dsimanek/scenario/tides.htm)
- Ciclo da maré na Baía de Fundy  
[www.youtube.com/watch?v=TqM697dYaB8](http://www.youtube.com/watch?v=TqM697dYaB8)



### LIVROS

- Stephen Hawking. *O Universo numa casca de noz*. Trad. Ivo Korytowski. São Paulo: Nova Fronteira, 2009.
- Michio Kaku, *Hiperespaço*. Trad. Maria Luiza De A. Borges. Rocco.

# Exercícios complementares

## Introdução: conceitos básicos

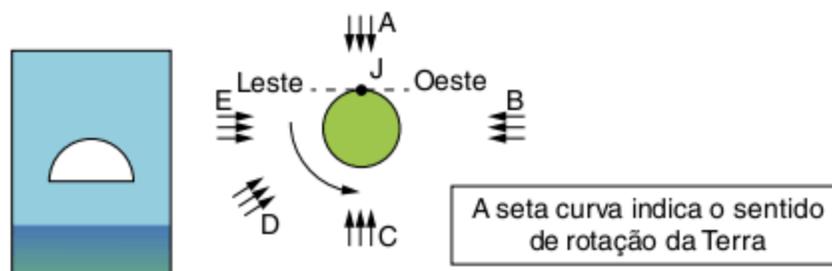
**1 UFJF** Em uma passagem do poema *Os Lusíadas* (canto X, 89) de Luís de Camões (1525-1580), brilharam os astros. Um belo exemplo da influência do pensamento científico nas artes. O Sol é descrito poeticamente como “O claro olho do céu” e a Lua, no verso final da estrofe, aparece sob a denominação de “Diana”:

*Debaixo deste grande firmamento,  
Vês o céu de Saturno, deus antigo;  
Júpiter logo faz o movimento,  
E Marte abaixo, bélico inimigo;  
O claro olho do céu, no quarto assento,  
E Vênus, que os amores traz consigo;  
Mercúrio, de eloquência soberana;  
Com três rostos, debaixo vai Diana.*

Nesta bela e curiosa estrofe, os astros aparecem em versos sucessivos. Essa passagem revela que:

- (a) Camões admitia a concepção prevalecente em sua época, segundo a qual a Terra era fixa e ocupava o centro do Universo.
- (b) Camões se mostrava afinado ao pensamento de Kepler, já descrevendo qualitativamente o sistema de acordo com as Leis de Kepler.
- (c) A concepção admitida por Camões encontra-se de pleno acordo com uma análise qualitativa da lei da gravitação universal de Newton.
- (d) Essa descrição de Camões concorda com a visão de Galileu de que a Terra estaria em movimento.
- (e) Camões acreditava no modelo heliocêntrico de Copérnico.

**2 Fuvest** Um jovem, em uma praia do Nordeste, vê a Lua a Leste, próxima ao mar. Ele observa que a Lua apresenta sua metade superior iluminada, enquanto a metade inferior permanece escura. Essa mesma situação, vista do espaço, a partir de um satélite artificial da Terra, que se encontra no prolongamento do eixo que passa pelos polos, está esquematizada (parcialmente) na figura, onde J é a posição do jovem.



Pode-se concluir que, nesse momento, a direção dos raios solares que se dirigem para a Terra é melhor representada por:

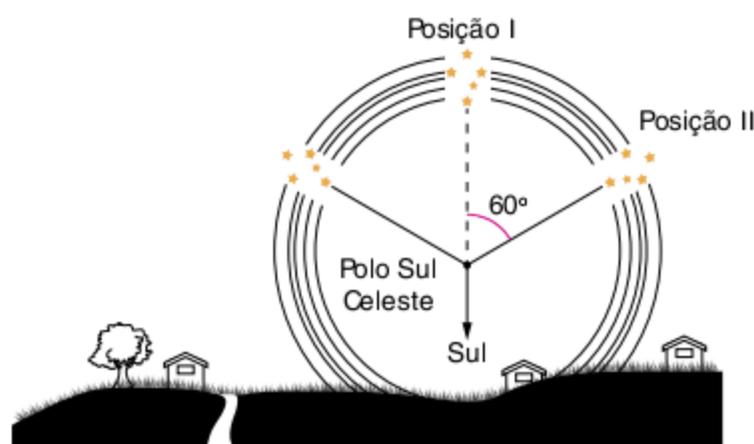
- (a) A
- (b) B
- (c) C
- (d) D
- (e) E

Texto para a questão 3.

O ano de 2009 foi proclamado pela UNESCO o Ano Internacional da Astronomia para comemorar os 400 anos das primeiras observações astronômicas realizadas por Galileu Galilei através de telescópios e, também, para celebrar a Astronomia e suas contribuições para o conhecimento humano.

O ano de 2009 também celebrou os 400 anos da formulação da Lei das Órbitas e da Lei das Áreas por Johannes Kepler. A terceira Lei, conhecida como Lei dos Períodos, foi por ele formulada posteriormente.

**3 Fuvest** Uma regra prática para orientação no hemisfério Sul, em uma noite estrelada, consiste em identificar a constelação do Cruzeiro do Sul e prolongar três vezes e meia o braço maior da cruz, obtendo-se assim o chamado Polo Sul Celeste, que indica a direção Sul. Suponha que, em determinada hora da noite, a constelação seja observada na Posição I. Nessa mesma noite, a constelação foi/será observada na Posição II, cerca de:



- (a) duas horas antes.
- (b) duas horas depois.
- (c) quatro horas antes.
- (d) quatro horas depois.
- (e) seis horas depois.

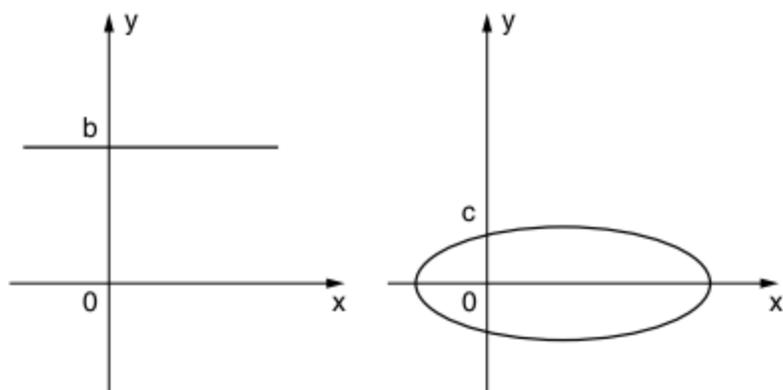
## Leis de Kepler

**4 UFG 2013** As estações do ano devem-se basicamente à inclinação do eixo de rotação da Terra, a qual possui um período de precessão próximo de 26.000 anos. Na época atual, os solstícios ocorrem próximos ao afélio e ao periélio. Dessa maneira, o periélio ocorre no mês de dezembro, quando a distância Terra-Sol é de  $145 \cdot 10^6$  km, e a velocidade orbital da Terra é de 30 km/s. Considere que, no afélio, a distância Terra-Sol é de  $150 \cdot 10^6$  km. Nesse sentido, a velocidade de translação da Terra no afélio e o momento astronômico que caracteriza o início da respectiva estação do ano devem ser:

- (a) 28 km/s durante o solstício de verão do hemisfério Norte.
- (b) 29 km/s durante o solstício de inverno do hemisfério Sul.
- (c) 29 km/s durante o equinócio de outono do hemisfério Sul.
- (d) 31 km/s durante o equinócio de primavera do hemisfério Sul.
- (e) 31 km/s durante o solstício de verão do hemisfério Norte.



**11 UEL** Observe a figura a seguir. Os eixos cartesianos representam dois sistemas de referência independentes e isolados. O sistema da esquerda apresenta uma partícula com massa  $m_1$  em movimento retilíneo e de velocidade constante, com trajetória dada por  $y = 0$ ;  $x = x_0 + vt$ . O sistema da direita representa uma outra partícula com massa  $m_2$ , percorrendo uma trajetória elíptica sob ação do campo gravitacional gerado por uma massa  $M \gg m_2$  estacionária em um dos focos. Com base no texto, na figura e nos conhecimentos sobre o tema, é correto afirmar:



- (a) Os raios vetores que ligam as origens às partículas, nos dois sistemas, varrem áreas iguais em tempos iguais.
- (b) Somente no sistema da direita, o raio vetor, que liga a origem à partícula, varre áreas iguais em tempos iguais.
- (c) Somente no sistema da esquerda, o raio vetor, que liga a origem à partícula, varre áreas iguais em tempos iguais.
- (d) Se a massa da partícula  $m_2$  do sistema da direita for dobrada, mas permanecer girando na mesma trajetória elíptica, o seu período de revolução mudará.
- (e) O período de revolução da partícula do sistema da direita é proporcional ao cubo da distância média entre as duas massas.

**Força gravitacional**

**12 Fuvest** A razão entre as massas de um planeta e de um satélite é 81. Um foguete está a uma distância  $R$  do planeta e a uma distância  $r$  do satélite. Qual deve ser o valor da razão  $R/r$  para que as duas forças de atração sobre o foguete se equilibrem?

- (a) 1                      (c) 9                      (e) 81
- (b) 3                      (d) 27

**13 Fuvest** A Estação Espacial Internacional, que está sendo construída num esforço conjunto de diversos países deverá orbitar a uma distância do centro da Terra igual a 1,05 do raio médio da Terra. A razão  $R = F_e/F$ , entre a força  $F_e$  com que a Terra atrai um corpo nessa Estação e a força  $F$  com que a Terra atrai o mesmo corpo na superfície da Terra, é aproximadamente de:

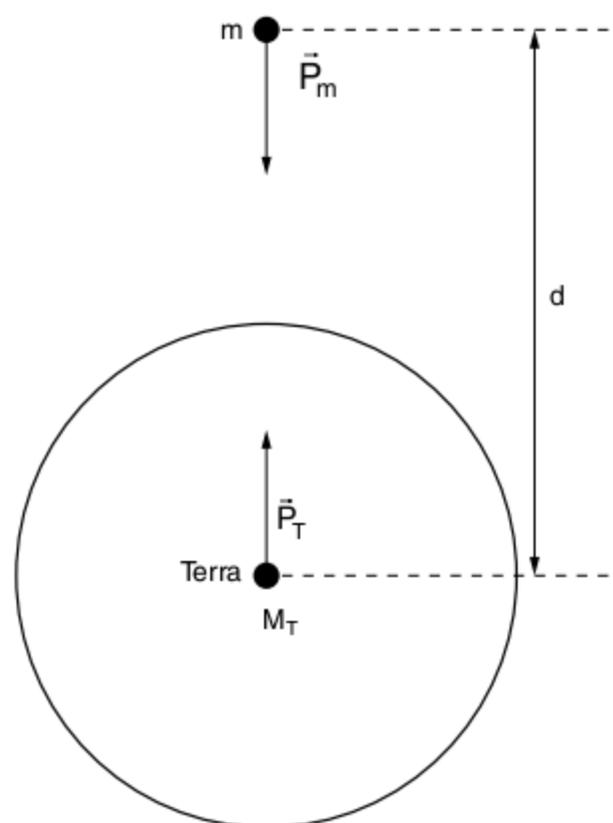
- (a) 0,02                      (c) 0,10                      (e) 0,90
- (b) 0,05                      (d) 0,50

**14 Uerj** Segundo a lei da gravitação universal de Newton, a força gravitacional entre dois corpos é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre seus centros de gravidade.

Mesmo que não seja obrigatoriamente conhecido pelos artistas, é possível identificar o conceito básico dessa lei na seguinte citação:

- (a) “Trate a natureza em termos do cilindro, da esfera e do cone, todos em perspectiva.”  
Paul Cézanne.
- (b) “Hoje, a beleza é o único meio que nos manifesta puramente a força universal que todas as coisas contêm.”  
Piet Mondrian.
- (c) “Na natureza jamais vemos coisa alguma isolada, mas tudo sempre em conexão com algo que lhe está diante, ao lado, abaixo ou acima.”  
Goethe.
- (d) “Ocorre na natureza alguma coisa semelhante ao que acontece na música de Wagner, que embora tocada por uma grande orquestra, é intimista.”  
Van Gogh.

**15 UFSC** Considere o sistema constituído por um ponto material de massa  $m$  e a Terra de massa  $M_T$ . Admita que  $d$  é a distância do centro da Terra a  $m$  e que  $\vec{P}_m$  e  $\vec{P}_T$  formam um par de forças, conforme a figura, devido à interação gravitacional entre as massas  $m$  e  $M_T$ .



Assim sendo, assinale a(s) proposição(ões) correta(s).

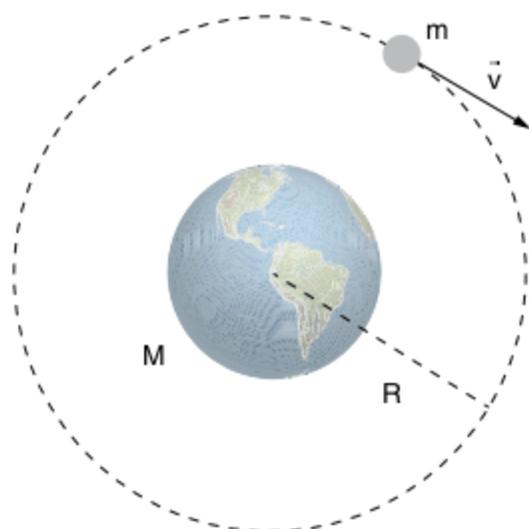
- 01  $\vec{P}_m$  é uma força do ponto material de massa  $m$  sobre si próprio.
- 02  $\vec{P}_m$  é uma força da Terra sobre o ponto material de massa  $m$ .
- 04 A intensidade de  $\vec{P}_m$  é maior que a intensidade de  $\vec{P}_T$ .
- 08 A intensidade de  $\vec{P}_m$  não depende da distância entre os dois corpos.
- 16 A intensidade de  $\vec{P}_m$  depende das massas  $M_T$  e  $m$ .
- 32 A intensidade de  $\vec{P}_m$  depende somente da massa  $m$ .

Soma =

**16 Uespi** Considere que as massas da Terra e do Sol sejam respectivamente iguais a  $6 \cdot 10^{24}$  kg e  $2 \cdot 10^{30}$  kg. Considere, ainda, que as distâncias médias da Terra à Lua e do Sol à Lua sejam respectivamente iguais a  $4 \cdot 10^8$  e  $1,5 \cdot 10^{11}$  m. Com base nesses dados, pode-se concluir que, tipicamente, a força gravitacional que o Sol exerce sobre a Lua é:

- (a) maior que a força gravitacional que a Terra exerce sobre a Lua por um fator de cerca de 20.
- (b) maior que a força gravitacional que a Terra exerce sobre a Lua por um fator de cerca de 2.
- (c) igual à força gravitacional que a Terra exerce sobre a Lua.
- (d) menor que a força gravitacional que a Terra exerce sobre a Lua por um fator de cerca de 2.
- (e) menor que a força gravitacional que a Terra exerce sobre a Lua por um fator de cerca de 20.

**17 UFSC** Um satélite artificial, de massa  $m$ , descreve uma órbita circular de raio  $R$  em torno da Terra, com velocidade orbital  $\vec{v}$  de valor constante, conforme representado esquematicamente na figura. (Desprezam-se interações da Terra e do satélite com outros corpos.)

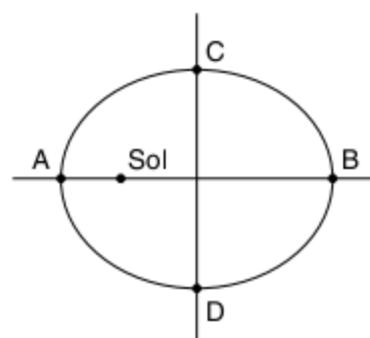


Considerando a Terra como referencial na situação descrita, assinale a(s) proposição(ões) correta(s):

- 01 O satélite sofre a ação da força gravitacional exercida pela Terra, de módulo igual a  $F_G = GMm/R^2$ , onde  $G$  é a constante de gravitação universal e  $M$  é a massa da Terra.
- 02 Para um observador na Terra, o satélite não possui aceleração.
- 04 A força centrípeta sobre o satélite é igual à força gravitacional que a Terra exerce sobre ele.
- 08 A força exercida pelo satélite sobre a Terra tem intensidade menor do que aquela que a Terra exerce sobre o satélite; tanto assim que é o satélite que orbita em torno da Terra e não o contrário.
- 16 A aceleração resultante sobre o satélite independe da sua massa e é igual a  $GM/R^2$ , onde  $G$  é a constante de gravitação universal e  $M$  é a massa da Terra.
- 32 A aceleração resultante sobre o satélite tem a mesma direção e sentido da força gravitacional que atua sobre ele.

Soma =

**18 UFSC** A figura a seguir representa a trajetória de um planeta em torno do Sol. Esta trajetória é elíptica e os segmentos de reta entre os pontos A e B e entre C e D são, respectivamente, o eixo maior e o eixo menor da elipse. Esta figura está fora de escala, pois a excentricidade das órbitas planetárias é pequena e as suas trajetórias aproximam-se de circunferências. A tabela a seguir apresenta dados astronômicos aproximados de alguns planetas:



	DISTÂNCIA MÉDIA AO SOL	MASSA	RAIO MÉDIO
Terra	$d_{TS}$	$m_T$	$R_T$
Saturno	$10d_{TS}$	$95m_T$	$9R_T$
Urano	$20d_{TS}$	$14m_T$	$4R_T$
Netuno	$30d_{TS}$	$17m_T$	$4R_T$

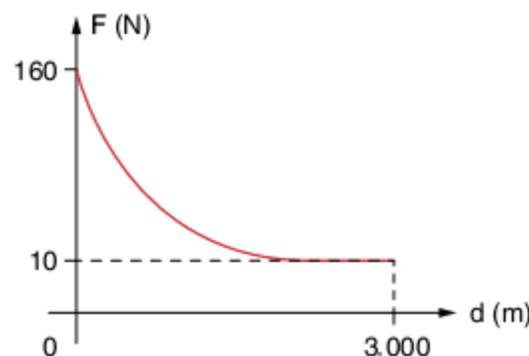
$d_{TS}$ : distância média da Terra ao Sol  
 $m_T$ : massa da Terra  
 $R_T$ : raio da Terra

Assinale a(s) proposição(ões) correta(s).

- 01 O módulo da velocidade de um planeta quando passa por A é maior do que quando passa por B.
- 02 O período de Urano é cerca de 2,8 vezes o período de Saturno.
- 04 O período de Netuno é de aproximadamente 52 anos.
- 08 O módulo da força média que o Sol exerce sobre Saturno é cerca de nove vezes maior que o módulo da força média que o Sol exerce sobre a Terra.
- 16 O módulo da força que Urano exerce sobre um corpo na sua superfície é aproximadamente quatro vezes maior que o módulo da força que a Terra exerce sobre este corpo na sua superfície.

Soma =

**19** No diagrama está representado o módulo da força ( $F$ ) de atração gravitacional entre um planeta esférico e homogêneo e um corpo, em função da distância ( $d$ ) entre o centro do corpo e a superfície do referido planeta. Qual é, em metros, o raio do planeta?



- (a) 3.000
- (b) 2.500
- (c) 2.000
- (d) 1.500
- (e) 1.000

**20 Fuvest** Recentemente Plutão foi “rebaixado”, perdendo sua classificação como planeta. Para avaliar os efeitos da gravidade em Plutão, considere suas características físicas, comparadas com as da Terra, que estão apresentadas, com valores aproximados, no quadro abaixo.

Massa da Terra ( $M_T$ ) = 500 x Massa de Plutão ( $M_P$ )

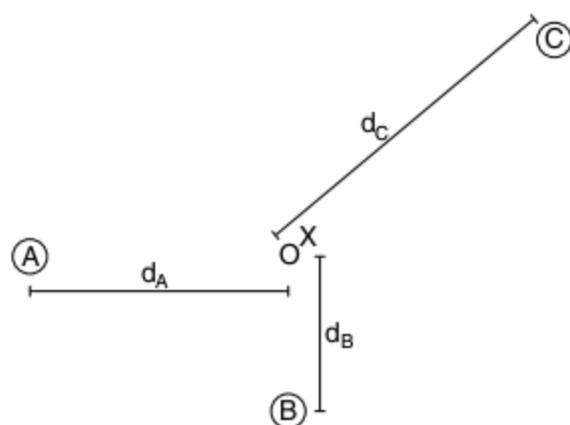
Raio da Terra ( $R_T$ ) = 5 x Raio de Plutão ( $R_P$ )

- a) Determine o peso, na superfície de Plutão ( $P_P$ ), de uma massa que na superfície da Terra pesa 40 N ( $P_T = 40$  N).
- b) Estime a altura máxima  $H$ , em metros, que uma bola, lançada verticalmente com velocidade  $V$ , atingiria em Plutão. Na Terra, essa mesma bola, lançada com a mesma velocidade, atinge uma altura  $h_T = 1,5$  m.

Note e adote:

$$F = \frac{GMm}{R^2}; \text{Peso} = mg$$

**21 Uerj** A figura a seguir representa o instante no qual a resultante das forças de interação gravitacional entre um asteroide X e os planetas A, B e C é nula.



Admita que:

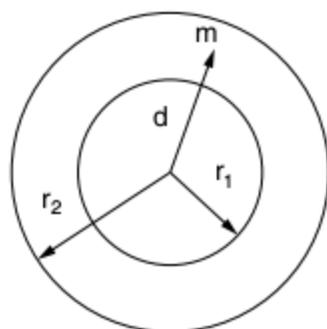
- $d_A$ ,  $d_B$  e  $d_C$  representam as distâncias entre cada planeta e o asteroide;
- os segmentos de reta que ligam os planetas A e B ao asteroide são perpendiculares e  $d_C = 2d_A = 3d_B$
- $m_A$ ,  $m_B$ ,  $m_C$  e  $m_X$  representam, respectivamente, as massas de A, B, C e X e  $m_A = 3m_B$

Determine a razão  $m_C/m_B$  nas condições indicadas.

**22 ITA** Numa dada balança, a leitura é baseada na deformação de uma mola quando um objeto é colocado sobre sua plataforma. Considerando a Terra como uma esfera homogênea, assinale a opção que indica uma posição da balança sobre a superfície terrestre onde o objeto terá a maior leitura.

- (a) Latitude de  $45^\circ$ .
- (b) Latitude de  $60^\circ$ .
- (c) Latitude de  $90^\circ$ .
- (d) Em qualquer ponto do Equador.
- (e) A leitura independe da localização da balança já que a massa do objeto é invariável.

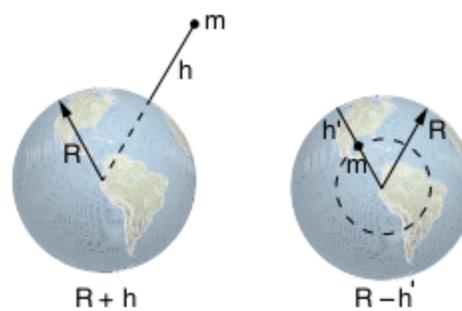
**23 Uece** Duas cascas esféricas concêntricas, de densidades uniformes, têm massas  $M_1$  (raio  $r_1$ ) e  $M_2$  (raio  $r_2$ ), como mostra a figura.



Assinale a alternativa que contém o valor da força gravitacional sobre uma partícula de massa  $m$  localizada entre as cascas, a uma distância  $d$  dos seus centros.

- (a)  $Gm \left( \frac{M_1 + M_2}{d^2} \right)$
- (b)  $Gm \left( \frac{M_1}{r_1^2} + \frac{M_2}{r_2^2} \right)$
- (c)  $Gm \left( \frac{M_1 - M_2}{d^2} \right)$
- (d)  $G \frac{mM_1}{d^2}$

**24 UEL** Considerando a Terra uma esfera homogênea (densidade constante) de raio  $R$ , determine a profundidade  $h'$  em que deve ser colocado um corpo de massa  $m$  para que o seu peso seja o mesmo quando estiver situado a uma altura  $h$  da superfície da Terra.



- (a)  $h' = R - \frac{R^3}{(R+h)^2}$
- (b)  $h' = R - \frac{R^2}{(R+h)^3}$
- (c)  $h' = R - \frac{R^3}{(R-h)^2}$
- (d)  $h' = R - \frac{R^2}{(R-h)^3}$
- (e)  $h' = R - \frac{R^3}{(R-h)^3}$

### Campo gravitacional

**25 UFPR** As leis sobre o movimento dos planetas, que transformaram a compreensão do Sistema Solar, e a crença de que o universo obedece a leis exatas e simples foram os legados deixados por Kepler e Newton. Considere as seguintes afirmativas sobre a força de atração gravitacional e o movimento de satélites.

- I. A constante gravitacional universal no SI pode ser expressa em  $m^3 s^{-2} kg^{-1}$ .
- II. A força resultante sobre um satélite geostacionário é nula.
- III. Usando os dados de um satélite que se encontra em uma órbita de raio aproximadamente igual a seis vezes o raio da Terra, é possível obter o período de um outro satélite artificial que se encontra em uma órbita de raio igual a duas vezes o raio da Terra.
- IV. Um satélite artificial encontra-se em uma órbita de raio igual a três vezes o raio da Terra. A aceleração da gravidade na posição onde se encontra o satélite é menor que a aceleração na superfície da Terra.

Assinale a alternativa correta.

- (a) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
- (b) Somente as afirmativas I, III e IV são verdadeiras.
- (c) Somente as afirmativas I e IV são verdadeiras.
- (d) Somente as afirmativas II e IV são verdadeiras.
- (e) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.

**26 Unesp** Desde maio de 2008 o IBAMA recebe imagens do ALOS (satélite de observação avançada da Terra) para monitorar o desmatamento na floresta Amazônica. O ALOS é um satélite japonês que descreve uma órbita circular a aproximadamente 700 km de altitude. São dados o raio e a massa da Terra,  $R = 6400$  km e  $M = 6 \cdot 10^{24}$  kg, respectivamente, e a constante gravitacional,  $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$  N  $\cdot$  m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>. Determine o módulo da aceleração da gravidade terrestre, em m/s<sup>2</sup>, na altitude em que esse satélite se encontra.



- 04 Ela seria correta se os jornalistas substituíssem o termo “ausência de gravidade” por “aceleração aparente ser nula”.
- 08 Ela é correta porque o astronauta está em órbita.
- 16 Ela é incorreta.

Soma =

**36 UFPA 2012** O Brasil possui um centro de lançamento de satélites em Alcântara (MA), pois, devido à rotação da Terra, quanto mais próximo da linha do Equador for lançado um foguete, menor a variação de velocidade necessária para que este entre em órbita. A esse respeito, considere um sistema de referência inercial em que o centro da Terra está em repouso, estime tanto o módulo da velocidade  $V_E$  de um ponto da superfície da Terra na linha do Equador quanto o módulo da velocidade  $V_S$  de um satélite cuja órbita tem um raio de  $1,29 \cdot 10^4$  km. É correto afirmar que  $V_E$  é aproximadamente:

Obs.: Considere que o perímetro da Terra no Equador é 40080 km, que a aceleração da gravidade na órbita do satélite é  $3,1 \cdot 10^4$  km/h<sup>2</sup> e que a Terra dá uma volta completa a cada 24 horas.

- (a) 1% de  $V_S$ .      (c) 4% de  $V_S$ .      (e) 8% de  $V_S$ .  
 (b) 2% de  $V_S$ .      (d) 6% de  $V_S$ .

**37 UFSC** Durante aproximados 20 anos, o astrônomo dinamarquês Tycho Brahe realizou rigorosas observações dos movimentos planetários, reunindo dados que serviram de base para o trabalho desenvolvido, após sua morte, por seu discípulo, o astrônomo alemão Johannes Kepler (1571–1630). Kepler, possuidor de grande habilidade matemática, analisou cuidadosamente os dados coletados por Tycho Brahe, ao longo de vários anos, tendo descoberto três leis para o movimento dos planetas. Apresentamos, a seguir, o enunciado das três leis de Kepler.

1ª Lei de Kepler: Cada planeta descreve uma órbita elíptica em torno do Sol, da qual o Sol ocupa um dos focos.

2ª Lei de Kepler: O raio-vetor (segmento de reta imaginário que liga o Sol ao planeta) “varre” áreas iguais, em intervalos de tempo iguais.

3ª Lei de Kepler: Os quadrados dos períodos de translação dos planetas em torno do Sol são proporcionais aos cubos dos raios médios de suas órbitas.

Assinale a(s) proposição(ões) que apresenta(m) conclusão(ões) correta(s) das leis de Kepler:

- 01 A velocidade média de translação de um planeta em torno do Sol é diretamente proporcional ao raio médio de sua órbita.
- 02 O período de translação dos planetas em torno do Sol não depende da massa dos mesmos.
- 04 Quanto maior o raio médio da órbita de um planeta em torno do Sol, maior será o período de seu movimento.
- 08 A 2ª Lei de Kepler assegura que o módulo da velocidade de translação de um planeta em torno do Sol é constante.
- 16 A velocidade de translação da Terra em sua órbita aumenta à medida que ela se aproxima do Sol e diminui à medida que ela se afasta.
- 32 Os planetas situados à mesma distância do Sol devem ter a mesma massa.
- 64 A razão entre os quadrados dos períodos de translação dos planetas em torno do Sol e os cubos dos raios médios de suas órbitas apresentam um valor constante.

Soma =

**38 Unesp** Depois de anos de interrupção, ocorreu neste ano (2005) a retomada de lançamentos do ônibus espacial pela NASA, desta vez com sucesso. Nas imagens divulgadas do dia no ônibus espacial girando ao redor da Terra, pudemos ver os astronautas realizando suas atividades, tanto fora da nave como no seu interior. Considerando que as órbitas da nave e dos astronautas sejam circulares, analise as afirmações seguintes.

- I. Não há trabalho realizado pela força gravitacional para manter um astronauta em órbita ao redor da Terra.
- II. A aceleração de um astronauta girando ao redor da Terra deve-se exclusivamente à ação da força gravitacional.
- III. A velocidade vetorial do astronauta ao redor da Terra é constante.

Estão corretas as afirmações:

- (a) II, somente.      (c) I e II, somente.      (e) I, II e III.  
 (b) III, somente.      (d) II e III, somente.

**39 UFMG** Um astronauta, de pé sobre a superfície da Lua, arremessa uma pedra, horizontalmente, a partir de uma altura de 1,25 m, e verifica que ela atinge o solo a uma distância de 15 m.

Considere que o raio da Lua é de  $1,6 \cdot 10^6$  m e que a aceleração da gravidade na sua superfície vale  $1,6$  m/s<sup>2</sup>.

Com base nessas informações,

- a) Calcule o módulo da velocidade com que o astronauta arremessou a pedra.
- b) Calcule o módulo da velocidade com que, nas mesmas condições e do mesmo lugar, uma pedra deve ser lançada, também horizontalmente, para que, após algum tempo, ela passe novamente pelo local de lançamento.

Texto para a questão 40.

#### Equipe de cientistas descobre o primeiro exoplaneta habitável

O primeiro exoplaneta habitável foi encontrado depois de observações que duraram 11 anos, utilizando uma mistura de técnicas avançadas e telescópios convencionais. A equipe descobriu mais dois exoplanetas orbitando em volta da estrela Gliese 581.

O mais interessante dos dois exoplanetas descobertos é o Gliese 581 g, com uma massa três vezes superior à da Terra e um período orbital (tempo que o planeta leva para dar uma volta completa em torno de sua estrela) inferior a 37 dias. O raio da órbita do Gliese 581 g é igual à 20% do raio da órbita da Terra, enquanto sua velocidade orbital é 50% maior que a velocidade orbital da Terra. O Gliese 581 g está “preso” à estrela, o que significa que um lado do planeta recebe luz constantemente, enquanto o outro é de perpétua escuridão. A zona mais habitável na superfície do exoplaneta seria a linha entre a sombra e a luz, com temperaturas caindo em direção à sombra e subindo em direção à luz. A temperatura média varia entre  $-31$  °C e  $-12$  °C, mas as temperaturas reais podem ser muito maiores na região de frente para a estrela (até 70 °C) e muito menores na região contrária (até  $-40$  °C). A gravidade no Gliese 581 g é semelhante à da Terra, o que significa que um ser humano conseguiria andar sem dificuldades.

Os cientistas acreditam que o número de exoplanetas potencialmente habitáveis na Via Láctea pode chegar a 20%, dada a facilidade com que Gliese 581 g foi descoberto. Se fossem raros, dizem os astrônomos, eles não teriam encontrado um tão rápido e tão próximo.

No entanto, ainda vai demorar muito até que o homem consiga sair da Terra e comece a colonizar outros planetas fora do Sistema Solar.

Veja, ed. 2185, n. 40, ano 43, 6 out. de 2010. (Adapt.).

**40 UFT 2011 (Adapt.)** Considerando as órbitas do Gliese 581g e da Terra circulares com movimento uniforme, leia os itens abaixo:

- I. Para que a aceleração gravitacional na superfície do Gliese 581g tenha valor igual à aceleração gravitacional na superfície da Terra, o raio do Gliese 581g deve ser menor do que o raio da Terra.
- II. O Gliese 581g gira em torno de seu próprio eixo com a mesma velocidade angular com que orbita a sua estrela.
- III. A velocidade angular com que o Gliese 581g orbita sua estrela é menor do que a velocidade angular com que a Terra orbita o Sol.

Marque a opção correta:

- (a) Apenas I é verdadeira. (d) I e II são verdadeiras.  
 (b) Apenas II é verdadeira. (e) II e III são verdadeiras.  
 (c) Apenas III é verdadeira.

Texto para a questão 41.

Quando necessário, adote os seguintes valores:

Aceleração da gravidade:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

Constante da gravitação universal:  $G = 6 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ .

Massa da Terra:  $M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ .

Constante  $\pi = 3$ .

**41 UFPB 2011** Os satélites artificiais são uma conquista da tecnologia moderna e os seus propósitos são variados. Existem satélites com fins militares, de comunicação, de monitoramento etc. e todo satélite tem uma órbita e uma velocidade orbital bem determinadas. Nesse contexto, considere um satélite de comunicação que descreve uma órbita circular em torno da Terra com um período de revolução de  $8 \cdot 10^4 \text{ s}$ .

Com base nessas informações e desprezando o movimento da Terra, é correto afirmar que esse satélite gira em torno da Terra com uma velocidade orbital de:

- (a) 1.000 m/s (c) 2.000 m/s (e) 3.500 m/s  
 (b) 1.500 m/s (d) 3.000 m/s

**42 UFPA (Adapt.)** Em 4 de outubro de 2007 fez 50 anos do lançamento do Sputnik, que foi o primeiro satélite artificial da Terra. Lançado pela antiga União Soviética, consistia em uma esfera metálica de 58 cm de diâmetro e massa de 83 kg. Sua órbita era elíptica, inclinada de  $64^\circ$  em relação ao equador terrestre, com período de 96 min. Seu foguete de lançamento era de dois estágios, tendo o 2º estágio também entrado em órbita ao redor da Terra. O Sputnik, cuja função básica era transmitir sinais de rádio para Terra, ficou em órbita por aproximadamente seis meses antes de cair.

Baseado no texto, julgue as afirmações a seguir:

- I. O Sputnik era um satélite do tipo geostacionário.
- II. Se o Sputnik mudasse de trajetória, vindo a ocupar uma órbita circular, de menor raio, a sua velocidade certamente deveria diminuir.

III. A 3ª Lei de Kepler pode ser usada para comparar os raios das órbitas e períodos da Lua e do Sputnik.

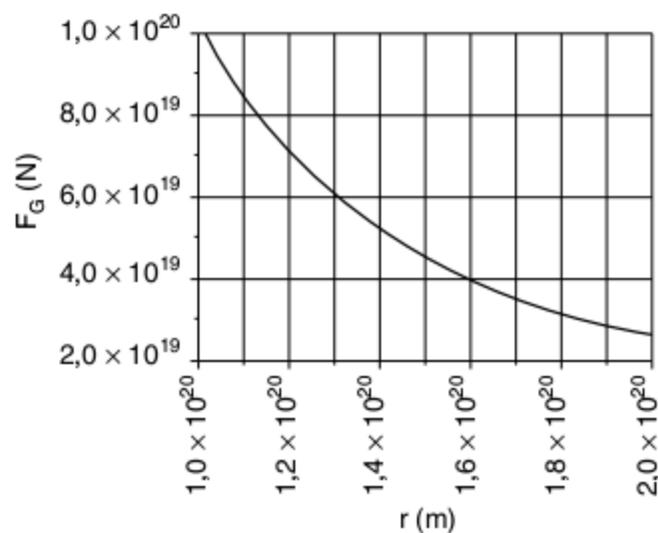
Estão corretas somente:

- (a) Apenas II. (c) II e III. (e) Nenhuma.  
 (b) Apenas III. (d) I, II e III.

**43 Unesp** O período de revolução  $T$  e o raio médio  $r$  da órbita de um planeta que gira ao redor de uma estrela de massa  $m$  satisfazem à relação  $\frac{mT^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G}$  onde  $G$  é a constante de gravitação universal. Considere dois planetas e suas respectivas estrelas. O primeiro, o planeta G581c, recentemente descoberto, que gira em torno da estrela Gliese581 e o nosso, a Terra, girando ao redor do Sol.

Considere o período de revolução da Terra 27 vezes o de G581c e o raio da órbita da Terra 18 vezes o raio da órbita daquele planeta. Determine qual seria a massa da estrela Gliese581 em unidades da massa  $M$  do Sol.

**44 Unicamp** Observações astronômicas indicam que as velocidades de rotação das estrelas em torno de galáxias são incompatíveis com a distribuição de massa visível das galáxias, sugerindo que grande parte da matéria do universo é escura, isto é, matéria que não interage com a luz. O movimento de rotação das estrelas resulta da força de atração gravitacional que as galáxias exercem sobre elas. A curva no gráfico a seguir mostra como a força gravitacional  $F_G = (GMm)/r^2$ , que uma galáxia de massa  $M$  exerce sobre uma estrela externa à galáxia, deve variar em função da distância  $r$  da estrela em relação ao centro da galáxia, considerando-se  $m = 1,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$  para a massa da estrela. A constante de gravitação  $G$  vale  $6,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .



- a) Determine a massa  $M$  da galáxia.
- b) Calcule a velocidade de uma estrela em órbita circular a uma distância  $r = 1,6 \cdot 10^{20} \text{ m}$  do centro da galáxia.

**45 Unesp** Um satélite com massa  $m$  gira em torno da Terra com velocidade constante, em uma órbita circular de raio  $R$ , em relação ao centro da Terra. Represente a massa da Terra por  $M$  e a constante gravitacional por  $G$ . Utilizando os conceitos de forças centrípeta e gravitacional, calcule, em função de  $m$ ,  $M$ ,  $R$  e  $G$ ,

- a) a velocidade do satélite;
- b) a constante  $K$  que aparece na Terceira Lei de Kepler,  $T^2 = KR^3$ , onde  $T$  é o período do movimento.

**46 UEL 2011 (Adapt.)** Considere um modelo simplificado da Via Láctea no qual toda a sua massa  $M$ , com exceção do Sistema Solar, está concentrada em seu núcleo, enquanto o Sistema Solar, com massa  $m$ , está em movimento com velocidade de módulo  $v = 200 \text{ km/s}$  em órbita circular de raio  $r = 26 \cdot 10^3$  anos-luz, com relação ao núcleo galáctico.

Dados :

$$G = 7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-2} \text{ s}^{-2}$$

$$1 \text{ ano-luz} = 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}$$

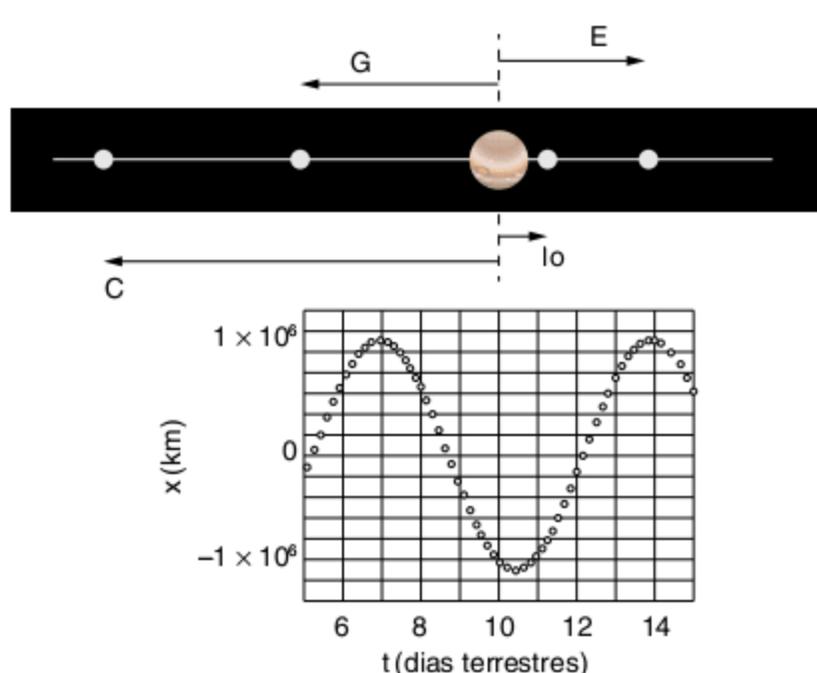
Com base nessas informações e utilizando os dados, considere as afirmativas a seguir.

- I. No núcleo galáctico, existe um buraco negro supermassivo.
- II. Uma estimativa do número de estrelas na Via Láctea será da ordem de  $10^{11}$  estrelas, se considerarmos que todas as estrelas da Via Láctea possuem a mesma massa que o Sol e que a massa do Sistema Solar é aproximadamente igual à massa do Sol,  $m = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ .
- III. A massa da Via Láctea será:  $1,5 \cdot 10^{41} \text{ kg}$  se considerarmos que a massa do Sistema Solar é aproximadamente igual à massa do Sol  $m = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ .
- IV. O módulo da velocidade orbital do Sistema Solar será de  $720.000 \text{ km/h}$  e, devido a esta grande velocidade, o sistema não é estável.

Assinale a alternativa correta.

- (a) Somente as afirmativas I e IV são corretas.
- (b) Somente as afirmativas II e III são corretas.
- (c) Somente as afirmativas III e IV são corretas.
- (d) Somente as afirmativas I, II e III são corretas.
- (e) Somente as afirmativas I, II e IV são corretas.

**47 UFF** Em 1610 Galileu descobriu quatro luas de Júpiter, denominadas Io, Europa, Ganimedes e Calisto. Do seu ângulo de visão, ele observou que elas deslocavam-se, periodicamente, de um lado para outro em relação ao centro do planeta, e concluiu que as luas moviam-se, aproximadamente, em órbitas circulares ao redor de Júpiter. Conhecendo a distância da Terra a Júpiter é possível medir o deslocamento lateral  $x(t)$  de cada lua em função do tempo. O gráfico representa medidas feitas para a lua Ganimedes.



- a) Determine a velocidade angular de rotação da lua Ganimedes ao redor de Júpiter.
- b) Considere que cada lua de Júpiter se move em movimento circular em torno do planeta, sob ação exclusiva da atração gravitacional exercida por este. Demonstre, desta forma, que a razão  $R^3/T^2$  entre o cubo do raio  $R$  da órbita de uma lua de Júpiter e o quadrado de seu período  $T$  depende apenas da massa do planeta e de constantes universais. Essa razão é, portanto, a mesma para qualquer uma das luas, resultado conhecido como a 3ª Lei de Kepler.
- c) Medidas experimentais feitas pelo físico inglês Henry Cavendish em 1797 permitiram a primeira estimativa do valor da constante universal da gravitação  $G$ . Use as informações do gráfico apresentado e o valor experimental de  $G$  para estimar a massa de Júpiter.

Dado:  $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

**48 UFRJ** Um satélite descreve uma órbita circular em torno de um planeta. O satélite pode ser considerado uma partícula e o planeta, uma esfera homogênea de raio  $R$ . O período de revolução do satélite em torno do planeta é  $T$  e o módulo da aceleração da gravidade na superfície do planeta é  $g$ . Calcule a distância entre o satélite e o centro do planeta em função de  $R$ ,  $T$  e  $g$ .

**49 PUC-SP** A região denominada Amazônia Legal, com 5 milhões de  $\text{km}^2$ , cobre 60% da área do território nacional, abrangendo Amazonas, Acre, Amapá, oeste do Maranhão, Mato Grosso, Rondônia, Pará, Roraima e Tocantins (Figura 1). Nessa região está a Floresta Amazônica que já há algum tempo vem sendo devastada. Se por um lado não se tem evitado a progressiva diminuição da floresta, por outro, pelo menos, nunca foi possível medir a devastação com tanta precisão, devido às imagens captadas por satélites.

Parte do monitoramento da devastação é feita por meio dos dados enviados pelos satélites Landsat e CBERS-2 ao INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais) onde os cientistas produzem boletins diários, identificando os locais e as características dos desmatamentos mais recentes. Esses satélites giram ao redor da Terra em uma órbita praticamente polar e circular (Figura 2), de maneira que a combinação sincronizada entre as velocidades do satélite e da rotação da Terra torna possível "mapear" todo o planeta após certo número de dias.

Dependendo do satélite, a faixa de território que ele consegue observar pode ser mais larga ou mais estreita (Figura 3). O satélite Landsat "varre" todo o planeta a cada 16 dias, completando uma volta em torno da Terra em aproximadamente 100 minutos. O CBERS-2, que também tem período de revolução de 100 minutos, observa uma faixa mais larga que a observada pelo Landsat e consegue "varrer" todo o planeta em apenas 5 dias.

Disponível em: <www.inpe.br>.

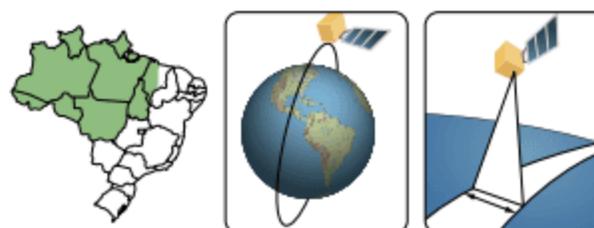


Figura 1

Figura 2

Figura 3

Dados:

Constante da gravitação universal:  $G = 6,0 \cdot 10^{-11}$  (S.I.)

Massa da Terra:  $M(T) = 6,0 \cdot 10^{24}$  kg

Raio da Terra:  $R(T) = 6.200$  km =  $6,2 \cdot 10^6$  m

Período de rotação da Terra em torno de seu eixo:  $T = 24$  h

$\pi = 3$

a) Baseando-se nas leis de Newton da mecânica clássica explique por que um satélite:

- não necessita de combustível para permanecer em órbita por longo tempo.
- mantém sua órbita circular sem se afastar ou se aproximar da superfície da Terra.

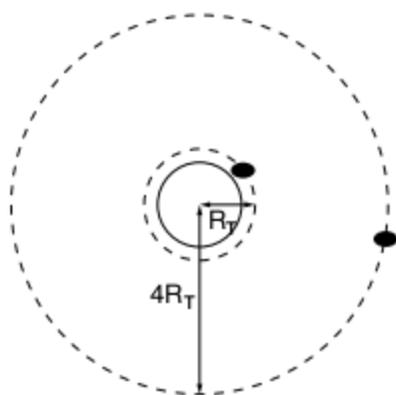
b) Calcule, em  $m/s^2$ , o valor da aceleração centrípeta que atua sobre o satélite Landsat em sua órbita a 800 km de altitude em relação à superfície da Terra.

Despreze possíveis efeitos advindos do movimento de rotação da Terra.

**50 Unesp** Uma espaçonave de massa  $m$  gira em torno da Terra com velocidade constante, em uma órbita circular de raio  $R$ . A força centrípeta sobre a nave é  $\frac{1,5GmM}{R^2}$ , onde  $G$  é a constante de gravitação universal e  $M$  a massa da Terra.

- a) Desenhe a trajetória dessa nave. Em um ponto de sua trajetória, desenhe e identifique os vetores velocidade  $\vec{v}$  e aceleração centrípeta  $\vec{a}$  da nave.
- b) Determine, em função de  $M$ ,  $G$  e  $R$ , os módulos da aceleração centrípeta e da velocidade da nave.

**51 Fuvest** Um satélite artificial, em órbita circular em torno da Terra, mantém um período que depende de sua altura em relação à superfície da Terra.



Note e adote:

A força de atração gravitacional sobre um corpo de massa  $m$  é

$F = \frac{GmM}{r^2}$ , em que  $r$  é a distância entre a massa e o centro da Terra,  $G$  é a constante gravitacional e  $M$  é a massa da Terra.

Na superfície da Terra,  $F = mg$  em que  $g = \frac{GM}{R^2}$ ;

$g = 10$   $m/s^2$  e  $R = 6,4 \cdot 10^6$  m.

(Para resolver essa questão, não é necessário conhecer nem  $G$  nem  $M$ ).

Considere  $\pi \approx 3$

Determine:

- a) o período  $T_0$  do satélite, em minutos, quando sua órbita está muito próxima da superfície. (Ou seja, está a uma distância do centro da Terra praticamente igual ao raio da Terra).
- b) o período  $T_4$  do satélite, em minutos, quando sua órbita está a uma distância do centro da Terra aproximadamente igual a quatro vezes o raio da Terra.

**52 UFTM 2012** Foi divulgado pela imprensa que a ISS (sigla em inglês para Estação Espacial Internacional) retornará à Terra por volta de 2020 e afundará no mar, encerrando suas atividades, como ocorreu com a Estação Orbital MIR, em 2001. Atualmente, a ISS realiza sua órbita a 350 km da Terra e seu período orbital é de aproximadamente 90 minutos.

Considerando o raio da Terra igual a 6.400 km e  $\pi \approx 3$ , pode-se afirmar que:

- (a) ao afundar no mar o peso da água deslocada pela estação espacial será igual ao seu próprio peso.
- (b) a pressão total exercida pela água do mar é exatamente a mesma em todos os pontos da estação.
- (c) a velocidade linear orbital da estação é, aproximadamente,  $27 \cdot 10^3$  km/h.
- (d) a velocidade angular orbital da estação é, aproximadamente, 0,25 rad/h.
- (e) ao reingressar na atmosfera a aceleração resultante da estação espacial será radial e de módulo constante.

**53 Uerj 2014** A intensidade  $F$  da força de atração gravitacional entre o Sol e um planeta é expressa pela seguinte relação:

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

$G$  = constante universal da gravitação

$m$  = massa do planeta

$M$  = massa do Sol

$r$  = raio da órbita do planeta

Admitindo que o movimento orbital dos planetas do sistema solar é circular uniforme, estime a massa do Sol.

Caso necessário, utilize:

Aceleração da gravidade:  $g = 10$   $m/s^2$

Constante de gravitação universal:  $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$   $N \cdot m^2/kg^2$

Raio da órbita da Terra:  $r = 1,5 \cdot 10^{11}$  m

$\pi = 3,14$

1 ano =  $3 \cdot 10^7$  s

**54 Uerj** A 3ª Lei de Kepler relaciona o período ( $T$ ) do movimento de um planeta ao redor do Sol com a distância média ( $R$ ) entre ambos, conforme a equação a seguir, na qual  $K$  é uma constante:

$$T^2 = KR^3$$

Admitindo que os planetas descrevem órbitas circulares, Newton deduziu, a partir dessa lei de Kepler, sua famosa Lei da Gravitação Universal, na qual  $G$  é a constante da gravitação universal,  $M$  a massa do Sol,  $m$  a do planeta e  $r$  a distância entre eles:

$F = \frac{GMm}{R^2}$ . Suponha que Newton tivesse encontrado a seguinte

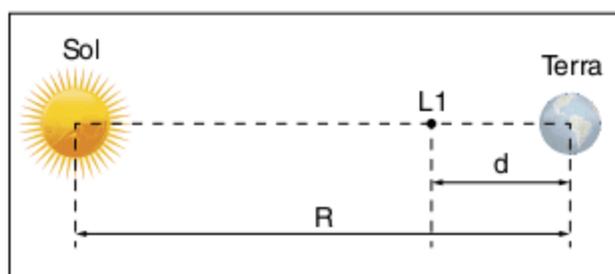
lei de gravitação, na qual  $n$  é um número inteiro:

$F = \frac{GmM}{R^n}$ . Neste caso, o segundo membro da equação da 3ª lei

de Kepler deveria ser igual a:

- (a)  $KR^{n-2}$       (b)  $KR^{n-1}$       (c)  $KR^{n+1}$       (d)  $KR^{n+2}$

**55 Fuvest 2014** Há um ponto no segmento de reta unindo o Sol à Terra, denominado “Ponto de Lagrange L1”. Um satélite artificial colocado nesse ponto, em órbita ao redor do Sol, permanecerá sempre na mesma posição relativa entre o Sol e a Terra. Nessa situação, ilustrada na figura ao lado, a velocidade angular orbital  $\omega_A$  do satélite em torno do Sol será igual à da Terra,  $\omega_T$ . Para essa condição, determine:



- $\omega_T$  em função da constante gravitacional  $G$ , da massa  $M_S$  do Sol e da distância  $R$  entre a Terra e o Sol;
- o valor de  $\omega_A$  em rad/s;
- a expressão do módulo  $F_r$  da força gravitacional resultante que age sobre o satélite, em função de  $G$ ,  $M_S$ ,  $M_T$ ,  $m$ ,  $R$  e  $d$ , sendo  $M_T$  e  $m$ , respectivamente, as massas da Terra e do satélite e  $d$  a distância entre a Terra e o satélite.

Note e adote:

1 ano  $\approx 3,14 \cdot 10^7$  s.

O módulo da força gravitacional  $F$  entre dois corpos de massas  $M_1$  e  $M_2$ , sendo  $r$  a distância entre eles, é dado por  $F = G \cdot M_1 M_2 / r^2$ .

Considere as órbitas circulares.

**56 ITA 2014** Considere dois satélites artificiais S e T em torno da Terra. S descreve uma órbita elíptica com semieixo maior  $a$ , e T, uma órbita circular de raio  $a$ , com os respectivos vetores posição  $\vec{r}_S$  e  $\vec{r}_T$  com origem no centro da Terra. É correto afirmar que:

- para o mesmo intervalo de tempo, a área varrida por  $\vec{r}_S$  é igual à varrida por  $\vec{r}_T$ .
- para o mesmo intervalo de tempo, a área varrida por  $\vec{r}_S$  é maior que a varrida por  $\vec{r}_T$ .
- o período de translação de S é igual ao de T.
- o período de translação de S é maior que o de T.
- se S e T têm a mesma massa, então a energia mecânica de S é maior que a de T.

**57 ITA** A estrela anã vermelha Gliese 581 possui um planeta que, num período de 13 dias terrestres, realiza em torno da estrela uma órbita circular cujo raio é igual a 1/14 da distância média entre o Sol e a Terra. Sabendo que a massa do planeta é aproximadamente igual à da Terra, pode-se dizer que a razão entre as massas da Gliese 581 e do nosso Sol é de aproximadamente:

- (a) 0,05      (c) 0,6      (e) 4,0  
 (b) 0,1      (d) 0,3

## Energia

**58 UEFS** Depois de sua formulação das leis de movimentos, a segunda, e talvez a maior, contribuição de Newton para o desenvolvimento da mecânica foi a descoberta da interação gravitacional, isto é, a interação entre dois corpos, planetas ou partículas, que produz um movimento que pode ser descrito pelas leis de Kepler.

Com base nos conhecimentos sobre a Gravitação Universal, é correto afirmar:

- A força associada à interação gravitacional nem sempre age ao longo da linha que une os dois corpos em interação, de acordo com a Lei dos Períodos.
- A Primeira Lei de Kepler afirma que a órbita de um planeta é elíptica ou hiperbólica.
- A velocidade de escape é a velocidade máxima com a qual um corpo deve ser lançado da Terra, para alcançar o infinito.
- A velocidade que um corpo, abandonado a uma distância  $r$ , do centro da Terra, quando atingir superfície terrestre, é dada por  $v = R \sqrt{2g \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)}$ , em que  $g$  é a aceleração da gravidade nessa superfície.
- A depender de sua massa, todos os corpos, em um mesmo lugar de um campo gravitacional, ficam sujeitos a diferentes acelerações.

**59 Unicamp 2014** “As denúncias de violação de telefonemas e transmissão de dados de empresas e cidadãos brasileiros serviram para reforçar a tese das Forças Armadas da necessidade de o Brasil dispor de seu próprio satélite geostacionário de comunicação militar.”

O Estado de S. Paulo, 15 jul. 2013.

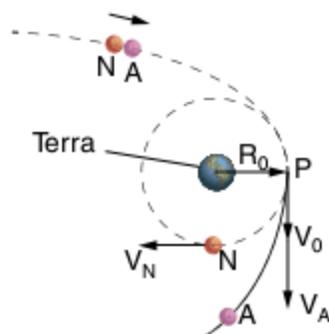
Uma órbita geostacionária é caracterizada por estar no plano equatorial terrestre, sendo que o satélite que a executa está sempre acima do mesmo ponto no Equador da superfície terrestre. Considere que a órbita geostacionária tem um raio  $r = 42.000$  km.

- Calcule a aceleração centrípeta de um satélite em órbita circular geostacionária.
- A energia mecânica de um satélite de massa  $m$  em órbita circular em torno da Terra é dada por  $E = -\frac{GMm}{2r}$  em que  $r$  é o raio da órbita,  $M = 6 \cdot 10^{24}$  kg é a massa da Terra e  $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ . O raio de órbita de satélites comuns de observação (não geostacionários) é tipicamente de 7.000 km.

Calcule a energia adicional necessária para colocar um satélite de 200 kg de massa em uma órbita geostacionária, em comparação a colocá-lo em uma órbita comum de observação.

**60 Fuvest (Adapt.)** Alienígenas desejam observar o nosso planeta. Para tanto, enviam à Terra uma nave N, inicialmente ligada a uma nave auxiliar A, ambas de mesma massa. Quando o conjunto de naves se encontra muito distante da Terra, sua energia cinética e sua energia potencial gravitacional são muito pequenas, de forma que a energia mecânica total do conjunto pode ser considerada nula. Enquanto o conjunto é acelerado pelo

campo gravitacional da Terra, sua energia cinética aumenta e sua energia potencial fica cada vez mais negativa, conservando a energia total nula. Quando o conjunto N-A atinge, com velocidade  $V_0$  (a ser determinada), o ponto de máxima aproximação da Terra, a uma distância  $R_0$  de seu centro, um explosivo é acionado, separando N de A. A nave N passa a percorrer, em torno da Terra, uma órbita circular de raio  $R_0$ , com velocidade  $V_N$  (a ser determinada). A nave auxiliar A, adquire uma velocidade  $V_A$ . Suponha que a Terra esteja isolada no espaço e em repouso.



Note e adote:

- I. A força de atração gravitacional  $F$ , entre um corpo de massa  $m$  e o planeta Terra, de massa  $M$ , é dada por:  $F = \frac{GMm}{R^2} = mg_R$ .
- II. A energia potencial gravitacional  $E_p$  do sistema formado pelo corpo e pelo planeta Terra, com referencial de potencial zero no infinito, é dada por:  $E_p = \frac{-GMm}{R}$

$G$ : constante universal da gravitação.

$R$ : distância do corpo ao centro da Terra.

$g_R$ : aceleração da gravidade à distância  $R$  do centro da Terra.

Determine, em função de  $M$ ,  $G$  e  $R_0$ ,

- a) a velocidade  $V_0$  com que o conjunto atinge o ponto P.
- b) a velocidade  $V_N$ , de N, em sua órbita circular.

**61 Unicamp** Em 2009 foram comemorados os 40 anos da primeira missão tripulada à Lua, a Missão Apollo 11, comandada pelo astronauta norte-americano Neil Armstrong. Além de ser considerado um dos feitos mais importantes da história recente, esta viagem trouxe grande desenvolvimento tecnológico.

- a) A Lua tem uma face oculta, erroneamente chamada de lado escuro, que nunca é vista da Terra. O período de rotação da Lua em torno de seu eixo é de cerca de 27 dias. Considere que a órbita da Lua em torno da Terra é circular, com raio igual a  $r = 3,8 \cdot 10^8$  m. Lembrando que a Lua sempre apresenta a mesma face para um observador na Terra, calcule a sua velocidade orbital em torno da Terra.
- b) Um dos grandes problemas para enviar um foguete à Lua é a quantidade de energia cinética necessária para transpor o campo gravitacional da Terra, sendo que essa energia depende da massa total do foguete. Por este motivo, somente é enviado no foguete o que é realmente essencial. Calcule qual é a energia necessária para enviar um tripulante de massa  $m = 70$  kg à Lua. Considere que a velocidade da massa no lançamento deve ser  $V = \sqrt{2gR_T}$  para que ela chegue até a Lua, sendo  $g$  a aceleração da gravidade na superfície na Terra e  $R_T = 6,4 \cdot 10^6$  m o raio da Terra:

**62 ITA** O raio do horizonte de eventos de um buraco negro corresponde à esfera dentro da qual nada, nem mesmo luz, escapa da atração gravitacional por ele exercida. Por coincidência, esse raio pode ser calculado não relativisticamente como o raio para o qual a velocidade de escape é igual à velocidade da luz. Qual deve ser o raio do horizonte de eventos de um buraco negro com uma massa igual à massa da Terra?

Dados:

Massa da Terra:  $M = 6,0 \cdot 10^{24}$  kg

Constante de Gravitação Universal:

$G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N · m<sup>2</sup>·kg<sup>-2</sup>

Velocidade da luz no vácuo:  $3,0 \cdot 10^8$  m/s

**63 ITA 2012** Acredita-se que a colisão de um grande asteroide com a Terra tenha causado a extinção dos dinossauros.

Para se ter uma ideia de um impacto dessa ordem, considere um asteroide esférico de ferro, com 2 km de diâmetro, que se encontra em repouso quase no infinito, estando sujeito somente à ação da gravidade terrestre. Desprezando as forças de atrito atmosférico, assinale a opção que expressa a energia liberada do impacto, medida em número aproximado de bombas de hidrogênio de 10 megatons de TNT.

Dados:

Densidade do ferro:  $8 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>

Raio da Terra:  $6,4 \cdot 10^6$  m

1 megaton de TNT =  $10^6 \cdot 4 \cdot 10^9$  J

- |        |            |               |
|--------|------------|---------------|
| (a) 1  | (c) 500    | (e) 1.000.000 |
| (b) 10 | (d) 50.000 |               |

**64 IME 2012** Um corpo estava em órbita circular em torno da Terra a uma distância do solo igual à  $2R_T$ , sendo  $R_T$  o raio da Terra. Esse corpo é colocado em órbita de outro planeta que tem  $1/20$  da massa e  $1/3$  do raio da Terra.

A distância ao solo deste novo planeta, de modo que sua energia cinética seja  $1/10$  da energia cinética de quando está em torno da Terra é:

- |                      |           |                      |                      |                      |
|----------------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|
| (a) $\frac{5}{6}R_T$ | (b) $R_T$ | (c) $\frac{7}{6}R_T$ | (d) $\frac{4}{3}R_T$ | (e) $\frac{3}{2}R_T$ |
|----------------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|

### Binário, fases da Lua, eclipses e marés

**65** Dois corpos celestes, de massa  $m_1$  e  $m_2$ , constituindo uma estrela dupla, interagem entre si como um sistema isolado no universo. Eles descrevem círculos de raios  $r_1$  e  $r_2$  respectivamente. Sendo  $G$  a constante de gravitação, verifique qual é a velocidade angular dos dois corpos.

- |  |  |
|--|--|
| (a) $\sqrt{\frac{Gm_2}{r_2(r_1+r_2)^2}}$ | (d) $\sqrt{\frac{Gm_2}{r_2^2(r_1+r_2)}}$ |
| (b) $\sqrt{\frac{Gm_2}{r_1(r_1+r_2)^2}}$ | (e) $\sqrt{\frac{Gm_1}{r_1^2(r_1+r_2)}}$ |
| (c) $\sqrt{\frac{Gm_1}{r_2^2(r_1+r_2)}}$ |  |

**66 ITA 2012** Boa parte das estrelas do universo formam sistemas binários nos quais duas estrelas giram em torno do centro de massa comum, CM. Considere duas estrelas esféricas de um sistema binário em que cada qual descreve uma órbita circular em torno desse centro. Sobre tal sistema são feitas duas afirmações:

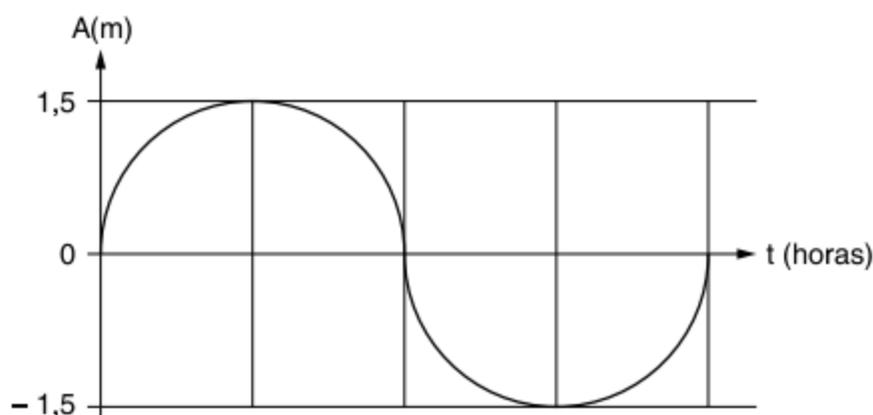
- I. O período de revolução é o mesmo para as duas estrelas e depende apenas da distância entre elas, da massa total deste binário e da constante gravitacional.
- II. Considere que  $\vec{R}_1$  e  $\vec{R}_2$  são os vetores que ligam o CM ao respectivo centro de cada estrela. Num certo intervalo de tempo  $\Delta t$ , o raio do vetor  $\vec{R}_1$  varre uma certa área A. Durante este mesmo intervalo de tempo, o raio vetor  $\vec{R}_2$  também varre uma área igual a A.

Diante destas duas preposições, assinale a alternativa correta.

- (a) As afirmações I e II são falsas.
- (b) Apenas a afirmação I é verdadeira.
- (c) Apenas a afirmação II é verdadeira.
- (d) As afirmações I e II são verdadeiras, mas a II não justifica a I.
- (e) As afirmações I e II são verdadeiras e, além disso, a II justifica a I.

Texto para a questão 67.

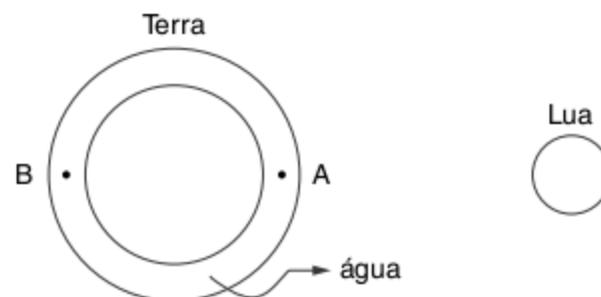
O subir e descer das marés é regulado por vários fatores, sendo o principal deles a atração gravitacional entre Terra e Lua. Se desprezásemos os demais fatores, teríamos sempre o intervalo de 12,4 horas entre duas marés altas consecutivas, e também sempre a mesma altura máxima de maré, por exemplo, 1,5 metros. Nessa situação, o gráfico da função que relacionaria tempo (t) e altura de maré (A) seria semelhante a este:



**67 Puccamp** O fato do intervalo de tempo entre duas marés altas sucessivas ser de 12,4 horas e não de 12 horas exatas explica-se pelo fato de que:

- (a) o período de rotação da Terra em torno de seu eixo não é de 24 horas, e sim de 24,8 horas.
- (b) a Lua gira em torno da Terra completando uma volta em, aproximadamente, 28 dias.
- (c) a água do mar tem uma inércia muito grande que atrasa seu movimento.
- (d) a órbita da Terra em torno do Sol é elíptica.
- (e) o eixo de rotação da Terra é inclinado.

**68 ITA** Sabe-se que a atração gravitacional da Lua sobre a camada de água é a principal responsável pelo aparecimento das marés oceânicas na Terra. A figura mostra a Terra, supostamente esférica, homoganeamente recoberta por uma camada de água.



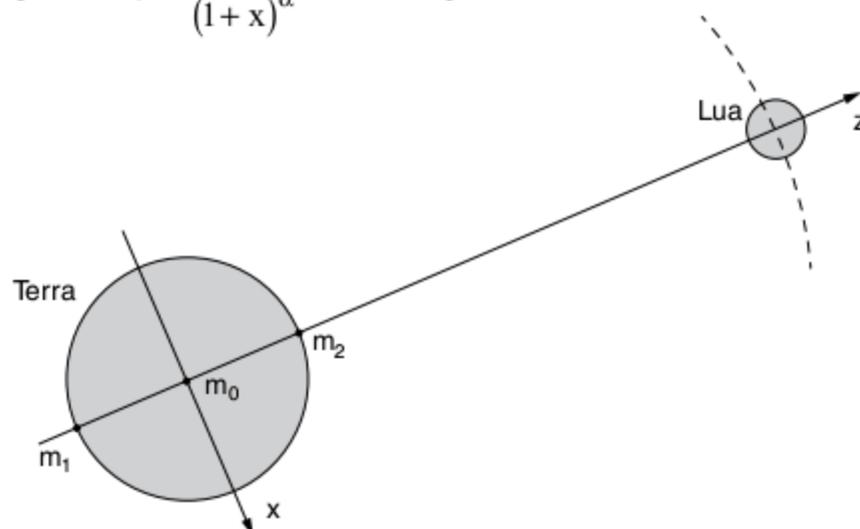
Nessas condições, considere as seguintes afirmativas:

- I. As massas de água próximas das regiões A e B experimentar marés altas simultaneamente.
- II. As massas de água próximas das regiões A e B experimentar marés opostas, isto é, quando A tem maré alta, B tem maré baixa e vice-versa.
- III. Durante o intervalo de tempo de um dia ocorrem duas marés altas e duas marés baixas.

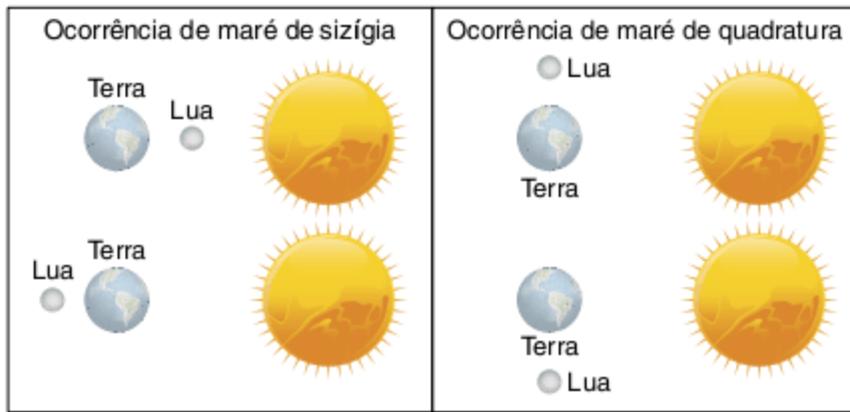
Então, está(ão) correta(s), apenas:

- (a) a afirmativa I.
- (b) a afirmativa II.
- (c) a afirmativa III.
- (d) as afirmativas I e II.
- (e) as afirmativas I e III.

**69 ITA** Lua e Sol são os principais responsáveis pelas forças de maré. Estas são produzidas devido às diferenças na aceleração gravitacional sofrida por massas distribuídas na Terra em razão das respectivas diferenças de suas distâncias em relação a esses astros. A figura mostra duas massas iguais,  $m_1 = m_2 = m$ , dispostas sobre a superfície da Terra em posições diametralmente opostas e alinhadas em relação à Lua, bem como uma massa  $m_0 = m$  situada no centro da Terra. Considere G a constante de gravitação universal, M a massa da Lua, r o raio da Terra e R a distância entre os centros da Terra e da Lua. Considere, também,  $f_{0z}$ ,  $f_{1z}$ , e  $f_{2z}$  as forças produzidas pela Lua respectivamente sobre as massas  $m_0$ ,  $m_1$  e  $m_2$ . Determine as diferenças  $(f_{1z} - f_{0z})$  e  $(f_{2z} - f_{0z})$  sabendo que deverá usar a aproximação  $\frac{1}{(1+x)^\alpha} = 1 - \alpha x$ , quando  $x \ll 1$ .



**70 Unicamp 2013 (Adapt.)** As marés são movimentos periódicos de elevação e abaixamento dos oceanos e mares provocadas pela ação gravitacional da Lua e do Sol sobre a Terra. A figura a seguir representa os momentos de ocorrência de marés de sizígia e de marés de quadratura.



Em que condições (fases da Lua) ocorrem marés de sizígia e marés de quadratura, e que consequências essas condições têm para a amplitude de marés?

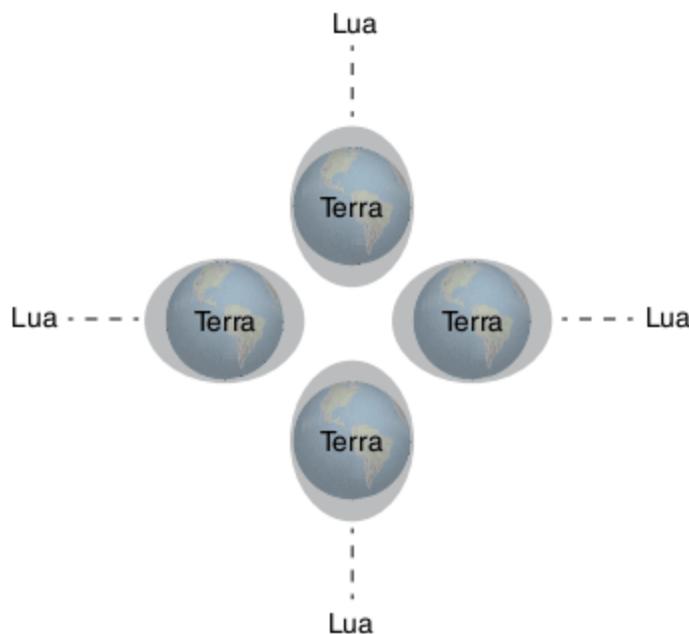
**71 UFRGS** Considere as seguintes afirmações.

- I. Para que um satélite se mantenha em uma órbita circular ao redor da Terra, a força resultante sobre ele não deve ser nula.
- II. O efeito de marés oceânicas, que consiste na alteração do nível da água do mar, não é influenciado pelo Sol, apesar da grande massa deste.
- III. O módulo da aceleração da gravidade em um ponto no interior de um planeta diminui com a distância desse ponto em relação ao centro do planeta.

Tendo em vista os conceitos da Gravitação Universal, quais estão corretas?

- |                     |                      |
|---------------------|----------------------|
| (a) Apenas I.       | (d) Apenas II e III. |
| (b) Apenas II.      | (e) I, II e III.     |
| (c) Apenas I e III. |                      |

**72 Udesc** A maré é o fenômeno natural de subida e descida do nível das águas, percebido principalmente nos oceanos, causado pela atração gravitacional do Sol e da Lua. A ilustração a seguir esquematiza a variação do nível das águas ao longo de uma rotação completa da Terra.



Considere as seguintes proposições sobre maré, e assinale a alternativa incorreta.

- (a) As marés de maior amplitude ocorrem próximo das situações de Lua nova ou Lua cheia, quando as forças atrativas, devido ao Sol e à Lua, se reforçam mutuamente.
- (b) A influência da Lua é maior do que a do Sol, pois, embora a sua massa seja muito menor do que a do Sol, esse fato é compensado pela menor distância à Terra.
- (c) A maré cheia é vista por um observador quando a Lua passa por cima dele, ou quando a Lua passa por baixo dele.
- (d) As massas de água que estão mais próximas da Lua ou do Sol sofrem atração maior do que as massas de água que estão mais afastadas, devido à rotação da Terra.
- (e) As marés alta e baixa sucedem-se em intervalos de aproximadamente 6 horas.

**73 Unicamp** A atração gravitacional da Lua e a força centrífuga do movimento conjunto de rotação da Lua e da Terra são as principais causas do fenômeno das marés. Essas forças fazem com que a água dos oceanos adquira a forma esquematizada (e exagerada) na figura adiante. A influência do Sol no fenômeno das marés é bem menor, mas não desprezível, porque quando a atração do Sol e da Lua se conjugam a maré torna-se mais intensa.



- a) Quantas marés altas ocorrem em um dia num mesmo local?
- b) Como estará a maré no Brasil quando a Lua estiver bem acima do Japão?
- c) Faça um desenho mostrando a Terra, a Lua e o Sol na situação em que a maré é mais intensa. Qual é a fase da Lua nessa situação?



# Frente 3

# 10

FRENTE 3

## Instrumentos ópticos



Os grandes telescópios para pesquisa astronômica (baseados no espaço e na Terra) utilizam-se de alta tecnologia para a obtenção de imagens e de dados de objetos nas regiões mais remotas do universo.

O telescópio óptico terrestre Antu, um dos quatro telescópios refletores que constituem o VLT (*Very Large Telescope*), no Chile, com um espelho principal de 8,2 m de diâmetro, permite a observação de objetos que são 4 bilhões de vezes mais fracos que os observados a olho nu.

## Instrumentos ópticos

Os instrumentos ópticos podem ser classificados como instrumentos de observação e projeção.

Os instrumentos de observação geram imagens virtuais, que só podem ser observadas através deles. Os instrumentos de projeção permitem a visualização da imagem, nesse caso, real, a todos que observam a tela de projeção.

### Lupa ou lente de aumento

A lupa, ou lente de aumento, é um dos mais simples instrumentos ópticos. É composta de apenas uma lente convergente, em que o objeto  $O$  é colocado entre o foco  $F$  e o centro óptico  $C$  da lente.



Fig. 1 Lupa, lente de aumento.

A imagem visualizada pelo observador é sempre uma imagem virtual, direita e maior (aumentada).

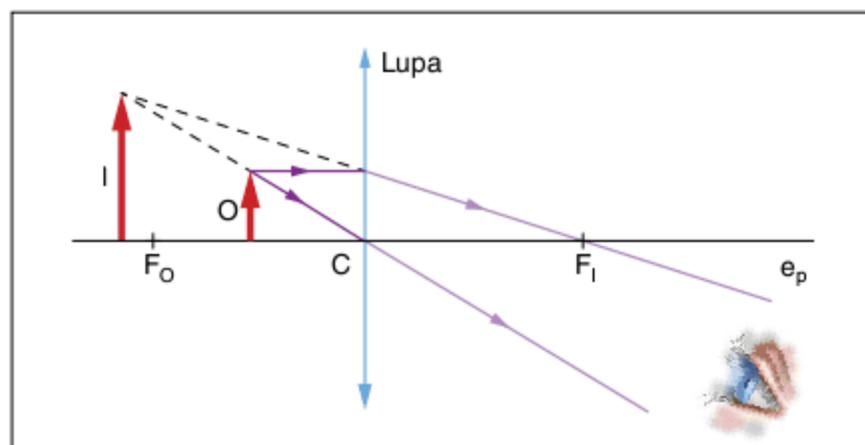


Fig. 2 Esquema representativo, lupa.

## ATENÇÃO!

Ao utilizar uma lupa, é possível perceber que a imagem formada é nítida no centro e, à medida que nos aproximamos da periferia da lente, a imagem se torna menos nítida, isto é, mais astigmática. Lembre-se das condições de nitidez de Gauss.

### Associação de lentes justapostas

Para darmos prosseguimento em nosso estudo sobre instrumentos ópticos, é muito importante estudarmos o conceito de justaposição de lentes.

Dois lentes estão associadas à justaposição quando possuem o mesmo eixo óptico principal (lentes coaxiais) e a distância entre elas é nula.

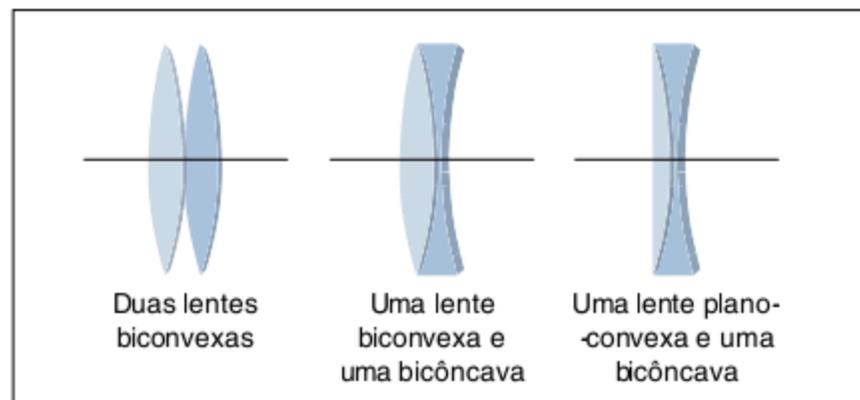


Fig. 3 Justaposição de lentes delgadas.

Se as lentes associadas possuem vergências  $V_1$  e  $V_2$ , podemos demonstrar que a vergência equivalente,  $V_{eq}$ , da associação é:

$$V_{eq} = V_1 + V_2$$

Entretanto, para uma associação de  $n$  lentes à justaposição, a vergência equivalente é dada por:

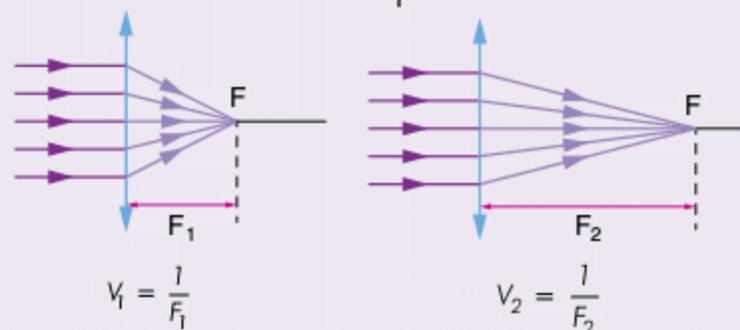
$$V_{eq} = \sum_{i=1}^n V_i$$

Se  $F_1$  e  $F_2$  as distâncias focais das lentes associadas e  $F_{eq}$  a distância focal resultante da associação, temos, com base na expressão anterior, para uma associação de  $n$  lentes, que:

$$\frac{1}{F_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{F_i}$$

## ATENÇÃO!

Vergência de uma lente:  $V = \frac{1}{F}$



$$F_1 < F_2 \Rightarrow V_1 > V_2$$

- Lente convergente:  $V > 0$
- Lente divergente:  $V < 0$
- Unidade de vergência ( $V$ ):  $di = m^{-1} = grau$

### Exercício resolvido

**1** Duas lentes delgadas, uma convergente e outra divergente, com distâncias focais respectivamente iguais a 1 m e -2 m, encontram-se justapostas. Um objeto é colocado a 3 m das lentes. Qual a distância entre a imagem e o sistema de lentes (considerado de espessura desprezível)?

**Resolução:**

$$\begin{aligned} F_{conv} &= 1 \text{ m} \\ F_{div} &= -2 \text{ m} \\ P &= 3 \text{ m} \end{aligned}$$

Como se trata de uma justaposição de lentes delgadas,  $F_{eq}$  é dado por:

$$\frac{1}{F_{eq}} = \frac{1}{F_{conv}} + \frac{1}{F_{div}}$$

$$\frac{1}{F_{eq}} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow F_{eq} = 2 \text{ m}$$

Como o foco é positivo, a associação possui um efeito convergente. Aplicando a equação de Gauss, temos:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{P'} \Rightarrow \frac{1}{P'} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{P'} = \frac{1}{6} \Rightarrow P' = 6 \text{ m}$$

Portanto, a distância será de 6 m.

## Microscópio composto

O microscópio é utilizado para a observação de objetos próximos e de pequenas dimensões. É constituído por duas lentes convergentes associadas coaxialmente ao longo de um tubo cujo interior é negro. Uma lente é denominada objetiva e a outra ocular.

A lente que fica próxima do olho é a ocular, enquanto a lente que fica próxima do objeto é a objetiva.

## ATENÇÃO!

Vale observar que apesar de nos referirmos às lentes ocular e objetiva como sendo lentes únicas, na verdade, elas podem ser um conjunto de até 4 ou 5 lentes associadas de forma justaposta.

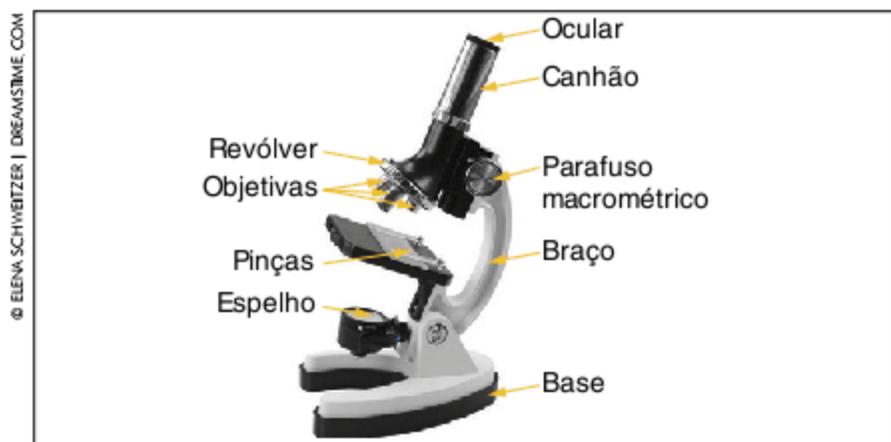


Fig. 4 Microscópio composto.

A lente objetiva, de pequena distância focal, conjuga, do objeto O, uma imagem  $I_1$ , real, invertida e aumentada.

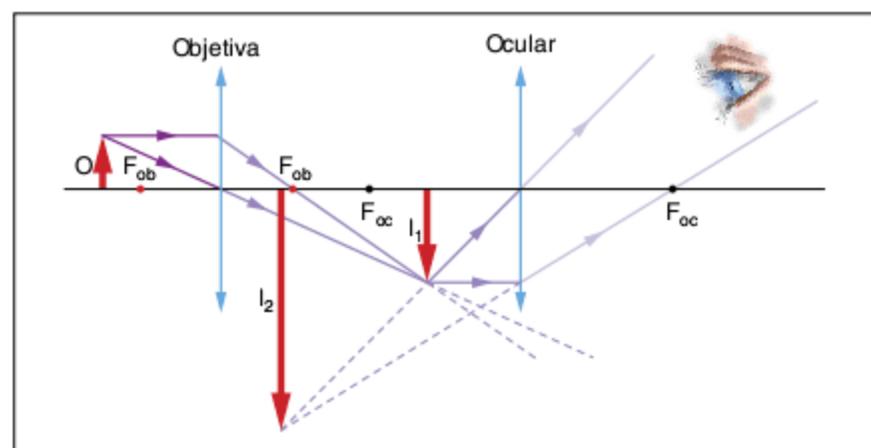


Fig. 5 Esquema representativo de um microscópio composto.

A imagem  $I_1$  é o objeto para a lente ocular que, funcionando como lupa, conjuga uma imagem final  $I_2$ , virtual, ampliada e invertida em relação ao objeto O.

O aumento linear transversal da objetiva  $A_{ob}$  é dado por:

$$A_{ob} = \frac{I_1}{O}$$

O aumento linear transversal da ocular  $A_{oc}$  é dado por:

$$A_{oc} = \frac{I_2}{I_1}$$

Assim, o aumento linear transversal do microscópio A é:

$$A = A_{ob} \cdot A_{oc}$$

De fato:

$$A = \frac{I_1}{O} \cdot \frac{I_2}{I_1} = \frac{I_2}{O}$$

## Luneta astronômica

Tem por finalidade a observação de objetos distantes, como os corpos celestes.

Semelhante à construção do microscópio, é também constituída por duas lentes convergentes coaxiais em um tubo de interior negro. As lentes também são denominadas objetiva e ocular.



Fig. 6 Luneta astronômica.

A lente objetiva, de grande distância focal, recebe a luz do objeto distante ( $PO_{\infty}$ ) e conjuga a imagem  $I_1$  no seu plano focal.

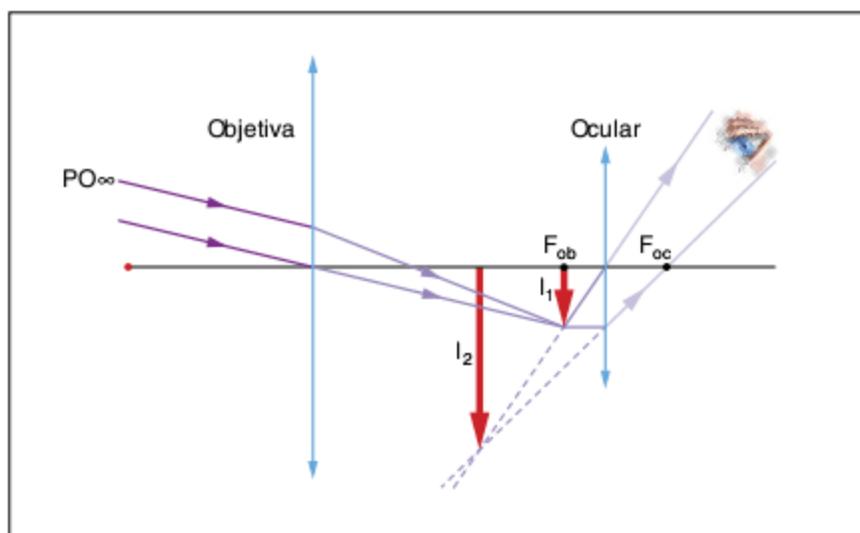


Fig. 7 Esquema representativo de uma luneta astronômica.

Observe que:

- $F_{ob}$ : foco da lente objetiva
- $F_{oc}$ : foco da lente ocular

A imagem  $I_1$  torna-se o objeto para a lente ocular, que funciona como uma lupa, produzindo uma imagem final  $I_2$ , virtual e invertida em relação ao objeto distante.

A luneta oferece ao observador um aumento no ângulo visual.

O aumento angular nominal  $A$  é dado por:

$$A_n = \frac{F_{objetiva}}{F_{ocular}}$$

onde  $F_{objetiva}$  é a distância focal da objetiva e  $F_{ocular}$  é a distância focal da ocular.

## LEITURA

### Telescópios refletores

Atualmente, os grandes observatórios utilizam telescópios refletores em vez de lunetas. Nesses telescópios, a objetiva, ao contrário da luneta que possui uma lente, é constituída por um espelho parabólico côncavo. A imagem fornecida pelo espelho é observada através de uma ocular, agora sim, igual a uma luneta.

A vantagem de se usarem espelhos no lugar de lentes para compor a objetiva é que os efeitos de aberração cromática são menores; além de uma associação de espelhos possibilitar a construção de instrumentos mais compactos.

### Lunetas terrestres

As lunetas astronômicas, quando usadas na observação de objetos na superfície da Terra, apresentam alguns inconvenientes: são aparelhos muito volumosos e fornecem uma imagem final invertida.

As lunetas terrestres são instrumentos mais simples, que sofrem algumas modificações básicas para que a imagem final seja direita.

A luneta de Galileu, por exemplo, fornece uma imagem final direita por utilizar uma ocular divergente, em vez de convergente.

Na luneta com veículo de lentes, entre a objetiva e a ocular é colocada uma lente, ou uma associação de lentes, que produz a inversão da imagem intermediária.

## Máquina fotográfica

Uma máquina ou câmara fotográfica é constituída basicamente de uma câmara escura na qual, na entrada da luz, não existe simplesmente um pequeno furo, mas sim uma lente, denominada objetiva, e, no fundo da câmara, um filme fotossensível, que irá registrar as imagens.

A lente objetiva de uma máquina fotográfica é uma lente convergente que conjuga, de um objeto, uma imagem real e invertida.

**Observação:** Lembre-se de que a imagem deve ser projetável, conseqüentemente, deve ser real e invertida.



Fig. 8 Máquina fotográfica.

A imagem formada deverá recair sobre o filme para que possamos obter uma fotografia nítida.

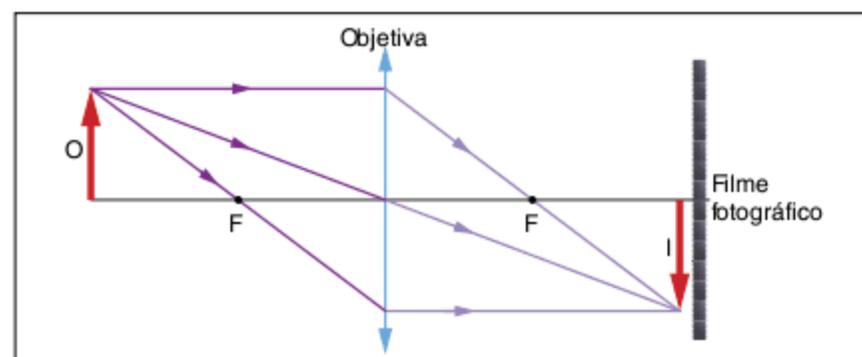


Fig. 9 Esquema representativo de uma máquina fotográfica.

A máquina fotográfica possui um dispositivo que altera a distância da lente ao filme para que, a cada posição do objeto, a imagem possa se projetar sobre o filme. Quando o objeto se aproxima da lente, a imagem se afasta e fica “atrás” do filme. Para que a imagem volte a se formar nitidamente sobre o filme, a lente deve ser afastada dele. Lembre-se da equação de Gauss dos pontos conjugados:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{P} + \frac{1}{P'}$$

**Observação:** Em uma máquina fotográfica, a lente objetiva, em geral, é a lente resultante de uma associação de lentes.

Esse tipo de instrumento óptico possui um dispositivo que regula a quantidade de luz incidente, o diafragma.

## Retroprojektor

O projetor de transparências, retroprojektor, ou o projetor de filme ou *slide* possui uma lente que conjuga, do objeto (transparência, filme ou *slide*), uma imagem real, invertida e ampliada. Essa imagem, para ser nítida, deverá recair sobre a tela de projeção.



Fig. 10 Retroprojektor.

No caso específico do retroprojektor, a transparência é colocada sobre uma placa de vidro situada entre o foco e o ponto antiprincipal da lente de projeção. Os raios de luz emitidos pela lâmpada atravessam a lâmina de vidro e a transparência, incidindo na lente de projeção; dessa forma a lente conjuga uma imagem que, para se projetar na parede, sofre reflexão em um espelho plano, formando na tela de projeção uma imagem ampliada do objeto.

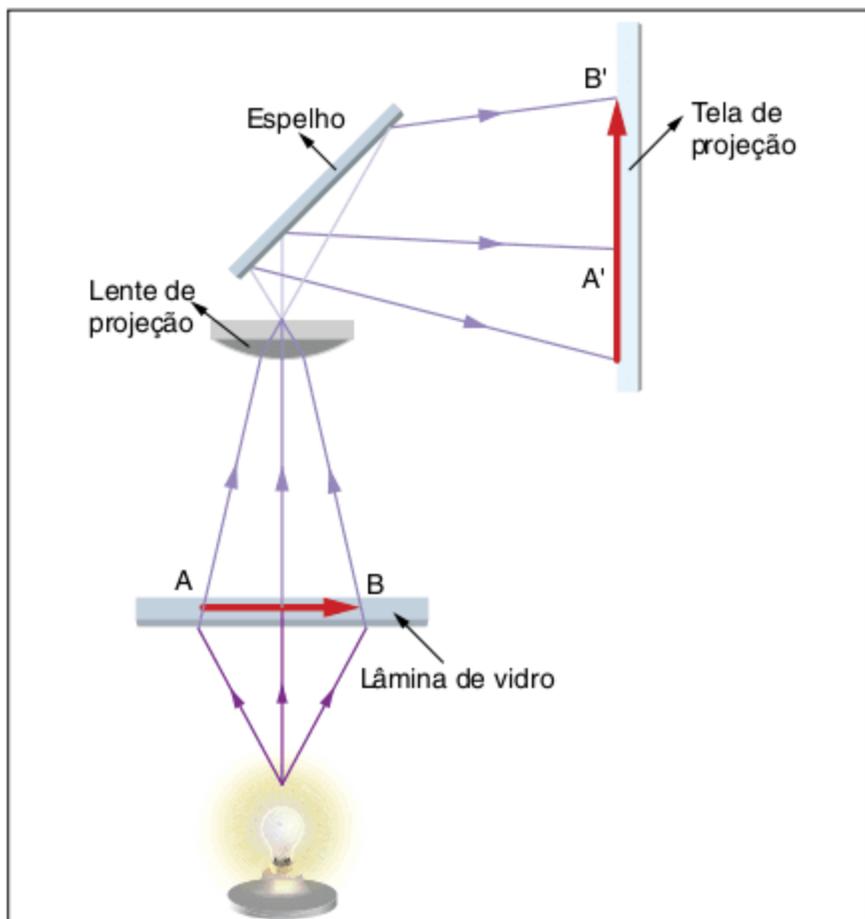


Fig. 11 Esquema representativo de um retroprojektor.

### Binóculo

O binóculo é um instrumento óptico constituído de duas lunetas, cada uma delas contendo duas lentes: objetiva e ocular, além de dois prismas de Porro, nos quais ocorre a inversão da imagem final através de reflexão total.

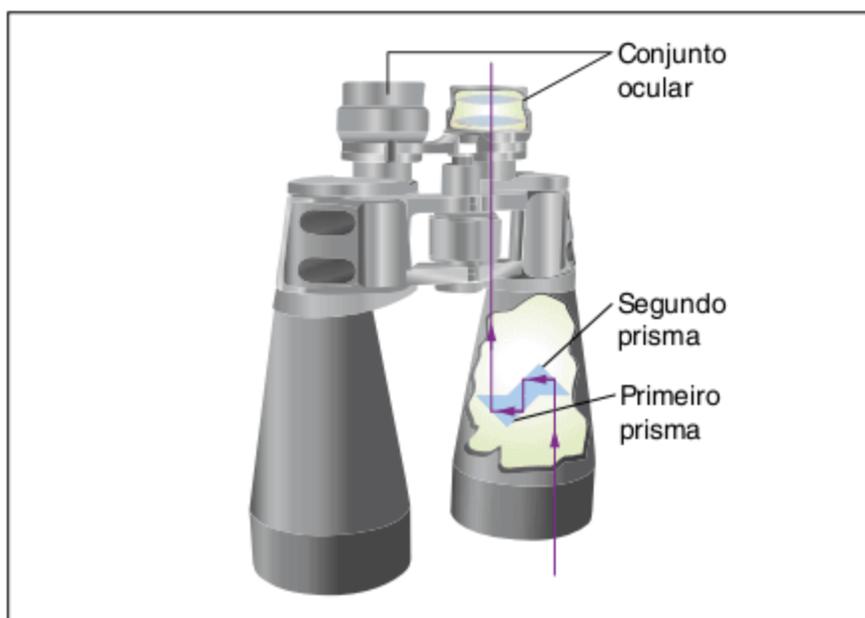


Fig. 12 Binóculo.

Sabemos que no prisma de Porro os raios emergem em ordem contrária à dos raios incidentes. A imagem de um objeto fornecida pela objetiva é reversa (troca esquerda pela direita).

A função dos prismas é orientar a imagem; sem eles os objetos observados produziram imagens invertidas e reversas. A ocular funciona como lupa, fornecendo uma imagem final exatamente igual ao objeto e ampliada.

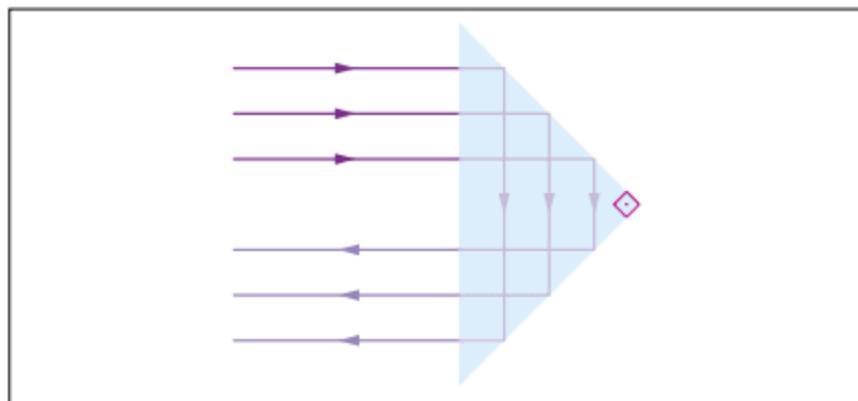


Fig. 13 Prisma de Porro.

### Óptica da visão O globo ocular

O globo ocular humano assemelha-se a uma filmadora, ou mesmo a uma máquina fotográfica de grande sofisticação. É constituído de diversas camadas transparentes que são atravessadas pela luz, além de partes opacas e de regiões responsáveis pelo movimento, sustentação e proteção.

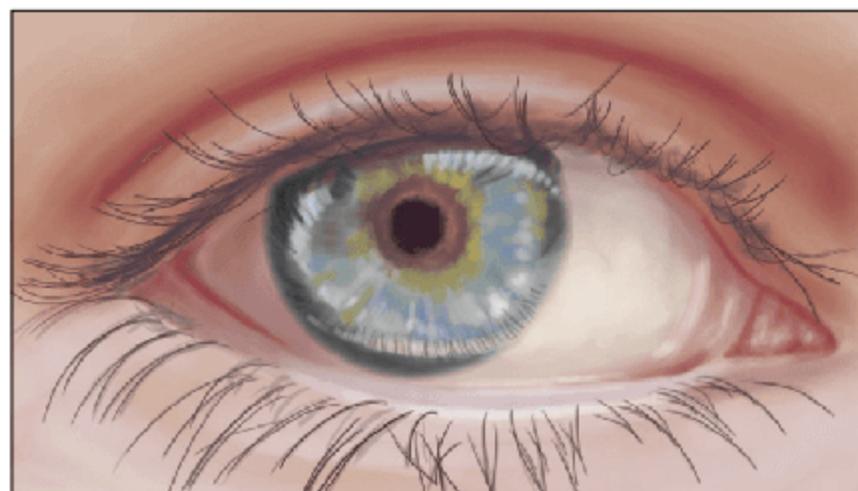


Fig. 14 Olho humano.

O cérebro, alimentado pelas informações conduzidas pelo nervo óptico, “reprojeta” a imagem obtida pelo olho, fornecendo a percepção ou visão real do objeto.

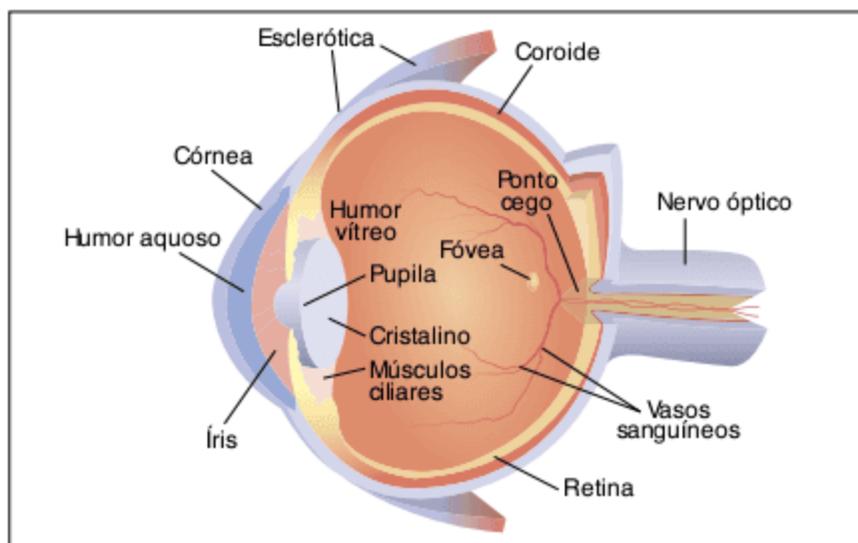


Fig. 15 Olho humano em corte.

- Os **meios transparentes** do globo ocular (córnea, humor aquoso, cristalino e humor vítreo) têm, no seu conjunto,

função correspondente à da lente objetiva convergente da câmera fotográfica, formando uma imagem real, invertida e menor sobre a retina.

- A **íris**, com seu orifício central (pupila) de diâmetro variável conforme a intensidade da luz, corresponde ao diafragma da máquina fotográfica.
- A **retina** é uma película fotossensível sobre a qual se formam as imagens.
- A **esclerótica** é uma membrana opaca e de consistência firme que envolve o globo ocular completamente, exceto na parte anterior, onde se torna transparente, dando origem à córnea. Essa membrana garante a sustentação mecânica do olho, à semelhança do sistema de sustentação existente em uma máquina fotográfica.
- A **coroide** é uma membrana pigmentada que cobre a esclerótica no interior do globo ocular. Sobre ela distribuem-se as células da retina; assim, do mesmo modo que o interior de uma câmera fotográfica é totalmente negro, a coroide garante a escuridão do espaço interno do olho, evitando a difusão da luz que penetra no globo ocular.

A focalização da imagem no globo ocular é realizada de um modo mais complexo do que em uma máquina fotográfica, denominado **acomodação visual**, tratada a seguir.

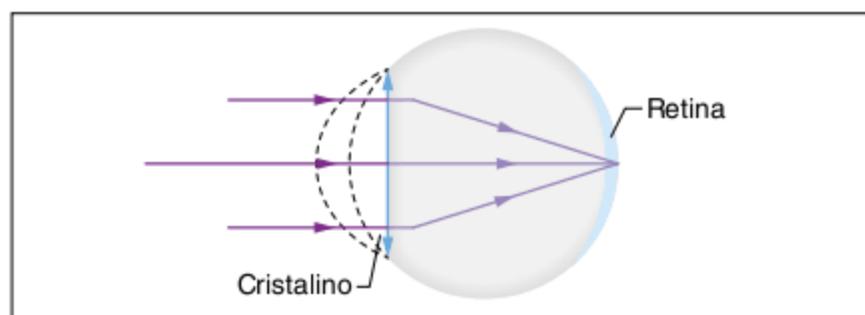


Fig. 16 Esquema representativo de um olho humano.

### Acomodação visual

O nosso olho tem uma incrível capacidade de se acomodar e gerar imagens nítidas, sobre a retina, de objetos próximos, como esta folha, e de objetos muito afastados, uma paisagem, por exemplo.

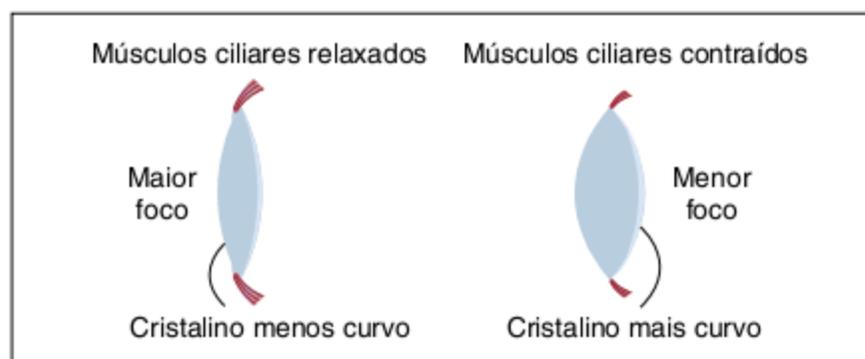


Fig. 17 Cristalino e a musculatura ciliar.

O cristalino do olho é uma lente biconvexa presa às paredes do globo ocular por uma série de fibras musculares que constituem os músculos ciliares.

O cristalino não apresenta uma distância focal constante, ao contrário, ele é constituído por um tecido elástico que lhe permite mudar de forma quando os músculos ciliares se contraem. De acordo com a equação dos fabricantes de lentes, a distância focal de uma lente de índice de refração  $n_2$ , imersa

em um meio de índice de refração  $n_1$ , depende dos raios de curvatura  $R_1$  e  $R_2$  de suas faces:

$$\frac{1}{F} = \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Então, como a contração dos músculos ciliares produz diminuição dos raios  $R_1$  e  $R_2$  das faces do cristalino, ocorre uma diminuição da distância focal do cristalino.

A maior distância focal do cristalino acontece quando os músculos ciliares estão relaxados, isto é, não está sendo realizado nenhum esforço de acomodação. Nessa situação, para uma pessoa de visão normal, o foco imagem  $F'$  está exatamente na retina, onde também estará se formando a imagem correspondente a um objeto infinitamente afastado.

À medida que o objeto se aproxima, a imagem continua nítida sobre a retina graças à variação da distância focal, determinada, como vimos, pela contração dos músculos ciliares. A menor distância focal corresponde à contração completa dos músculos ciliares, quando o olho está realizando esforço máximo de acomodação.

## ATENÇÃO!

No olho humano, a imagem deve sempre recair sobre a retina, então temos que:  $P' = \text{cte}$ .

Para isso, a distância focal  $F$  deve assumir um valor conveniente para cada posição  $P$  do objeto.

De fato, a equação de Gauss mostra que a distância focal deve assumir valores cada vez menores para posições do objeto mais próximas do olho. À medida que a distância focal diminui, quer dizer que a lente fica mais convergente.

$$\frac{1}{F_{\text{diminui}}} = \frac{1}{P_{\text{diminui}}} + \frac{1}{P'_{\text{fixo}}}$$

A variação da distância focal é feita através dos músculos ciliares.

Quando o objeto se aproxima do olho, o raio de curvatura de suas faces diminui, ocasionando uma diminuição na distância focal.

### Ponto próximo (PP)

Quanto mais o objeto se aproximar do olho, maior será a compressão dos músculos ciliares sobre o cristalino. Haverá então uma distância do objeto ao olho para a qual os músculos ciliares realizam a máxima compressão de que são capazes. Essa posição do objeto é denominada ponto próximo.

Ponto próximo (PP) é a posição do objeto mais próxima do olho que ainda permite uma visão nítida.

Para um olho normal (olho emetropo), a distância do ponto próximo ao olho,  $d_{pp}$ , é de, aproximadamente, 25 cm. Se o objeto estiver a uma distância menor que a distância do ponto próximo, a imagem deixará de ser nítida, pois não mais recairá sobre a retina.

### Ponto remoto (PR)

Quanto mais o objeto se afasta do olho, menor a compressão exercida pelos músculos ciliares. A posição do objeto para a qual

os músculos ciliares estão relaxados é denominada ponto remoto, cuja distância ao olho é a distância máxima de visão distinta.

Ponto remoto (PR) é a posição do objeto mais afastada do olho que ainda permite uma visão nítida.

Para o olho normal, a distância do ponto remoto ao olho,  $d_{PR}$ , é infinita. Uma pessoa de visão normal enxerga uma paisagem, por exemplo, nitidamente, como se fosse uma bela fotografia.

### Zona de acomodação

Zona de acomodação é a região que vai do ponto próximo ao ponto remoto. Ver figura a seguir.

Para um objeto ser visualizado nitidamente, ele deverá estar na zona de acomodação.

A figura seguinte mostra essa região para um olho normal.

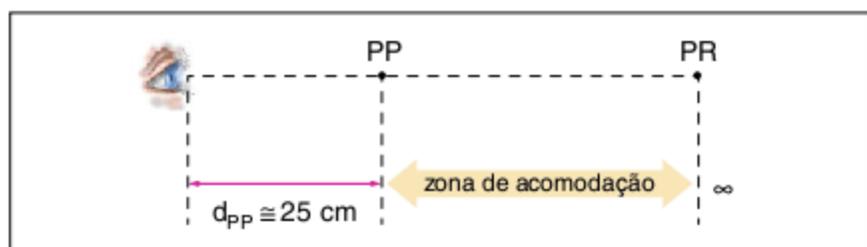


Fig. 18 Zona de acomodação visual.

### Exercício resolvido

**2** Uma pessoa consegue enxergar nitidamente objetos situados entre 0,50 m e 4,0 m dos seus olhos. Determine a amplitude de acomodação visual.

#### Resolução:

Vamos denominar  $V_1$  a vergência do olho para o objeto no ponto remoto ( $P_1 = PR$ ), aplicando a equação de Gauss:

$$V_1 = \frac{1}{F_1} = \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_1'}$$

$$V_1 = \frac{1}{PR} + \frac{1}{P_1'} \quad (I)$$

Vamos denominar  $V_2$  a vergência do olho para o objeto no ponto próximo ( $P_2 = PP$ ), aplicando a equação de Gauss:

$$V_2 = \frac{1}{F_2} = \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_2'}$$

$$V_2 = \frac{1}{d_{PP}} + \frac{1}{P_2'}$$

Como  $P_2' = P_1' = \text{constante}$ , temos que a amplitude de acomodação ( $a$ ), dada por  $a = V_2 - V_1$ , é:

$$a = \frac{1}{PP} + \frac{1}{P'} - \frac{1}{PR} - \frac{1}{P'}$$

$$a = \frac{1}{PP} - \frac{1}{PR}$$

Neste caso,  $PP = 0,50 \text{ m}$  e  $PR = 4,0 \text{ m}$ . Portanto:

$$a = \frac{1}{0,50} - \frac{1}{4,0}$$

$$a = 2,0 - 0,25$$

$$a = 1,75 \text{ di (amplitude de acomodação)}$$

## Defeitos da visão

Passaremos a estudar os mais comuns defeitos da visão.

### Miopia

A deficiência de um olho míope está na visualização de objetos distantes, ou seja, o seu ponto remoto (PR) não está no infinito, e sim a uma distância finita ( $d_{PR}$ ).

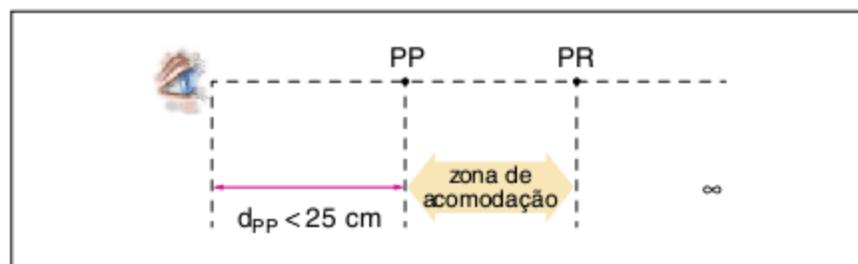


Fig. 19 O ponto remoto para o míope não é no infinito.

Isso ocorre pelo fato de a imagem do objeto distante (PO) recair aquém da retina.

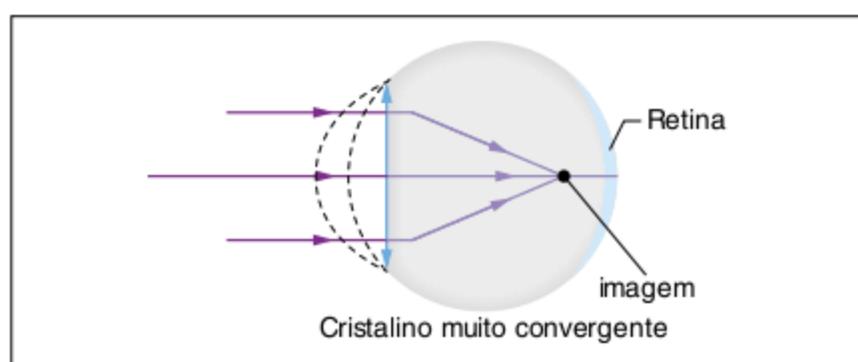


Fig. 20 Para o míope, a imagem é formada antes da retina.

Para corrigir esse defeito, devemos tomar o olho míope menos convergente. Para tanto, associamos a ele uma lente divergente.

A distância focal da lente corretiva ( $F_c$ ) da miopia é igual, em módulo, à distância do ponto remoto.

$$F_{\text{lente}} = -d_{PR}$$

O sinal negativo na expressão deve-se à convenção que atribui distâncias focais negativas às lentes divergentes.

## ATENÇÃO!

O fato de o ponto remoto (PR) do míope estar a uma distância finita, acarreta uma diminuição da distância do seu ponto próximo (PP).

## SAIBA MAIS

As pessoas geralmente usam lentes de contato por razões estéticas, mas, na verdade, elas oferecem mais vantagens que os óculos. Movendo-se com o olho, as lentes de contato não restringem o campo da visão, facilitam certos tipos de correção visual e contribuem para restaurar a visão normal de pessoas que não podem usar óculos, já que estes, às vezes, provocam distorções na imagem.

**Exercício resolvido**

**3** Uma pessoa míope, no qual o ponto remoto está situado a 40 cm do olho, deve usar óculos para corrigir seu defeito. Determine a distância focal e a vergência das lentes desses óculos.

**Resolução:**

A distância focal da lente deve ser igual, em módulo, à distância máxima de visão distinta do olho, mas com sinal contrário, pois a lente é divergente:

$$F_L = -PR$$

Nesse caso, o ponto remoto está a 40 cm, isto é,  $PR = 40 \text{ cm} = 0,40 \text{ m}$ .

$$F_L = -0,40 \text{ m}$$

A vergência da lente vale:

$$V_L = \frac{1}{F_L}$$

$$V_L = \frac{1}{-0,40}$$

$$V_L = -2,5 \text{ di}$$

**Hipermetropia**

A deficiência de um olho hipermetrope está na visualização de objetos próximos, ou seja, o seu ponto próximo (PP) está mais afastado do que o do olho normal,  $d_{pp} > 25 \text{ cm}$ .

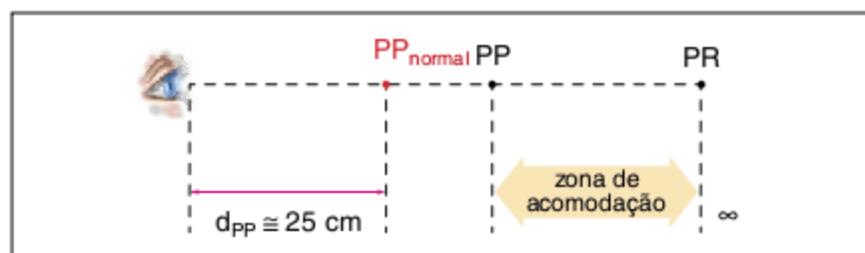


Fig. 21 Para o hipermetrope, o ponto próximo é maior que 25 cm.

No olho hipermetrope, a imagem de um objeto impróprio (PO) recai além da retina.

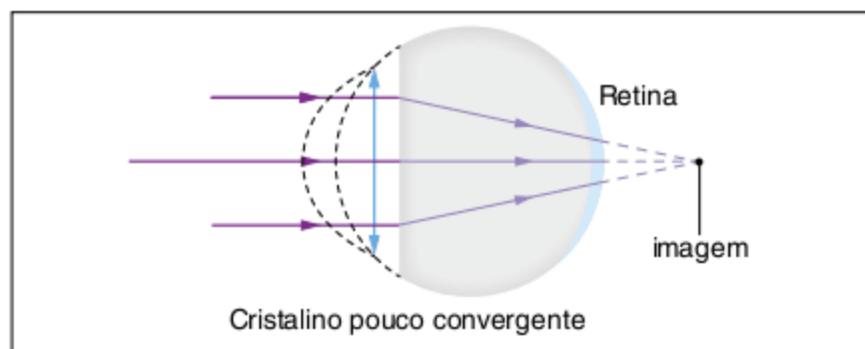


Fig. 22 Para o hipermetrope, a imagem é formada depois da retina.

Para corrigir esse defeito, devemos tornar o olho hipermetrope mais convergente, associando a ele uma lente convergente.

A lente corretiva deverá fornecer uma imagem, de um objeto colocado a 25 cm do olho, no ponto próximo (PP) do hipermetrope, ou seja, a uma distância  $d_{pp}$  do olho.

Assim, a distância focal da lente corretiva ( $F_c$ ) da hipermetropia é calculada através da equação de Gauss:

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{P'} = \frac{1}{F} \Rightarrow \frac{1}{25 \text{ cm}} - \frac{1}{d_{pp}} = \frac{1}{F_L}$$

O sinal negativo na expressão deve-se ao fato de a imagem fornecida pela lente corretiva ser virtual.

**Astigmatismo**

O astigmatismo ocorre devido a uma perda de simetria do globo ocular. A correção é feita com o uso de lentes cilíndricas.

**Presbiopia**

A presbiopia ou “vista cansada” é um defeito na visão devido à perda de flexibilidade dos músculos ciliares.

A correção da presbiopia é feita da mesma maneira que a da hipermetropia.

**LEITURA**

**Explicando a presbiopia**

Pesquisas desenvolvidas pelo oftalmologista americano Ronald Schachar, da Universidade do Texas, nos Estados Unidos, jogaram por terra a teoria do século passado segundo a qual o problema da presbiopia seria decorrência do enrijecimento do cristalino, a lente interna do olho, provocado pelo envelhecimento. Schachar demonstrou que, na verdade, há um crescimento progressivo do cristalino durante toda a vida da pessoa. A cada ano, ele fica 0,02 mm maior. Com isso, ocupa cada vez mais espaço dentro do olho e pressiona os músculos ciliares, dificultando a função deles que é a de alterar a forma do cristalino, de modo que mantenha nítida a imagem na retina. Com base nessa descoberta, o pesquisador americano criou uma técnica que consiste na introdução de quatro artefatos de acrílico na esclerótica, a parte branca do olho. Isso repuxa a película que recobre os olhos em milésimos de milímetros, o suficiente para que o cristalino possa expandir-se ou contrair-se novamente em 4 graus.

José Edward. Veja, out. 1998. (Adapt.).

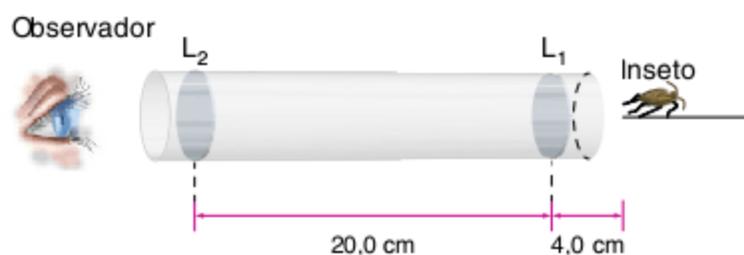
## Revisando

**1** Uma lupa é construída com uma lente convergente de 3 cm de distância focal. Para que um observador veja um objeto ampliado três vezes, qual a distância entre a lupa e o objeto? Faça, a seguir, um esquema representando o objeto, a lente e a imagem formada.

**2 FEI** Um projetor de *slides* encontra-se a 4,1 m da tela de projeção. Um *slide* de 35 mm de altura tem sua imagem projetada na tela com 1,4 m de altura.

- Qual a distância focal do instrumento?
- Faça um esquema que represente o objeto, a lente e a imagem formada.

**3 UFF (Adapt.)** A figura mostra um microscópio artesanal construído com um tubo de plástico PVC e duas lentes convergentes. As lentes  $L_1$  e  $L_2$  distam 20,0 cm uma da outra e têm distâncias focais  $F_1 = 3,0$  cm e  $F_2 = 10,0$  cm, respectivamente. Um inseto, colocado a 4,0 cm da lente  $L_1$ , é observado com esse microscópio.



Nessa situação, o observador vê o inseto com tamanho quantas vezes maior?

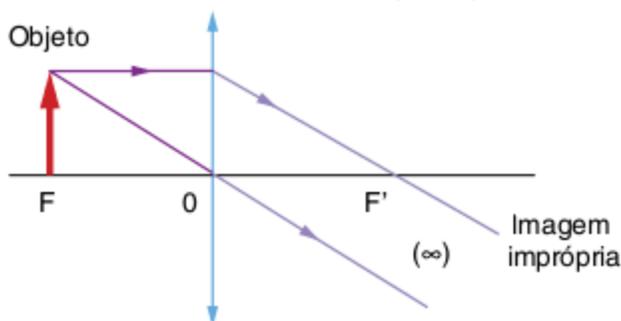
- 4 Ufes** Uma câmera fotográfica, com lente de distância focal  $f = 5,0$  cm, é usada para fotografar um objeto de 1,8 m de altura.
- Determine a distância do objeto à lente para que a imagem do objeto, no filme, tenha uma altura igual a 3,0 cm.
  - Quais as características da imagem formada no filme?
  - Faça um diagrama representando o objeto, a lente e a imagem.

- 5** Duas lentes de vidro, imersas no ar, estão associadas à justaposição. Sendo uma biconvexa e a outra bicôncava, de distâncias focais, em módulo, iguais a 20 cm e 50 cm, respectivamente. Determine em dioptrias:
- a vergência de cada lente.
  - a vergência resultante da associação.

## Exercícios propostos

### Instrumentos ópticos

- 1 Fuvest** Tem-se um objeto luminoso situado num dos focos principais de uma lente convergente. O objeto afasta-se da lente, movimentando-se sobre seu eixo principal.



Podemos afirmar que a imagem do objeto, à medida que ele se movimenta:

- cresce continuamente.
  - passa de virtual para real.
  - afasta-se cada vez mais da lente.
  - aproxima-se do outro foco principal da lente.
  - passa de real para virtual.
- 2 UFPA** Dispõe-se de duas lentes delgadas convergentes de distâncias focais  $F'$  e  $F''$ . Justapondo-se a duas lentes, é possível obter-se um sistema de distância focal:
- menor do que  $F'$  e  $F''$ .
  - maior do que  $F'$  e  $F''$ .
  - entre  $F'$  e  $F''$ .
  - igual a  $F'$ .
  - igual a  $F''$ .
- 3 Unimep** Duas lentes de vergência 8 di e  $-4$  di foram justapostas. A vergência e a distância focal da associação serão, respectivamente:
- 12 di e  $\frac{1}{12}$
  - 4 di e 0,25 m
  - 2 di e 0,50 m
  - $\frac{8}{3}$  di e  $\frac{3}{8}$  m
  - n.d.a.

**4** Classifique os instrumentos ópticos abaixo de acordo com o seguinte código:

O = Observação

P = Projeção

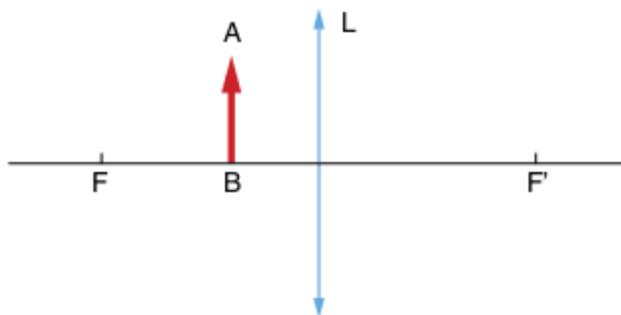
A = Ambos (Observação e Projeção)

- Lente convergente
- Lente divergente
- Lupa
- Máquina fotográfica
- Microscópio composto
- Luneta astronômica
- Projetor de *slide*
- Projetor de filme
- Olho humano
- Binóculo
- Retroprojetor

**5 UFRGS** Um objeto é observado através de uma lupa. Nesse caso, o tipo de lente usado, a posição correta do objeto e o tipo da imagem formada são, respectivamente:

- (a) convergente, entre a lente e o foco, real.
- (b) convergente, entre a lente e o foco, virtual.
- (c) convergente, além do foco, virtual.
- (d) divergente, entre a lente e o foco, virtual.
- (e) divergente, além do foco, real.

**6 Vunesp (Adapt.)** A figura a seguir mostra um objeto AB, uma lente convergente L, sendo utilizada como lupa (lente de aumento), e as posições de seus focos F e F'.



- a) Copie esta figura e, em seguida, localize a imagem A'B' do objeto, fornecida pela lente, traçando a trajetória de, pelo menos, dois raios incidentes, provenientes de A.
- b) A imagem obtida é real ou virtual? Justifique sua resposta.

**7 ITA** Um rapaz construiu uma máquina fotográfica tipo fole, usando uma lente divergente como objetiva. Ao tirar fotografias com essa máquina, verificará que, no filme:

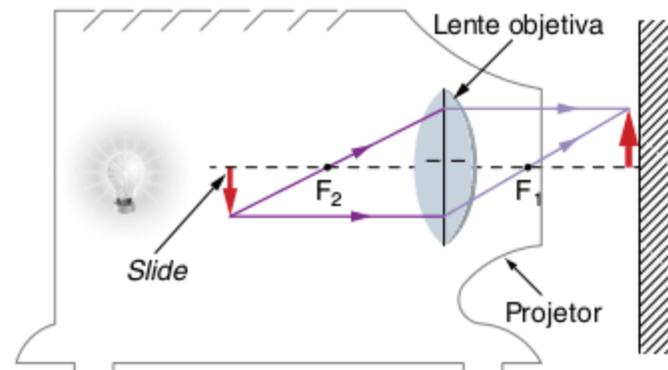
- (a) a imagem será sempre menor que o objeto.
- (b) a imagem será sempre maior que o objeto.
- (c) a imagem será maior que o objeto somente se a distância do objeto à lente for maior que  $2F$ .
- (d) a imagem será menor que o objeto somente se a distância do objeto à lente for maior que  $2F$ .
- (e) não aparece imagem alguma, por mais que se ajuste o fole.

**8** Quando um objeto se aproxima de uma câmara fotográfica, para que a imagem continue nítida no filme:

- (a) deve-se aumentar a distância do filme à lente.
- (b) deve-se diminuir a distância do filme à lente.
- (c) deve-se colocar o filme no foco principal da lente.
- (d) deve-se colocar o filme entre o foco-imagem e a lente.
- (e) nenhuma das anteriores.

**9 UFC** A objetiva de uma certa câmara fotográfica contém uma lente delgada convergente de distância focal de 15 cm. A câmara usa chapas fotográficas (filmes) de 12 cm e deve ser utilizada para fotografar telas colocadas a uma distância de 1,2 m da objetiva. Nessas condições, determine, em centímetros, o comprimento do lado da maior tela quadrada que pode ser totalmente fotografada.

**10 PUC-SP** Um projetor de *slides* deve projetar na tela uma imagem ampliada 24 vezes. Se a distância focal da lente objetiva do projetor é de 9,6 cm, a que distância do *slide* deve ser colocada a tela?



- (a) 250 cm
- (b) 240 cm
- (c) 10 cm
- (d) 230 cm
- (e) n.d.a.

**11 Cesgranrio** O sistema óptico de um microscópio composto é constituído de duas lentes, a ocular e a objetiva. Podemos afirmar que:

- (a) ambas são divergentes.
- (b) a ocular é divergente e a objetiva convergente.
- (c) a ocular é convergente e a objetiva divergente.
- (d) ambas as lentes são convergentes.
- (e) as duas lentes têm convergências negativas.

**12 ITA** Dois estudantes se propõem a construir cada um deles uma câmara fotográfica simples, usando uma lente convergente como objetiva e colocando-a numa caixa fechada de modo que o filme esteja no plano focal da lente. O estudante A utilizou uma lente de distância focal igual a 4,0 cm e o estudante B uma lente de distância focal igual a 1,0 m. Ambos foram testar suas câmaras fotografando um objeto situado a 1,0 m de distância das respectivas objetivas. Desprezando-se todos os outros efeitos (tais como aberrações das lentes), o resultado da experiência foi:

- I. que a foto do estudante A estava mais "em foco" que a do estudante B.
- II. que ambas estavam igualmente "em foco".
- III. que as imagens sempre estavam entre o filme e a lente.

Neste caso você concorda que:

- (a) apenas a afirmativa II é verdadeira.
- (b) somente I e III são verdadeiras.
- (c) somente III é verdadeira.
- (d) somente a afirmativa I é verdadeira.
- (e) não é possível obter uma fotografia em tais condições.

**13 UMC-SP** Dentre os seguintes instrumentos de óptica, aquele que dá imagem final real é:

- (a) o microscópio simples (lupa).
- (b) o microscópio composto.
- (c) a luneta terrestre.
- (d) o telescópio.
- (e) a máquina fotográfica.

### Óptica da visão

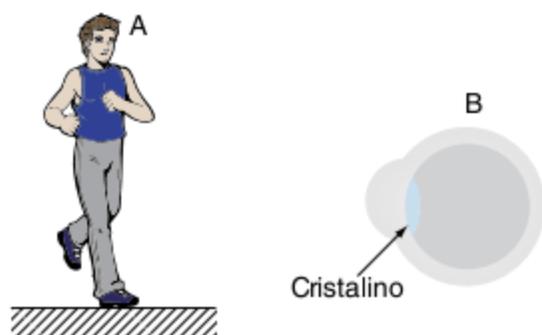
**14 FOC** No olho humano, a íris possui um orifício chamado pupila, cujo diâmetro varia como um diafragma de máquina fotográfica. A variação de diâmetro da pupila tem por finalidade:

- (a) proteger a íris.
- (b) focalizar o objeto que se quer enxergar.
- (c) permitir a percepção de diferentes cores.
- (d) controlar a entrada de luz no olho.

**15 Fuvest** Na formação das imagens na retina da vista humana normal, o cristalino funciona como uma lente:

- (a) convergente, formando imagens reais, direitas e diminuídas.
- (b) divergente, formando imagens reais, direitas e diminuídas.
- (c) convergente, formando imagens reais, invertidas e diminuídas.
- (d) divergente, formando imagens virtuais, direitas e ampliadas.
- (e) convergente, formando imagens virtuais, invertidas e diminuídas.

**16 Fatec** Na figura, o homem A é visto pelo homem B, representado pelo olho em corte. À medida que A se aproxima de B, e supondo que o olho é normal:



- (a) a curvatura do cristalino aumenta para aumentar a distância focal.
- (b) a curvatura do cristalino diminui para diminuir a distância focal.
- (c) a curvatura do cristalino não se altera porque o olho é normal.
- (d) a curvatura do cristalino aumenta para diminuir a distância focal.
- (e) a curvatura do cristalino diminui para aumentar a distância focal.

**17 Vunesp** Uma pessoa apresenta deficiência visual, conseguindo ler somente se o livro estiver a uma distância de 75 cm. Qual deve ser a distância focal dos óculos apropriados para que ela consiga ler com o livro colocado a 25 cm de distância?

**18 PUC-SP** A miopia é um defeito da visão onde a imagem de um objeto ao longe se forma na frente da retina. Uma pessoa portadora dessa deficiência terá sua visão corrigida usando óculos cujas lentes são:

- (a) divergentes.
- (b) plano-convexas.
- (c) convergentes.
- (d) biconvexas.
- (e) cilíndricas.

**19 UFCG** Uma pessoa míope não consegue ver nitidamente um objeto se este estiver localizado além de um ponto denominado ponto remoto ou ponto distante. Neste caso, a imagem do objeto não seria formada na retina, como ocorre em um olho normal, mas em um ponto entre o cristalino (lente convergente) e a retina. A expressão “grau” de uma lente de óculos é bastante usual na linguagem cotidiana. No entanto, os oftalmologistas definem-na como dioptria, que corresponde numericamente ao inverso da distância focal da lente, medida em metros. Em um olho normal, o ponto remoto localiza-se no infinito e a distância entre o cristalino e a retina é de aproximadamente 2 cm. Para um olho míope cujo ponto remoto vale 200 cm, o “grau” adequado para a lente dos óculos será:

- (a) 2 dioptrias (lente divergente).
- (b) 1 dioptria (lente divergente).
- (c) 0,5 dioptria (lente divergente).
- (d) 2 dioptrias (lente convergente).
- (e) 1 dioptria (lente convergente).

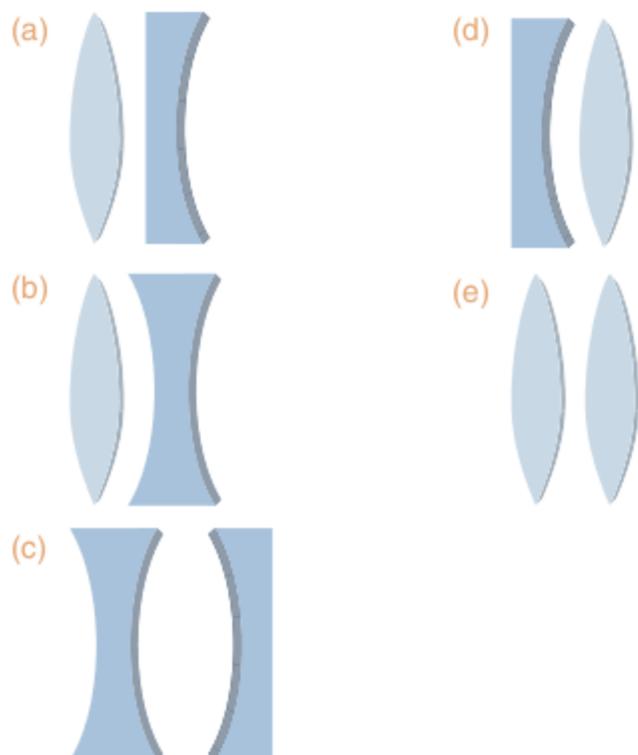
**20 FMPA-MG** A receita de óculos para um míope indica que ele deve usar “lentes de 2,0 graus”, isto é, o valor da convergência das lentes deve ser 2,0 dioptrias. Podemos concluir que as lentes desses óculos devem ser:

- (a) convergentes, com  $F = 2,0$  m.
- (b) convergentes, com  $F = 50$  cm.
- (c) divergentes, com  $F = 2,0$  m.
- (d) divergentes, com  $F = 20$  cm.
- (e) divergentes, com  $F = 50$  cm.

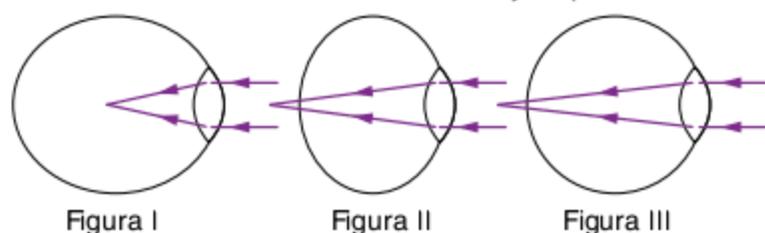
**21 Unitau** A hipermetropia é um defeito do olho que deve ser corrigido com uso de lentes:

- (a) esféricas convergentes.
- (b) esféricas divergentes.
- (c) cilíndricas.
- (d) parabólicas.
- (e) nenhuma das anteriores.

**22 UFU-MG** Um vestibulando sofre de miopia e outro de hipermetropia. As formas de suas lentes corretoras podem ser, respectivamente:



**23 UFV** A figura I ilustra um olho míope e a figura II um olho hipermetrope, ambos focalizando um objeto no infinito. A correção desses dois defeitos de visão é feita pelo uso de óculos (ou lentes de contato) convergentes ou divergentes, conforme o caso (não necessariamente em correspondência com a sequência das figuras). Outro defeito da visão, que surge com a idade, é a presbiopia (figura III), que consiste na incapacidade do cristalino de focalizar na retina um objeto próximo do olho.



Se uma pessoa míope ou hipermetrope se tornar também presbiopo, então a lente que usa deverá ser alterada para:

- (a) menos divergente, se hipermetrope.
- (b) mais convergente, se míope.
- (c) mais divergente, se hipermetrope.
- (d) menos convergente, se míope.
- (e) menos divergente, se míope.

Leia o texto a seguir para responder às questões 24 e 25.

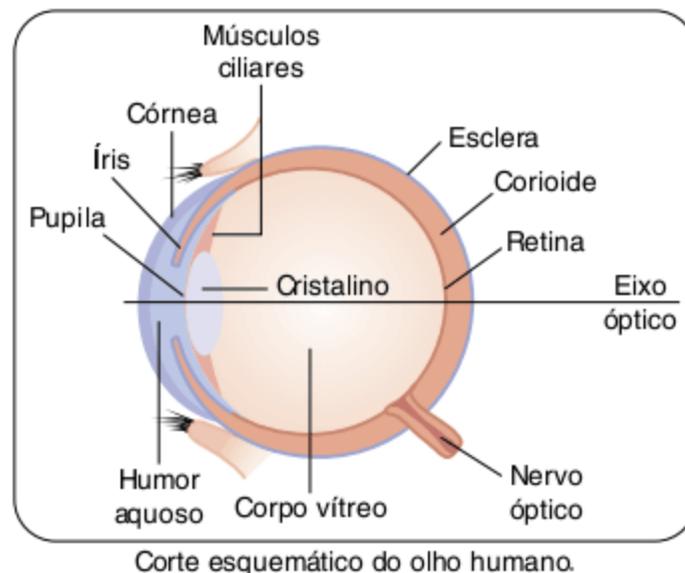
De maneira simplificada, podemos considerar o olho humano como constituído de uma lente biconvexa, denominada cristalino, situada na região anterior do globo ocular (figura a seguir). No fundo deste globo está localizada a retina, que funciona como anteparo sensível à luz. As sensações luminosas, recebidas pela retina, são levadas ao cérebro pelo nervo ótico. O olho humano sem problemas de visão é capaz de se acomodar, variando sua distância focal, de modo que veja nitidamente objetos muito afastados até aqueles situados a uma distância mínima, aproximadamente a 25 cm.

Antonio Máximo & Beatriz Alvarenga. Física. 5ª ed. v. 2 São Paulo: Scipione, 2000, p. 279. (Adapt.).

“(…) Um sistema óptico tão sofisticado como o olho humano também sofre pequenas variações ou imperfeições em sua estrutura,

que ocasionam defeitos de visão. Até há pouco tempo não havia outro recurso para corrigir esses defeitos senão acrescentar a esse sistema uma ou mais lentes artificiais – os óculos.”

Alberto Gaspar. Física. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2004, p. 311.



**24 UEPB** Acerca do assunto, em relação ao olho humano e defeitos na vista, analise as proposições a seguir, escrevendo V ou F, conforme sejam verdadeiras ou falsas, respectivamente.

- Na hipermetropia, os raios de luz paralelos que incidem no globo ocular são focalizados depois da retina, e sua correção é feita com lentes convergentes.
- Na miopia, os raios de luz paralelos que incidem no globo ocular são focalizados antes da retina, e a sua correção é feita com lentes divergentes.
- Na formação das imagens na retina da vista humana normal, o cristalino funciona como uma lente convergente, formando imagens reais, invertidas e diminuídas.
- Se uma pessoa míope ou hipermetrope se torna também presbiopo, então a lente que usa deverá ser alterada para menos divergente, se hipermetrope.

Assinale a alternativa que corresponde à sequência correta:

- (a) V, F, V, V.
- (b) V, V, F, V.
- (c) F, V, V, F.
- (d) V, V, V, F.
- (e) V, V, F, F.

**25 UEPB** Ainda acerca do assunto tratado no texto, resolva a seguinte situação-problema: A hipermetropia se deve ao encurtamento do globo ocular em relação à distância focal do cristalino. Isso causa dificuldade para enxergar objetos próximos e principalmente para leitura de textos. Uma pessoa, ao perceber que a menor distância focal em que consegue ler um livro é 50,0 cm, foi a um oculista que, percebendo que ela estava com hipermetropia, receitou lentes de correção para o defeito de sua visão, a fim de que ela pudesse ler livros a uma distância mínima confortável de 25,0 cm de sua vista. Qual é a vergência, em dioptrias (em graus) dessa lente, capaz de corrigir esse defeito?

- (a) 3,0
- (b) 2,0
- (c) 2,5
- (d) 4,0
- (e) 3,5

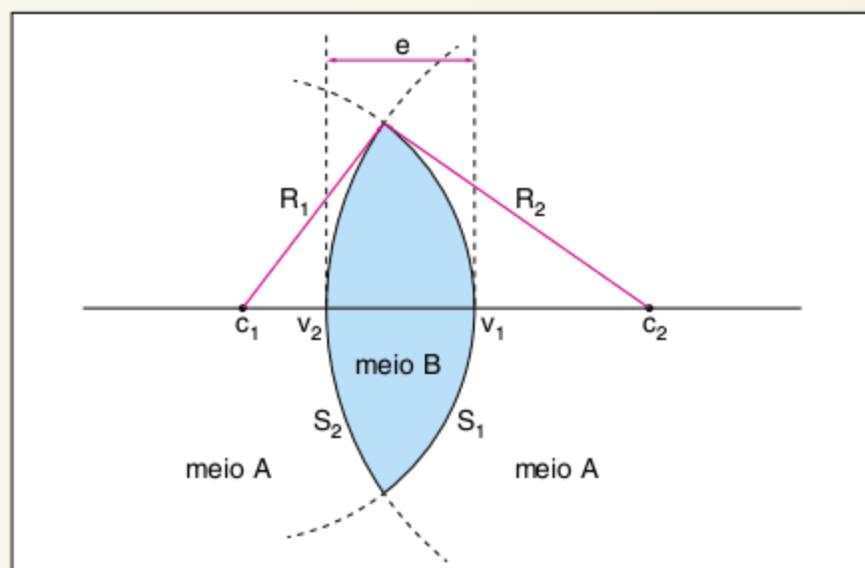
# TEXTOS COMPLEMENTARES

## Equação dos fabricantes de lentes

Ficou claro ao longo do nosso estudo a analogia existente entre as lentes delgadas e os espelhos esféricos. No entanto, há uma diferença no que se refere à distância focal. Enquanto nos espelhos ela depende apenas do raio de curvatura  $F = \frac{R}{2}$ , nas lentes ela depende dos raios de curvatura de suas faces e também dos índices de refração do meio externo e do material de que são feitas as lentes.

A equação que relaciona a distância focal, os raios de curvatura de cada face e os referidos índices de refração é a chamada equação dos fabricantes de lentes e se escreve:

$$\frac{1}{F} = (n_{B,A} - 1) \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$



onde:

$$n_{B,A} = \frac{n_B}{n_A} = \frac{n_{\text{lente}}}{n_{\text{meio}}}$$

$R_1$  = raio de curvatura da face  $S_1$

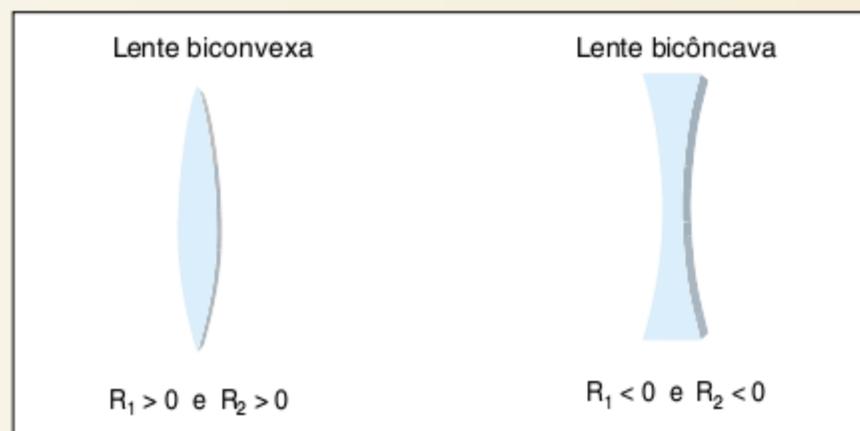
$R_2$  = raio de curvatura da face  $S_2$

Devem ser obedecidas as seguintes convenções de sinais:

Face convexa  $\rightarrow R > 0$ .

Face côncava  $\rightarrow R < 0$ .

Exemplos:



## Visão em cores

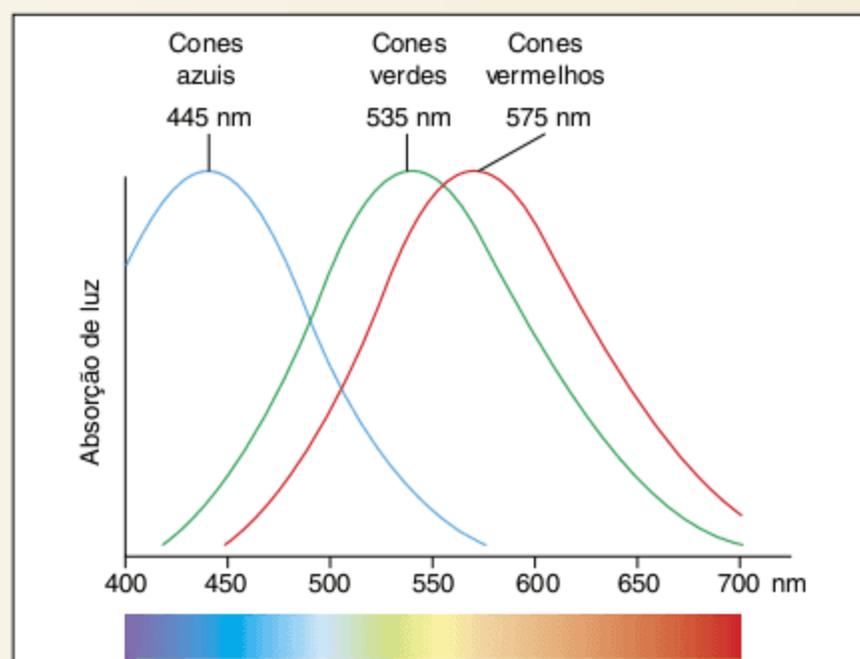
Na retina existem dois tipos de fotorreceptores, cones e bastonetes. Os cones são as células responsáveis pela visão em cores, enquanto os bastonetes são responsáveis pelo contraste preto e branco.

Existem condições que afetam os cones da retina, provocando "cegueira às cores". O caso mais raro é a falta de três tipos de cones, fazendo com que o portador veja tudo em preto, branco e tons de cinza, a chamada visão acromática. Em certos casos, há a falta de um dos tipos de cone, fazendo com que a pessoa não distinga uma ou mais cores. Em outros casos, a pessoa possui os três tipos de cone, mas o funcionamento de um dos tipos não é normal, o que causa problemas na distinção de certas tonalidades.

A falta de cones sensíveis ao vermelho, denominada *protanopia*, faz com que a pessoa veja vermelho como verde. A falta de cones sensíveis ao verde, denominada *deuteranopia*, faz com que a pessoa também não distinga o vermelho do verde. A falta de cones sensíveis ao azul, denominada *tritanopia*, faz com que a pessoa tenha dificuldades em distinguir cores na faixa azul-amarelo.

Os casos mais comuns de cegueira às cores (protanopia e deuteranopia), conhecidos popularmente como *daltonismo*, costumam ser chamados de cegueira para vermelho e verde, pelo fato de seus portadores não distinguirem essas cores. No século XIX,

antes de a cegueira às cores ser totalmente compreendida, diversos casos de acidentes ferroviários foram causados por condutores de trens incapazes de distinguir os sinais verdes dos vermelhos. Com exceção desses casos, a cegueira às cores causa poucos problemas a seus portadores e muitas vezes nem chega a ser detectada.



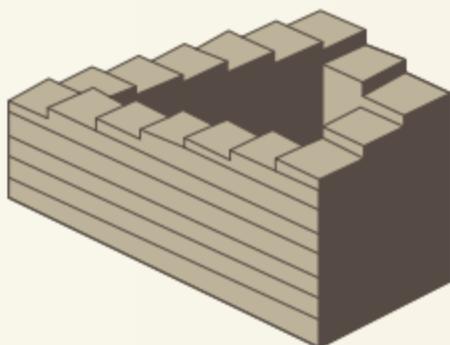
## Ilusões da visão

Em certas condições, o mecanismo de visão tem dificuldade para avaliar distâncias e ângulos, provocando frequentemente conclusões errôneas. São as ilusões de óptica.

- I. Os arcos  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{CD}$  são idênticos!



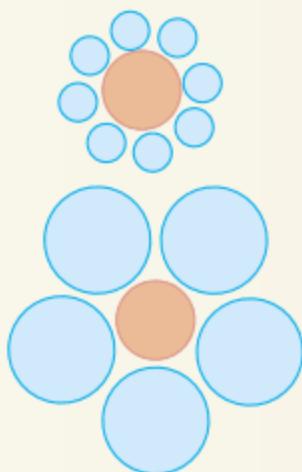
- II. Esta escada desce, desce, desce, mas nunca sobe! Isso é possível?



- III. A linha horizontal de cima parece maior não é mesmo? Pura ilusão, elas têm o mesmo tamanho.



- IV. Os círculos centrais têm o mesmo diâmetro, incrível né?

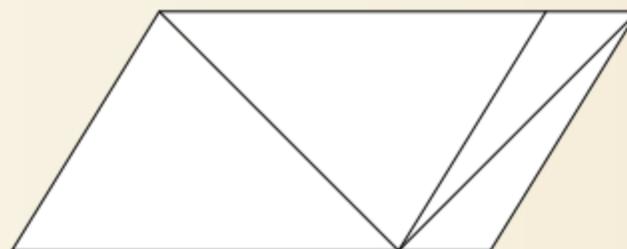


## Olho eletrônico

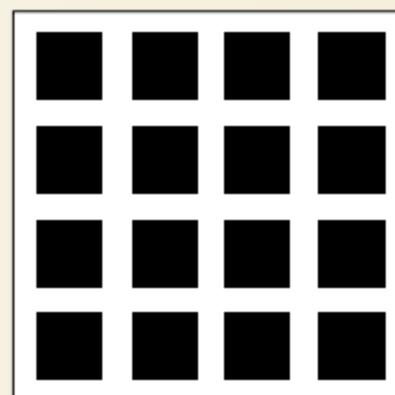
Em uma das cenas mais memoráveis de *O Exterminador do Futuro* (1984), o androide vivido por Arnold Schwarzenegger remove um globo ocular que acabara de ser destruído, atira a peça em uma pia e deixa no lugar apenas os circuitos eletrônicos, que esconde com óculos escuros.

Olhos biônicos ou retinas artificiais como as vistas em diversos filmes de ficção científica – *Blade Runner* (1982) é outro famoso exemplo – estão mais próximas de se tornarem realidade. O motivo é a conquista de um grupo de pesquisadores nos Estados Unidos, que desenvolveu uma câmera eletrônica que muito lembra o olho humano.

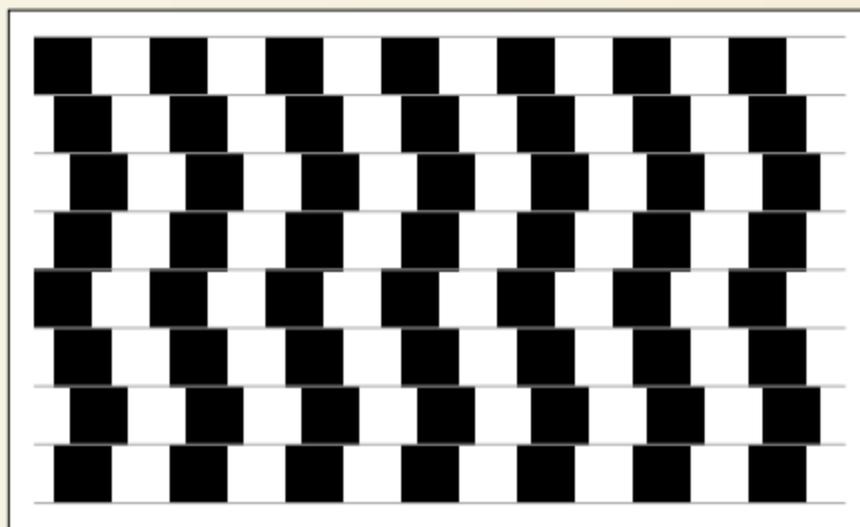
- V. A primeira diagonal parece bem menor que a segunda. Pura ilusão, elas são idênticas.



- VI. Neste desenho, tem-se a nítida impressão de ver “manchas pretas” na região branca entre os quadrados pretos. Estas manchas não existem!



- VII. Estas linhas estão retas ou inclinadas? São retas!



Todos os animais têm sistemas de captação de imagem curvos, mas os dispositivos artificiais, como câmeras digitais, empregam superfícies planas. No novo olho eletrônico, a captação é feita por uma superfície curva, como a da retina. A novidade foi descrita em artigo na edição de 7 de agosto de 2008 da *Nature*.

Segundo a revista, o dispositivo simplificará os componentes ópticos usados em câmeras minúsculas e a abordagem de produção de superfícies eletrônicas curvas poderá ter implicações no desenvolvimento de próteses e de dispositivos de monitoramento biológico.

As tecnologias eletrônicas de captação de imagem existentes foram desenvolvidas para uso em materiais semicondutores rígidos, como folhas de vidro ou plástico, que são naturalmente planas. Há duas décadas que cientistas têm tentado desenvolver sistemas em superfícies curvas, mas sem sucesso.

John Rogers, da Universidade de Illinois, e colegas usaram materiais tradicionais de fabricação de sistemas optoeletrônicos em superfícies bidimensionais, mas com a adoção de *designs* inco-muns, que tornaram possível que o dispositivo pudesse ser comprimido e esticado.

Ou seja, os pesquisadores mostraram que *layouts* planos podem ser transformados em formas curvas, as quais – no caso de sistemas de captação de imagem – permitem ângulos de visão

maiores, dispositivos de tamanhos mais compactos e menos distorção nas imagens produzidas.

“Algumas das mais empolgantes áreas para aplicação no futuro envolvem a integração íntima de eletrônicos com o corpo humano, de modos inconcebíveis com as tecnologias atuais. Estamos trabalhando ativamente para explorar possibilidades em monitores de saúde, dispositivos protéticos e sistemas terapêuticos”, disse Rogers.

O artigo *A hemispherical electronic eye camera based on compressible silicon optoelectronics*, de John Rogers e outros, pode ser lido por assinantes da *Nature* em [www.nature.com](http://www.nature.com).

Disponível em: <[www.agencia.fapesp.br/materia/9243/divulgacao-cientifica/olhoeletronico.htm](http://www.agencia.fapesp.br/materia/9243/divulgacao-cientifica/olhoeletronico.htm)>. Agência Fapesp, ago. 2008.

## RESUMINDO

Os **instrumentos ópticos** podem ser classificados como instrumentos de observação e projeção.

Nos **instrumentos de observação** (lupas, lunetas, telescópios, microscópios) a imagem formada é virtual, logo, só pode ser observada através do instrumento.

- **Lupa** – composta de uma lente convergente.

**Objeto** – entre o foco e o centro óptico da lente.

**Imagem** – virtual, direita e maior.

- **Microscópio** – composto de uma associação de duas lentes convergentes coaxiais, denominadas objetiva (lente que fica próxima do objeto) e ocular (lente que fica próxima do olho).

– **Lente objetiva**

**Objeto** – depois do foco.

**Imagem** – real, invertida e maior.

– **Lente ocular**

**Objeto** – entre o foco e a lente.

**Imagem** – virtual, invertida e maior.

Aumento linear transversal:

$$A = \frac{l_1}{o} \cdot \frac{l_2}{l_1} = \frac{l_2}{o}$$

- **Luneta astronômica** – composta por duas lentes convergentes coaxiais (objetiva e ocular).

– **Lente objetiva**

**Objeto** – no infinito.

**Imagem** – real, invertida e sobre o foco.

– **Lente ocular**

**Objeto** – entre o foco e a lente.

**Imagem** – virtual e invertida.

Aumento angular:

$$A = \frac{F_{\text{objetiva}}}{F_{\text{ocular}}}$$

- **Binóculo** – constituído de duas lunetas, cada uma com duas lentes (objetiva e ocular) e um sistema de prismas.

**Objeto** – no infinito.

**Imagem** – virtual, direita e maior.

Imagens reais e projetáveis são observadas em instrumentos de projeção.

- **Máquina fotográfica** – composta de uma lente convergente (objetiva).

**Objeto** – depois do foco.

**Imagem** – real e invertida.

- **Retroprojektor** – composto de uma lente convergente (objetiva) e um espelho plano.  
**Objeto** – entre o foco e o ponto antiprincipal (antifoco).  
**Imagem** – real, invertida e maior.

○ **globo ocular** humano assemelha-se a uma filmadora, ou mesmo a uma máquina fotográfica de grande sofisticação.

Os meios transparentes do globo ocular (córnea, humor aquoso, cristalino e humor vítreo) têm, no seu conjunto, função correspondente à da lente objetiva convergente da câmera, formando uma imagem real, invertida e menor sobre a retina. A imagem deve cair sempre sobre a retina e a distância focal deve assumir um valor conveniente para cada posição do objeto. Quando o objeto se aproxima do olho, diminuindo o raio de curvatura de suas faces, há uma diminuição na distância focal.

A posição do objeto mais próxima do olho, que ainda permite uma visão nítida, é chamada **ponto próximo** (PP). Para um olho normal (olho emetropo), a distância do ponto próximo ( $d_{pp}$ ) ao olho é de aproximadamente 25 cm.

A posição do objeto mais afastada do olho, que ainda permite uma visão nítida, é chamada **ponto remoto** (PR). Para um olho normal, a **distância do ponto remoto** ( $d_{pr}$ ) ao olho é infinita.

Os problemas de visão mais comuns são:

- **Miopia** – PR não está no infinito. A imagem de um objeto distante é formada antes da retina. Uma lente divergente deve ser associada ao olho para corrigir o problema.

$$F_{\text{lente}} = -d_{PR}$$

- **Hipermetropia** –  $d_{pp} > 25$  cm. A imagem de um objeto impróprio é formada além da retina. Uma lente convergente deve ser associada ao olho para corrigir o problema.

$$\frac{1}{25 \text{ cm}} - \frac{1}{d_{pp}} = \frac{1}{F_{\text{lente}}}$$

## ■ QUER SABER MAIS?



### SITES

- Formação da imagem no olho (olho normal, miopia e hipermetropia)  
[www.ideiasna caixa.com/laboratoriovirtual/pequisaOptica03olho.html](http://www.ideiasna caixa.com/laboratoriovirtual/pequisaOptica03olho.html)
- Instrumentos ópticos  
[www.if.usp.br/gref/optica/optica3.pdf](http://www.if.usp.br/gref/optica/optica3.pdf)
- Telescópios refratores e refletores  
<http://astro.if.ufrgs.br/telesc/node2.htm>
- Projeto Telescópios na Escola  
<http://telescopiosnaescola.pro.br/>
- Telescópio refrator (em inglês)  
[www.walter-fendt.de/ph14e/refractor.htm](http://www.walter-fendt.de/ph14e/refractor.htm)
- Óptica – curiosidades (luz negra, hologramas, daltonismo, visão em 3D)  
<http://educar.sc.usp.br/optica/curiosid.htm#ilusao>
- Lentes justapostas  
[www.ciencia.ao.usp.br/tudo/exibir.php?midia=txt&cod=\\_lentesjustapostas77274](http://www.ciencia.ao.usp.br/tudo/exibir.php?midia=txt&cod=_lentesjustapostas77274)

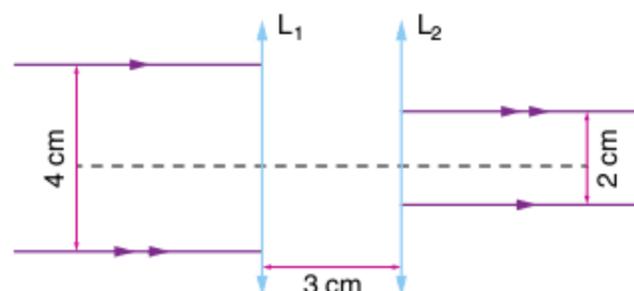
## Exercícios complementares

### Instrumentos ópticos

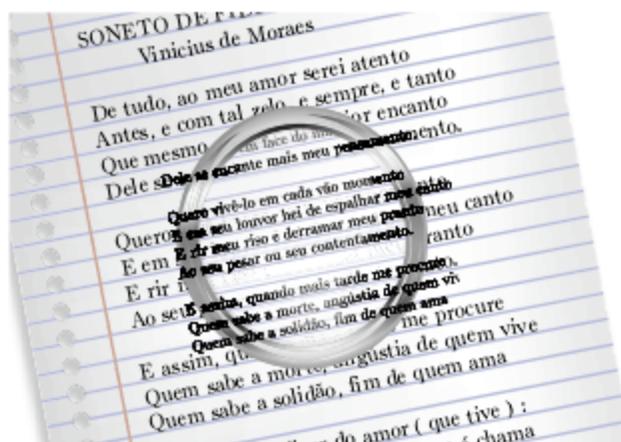
**1 UEL** Uma associação de lentes delgadas justapostas é formada por duas lentes. Uma delas é convergente, de distância focal igual a  $F$ . A distância focal da associação é  $2F$ . Qual o tipo e a distância focal ( $x$ ) da segunda lente?

- Divergente;  $|x| = F$
- Convergente;  $|x| > F$
- Divergente;  $|x| \neq F$
- Convergente;  $x < F$
- Convergente;  $x = F$

**2** Na associação a seguir, calcule as distâncias focais ( $f_1$  e  $f_2$ ) das lentes delgadas ( $L_1$  e  $L_2$ ).



**3 Fuvest** Uma pessoa segura uma lente delgada junto a um livro, mantendo seus olhos aproximadamente a 40 cm da página, obtendo a imagem indicada na figura.



Em seguida, sem mover a cabeça ou o livro, vai aproximando a lente de seus olhos. A imagem, formada pela lente, passará a ser:

- (a) sempre direita, cada vez menor.
- (b) sempre direita, cada vez maior.
- (c) direita cada vez menor, passando a invertida e cada vez menor.
- (d) direita cada vez maior, passando a invertida e cada vez menor.
- (e) direita cada vez menor, passando a invertida e cada vez maior.

**4 ITA** O sistema de lente de uma câmera fotográfica pode ser entendido como uma fina lente convergente de distância focal igual a 25,0 cm. A que distância da lente ( $P'$ ) deve estar o filme para receber a imagem de uma pessoa sentada a 1,25 m da lente?

- (a) 8,4 cm
- (b) 31,3 cm
- (c) 12,5 cm
- (d) 16,8 cm
- (e) 25,0 cm

**5 Cesgranrio** A objetiva de uma máquina fotográfica tem uma distância focal de 5,0 cm. Para tirarmos duas fotografias nítidas, uma de um objeto no infinito e outra de um objeto a 1,0 m de distância, as distâncias do centro óptico da objetiva ao filme devem ser, respectivamente:

- (a) 5,0 cm e 4,7 cm.
- (b) 5,0 cm e 5,0 cm.
- (c) 2,5 cm e 5,0 cm.
- (d) 10 cm e 5,0 cm.
- (e) 5,0 cm e 5,3 cm.

**6 Cesgranrio** Dispondo de três lentes,  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ , um estudante deseja construir um microscópio composto com apenas duas lentes (uma objetiva e a outra ocular).

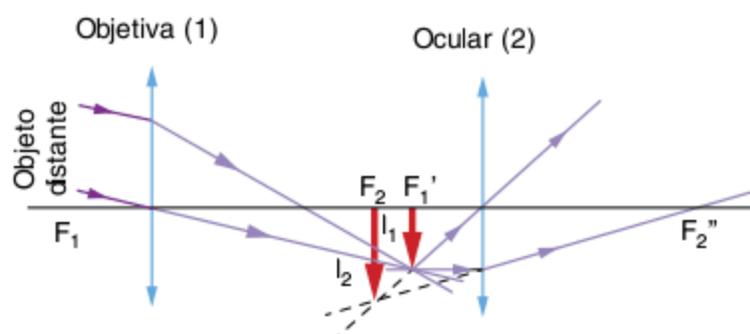
As características das três lentes disponíveis são:

Lente	Tipo	Distância focal
$L_1$	Convergente	+ 2,0 cm
$L_2$	Convergente	+ 10,0 cm
$L_3$	Divergente	- 5,0 cm

Escolha, dentre as opções abaixo, a objetiva e a ocular que devem ser utilizadas.

	Objetiva	Ocular
(a)	$L_1$	$L_2$
(b)	$L_1$	$L_3$
(c)	$L_2$	$L_1$
(d)	$L_2$	$L_3$
(e)	$L_3$	$L_1$

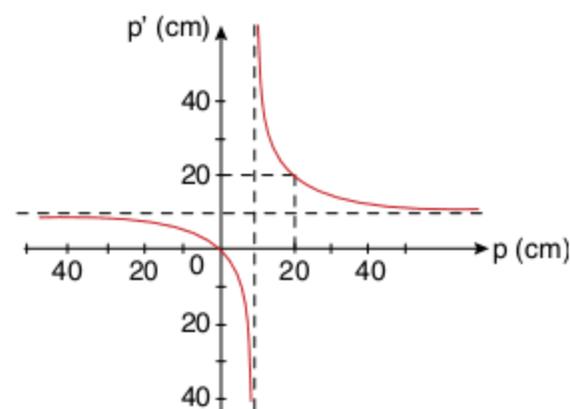
**7 Puccamp** O esquema a seguir mostra a formação da imagem em uma luneta astronômica.



Numa certa luneta, as distâncias focais da objetiva e da ocular são de 60 cm e 30 cm, respectivamente, e a distância entre elas é de 80 cm. Nessa luneta, a imagem final de um astro distante se formará a:

- (a) 30 cm da objetiva.
- (b) 30 cm da ocular.
- (c) 40 cm da objetiva.
- (d) 60 cm da objetiva.
- (e) 60 cm da ocular.

**8 Unesp 2012** Em um experimento didático de óptica geométrica, o professor apresenta aos seus alunos o diagrama da posição da imagem conjugada por uma lente esférica delgada, determinada por sua coordenada  $p'$ , em função da posição do objeto, determinada por sua coordenada  $p$ , ambas medidas em relação ao centro óptico da lente.



Analise as afirmações.

- I. A convergência da lente utilizada é 5 di.
- II. A lente utilizada produz imagens reais de objetos colocados entre 0 e 10 cm de seu centro óptico.
- III. A imagem conjugada pela lente a um objeto linear colocado a 50 cm de seu centro óptico será invertida e terá  $\frac{1}{4}$  da altura do objeto.

Está correto apenas o contido em:

- (a) II.
- (b) III.
- (c) I e II.
- (d) I e III.
- (e) II e III.

**9 UFPR** Com base no estudo das lentes na óptica geométrica, é correto afirmar:

- A máquina fotográfica, assim como o olho humano, recebe a imagem através de um orifício que regula a intensidade das cores separadamente. Na máquina fotográfica, esse orifício recebe o nome de diafragma.
- O escritor inglês H.G. Wells escreveu o livro de ficção *O Homem Invisível*, cujo personagem não podia ser visto pelas pessoas. Uma forma possível de observá-lo poderia ser através de uma câmera ou telescópio sensíveis ao mesmo espectro eletromagnético visível ao olho humano.
- Num telescópio, podemos observar um objeto muito distante, pois a imagem formada pela lente objetiva – de grande distância focal – fica posicionada sobre o seu foco imagem, comportando-se como objeto para a lente ocular – de menor distância focal.
- Num microscópio composto, uma convergente de distância focal da ordem de milímetros, denominada objetiva porque está próxima ao objeto, é associada a uma segunda lente, divergente, denominada ocular porque está próxima ao olho, que funciona como lupa.
- Num microscópio simples, também chamado de lupa, a imagem de um objeto colocado à frente da lente, entre o foco e o vértice, é real e maior que o objeto.

## Óptica da visão

**10 Unitau** Lentes bifocais com distâncias focais 40 cm e -300 cm são prescritas a um paciente.

- Para que serve cada uma das partes dessa lente?
- Descreva a localização e calcule a convergência de cada uma dessas lentes.
- Determine os pontos próximo e distante do olho do paciente sem os óculos. Supor que o ponto próximo para o olho normal tenha distância igual a 30 cm.

**11 PUC-MG** Na formação das imagens na retina da visão humana, tendo em vista uma pessoa com boa saúde visual, o cristalino funciona como uma lente:

- convergente, formando imagens reais, invertidas e diminuídas.
- convergente, formando imagens reais, diretas e diminuídas.
- divergente, formando imagens virtuais, invertidas e diminuídas.
- divergente, formando imagens reais, diretas e diminuídas.

**12 EMC-RJ** O cristalino funciona como lente biconvexa que tem a propriedade de alterar a sua convergência, de modo que a imagem se forme sempre à distância de 16 mm do centro óptico. Quando um objeto visto com nitidez a 10 m se aproxima até 25 cm do centro óptico, isso requer, para conservar a nitidez da imagem, que o cristalino altere sua convergência:

- aumentando-a de 0,4 di.
- diminuindo-a de 0,4 di.
- aumentando-a de 3,9 di.
- diminuindo-a de 3,9 di.
- nenhuma das respostas anteriores.

**13 FMSA-SP** Uma pessoa, para ler um jornal, precisa colocá-lo à distância de 50 cm; se quiser lê-lo à distância de 25 cm, deverá utilizar óculos com lentes esféricas de distância focal:

- 50 cm
- 25 cm
- 50 cm
- 25 cm
- 20 cm

**14 Uece** Aline, em 1980, usava óculos para correção de miopia, com lentes divergentes de 2,0 dioptrias; em 1985, teve que passar a utilizar outras, de 2,5 dioptrias. Logo, no período referido (1980 a 1985), as lentes tiveram sua distância focal, em módulo:

- reduzida em 10 cm.
- aumentada em 10 cm.
- reduzida em 0,5 cm.
- aumentada em 0,5 cm.

**15 Unicamp** Nos olhos das pessoas míopes, um objeto localizado muito longe, isto é, no infinito, é focalizado antes da retina. À medida que o objeto se aproxima, o ponto de focalização se afasta até cair sobre a retina. A partir deste ponto, o míope enxerga bem. A dioptria  $D$ , ou “grau”, de uma lente é definida como  $D = 1/(\text{distância focal})$  e  $1 \text{ grau} = 1 \text{ m}^{-1}$ . Considere uma pessoa míope que só enxerga bem objetos mais próximos do que 0,4 m de seus olhos.

- Faça um esquema mostrando como uma lente bem próxima dos olhos pode fazer com que um objeto no infinito pareça estar a 40 cm do olho.
- Qual a dioptria (em graus) dessa lente?
- A partir de que distância uma pessoa míope que usa óculos de “4 graus” pode enxergar bem sem os óculos?

**16** Em um dia muito claro, uma pessoa míope tenta usar seus óculos para concentrar a luz solar e com isso acender um palito de fósforo. No entanto, ela não parece ter êxito. Justifique.

**17 UFCG** Ao descrever suas experiências, o Homem Invisível, do conto de H. G. Wells, relata um momento em que foi flagrado na rua:

“Veja, Ted”, [...] disse o mais jovem com ar de surpresa em sua voz e apontando diretamente para os meus pés. Eu olhei para baixo e vi imediatamente a negra sugestão dos contornos de meus pés esboçados em lama salpicada. Por um momento, eu estive paralisado.

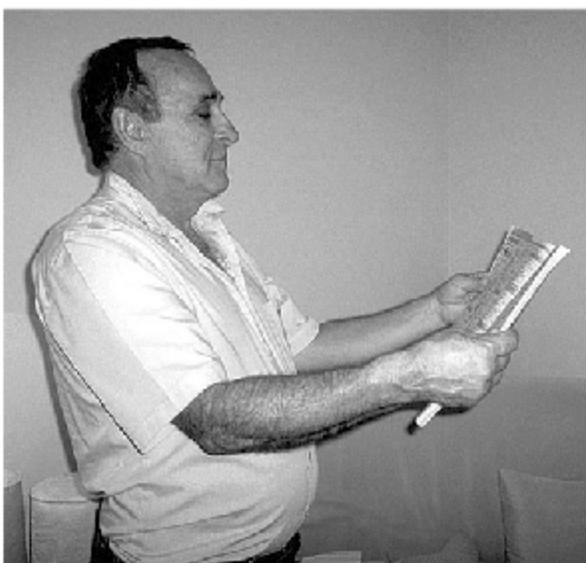


Considerando o princípio óptico de funcionamento do olho humano, poderia o relato estar correto ou poderia o Homem Invisível enxergar? Justifique sua resposta.

**18 FGV** Em plena aula, o professor de Física descobriu acertadamente o motivo pelo qual um de seus alunos tinha que usar óculos. De posse dos óculos desse aluno, verificou que ambas as lentes possuíam bordos mais espessos que seus centros. Em seguida, olhando através de cada lente e voltando sua atenção a um friso horizontal na parede, girou-as paralelamente à parede constatando que, para ambas, o friso visto através das lentes não sofria qualquer inclinação. Naturalmente, as lentes em questão eram:

- (a) cilíndricas e convergentes.
- (b) cilíndricas e divergentes.
- (c) esféricas e convergentes.
- (d) esféricas e divergentes.
- (e) parabólicas e convergentes.

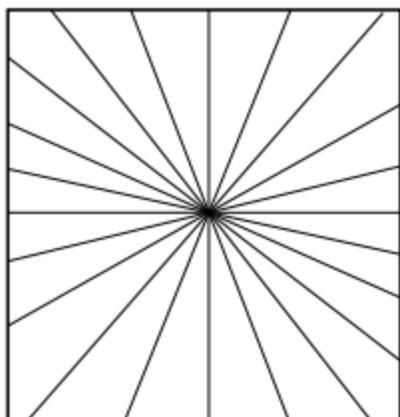
**19 Unesp** Observe a ilustração.



Nessa situação o cidadão consegue ler nitidamente a revista. Pode-se supor que o cidadão retratado possui qualquer um dos seguintes defeitos visuais:

- (a) presbiopia e hipermetropia.
- (b) hipermetropia e miopia.
- (c) miopia e presbiopia.
- (d) astigmatismo e miopia.
- (e) estrabismo e astigmatismo.

**20 UEL** Dada uma figura com traços pretos radiais, podemos afirmar que as pessoas que não conseguem ver todos os traços com a mesma tonalidade e nitidez em todas as direções são portadoras do seguinte defeito de visão humana:



- (a) Miopia, caracterizada pelo formato alongado do globo ocular.
- (b) Hipermetropia, caracterizada pelo formato achatado do globo ocular.
- (c) Presbiopia, caracterizada pela dificuldade de acomodação do cristalino, que vai se tornando rígido a partir dos 40 anos no ser humano.
- (d) Catarata, caracterizada pela opacidade progressiva do cristalino do olho humano.
- (e) Astigmatismo, caracterizado por uma deformação esfero-cilíndrica da curvatura das lentes do olho humano.

**21 Enem** Sabe-se que o olho humano não consegue diferenciar componentes de cores e vê apenas a cor resultante, diferentemente do ouvido, que consegue distinguir, por exemplo, dois instrumentos diferentes tocados simultaneamente. Os raios luminosos do espectro visível, que têm comprimento de onda entre 380 nm e 780 nm, incidem na córnea, passam pelo cristalino e são projetados na retina. Na retina, encontram-se dois tipos de fotorreceptores, os cones e os bastonetes, que convertem a cor e a intensidade da luz recebida em impulsos nervosos. Os cones distinguem as cores primárias: vermelho, verde e azul, e os bastonetes diferenciam apenas níveis de intensidade, sem separar comprimentos de onda. Os impulsos nervosos produzidos são enviados ao cérebro por meio do nervo óptico, para que se dê a percepção da imagem.

Um indivíduo que, por alguma deficiência, não consegue captar as informações transmitidas pelos cones, perceberá um objeto branco, iluminado apenas por luz vermelha, como:

- (a) um objeto indefinido, pois as células que captam a luz estão inativas.
- (b) um objeto rosa, pois haverá mistura da luz vermelha com o branco do objeto.
- (c) um objeto verde, pois o olho não consegue diferenciar componentes de cores.
- (d) um objeto cinza, pois os bastonetes captam luminosidade, porém não diferenciam cor.
- (e) um objeto vermelho, pois a retina capta a luz refletida pelo objeto, transformando-a em vermelho.

# 11

FRENTE 3

## Movimentos periódicos oscilatórios

BERND JUERGENS/DREAMSTIME.COM

Para estudos de interpretação musical, frequentemente são utilizados instrumentos conhecidos como metrônimos. Um metrônomo mecânico é composto de um peso móvel sobre uma haste metálica, que funciona como um pêndulo cuja amplitude de oscilação pode ser regulada ao se alterar a posição do peso e, conseqüentemente, o comprimento da haste entre seu ponto fixo e o peso. As várias amplitudes de oscilação correspondem a tempos diferentes de um compasso, os quais determinam o andamento musical.



© MARELSOUND | DREAMSTIME.COM

## Movimentos periódicos

Um movimento é classificado como periódico quando se repete, de forma idêntica, em intervalos de tempo iguais e sucessivos.

O menor intervalo de tempo no qual o movimento se repete é denominado de **período** ( $T$ ). O período pode ser medido em segundos, horas, dias, anos etc., de acordo com a ordem de grandeza do movimento.

Outro conceito importante é o conceito de **frequência** ( $f$ ). Frequência é o número de repetições do movimento na unidade de tempo. Assim, quando dizemos que um disco de vinil realiza 45 rotações por minuto, estamos dizendo que a frequência de rotação do disco é de 45 voltas por minuto (45 rpm).

A frequência pode ser medida em rotações por minuto (rpm) ou **ciclos por segundo**. A unidade de frequência ciclos por segundo é denominada de hertz (Hz). A unidade de frequência no SI é o inverso do segundo, ou seja,  $s^{-1} = 1/s = 1 \text{ Hz}$ .

Em um intervalo de tempo igual ao período  $T$ , o movimento se repete uma vez. Em uma unidade de tempo, o fenômeno se repete  $f$  vezes. Portanto, podemos montar a regra a seguir.

Tempo	Número de repetições
$T$	1
1	$f$

Portanto:  $T \cdot f = 1 \Rightarrow f = \frac{1}{T}$

## SAIBA MAIS

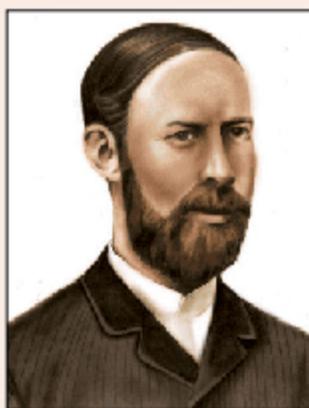


Fig. 1 Heinrich Hertz.

O físico alemão Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894) doutorou-se em Física em 1880 na Universidade de Berlim, sendo, mais tarde, designado professor de Física na Universidade de Bonn. Foi o primeiro cientista que conseguiu produzir e receber ondas de rádio (ondas eletromagnéticas), mostrando que elas possuíam as mesmas propriedades da luz. Como consequência, ele estabeleceu definitivamente que a luz é uma onda eletromagnética.

Em homenagem a Hertz, durante muitos anos, as ondas de rádio foram denominadas "ondas hertzianas".

## Revisão de MCU

Para que você consiga ter uma boa compreensão dos assuntos que veremos a seguir, é importante que você se recorde dos principais pontos envolvidos em um movimento circular.

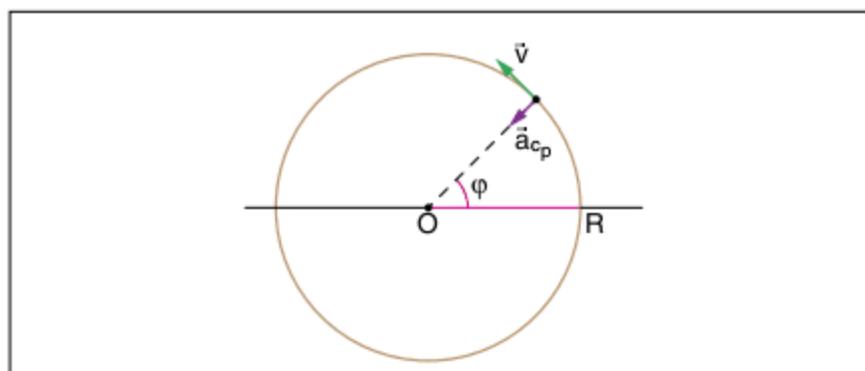


Fig. 2 Movimento circular uniforme (MCU).

## Capítulo 11 Movimentos periódicos oscilatórios

- Velocidade angular:

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ (1 volta)}$$

- Velocidade escalar:

$$v = \omega \cdot R$$

- Posição ou fase:

$$\phi = \phi_0 + \omega t$$

## Movimento oscilatório

Um movimento é dito oscilatório quando é periódico e tem seu sentido invertido regularmente.

Como exemplo, temos o pêndulo simples em um ambiente sem resistência do ar.

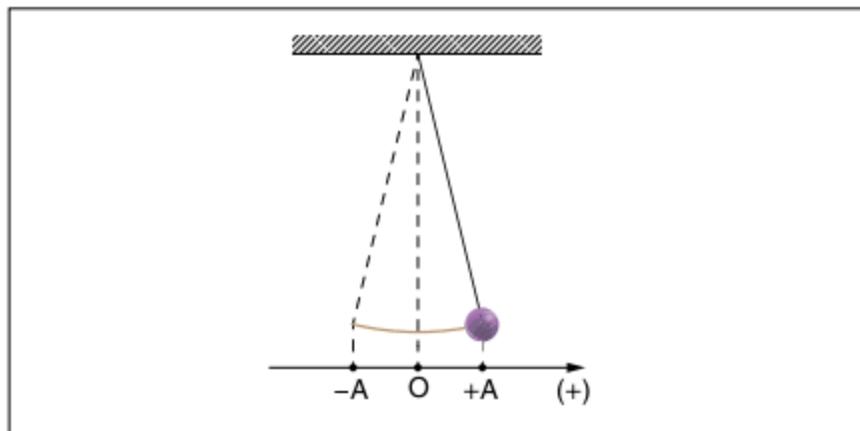


Fig. 3 Pêndulo simples.

O pêndulo sai da posição  $+A$ , passa pelo ponto 0 (posição de equilíbrio) e vai até  $-A$  em um intervalo de tempo  $\Delta t$ ; em  $-A$ , inverte o sentido, passa por 0 e depois chega em  $+A$ , também em um intervalo de tempo  $\Delta t$ . Observe que a massa do pêndulo oscila simetricamente em torno da posição de equilíbrio.

Nesse caso, o período  $T$  do movimento corresponde ao intervalo de tempo para que a massa saia de  $+A$ , passe por 0, atinja  $-A$ , passe novamente por 0 e retorne ao ponto  $+A$ .

## ATENÇÃO!

- I. O período independe da massa pendular.
- II. Existe uma força atuando na massa pendular que tende a trazê-la de volta à posição 0. Esta força, que tende a restabelecer a posição de equilíbrio, chama-se **força restauradora** e é um ponto importante do movimento oscilatório.

## MHS – Movimento Harmônico Simples

MHS é o movimento oscilatório mais importante, pois é relativamente fácil de se descrever matematicamente e modela de forma bastante satisfatória muitas oscilações encontradas na natureza. Qualquer movimento periódico resulta da superposição de dois ou mais MHSs.

## ATENÇÃO!

Vale salientar que todos os casos de MHS aqui vistos serão lineares, isto é, orientados em eixos retilíneos.

## Identificação de um MHS

Podemos descobrir se um certo movimento é um MHS por três modos:

- I. Através da dinâmica.
- II. Através da geometria.
- III. Através da cinemática.

### I. Através da dinâmica

Considere um eixo orientado  $x$  e uma partícula que se movimenta neste eixo.

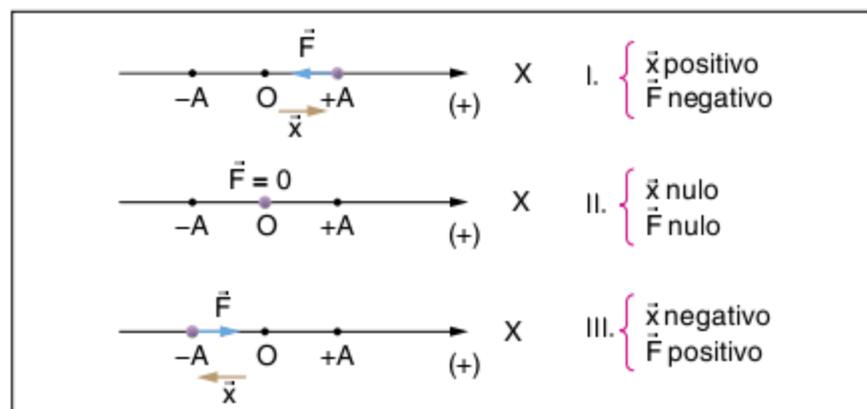


Fig. 4 Força restauradora.

A partícula  $A$  executará um MHS se a força atuante sobre ela for do tipo  $\vec{F} = -K \cdot \vec{x}_p$ , onde  $\vec{x}_p$  é o vetor posição da partícula em relação à posição de equilíbrio e  $K$  é uma constante de proporcionalidade.  $\vec{F}$  é uma força restauradora.

- Se  $\vec{x}$  é positivo:  $\vec{F}$  é negativo, orientado para a origem.
- Se  $\vec{x}$  é negativo:  $\vec{F}$  é positivo, voltado para a origem.

### II. Através da geometria

Considere um corpo realizando um MCU, como na figura a seguir.

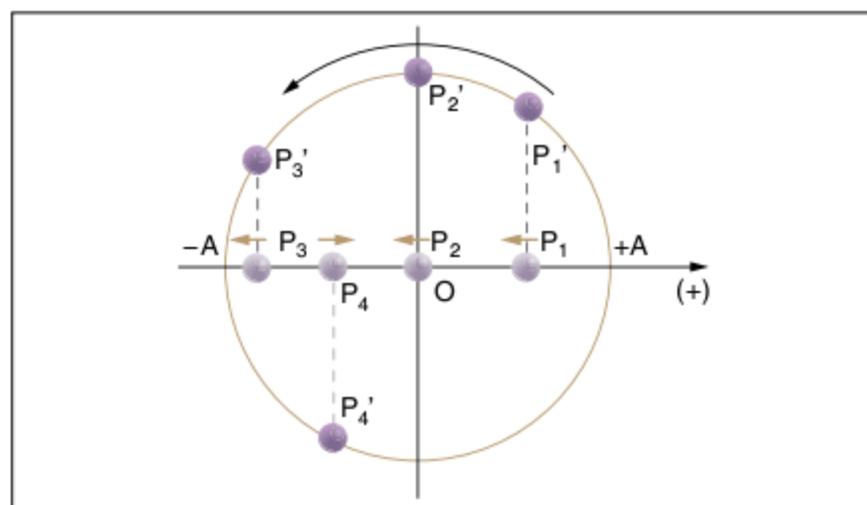


Fig. 5 Projeção diametral.

Portanto, geometricamente, um corpo realiza um MHS se seu movimento puder ser interpretado como movimento da projeção diametral de outro corpo que realiza um MCU.

O corpo  $P'$  realiza um MCU, enquanto o corpo  $P$ , projeção diametral de  $P'$ , realiza um MHS.

### III. Através da cinemática

Por definição, dizemos que uma partícula executa um MHS ao longo de um eixo orientado quando seu deslocamento  $x$ , em relação à origem do eixo, é dado, como função do tempo, pela relação:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

## Estudo Cinemático do MHS

Uma vez que o conceito de MHS já está claro, vamos deduzir suas equações de elongação ( $x_p$ ), velocidade ( $v_p$ ) e aceleração ( $a_p$ ).

## ATENÇÃO!

Um MHS é a projeção do MCU sobre um eixo diametral.

### Equação da elongação

Considere, na figura a seguir, que o corpo  $P'$  realiza um MCU. A projeção de  $P'$ , em um determinado instante  $t$ , é o corpo  $P$ . Geometricamente, calcularemos a posição ou elongação de  $P$ .

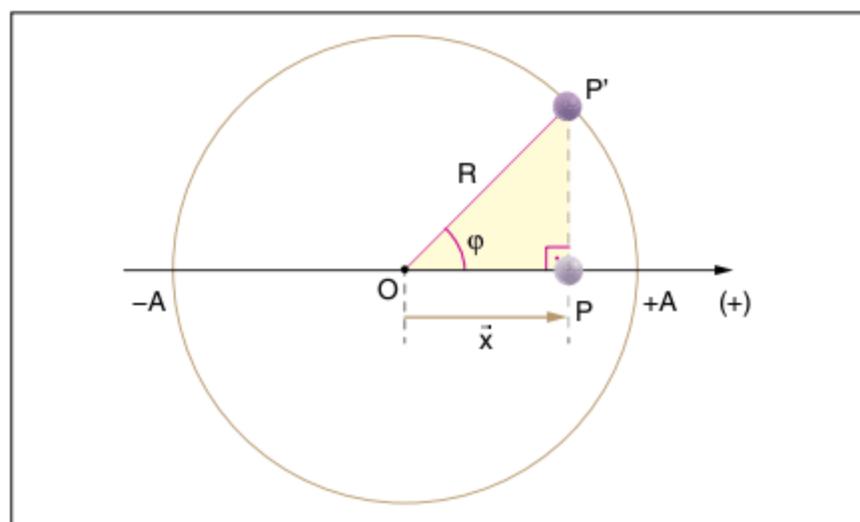


Fig. 6 Determinação da elongação.

No  $\Delta OPP'$ , temos:

$$\cos \varphi = \frac{x}{R} \Rightarrow x = R \cdot \cos \varphi$$

como do MCU:  $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ , temos:

$$x = R \cdot \cos(\varphi_0 + \omega t)$$

Observe, na figura 6, que a posição de  $P$  está limitada ao intervalo:  $-A \leq x \leq A$ . Conseqüentemente, a distância máxima que  $P$  pode atingir da origem em módulo é  $A = R$ , distância esta que chamaremos de amplitude ( $A$ ).

Portanto, para um MHS, teremos:

$$x_p = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

onde:

- $x_p$  é a elongação
- $A$  é a amplitude do MHS
- $\omega$  é a velocidade angular ou pulsação
- $t$  é o tempo
- $\varphi_0$  é a fase inicial
- $(\omega t + \varphi_0)$  é a fase em  $t$

## ATENÇÃO!

O tempo gasto pelo móvel realizador do MCU para dar uma volta completa é igual ao tempo gasto pela projeção do móvel para ir e voltar ao seu ponto de origem (Período =  $T$ ). Portanto, o período do MCU é o mesmo do MHS associado.

$$\text{Logo: } T = \frac{1}{f} \text{ e } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

### Fase inicial do MHS ( $\varphi_0$ )

Para se determinar a fase inicial ( $\varphi_0$ ) de um MHS, devemos associar o MHS ao MCU.

Considere um corpo realizando um MHS. Para determinarmos  $\varphi_0$ , basta observarmos o móvel realizador do MCU correspondente e determinarmos qual o ângulo correspondente ao seu deslocamento da posição inicial.

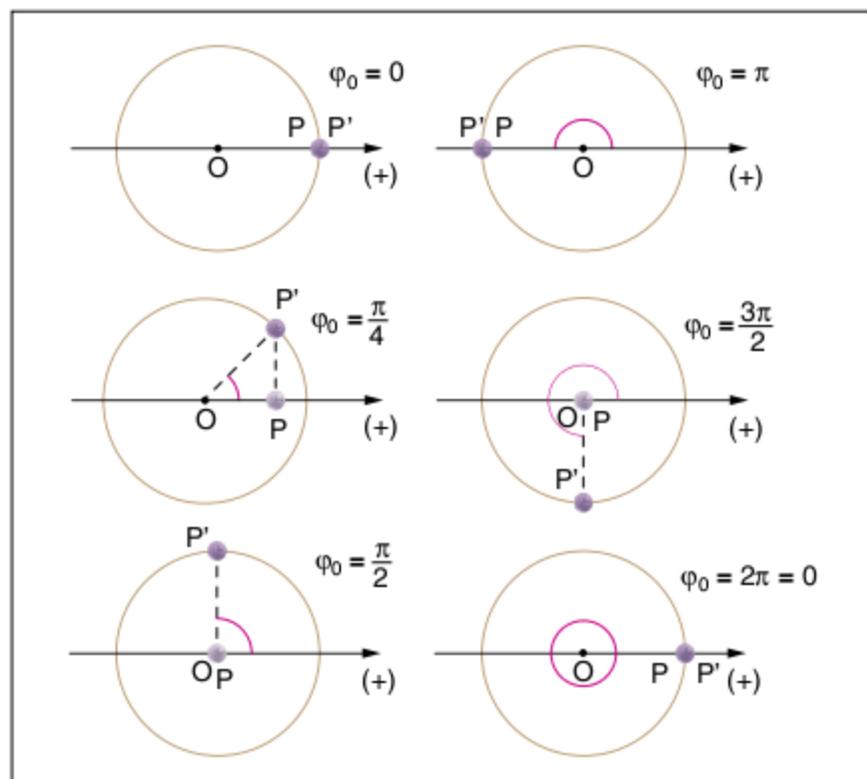


Fig. 7 Alguns exemplos de fases iniciais em um MHS.

$\varphi_0$  corresponde ao instante  $t = 0$  e, para sua determinação, devemos adotar por convenção que o MCU associado ao MHS deve ser sempre no sentido anti-horário, de tal modo que  $\varphi_0$  seja o espaço angular inicial do MCU, medido a partir da origem e no sentido anti-horário.

### Equação da velocidade

Considere a figura a seguir onde temos um corpo em MCU e outro em MHS, projeção diametral do MCU.

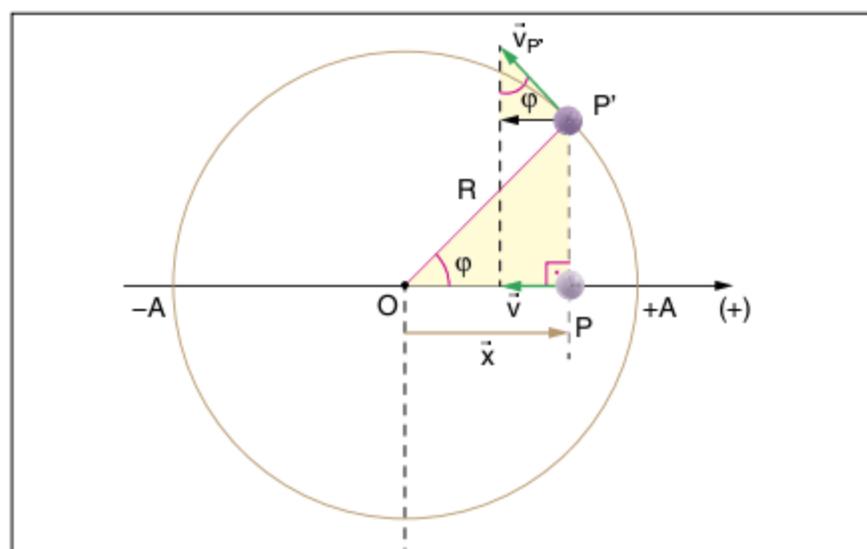


Fig. 8 Determinação da velocidade.

Observe que  $\vec{v}$  trata-se da projeção de  $\vec{v}_{P'}$  no eixo horizontal.

Geometricamente:  $\text{sen}\varphi = \frac{v}{v_{P'}}$

Como  $\vec{v}_{P'}$  tem sentido contrário a  $\vec{x}$  e como do MCU:

$$v = \omega \cdot R = \omega \cdot A \text{ e } \varphi = \varphi_0 + \omega t$$

temos:

$$v(t) = -\omega A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

### Ponderações sobre a velocidade

#### I. Velocidade máxima

A equação da velocidade é dada por:

$$v(t) = -\omega A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

Como:

$$-1 \leq \text{sen}(\omega t + \varphi_0) \leq 1$$

Temos:

- $\text{sen}(\omega t + \varphi_0) = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow v = -\omega \cdot A$
- $\text{sen}(\omega t + \varphi_0) = -1 \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow v = \omega \cdot A$

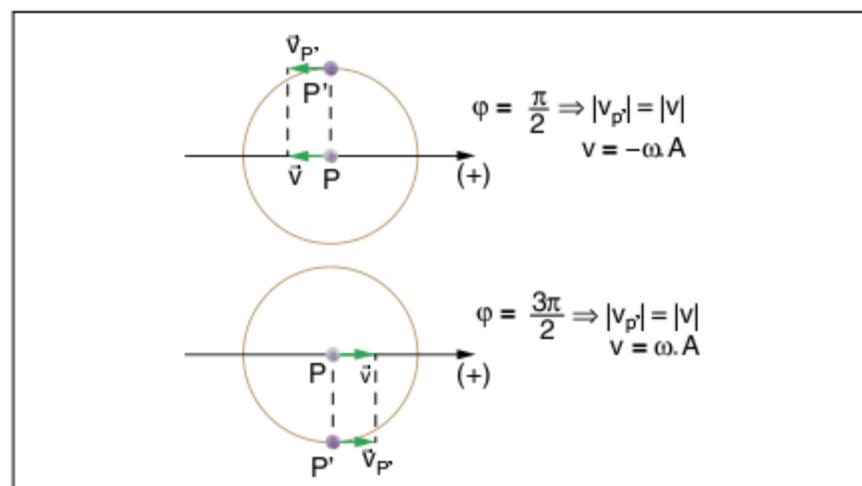


Fig. 9 Velocidade máxima.

Na figura anterior, podemos observar que para um corpo em MHS a velocidade em módulo é máxima quando o corpo passa pela posição de equilíbrio, velocidade esta igual a:

$$v_{\text{máx.}} = \omega \cdot A$$

#### II. Velocidade em função do deslocamento – equação de Torricelli

Assim como existe na cinemática escalar uma equação que relaciona a velocidade com o deslocamento sem a variável intermediária tempo, equação de Torricelli, existe uma equação para a velocidade de um ponto material que descreve um MHS em função da elongação e não em função do tempo.

A equação da elongação é dada por:

$$x = A \cdot \text{cos}(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \frac{x}{A} = \text{cos}(\omega t + \varphi_0)$$

Como:

$$v = -\omega \cdot A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \frac{v}{-\omega \cdot A} = \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

Aplicando a relação fundamental da trigonometria:  $\text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta = 1$ , temos:

$$\text{sen}^2(\omega t + \varphi_0) + \text{cos}^2(\omega t + \varphi_0) = 1$$

Como:

$$\text{sen}(\omega t + \varphi_0) = -\frac{v}{\omega A} \text{ e } \text{cos}(\omega t + \varphi_0) = \frac{x}{A}$$

Temos:

$$\left(-\frac{v}{\omega \cdot A}\right)^2 + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 1$$

$$\frac{v^2}{\omega^2 A^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1$$

Portanto:

$$\frac{\omega^2 x^2 + v^2}{\omega^2 A^2} = 1 \Rightarrow \omega^2 x^2 + v^2 = \omega^2 A^2$$

$$v^2 = \omega^2 A^2 - \omega^2 x^2 \Rightarrow v^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)$$

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

O aspecto do gráfico da equação de Torricelli para o MHS é dado pela equação:  $v^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)$

Sabemos que a equação de uma elipse é do tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

onde  $a$  é o semieixo maior e  $b$  é o semieixo menor.

Logo:

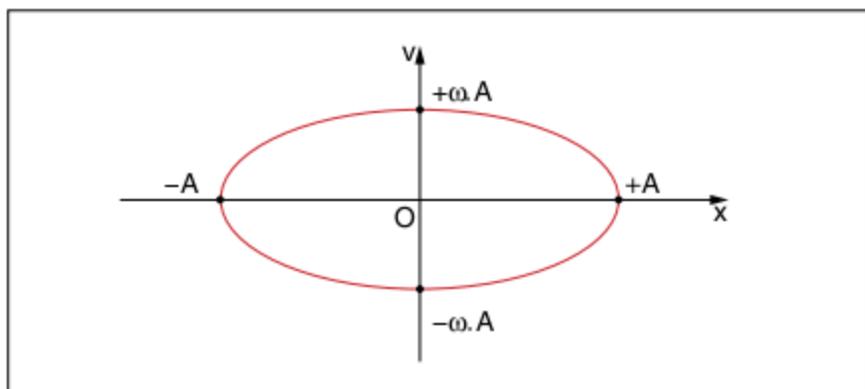


Fig. 10 Gráfico da equação de Torricelli.

### Equação da aceleração

Retomando os corpos  $P'$  em MCU e  $P$  em MHS; temos que no MCU o vetor aceleração é igual ao vetor aceleração centrípeta  $a_{cp}$  e que  $a_{cp} = \omega^2 \cdot R$ .

Podemos observar, na figura a seguir, que a aceleração de  $p$  é a projeção de  $\vec{a}_{cp}$  no eixo horizontal.

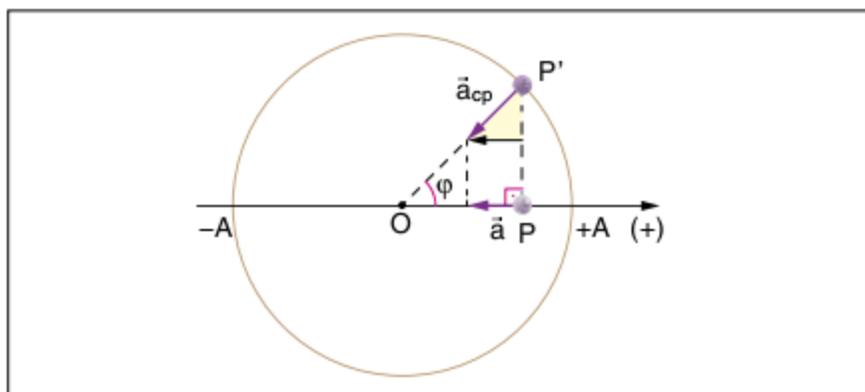


Fig. 11 Determinação da aceleração.

Assim, temos:

$$a = -a_{cp} \cdot \cos \varphi \Rightarrow a = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos \varphi$$

Desse modo:

$$a = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

A propriedade fundamental do MHS decorre das equações:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a(t) = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Logo:

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

A propriedade fundamental do MHS diz que: **A aceleração é diretamente proporcional à elongação, mas com sinal trocado.**

### Ponderações sobre a aceleração

#### I. Aceleração máxima

A equação da aceleração é dada por:

$$a = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Como:

$$-1 \leq \cos(\omega t + \varphi_0) \leq 1$$

temos:

- $\cos(\omega t + \varphi_0) = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow a = -\omega^2 A$
- $\cos(\omega t + \varphi_0) = -1 \Rightarrow \varphi = \pi \Rightarrow a = \omega^2 A$

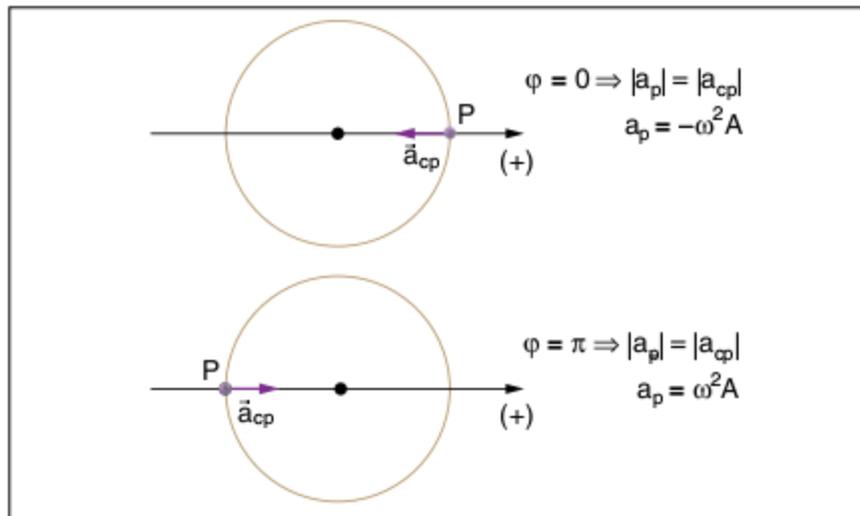


Fig. 12 Aceleração máxima.

### Gráficos

Observe os pontos máximo e mínimo absolutos nos gráficos a seguir. Fazemos uma análise, tomando  $\varphi_0 = 0$  e  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

I. Elongação:

$$x_p = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

t	$x_p$
0	A
$\frac{T}{4}$	0
$\frac{T}{2}$	-A
$\frac{3T}{4}$	0
T	A

$$x_p = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

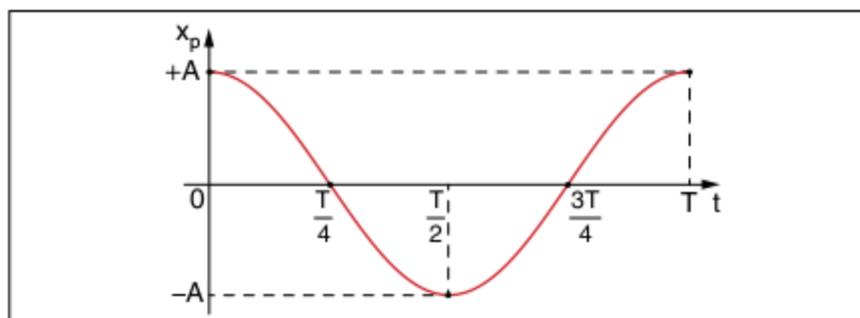


Fig. 13 Gráfico da elongação.

II. Velocidade:

$$v_p = -\omega A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

t	$v_p$
0	0
$\frac{T}{4}$	$-\omega A$
$\frac{T}{2}$	0
$\frac{3T}{4}$	$\omega A$
T	0

$$v_p = -\omega A \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

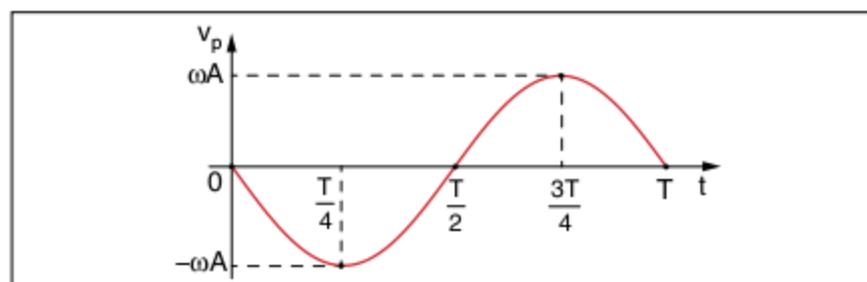


Fig. 14 Gráfico da velocidade.

III. Aceleração:

$$a_p = -\omega^2 A \cdot \text{cos}(\omega t + \varphi_0)$$

t	$a_p$
0	$-\omega^2 A$
$\frac{T}{4}$	0
$\frac{T}{2}$	$\omega^2 A$
$\frac{3T}{4}$	0
T	$-\omega^2 A$

$$a_p = -\omega^2 A \cdot \text{cos}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

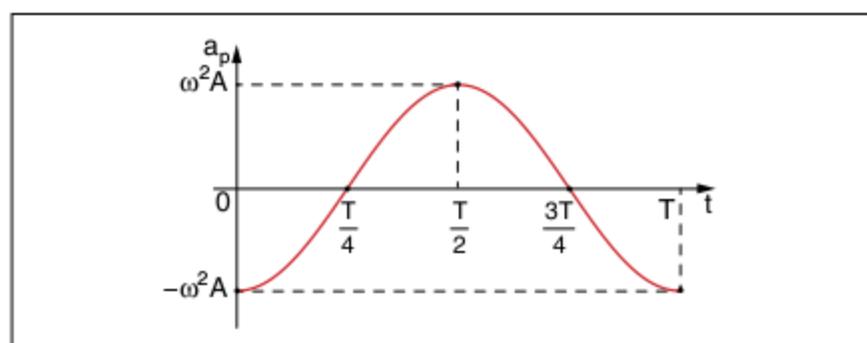


Fig. 15 Gráfico da aceleração.

# ATENÇÃO!

Observe que todos esses gráficos, em função do tempo, são os já conhecidos gráficos das funções seno e cosseno.

## Exercícios resolvidos

1 Uma partícula realiza um MHS de função  $x = 10 \cdot \text{cos}\left(\frac{\pi}{4} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$  no sistema CGS.

Determine:

- a amplitude, a pulsação e a fase inicial;
- o período e a frequência do movimento.

**Resolução:**

$$x = A \cdot \text{cos}(\omega t + \varphi_0)$$

$$x = 10 \cdot \text{cos}\left(\frac{\pi}{4} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

a)  $A = 10 \text{ cm}$

$$\omega = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s}$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

b)  $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{T}$

$$T = 8 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 0,125 \text{ Hz}$$

2 Um móvel com movimento harmônico simples (MHS) obedece à função horária  $x = 7 \cdot \text{cos}(0,5 \cdot \pi \cdot t)$ , onde  $x$  é medido em centímetros e  $t$  em segundos. Determine o tempo necessário para que este móvel vá da posição de equilíbrio para a posição de elongação máxima.

**Resolução:**

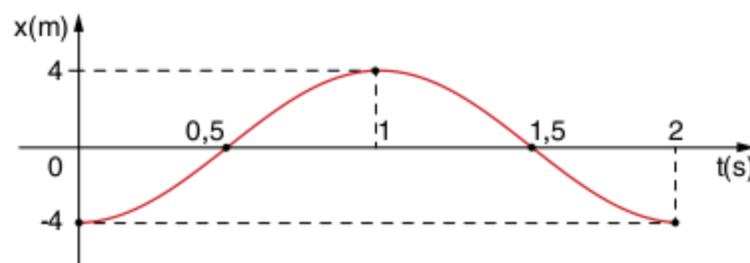
De acordo com a equação da elongação:

$$\omega = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = 4 \text{ s}$$

O deslocamento corresponde a  $\frac{1}{4}$  de volta  $\Rightarrow 1 \text{ s}$ .

3 É dado o gráfico horário da elongação de um MHS. Determine:

- o período e a frequência;
- a pulsação;
- a amplitude;
- a fase inicial;
- as equações horárias da elongação, da velocidade escalar e da aceleração escalar.



**Resolução:**

a) O período corresponde ao intervalo de tempo mínimo em que o movimento se repete. Portanto:  $T = 2s$

A frequência vale:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{1}{2} \Rightarrow f = 0,5 \text{ Hz}$$

b) A pulsação é calculada pela expressão:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow \omega = \pi \text{ rad/s}$$

c) A amplitude é o valor máximo da elongação:  $A = 4 \text{ m}$

d) Para obter a fase inicial, substituímos  $t = 0$  e  $x = -4 \text{ m}$  na equação horária:

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$-4 = 4 \cdot \cos \varphi_0 \Rightarrow \cos \varphi_0 = -1$$

Portanto:  $\varphi_0 = \pi \text{ rad}$

e) Substituindo os valores na equação horária da elongação:

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$x = 4 \cdot \cos(\pi t + \pi) \quad (SI)$$

Para a equação horária da velocidade escalar:

$$v = -\omega \cdot A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = -4\pi \cdot \sin(\pi t + \pi) \quad (SI)$$

Para a equação horária da aceleração escalar:

$$a = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = -4\pi^2 \cdot \cos(\pi t + \pi) \quad (SI)$$

**Estudo dinâmico do MHS**

Para fazermos uma análise das forças envolvidas no MHS, utilizaremos um exemplo clássico: o sistema massa-mola. Vejamos as situações ilustradas abaixo.

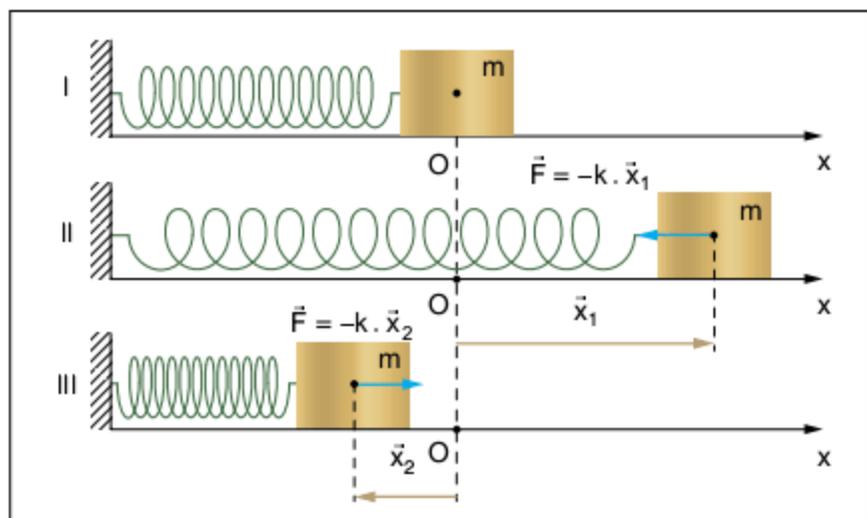


Fig. 16 Estudo dinâmico.

Já sabemos que a força que rege o MHS é do tipo restauradora, ou seja, está sempre tentando restabelecer o equilíbrio.

$$\vec{F} = -K \cdot \vec{x}_p$$

**ATENÇÃO!**

Não podemos confundir K com a constante elástica de uma mola. K pode ser qualquer constante, inclusive a constante elástica de uma mola.

Em um sistema massa-mola, temos:

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{x}$$

Observe as seguintes situações:

- I. Bloco em equilíbrio.  
Não há atuação da força elástica.
- II. Bloco não está em equilíbrio.  
Na horizontal,  $\vec{F} = -k \cdot \vec{x}_1$   
  
Observe o sentido de  $\vec{F}$ , apontando para a origem (ponto de equilíbrio). Neste caso, a mola está alongada.
- III. Bloco não está em equilíbrio.  
Na horizontal,  $\vec{F} = -k \cdot \vec{x}_2$   
  
Observe o sentido de  $\vec{F}$ . Neste caso, a mola está comprimida.

**Período do sistema massa-mola**

Vimos que a força resultante que atua no bloco de massa m no oscilador harmônico é a força elástica.

Então, pela Segunda Lei de Newton:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Logo, para a força elástica, temos:

$$F = m \cdot a = -k \cdot x$$

A propriedade fundamental do MHS é dada por:  $a = -\omega^2 \cdot x$

Logo:

$$-k \cdot x = -m \cdot \omega^2 x \Rightarrow k = m \cdot \omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Sabendo que  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , temos:

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

É importante observar que a equação anterior afirma que o período de oscilação do sistema massa-mola independe da amplitude, depende apenas da massa oscilante (m) e da constante elástica da mola (k).

Portanto, o período dos três sistemas abaixo pode ser determinado pela mesma equação deduzida anteriormente.

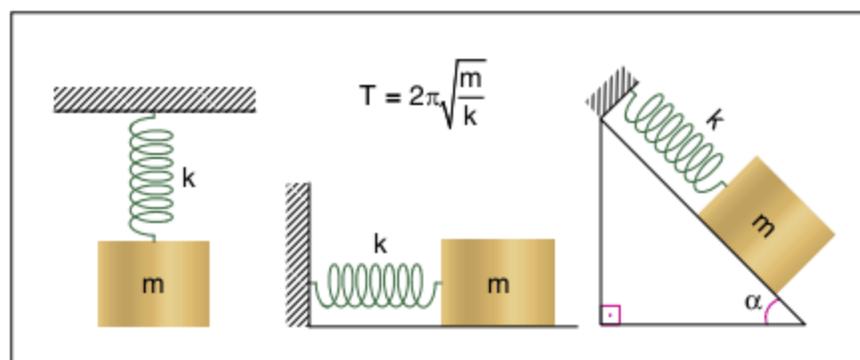
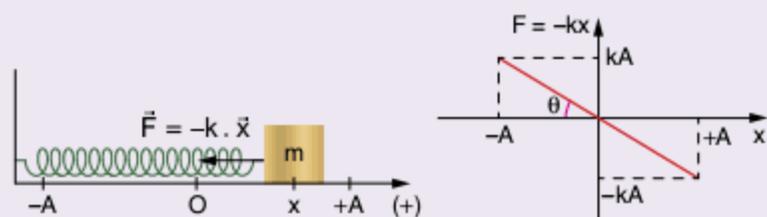


Fig. 17 Sistemas massa-mola.

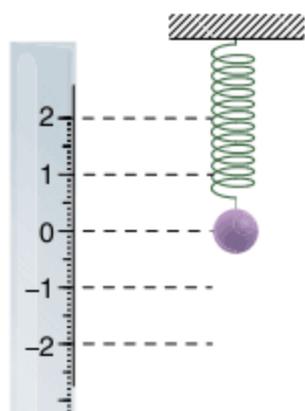
# ATENÇÃO!



$F = -k \cdot x$  é uma função do 1º grau logo:  $\text{tg} \theta \stackrel{N}{=} k$   
 $\therefore$  Quanto maior for a inclinação da reta maior será a constante elástica da mola.

## Exercícios resolvidos

**4** A figura a seguir mostra um corpo suspenso e em equilíbrio na extremidade de uma mola. Quando o corpo é trazido para a posição  $-2$  cm, indicada por uma régua colocada paralelamente à mola, sendo solto em seguida, ele passa a oscilar em um movimento harmônico simples (admitindo-se não haver perdas de energia mecânica). Verifica-se que o corpo gasta 1 s para ir da posição  $-2$  cm para a posição 2 cm.



Determine:

- a amplitude do movimento.
- o período e a frequência do movimento.
- a pulsação do movimento.

### Resolução:

- A amplitude é o valor da alongação máxima, logo:  
 $A = 2$  cm
- O período é o intervalo de tempo decorrido para o móvel retornar à posição inicial e recomeçar o movimento. Assim, é dado pelo dobro do tempo necessário para o móvel ir de  $-2$  cm a 2 cm:

$$T = 2$$

A frequência é o inverso do período:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{1}{2} \Rightarrow f = 0,5 \text{ Hz}$$

- A pulsação é dada por:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow \omega = \pi \text{ rad/s}$$

**5** Um corpo realiza um movimento harmônico simples. A massa do corpo é 0,25 kg e a constante de proporcionalidade da força restauradora é  $1,0 \cdot 10^2$  N/m. A amplitude de oscilação é de 20 cm.

- Determine o período e a frequência natural de vibração.
- Dobrando-se a amplitude de oscilação, o que acontece com a frequência calculada no item anterior?

### Resolução:

- O período  $T$  é dado por:  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ .

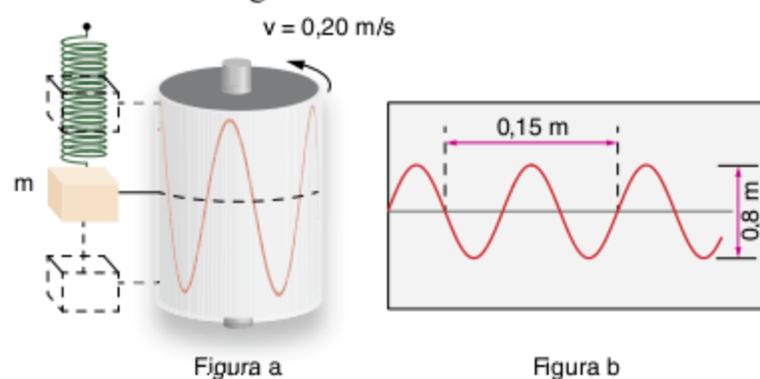
Sendo  $m = 0,25$  kg e  $K = 1,0 \cdot 10^2$  N/m, temos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0,25}{1,0 \cdot 10^2}} \Rightarrow T = \frac{\pi}{10} \text{ s}$$

$$\text{Sendo } f = \frac{1}{T}, \text{ temos: } f = \frac{10}{\pi} \text{ Hz}$$

- A frequência de vibração não depende da amplitude. Portanto, a frequência permanece a mesma.

**6** Um corpo de massa  $m = 1$  kg oscila livremente, suspenso por uma mola helicoidal de massa desprezível (Figura a). Preso ao corpo, há um estilete que registra em um papel vertical as posições do corpo. O papel vertical envolve um cilindro que gira com velocidade angular constante. Seja 0,20 m/s a velocidade dos pontos do papel vertical. Os dados obtidos no papel estão indicados na Figura b.

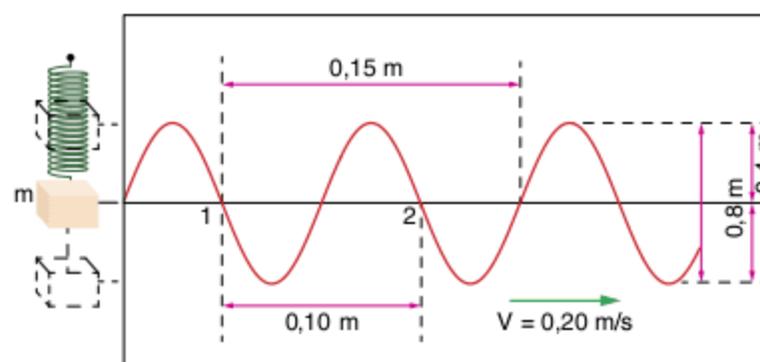


Determine:

- a frequência e a amplitude do movimento.
- a constante elástica da mola.

### Resolução:

- O movimento do cilindro é uma rotação uniforme (velocidade angular constante) e, através da figura registrada no papel, podemos determinar o período do MHS efetuado pelo corpo. Este efetua um ciclo completo quando, passando pela posição 1 (registrada no papel), retorna novamente a ela em idênticas condições (posição 2). Nesse intervalo de tempo, o papel, à velocidade  $v = 0,20$  m/s, percorre, em movimento uniforme de função  $s = v \cdot t$ , o espaço  $s = 0,10$  m ( $1 \rightarrow 2$ ).



Assim, para o papel que envolve o cilindro:

$$s = v \cdot t \Rightarrow 0,10 = 0,20 t \Rightarrow t = 0,5 \text{ s}$$

Sendo esse o tempo necessário para o fenômeno se repetir, o período da oscilação será:

$$T = 0,5 \text{ s}$$

A frequência será dada por:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,5} \Rightarrow f = 2 \text{ Hz}$$

A amplitude é obtida da figura no papel: observe que, verticalmente, o corpo oscila na extensão de 0,8 m, isto é, com amplitude de 0,4 m em torno da posição de equilíbrio, logo:

$$A = 0,4 \text{ m}$$

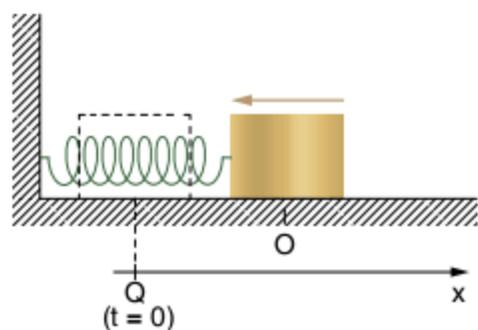
b) Conhecido o período, podemos determinar a constante elástica da mola pela relação:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow 0,5 = 2\pi \sqrt{\frac{1}{k}}$$

$$0,5^2 = (2\pi)^2 \frac{1}{k} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2}{0,25}$$

$$k \cong 158 \text{ N/m}$$

**7** Um ponto material de massa  $m = 0,04 \text{ kg}$  oscila em torno da posição O de equilíbrio, em um MHS. A energia total mecânica do sistema é  $32 \cdot 10^{-4} \text{ J}$ . Despreze ações dissipativas.



Determine:

- o período da oscilação.
- a pulsação, em radianos por segundo.
- a amplitude da oscilação.
- a função horária da posição, da velocidade e da aceleração, adotando-se o eixo x orientado para a direita e instante inicial  $t = 0$  quando o móvel estiver na posição extrema Q, indicada na figura.
- o gráfico da posição x em função do tempo t, a partir de  $t = 0$  até  $t = 2T$ , onde T é o período.

Dado: Constante elástica da mola  $k = 0,16 \text{ N/m}$ .

**Resolução:**

a) O período de oscilação independe da amplitude, sendo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,04}{0,16}} = \pi \Rightarrow T \cong 3,14 \text{ s}$$

b) A pulsação  $\omega$  relaciona-se com o período pela expressão:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} \Rightarrow \omega = 2 \text{ rad/s}$$

c) A amplitude depende da energia mecânica total:

$$E = \frac{kA^2}{2} \Rightarrow 32 \cdot 10^{-4} = \frac{0,16 A^2}{2} \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

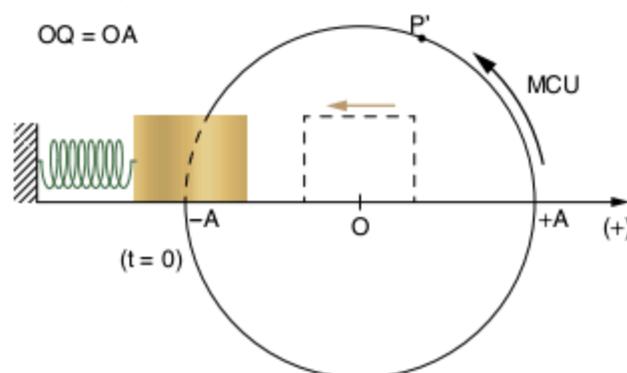
d) As funções horárias da elongação (x), da velocidade (v) e da aceleração (a) têm o aspecto:

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = -\omega A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = -\omega^2 A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

onde  $A = 0,2 \text{ m}$  e  $\omega = 2 \text{ rad/s}$ .



A fase inicial é determinada com auxílio de um MCU associado ao MHS, cujo ponto P' gira no sentido anti-horário, com espaços angulares medidos a partir do eixo horizontal. O exercício adota  $t = 0$  para a posição extrema à esquerda; daí, do MCU temos:

$$\varphi_0 = \pi \text{ rad}$$

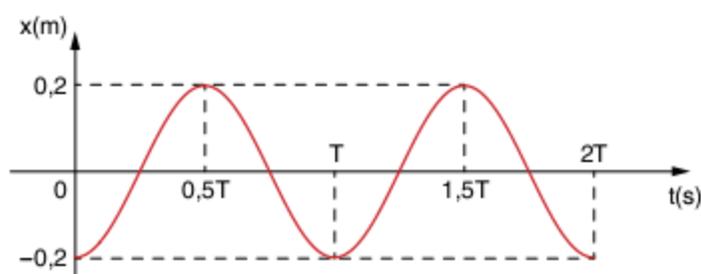
Logo:

$$x = 0,2 \cdot \cos(2t + \pi)$$

$$v = -0,4 \cdot \text{sen}(2t + \pi) \quad (\text{SI})$$

$$a = -0,8 \cdot \cos(2t + \pi)$$

e) O gráfico da função  $x = f(t)$ , desde  $t = 0$  até  $t = 2T$ , é indicado a seguir (função cossenoidal):



## Período de um pêndulo simples

Passaremos agora a expandir a equação do período

$\left( T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \right)$  para o cálculo do período de um pêndulo simples, outra situação de MHS.

## ATENÇÃO!

O pêndulo simples é um sistema ideal constituído de uma partícula suspensa por um fio flexível, inextensível e de massa desprezível.

Exercícios resolvidos

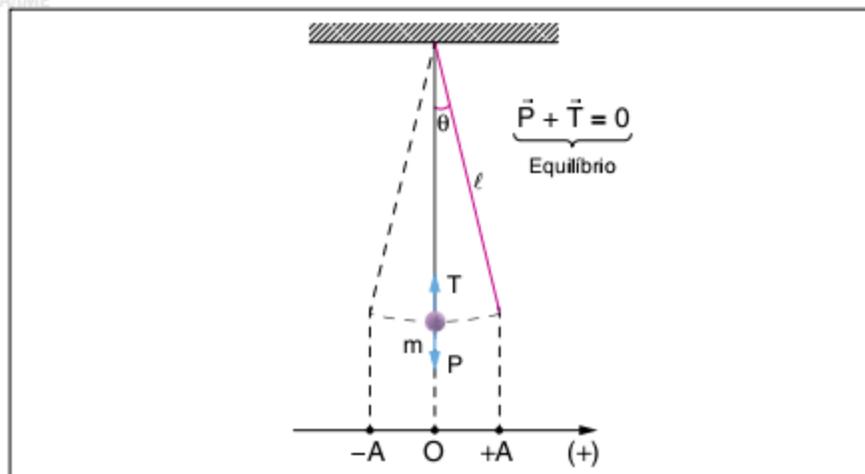


Fig. 18 Pêndulo simples na posição de equilíbrio.

Na situação de idealidade, desprezando-se a resistência do ar, as únicas forças atuantes são o peso e a tração. Se o pêndulo é retirado da sua posição de equilíbrio, este passa a oscilar em torno dessa posição com um determinado período.

Observe a figura a seguir.

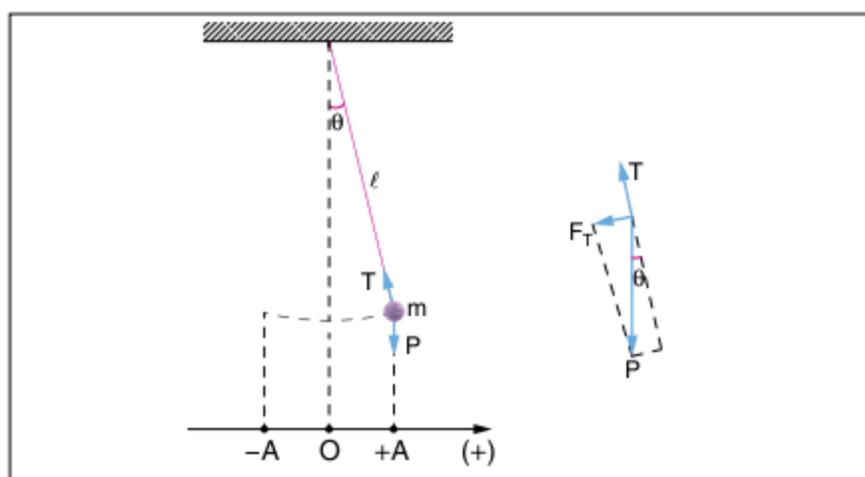


Fig. 19 Pêndulo simples.

Para pequenas amplitudes de oscilação, ou seja, para ângulos de alguns graus ( $\theta < 10^\circ$ ), o movimento do pêndulo simples é, com boa aproximação, um MHS.

$$\vec{F}_T = -k \cdot \vec{x}$$

$\vec{F}_T$  é a força tangente à trajetória; uma força do tipo restauradora. A partícula move-se aproximadamente em cima de uma linha reta.

A partir do detalhe, temos:  $F_T = P \cdot \text{sen } \theta$

Observação: Simplificação matemática

$$\text{Sendo } \theta \text{ pequeno} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{AP} \approx X \\ \text{sen } \theta \approx \theta(\text{rad}) = \frac{\widehat{AP}}{\ell} \approx \frac{X}{\ell} \end{cases}$$

$$F_T = mg \cdot \frac{x}{\ell} \Rightarrow F_T = \left( \frac{mg}{\ell} \right) \cdot x$$

onde:  $\frac{mg}{\ell} = k$

$$\text{Portanto: } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m \cdot \ell}{mg}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

## ATENÇÃO!

Observe que o período de oscilação independe da massa pendular.

8 A figura a seguir ilustra um pêndulo formado por um fio e por uma esfera oca, cheia de areia, com orifício em sua extremidade inferior. O pêndulo oscila com amplitude constante e a areia escoava regularmente pelo orifício. Qual das figuras a seguir melhor representa o perfil da areia depositada?



- (a)
- (b)
- (c)
- (d)
- (e)

**Resolução:**

Nos pontos A e B, a velocidade é nula; enquanto, no ponto médio de AB, a velocidade é máxima.

Resposta: B

9 Um antigo relógio de pêndulo é calibrado no frio inverno gaúcho. Considerando que o período do pêndulo deste relógio é dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

onde  $\ell$  é o comprimento do pêndulo e  $g$  é a aceleração local da gravidade, pergunta-se:

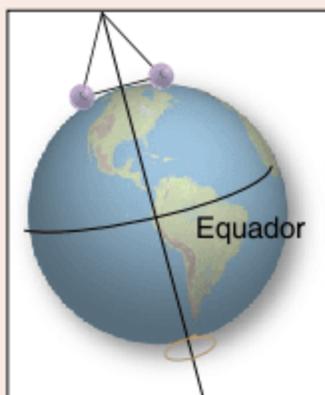


- a) Esse relógio atrasará ou adiantará, quando transportado para o quente verão nordestino?
- b) Se o relógio for transportado do Nordeste para a superfície da Lua, nas mesmas condições de temperatura, ele atrasará ou adiantará?

**Resolução:**

- a)  $\Delta \ell > 0 \Rightarrow \Delta T > 0$   
aumento do período, o relógio atrasará.
- b)  $\Delta g < 0 \Rightarrow \Delta T > 0$   
Aumento do período, o relógio atrasará.

### O que é o pêndulo de Foucault?



Considere um pêndulo oscilando no polo Norte da Terra. Como o seu plano de oscilação é fixo em relação às estrelas, um observador terrestre verá esse plano girar no sentido horário (contrário à rotação da Terra), dando uma volta a cada 24 h. Essa velocidade de rotação é proporcional ao seno da latitude do local da experiência: é, portanto, máxima no polo e nula no Equador (no hemisfério Sul, a rotação ocorre no sentido oposto).

Em Paris, por exemplo, o período de rotação é 32 h. Foi nessa cidade que Jean-Bernard Léon Foucault (1819-1868), em 1851, deu início à primeira experiência desse tipo, ao usar uma esfera de ferro de 28 kg suspensa em um arame de 67 m de comprimento sob a cúpula do Panthéon.

Foi verificado que, à medida que o tempo passava, o plano de oscilação do pêndulo girava em relação às paredes do edifício, constituindo a primeira prova da rotação da Terra obtida em laboratório. Naturalmente, nessa época a rotação do nosso planeta já tinha sido comprovada por meio de cálculos e observações astronômicas.

## Associação de molas

Deduzimos anteriormente que a equação que determina o período de oscilação do sistema massa-mola é  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ , onde  $m$  é a massa da partícula oscilante e  $k$  é a constante elástica da mola.

Assim como existe associação de capacitores e resistores, existe também associação de molas, ou seja, existe, em um sistema com  $n$  molas, uma mola equivalente com uma constante elástica equivalente. É essa constante elástica equivalente que deve ser substituída na equação que nos dá o período.

### I. Molas em série

Dizemos que duas molas estão em série quando elas são associadas de modo que sofram a atuação da mesma força.

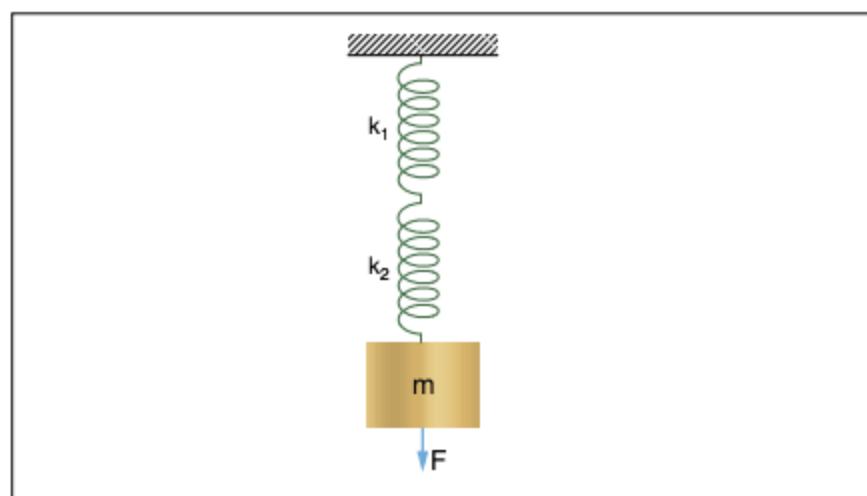


Fig. 20 Associação de molas em série.

Na mola  $k_1$ :  $F = k_1 \cdot x_1$

Na mola  $k_2$ :  $F = k_2 \cdot x_2$

Na associação  $k_{eq}$ :  $F = k_{eq} \cdot x_{eq}$

Na associação em série:  $x_{eq} = x_1 + x_2$ , logo:

$$\frac{F}{k_{eq}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \Rightarrow \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Assim, para uma associação de  $n$  molas em série, temos:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}$$

### II. Molas em paralelo

Duas molas estão associadas em paralelo quando estão sujeitas à mesma deformação.

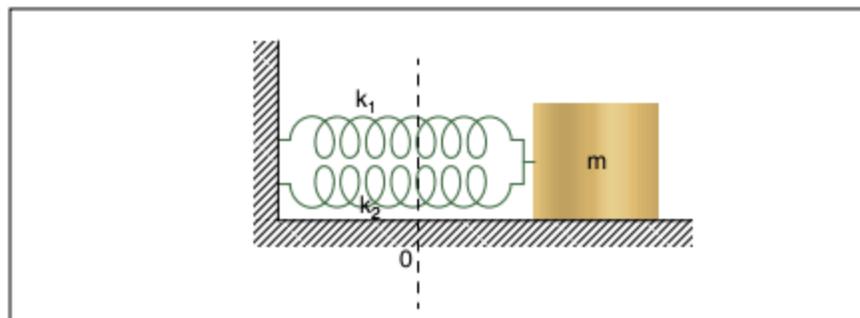


Fig. 21 Associação de molas em paralelo.

Na mola  $k_1$ :  $F_1 = k_1 \cdot x$

Na mola  $k_2$ :  $F_2 = k_2 \cdot x$

Na associação  $k_{eq}$ :  $F_{eq} = k_{eq} \cdot x$

Na associação em paralelo:  $F_{eq} = F_1 + F_2$ , logo:

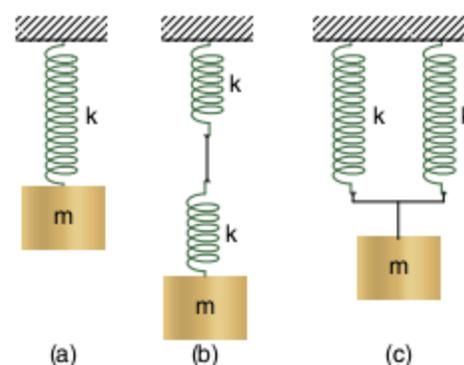
$$k_{eq} \cdot x = k_1 \cdot x + k_2 \cdot x \Rightarrow k_{eq} = k_1 + k_2$$

Assim, para uma associação de  $n$  molas em paralelo, temos:

$$k_{eq} = \sum_{i=1}^n k_i$$

### Exercício resolvido

10 Na figura (a), o bloco de massa  $m$  oscila com período  $T_a$ . Na figura (b), o seu período de oscilação é  $T_b$ , e na figura (c) é  $T_c$ .



Determine as relações  $\frac{T_a}{T_b}$  e  $\frac{T_a}{T_c}$ , sabendo que as molas são leves e iguais.

**Resolução:**

O bloco da figura (a) oscila com período  $T_a = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Na figura (b), temos duas molas iguais e em série. A constante elástica da mola equivalente  $k_{eq}$  é dada por:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k}$$

$$k_{eq} = \frac{k}{2}$$

Assim, o período  $T_b$  é dado por:

$$T_b = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{eq}}}$$

$$T_b = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{k}}$$

Logo:

$$\frac{T_a}{T_b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Na figura (c), temos duas molas iguais associadas em paralelo. A constante elástica da mola equivalente nesse caso é dada por:

$$k_{eq} = k + k = 2k$$

Assim, o período  $T_c$  é dado por:

$$T_c = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{eq}}}$$

$$T_c = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}$$

Logo:  $\frac{T_a}{T_c} = \sqrt{2}$

### Análise da energia no MHS

Vimos que o MHS está sujeito a uma força do tipo elástica, como a força em uma mola. Sabemos que um sistema elástico ideal pode armazenar energia, denominada energia potencial elástica.

$$E_p = \frac{k \cdot x^2}{2}$$

onde  $x$  é a distância à posição de equilíbrio.

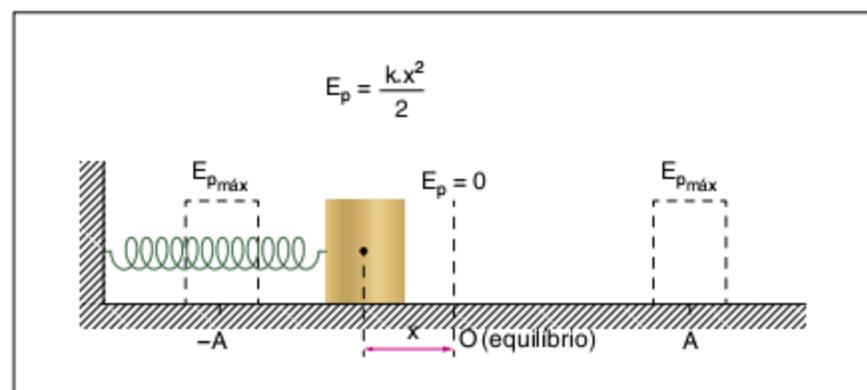


Fig. 22 Energia potencial elástica.

Veja que a energia potencial é máxima quando  $x$  é máximo, ou seja,  $x = \pm A$  e  $E_{p\text{máx}} = \frac{k \cdot A^2}{2}$ .

Sendo  $E_p = \frac{k \cdot x^2}{2}$  o gráfico é uma parábola, como mostrado na figura a seguir.

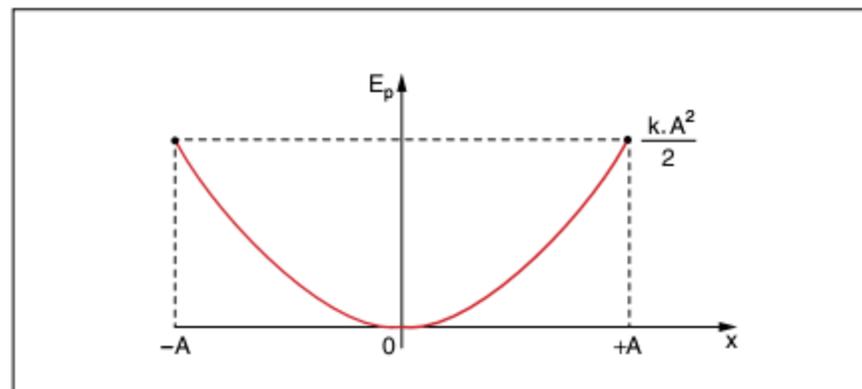


Fig. 23 Gráfico da energia potencial.

Até o momento falamos apenas de energia potencial no MHS. No entanto, como sabemos, o corpo realizador de MHS possui em muitos pontos do seu eixo de oscilação uma determinada velocidade. Se o corpo tem massa  $m$  e velocidade  $v$  em determinado instante, então podemos associar a ele uma energia cinética, devido ao movimento.

O valor dessa energia é dado por  $E_c = \frac{mv^2}{2}$ . Analisemos o sistema massa-mola do ponto de vista cinético.

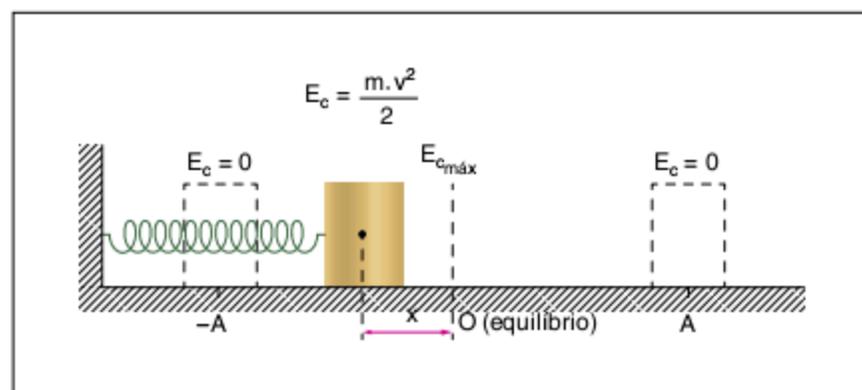


Fig. 24 Energia cinética.

Observe que nos pontos extremos ( $\pm A$ )  $E_c = 0$  e que a energia cinética é máxima quando a velocidade é máxima ( $v_{\text{máx}} = \omega A$ ).

$$\therefore E_{c\text{máx}} = \frac{m \cdot v_{\text{máx}}^2}{2} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot A^2}{2}$$

Como  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , temos:

$$E_{c\text{máx}} = \frac{k \cdot A^2}{2}$$

O gráfico da energia cinética *versus* elongação está mostrado na figura a seguir.

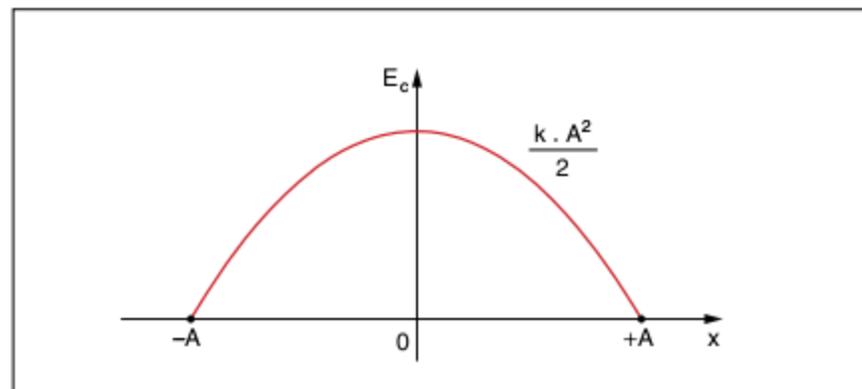


Fig. 25 Gráfico da energia cinética.

Deve-se notar que um corpo realizando um MHS tem energias cinética e potencial ao mesmo tempo:

• se  $E_c = 0 \Rightarrow E_{p_{\text{máx}}} = \frac{k \cdot A^2}{2}$

• se  $E_p = 0 \Rightarrow E_{c_{\text{máx}}} = \frac{k \cdot A^2}{2}$

Portanto, a maior energia contida no MHS é  $\frac{k \cdot A^2}{2}$ .

Como os sistemas estudados por nós são ideais, sem nenhum tipo de atrito, temos, então, energia mecânica constante.

Sabemos que  $E_{\text{mec}} = E_p + E_c$

Se  $E_p = 0 \Rightarrow E_c = \frac{k \cdot A^2}{2}$

$\therefore E_{\text{mec}} = 0 + \frac{k \cdot A^2}{2} \Rightarrow E_{\text{mec}} = \frac{k \cdot A^2}{2}$

## ATENÇÃO!

A energia mecânica do MHS é, em qualquer momento, igual a  $\frac{k \cdot A^2}{2}$

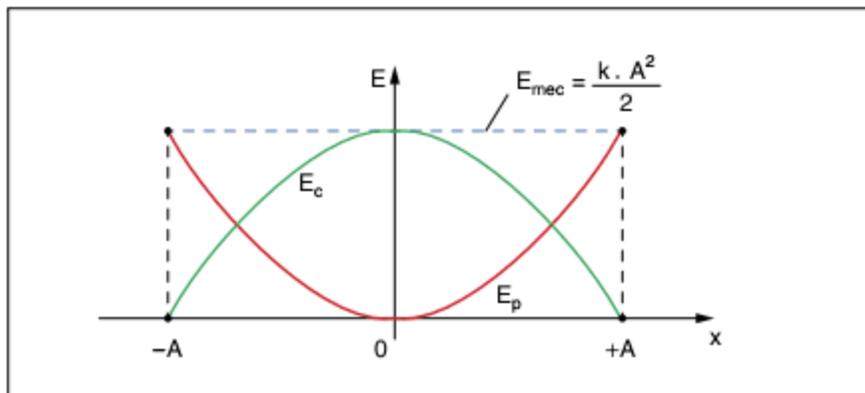


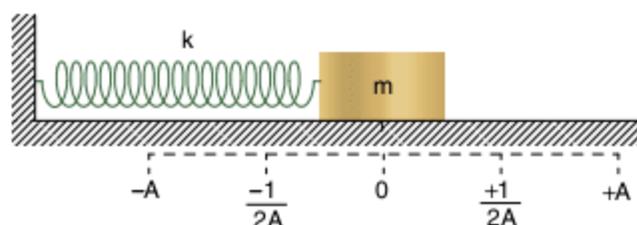
Fig. 26 Energia em um sistema massa-mola.

Observe que a soma dos gráficos resulta sempre na reta constante em que  $E_{\text{mec}} = \frac{k \cdot A^2}{2}$ .

### Exercício resolvido

11 Dê como resposta a soma dos números correspondentes às proposições corretas. A figura mostra um sistema ideal

massa-mola, apoiado sobre uma superfície horizontal sem atrito. O corpo de massa  $m$  é deslocado desde a posição de equilíbrio (posição 0) até a posição  $-A$  e abandonado em seguida.



Julgue os itens abaixo.

- 01 A energia mecânica do corpo no ponto  $+A$  é maior que a energia no ponto  $-A$ .
- 02 A energia mecânica do corpo no ponto  $+\frac{1}{2}A$  é 50% potencial e 50% cinética.
- 04 A energia mecânica do corpo, ao passar pela posição de equilíbrio, é menor que a energia no ponto  $+A$  ou  $-A$ .
- 08 A energia cinética do corpo no ponto  $-\frac{1}{2}A$  é menor que a energia cinética no ponto  $+\frac{1}{2}A$ .
- 16 A energia mecânica do corpo nos pontos  $+A$  e  $-A$  é exclusivamente potencial.
- 32 A energia mecânica do corpo, ao passar pela posição de equilíbrio, é exclusivamente cinética.

Soma =

### Resolução:

- 01 (F). Considerando o sistema conservativo,  $E_{\text{mec}}$  é constante. Ver gráfico. (Fig.26)
  - 02 (F). Para  $x = \frac{A}{2}$ , temos:  

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\frac{A^2}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}kA^2\right)$$

$$\therefore E_p = 25\% E_{\text{mec}}$$
  - 04 (F). Idem item 1.
  - 08 (F).  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ , sendo sempre positiva e simétrica em relação à origem do movimento.
  - 16 (V). Ver gráfico. (Fig.26)
  - 32 (V). Ver gráfico. (Fig.26)
- Soma = 48

## Revisando

1 Complete os espaços em branco.

Seja a equação que nos dá a posição de um móvel realizador de MHS:

$$x = 40 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \pi \cdot \frac{t}{2}\right) \text{ (SI)}$$

- a) A fase inicial do MHS é \_\_\_\_\_.
- b) A pulsação do MHS é \_\_\_\_\_.

- c) A amplitude do movimento é \_\_\_\_\_.
- d) O período é \_\_\_\_\_.
- e) A frequência é \_\_\_\_\_.
- f) A equação da velocidade é \_\_\_\_\_.
- g) A equação da aceleração é \_\_\_\_\_.
- h) A equação de Torricelli é \_\_\_\_\_.

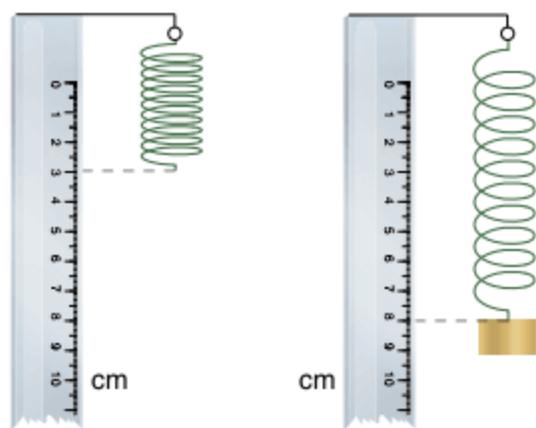
**2** Uma partícula executa um movimento harmônico simples de amplitude 25 cm e frequência 4,0 Hz.

Determine:

- a pulsação do movimento.
- a velocidade escalar da partícula, ao passar em movimento retrógrado pelo ponto de elongação 12 cm.

**3 PUC** A amplitude de um movimento harmônico simples é de 6 cm e a sua velocidade máxima é de  $3\pi$  cm/s. Qual o período desse movimento?

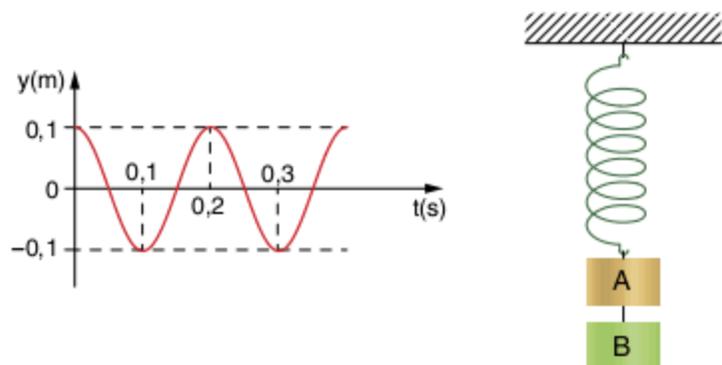
**4 PUC-SP** Na figura a seguir, está representada a situação de equilíbrio de uma mola ideal quando livre e depois de ser presa a um corpo de massa 400 g.



Sendo a aceleração da gravidade local  $10 \text{ m/s}^2$ , determine:

- a constante elástica da mola;
- o tipo e o período do movimento que o corpo descreveria, caso fosse suspenso 1,0 cm de sua posição de equilíbrio. Despreze a ação do ar sobre o movimento.

**5 Fuvest** Dois corpos, A e B, ligados por um fio, encontram-se presos à extremidade de uma mola, em repouso. Parte-se o fio que liga os corpos, e o corpo A passa a executar um movimento oscilatório, descrito pelo gráfico a seguir. Dado:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



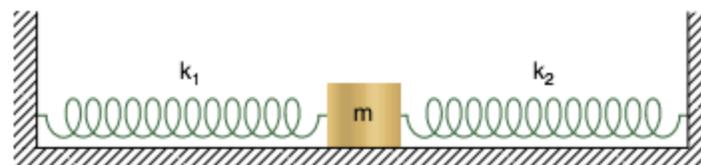
Sendo de 200 g a massa do corpo B, pede-se:

- a constante elástica da mola.
- a frequência de oscilação do corpo A.

**6 Cessem (Adapt.)** A frequência de um pêndulo simples, de comprimento  $L$  e massa  $M$ , é de 10 oscilações por segundo. Qual é o período de um pêndulo simples de comprimento igual a  $4L$  e massa igual a  $2M$ ?

- 0,1 s
- 0,2 s
- 0,3 s
- 0,4 s
- 0,5 s

**7** Sabe-se que as molas da figura têm constantes elásticas  $k_1 = 50 \text{ N/m}$  e  $k_2 = 30 \text{ N/m}$ , respectivamente. O corpo tem massa 5 kg.

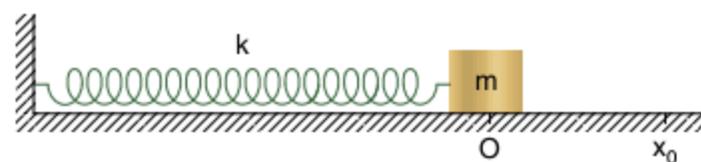


Determine:

- a constante elástica da mola equivalente ao sistema;
- o período de oscilação realizada pelo sistema;
- a força necessária para deslocar o corpo de 10 cm para a direita.

**8 ITA (Adapt.)** Uma mola de constante elástica  $k$  e massa desprezível está suspensa verticalmente com a extremidade livre na posição 0. Prende-se nessa extremidade um corpo de massa  $m$  que é, em seguida, abandonado da posição 0, com velocidade inicial nula. A aceleração da gravidade local é  $g$ . Nesse caso determine a posição mais baixa atingida pela massa  $m$  e o período de oscilação do sistema.

**9 Vunesp** Num sistema massa-mola, conforme a figura (superfície horizontal sem atrito), onde  $k$  é a constante elástica da mola, a massa é deslocada de uma distância  $x_0$ , passando a oscilar.

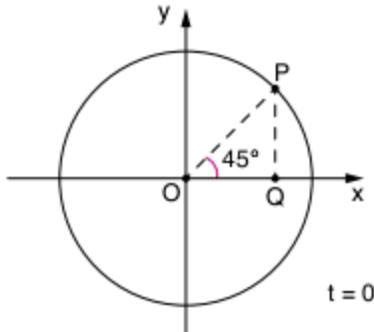


- Em que ponto, ou pontos, a energia cinética é igual a  $\frac{7}{9}$  da energia potencial do sistema?
- A energia cinética pode ser superior à potencial em algum ponto? Explique sua resposta.

# Exercícios propostos

## Estudo cinemático do MHS

**1 Fuvest** Um ponto P percorre uma circunferência de raio R com velocidade angular constante  $\omega$ . No instante  $t = 0$ , o ponto se encontra na posição indicada na figura.



- Qual a função horária do movimento de Q, projeção de P no eixo Ox?
- Para que valor de x a velocidade de Q é máxima?

**2** É dada a equação horária da elongação de um MHS em unidades do Sistema Internacional:

$$x = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}t + 2\pi\right)$$

- Determine a amplitude, a pulsação, a fase inicial, o período e a frequência do movimento.
- Escreva as equações horárias da velocidade escalar e da aceleração escalar do movimento.
- Determine os valores máximos da velocidade escalar e da aceleração escalar desse movimento.

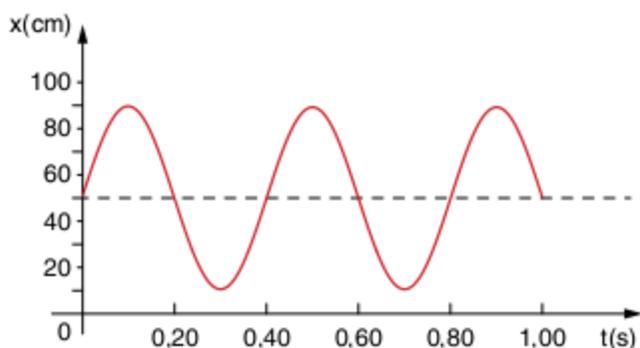
**3 Uerj** Uma vibração periódica satisfaz, no Sistema Internacional, à função:

$$x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{20} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Logo:

- a frequência é de 20 vibrações por segundo.
- para  $t = 0$ , a velocidade é nula.
- para  $t = 20$  s, a aceleração não é nula.
- a fase inicial é de  $180^\circ$ .
- todas as afirmativas estão erradas.

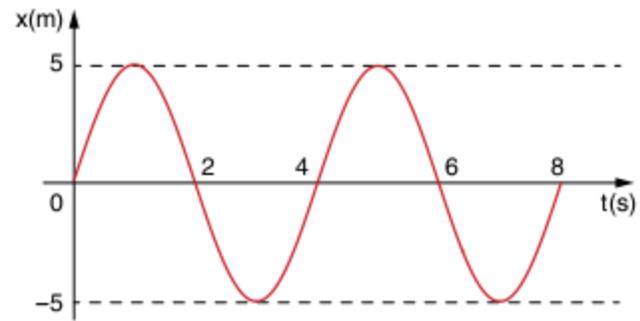
**4 Cesgranrio** O gráfico mostra como varia com o tempo a posição de uma partícula presa à extremidade de uma mola ideal (oscilador harmônico simples).



Qual a amplitude da oscilação?

- 10 cm
- 40 cm
- 50 cm
- 60 cm
- 90 cm

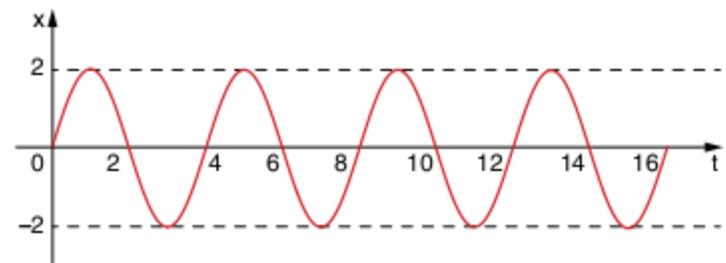
**5 Unisinos** No gráfico do movimento harmônico simples, representado na figura, a amplitude é \_\_\_\_\_ m e a frequência é \_\_\_\_\_ Hz.



As lacunas são corretamente preenchidas, respectivamente, por:

- 5; 0,25
- 5; 0,25
- 5; 2
- 5; 4
- 10; 4

**6 PUC** O registro gráfico das oscilações de um dado corpo é o indicado no esquema abaixo, onde x representa a elongação em cm e t o tempo em segundos.



I. Nestas condições, podemos afirmar que:

- o período é de  $\frac{1}{4}$  segundo.
- a frequência é de 2 Hz.
- a frequência é de  $\frac{1}{4}$  Hz.
- a amplitude é de 4 cm.
- o período é de 2 s.

II. Com base no teste anterior, a equação horária é dada por:

- |  |  |
|--|--|
| (a) $x = 2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}t\right)$ | (d) $x = -2 \cdot \cos\left(\frac{2t}{\pi}\right)$ |
| (b) $x = 2 \cdot \cos\left(\frac{2t}{\pi}\right)$                  | (e) $x = 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ |
| (c) $x = 2 \cdot \text{sen}(\pi \cdot t)$                          |  |

**7 Unisinos** Uma partícula vibra realizando um movimento harmônico simples.

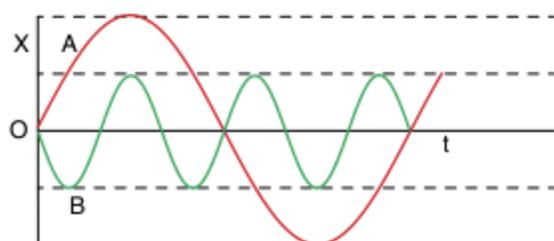
Nos extremos da trajetória, a velocidade da partícula é \_\_\_\_\_ e sua aceleração é \_\_\_\_\_. No centro da trajetória, a velocidade é \_\_\_\_\_ e a aceleração é \_\_\_\_\_. As lacunas são corretamente preenchidas, respectivamente, por:

- (a) nula, máxima, nula, máxima
- (b) máxima, nula, nula, máxima
- (c) nula, máxima, máxima, nula
- (d) máxima, nula, máxima, nula
- (e) nula, máxima, mínima, máxima

**8 ITA** Um ponto localizado na corda de uma guitarra está vibrando com uma frequência de 400 Hz e amplitude de 1 mm. A velocidade máxima do ponto é:

- (a) 0,80 m/s
- (b) 8,00 m/s
- (c) 2,51 m/s
- (d) 5,02 m/s
- (e) 25,1 m/s

**9 Fesp-SP** Observe os dois movimentos oscilatórios representados pelo gráfico abaixo e responda às questões a seguir.



I. A razão entre as frequências de A e de B é:

- (a) 1
- (b)  $\frac{1}{3}$
- (c)  $\frac{1}{2}$
- (d) 3
- (e) 2

II. A razão entre as amplitudes de A e de B é:

- (a) 1
- (b)  $\frac{1}{3}$
- (c)  $\frac{1}{2}$
- (d) 3
- (e) 2

**10 FEI** Calcular a pulsação de um movimento harmônico simples, sabendo que os valores de velocidade e aceleração são, respectivamente:

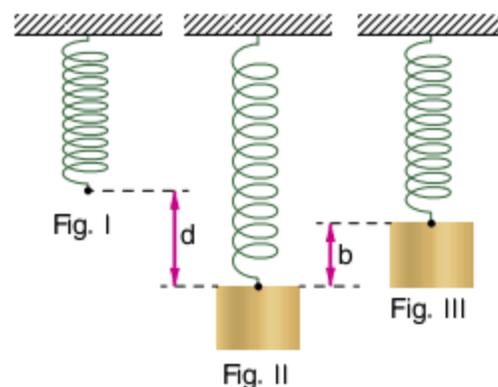
$$v_{\text{máx}} = 4 \text{ m/s e } a_{\text{máx}} = 5 \text{ m/s}^2$$

### Estudo dinâmico do MHS

**11 Mackenzie** Uma partícula realiza um movimento harmônico simples, em torno de um ponto E, assumido para a origem das elongações. Podemos afirmar que o móvel está sujeito a uma força que obedece à relação (em módulo):

- (a)  $F = kx$
- (b)  $F = k/x$
- (c)  $F = kx^2$
- (d)  $F = kx^2/2$
- (e)  $F = k/x^2$

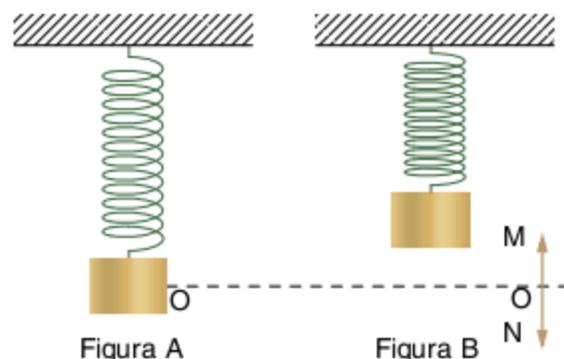
**12** A figura I representa uma mola de constante elástica  $k$ , não deformada. Um bloco de peso  $P$ , ligado à mola, fica em equilíbrio na posição indicada na figura II, tendo a mola sofrido uma deformação  $d$ . A seguir, levanta-se o bloco de uma altura  $b$  (Fig. III) e deixa-o cair. O bloco passa a oscilar.



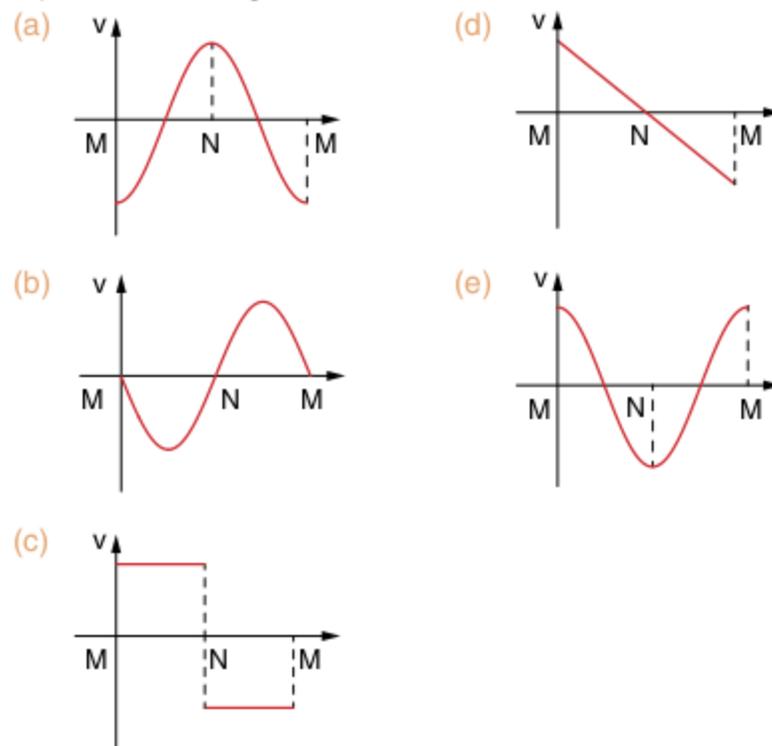
Determine:

- a) o valor de  $d$  em função de  $P$  e  $k$ .
- b) a intensidade da força resultante, que age no bloco, no ponto mais baixo do seu percurso, em função de  $k$  e  $b$ .

**13 PUC-RS** Nas figuras, aparece um corpo denso suspenso por uma mola helicoidal elástica. Na figura A, o corpo está em repouso; e na B, oscilando em torno da posição de repouso, isto é, entre M e N.



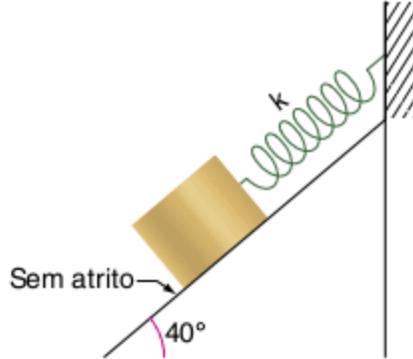
Levando em consideração somente a força peso do corpo e a força elástica da mola, o movimento é harmônico simples. Assim, a velocidade do corpo em função da posição é mais bem representada no gráfico:



**14** Um bloco pesando 14,0 N, que desliza sem atrito em um plano inclinado  $40^\circ$ , está conectado ao topo do plano por uma mola sem massa, com o comprimento em repouso igual a 0,450 m e constante  $k = 120 \text{ N/m}$ , como mostra a figura.

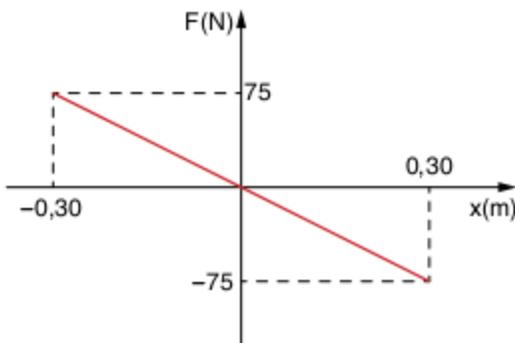
- A que distância do topo do plano inclinado o bloco para?
- Se o bloco for puxado um pouco para baixo e liberado, qual o período das oscilações resultantes?

Dado:  $\text{sen } 40^\circ \approx 0,65$ .

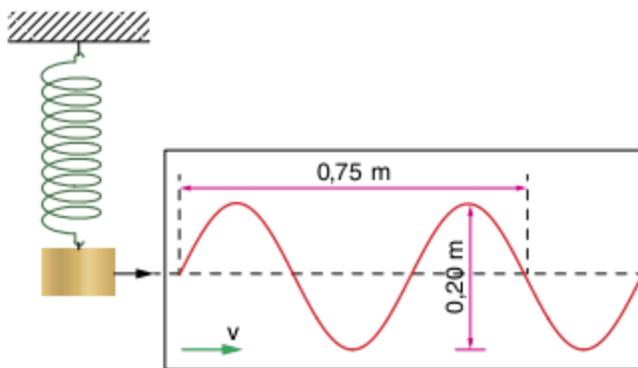


**15** Um oscilador harmônico simples consiste em um bloco de massa 0,50 kg ligado a determinada mola. O bloco desliza para frente e para trás ao longo de uma linha reta, em uma superfície sem atrito, com ponto de equilíbrio em  $x = 0$ . Em  $t = 0$ , o bloco está em seu ponto de equilíbrio e se movendo na direção em que  $x$  aumenta. Um gráfico da magnitude da força resultante  $F$  no bloco, como uma função de sua posição, é mostrado na figura a seguir. Determine:

- a amplitude.
- o período do movimento harmônico simples.
- a magnitude da aceleração máxima sofrida pelo bloco.



**16 Fuvest** Um corpo de massa 2 kg oscila livremente, suspenso a uma mola helicoidal de massa desprezível. As posições ocupadas pelo corpo são registradas, por meio de um estilete preso a ele, em uma fita de papel vertical que se desloca horizontalmente, com velocidade constante  $v = 0,20 \text{ m/s}$ .

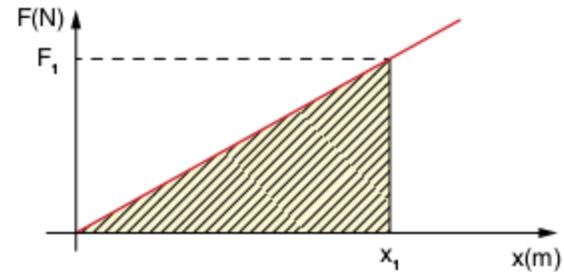


Determine:

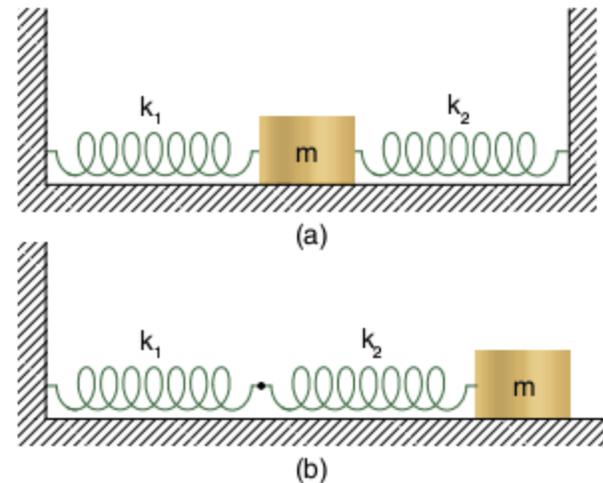
- a frequência e a amplitude do movimento do corpo.
- a constante elástica da mola.

c) a função horária do movimento do corpo, sabendo que no instante  $t = 0$  a elongação é nula e o corpo está subindo.

**17 Faap** A força elástica de uma mola é definida, relativamente à sua elongação  $x$ , pelo gráfico da figura, onde a área hachurada equivale a  $0,90 \text{ Nm}$ . Se um corpo de peso 6 N for suspenso por essa mola e o sistema posto a oscilar verticalmente, ele oscilará com um período igual ao de um pêndulo simples de comprimento 0,12 m. Calcule o valor da elongação  $x$ , indicada no gráfico.

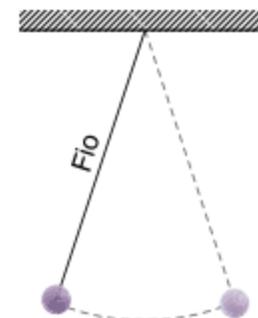


**18** Mostrar que nas situações da figura a e b, o corpo oscila com a frequência  $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{K_{\text{eq}} / m}$ , onde  $K_{\text{eq}}$  é dada por (a)  $K_{\text{eq}} = K_1 + K_2$  e (b)  $\frac{1}{K_{\text{eq}}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$ . Sugestão: Achar a força resultante  $F$  que atua sobre o corpo, quando houver um pequeno deslocamento das molas ( $\Delta x_1$  e  $\Delta x_2$  são diferentes, mas a soma é igual a  $\Delta x$ ).



### Período de um pêndulo simples

**19 Mackenzie** O sistema da figura é conhecido por pêndulo simples. O fio de comprimento  $L$  é ideal,  $m$  é a massa suspensa e  $T$  é o período do pêndulo nessas condições.



Ao dobrarmos a massa suspensa, o período será:

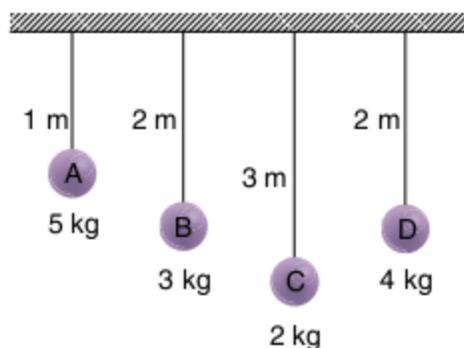
- |          |                   |                   |
|----------|-------------------|-------------------|
| (a) $4T$ | (c) $T$           | (e) $\frac{T}{4}$ |
| (b) $2T$ | (d) $\frac{T}{2}$ |                   |

- 20 ITA** Dados três pêndulos simples de comprimento e massas, respectivamente, iguais a 20 cm e 1 kg, 30 cm e 2 kg, 20 cm e 8 kg, situados próximos uns dos outros, pode-se afirmar que:
- o primeiro oscilará mais lentamente que os outros.
  - o segundo oscilará mais lentamente que os outros.
  - o terceiro oscilará mais lentamente que os outros.
  - não é possível prever qual oscilará mais lentamente.
  - n.d.a.

- 21 Osec-SP** Para que o período de um pêndulo simples aumente de um fator 2, o comprimento desse pêndulo deve aumentar de um fator:

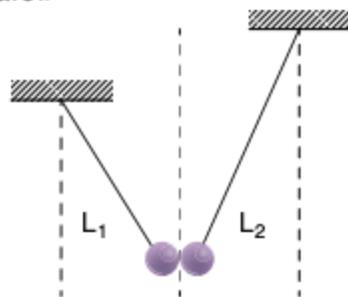
- $\sqrt{2}$
- 2p
- 2
- 4
- 8

- 22 PUC-SP** Em relação aos pêndulos representados no esquema, podemos afirmar que:



- os períodos de oscilação de B e C são iguais.
- A é o que oscila mais vagorosamente.
- os períodos de oscilação de B e D são iguais.
- o período de oscilação de D é o dobro do de C.
- o período de oscilações de A é a metade do de D.

- 23 ITA** Dois pêndulos de comprimento  $L_1$  e  $L_2$ , conforme a figura, oscilam de tal modo que os dois bulbos se encontram sempre que decorrem 6 períodos do pêndulo menor e 4 períodos do pêndulo maior.

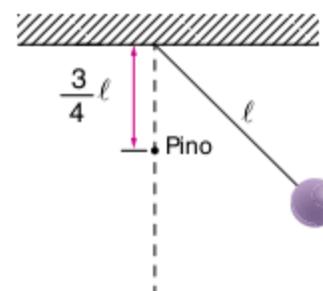


A relação  $L_2/L_1$  deve ser:

- $\frac{9}{4}$
- $\frac{3}{2}$
- 2
- $\frac{4}{9}$
- $\frac{2}{3}$

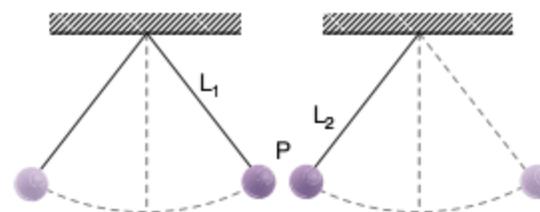
- 24 Faap** Numa noite chuvosa, uma pessoa tentando dormir percebe o ruído periódico de uma goteira. Com um recipiente graduado, mede o volume de 10 gotas e encontra  $5 \text{ cm}^3$ . Coloca uma vasilha vazia sob a goteira à meia-noite e, às 6 horas da manhã, quando acorda verifica que a vasilha contém 13,5 litros d'água. Qual seria o comprimento de pêndulo simples com o mesmo período da goteira? Considere  $g = \pi^2 \text{ m/s}^2$ .

- 25 ITA** Um pêndulo simples oscila com um período de 2,0 s. Se cravarmos um pino a uma distância  $\frac{3}{4}\ell$  do ponto de suspensão e na vertical que passa por aquele ponto, como mostrado na figura, qual será o novo período do pêndulo? Desprezar os atritos. Considere ângulos pequenos tanto antes quanto depois de atingir o pino.



- 1,5 s
- 2,7 s
- 3,0 s
- 4,0 s
- O período de oscilação não se altera.

- 26 ITA** Dois pêndulos simples são abandonados a partir de uma posição P em que eles se tocam, como ilustra a figura.



Sabendo-se que os comprimentos dos pêndulos estão na razão  $\frac{L_2}{L_1} = \frac{4}{9}$  e que os períodos são  $T_1$  e  $T_2$ , depois de quanto tempo t eles se tocarão novamente?

- $t = 3T_1$
- $t = 2T_1$
- $t = 4T_2$
- $t = 9T_1$
- Eles nunca se tocarão outra vez.

- 27 Fuvest** Na Terra, certo pêndulo simples executa oscilações com o período de 1 s.

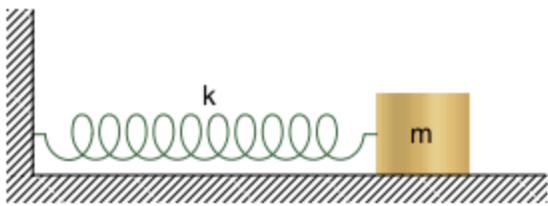
- Qual o período desse pêndulo, se posto a oscilar na Lua, onde a aceleração da gravidade é 6 vezes menor?
- Que aconteceria com o período desse pêndulo, à medida que fosse removido para uma região livre de ações gravitacionais?

**28 UEPB** A frequência de um corpo é definida como o número de vibrações completas que o corpo efetua por unidade de tempo. Suponha que um pequeno corpo, de massa 2 kg, esteja preso na extremidade de um fio de peso desprezível, cujo comprimento é 10 cm, e oscilando em um plano vertical. Adotando-se a aceleração da gravidade  $g = 10 \text{ m/s}^2$  e  $\pi = 3$ , pode-se dizer que a frequência deste corpo em Hertz (Hz) vale:

- (a) 0,17
- (b) 1,67
- (c) 10
- (d) 30
- (e) 60

### Análise da energia no MHS

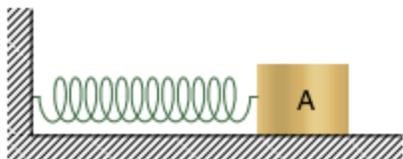
**29 FEI** No esquema da figura, a mola, de constante elástica  $k$ , está comprimida de uma quantidade  $x$  :



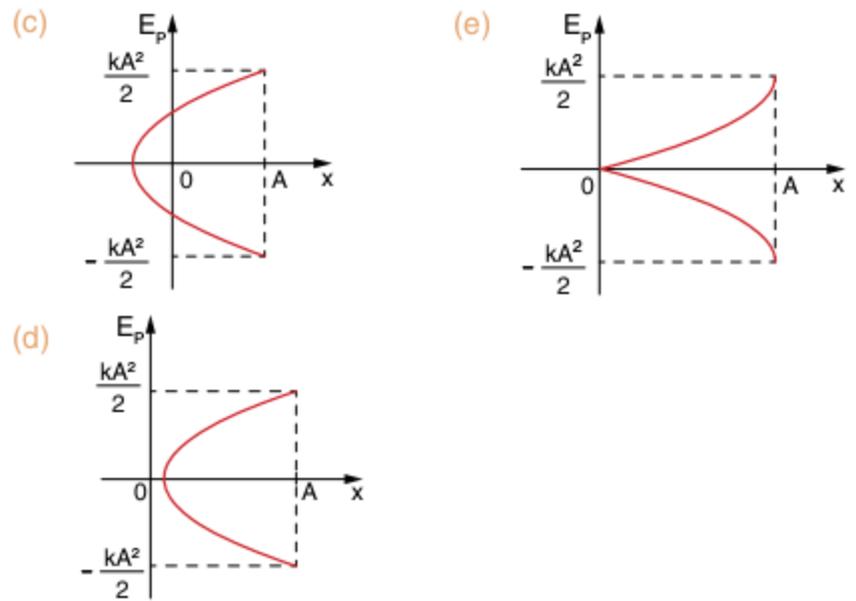
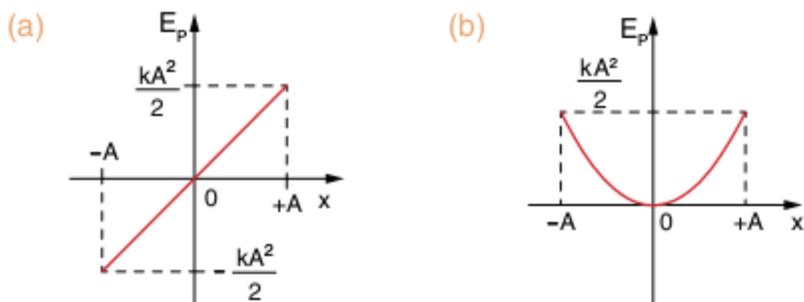
Abandonando-se o corpo de massa  $m$ , podemos afirmar que

- (a) o movimento do corpo será retilíneo e uniformemente variado.
- (b) a energia cinética do corpo é máxima quando a mola não estiver deformada.
- (c) a intensidade da força resultante, que age no corpo, é nula quando a mola tem máxima distensão.
- (d) a velocidade do corpo será máxima quando a mola possuir máxima compressão.
- (e) a energia potencial elástica da mola será positiva quando a mola estiver distendida, e negativa quando estiver comprimida.

**30** O corpo A de massa  $m$  está preso à mola de constante elástica  $k$  e oscila horizontalmente, sem atrito, segundo uma trajetória retilínea. Quando a mola não está sendo solicitada por forças na posição  $x = 0$ , a energia potencial é igual a 0.



Nessas condições, pode-se dizer que o gráfico da energia potencial  $E_p$  em função de  $x$  está mais bem representado por:

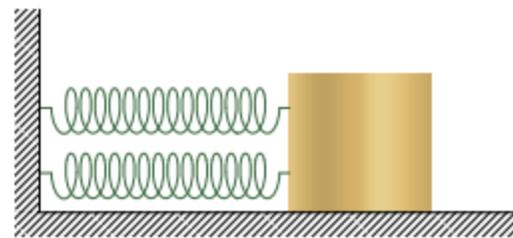


**31 Omec** Um corpo de massa  $m$ , preso a uma mola de massa desprezível e constante elástica  $k$ , oscila em MHS (movimento harmônico simples) de amplitude  $A$ .

As energias cinética e potencial do corpo assumem valores iguais nas posições:

- (a)  $x = \pm A$
- (b)  $x = \pm 2A$
- (c)  $x = \pm \frac{A\sqrt{2}}{2}$
- (d)  $x = 0$
- (e)  $x = \pm \frac{A}{2}$

**32** O bloco da figura tem massa  $m = 2,0 \text{ kg}$ . As molas são ideais e idênticas, de constante elástica  $k = 4,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}$ , cada. Desloca-se o bloco de 20 cm, distendendo-se as molas. A seguir, o bloco é abandonado, passando a oscilar no plano horizontal, isento de atrito.



Determine para o sistema oscilante:

- a) o período de oscilação.
- b) a energia mecânica.

## TEXTOS COMPLEMENTARES

### Oscilações forçadas e ressonância

Nos exemplos estudados anteriormente, os sistemas são considerados sempre ideais, no sentido de dissipação de energia, mantendo as amplitudes de oscilação constantes ao longo do tempo. Na prática, devido à presença de forças dissipativas, a amplitude de oscilação diminui gradativamente, até o sistema atingir o equilíbrio. As oscilações, nessas condições, são chamadas amortecidas. A energia do sistema se transfere para o meio onde ele oscila.

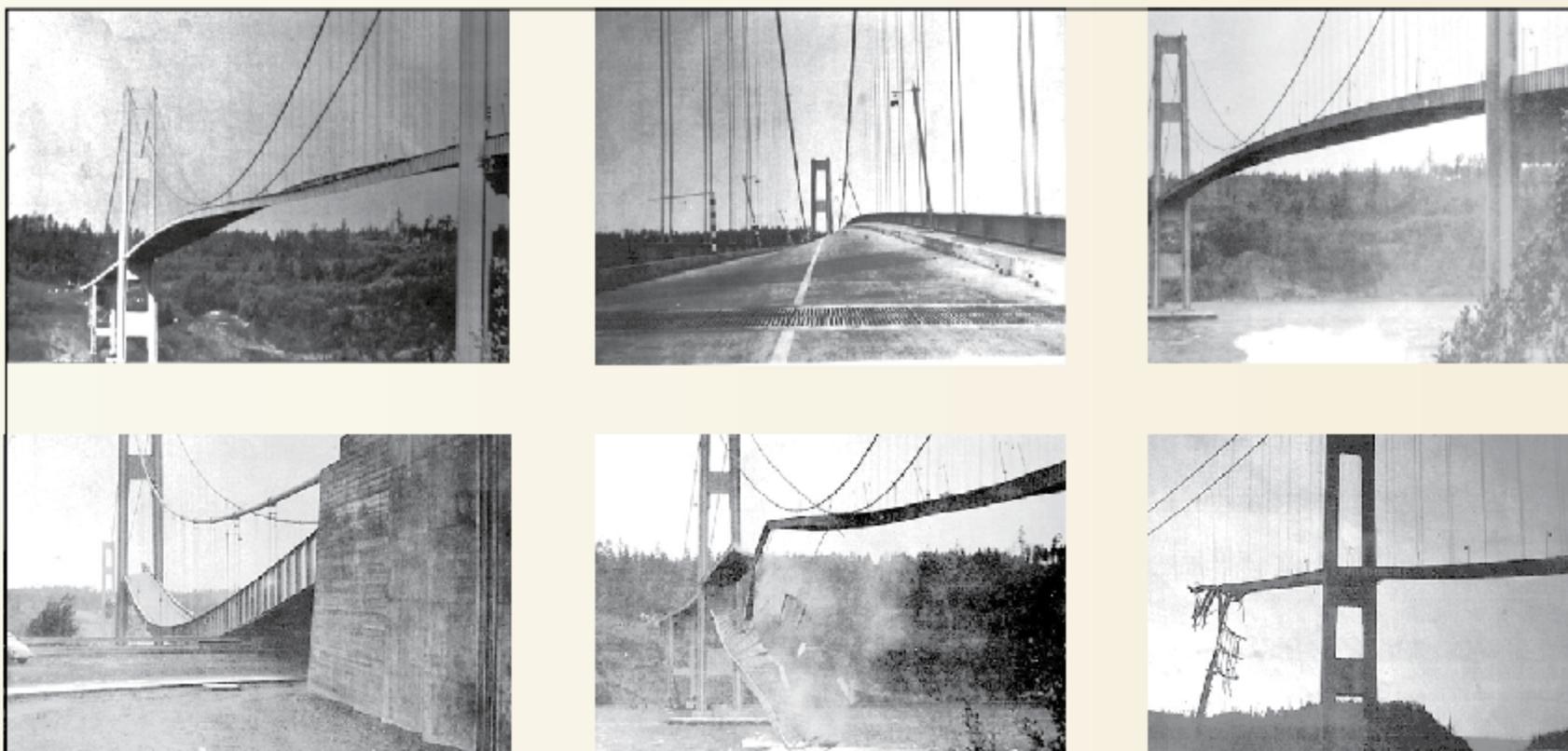
É possível manter o sistema oscilando através de um fornecimento externo e periódico de energia. Quando o fornecimento externo de energia obriga o sistema a oscilar com uma frequência diferente de sua frequência própria de vibração, dizemos que o sistema realiza **oscilações forçadas**.

Se, por outro lado, o sistema recebe energia periodicamente, com frequência igual à sua frequência própria de vibração, dizemos que o sistema entra em **ressonância**. Nessa situação, o sistema gradativamente armazena energia, passando a vibrar com amplitude crescente, a qual tende a atingir o maior valor possível.

A seguir, alguns exemplos de ressonância.

- Dando, em um balanço, empurrões periódicos, com frequência igual à frequência própria de oscilação do balanço, a amplitude das oscilações vai gradativamente crescendo.
- Uma ponte possui frequências próprias de vibração. Por isso, os soldados, ao atravessarem uma ponte, devem fazê-lo em passo não cadenciado. Isso porque a frequência do passo cadenciado pode coincidir com uma das frequências próprias de vibração da ponte, que pode entrar em ressonância. O aumento da amplitude de oscilação pode ocasionar a ruptura da ponte.

No dia primeiro de julho de 1940, a ponte Tacoma Narrows em Puget Sound, no estado de Washington, foi completada e entregue ao tráfego. Era, então, a terceira do mundo em comprimento do vão livre. Apenas quatro meses mais tarde uma ventania fez a ponte oscilar até o estrado do vão principal romper-se, soltando-se dos cabos e fragmentando-se dentro da água. O vento firme ocasionou uma força pulsante em ressonância com a frequência natural da estrutura. Isto produziu um grande aumento na amplitude até que a ponte foi destruída. Muitas outras pontes foram mais tarde reprojatadas para que se tornassem aerodinamicamente estáveis.



UNIVERSITY OF WASHINGTON LIBRARIES SPECIAL COLLECTIONS DIVISION

Colapso da ponte Tacoma Narrows.

### Do cuco ao relógio atômico óptico

*Oscilações da luz em átomos de cálcio permitem subdividir o segundo em medidas de até 17 algarismos*

De dentro do relógio saía o cuco, mas faz muito tempo. O passarinho que chamava a atenção para as horas virou apenas um personagem simpático da fascinante história dos relógios, história que vem do início das navegações, quando o pêndulo, de movimentos regulares em terra, ficava instável ao balanço do mar e

deixava perdidos os aventureiros, sem que soubessem a quanto se encontravam do porto de partida.

*Longitude*, aliás, é um livro sobre John Harrison, nascido em 1693 e falecido em 1776. Ele resolveu um dos principais problemas do século 18, construindo um relógio que permitiu a determinação precisa da longitude dos barcos, evitando muitos naufrágios. A latitude não preocupava, pois era obtida por meio das estrelas.

Se fosse a intenção, o professor Flávio Caldas da Cruz poderia assegurar a validade dessa entrevista abordando somente os fatos pitorescos por trás da evolução do relógio e descrevendo as faces do tempo. Mas, como integrante do Grupo de Lasers e Aplicações, do Departamento de Eletrônica Quântica do Instituto de Física Gleb Wataghin (IFGW) da Unicamp, Cruz está à frente de uma pesquisa que deixa o pêndulo, sem exageros, a séculos-luz de distância.

O objeto da pesquisa é um relógio óptico baseado em átomos de cálcio. Até o final do próximo ano ele deverá permitir medições que, para leigos (mesmo os afeitos aos milésimos de segundo), soam fantásticas: “Algo como 1 parte em 10 elevado a 17”, diz Flávio Cruz, calculando esta potência para o leitor em 17 algarismos ou 100 quatrilhões de partes de segundo.

Os relógios ópticos terão forte impacto na área tecnológica. Dentre muitas, o professor cita três exemplos de aplicações: na navegação aérea e marítima, que hoje dependente de sinais de satélites para determinar a posição de aeronaves e embarcações; nas telecomunicações ópticas, onde a taxa de transferência de dados é altíssima, exigindo equipamentos precisos para direcionamento de fluxos e sincronização de redes; e no gerenciamento da energia elétrica, onde relógios atômicos já são utilizados para medir oscilações e detectar falhas na transmissão de uma estação a outra.

“Pode ser também que se mexa em teorias fundamentais da física. O relógio óptico permitiria, por exemplo, medir possíveis variações no que chamamos de constante de estrutura fina, que é uma combinação de outras constantes: a carga do elétron, a velocidade da luz e a constante de Planck. Sendo constantes, elas não poderiam variar. Mas existe a suspeita, surgida a partir de observação astronômica há dois anos, que essa constante de estrutura fina esteja variando com o tempo”, diz o pesquisador.

**Marcando o tempo** – Uma melhor compreensão do funcionamento do relógio atômico óptico pede um histórico adicional. No início do século 20, surgiu o relógio de quartzo. Se, no cuco da parede, o objeto que oscilava em movimentos regulares era o pêndulo, o oscilador passou a ser o cristal de quartzo: submetido a uma voltagem (tensão), o cristal oscila com uma frequência bem-definida. Contando-se o número de oscilações, marca-se o tempo. Ainda assim, a medida continuou sendo astronômica, tanto que os observatórios respondiam pela medição oficial.

Na década de 1950, teve início o domínio do relógio atômico. Constatou-se que os átomos ou moléculas podem absorver luz ou outra radiação e que essa radiação também é bastante regular, podendo-se usá-la para medir o tempo de forma muito mais precisa que o método astronômico. Mesmo porque já se sabia que a rotação da Terra não era tão estável, que havia certa desaceleração exigindo uma correção de um segundo de tempos em tempos.

Dentro deste relógio existe um átomo, excitado por um oscilador. Um mecanismo de correção faz com que a frequência do oscilador esteja sempre em ressonância com a frequência do átomo. Um dispositivo contador registra o número de oscilações, ou seja: um segundo é o período em que ocorrem tantas oscilações. Essa técnica evoluiu a ponto de mudar a definição do segundo, que se baseia hoje numa transição específica do átomo de célio. O oscilador, no caso, é uma fonte de micro-ondas (eletrônica), e a transição do célio é imutável, igual em qualquer parte do planeta.

**A grandeza da luz** – A pesquisa desenvolvida pelo grupo de Flávio Cruz na Unicamp ainda utiliza átomos, mas não os de célio ou de rubídio (cujos relógios, embora caros, são difundidos até comercialmente). “Substituímos por átomos de cálcio, que estão absorvendo a luz. No caso do célio, a oscilação se dá em micro-ondas (do tipo de antenas), que a gente não vê e cuja precisão é limitada. Na transição óptica, as oscilações, por se tratarem de luz, são muito mais rápidas, de centenas de trilhões por segundo. Conseguimos, então, subdividir o tempo em intervalos bem menores, garantindo maior precisão que a dos relógios atômicos atuais”, explica o professor.

Não precisamos de tamanha precisão no nosso dia a dia, admite Flávio Cruz. “Mas importa bem menos o fato de se tratar de um relógio que marca o tempo, e muito mais o fato de possuir um oscilador extremamente estável que atende a muitas necessidades da física e engenharia. Mesmo baseado em um laser, um relógio atômico óptico fornece também sinais na faixa de micro-ondas, mas com estabilidades mil vezes maiores do que a micro-onda gerada em um relógio de célio, por exemplo”, observa. E acrescenta: “Aí está a grande vantagem: uma enorme economia do tempo necessário para atingir uma determinada precisão numa medida. Por exemplo, a variação da constante de estrutura fina poderia ser detectada em semanas ou dias com um relógio óptico, em vez de anos com o uso da tecnologia atual”.

O relógio óptico em desenvolvimento na Unicamp, além de ser um padrão de tempo e frequência, também será um padrão de comprimento para a medição de objetos ou distâncias. Há muito que se aboliu a régua de platina para reproduzir o “metro”, as definições modernas utilizam lasers. Apenas dois outros grupos no mundo estão trabalhando com o relógio atômico óptico de cálcio: no NIST (*National Institute of Standards and Technology*), dos Estados Unidos, e no Instituto de Metrologia da Alemanha, ambos em cooperação estreita com os pesquisadores do IFGW.

### A hora incerta

O professor Flávio Cruz, do IFGW, prevê que os relógios ópticos em desenvolvimento nos dois últimos anos, ao mesmo tempo em que permitirão a verificação de grandezas com uma precisão antes inimaginável, também significarão um intrigante problema. “Eles são tão precisos que vai ficar muito difícil sincronizar um com o outro. Uma diferença de 10 centímetros de altura causará diferença nas taxas”, explica.

O pesquisador da Unicamp lembra a Teoria da Relatividade, de Einstein, que aponta dois aspectos que afetam a passagem do tempo: o movimento e a gravidade. Se um relógio se mover mais rápido que o outro, ou se estiver sob campo gravitacional maior, o tempo correrá mais devagar. “Existe uma diferença na passagem de tempo aqui na sala, onde estamos conversando, e em cima de um morro, por causa da variação de altitude”, ilustra.

Não teríamos, então, um relógio que marque a hora certa? “Um relógio para a finalidade que a grande maioria das pessoas precisa, sem dúvida que sim. Mas se o grau de exigência chegar à precisão dos relógios ópticos, vai ser complicado definir a hora correta”, responde Flávio Cruz, ressaltando que está se falando no nível do fantástico.

Luiz Sugimoto, *Jornal da Unicamp* - 196 - ANO XVII - 28 out. a 3 nov. 2002.

# RESUMINDO

Um movimento periódico é aquele que se repete, de forma idêntica, em intervalos de tempo iguais e sucessivos. O menor intervalo de tempo no qual o movimento se repete é chamado **período**. O número de repetições do movimento em uma unidade de tempo define a **frequência**.

$$f = \frac{1}{T} \text{ e } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Um movimento periódico que tem seu sentido invertido regularmente é chamado **movimento oscilatório**.

Muitas das oscilações encontradas na natureza podem ser modeladas pelo **movimento harmônico simples (MHS)**. Um corpo em MHS ao longo de um eixo x tem sua posição em função do tempo dada pela equação:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

- A é a amplitude do movimento
- $\omega$  é a frequência angular ou pulsação
- $\varphi_0$  é a fase inicial
- $(\omega t + \varphi_0)$  é a fase do movimento

A **equação da velocidade** é dada por:

$$v(t) = -\omega A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$-1 \leq \sin(\omega t + \varphi_0) \leq 1 \Rightarrow \frac{3\pi}{2} \leq (\omega t + \varphi_0) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \omega A \leq v \leq -\omega A$$

Para um corpo em MHS a velocidade em módulo é máxima quando o corpo passa pela posição de equilíbrio.

$$v_{\text{máx}} = \omega A$$

A velocidade de um ponto material que descreve um MHS em função da elongação é dada pela **equação de Torricelli**.

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

A **equação da aceleração** é dada por:

$$a(t) = -\omega^2 A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow a = -\omega^2 x$$

## Análise gráfica

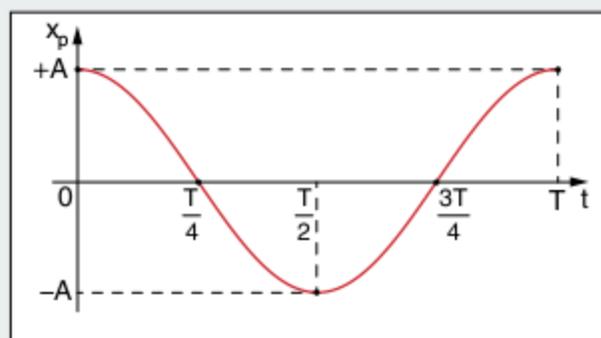
Para  $\varphi_0 = 0$  e  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

### I. Elongação

$$x_p = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
$x_p$	A	0	-A	0	A

$$x_p = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

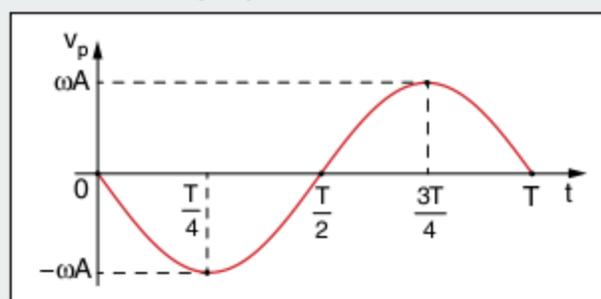


### II. Velocidade

$$v_p = -\omega A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
$v_p$	0	$-\omega A$	0	$\omega A$	0

$$v_p = -\omega A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

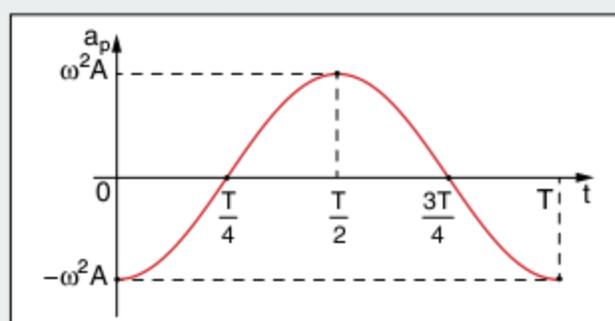


### III. Aceleração

$$a_p = -\omega^2 A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
$a_p$	$-\omega^2 A$	0	$\omega^2 A$	0	$-\omega^2 A$

$$a_p = -\omega^2 A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$



No MHS a força está sempre tentando restabelecer o equilíbrio; é restauradora.

$$\vec{F} = -K \cdot \vec{x}$$

Em um **sistema massa-mola** o período é dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Um **pêndulo simples** em um ambiente sem resistência do ar realiza um movimento oscilatório cujo período independe da massa pendular. Para pequenas amplitudes de oscilação o movimento do pêndulo simples pode ser aproximado do MHS.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

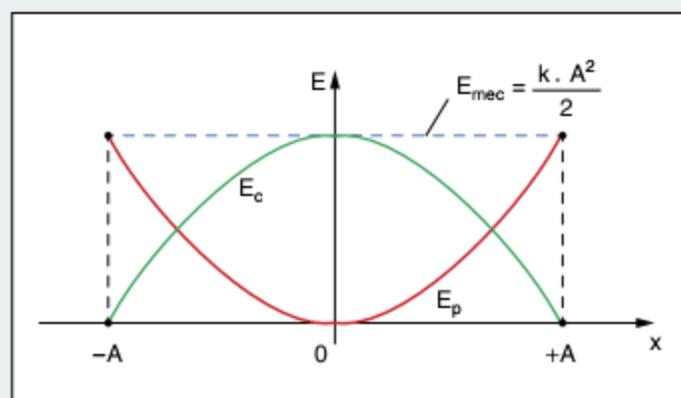
Um corpo realizando um MHS tem **energias cinética e potencial** dadas por:

$$E_p = \frac{kA^2}{2}$$

$$E_c = \frac{kA^2}{2}$$

Em um sistema ideal, a **energia mecânica** do MHS é constante.

$$E_{mec} = \frac{kA^2}{2}$$



## ■ QUER SABER MAIS?



### SITES

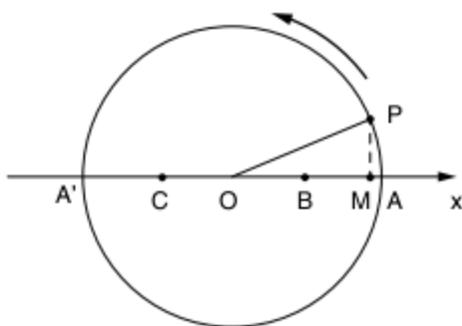
- Movimento periódico – Pêndulo simples  
[www.walter-fendt.de/ph14e/pendulum.htm](http://www.walter-fendt.de/ph14e/pendulum.htm)  
[www.ideiasnacaixa.com/laboratoriovirtual/pendulo.html](http://www.ideiasnacaixa.com/laboratoriovirtual/pendulo.html)
- Pêndulo acoplado  
[www.walter-fendt.de/ph14e/cpendula.htm](http://www.walter-fendt.de/ph14e/cpendula.htm)
- Pêndulo de Foucault e o movimento de rotação da Terra  
[www.planetariodorio.com.br/index.php?option=com\\_content&view=article&id=686:o-pendulo-de-focault&catid=62:terra&Itemid=175](http://www.planetariodorio.com.br/index.php?option=com_content&view=article&id=686:o-pendulo-de-focault&catid=62:terra&Itemid=175)

## Exercícios complementares

### Estudo cinemático do MHS

**1 Unicamp** Enquanto o ponto P se move sobre uma circunferência, em movimento circular uniforme com velocidade angular  $\omega = 2\pi \text{ rad/s}$ , o ponto M (projeção de P sobre o eixo x) executa um movimento harmônico simples entre os pontos A e A':

Dados: B e C são os pontos médios de  $\overline{OA}$  e  $\overline{OA'}$ , respectivamente.

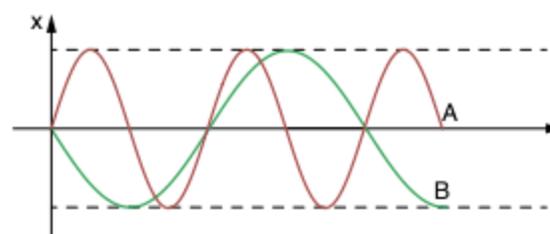


- a) Qual é a frequência do MHS executado por M?
- b) Determine o tempo necessário para o ponto M deslocar-se do ponto B ao ponto C.

**2** Um móvel executa um movimento harmônico simples de amplitude 2 m, pulsação  $2\pi \text{ rad/s}$  e fase inicial  $\pi \text{ rad}$ .

- a) Determine o período e a frequência desse MHS.
- b) Escreva as equações horárias da elongação, da velocidade e da aceleração.
- c) Determine o valor máximo da velocidade e da aceleração do móvel.

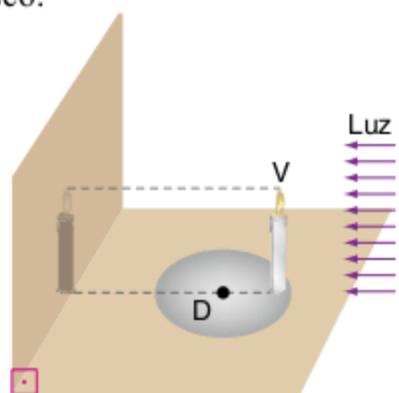
**3 Fuvest** Dois corpos, A e B, descrevem movimentos periódicos. Os gráficos de suas posições x em função do tempo estão indicados na figura a seguir.



Podemos afirmar que o movimento de A tem:

- (a) menor frequência e mesma amplitude.
- (b) maior frequência e mesma amplitude.
- (c) mesma frequência e maior amplitude.
- (d) menor frequência e menor amplitude.
- (e) maior frequência e maior amplitude.

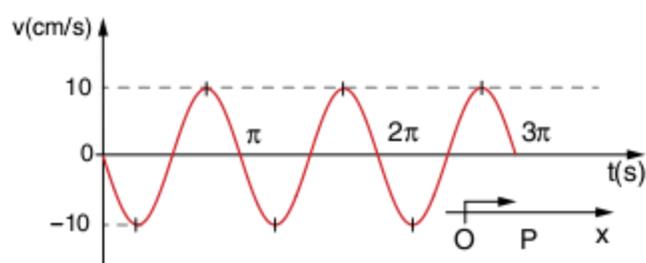
**4 Mackenzie** Na figura abaixo, D é um disco de 0,30 m de diâmetro, que executa um MCU de 0,55 Hz. V é uma vela de diâmetro desprezível colocada perpendicularmente num ponto periférico do disco.



A sombra dessa vela, projetada na parede, devido à incidência de um feixe de luz paralelo, apresenta uma velocidade:

- (a) constante, igual a 0,52 m/s.
- (b) constante, igual a 1,30 m/s.
- (c) constante, igual a 5,2 m/s.
- (d) máxima, igual a 0,52 m/s.
- (e) máxima, igual a 1,03 m/s.

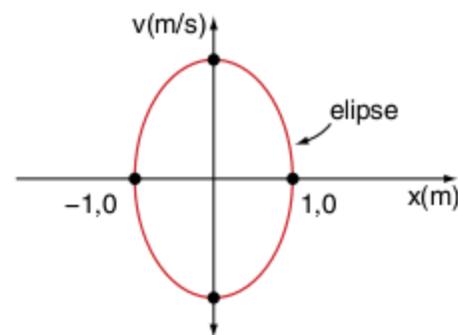
**5 PUC** As questões seguintes referem-se a uma senoide para  $t > 0$ , indicando a velocidade do ponto P móvel na trajetória (O, x) em função do tempo.



- I. O movimento a que se refere o diagrama da figura é um movimento:
- (a) uniforme.
  - (b) uniformemente acelerado.
  - (c) uniformemente retardado.
  - (d) circular uniforme.
  - (e) harmônico simples.
- II. Sendo a origem O o centro da trajetória do movimento a que se refere o diagrama de velocidade da questão anterior, temos que, nesse momento, o ponto móvel:
- (a) parte da origem, com velocidade nula.
  - (b) parte da origem, mas não com velocidade inicial nula.
  - (c) não parte da origem, mas a velocidade inicial é nula.
  - (d) não parte da origem, mas tem velocidade inicial não nula.
  - (e) nenhuma das respostas anteriores é correta.
- III. No movimento a que se refere o diagrama dado, a maior distância que o móvel alcança da origem O é:
- (a) infinita.
  - (b) 10 cm
  - (c) 5 cm
  - (d) 1 cm
  - (e) 0,5 cm
- IV. No movimento a que se refere o diagrama dado, a aceleração máxima que o móvel adquire é (em  $\text{cm/s}^2$ ):
- (a) zero.
  - (b) 5
  - (c) 10
  - (d) 20
  - (e) 25

**6** A velocidade escalar  $v$  de uma partícula varia em função de sua abscissa  $x$ , de acordo com o gráfico a seguir.

Lembre-se:  $\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1$



A velocidade da partícula tem módulo igual à metade da velocidade máxima nos pontos de abscissa:

- (a)  $-0,50 \text{ m e } +0,50 \text{ m}$
- (b)  $-0,25 \text{ m e } +0,25 \text{ m}$
- (c)  $-\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ m e } +\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ m}$
- (d)  $-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m e } +\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m}$
- (e)  $-0,75 \text{ m e } +0,75 \text{ m}$

**7 ITA** Sobre um sistema de coordenadas XY efetuam-se dois movimentos harmônicos simples representados por  $x = A \cdot \cos(\omega t)$  e  $y = A \cdot \sqrt{3} \sin(\omega t)$ , onde A e  $\omega$  são constantes positivas. Obtenha a equação da trajetória que é o lugar dos pontos (x, y) no plano.

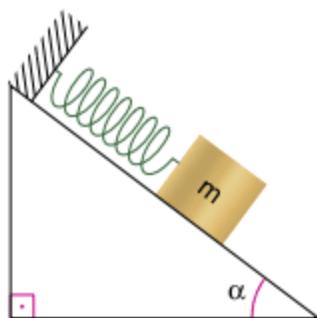
**Estudo dinâmico do MHS**

**8 Unicamp** A força que atua sobre um corpo de massa m, preso a uma mola de constante elástica k, é dada por  $F = -kx$ , onde x é a abscissa do corpo em relação ao ponto de equilíbrio da mola. A relação entre a aceleração desse corpo e a sua abscissa é  $a = -\omega^2 x$ , sendo  $\omega$  a frequência angular associada ao movimento que o corpo realiza. Deduza, a partir dessas duas expressões, a fórmula do período das oscilações que o corpo realiza em função de m e k.

**9 UnB** Considere duas molas, 1 e 2, de constantes  $k_1$  e  $k_2$ , sendo  $k_1$  maior do que  $k_2$ . Nas extremidades das molas, estão presas massas iguais. Quando postas em oscilação, a razão entre os seus períodos será:

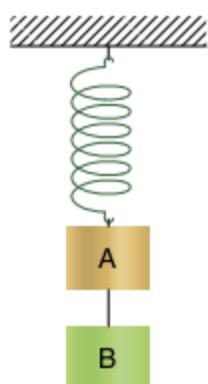
- (a)  $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}$
- (b)  $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$
- (c)  $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{k_1 k_2}$
- (d)  $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{1}{k_1 k_2}}$
- (e) diferente das anteriores.

**10** Um sistema massa-mola tem uma frequência de oscilação  $F_0$ , quando na horizontal. Colocando esse sistema massa-mola em um plano inclinado como o da figura a seguir, determine a frequência de oscilações.

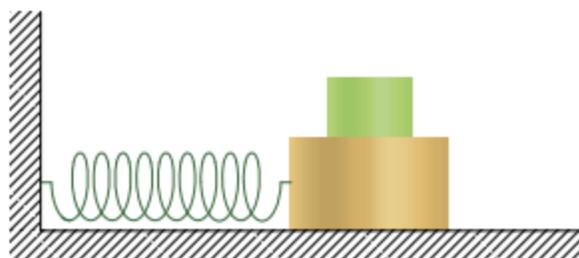


- (a)  $F_0 \cdot \sin^2 \alpha$  (d)  $F_0(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$   
 (b)  $F_0 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$  (e)  $F_0 \cdot \cos \alpha$   
 (c)  $F_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha$

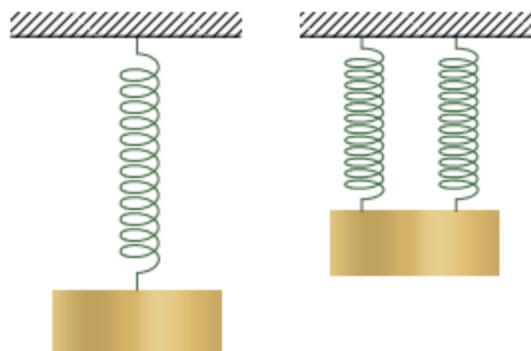
**11** Dois blocos idênticos, A e B, são ligados por um fio e o bloco A é preso à extremidade livre de uma mola vertical. O sistema se encontra em equilíbrio. Em certo instante, o fio que liga A e B rompe-se e o bloco A passa a realizar um MHS de amplitude 10 cm. Sendo  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , determine o período de oscilação do corpo A.



**12** Dois blocos ( $m = 1,0 \text{ kg}$  e  $M = 10 \text{ kg}$ ) e uma única mola ( $k = 200 \text{ N/m}$ ) estão colocados em uma superfície horizontal sem atrito, como ilustra a figura. O coeficiente de atrito estático entre os dois blocos é 0,40. Qual a máxima amplitude possível do movimento harmônico simples, se não houver deslizamento entre os blocos?



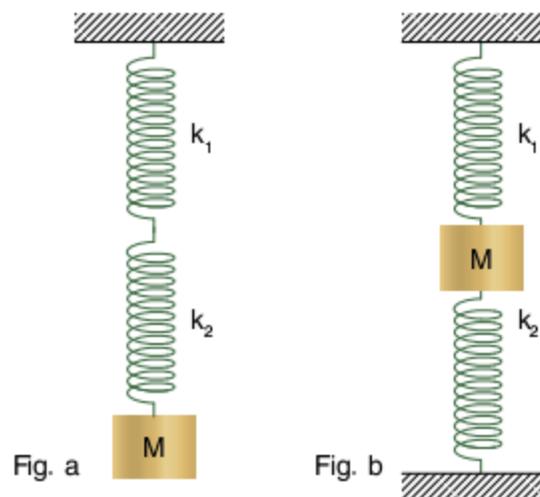
**13 Cesgranrio** Um corpo suspenso a uma mola helicoidal alonga-se 12 cm. Corta-se a mola no meio e suspende-se o corpo ao conjunto das duas metades.



Cada uma dessas duas metades acha-se alongada em:

- (a) 3,0 cm (c) 24 cm (e) 12 cm  
 (b) 9,5 cm (d) 6,0 cm

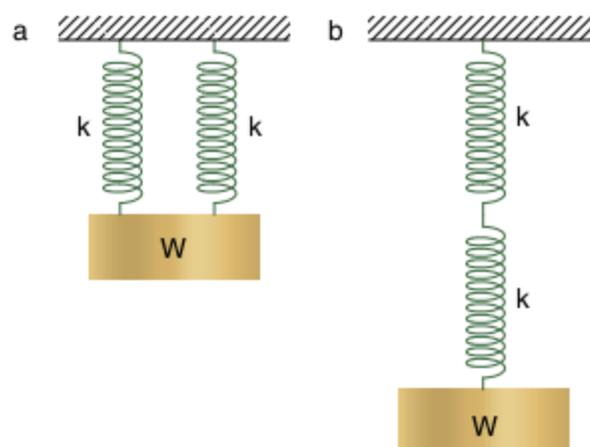
**14 ITA** Com duas molas de massa desprezível e constantes  $k_1$  e  $k_2$  e um corpo de massa  $M$ , monta-se o sistema indicado pela figura a e verifica-se que a massa  $M$  oscila com um período  $T_1$ . Em seguida, monta-se o sistema indicado pela figura b e verifica-se que a massa  $M$  oscila com um período  $T_2$ .



Pode-se afirmar que:

- (a)  $T_1 = T_2$ , quaisquer que sejam os valores de  $k_1$  e  $k_2$ .  
 (b)  $T_1 = T_2$ , se  $k_1 = k_2$   
 (c)  $T_1 < T_2$   
 (d)  $T_1 > T_2$   
 (e)  $T_1 = 2T_2$ , se  $k_1 = 2k_2$

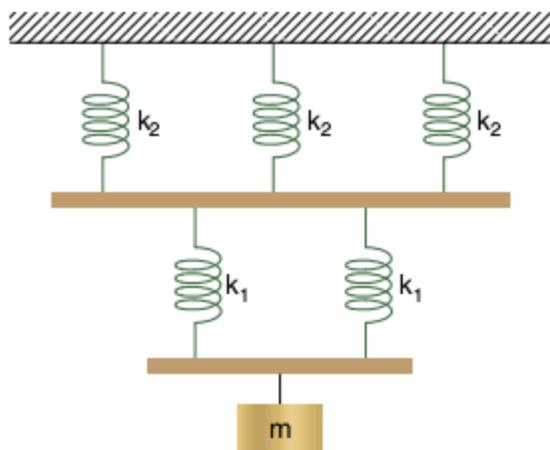
**15 IME** Um bloco de peso  $W$  é ligado a duas molas iguais, segundo as disposições mostradas nas figuras a e b. As molas têm constante elástica  $k$  e peso desprezível. O bloco pode deslocar-se verticalmente sem atrito. Determine a relação entre as velocidades máximas que ocorrem em cada caso.



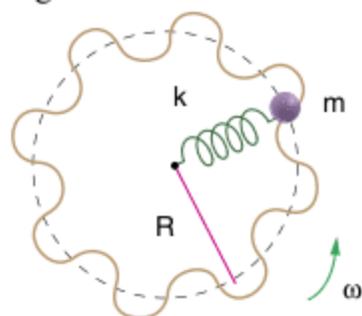
**16** Certa mola tem uma constante de força  $k$ , com uma massa  $m$  suspensa nela. A mola é cortada pela metade e a mesma massa é suspensa de uma das metades. Como se relacionam as frequências de oscilações, antes e depois que a mola é cortada?

**17** Uma mola uniforme, cujo comprimento de repouso é  $L$ , tem uma constante de força  $k$ . A mola é cortada em duas partes com comprimentos de repouso  $L_1$  e  $L_2$ , com  $L_1 = nL_2$ . Quais as correspondentes constantes de força  $k_1$  e  $k_2$  em termos de  $n$  e  $k$ ?

**18 ITA** Um sistema massa-mola é constituído por molas de constantes  $k_1$  e  $k_2$ , respectivamente, barras de massas desprezíveis e um corpo de massa  $m$ , como mostrado na figura. Determine a frequência desse sistema.



**19 ITA** Considere um oscilador harmônico simples composto de uma mola de constante elástica  $k$ , tendo uma extremidade fixada e a outra acoplada a uma partícula de massa  $m$ . O oscilador gira num plano horizontal com velocidade angular constante  $\omega$  em torno da extremidade fixa, mantendo-se apenas na direção radial, conforme mostra a figura.



Considerando  $R_0$  a posição de equilíbrio do oscilador para  $\omega = 0$ , pode-se afirmar que:

- (a) o movimento é harmônico simples para qualquer que seja velocidade angular  $\omega$ .
- (b) o ponto de equilíbrio é deslocado para  $R < R_0$ .
- (c) a frequência do MHS cresce em relação ao caso de  $\omega = 0$ .
- (d) o quadrado da frequência do MHS depende linearmente do quadrado da velocidade angular.
- (e) se a partícula tiver carga, um campo magnético na direção do eixo de rotação só poderá aumentar a frequência do MHS.

### Período de um pêndulo simples

**20 Univás** A aceleração da gravidade na Lua é cerca de 6 vezes menor do que na Terra. A razão entre os períodos de oscilações de um mesmo pêndulo simples, na Lua e na Terra, é cerca de:

- (a) 6
- (b)  $\frac{6}{2}$
- (c)  $\frac{2}{6}$
- (d)  $\sqrt{6}$
- (e) depende do comprimento do pêndulo.

**21 ITA** Certo pêndulo simples, de comprimento igual a  $L$  e massa igual a  $m$ , oscila com período igual a  $T$ . Sabendo-se que o fio do pêndulo é inextensível e passa por uma pequena polia, sem atrito, podendo ser alongado ou encurtado, pode-se afirmar que:

- (a) encurtando-se o fio do pêndulo, o período do pêndulo aumentará;
- (b) alongando-se o fio do pêndulo, o período do pêndulo aumentará.

- (c) mantendo-se constante o comprimento do fio e aumentando-se a massa  $m$  do pêndulo, o seu período aumentará.
- (d) aumentando-se ou diminuindo-se o comprimento do fio, porém mantendo-se a massa  $m$  do pêndulo constante, o seu período permanecerá constante e igual ao inicial.
- (e) n.d.a.

**22 Fuvest** O pêndulo de Foucault – popularizado pela famosa obra de Umberto Eco – consistia de uma esfera de 28 kg, pendurada na cúpula do Panthéon de Paris por um fio de 64 m de comprimento. Sabe-se que o período  $T$  de oscilação de um pêndulo simples é relacionado com o seu comprimento e com a aceleração da gravidade  $g$  pela seguinte expressão: (Adote  $g = 10 \text{ m/s}^2$  e  $\sqrt{10} = \pi$ )

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

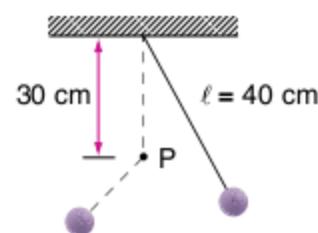
- a) Qual o período de oscilação do pêndulo de Foucault? despreze as frações de segundos.
- b) O que aconteceria com o período desse pêndulo se dobrássemos a sua massa?

**23 Unicamp** Um pêndulo simples, que executa um movimento harmônico simples num ambiente escuro, é iluminado por um holofote estroboscópico.

Dado:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

- a) Sendo  $\ell = 0,4 \text{ m}$  o comprimento do pêndulo, calcule a frequência de suas oscilações.
- b) Qual deve ser a frequência máxima do estroboscópio para que esse pêndulo pareça estar parado na posição vertical?

**24 USP** Na figura abaixo, está representado um pêndulo simples de período igual a  $T$ . Colocando-se um prego (P) na posição indicada, o pêndulo, na máxima elongação para a esquerda, fica com a configuração indicada pela linha pontilhada, voltando, depois, à sua configuração inicial.



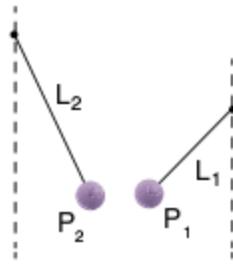
Qual é o período de oscilação desse sistema?

- (a)  $\frac{4T}{3}$
- (b)  $\frac{3T}{2}$
- (c)  $\frac{3T}{4}$
- (d)  $\frac{2T}{3}$
- (e)  $2T$

**25 ITA** Dois pêndulos simples, respectivamente de massas  $m_1$  e  $m_2$  e comprimentos  $\ell_1$  e  $\ell_2$ , são simultaneamente abandonados para pôr-se em oscilação. Constata-se que a cada quatro ciclos do primeiro a situação inicial é restabelecida idênticamente. Nessas condições, pode-se afirmar que necessariamente:

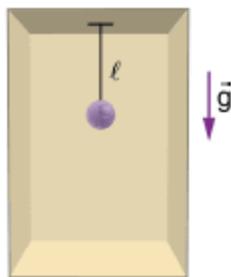
- (a) o pêndulo 2 deve oscilar mais rapidamente que o pêndulo 1.
- (b) o pêndulo 2 deve oscilar mais lentamente que o pêndulo 1.
- (c)  $8\sqrt{\ell_1/\ell_2}$  é um número inteiro.
- (d)  $6\sqrt{\ell_1/\ell_2}$  é um número inteiro.
- (e)  $m_1\ell_1 = 2m_2\ell_2$ .

**26 ITA** Dois pêndulos simples,  $P_1$  e  $P_2$ , de comprimentos  $L_1$  e  $L_2$ , estão indicados na figura. Determine  $L_2$  em função de  $L_1$  para que a situação indicada se repita a cada 5 oscilações completas de  $P_1$  e 3 oscilações completas de  $P_2$ .



**27** Determine o período de oscilação de um pêndulo de comprimento  $\ell$  que está pendurado ao teto de um vagão que possui uma aceleração horizontal  $\vec{a}$ .

**28** Um pêndulo simples de comprimento  $\ell$  é preso ao teto de um elevador, como mostra a figura.



Sendo  $g$  o módulo do campo gravitacional no local, analise as afirmações a seguir.

I. Se o elevador permanecer em repouso ou mover-se de forma retilínea e uniforme, o período de oscilação do pêndulo será:

$$T = 2\pi \sqrt{\ell/g}$$

II. Se o elevador mover-se com aceleração de módulo  $a$  dirigida para cima, o período de oscilação do pêndulo será:

$$T = 2\pi \sqrt{\ell/(g+a)}$$

III. Se o elevador mover-se com aceleração de módulo  $a$  dirigida para baixo ( $a < g$ ), o período de oscilação será:

$$T = 2\pi \sqrt{\ell/(g-a)}$$

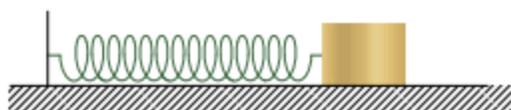
IV. Se o elevador estiver em queda livre, o pêndulo não oscilará.

É(são) correta(s):

- (a) todas. (c) apenas IV. (e) apenas I, II e III.  
 (b) apenas II e III. (d) apenas I.

### Análise da energia no MHS

**29 USP** Um bloco é preso a uma mola de massa desprezível e executa movimento harmônico simples, sem atrito com o solo horizontal. A energia potencial do sistema é zero na posição de alongação nula e pode assumir valor máximo de 60 joules durante o movimento.



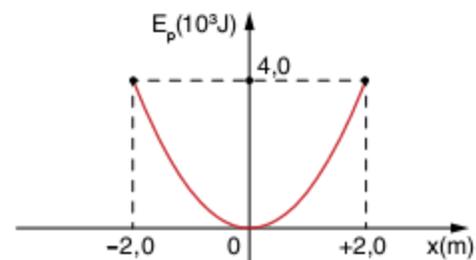
Quando a alongação é metade do valor da amplitude, a energia cinética do bloco, em joules, é:

- (a) 15 (c) 30 (e) 45  
 (b) 20 (d) 40

**30 ITA** Uma partícula de massa  $m$  realiza um movimento harmônico simples de amplitude  $A$ , em torno da posição de equilíbrio  $0$ . Considerando nula a energia potencial para a partícula em  $0$ , calcular a alongação para a qual a energia cinética é igual ao dobro da energia potencial.

- (a)  $x = \pm \frac{A}{2}$  (c)  $x = \pm \frac{A}{\sqrt{3}}$  (e)  $x = \pm \frac{A}{4}$   
 (b)  $x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}}$  (d)  $x = \pm \frac{A}{3}$

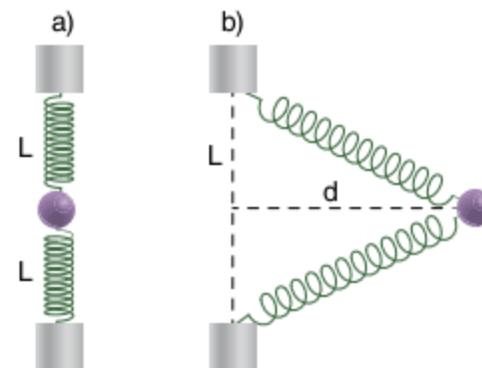
**31 UFU** Uma partícula oscila, ligada a uma mola leve, executando movimento harmônico simples de amplitude  $2,0$  m. O diagrama seguinte representa a variação de energia potencial elástica  $E_p$ , acumulada na mola, em função da alongação da partícula ( $x$ ).



Pode-se afirmar que a energia cinética da partícula no ponto de alongação  $x = 1,0$  m, vale:

- (a)  $3,0 \cdot 10^3$  J (c)  $1,5 \cdot 10^3$  J (e)  $5,0 \cdot 10^2$  J  
 (b)  $2,0 \cdot 10^3$  J (d)  $1,0 \cdot 10^3$  J

**32 UFCG** Um garoto construiu um estilingue utilizando duas molas idênticas de comprimento  $L$  e constante elástica  $k$  (figura a).



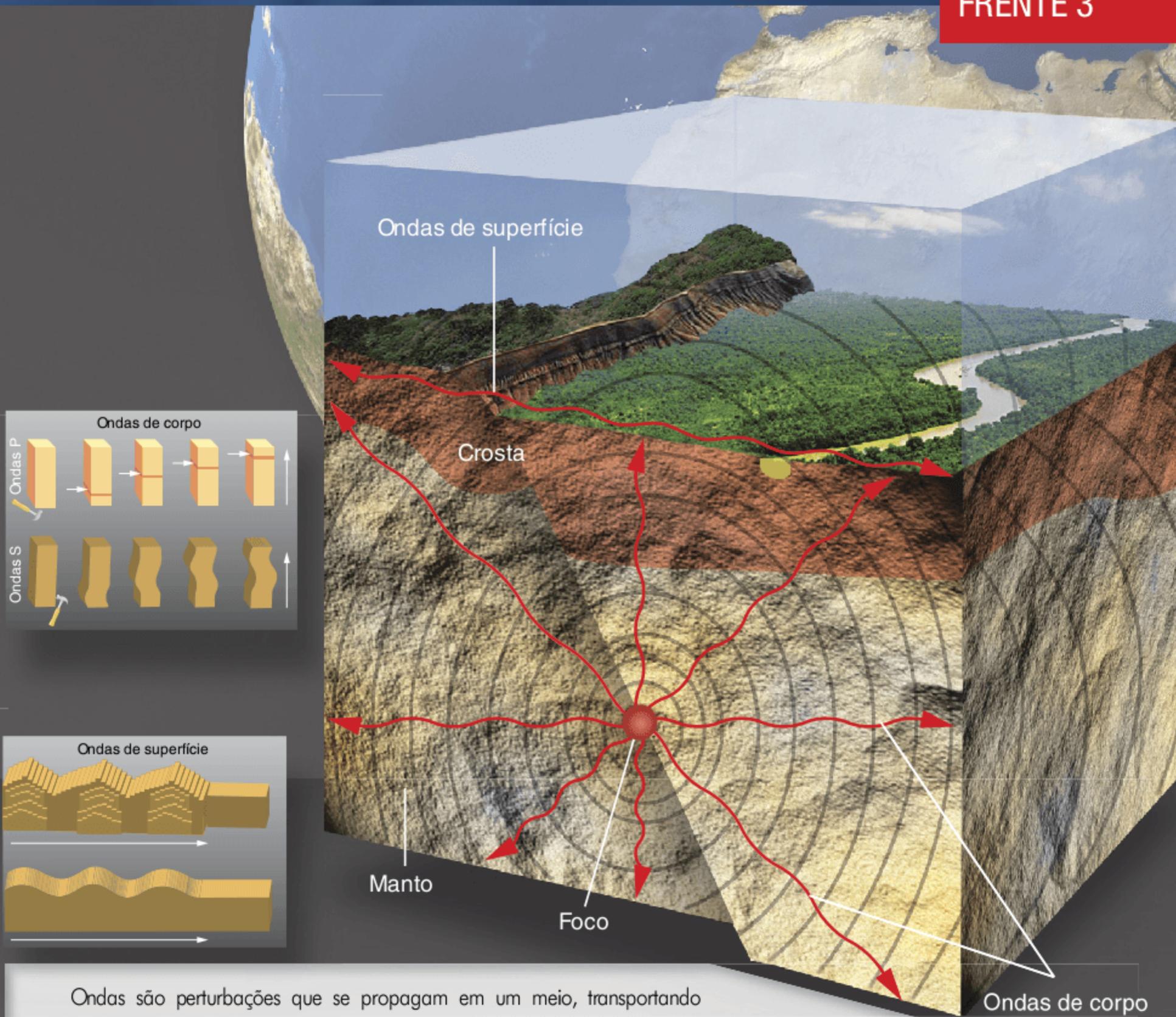
Para o lançamento, uma pedra é "puxada" por uma distância  $d$  ao longo da direção perpendicular à configuração inicial das molas (figura b). Pode-se afirmar que a energia potencial desse sistema, para essa nova configuração, vale:

- (a)  $kd^2 + 2kL(L - \sqrt{L^2 + d^2})$   
 (b)  $kd + kL(L - \sqrt{L^2 + d^2})$   
 (c)  $2kd^2 + kL(1 - \sqrt{L^2 + d^2})$   
 (d)  $2kd^2 + kd(1 - \sqrt{L^2 + d^2})$   
 (e)  $kd^2$

# Ondulatória

# 12

FRENTE 3



Ondas são perturbações que se propagam em um meio, transportando energia de um ponto a outro. Quando um terremoto ocorre, com a ruptura de falhas geológicas e a consequente liberação de energia, ondas sísmicas são criadas no interior da Terra e podem se propagar até atingir a superfície do planeta. Ondas longitudinais de compressão, as chamadas ondas P, propagam-se com velocidade entre 4 e 7 km/s na crosta terrestre e podem atingir 8 km/s no manto superior. Essas mesmas ondas, no ar, propagam-se com uma velocidade de 0,34 km/s. Ondas transversais, chamadas ondas S, também propagam-se na crosta terrestre, com velocidade entre 3 e 4 km/s. Quando atingem a superfície, as ondas P e S combinam-se e passam a se propagar horizontalmente, nas chamadas ondas de superfície.

# Ondas

Em nosso dia a dia, estamos rodeados de ondas com as mais diversas características.

Como exemplos de ondas a que estamos habituados a ver e a fazer uso, temos:

- Ondas sonoras
- Ondas em superfícies de lagos e mares
- Ondas em cordas
- Ondas luminosas
- Ondas de TV
- Ondas de rádio (sinais enviados por telefones celulares)
- Ondas de raios X

Considere duas crianças brincando de corda, cada uma delas segurando as extremidades opostas da corda. Em um dado momento, a menina faz um movimento brusco de sobe e desce com as mãos na corda que estava esticada.

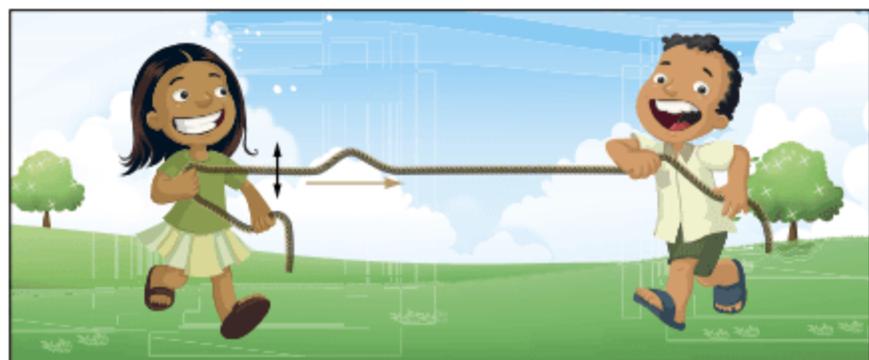


Fig. 1 Pulso se propagando em uma corda.

Esse movimento brusco produz uma perturbação que se propaga na corda. A essa perturbação damos o nome de **pulso**. Um pulso constitui uma **onda**. Se o movimento de sobe e desce for feito repetidas vezes, teremos um arranjo sequencial de pulsos, constituindo o que se chama de **trem de ondas**.

Observe que as partes constituintes da corda não são levados pelo pulso; os pontos simplesmente sofrem a deformação e depois voltam à posição original. O que se propaga é a deformação e a energia.

## ATENÇÃO!

Um pulso se propaga sem arrastar o meio por onde passa. Onda é uma perturbação (provoca variação nas grandezas físicas) que se propaga tanto em meios materiais como em imateriais (vácuo), dependendo de sua natureza. Uma onda propaga energia, e não matéria.

## Propriedades das ondas

Ondas transportam energia e quantidade de movimento de um ponto a outro, sem transportar matéria entre esses pontos.

- Ondas sonoras se propagam em sólidos, líquidos e gases. *Não se propagam no vácuo.*
- Ondas luminosas se propagam em sólidos (desde que transparentes ou translúcidos), líquidos, gases e no vácuo.

## Classificação das ondas

### Quanto à forma ou direção de vibração

As ondas podem ser:

- Longitudinais
- Transversais
- Mistas

## I. Ondas longitudinais

Um pulso de onda é dito longitudinal quando os pontos perturbados pelo pulso vibram em uma direção paralela à direção de propagação do pulso.

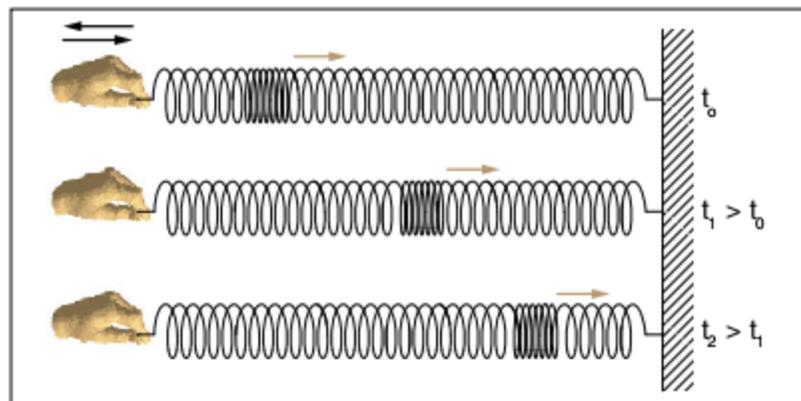


Fig. 2 Pulso longitudinal em uma mola helicoidal.

Em um pulso de onda longitudinal, a perturbação tem a mesma direção que a direção do movimento da onda.

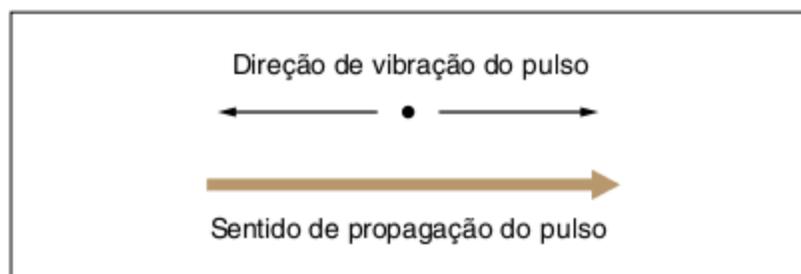


Fig. 3 Característica de uma onda longitudinal.

O som no ar, por exemplo, se propaga por ondas longitudinais, como veremos mais adiante em nosso estudo.

## II. Ondas transversais

Um pulso de onda é dito transversal quando o ponto do meio atingido pelo pulso oscila em uma direção perpendicular à de propagação do pulso. Podemos conseguir isso com uma mola helicoidal, fazendo um movimento brusco de sobe e desce na sua extremidade.

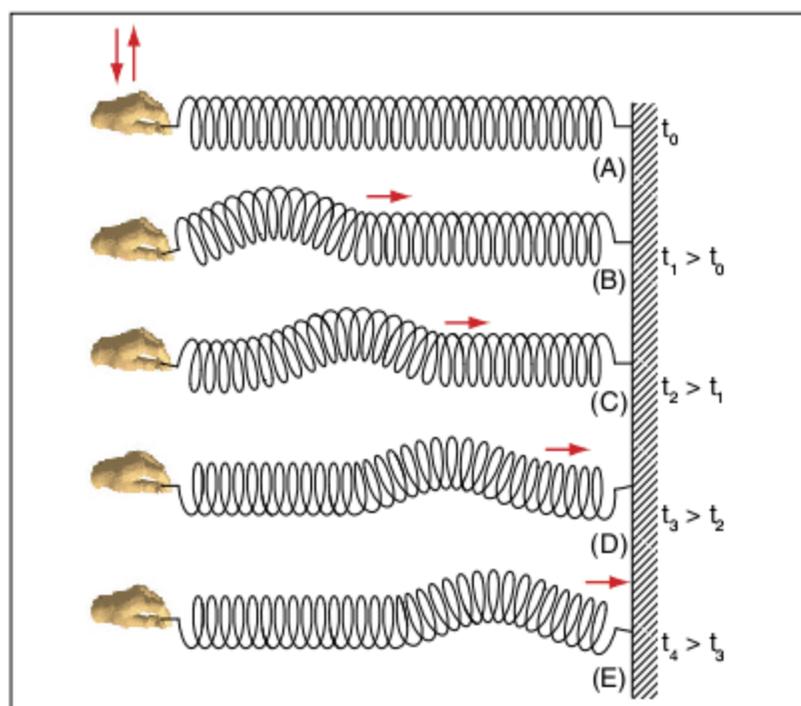


Fig. 4 Pulso transversal em uma mola helicoidal.

Em um pulso ondulatório transversal, a perturbação é perpendicular à direção do movimento da onda.

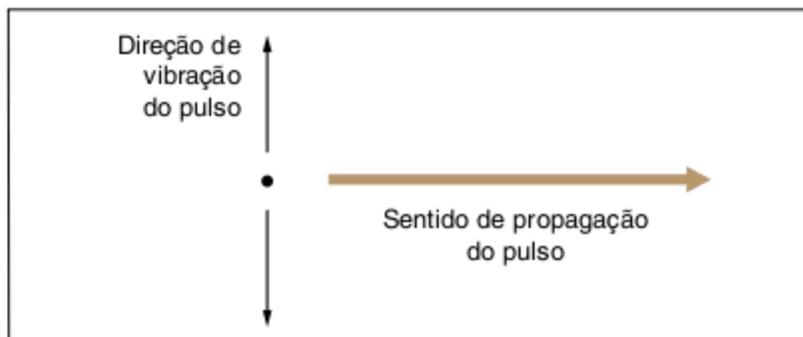


Fig. 5 Característica de uma onda transversal.

Ondas em uma corda de um instrumento musical são exemplos de ondas transversais.

### III. Ondas mistas

As ondas mistas são as que apresentam vibrações transversais e longitudinais. Exemplos de ondas mistas são as ondas nas superfícies de líquidos. As partículas da água que estão na superfície descrevem trajetórias circulares que têm componentes longitudinais e transversais.

### Quanto à dimensão ou direção de propagação da energia

As ondas podem ser:

- Unidimensionais
- Bidimensionais
- Tridimensionais

#### I. Ondas unidimensionais

Quando a energia da onda se propaga em uma só direção. Exemplos: onda em uma corda de pipa, ondas nas cordas de um violão.



Fig. 6 Onda unidimensional.

#### II. Ondas bidimensionais

Quando a energia da onda se propaga em um plano. Exemplo: ondas na superfície da água.



Fig. 7 Onda bidimensional se propagando na superfície da água.

### III. Ondas tridimensionais

Quando a energia da onda se propaga em três direções. Exemplo: ondas sonoras no ar.

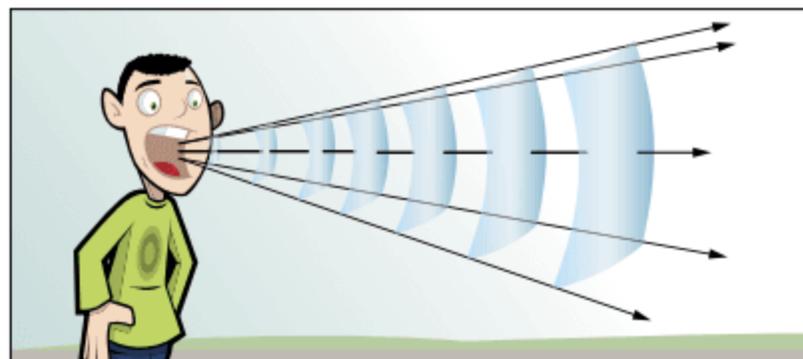


Fig. 8 Onda tridimensional.

### Quanto à natureza

As ondas podem ser:

- Mecânicas
- Eletromagnéticas

#### I. Ondas mecânicas

Uma onda é dita mecânica quando ela é originada por uma perturbação em um meio elástico, o qual tende a restabelecer a deformação, transmitindo a perturbação pelo meio. Exemplos: ondas em cordas, em molas, na superfície da água, ondas sonoras.

As ondas mecânicas necessitam de um meio elástico para a propagação, isto implica na não propagação de ondas mecânicas no vácuo.



Fig. 9 Ondas mecânicas, como o som, não se propagam no vácuo.

#### II. Ondas eletromagnéticas

Ondas eletromagnéticas são geradas por cargas elétricas oscilantes. Uma carga elétrica acelerada emite onda eletromagnética. Como exemplo temos: ondas de rádio, TV, raios X, raios  $\gamma$ , radar, ondas luminosas. As ondas eletromagnéticas podem se propagar no vácuo e em meios materiais. As ondas eletromagnéticas são ondas transversais.

#### Em que consiste uma onda eletromagnética?

Uma onda eletromagnética é constituída por um campo elétrico e um campo magnético, ambos variáveis, perpendiculares entre si e propagando-se no espaço. Observe a figura 10.

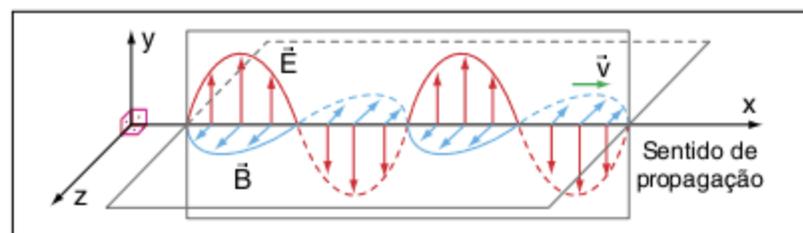


Fig. 10 Ondas eletromagnéticas.

O comportamento de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  é semelhante, ambos oscilam com o mesmo período e em direções perpendiculares.

Sendo  $\vec{v}$  a velocidade de propagação, os vetores  $\vec{v}$ ,  $\vec{B}$  e  $\vec{E}$  devem obedecer, a cada instante, à regra da mão esquerda, sendo  $\vec{v}$  representado pelo polegar,  $\vec{B}$  pelo dedo indicador e  $\vec{E}$  pelo dedo médio.

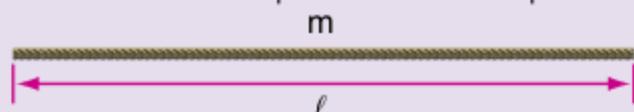
### Propagação de ondas em cordas (1D)

Considere uma corda flexível e homogênea, onde são originados pulsos. Desprezando-se as perdas energéticas devido a forças dissipativas, podemos afirmar que o pulso mantém a mesma forma à medida que se propaga.

É observado que a velocidade de propagação de um pulso em uma corda é tanto maior quanto maior for a tração à qual está submetida a corda, e a velocidade é menor quanto maior a **densidade linear** da corda ( $\mu$ ).

## ATENÇÃO!

Densidade linear é a massa por unidade de comprimento ( $m/\ell$ ).



Suponha que a corda acima tenha  $m = 100 \text{ g}$  e  $1 \text{ m}$  de comprimento; logo:  $\mu = \frac{100 \text{ g}}{1 \text{ m}}$  ou  $\mu = \frac{0,1 \text{ kg}}{1 \text{ m}} = 0,1 \text{ kg/m}$ .

A equação da velocidade de um pulso em uma corda flexível é dada por:

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

Essa equação é conhecida por equação de Taylor, em homenagem a Brook Taylor (1685-1731).

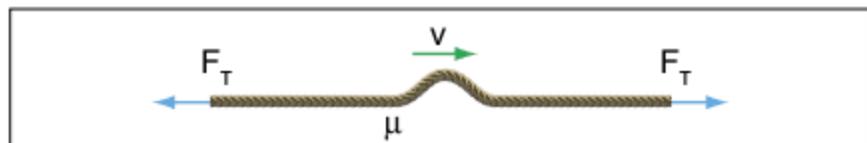


Fig. 11 Velocidade de propagação em uma corda.

Onde:

$v$  é a velocidade de propagação do pulso;

$F_T$  é o módulo da força de tração;

$\mu$  é a densidade linear da corda ( $m/\ell$ ).

Na equação de Taylor é útil relacionar a densidade linear ( $\mu$ ) com a densidade ( $d$ ) do material componente da corda.

Considerando uma corda de comprimento  $\ell$ , com seção transversal  $A$  constante, temos:

$$d = \frac{m}{V}$$

Como  $V = \ell \cdot A$ , temos:

$$d = \frac{m}{\ell \cdot A} \Rightarrow \frac{m}{\ell} = d \cdot A \Rightarrow \mu = \frac{m}{\ell} = d \cdot A$$

Assim:

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{d \cdot A}}$$

### Reflexão de pulsos

Considere um pulso gerado na extremidade livre de uma corda; este se propaga em direção à outra extremidade da corda. Se a extremidade para a qual o pulso se destina estiver presa a um suporte, ocorrerá o fenômeno da reflexão, ou seja, o pulso inverterá o seu sentido de propagação, voltando com a mesma velocidade.

Nesse caso, poderá haver dois tipos de reflexão, dependendo se o suporte ao qual está presa a corda for fixo ou livre.

- I. Se o suporte for **fixo**, o pulso, chegando a ele, exercerá uma força para cima, sendo que o suporte, por sua vez, exercerá uma força igual e oposta, para baixo, sobre a corda, o que fará com que o pulso refletido seja invertido. Dizemos que ocorreu **reflexão com inversão de fase**.

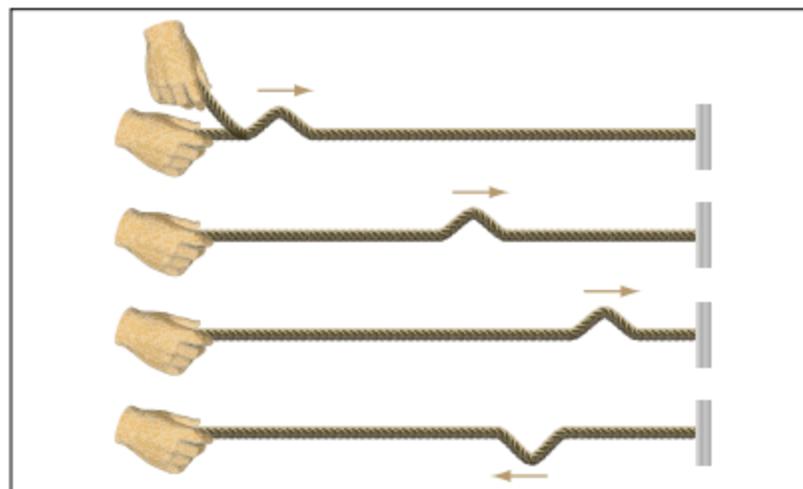


Fig. 12 Reflexão em extremidade fixa (inversão de fase).

- II. Se a extremidade da corda estiver presa a um suporte livre, quando o pulso chegar à extremidade exercerá uma força para cima na extremidade livre, a qual será acelerada para cima. Assim, quando a extremidade livre voltar à sua posição original, dará origem a um pulso com a mesma fase do pulso incidente. Ocorrerá a reflexão, porém, sem inversão de fase.

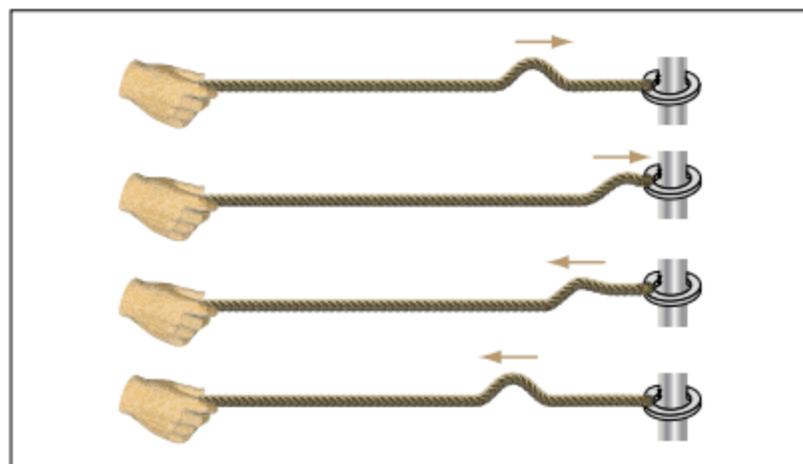


Fig. 13 Reflexão em extremidade livre (mesma fase).

### Refração de pulsos

A refração de pulsos em cordas ocorre quando um pulso que se propaga em uma determinada corda passa a se propagar em outra corda com diferente densidade linear.

## ATENÇÃO!

O que caracteriza a refração é a mudança no valor da velocidade de propagação do pulso refratado em relação ao pulso incidente.

Assim como em óptica geométrica, sempre que ocorrer refração ocorrerá também reflexão parcial. Observe:

1. Pulso se propaga da corda 1, de densidade linear  $\mu_1$ , para a corda 2, de densidade linear  $\mu_2$ , onde  $\mu_1 < \mu_2$ .

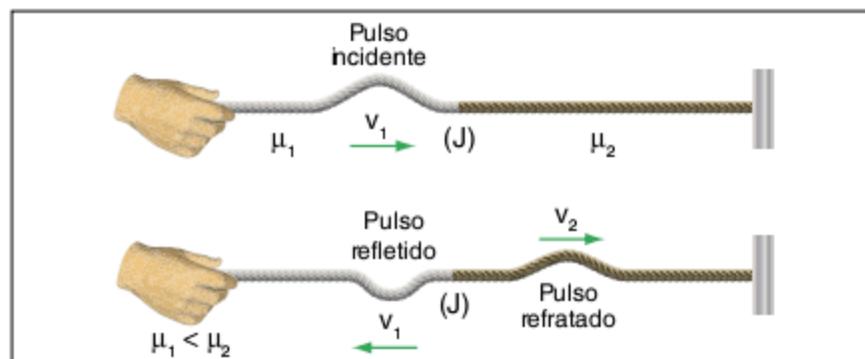


Fig. 14 Refração e reflexão da corda 1 para a corda 2 ( $\mu_1 < \mu_2$ ).

No ponto de junção (J) das cordas 1 e 2, o pulso incidente origina o pulso refletido e o pulso refratado.

Quando o pulso vai da corda de menor densidade linear para a corda de maior densidade, o pulso refletido sofre inversão de fase, enquanto o refratado continua com a mesma fase do pulso incidente.

$$\text{Como: } \mu_1 < \mu_2 \Rightarrow v_1 > v_2$$

## ATENÇÃO!

$$v_1 = \sqrt{\frac{F_T}{\mu_1}} > v_2 = \sqrt{\frac{F_T}{\mu_2}}$$

2. O pulso se propaga da corda 1, de densidade linear  $\mu_1$ , para a corda 2, de densidade linear  $\mu_2$ , onde  $\mu_1 > \mu_2$ .

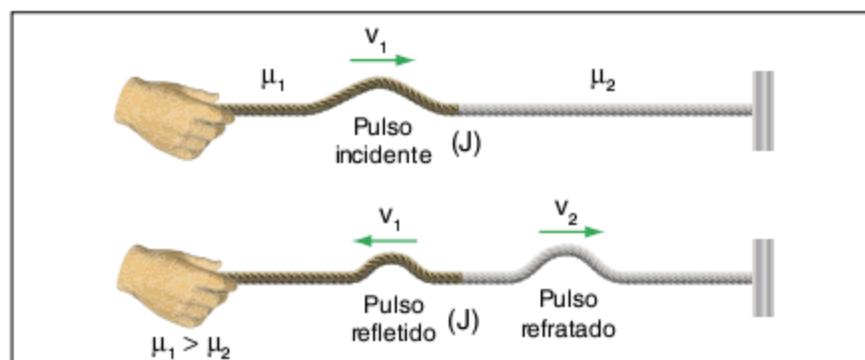


Fig. 15 Refração e reflexão da corda 1 para a corda 2 ( $\mu_1 > \mu_2$ ).

O pulso refratado tem a mesma fase do pulso incidente. Nesse caso, o pulso refletido também terá a mesma fase do pulso incidente, pois o ponto de junção das cordas comporta-se como uma extremidade móvel.

$$\text{Como: } \mu_1 > \mu_2 \Rightarrow v_1 < v_2$$

## ATENÇÃO!

Desprezando-se perdas energéticas, temos que a energia do pulso incidente é igual à energia do pulso refletido mais a energia do pulso refratado.

$$E_{\text{incidente}} = E_{\text{refletida}} + E_{\text{refratada}}$$

### Exercício resolvido

- 1 Um arame de aço, com 1 m de comprimento e massa igual a 10 g, é esticado com uma força de tração de 100 N. Determine a velocidade de propagação de um pulso transversal nesse arame.

#### Resolução:

A densidade linear do arame vale:

$$\mu = \frac{m}{\ell} = \frac{10^{-2} \text{ kg}}{1 \text{ m}}$$

$$\mu = 1 \cdot 10^{-2} \text{ kg/m}$$

Como a tração no arame é  $T = 100 \text{ N} = 10^2 \text{ N}$ , a velocidade de propagação do pulso será:

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{10^2}{1 \cdot 10^{-2}}} = \sqrt{10^4}$$

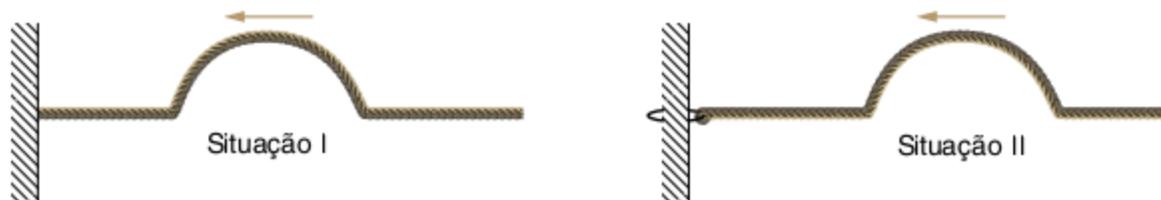
$$v = 100 \text{ m/s}$$

**Resposta:** 100 m/s

## Revisando

- 1 **Faap** Um fio de aço é esticado por uma força de 88 N. Calcular o valor da velocidade de propagação de uma onda transversal no fio, sabendo-se que o seu comprimento é 1,5 m e sua massa 0,03 kg.

**2 UFF-RJ (Adapt.)** A figura representa a propagação de dois pulsos em cordas idênticas e homogêneas. A extremidade esquerda da corda, na situação I, está fixa na parede e, na situação II, está livre para deslizar, com atrito desprezível, ao longo de uma haste.



Represente os pulsos refletidos nas situações I e II.

## Exercícios propostos

### Introdução à Ondulatória

- 1** Coloque V ou F nas sentenças abaixo.
- Onda longitudinal é aquela que possui direção de vibração na mesma direção de propagação da onda.
  - Onda transversal é aquela cuja direção de vibração é perpendicular à de propagação.
  - O som é uma onda longitudinal.
  - A propagação de uma onda sonora em um gás é longitudinal.
  - As ondas eletromagnéticas são todas transversais.
  - A luz visível é uma onda transversal.
  - Ultrassom, infrassom e ultravioleta são ondas mecânicas.
  - Ondas mecânicas podem se propagar no vácuo.
  - Ondas eletromagnéticas podem se propagar em sólidos.
  - As constantes explosões na superfície solar são detectadas pelos cientistas aqui na Terra, através da emissão de ultrassons pelas explosões.
  - O som não se propaga no vácuo.

**2 UFMG** Uma onda de rádio é emitida por uma estação transmissora e recebida por um aparelho receptor situado a alguns quilômetros de distância. Para que ocorra a propagação da onda de rádio, entre a estação transmissora e o aparelho receptor:

- (a) deve existir um meio material qualquer.
- (b) deve existir um meio material que contenha elétrons livres.
- (c) deve existir um meio material que contenha fótons.
- (d) não é necessária a presença de um meio material.

**3 Unesp**

- I. Uma onda transporta partículas do meio pelo qual passa.
- II. As ondas sonoras são perturbações que não podem se propagar no vácuo.
- III. Quando uma onda mecânica periódica se propaga em um meio, as partículas do meio não são transportadas pela onda.
- IV. Uma onda é transversal quando sua direção de propagação é perpendicular à direção de vibração.

Das afirmações acima, são verdadeiras:

- (a) somente I e II.
- (b) somente II e III.
- (c) somente III e IV.
- (d) somente II, III e IV.
- (e) todas.

**4 UFRGS**

São exemplos de ondas os raios X, os raios gama, as ondas de rádio, as ondas sonoras e as ondas de luz. Cada um desses cinco tipos de onda difere, em algum modo, dos demais. Qual das alternativas apresenta uma afirmação que diferencia corretamente o tipo de onda referido das demais ondas acima citadas?

- (a) Raios X são as únicas ondas que não são visíveis.
- (b) Raios gama são as únicas ondas transversais.
- (c) Ondas de rádio são as únicas que transportam energia.
- (d) Ondas sonoras são as únicas ondas longitudinais.
- (e) Ondas de luz são as únicas ondas que se propagam no vácuo com velocidade de 300.000 km/s.

**5 UFV** Das características a seguir, assinale aquela que é peculiar aos pulsos longitudinais.

- (a) As partículas oscilam na direção de propagação da onda.
- (b) As partículas oscilam perpendicularmente à propagação da onda.
- (c) As ondas podem se atravessar mutuamente sem colisão.
- (d) A altura da onda varia em função da posição da partícula.
- (e) Se duas ondas se cruzam, seus efeitos se somam.

**6 FCC** Em qual dos fenômenos abaixo as ondas são longitudinais?

- (a) Luz emitida por um laser.
- (b) Raios X.
- (c) Raios gama.
- (d) Vibração de corda de piano.
- (e) Propagação sonora no ar.

**7** Sobre as ondas eletromagnéticas podemos afirmar que:

- (a) são longitudinais.
- (b) às vezes são longitudinais e às vezes são transversais.
- (c) são sempre transversais.
- (d) não se propagam no vácuo.

**8 FCC** A propagação de pulsos envolve necessariamente:

- (a) transporte de energia.
- (b) transformação de energia.
- (c) produção de energia.
- (d) movimento de matéria.
- (e) transporte de matéria e energia.

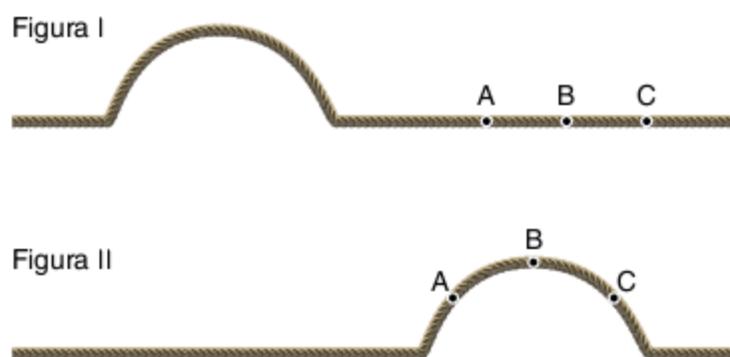
**9 UFG** As ondas eletromagnéticas foram previstas por Maxwell e comprovadas experimentalmente por Hertz (final do século XIX). Essa descoberta revolucionou o mundo moderno. Sobre as ondas eletromagnéticas são feitas as afirmações:

- I. Ondas eletromagnéticas são ondas longitudinais que se propagam no vácuo com velocidade constante  $c = 3,0 \cdot 10^8$  m/s.
- II. Variações no campo magnético produzem campos elétricos variáveis que, por sua vez, produzem campos magnéticos também dependentes do tempo e assim por diante, permitindo que energia e informações sejam transmitidas a grandes distâncias.
- III. São exemplos de ondas eletromagnéticas muito frequentes no cotidiano: ondas de rádio, sonoras, micro-ondas e raios X.

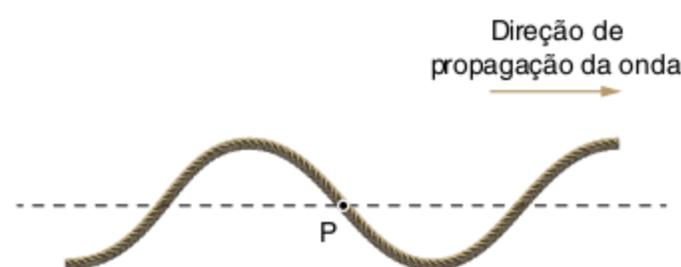
Está correto o que se afirma em:

- (a) I, apenas.
- (b) II, apenas.
- (c) I e II, apenas.
- (d) I e III, apenas.
- (e) II e III, apenas.

**10 Unicamp** A figura I representa um pulso transversal propagando-se da esquerda para a direita numa corda ideal, longa e esticada. Num dado instante  $t_0$ , os pontos A, B e C da corda encontram-se nas posições indicadas na figura II. Quais devem ser a direção e o sentido da velocidade de cada um dos pontos A, B e C no instante  $t_0$ ?



**11 UFMG** Enquanto brinca, Gabriela produz uma onda transversal em uma corda esticada. Em certo instante, parte dessa corda tem a forma mostrada na figura a seguir.



A direção de propagação da onda na corda também está indicada na figura. Assinale a alternativa em que estão representados corretamente a direção e o sentido do deslocamento do ponto P da corda, no instante mostrado.

- (a)
- (b)
- (c)
- (d)

**12** A velocidade de propagação de uma onda transversal em uma corda ou fio esticado é dada pela equação:  $v = \sqrt{\frac{F}{x}}$ , em que  $v$  é a velocidade de propagação e  $F$  é a força de tração na corda. A grandeza  $x$  representa:

- (a) comprimento da corda.
- (b) massa da corda.
- (c) massa específica da corda.
- (d) razão entre a massa da corda e o comprimento da corda.
- (e) diâmetro da corda.

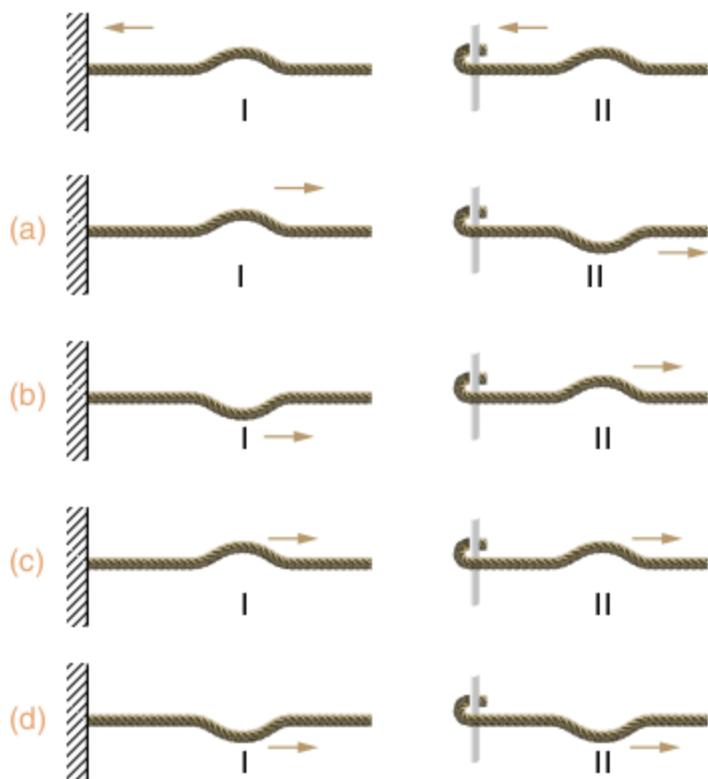
**13 Unifesp** A figura representa um pulso se propagando em uma corda.



Pode-se afirmar que, ao atingir a extremidade dessa corda, o pulso se reflete:

- (a) se a extremidade for fixa e se extingue se a extremidade for livre.
- (b) se a extremidade for livre e se extingue se a extremidade for fixa.
- (c) com inversão de fase se a extremidade for livre e com a mesma fase se a extremidade for fixa.
- (d) com inversão de fase se a extremidade for fixa e com a mesma fase se a extremidade for livre.
- (e) com mesma fase, seja a extremidade livre ou fixa.

**14** As figuras a seguir representam dois pulsos que se propagam em duas cordas, (I) e (II). Uma das extremidades da corda (I) é presa em um suporte fixo e uma das extremidades da corda (II) é presa em um suporte livre. As formas dos pulsos refletidos em ambas as cordas são, respectivamente:

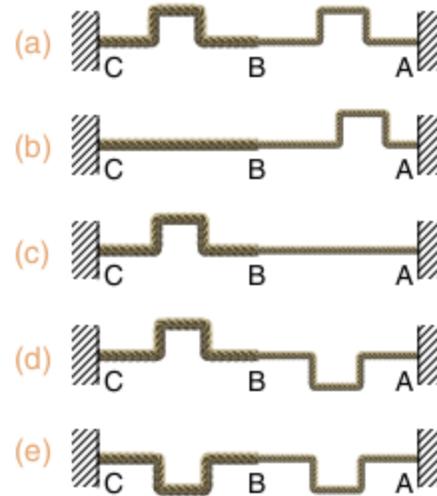


- (e) não há reflexão na corda II.

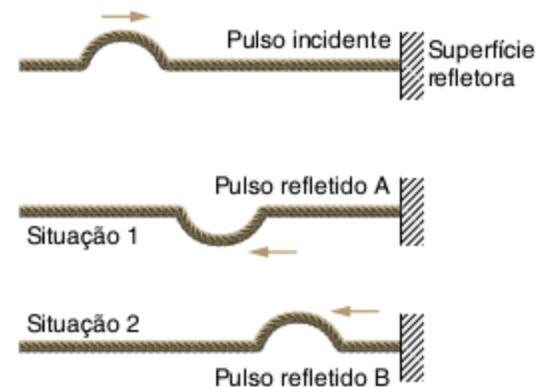
**15 Cescea** Uma corda é composta de dois pedaços diferentes, AB e BC, ambos do mesmo material, sendo AB mais fino que BC. Um pulso é produzido em A e dirige-se para B.



Imediatamente após atingir B, o aspecto das cordas se assemelha mais à figura:



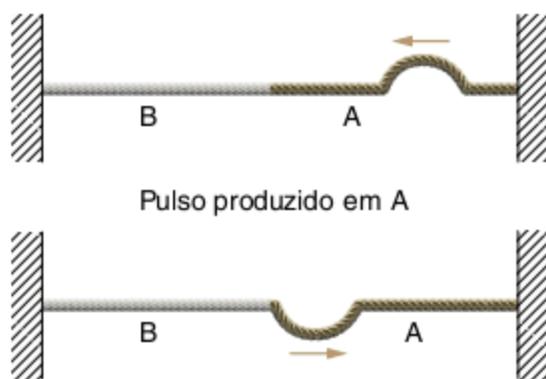
**16 Cescea** Um pulso, propagando-se em um meio, reflete-se em uma superfície refletora. A figura abaixo destaca duas situações possíveis dos pulsos refletidos.



Qual das afirmações é verdadeira sobre os pulsos refletidos?

- (a) O pulso A é possível e B não, qualquer que seja a superfície refletora.
- (b) O pulso A não é possível e B sim, qualquer que seja a superfície refletora.
- (c) Ambos são possíveis, qualquer que seja a superfície refletora.
- (d) Ou A ou B é possível dependendo da superfície refletora.
- (e) Nenhuma das afirmações anteriores.

**17 USP** Um pulso transversal se propaga ao longo de uma corda horizontal (A) que está ligada à outra (B) por um de seus extremos. Verifica-se que quando um pulso para cima, provocado em (A), chega à junção das cordas ele é parcialmente refletido com inversão de sentido, de modo que agora o pulso que percorre (A) é para baixo. Na figura não se representa o pulso transmitido à parte (B).



Seja  $v_A$  e  $v_B$  as velocidades dos pulsos, respectivamente, em (A) e em (B) e seja  $m_A$  e  $m_B$  as massas por centímetro de comprimento de (A) e de (B), pode-se afirmar que:

- (a)  $v_A > v_B$  e  $m_A > m_B$
- (b)  $v_A > v_B$  e  $m_A < m_B$
- (c)  $v_A < v_B$  e  $m_A > m_B$
- (d)  $v_A < v_B$  e  $m_A < m_B$

**18** Assinale com V as afirmações verdadeiras e com F as afirmações falsas.

- Um pulso transversal tem as mesmas características de um pulso longitudinal.
- Os pulsos tanto longitudinais quanto transversais se propagam em um mesmo meio com a mesma velocidade.

- A velocidade de propagação de um pulso transversal em um fio é diretamente proporcional à raiz quadrada da força que traciona o fio.
- A velocidade de propagação de um pulso transversal em uma corda depende do material que constitui a corda.
- Os pulsos longitudinais se propagam tanto nos fluidos quanto nos sólidos.
- Se na reflexão de um pulso ocorre a inversão, então o extremo da corda é livre.
- Além da inversão de fase, as demais características do pulso se modificam na reflexão, quando o extremo da corda for fixo.
- No caso de ocorrer reflexão e refração, simultaneamente, toda a energia transportada pela onda incidente é transferida para a onda refratada.
- A refração de um pulso é sempre acompanhada pela reflexão, quer dizer, além do pulso refratado, existe também o pulso refletido.
- Um pulso se propaga no fio 1 com velocidade  $v_1$  e passa para um fio 2 de maior massa específica linear, propagando-se neste com velocidade  $v_2 < v_1$ .
- Na situação proposta no teste anterior, o pulso incidente se reflete sem inversão de fase.

## TEXTO COMPLEMENTAR

### A dualidade onda-partícula

Afinal de contas, qual é o comportamento da luz: ela se comporta como onda ou como partícula?

Experimentos com fontes luminosas e interferência sugerem que a luz consiste de ondas, mas a teoria da partícula, postulada pela primeira vez pelos antigos filósofos atomistas gregos, não está morta.

Albert Einstein ressaltou, em 1905, que existem determinadas experiências atômicas nas quais a luz se comporta não como uma onda, mas como uma partícula. Nesses casos, ela chega em discretos feixes portadores de quantidades fixas idênticas de energia, os quais exercem pressão sobre o objeto que atingem e ocupam pequenos espaços, mais semelhantes a pingos de chuva do que a ondulações sobre a superfície de um lago.

Esse estado das coisas parece contraditório: pode-se provar que a luz se comporta como onda ou, então, como partícula. As duas faces parecem corretas. A saída para o dilema é radical: dar asas à imaginação e aceitar os dois comportamentos simultaneamente. Somente o mundo macroscópico apresenta fronteiras bem-definidas entre as ondas e as partículas. No micromundo dos átomos, a distinção não é bem definida, de modo que ambas as descrições devem ser aplicadas ao mesmo objeto.

O inverso também se aplica: assim como a luz tem propriedades semelhantes a das partículas, os átomos, e as partículas que os compõem, apresentam comportamento semelhante ao de uma onda. Experiências realizadas com os elétrons mostraram que eles sofrem interferência exatamente como ondas. A história da Física no século XX é em grande parte a elaboração experimental e teórica dessa dualidade entre ondas e partículas.

Expressões newtonianas como “equação do movimento” e “mecânica da partícula” foram substituídas pelos físicos nucleares por expressões como “equação de onda”, “função de onda” e “mecânica ondulatória”.

A imagem das ondas provou ser um tema poderoso da física. Das ondas em mar aberto às ondulações na superfície dos lagos, ela alcança os reinos do som e da luz onde a prova é necessariamente indireta, mergulhando, então, no mundo subatômico, onde se transforma em metáfora matemática, um modelo capaz de viabilizar a constatação das previsões, mas sem o apelo e sentido imediato das ondas no mundo da experiência cotidiana.

# RESUMINDO

- **Onda** é uma perturbação que pode se propagar tanto em meios materiais como imateriais (vácuo), dependendo de sua natureza, transportando energia e quantidade de movimento de um ponto a outro do sistema, sem transportar matéria entre esses pontos.
- **Ondas sonoras** se propagam em sólidos, líquidos e gases. Não se propagam no vácuo.
- **Ondas luminosas** se propagam em sólidos, líquidos, gases e no vácuo.

As ondas podem ser classificadas em:

**Longitudinais** – aquelas com sentido de vibração no mesmo sentido da propagação. Ex.: propagação do som no ar

**Transversais** – ondas com sentido de vibração perpendicular ao sentido da propagação. Ex.: propagação de ondas nas cordas de um instrumento musical.

**Mistas** – ondas que apresentam vibrações longitudinais e transversais. Ex.: ondas nas superfícies dos líquidos.

Quanto à dimensão, as ondas podem ser **unidimensionais**, **bidimensionais** e **tridimensionais**.

Quanto à natureza, as ondas podem ser:

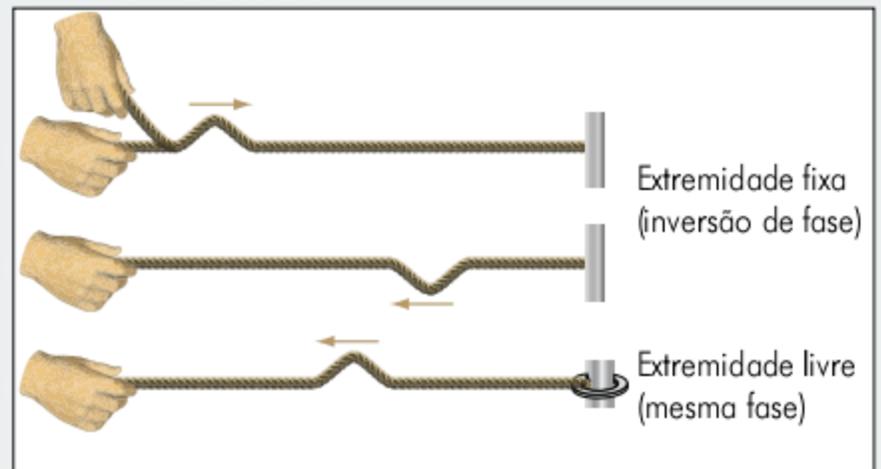
**Mecânicas** – quando são originadas por uma perturbação em um meio elástico, o qual tende a restabelecer a deformação, transmitindo a perturbação pelo meio. Ex.: ondas em cordas, em molas, na superfície da água e ondas sonoras.

**Eletromagnéticas** – ondas transversais originadas por cargas elétricas oscilantes. Podem se propagar no vácuo e em meios materiais e são constituídas por um campo elétrico e um campo magnético perpendiculares. Ex.: ondas de rádio, TV, raios X, raios  $\gamma$ , ondas luminosas.

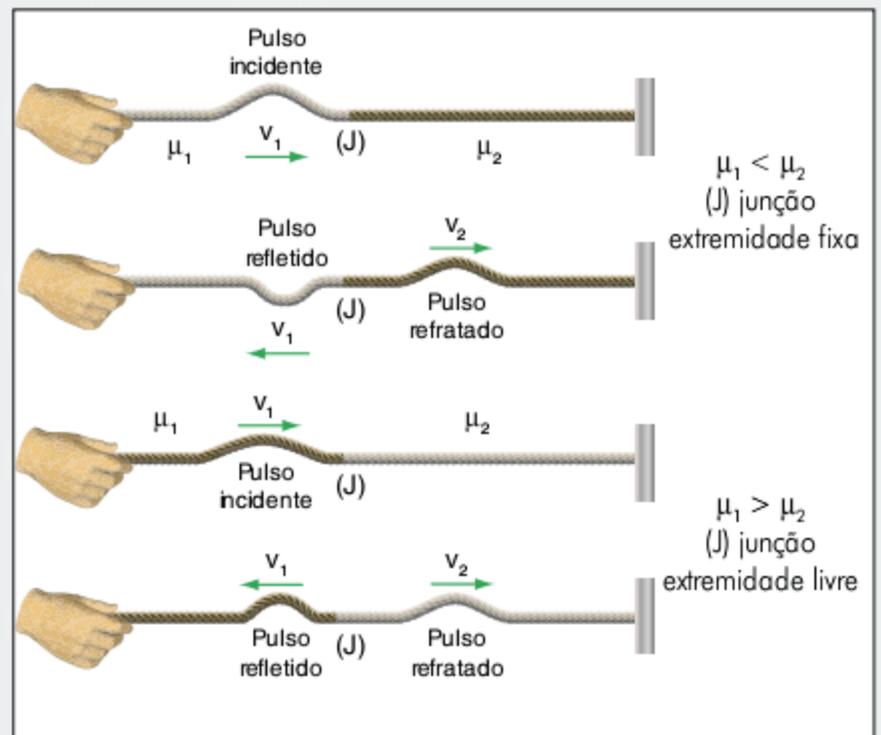
Um **pulso de onda** propagando-se em uma corda flexível, sem perda de energia, tem velocidade:

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

- Reflexão de pulsos



- Refração de pulsos



## ■ QUER SABER MAIS?



### SITES

- Ondas longitudinais e transversais – sobreposição  
[http://physics-animations.com/Physics/English/wav\\_ref.htm](http://physics-animations.com/Physics/English/wav_ref.htm)
- Construindo uma onda – onda transversal  
[www.ideiasnacaixa.com/laboratoriovirtual/ondulatóriaParte01.html](http://www.ideiasnacaixa.com/laboratoriovirtual/ondulatóriaParte01.html)
- Ondas sísmicas  
[www.moho.iag.usp.br/sismologia/ondasSismicas.php](http://www.moho.iag.usp.br/sismologia/ondasSismicas.php)

## Exercícios complementares

### Introdução à Ondulatória

**1 USP** Qual dos seguintes tipos de onda não é onda eletromagnética?

- (a) Infravermelho.
- (b) Radiação gama.
- (c) Ondas luminosas.
- (d) Ondas sonoras.
- (e) Ondas de rádio.

**2 UFRGS** Das afirmações que se seguem:

- I. A velocidade de propagação da luz é a mesma em todos os meios.
  - II. As micro-ondas usadas em telecomunicações para transportar sinais de TV e telefonia são ondas eletromagnéticas.
  - III. Ondas eletromagnéticas são do tipo longitudinal.
- está(estão) correta(s):

- (a) apenas I.
- (b) apenas II.
- (c) apenas I e II.
- (d) apenas II e III.
- (e) I, II e III.

**3 UFC** Usando seus conhecimentos sobre ondas longitudinais e transversais, assinale a alternativa correta.

- (a) Ondas longitudinais são aquelas para as quais as vibrações ocorrem numa direção que é ortogonal à direção de propagação da onda.
- (b) Ondas transversais são aquelas para as quais as oscilações coincidem com a direção da propagação.
- (c) Ondas luminosas e ondas de rádio são exemplos de ondas longitudinais.
- (d) Apenas ondas transversais podem ser polarizadas.
- (e) Apenas ondas longitudinais se propagam no vácuo.

**4 Unioeste** As ondas eletromagnéticas são oscilações dos campos elétrico e magnético e transportam energia.

Considere as afirmativas a seguir.

- I. As telecomunicações nos dias atuais transferem informações através de ondas originadas em efeitos de indução eletromagnética. Tais ondas podem ser transversais ou longitudinais.
- II. Um forno de micro-ondas emprega ondas eletromagnéticas longitudinais para o cozimento de alimentos.
- III. A velocidade de qualquer onda eletromagnética no vácuo tem o valor aproximado de  $3,0 \cdot 10^8$  m/s.
- IV. A luz solar incidente sobre a parte superior da atmosfera terrestre vale  $1.340$  W/m<sup>2</sup>. Um coletor solar, com área de  $0,5$  km<sup>2</sup> e que fosse colocado nessa região, receberia um máximo de  $6,7 \cdot 10^5$  J durante um intervalo de tempo de  $1,0$  s.

Estão incorretas as proposições:

- (a) I e II.
- (b) I e III.
- (c) I, II e III.
- (d) IV.
- (e) I, II e IV.

**5 PUC-SP** Uma partícula de um meio elástico, plano, e ao longo do qual se propaga um trem de ondas senoidais transversais de frequência constante, tem movimento:

- (a) retilíneo e uniforme na direção de propagação.
- (b) retilíneo e uniforme com direção perpendicular à de propagação.
- (c) harmônico simples com direção perpendicular à de propagação.
- (d) harmônico simples na direção de propagação.
- (e) harmônico simples com direção inclinada de  $45^\circ$  em relação à de propagação.

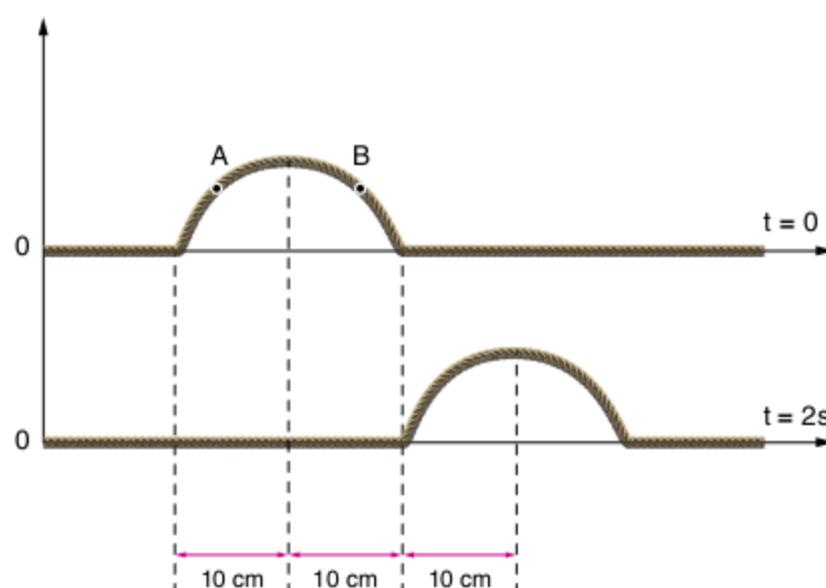
**6** Uma corda homogênea, de seção reta constante, de comprimento  $L$  e massa  $m$ , é esticada por uma força  $f$ . A relação que dá a velocidade de propagação de um pulso nessa corda é:

- (a)  $\sqrt{f \cdot m \cdot L}$
- (b)  $f \sqrt{m \cdot L}$
- (c)  $\sqrt{\frac{m \cdot L}{f}}$
- (d)  $\sqrt{\frac{L}{m \cdot f}}$
- (e)  $\sqrt{\frac{f \cdot L}{m}}$

**7** Uma corda extensível tem comprimento  $\ell = 2,0$  m e massa  $m = 0,050$  kg. Submetendo-se a uma força tensora de intensidade  $F = 5,0$  N, seu comprimento é duplicado. Estica-se a corda entre dois pontos separados pela distância  $\ell = 3,0$  m. Calcule a velocidade de propagação de um abalo transversal na corda.

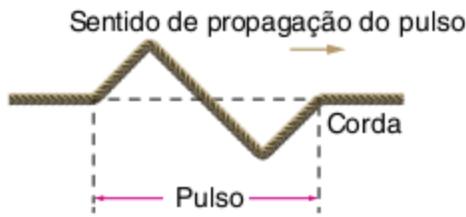
- (a) 10 m/s
- (b) 1,15 m/s
- (c) 11,5 m/s
- (d) 7,07 m/s
- (e) n.d.a.

**8 Fuvest** A figura representa, nos instantes  $t = 0$  e  $t = 2$  s, as configurações de uma corda sob tensão constante, na qual se propaga um pulso cuja forma não varia.

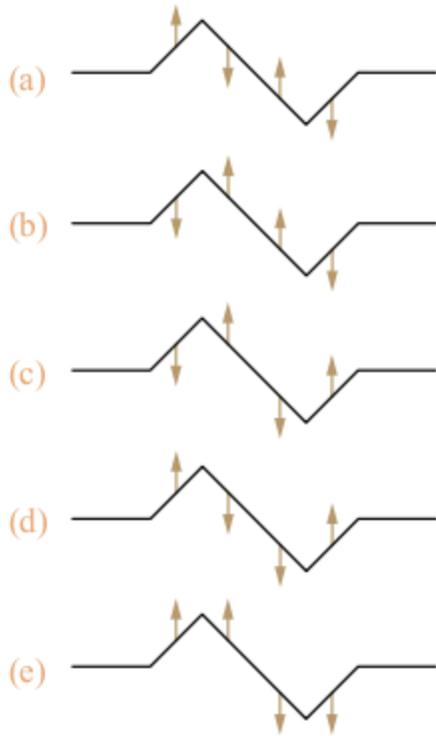


- a) Qual é a velocidade de propagação do pulso?
- b) Indique, na figura, a direção e o sentido das velocidades dos pontos materiais A e B no instante  $t = 0$ .

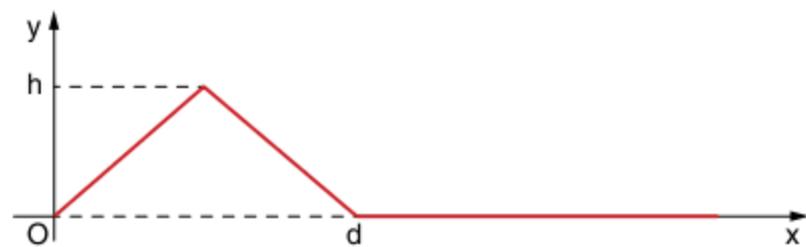
**9 Cesgranrio** Um pulso com a forma representada propaga-se, no sentido indicado, ao longo de uma corda mantida sob tensão.



Qual das figuras propostas a seguir mostra corretamente os sentidos dos deslocamentos transversos (i. e., na direção perpendicular à direção de propagação do pulso) das várias vertentes do pulso?

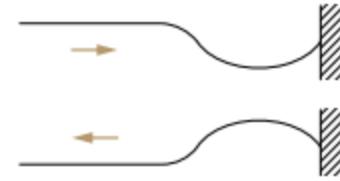


**10 UFRJ** Uma corda comprida e tensa está inicialmente ao longo de um eixo horizontal  $Ox$  e tem uma de suas extremidades em  $x = 0$ . Num dado instante, tomado como  $t = 0$ , uma onda transversal é gerada na corda levando-se essa extremidade para cima até uma altura  $h$  conhecida e depois trazendo-a de volta para a posição inicial. A partir desse momento, a extremidade permanece em repouso. A duração do movimento de subida da extremidade, de valor conhecido  $\Delta t$ , é igual à duração do movimento de descida. Por simplicidade, suponha que o movimento da extremidade, tanto na subida quanto na descida, seja realizado com velocidade vertical e de módulo constante, sendo desprezível o tempo gasto para inverter o movimento. A figura mostra a configuração da corda no instante  $t = 2\Delta t$ .



Calcule a velocidade do ponto da corda localizado em  $x = \frac{5d}{4}$  no instante  $t = 4\Delta t$ , sendo  $d$  a distância indicada no gráfico.

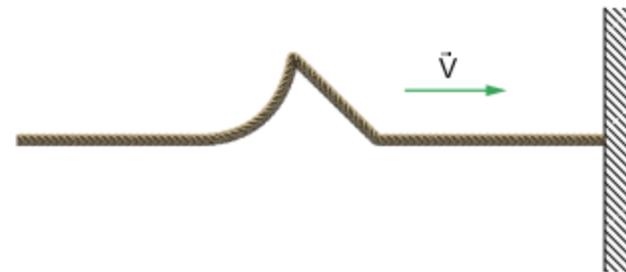
**11 Fuabc** A figura abaixo representa um pulso deslocando-se sobre uma corda cuja extremidade está fixa numa parede, em dois instantes sucessivos.



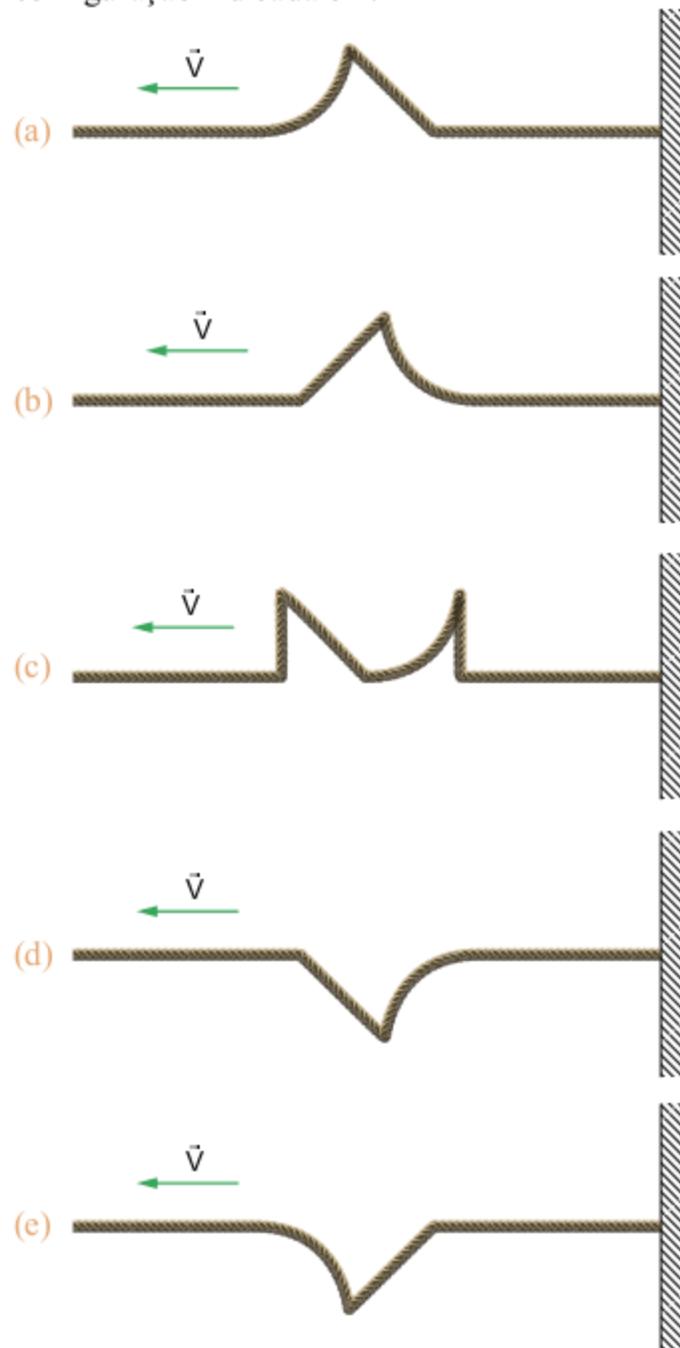
O fenômeno observado é característico da natureza ondulatória e recebe o nome de:

- (a) difração. (c) reflexão. (e) n.d.a.
- (b) refração. (d) difusão.

**12 FGV** A figura mostra um pulso que se aproxima de uma parede rígida onde está fixada a corda.



Supondo que a superfície reflita perfeitamente o pulso, deve-se esperar que no retorno, após uma reflexão, o pulso assumira a configuração indicada em:

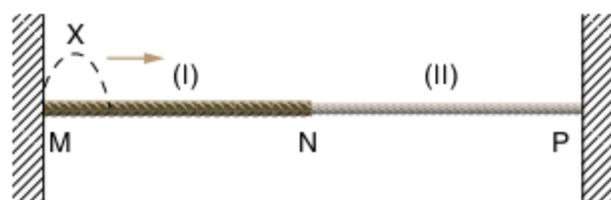


**13 UnB** Um pulso propagando-se numa corda encontra uma outra corda mais leve; então:

- (a) parte do pulso se reflete invertido e parte continua direito.
- (b) parte do pulso se reflete sem se inverter e parte continua direito.
- (c) o pulso será totalmente refletido, sem se inverter.
- (d) o pulso se transmitirá totalmente para a corda leve.

Texto para as questões 14 e 15.

Duas cordas, uma grossa (I), de grande densidade linear, e outra fina (II), de pequena densidade linear, estão unidas, como indica a figura. Admita que, inicialmente, uma perturbação única X propaga-se no sentido indicado na figura. Os pontos M e P são fixos.



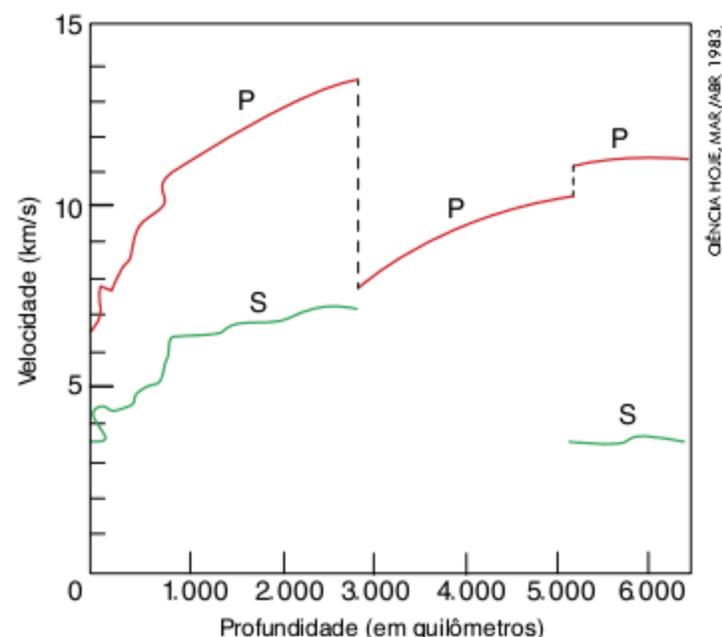
**14** Logo após a chegada da perturbação a N, pode-se esperar que:

- I. a perturbação passa de (I) para (II) sem inversão.
  - II. a perturbação sofre uma reflexão em N, com inversão.
  - III. a perturbação que passa para (II) e a que se reflete em N e continua em (I) são ambas dirigidas para baixo.
- (a) Apenas a afirmação I é correta.
  - (b) Apenas a afirmação II é correta.
  - (c) Apenas a afirmação III é correta.
  - (d) Todas as afirmações são corretas.
  - (e) Todas as afirmações são falsas.

**15** Logo após a primeira reflexão em M e em P, verifica-se o seguinte:

- I. uma perturbação para baixo percorre a corda (I) de M para N e outra para cima percorre a corda (II) de P para N.
  - II. uma perturbação para baixo percorre a corda (II) de P para N e outra também para baixo percorre a corda (I) de M para N.
  - III. as perturbações refletidas consideradas são ambas dirigidas para cima.
- (a) Apenas a afirmação I é correta.
  - (b) Apenas a afirmação II é correta.
  - (c) Apenas a afirmação III é correta.
  - (d) Todas as afirmações são corretas.
  - (e) Todas as afirmações são falsas.

**16 UFCG** A figura mostra a variação da velocidade de propagação em função da profundidade para ondas mecânicas transversais (S) e longitudinais (P) através da Terra. As ondas (P) propagam-se tanto em meios sólidos quanto em líquidos, enquanto as ondas (S) só se propagam em meios sólidos. A análise da propagação dessas ondas, provocadas, por exemplo, por terremotos, contribuiu para a construção do modelo da estrutura da Terra que se adota hoje.



A partir da análise do gráfico, pode-se afirmar, exceto, que:

- (a) as ondas P sofrem refração ao se propagarem através da Terra, por exemplo, a 3.000 km.
- (b) se a Terra fosse uma esfera de composição química homogênea, não haveria refração das ondas mecânicas ao se propagarem através dela.
- (c) pode-se considerar que existe uma região do interior da Terra que é líquida.
- (d) para profundidades entre 2.000 e 4.000 km, pode-se afirmar que a elasticidade do meio diminuiu consideravelmente.
- (e) para profundidades acima de 5.000 km, a propagação de ondas (S) justifica o ligeiro aumento da velocidade de propagação das ondas (P).

## Frente 1

9

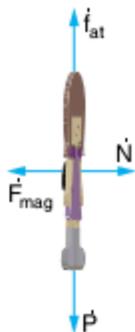
Força de atrito e dinâmica do movimento circular

### Revisando

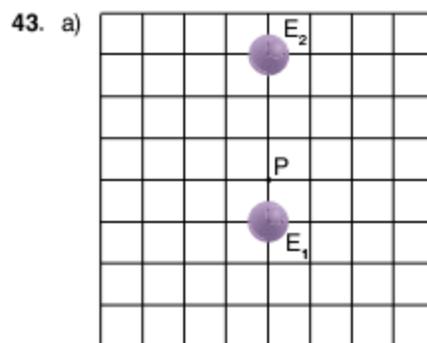
- $F_{at} = 20 \text{ N}; a = 0$
  - $F_{at} = 25 \text{ N}; a = 0$
  - $F_{at} = 15 \text{ N}; a = 3 \text{ m/s}^2$
- 100 N
  - $F_{at} = 20 \text{ N}; a = 5 \text{ m/s}^2$
  - $F_{at} = 40 \text{ N}; a = 0$
- 80 N
  - $a = 6 \text{ m/s}^2; T = 90 \text{ N}$
- 62 N, para cima.
  - 2 N, para baixo.
- $12,8 \text{ m/s}^2$ , para baixo.
  - 5 s
  - 160 m
  - 128 m
  - $3,2 \text{ m/s}^2$ , para baixo.
  - 10 s
  - 32 m/s
- $2 \text{ m/s}^2$ , para baixo.
  - 48 N
- 25 N
  - $a_A = a_B = 1 \text{ m/s}^2; F_{at} = 4 \text{ N}$
  - $a_A = 2 \text{ m/s}^2; a_B = 7 \text{ m/s}^2; F_{at} = 8 \text{ N}$
- $10 \text{ m/s}^2$ , para baixo.
  - $7,5 \text{ m/s}^2$ , para baixo.
  - 216 km/h
  - $30 \text{ m/s}^2$ , para cima.
  - 6 m/s
- 30 kg
- 80 cm
- 9.200 N
  - 7.200 N
  - 5.200 N
  - 6.200 N
  - 8.200 N
  - $2\sqrt{10} \text{ m/s}$
- $5\pi \text{ s}$
  - 2.800 N
- $5 \text{ m/s}^2$
  - 0
  - $40\sqrt{3} \text{ N}$
  - 0
  - $8 \text{ m/s}^2$
  - 90 N
- $\frac{v^2}{g} \cdot \cotg \theta$
- 0,2
- $\sqrt{\frac{g}{\mu_e r}}$

### Exercícios propostos

- B
- B
- A
- A
- $|f| < |f'|$
- D
  - D
- C
- A
- A
- 0,4 N
  - 0,40 s

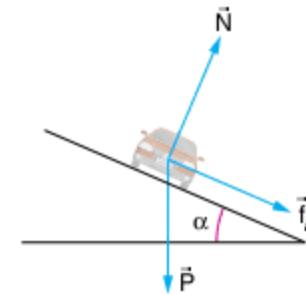


- B
- Não.
  - 26 m/s
- $1,0 \text{ m/s}^2$
  - 35 N
- B
- 5 N e 50 N
  - 9 kg
- V; V; V; V.
- 5 N
- $\frac{17}{47}$
  - $\frac{423}{340} \text{ m}$
- E
- 2,5 N
  - $\frac{\sqrt{3}}{6}$
- $\frac{10}{3} \text{ kg}$
- $20\sqrt{2} \text{ N}$
  - $2 - \sqrt{3}$
- A
- B
- E
- A
- E
- A
- Nula.
- 8 s
- 40 N
- $50\sqrt{17} \text{ N}$
- $3,0 \text{ m/s}^2$
  - 0,30
- $0,50 \text{ m/s}^2$
  - $4,0 \text{ m/s}^2$
- E
- A
- A
- C
- C
- E
- 6,0 N
- E
- 200 N
  - 0,4 m
- B



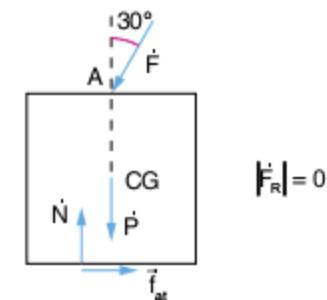
- 3
  - $M_1 = \frac{3\pi^2 D^3}{GT^2}$
- D
- B
- 8 m/s
  - 128 N
- C
- C
- D
  - A
- 0,40 N
  - 1,4 N
- E
- C
- E
- 10 N
  - 4 rad/s

- D
- 29
- 96 m
- D
- 0,5
- $\sqrt{53} \text{ rad/s}$
  - $\frac{7,4}{53} \text{ m}$
- 32 m/s
- B
- $4\sqrt{5} \text{ rad/s}$
  - $4,5\pi$  rotações
- $\text{tg } \alpha = \frac{v^2}{Rg}$
  -



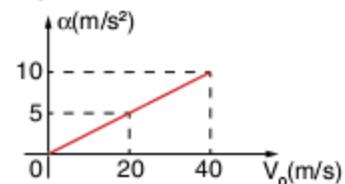
### Exercícios complementares

- D
  - C
- 42
- I - 1; II - 3; III - 4; IV - 2
- A
- 

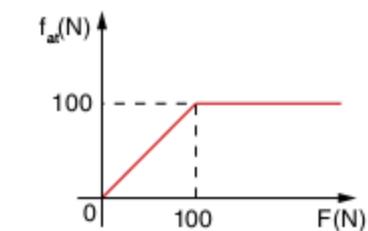


- 100 N
  - $\frac{2}{2\sqrt{3}+1}$
- D
- A
- 92
- $a \geq 25 \text{ m/s}^2$
  - $F \geq 250 \text{ N}$
  - $\mu \geq 0,50$

- B
- A
- 50 cm
- 4 s
  -

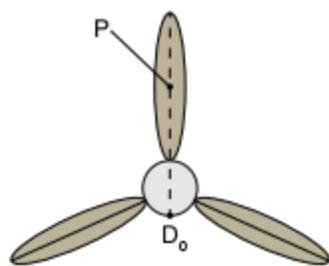


- 24 m/s
- F; F; V; F; F.
- 



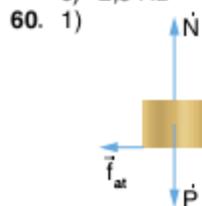
- $m = 50 \text{ kg}; \mu = 0,20$
- $F_A = \frac{\mu P}{\cos \theta + \mu \cdot \text{sen } \theta}$  e  $F_B = \frac{\mu P}{\cos \theta - \mu \cdot \text{sen } \theta}$
  - $\mu_A = \frac{F \cdot \cos \theta}{P - F \cdot \text{sen } \theta}$  e  $\mu_B = \frac{F \cdot \cos \theta}{P + F \cdot \text{sen } \theta}$

17. D  
 18. a)  $\frac{1}{\text{sen } \alpha} \sqrt{\frac{2h}{g}}$       b)  $\frac{3}{4} \text{tg } \alpha$   
 19. A  
 20. 480 N  
 21. 24  
 22. B  
 23. a) 3,0 N  
     b) 7 bloquinhos  
 24. a) 15 kg  
     b) 25 kg  
     c)  $\frac{2}{3} \text{ m/s}^2$   
 25. C  
 26. A  
 27. a)  $16,3 \text{ N} \leq Q \leq 33,7 \text{ N}$   
     b) 25 N  
 28. 57  
 29. 72,6 N  
 30.  $\frac{F_2}{F_1} = 1,5$  e  $\frac{F_3}{F_1} = 2$   
 31.  $3 \text{ m/s}^2$   
 32. E  
 33. B  
 34. Entre  $t_0$  e  $t_1$ :  $F_r < P$   
     Entre  $t_1$  e  $t_2$ :  $F_r = P$   
     Entre  $t_2$  e  $t_3$ :  $F_r > P$   
     Entre  $t_3$  e  $t_4$ :  $F_r = P$   
 35. 17  
 36. D  
 37. Itens corretos: 0 e 1; itens incorretos: 2 e 3.  
 38. 24  
 39. 5  
 40. C  
 41. 10 cm  
 42. a)  $\frac{V_A}{2}$       b) 2      c)  $\frac{3MV_A^2}{4L}$   
 43. a) 0,252 N  
     b) 0,07 kg  
     c)



44. C  
 45. E  
 46.  $9,9 \text{ m/s}^2$   
 47. 23  
 48. B  
 49.  $2,0 \text{ m/s}$   
 50. C  
 51. A  
 52. a)   
     b)  $\sqrt{30} \text{ rad/s}$   
 53. B  
 54. a)   
     b) 4,2 s  
     c)  $180\sqrt{2} \text{ kg}$

55.  $T = \frac{0,4\sqrt{3}}{3} \text{ N}$  e  $a = 0,005 \text{ m/s}^2$   
 56. B  
 57. 18  
 58. a)  $\text{tg } \theta = \frac{V^2}{Rg}$   
     b) 180 m/s  
     c) 3.240 m  
 59. a) 2,5Mg  
     b) 2  
     c) 2,5 Hz



- 2)  $\omega_M = \sqrt{\frac{\mu g}{r}}$   
 3) Será dividida por  $\sqrt{2}$ .  
 61. 05  
 62.  $\mu = \left( \frac{\omega^2 \cdot d}{2g} \right) \cdot \left( \frac{M}{m} - 1 \right)$   
 63. B  
 64. a)  $\frac{mg}{\cos \theta - \mu \cdot \text{sen } \theta}$   
     b)  $\sqrt{Rg \cdot \frac{\text{sen } \theta + \mu \cdot \cos \theta}{\cos \theta - \mu \cdot \text{sen } \theta}}$

10 Trabalho, potência e energia

Revisando

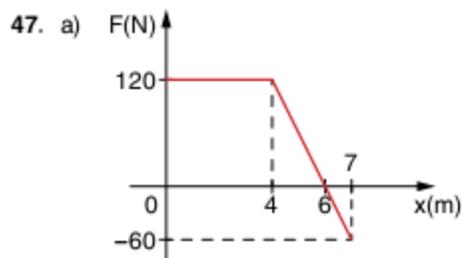
1. a)  $10 \text{ m/s}^2$   
     b) 80 m  
     c) 0  
     d) 7.200 J  
     e) -2.400 J  
     f) -800 J  
     g) 4.000 J  
 2. a) 750 J  
     b) -150 J  
     c) 600 J  
 3. a) -8 W  
     b) -16 W  
     c) -8 W  
 4.  $P = 8P_0$   
 5. a) 540 kJ  
     b) 72 hp  
 6. a) 1,25 hp  
     b) 13.500 L  
 7. 20%  
 8. a) 800 J  
     b) 200 J  
     c) 0  
     d) 200 J  
     e) 800 J  
     f) -800 J  
     g) 600 J  
     h) -600 J  
     i) 800 J  
     j) 0  
     k) 600 J  
 9. a) 5.000 J  
     b) 0  
     c) 1.000 J  
     d) 1.000 J  
     e) -3.000 J  
     f) 4.000 J  
 10. 36.000 kWh  
 11. 1,0 J  
 12. a) 20 m/s  
     b)  $x = 6 \text{ m}$   
     c) 30 m/s

13. a) 16,8 m  
     b) 20 m/s  
     c) 5 m/s  
     d) 18,75 m  
 14. a) 8 m/s  
     b) 3,2 m  
 15. 4 m/s  
 16. 30 cm  
 17. 6 m/s  
 18. a) 2 m  
     b) 0,1 m  
     c) 9 m/s  
 19. 2,5P  
 20. a)  $2\sqrt{10} \text{ m/s}$   
     b) 1.500 N  
 21. a)  $v = \sqrt{gR}$ ;  $N = 0$   
     b)  $v = \sqrt{5gR}$ ;  $N = mg$   
     c)  $v = 2\sqrt{gR}$ ;  $N = 4,5mg$   
     d)  $v = \sqrt{3gR}$ ;  $N = 3mg$   
 22. a) 45 J  
     b) 10 J  
 23. 6 m/s  
 24. 0,5

Exercícios propostos

1. A  
 2. D  
 3. a) 10 N  
     b) 4,0 m  
     c<sub>1</sub>) 14,4 J  
     c<sub>2</sub>) 25,6 J  
     c<sub>3</sub>) 40 J  
 4. D  
 5. a) 250 N  
     b) 750 J  
 6. a)  $\mu_E = 0,15$  e  $\mu_D = 0,10$   
     b) 100 J  
     c) Nulo.  
 7. D  
 8. A  
 9. 250 W  
 10. a) 800 kW  
     b)  $1,6 \cdot 10^5 \text{ N}$   
 11. A  
 12. 40 m/s  
 13. a) 200 J e 150 J  
     b) 20 W e 75 W  
 14. E  
 15. a) 3.200 J  
     b) Pois  $P_1 = 2P_2$   
 16. 5  
 17. C  
 18. E  
 19. a) 2.000 W  
     b)  $2.500 \text{ N/m}^2$   
 20. 540 L  
 21. C  
 22. E  
 23. A  
 24. C  
 25. A  
 26. A  
 27. E  
 28. E  
 29. D  
 30. A  
 31. D  
 32. C  
 33. E  
 34. D  
 35. a) 2,0 N  
     b) 0,01 J  
 36. 8,0 J  
 37. E  
 38. D

- 39. E
- 40. E
- 41. a) 200 J  
b) 8 N
- 42. E
- 43. V; V; F; F; V.
- 44. A
- 45. B
- 46.  $W = 75 \text{ J}$  e  $v = \sqrt{35} \text{ m/s}$



- b)  $\sqrt{114} \text{ m/s}$
- 48. C
- 49. D
- 50. 07
- 51. A
- 52. A
- 53. A
- 54. E
- 55. B
- 56. 3
- 57. D
- 58. B
- 59. E
- 60. A
- 61. D
- 62. E
- 63. 20 cm
- 64. C
- 65. D
- 66. A
- 67. a) 90 J  
b) 60 m/s
- 68. 40 cm
- 69. 3 m
- 70. C
- 71. 60
- 72. 0,8 m/s
- 73. a) 20 m  
b) 160 N/m
- 74. C
- 75. E
- 76. a)  $T_0 = 2,0 \text{ N}$   
b)  $T_1 = 1,0 \text{ N}$  e  $T_2 = 4,0 \text{ N}$
- 77. a)  $\sqrt{g\ell}$   
b) 6P
- 78. a) 6,0 m/s  
b)  $\frac{20}{3} \text{ m/s}^2$   
c)  $1,0 \cdot 10^3 \text{ N}$
- 79. B
- 80. a) 3R  
b) mg
- 81. C
- 82. D
- 83. 10
- 84. a) 0,64 m  
b)  $1,6\sqrt{5} \text{ m/s}$
- 85. B
- 86. 18
- 87. a) 3,0 m/s  
b) 1.775 J
- 88. C
- 89. D
- 90. C
- 91. 2,5 m
- 92. B
- 93. 35
- 94. a) -0,2 J  
b) 2 m/s

- 95. a)  $\frac{Mg - F}{M}$   
b)  $\sqrt{\frac{2h(Mg - F)}{M}}$   
c)  $-Mgy$   
d)  $\frac{2Mg(h + y) - 2Fh}{y^2}$

- 96. C
- 97. C
- 98. B

**Exercícios complementares**

- 1. -20 J
- 2. a)
- b)  $W = 400 \text{ J}$ ;  $R = 40 \text{ N}$
- 3. a)  $2,0 \text{ m/s}^2$   
b)  $-\frac{4}{3}$
- 4. E
- 5. 3
- 6. a) 100 J  
b) 75 J  
c) zero  
d) 37,5 J  
e) -50 J
- 7. E
- 8. a) 2.000 N  
b) 264 kW
- 9. a)  $\frac{\pi}{20} \text{ rad/s}$   
b)  $5,0 \text{ m/s}^2$   
c) 4.000 N  
d)  $2,0 \cdot 10^5 \text{ W}$
- 10. B
- 11. a)  $20 \text{ m/s}^2$   
b)  $3,3 \cdot 10^4 \text{ N}$   
c)  $1,32 \cdot 10^6 \text{ W}$
- 12. E
- 13. a) 6,0 N  
b)  $1,5 \cdot 10^5 \text{ cal/h}$
- 14. a) 5.000 W  
b) 6.050 N
- 15. C
- 16. a) 50.000 N  
b) 75.000 N  
c) 2 m/s  
d) 3 m/s
- 17. C
- 18. E
- 19. E
- 20. a) 2.000 N  
b) 0,25  
c) 264 kW
- 21. a) 6.000 J  
b) 200 W  
c) 50%
- 22. a) 140 W  
b) 70 graus  
c) 11.200 J
- 23. C
- 24. C
- 25. E
- 26. E
- 27. D
- 28. a)  $1,8 \cdot 10^{14} \text{ J}$   
b) 3  
c) 8 meses

- 29. E
- 30. 14
- 31. a)  $\frac{25}{9}$   
b)  $\frac{3.125}{81} \text{ m}$   
c)  $\frac{15.625}{567} \text{ kW}$
- 32. a) 9,5 kg  
b) 10 J
- 33. a) 1,0 N/m  
b)  $5,0 \cdot 10^{-15} \text{ J}$   
c) 2,0  $\mu\text{g}$
- 34. a)  $5,0 \cdot 10^3 \text{ m}^3/\text{s}$   
b)  $2,0 \cdot 10^3 \text{ mm}$
- 35. a) 510.000 domicílios  
b) 600.000 kg  
c) 720 MW
- 36. a) 144 kg/s  
b) 1.800 W
- 37. a)  $-0,25 \text{ m/s}^2$   
b) 22,5 N  
c) 900 kJ
- 38. a) 999 m  
b) 40 m  
c) 300 J  
d) 15 g
- 39. D
- 40. a) 30 N  
b) 216 J
- 41. C
- 42. a)  $2\sqrt{2\pi\mu gR}$   
b)  $2\sqrt{\frac{\pi R}{\mu g}}$   
c)  $-2\pi\mu mgR$
- 43.  $h = \frac{mgH}{F}$
- 44. V; F; V; V.
- 45. a) 40 m/s  
b) 5,0 s
- 46. a) 3,0 m  
b)  $3\sqrt{2} \text{ m/s}$   
c) zero
- 47. a)  $F(x) = -20x$ , para  $x \geq 0$   
 $F(x) = 0$ , para  $x < 0$   
b)  $\sqrt{1,6} \text{ m}$   
c) MHS  
d) sistema massa-mola
- 48. a) 20 J  
b) -40 J  
c) Porque  $W_{R,A \rightarrow B} = -20 \text{ J}$ , que é negativo.  
d)  $\alpha = \text{arc cos } 0,6$   
e)  $\theta = \text{arc tg } 0,5$   
f)  $\alpha = 2\theta$   
g) Periódico entre A e C.  
h) 20 N  
i)  $\frac{40}{\pi} \text{ N}$
- 49. D
- 50. 50
- 51. B
- 52. A
- 53. B
- 54. a) B  
b) A
- 55. D
- 56. B
- 57. a) 5,0 m  
b) 6,2 m  
c) O resultado independe da massa.
- 58. E
- 59. a)  $E_{M,A} = 275 \text{ J}$  e  $E_{M,B} = 2.600 \text{ J}$   
b)  $v_A = 10 \text{ m/s}$  e  $v_B = 10 \text{ m/s}$   
c)  $t_A = 1,0 \text{ s}$  e  $t_B = 1,0 \text{ s}$
- 60. B

61. E  
 62. a) 10 m/s      b) 4,25 m      c) 8,7 m  
 63.  $2\sqrt{gR}$   
 64.  $R \cdot \frac{2 \cos^2 \varphi + 2 \cos \varphi + 1}{2 \cos \varphi}$   
 65.  $\sqrt{30}$  m/s  
 66. a) 4,0 m/s  
     b) 0,60 m  
 67. a)  $v = \frac{x}{2} \sqrt{\frac{k}{m}}$       b)  $d = \frac{x}{2} \sqrt{\frac{2hk}{mg}}$   
 68. a) 0,05 N/m  
     b) 5.000 m/s  
 69. 3.280 N/m  
 70. E  
 71. A  
 72. C  
 73. a) 800 N/m  
     b) 46 J  
 74. E  
 75. a) 7 mm<sup>2</sup>  
     b) 20 m/s  
 76. 24 m  
 77. C  
 78. 33  
 79. 0,8  
 80. a)  $5\sqrt{3}$  m/s<sup>2</sup>  
     b) 10 m/s<sup>2</sup>  
 81. 120°  
 82. a)  $\sqrt{\frac{mg(D^2 + 4H^2)}{2kH}}$   
     b)  $mg \left( \frac{D^2}{2HR} - \sin \theta \right)$   
 83. 14  
 84. a) Direção vertical, sentido de baixo para cima e  $|\dot{v}_L| = \sqrt{gR}$ .  
     b) Direção de 45° com a horizontal, sentido de L para K e  $|\dot{F}| = mg\sqrt{2}$ .  
 85. D  
 86. a)  $\sqrt{\frac{2Rg}{3}}$       b)  $\frac{5R}{3}$   
 87.  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$   
 88.  $\arccos \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{h-r}{r} \right)$   
 89. B  
 90. A  
 91. a) 0,375 J  
     b)  $\frac{10\sqrt{6}}{3}$  m/s  
 92. 07  
 93. V; F; F; V; V.  
 94. a) 3.600 N  
     b) 1.560 N  
 95.  $v = v_0 \sqrt{\frac{\pi - 2}{\pi}}$   
 96. a)  $\sqrt{3}$   
     b) 3  
     c) 1  
 97. D  
 98. C  
 99. B  
 100. a) 0,20 m  
     b)  $2\sqrt{3}$  m/s  
 101. a)  $F_{\min} > 5$  N  
     b)  $F - 4$   
     c) 13 N  
 102. a)  $2\pi M_0 g R_0$   
     b)  $2\pi \mu m V_0^2$   
     c)  $\sqrt{\frac{M_0 g R_0}{\mu m}}$   
 103. D  
 104. 20  
 105. C  
 106. A

## Frente 2

9

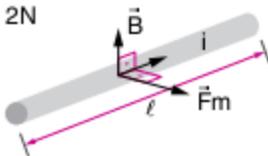
### Forças magnéticas e indução magnética

#### Revisando

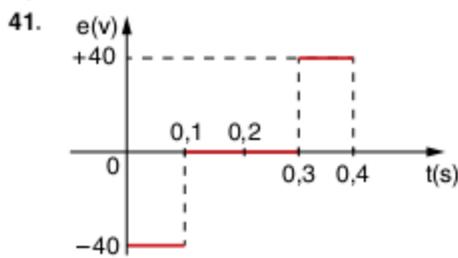
1.  $2i/B$
2. atrativa – igual à
3. Todas são corretas

#### Exercícios propostos

1. A
2. C
3. E
4. a) Anti-horário.  
     b) Plano da espira paralelo às faces do ímã.
5. 2N

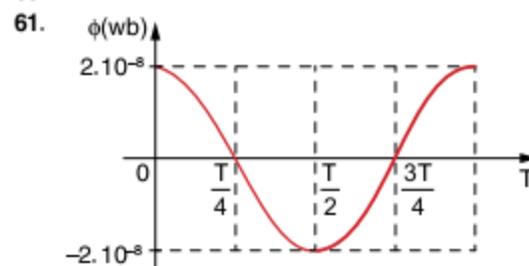


6. B
7. A
8. C
9. D
10. A
11. A
12.  $1,0 \cdot 10^{-3}$  N
13. B
14. a) De C para D.  
     b) 20 A
15. A
16. a)  $4,0 \cdot 10^{-6}$  N  
     b) Repulsão.
17.  $4 \cdot 10^2$  V
18. C
19. D
20. a) 2V  
     b)  $F_{\text{mag}} = 0,02$  N
21. a)  $R_{\text{EQ}} = 2,5 \Omega$   
     b)  $1 \cdot 10^{-4}$  N
22. C
23. 34
24.  $x = 5,0$  cm
25. A
26. C
27. D
28. A
29. D
30. Da esquerda para direita.
31. B
32. D
33. E
34. D
35. D
36. D
37. A
38. A
39. E
40. E



41. A
42. A
43. a)  $3,2 \cdot 10^{-5}$  Wb  
     b)  $3,2 \cdot 10^{-4}$  V
44.  $\left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot 10^{-3} \text{ A} \\ \text{Anti-horário.} \end{array} \right.$
45. C
46.  $3 \cdot 10^{-2}$  A

47. E
48. 0,25 N
49.  $\left\{ \begin{array}{l} i = 20 \text{ A} \\ v = 100 \text{ m/s} \end{array} \right.$
50. a) 4,0 V  
     b) 1,0 A
51. E
52. 2,5 v
53. A
54. D
55. B
56. D
57. a) 1,2 V  
     b)  $2,64 \cdot 10^{-1}$  Wb  
     c) 0,22 s
58. a) 1,25 A  
     b)  $-1,5 \cdot 10^{-7}$  V
59. E
60. A



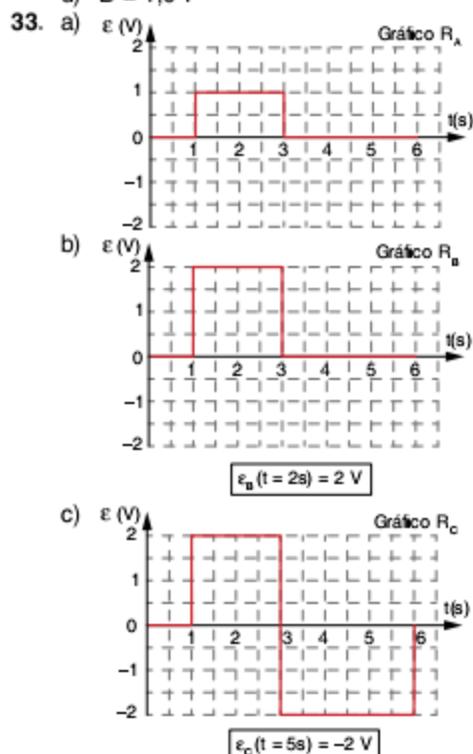
61.  $2\pi \cdot 10^{-3}$  V
62. B
63.  $2\pi \cdot 10^{-3}$  V

#### Exercícios complementares

1. 0,25 T
2. 20 g
3. C
4. B
5. 4 A
6. B
7. 0,40 T
8. D
9. C
10. C
11. E
12. A
13. D
14. 1 V
15. D
16. E
17. C
18. a) 0,05 V  
     b) De O para A.
19. A
20. C
21. a) 20 V  
     b) de N para M  
     c) 20 A  
     d) 40 N, da esquerda para a direita.  
     e) 40 N  
     f)  $4,0 \cdot 10^2$  W  
     g)  $4,0 \cdot 10^2$  W
22. a) 0,05 T  
     b)  $8 \cdot 10^{-5}$  Wb
23. D
24.  $1,8 \cdot 10^{-5}$  W
- 25.
26. C
27. C
28. B
29. C
30. a) -0,40 V  
     b) 40 V  
     c) X: polo positivo; Y: polo negativo

31.  $\frac{mgR \sin\theta}{B^2 r^2}$

32. a)  $F = 0,16 \text{ N}$   
 b)  $P = 0,064 \text{ W}$   
 c)  $i = 0,8 \text{ A}$   
 d)  $B = 1,0 \text{ T}$



34. 27  
 35. 41  
 36.  $I_p = \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{V_s}{R}$

37. E  
 38. C  
 39. A  
 40. a)  $F = 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ N}$   
 A corrente da força é para cima; a direção é vertical.  
 b)  $P = 5,0 \cdot 10^{-1} \text{ W}$   
 A corrente obedece à regra da mão esquerda e tem sentido horário.  
 41. D  
 42. E

10 Gravitação

Revisando

1. a) Na teoria geocêntrica, a Terra ocupa o centro do Sistema Solar, enquanto na teoria heliocêntrica, o Sol ocupa o centro do Sistema Solar.  
 b) Um ano-luz é a distância que a luz percorre em um ano, enquanto unidade astronômica é a distância média entre o Sol e a Terra.  
 c) As estações do ano acontecem pois o eixo imaginário de rotação terrestre está inclinado em relação ao plano da órbita da Terra em torno do Sol.  
 2. Pela Lei das Áreas podemos concluir que a velocidade no periélio (ponto mais próximo) é maior do que no afélio (ponto mais distante). Isso é uma consequência obtida a partir da 2ª Lei de Kepler (Lei das Áreas).  
 3.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$  dias  
 4. A força fica multiplicada por  $\frac{1}{8}$ .  
 5. 8 g  
 6. a) 8.000 m/s  
 b) 4.800 s  
 7. a) A energia potencial gravitacional é máxima quando o cometa está o mais afastado possível do Sol, ou seja, quando ele estiver no afélio.

- b) No afélio, o cometa está com a menor velocidade possível, logo, nessa posição, a energia cinética é mínima.  
 c) A energia mecânica total é constante na órbita, ou seja, é igual no afélio e no periélio.

Exercícios propostos

1. C  
 2. B  
 3. B  
 4. E  
 5. E  
 6. A  
 7. C  
 8. D  
 9. B  
 10. C  
 11. B  
 12. D  
 13. D  
 14. 27  
 15. D  
 16. B  
 17. A  
 18. D  
 19. C  
 20. A  
 21. C  
 22. A  
 23. B  
 24. C  
 25. A  
 26. A  
 27. B  
 28. E  
 29. C  
 30. A  
 31. B  
 32.  $\frac{90}{1}$   
 33. a) 100 kg  
 b) 2.645 N  
 34. Sim, ao solicitar que Garfield perca peso, ele pode ser feito de 2 maneiras. Como  $P = mg$  ele pode diminuir sua massa (provavelmente o que seu dono estava propondo) ou diminuindo a gravidade (campo gravitacional), que foi a solução proposta pelo Garfield.  
 35. A  
 36. a) Ao afirmar "caímos do mesmo modo", a bola indica que cai com a mesma taxa de variação da velocidade (aceleração) que a maçã. O que faz sentido, já que o campo gravitacional criado pela Terra independe da massa da bola e da maçã. A constante física existente na equação do campo gravitacional é a constante de gravitação universal (G).  
 b) A razão entre a constante para ambas interações é 1, já que essa constante não varia.  
 37. B  
 38.  $\frac{M}{8}$   
 39.  $\frac{40}{9} \text{ m/s}^2$   
 40. A  
 41. A  
 42.

$m_p =$ massa do planeta	$d_p =$ diâmetro do planeta	Fórmula geral	Resultado
$50 m_T$	$5 d_T$	$g_p = g_T \left(\frac{m_p}{m_T}\right) \left(\frac{R_T}{r_p}\right)^2$	$20 \text{ m/s}^2$
$40 m_T$	$4 d_T$		$25 \text{ m/s}^2$
$20 m_T$	$2 d_T$		$50 \text{ m/s}^2$
$60 m_T$	$10 d_T$		$6 \text{ m/s}^2$

43. C  
 44. C  
 45. a)  $0,95 \text{ m/s}^2$   
 O valor está incompatível com o filme, pois a gravidade no asteroide é bem menor que a da Terra. Não chega a 10% da gravidade terrestre.  
 b)  $1,323 \cdot 10^{28} \text{ J}$   
 A energia necessária para as duas partes adquirirem a velocidade citada é muito maior que a energia fornecida pela explosão, ou seja, insuficiente para separar o asteroide em duas metades e fornecer essa velocidade inicial necessária para livrar a Terra do choque.  
 46. D  
 47. B  
 48. C  
 49. D  
 50. E  
 51. 9  
 52. B  
 53. 1  
 54. C  
 55. D  
 56. B  
 57. E  
 58. 19  
 59. A  
 60. B  
 61.  $2 \cdot 10^{11}$   
 62. a)  $0,316 \text{ m/s}^2$   
 b)  $3,373 \text{ m/s}$   
 63. B  
 64. A força gravitacional atua como resultante centrípeta. Assim:  

$$F_g = R_c \Rightarrow \frac{GMm}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{R}$$
 Porém, do MCU:  

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$
 Logo:  

$$\frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = \frac{GM}{R} \Rightarrow \frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$
 65. E  
 66. E  
 67.  $\frac{v_t}{v_m} \approx 2,77$   
 68. A velocidade de escape na Terra é dada por:  

$$v_E^2 = \frac{2GM}{R}$$
 Para este outro planeta, teremos:  $v_p = 4v_E$   
 69. E  
 70.  $\mu = \frac{3c^2}{8\pi GR^2}$   
 71. B  
 72. A velocidade de escape de 11 km/s é a velocidade mínima que um corpo, sem propulsão, escape do campo gravitacional terrestre (ou seja, sujeito apenas à força gravitacional). Como o foguete tem propulsão permanente ele consegue vencer a força gravitacional e assim escapar do campo gravitacional terrestre.  
 73. C  
 74. E  
 75. A  
 76. C  
 77. D

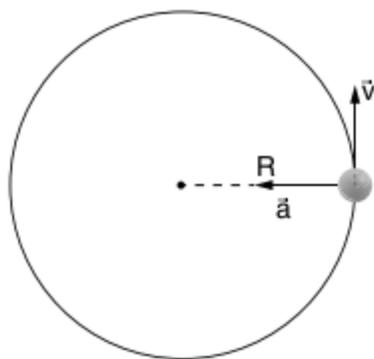
Exercícios Complementares:

1. A  
 2. A  
 3. D  
 4. B  
 5. C

6. D  
 7. a) 4,19 anos  
 b) Mais curto, pois o raio de sua órbita é menor.  
 8. a) Terra: 8 min 20 s. Plutão: 5h 33min 20 s.  
 b) 256 anos  
 9. B  
 10. A  
 11. A  
 12. C  
 13. E  
 14. C  
 15. 18  
 16. B  
 17. 53  
 18. 3  
 19. E  
 20. a) 2 N  
 b) 30 m  
 21. 15  
 22. C  
 23. D  
 24. A  
 25. B  
 26. 7,97 m/s<sup>2</sup>  
 27. a) 1,225 m/s<sup>2</sup>  
 b) 98 N  
 28. B  
 29. B  
 30. C  
 31.  $g' = \rho \cdot \frac{2}{3} \pi R$   
 32. A  
 33.  $g_P = 1,5g_T$   
 34. C  
 35. 20  
 36. E  
 37. 22  
 38. C  
 39. a) Eixo vertical  $t = 1,25$ .  
 Eixo horizontal  $v = 12$  m/s  
 b)  $1,6 \cdot 10^3$  m/s  
 40. B  
 41. D  
 42. B  
 43. 0,125 M  
 44. a)  $1,5 \cdot 10^{40}$  kg  
 b) 80.000 m/s  
 45. a)  $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$   
 b)  $K = \frac{4\pi^2}{GM}$   
 46. B  
 47. a)  $\omega = 2\pi/T \approx 1 \cdot 10^{-5}$  rad/s  
 b)  $\frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = \frac{GM}{R} \Rightarrow \frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$   
 c)  $2,0 \cdot 10^{27}$  kg  
 48.  $\sqrt[3]{\frac{gR^2 T^2}{4\pi^2}}$   
 49. a) Quando o satélite está em órbita a força gravitacional atua como resultante centrípeta. Com isso, por estar em um MCU, não há variação do módulo da velocidade, apenas da direção, e a força gravitacional que é a responsável pela mudança na direção da velocidade vetorial. Assim não é necessário um combustível para manter o módulo da velocidade.  
 O satélite mantém o mesmo raio da órbita já que a velocidade do mesmo é constante em módulo, de acordo com a relação  

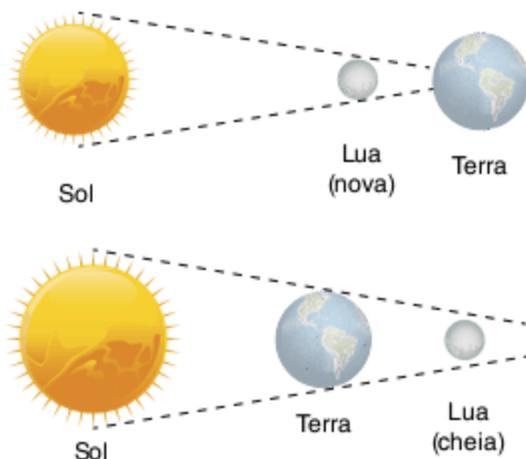
$$v_{orb} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$
  
 b) 7,35 m/s<sup>2</sup>

50. a)



b)  $\frac{1,5GM}{R^2}; v = \sqrt{\frac{1,5GM}{R}}$

51. a) 80 min  
 b) 640 min  
 52. C  
 53.  $2 \cdot 10^{30}$  kg  
 54. C  
 55. a)  $\omega_T = \sqrt{\frac{GM_S}{R^3}}$   
 b)  $2 \cdot 10^{-7}$  rad/s  
 c)  $F_r = Gm \left[ \frac{M_S}{(R-d)^2} - \frac{M_T}{d^2} \right]$   
 56. C  
 57. D  
 58. D  
 59. a) 2.625 km/h<sup>2</sup>  
 b)  $4,8 \cdot 10^9$  J  
 60. a)  $V_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R_0}}$   
 b)  $V_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_0}}$   
 61. a) 3.519 km/h  
 b)  $4,48 \cdot 10^9$  J  
 62. 8,893 mm  
 63. D      65. B      67. B  
 64. C      66. B      68. E  
 69.  $\frac{2GMmr}{R^3}$   
 70. As marés de sizígia ocorrem quando Lua, Terra e Sol estão alinhados (Lua nova e cheia), enquanto nas marés de quadratura esse alinhamento não ocorre (Lua crescente e minguante). As marés de sizígia apresentam maior amplitude; já nas marés de quadratura, as amplitudes são menores.  
 71. C      72. D  
 73. a) Em um período de 24 horas existem duas marés altas no mesmo local.  
 b) As marés altas ocorrem em posições diametralmente opostas na Terra. Assim, quando a Lua estiver bem acima do Japão, teremos marés altas no Japão e no Brasil.  
 c) A maré é mais intensa quando for Lua nova ou Lua cheia. Assim os desenhos possíveis são:



Frente 3

10

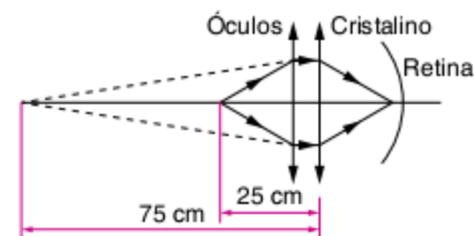
Instrumentos ópticos

Revisando

1. 2 cm  
  
 2. a) 10 cm  
 b)  
  
 3. 15 vezes maior.  
 4. a) 3,05 m  
 b) Real, invertida, menor.  
 c)  
  
 5. a) 5 di e -2 di    b) 3 di

Exercícios propostos

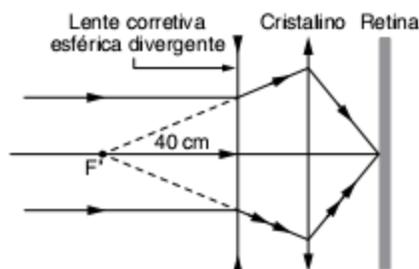
1. D  
 2. A  
 3. B  
 4. A; O; O; P; O; O; P; P; P; O; P.  
 5. B  
 6. a)  
  
 b) Virtual, pois a imagem está do mesmo lado que o objeto em relação ao espelho.  
 7. E  
 8. A  
 9. 84 cm  
 10. A  
 11. D  
 12. D  
 13. E  
 14. D  
 15. C  
 16. D  
 17. 37,5 cm



18. A  
 19. C  
 20. E  
 21. A  
 22. D  
 23. E  
 24. D  
 25. B

**Exercícios complementares**

- C
- $F_{L1} = 2 \text{ cm}$  e  $F_{L2} = 1 \text{ cm}$
- A      5. E      7. E      9. C
- B      6. A      8. B
- a) A parte da lente de distância focal 40 cm destina-se à visão de objetos próximos e a outra parte (-300 cm), à visão de objetos distantes.
- b) A parte superior da lente é a de distância focal = 300 cm e a outra (40 cm) é a inferior; -0,33 di e 2,5 di.
- c) 120 cm; 300 cm
- A
- C
- A
- A
- a) Esquema da lente:



- b) -2,5 graus
- c) -25 cm
- Lentes corretoras de um míope são divergentes e, portanto, não concentram a luz solar.
- Sendo o homem invisível, os raios de luz passariam por ele sem serem refletidos, refratados ou absorvidos. Para enxergarmos, ocorre uma reflexão dos raios no cristalino, assim, o homem invisível não poderia enxergar.
- D
- A
- E
- D

11

Movimentos periódicos oscilatórios

**Revisando**

- a)  $\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$
- $\frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$
- 40 m
- 4 s
- 0,25 Hz
- $v = -20\pi \text{ sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot t\right)$
- $a = v = -10\pi^2 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot t\right)$
- $v^2 = \frac{\pi^2}{4}(40^2 - x^2)$
- a)  $8\pi \text{ rad/s}$
- $v \approx -5,5 \text{ m/s}$
- 4 s
- a) 80 N/m
- 0,44 s
- a) 20 N/m
- 5 Hz
- B
- a) 80 N/m
- $\frac{\pi}{2} \text{ s}$
- 8 N
- $h = \frac{2mg}{k}$
- $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
- a)  $x = \pm \frac{3}{4}x_0$
- Sim, por exemplo, a posição de equilíbrio.

**Exercícios propostos**

- a)  $x = R\cos\left(\frac{\pi}{4} + \omega t\right)$
- $x = 0$
- a)  $A = 3 \text{ m}$ ;  $\omega = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s}$ ;  $\varphi = 2\pi$   
 $T = 8 \text{ s}$ ;  $f = 0,125 \text{ Hz}$
- $v = -\frac{3\pi}{4} \text{ sen}\left(\frac{\pi}{4}t + 2\pi\right)$
- $a = -\frac{3\pi^2}{16} \cos\left(\frac{\pi}{4}t + 2\pi\right)$
- $v_{\text{máx}} = \frac{3\pi}{4} \text{ m/s}$ ;  $a_{\text{máx}} = \frac{3\pi^2}{16} \text{ m/s}^2$
- E
- B
- A
- C; A
- C
- C
- B; E
- 1,25 rad/s
- A
- a)  $\frac{P}{K}$
- $K \cdot b$
- B
- a) 52,5 cm
- 0,68 s
- a) 0,3 m
- 0,28 s
- 150  $\text{m/s}^2$
- a) 0,4 Hz; 0,1 m
- 12,6 N/m
- $x = 0,1 \cos(0,8\pi \cdot t + 1,5\pi)$
- 0,18 m
- Mola em paralelo e em série, respectivamente.
- C
- B
- D
- C
- A
- 0,16 m
- A
- B
- B
- B
- C
- a)  $\frac{\pi}{10} \text{ s}$
- 16 J

**Exercícios complementares**

- a) 1 Hz
- $\frac{1}{6} \text{ s}$
- a)  $T = 1 \text{ s}$ ;  $f = 1 \text{ Hz}$
- $x = 2 \cdot \cos(2\pi \cdot t + \pi)$  (SI);  $v = -4\pi \text{ sen}(2\pi \cdot t + \pi)$  (SI);  $a = -8\pi^2 \cos(2\pi \cdot t + \pi)$  (SI)
- $V_{\text{máx}} = 4\pi \text{ m/s}$ ;  $a_{\text{máx}} = 8\pi^2 \text{ m/s}^2$
- B
- D
- E; C; C; D
- D
- $3x^2 + y^2 = 3A^2$
- $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
- B
- D
- $0,2 \pi \approx 0,63 \text{ s}$
- 22 cm
- A
- D

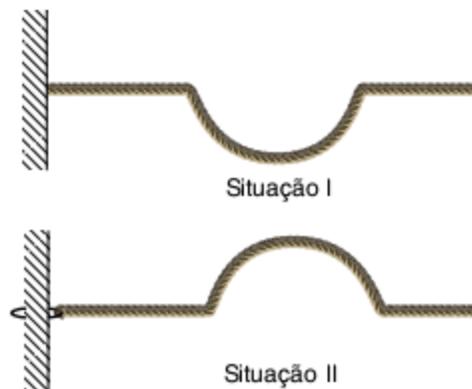
- $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- $K_1 = \frac{(n+1)k}{n}$ ;  $K_2 = (n+1)k$
- $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6k_1 k_2}{(2k_1 + 3k_2)m}}$
- D
- D
- B
- a) 16 s
- Não depende de m.
- a)  $\frac{5}{2\pi} \text{ Hz}$
- $\frac{5}{\pi} \text{ Hz}$
- C
- C
- $L_2 = \frac{25}{9}L_1$
- $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$
- A
- E
- C
- A
- A

12

Ondulatória

**Revisando**

- 66,33 m/s
- 



**Exercícios propostos**

- V; V; V; V; V; V; F; F; V; F; V.
- D      4. D      6. E      8. A
- D      5. A      7. C      9. B
- $\vec{V}_B = \vec{O}$
- B      13. D      15. D      17. B
- D      14. B      16. D
- F; F; V; V; V; F; F; F; V; V; F.

**Exercícios complementares**

- D      3. D      5. C      7. E
- B      4. E      6. E
- a)  $v = 0,1 \text{ m/s}$
- 
- B
- $v_y = -h/\Delta t$
- C      13. B      15. B
- D      14. A      16. B