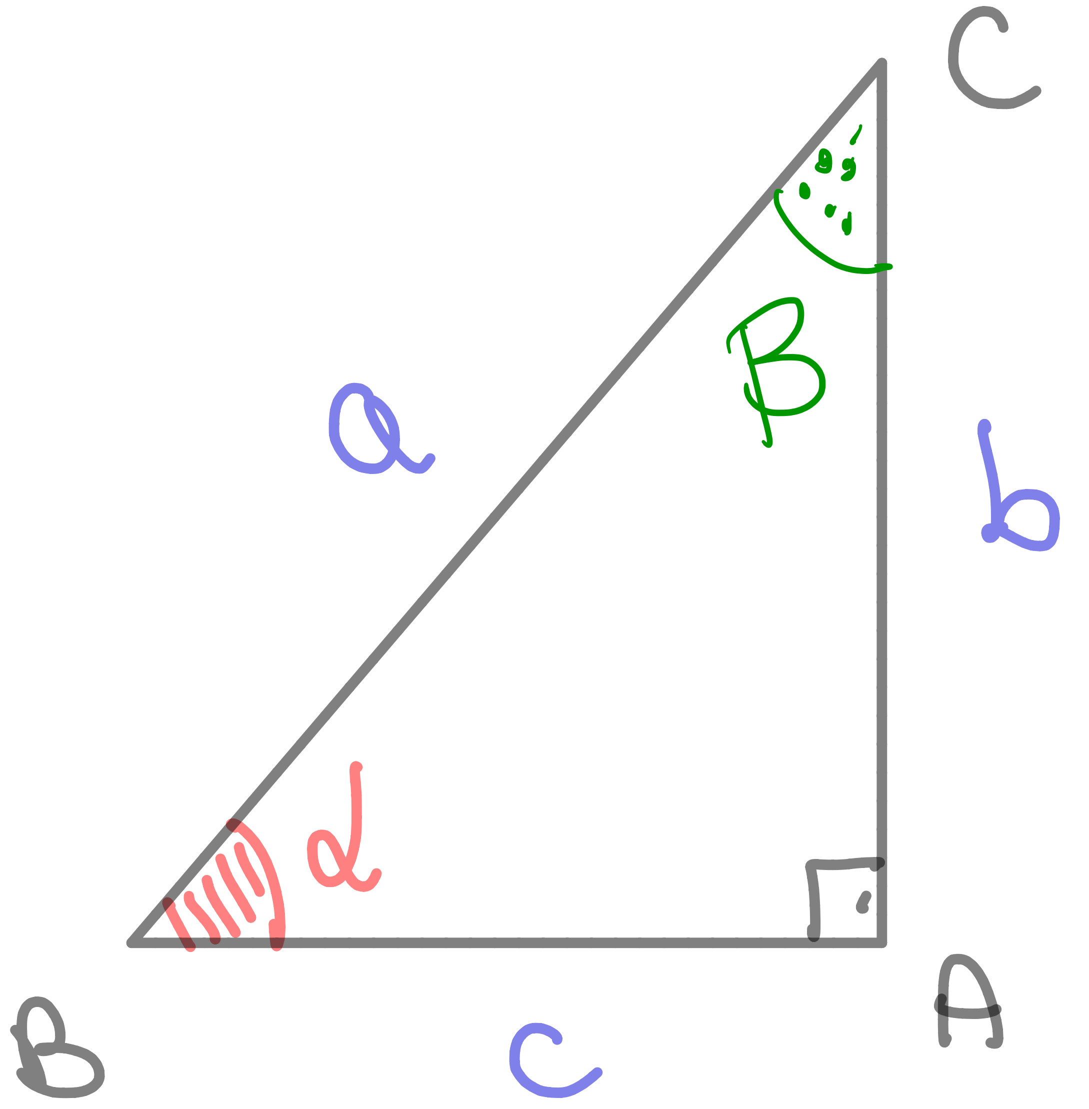
Razões Trigonométricas no Δ retângulo

SOH CAH TOA



$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a} = \cos\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a} = \text{sen}\,\beta$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{b}{c} = \frac{1}{\text{tg}\,\beta} = \text{cotg}\,\beta$$

OBS 1: Dados dois ângulos complementares α e β temos:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{sen}\,\alpha &= \cos\beta \\ \cos\alpha &= \text{sen}\,\beta \end{aligned}}$$

$\text{sen}\,40° = \cos 50°$

$\cos 60° = \text{sen}\,30°$

$$\text{sen}\,\theta = \cos(90° - \theta)$$

OBS 2:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

(Relação Fundamental da trigonometria)

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$$

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{\overbrace{b^2+c^2}^{a^2}}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{\cancel{a^2}^{\,1}}{\cancel{a^2}} = 1$$

$$1 = 1$$

(c.q.d) ///

MESTRES DA MATEMÁTICA

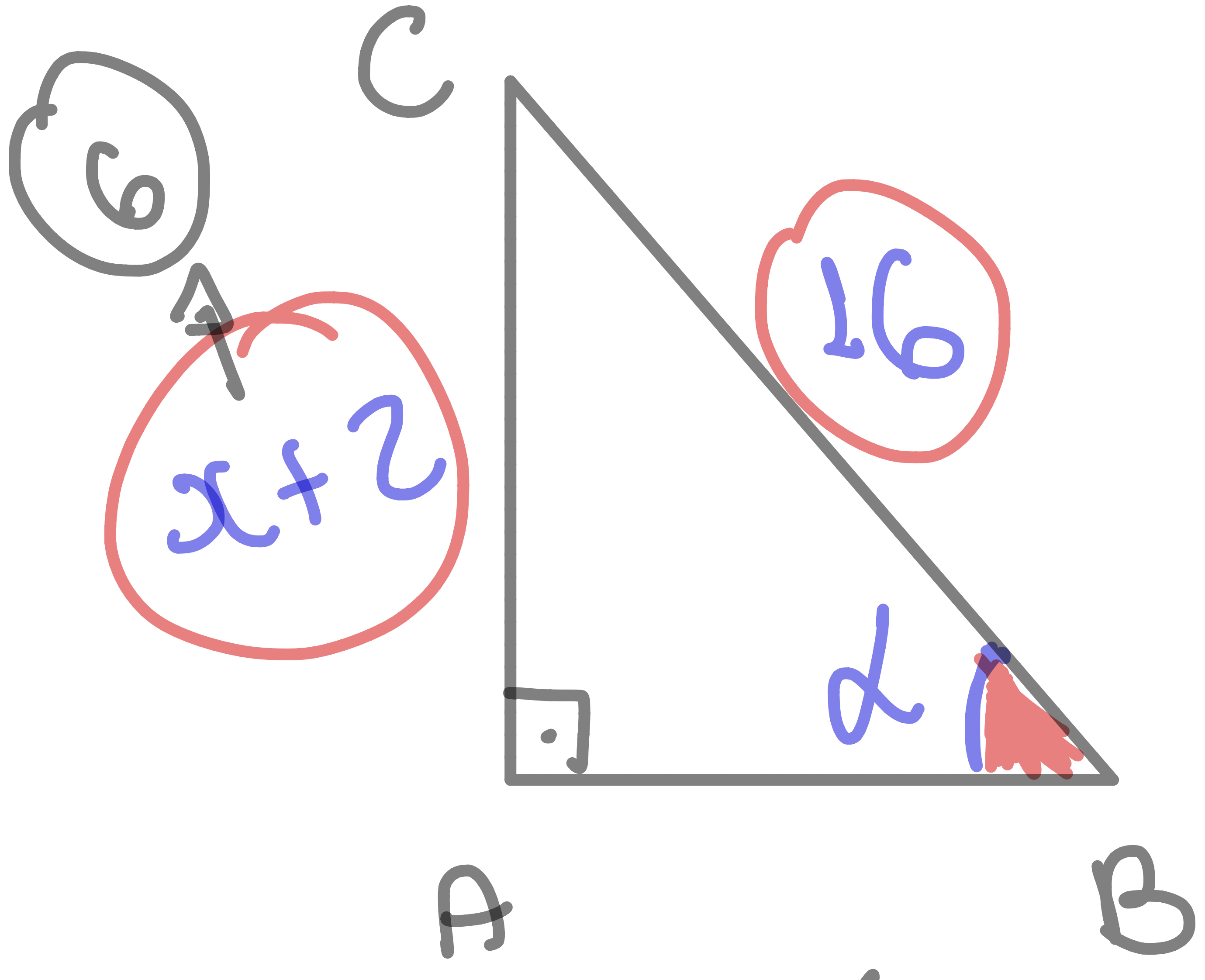
Exemplo 1

Determine os valores de x e y nos $\triangle$s abaixo:

a) $\boxed{\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{8}}$ $\Rightarrow$ $\frac{x+2}{\cancel{16}_{2}} = \frac{3}{\cancel{8}_{1}}$

$x + 2 = 6$

$x = 4$



$\frac{\cancel{6}}{\cancel{16}} = \frac{3}{8}$ //

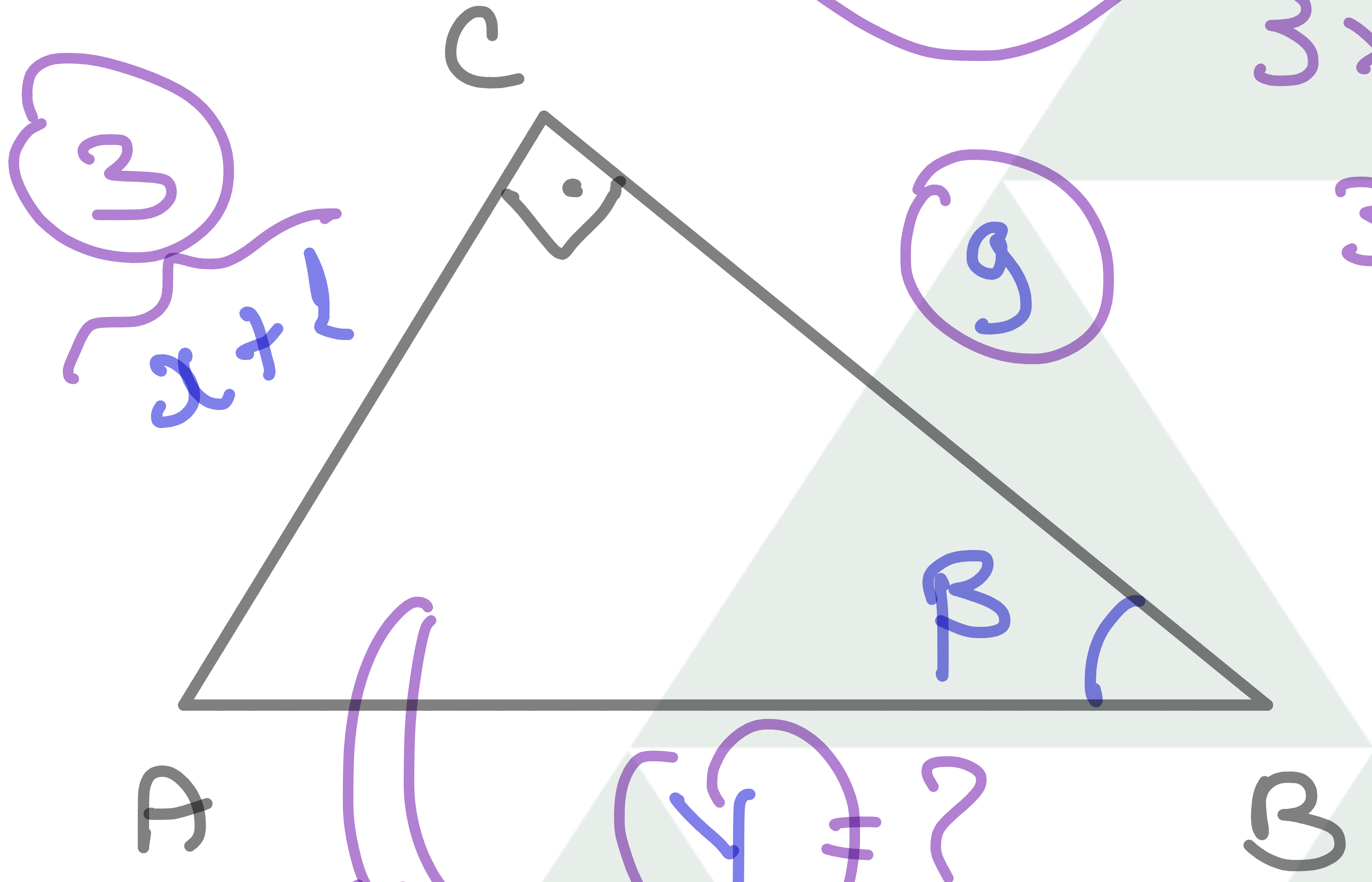
b) $\boxed{\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}}$

$\frac{x+1}{9} = \frac{1}{3}$

$3x + 3 = 9$

$3x = 6$

$\boxed{x = 2}$



$y = ?$

(Pit.)

$y^2 = 3^2 + 9^2$

$y^2 = 9 + 81$

$y^2 = 90$

$y = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ //

Exemplo 2

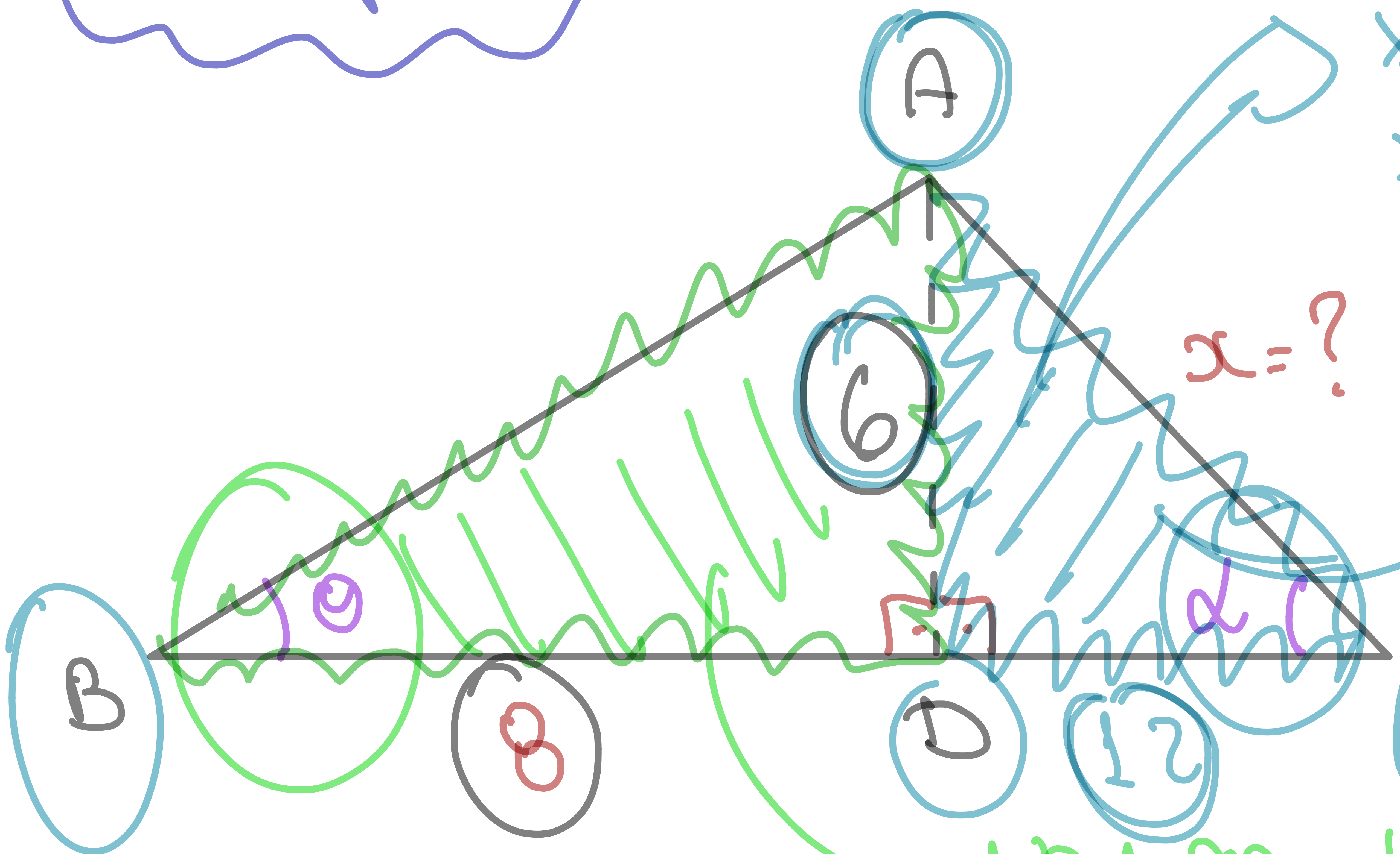
• $\overline{BD} = 8$ m

• $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

• $tg\,\theta = \frac{3}{4}$

• $tg\,\alpha = \frac{1}{2}$

• $\overline{AC} = ?$



No ΔABD temos

$$\underbrace{tg\,\theta}_{} = \frac{AD}{8}$$

$$\frac{3}{\cancel{4}_{1}} = \frac{AD}{\cancel{8}_{2}} \Rightarrow AD = 6$$

No ΔADC temos

$$\underbrace{tg\,\alpha}_{} = \frac{6}{DC}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{6}{DC}$$

$$DC = 12$$

(Pit.)

$$x^2 = 6^2 + 12^2$$

$$x^2 = 36 + 144$$

$$x^2 = 180$$

$$x = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

Exemplo 3 (PUC) Considere um ΔABC, retângulo em A, no qual $\boxed{\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{AC}}$. Calcule o seno do maior ângulo agudo desse Δ.

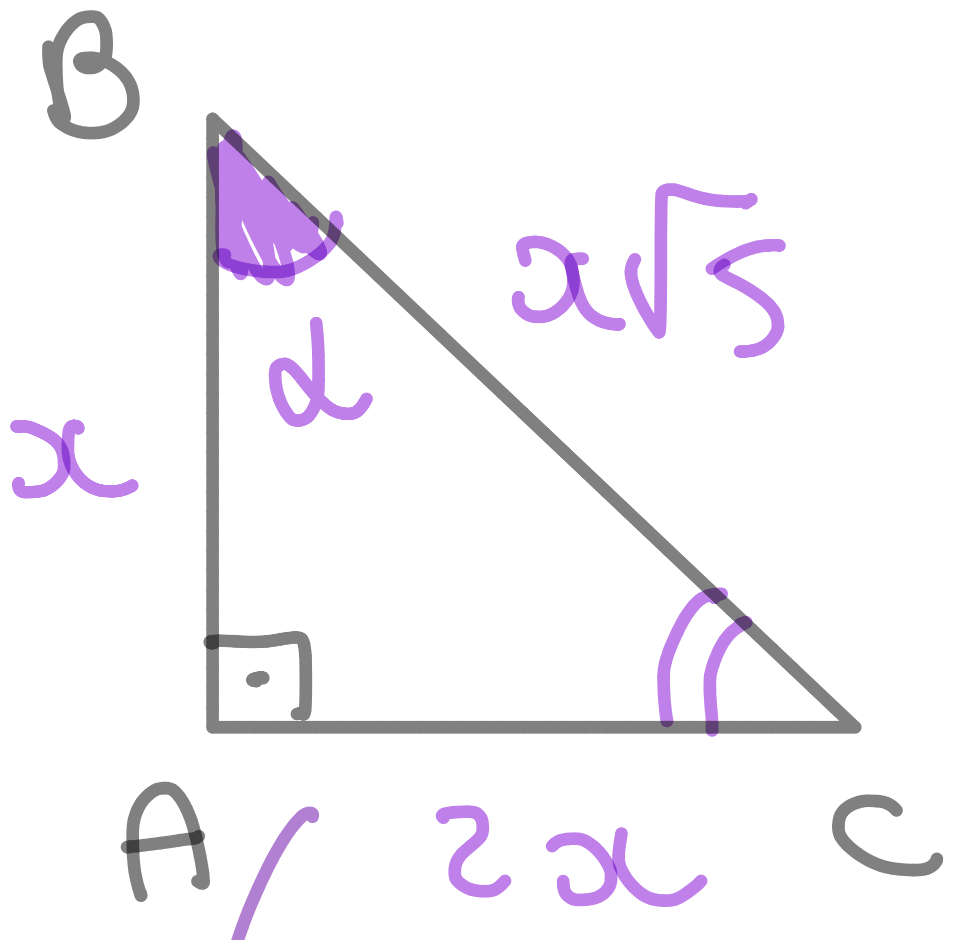
a) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

c) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

d) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

e) $\frac{1}{2}$



$\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{AC} \Rightarrow \overline{AC} = 2\overline{AB}$

$\text{sen}\,\hat{B} = \text{sen}\,\alpha = \frac{2x}{BC} = \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{5}}$

$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

(Pit.)

$?^2 = x^2 + (2x)^2$

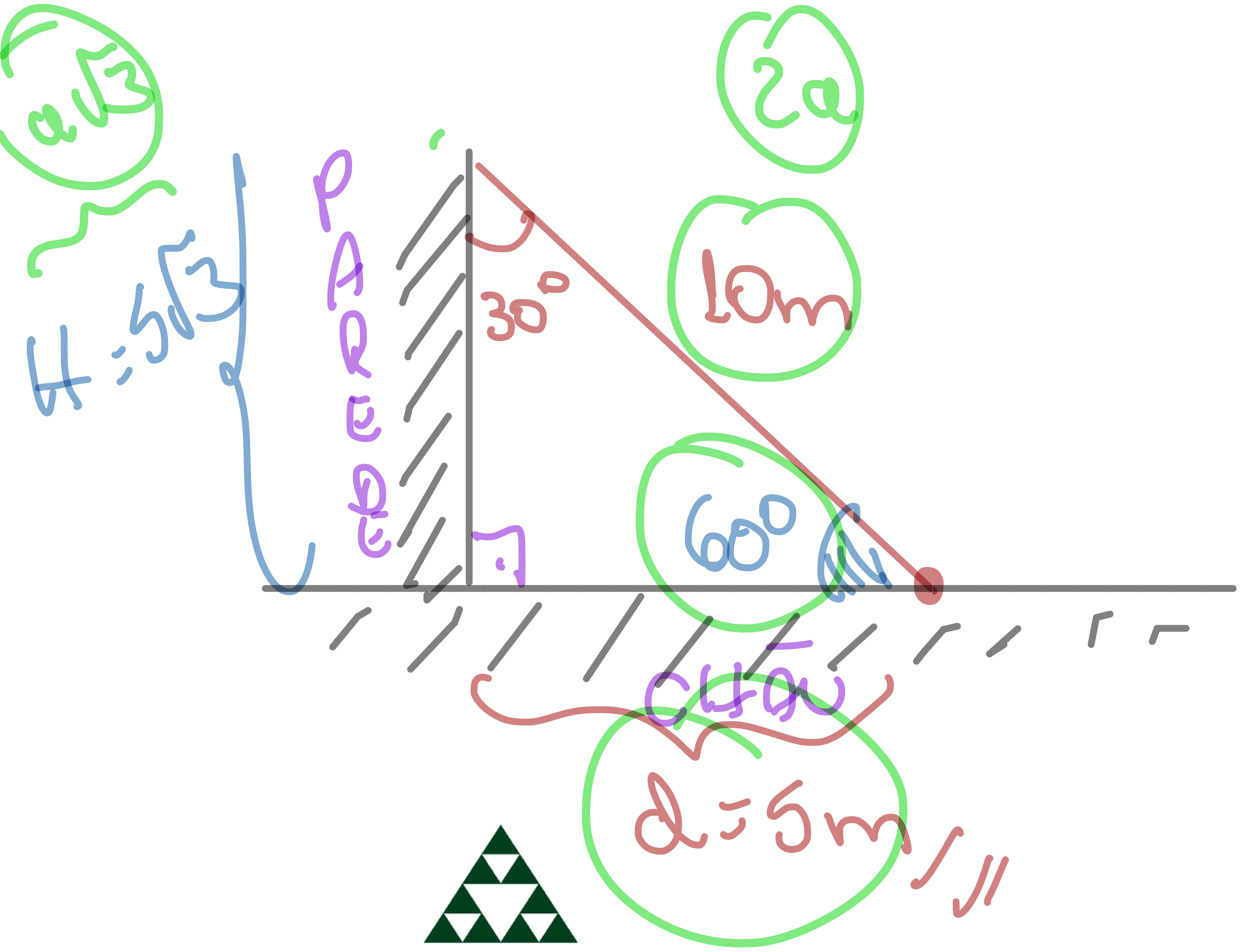
$?^2 = x^2 + 4x^2$

$?^2 = 5x^2$

$? = \sqrt{5x^2}$

$? = x\sqrt{5}$

Exemplo 4) (1º clássico!!) Uma escada de 10m de comprimento está apoiada em uma parede formando um ângulo de 30° com essa parede. Calcule a distância do pé da escada até a parede.



$a = 5$ //

$$\underbrace{\operatorname{sen} 30° = \frac{d}{10}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{d}{10}$$

$$2d = 10$$

$$d = 5m \;//$$

OBS: Tabelinha dos arcos notáveis!

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$$

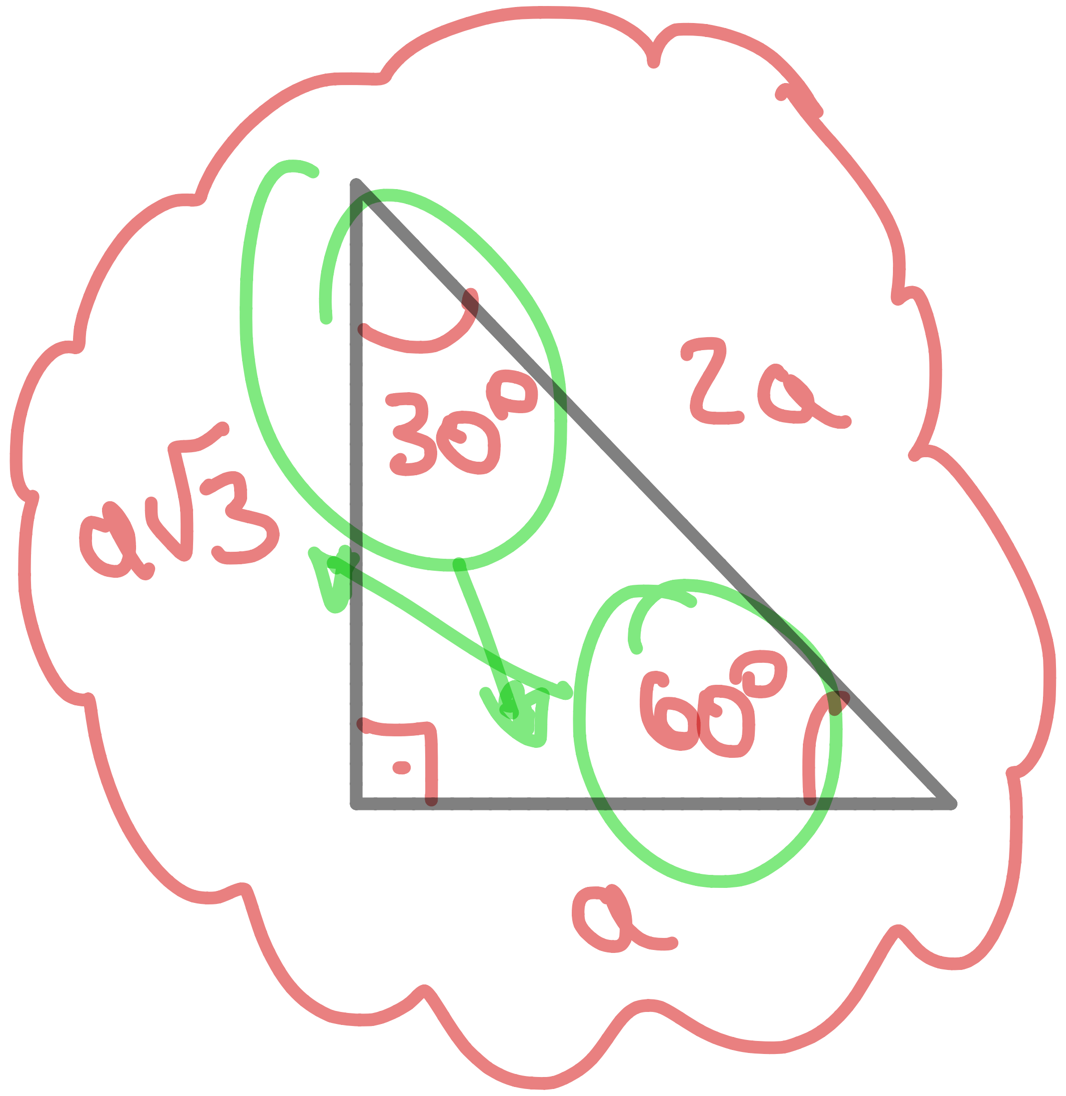
$$\underbrace{\operatorname{sen} 60° = \frac{H}{10}}$$

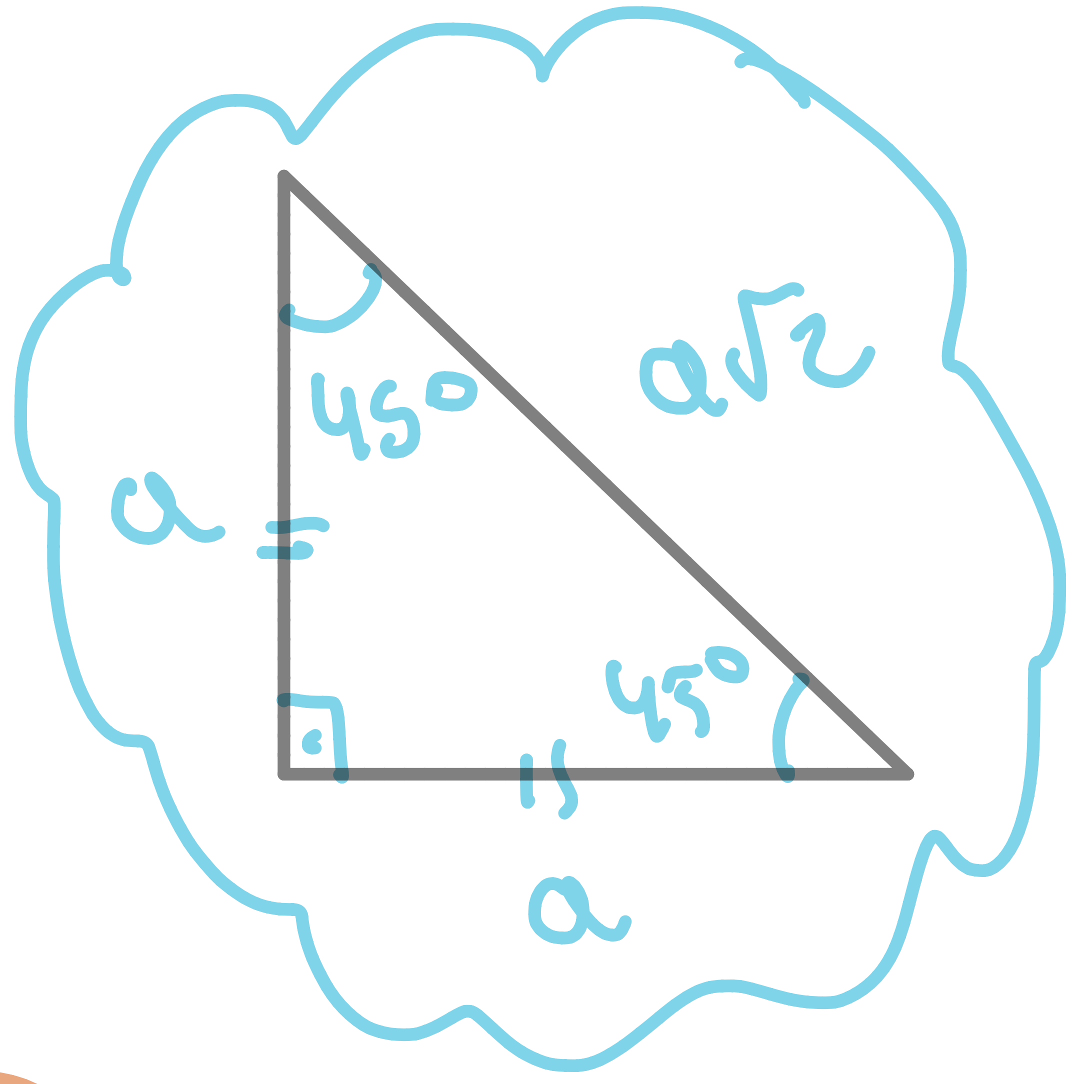
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{H}{10}$$

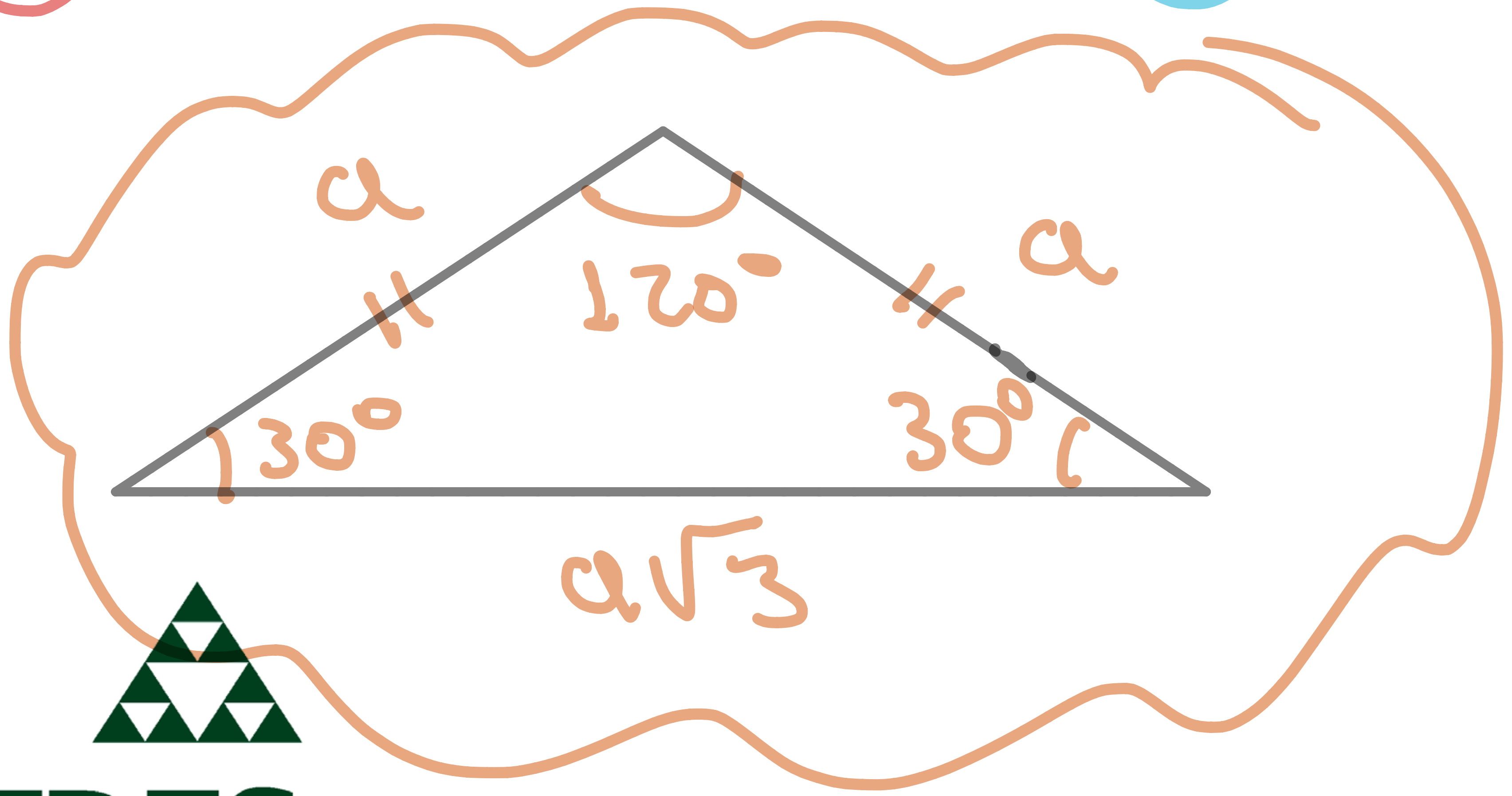
$$2H = 10\sqrt{3}$$

$$H = 5\sqrt{3}\,m \;//$$

OBS: MACETINHOS FUDEROSOS
↓
FODA + PODEROSO



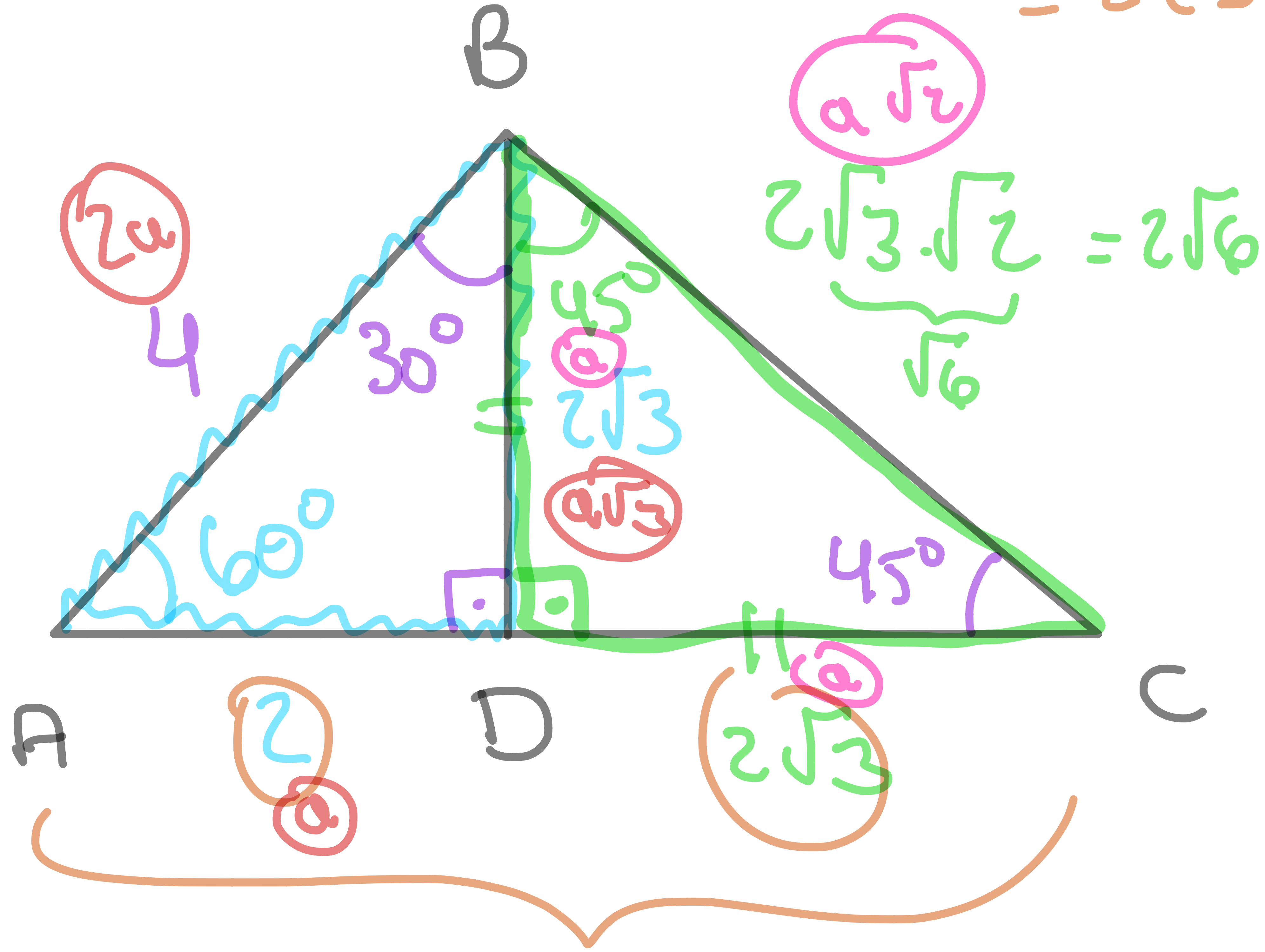




Exemplo 5 Complete os lados dos Δs abaixo utilizando os "MACETINHOS FUDEROSOS"

Exemplo 6

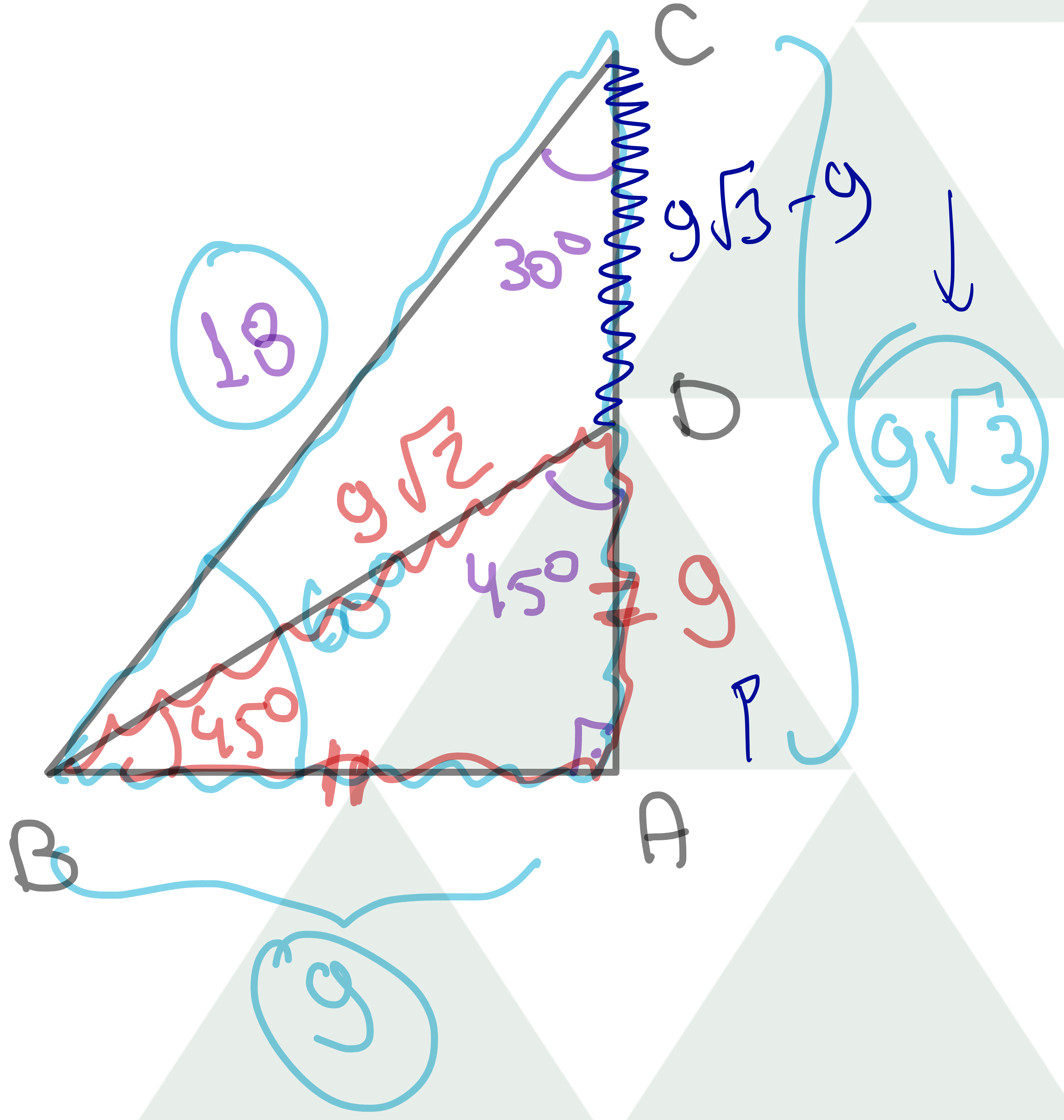
- $\overline{BC} = 2\sqrt{6}$
- $\overline{AC} = 2 + 2\sqrt{3}$
  $= 2(1+\sqrt{3})$



$\underbrace{2+2\sqrt{3}}_{2(1+\sqrt{3})}$

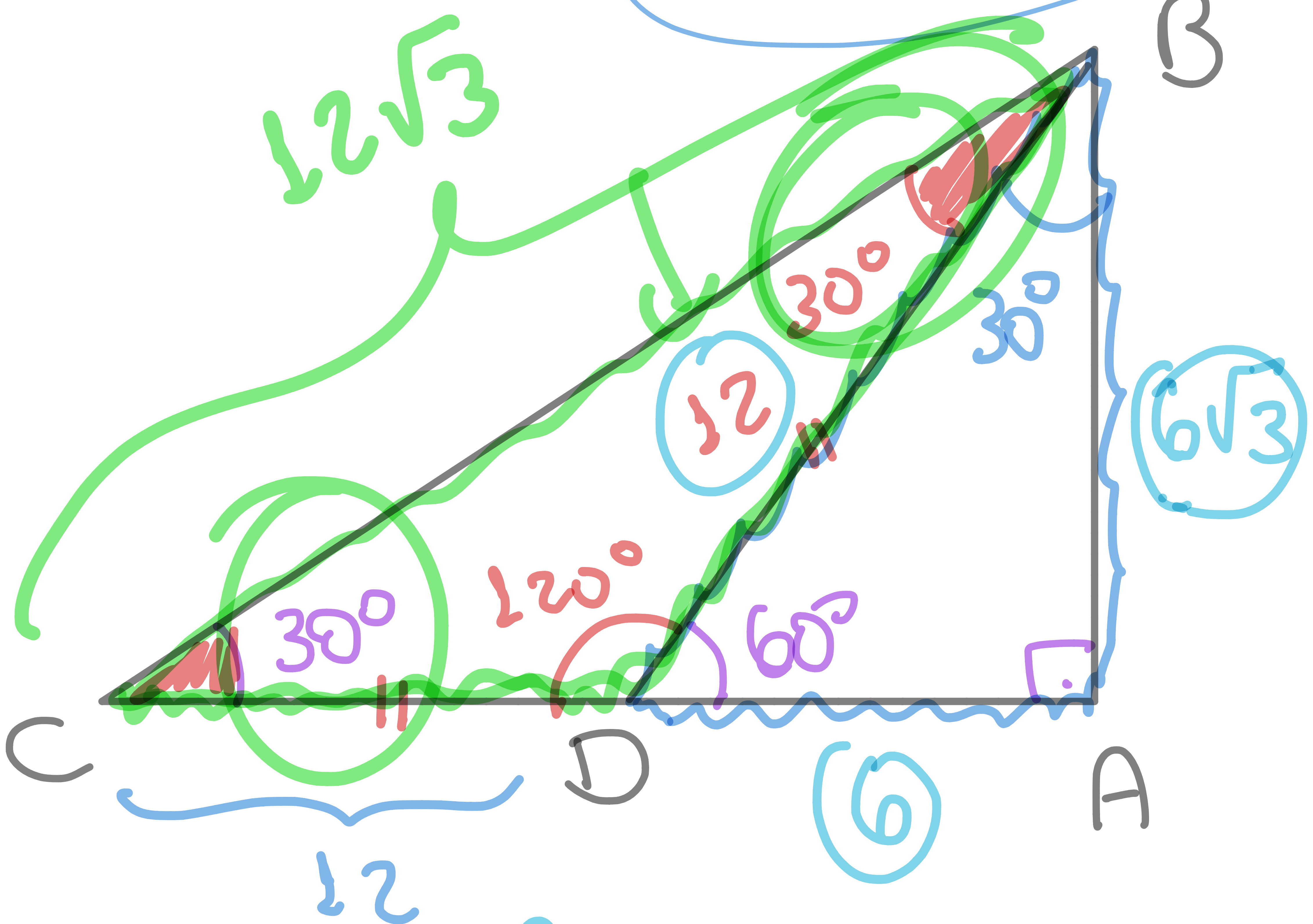
Exemplo 7

- $\overline{BD} = 9\sqrt{2}$
- $\overline{CD} = 9\sqrt{3} - 9$
  $= 9(\sqrt{3}-1)$



Exemplo 8

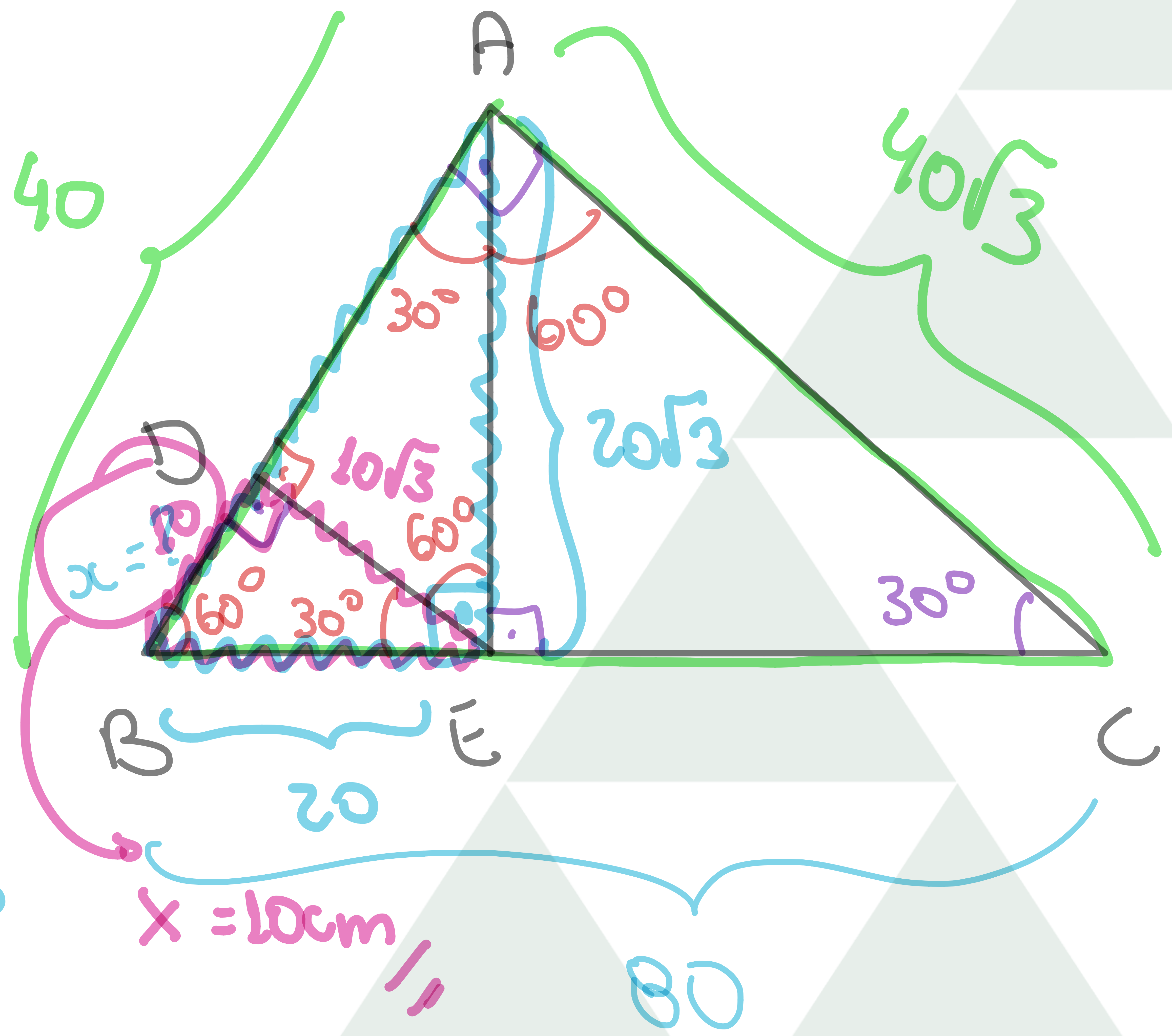
- $2p_{\Delta ABD} = ?$
- $\overline{CD} = 12m$



R: $2p_{\Delta ABD} = 6 + 12 + 6\sqrt{3}$
$= 18 + 6\sqrt{3}$
$= 6(3+\sqrt{3})\,m$ //

Exemplo 9

- $\overline{BD} = ?$
- $\overline{BC} = 80cm$

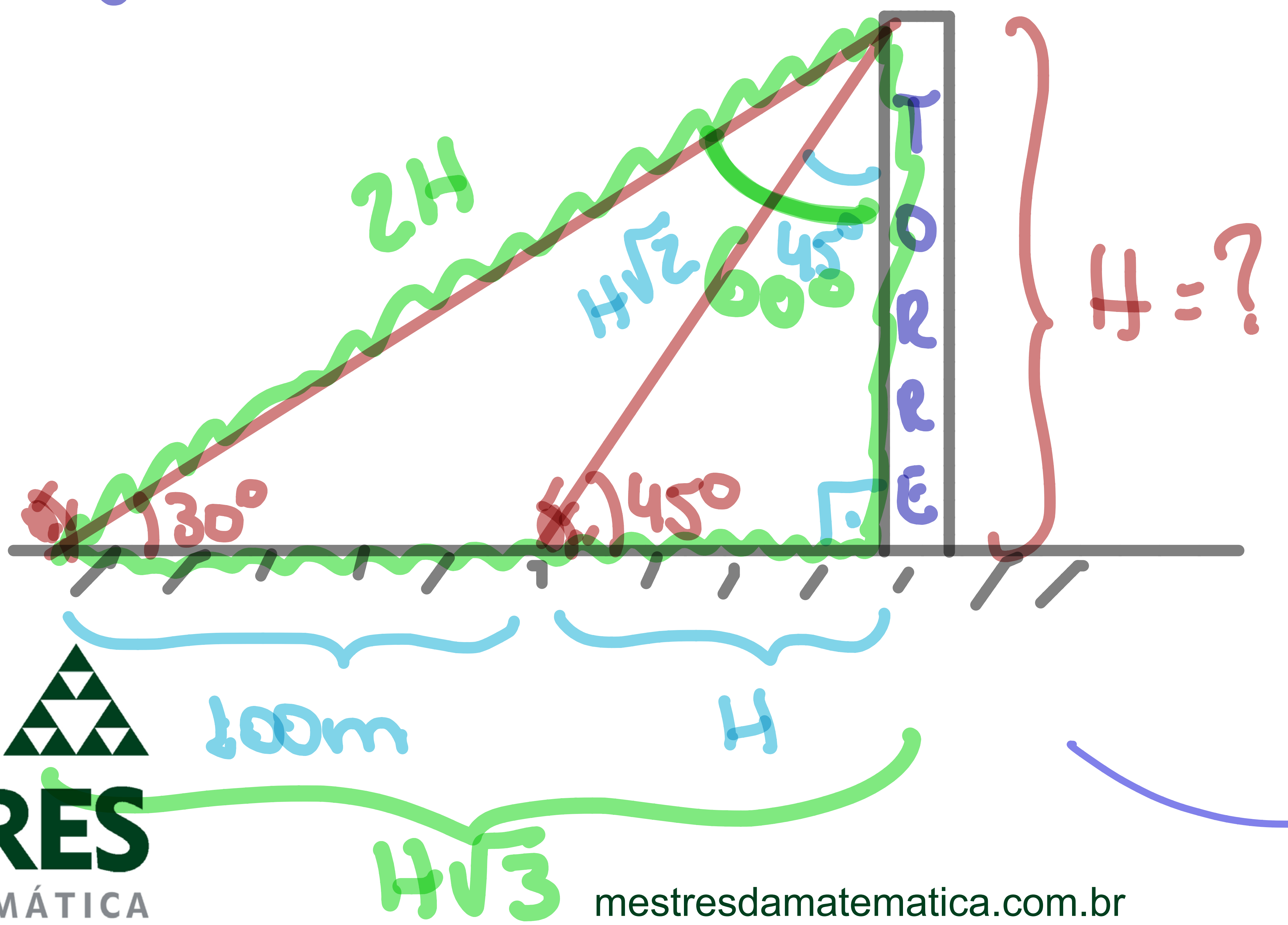


$X = 10cm$ //

Exemplo 10 (Clássico!)

Um indivíduo, com altura desprezível, observa o alto de uma torre sob um ângulo de 30° c/ a horizontal. Após caminhar 100m em direção ao pé da torre ele para e avista o alto dessa mesma torre agora sob um ângulo de 45° c/ a horizontal. Calcule a altura dessa torre.

$$(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)$$
$$(\sqrt{3})^2 - 1^2 = 2$$



$$H\sqrt{3} = 100 + H$$

$$H\sqrt{3} - H = 100$$

$$H(\sqrt{3} - 1) = 100$$

$$H = \frac{100}{(\sqrt{3}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)}$$

$$H = \frac{\cancel{100}^{50}(\sqrt{3}+1)}{\cancel{2}_{1}} = 50(\sqrt{3}+1)\,m$$

10) (UFMG) Esta figura representa o quadrilátero ABCD:

(P;t)

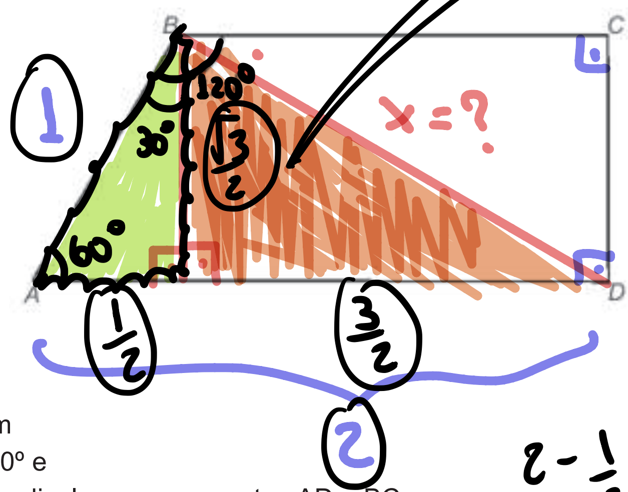
$x^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$x^2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4}$

$x^2 = \frac{12}{4}$

$x^2 = 3$

$x = \sqrt{3}$



$2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Sabe-se que

- AB = 1 cm e AD = 2 cm
- O ângulo ABC mede 120º e
- O segmento CD é perpendicular aos segmentos AD e BC.

Então a medida do comprimento do segmento BD é igual a:

a) $\sqrt{3}$

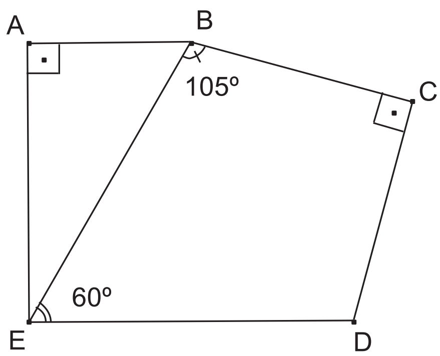
b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

d) $\sqrt{2}$

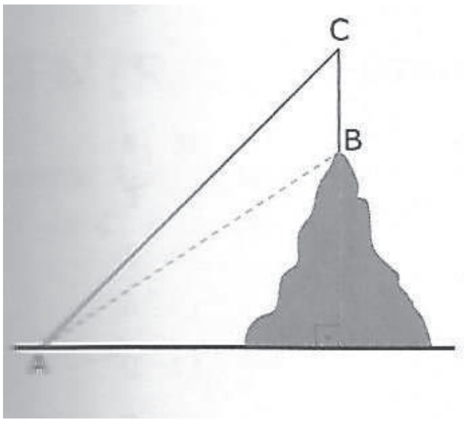
11) Observe a figura abaixo, nela os ângulos BÂE e BCD são retos, BED = 60º e CBE = 105º. Sabendo que os segmentos AB e DE são paralelos e BC = CD = 4, o valor do segmento AE é

a) $2\sqrt{2}$
b) 2
c) $2\sqrt{6}$
d) $2\sqrt{3}$
e) $3\sqrt{2}$



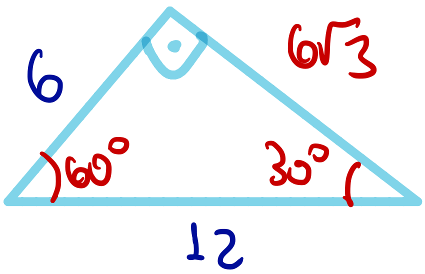
12) De um ponto A, no solo, visam-se a base B e o topo C de um bastão colocado verticalmente no alto de uma colina, sob um ângulos de 30º e 45º, respectivamente.
Se o bastão mede 4 m de comprimento, a altura da colina, em metros, é igual a

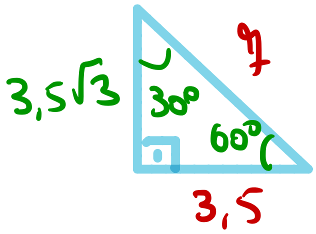
a) 2
b) $2\sqrt{3}$
c) $2\left(\sqrt{3}+1\right)$
d) $2\left(\sqrt{3}+3\right)$



13) Seja um triângulo equilátero ABC cujo lado mede $8\sqrt{3}$ cm. Sobre o lado AB tomamos um ponto P e sobre o lado AC um ponto Q de modo que $PQ \perp AB$ e $QM \perp AC$ onde M é o ponto médio do lado BC. Calcule a medida de AP.

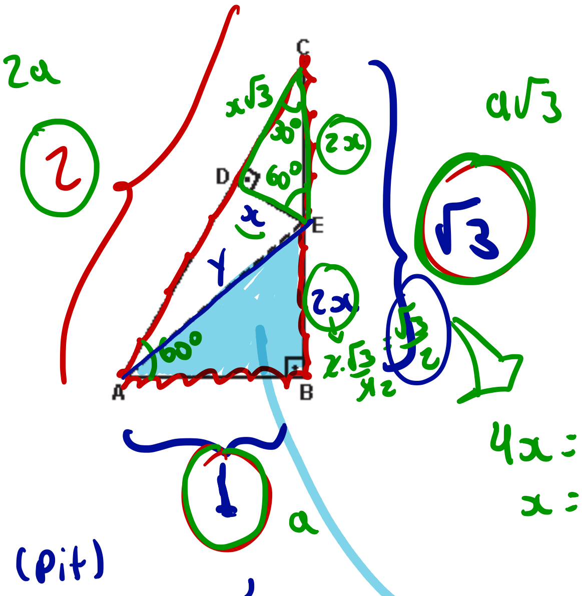
a) $2\sqrt{3}$ cm
b) $3\sqrt{3}$ cm
c) $4\sqrt{3}$ cm
d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm
e) $5\sqrt{3}$ cm



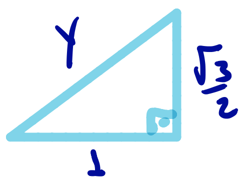


14) (FUVEST) Na figura, ABC e CDE são triângulos retângulos, AB = 1, BC = $\sqrt{3}$ e BE = 2DE. Logo, a medida de AE é

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
c) $\frac{\sqrt{7}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{11}}{2}$
e) $\frac{\sqrt{13}}{2}$



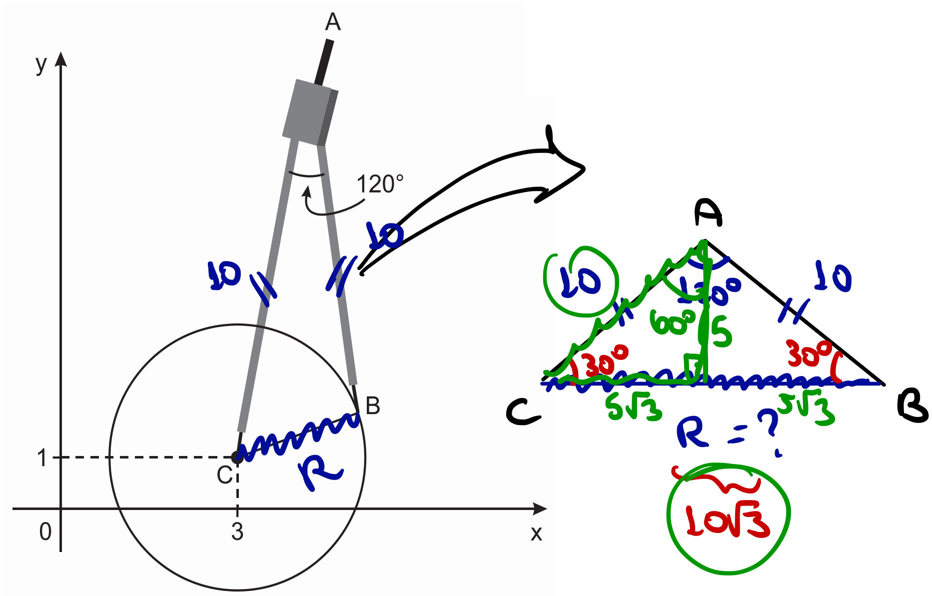
$4x = \sqrt{3}$
$x = \frac{\sqrt{3}}{4}$



(Pit)
$y^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$
$y^2 = 1 + \frac{3}{4} \Rightarrow y^2 = \frac{7}{4} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

27) (Enem 2017) Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de 10 cm, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano.

Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de 120º. A ponta seca está representada pelo ponto C, a ponta do grafite está representada pelo ponto B e a cabeça do compasso está representada pelo ponto A conforme a figura.



Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.

Tipo de material	Intervalo de valores de raio (cm)
I	$0 < R \leq 5$
II	$5 < R \leq 10$
III	$10 < R \leq 15$
IV	$15 < R \leq 21$
V	$21 < R \leq 40$

$R = 10\sqrt{3}$
$= 10 \cdot 1,7$
$= 17$ cm

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V