ITA

Matemática

Livro do Professor

8

MÓDULO 29

Trigonometria I

Resumo das principais fórmulas da trigonometria

Arcos Notáveis:

x	sen x	cos x	tg x
30° ou $\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45° ou $\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60° ou $\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Fórmulas Fundamentas:

1) $\text{sen}^2\, x + \cos^2 x =$

2) tg x =

3) cotg x =

4) sec x =

5) cossec x =

Consequências:

6) $\sec^2 x =$

7) $\text{cossec}^2\, x =$

8) tg x =

Fórmulas de Adição de arcos:

1) sen (a ± b) =

2) cos (a ± b) =

3) tg (a ± b) =

Fórmulas do arco duplo:

1) sen (2a) =

2) cos (2a) = $\Big\{$

3) tg (2a) =

Fórmulas de transformação em produto

1) sen p + sen q =

2) sen p - sen q =

3) cos p + cos q =

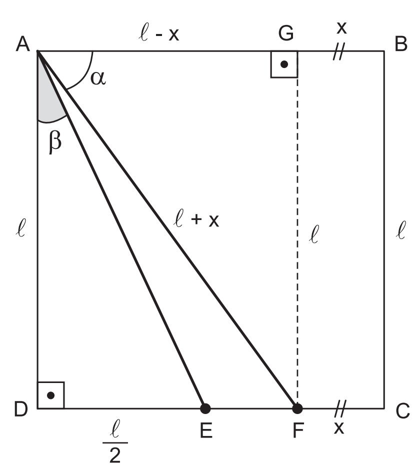
4) cos p – cos q =

Leis do Seno e do Cosseno:

$\underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad} = 2R$

1. **(ITA)** – Considere um quadrado $ABCD$. Sejam E o ponto médio do segmento $\overline{CD}$ e F um ponto sobre o segmento $\overline{CE}$ tal que $m(\overline{BC}) + m(\overline{CF}) = m(\overline{AF})$. Prove que $\cos \alpha = \cos 2\beta$, sendo os ângulos $\alpha = B\hat{A}F$ e $\beta = E\hat{A}D$.

RESOLUÇÃO:



Sendo ℓ a medida de cada lado do quadrado ABCD e x a medida do segmento GB, no triângulo retângulo GAF, têm-se:

1º) $(AF)^2 = (AG)^2 + (GF)^2 \Leftrightarrow (\ell + x)^2 = (\ell - x)^2 + \ell^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4\ell x = \ell^2 \Leftrightarrow x = \frac{\ell}{4}$$

2º) $\cos\alpha = \dfrac{AG}{AF} \Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{\ell - x}{\ell + x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\ell - \frac{\ell}{4}}{\ell + \frac{\ell}{4}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\frac{3\ell}{4}}{\frac{5\ell}{4}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5} \text{ (I)}$$

No triângulo retângulo DAE, têm-se:

1º) $(AE)^2 = (AD)^2 + (DE)^2 \Leftrightarrow (AE)^2 = \ell^2 + \left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow AE = \frac{\ell\sqrt{5}}{2}$$

2º) $\cos\beta = \dfrac{AD}{AE} \Leftrightarrow \cos\beta = \dfrac{\ell}{\frac{\ell\sqrt{5}}{2}} \Leftrightarrow \cos\beta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

3º) $\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1$

Assim: $\cos 2\beta = 2 \cdot \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 \Leftrightarrow \cos 2\beta = \dfrac{3}{5}$ **(II)**

De (I) e (II), tem-se, finalmente: $\boxed{\cos\alpha = \cos 2\beta}$

2. **(IME)** – Determine θ sabendo-se que:

(i) $\dfrac{1 - \cos^4\theta}{1 - \text{sen}^4\theta} \cdot \dfrac{1 + \text{ctg}^2\theta}{1 + \text{tg}^2\theta} = \dfrac{2}{3}$

(ii) $0 < \theta \leq 2\pi$ radianos.

RESOLUÇÃO:

$$\frac{(1 - \cos^4\theta)}{(1 - \text{sen}^4\theta)} \cdot \frac{1 + \text{ctg}^2\theta}{1 + \text{tg}^2\theta} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - \cos^2\theta) \cdot (1 + \cos^2\theta)}{(1 - \text{sen}^2\theta) \cdot (1 + \text{sen}^2\theta)} \cdot \frac{1 + \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta}}{1 + \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{sen}^2\theta \cdot (1 + \cos^2\theta)}{\cos^2\theta \cdot (1 + \text{sen}^2\theta)} \cdot \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 + 3\cos^2\theta = 2 + 2\,\text{sen}^2\theta \Leftrightarrow 3 + 3 - 3\,\text{sen}^2\theta = 2 + 2\,\text{sen}^2\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 = 5\,\text{sen}^2\theta \Leftrightarrow \text{sen}\,\theta = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

3. **(ITA)** – Se $x \in [0, \dfrac{\pi}{2}[$ é tal que $4\,\text{tg}^4x = \dfrac{1}{\cos^4 x} + 4$, então o valor de sen 2x + sen 4x é:

a) $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ b) $\dfrac{\sqrt{15}}{8}$ c) $\dfrac{3\sqrt{5}}{8}$

d) $\dfrac{1}{2}$ e) 1

RESOLUÇÃO:

Se $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$**, então:**

$$4 \cdot \text{tg}^4x = \frac{1}{\cos^4x} + 4 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{\text{sen}^4x}{\cos^4x} = \frac{1 + 4 \cdot \cos^4x}{\cos^4x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot (\cos^4x - \text{sen}^4x) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot (\cos^2x + \text{sen}^2x) \cdot (\cos^2x - \text{sen}^2x) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 1 \cdot \cos(2x) = -1 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{4}$$

Para $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ e $\cos(2x) = -\frac{1}{4}$, resulta:

$$\text{sen}^2(2x) = 1 - \cos^2(2x) = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}(2x) = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Portanto:

$$\text{sen}(2x) + \text{sen}(4x) = \text{sen}(2x) + 2 \cdot \text{sen}(2x) \cdot \cos(2x) =$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{4} + 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

Resposta: B

MÓDULO 30

Trigonometria I

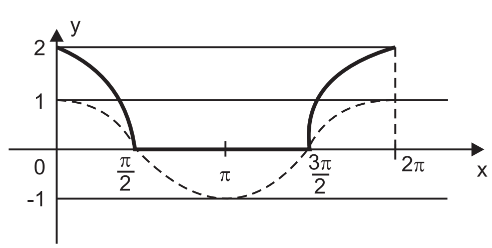
1. Esboçar o gráfico da função **f** definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \sqrt{1 - \text{sen}^2 x} + \cos x$.

RESOLUÇÃO:

$$f(x) = \sqrt{1 - \text{sen}^2 x} + \cos x = \sqrt{\cos^2 x} + \cos x = |\cos x| + \cos x$$

Se $\cos x \geq 0$, então $f(x) = 2 \cos x$

Se $\cos x < 0$, então $f(x) = 0$



2. **(ITA)** – Considere o sistema:

$$\begin{cases} 2x - 1 = 3 \cdot \text{sen}\,\theta \\ x - 2 = \cos\theta \end{cases}$$

para x e θ reais. Se restringirmos ao intervalo $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, então o sistema

a) não possuirá solução.

b) possuirá apenas uma solução $(x_1; \theta_1)$.

c) possuirá duas soluções $(x_1; \theta_1)$ e $(x_2; \theta_2)$, de modo que $x_1 + x_2 = \frac{40}{13}$.

d) possuirá duas soluções $(x_1; \theta_1)$ e $(x_2; \theta_2)$, de modo que $\text{sen}\,\theta_1 + \text{sen}\,\theta_2 = \frac{17}{12}$.

e) possuirá duas soluções $(x_1; \theta_1)$ e $(x_2; \theta_2)$, de modo que $\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 = \frac{1}{2}$.

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} 2x - 1 = 3\,\text{sen}\,\theta \\ x - 2 = \cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\,\theta = \frac{2x-1}{3} \\ \cos\theta = x - 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2x-1}{3}\right)^2 + (x-2)^2 = 1, \text{ pois } \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Assim, $\frac{4x^2 - 4x + 1}{9} + x^2 - 4x + 4 = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 + 9x^2 - 36x + 36 = 9 \Leftrightarrow 13x^2 - 40x + 28 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = \frac{14}{13}$$

Para $x = 2$, tem-se $\text{sen}\,\theta = 1$, $\cos\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$, pois $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Para $x = \frac{14}{13}$, tem-se $\text{sen}\,\theta = \frac{5}{13}$, $\cos\theta = -\frac{12}{13}$ e $\nexists \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

O sistema possui uma solução $\left(2; \frac{\pi}{2}\right)$

Resposta: B

3. **(ITA)** – Se $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais e (a; b) o intervalo aberto $\{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$, seja $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{\sec^2 x + \mathrm{cossec}^2 x}$.

Se $\alpha \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ é tal que $\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{a}{b}$, então $f(\alpha)$ é igual a

a) $\frac{a+b}{2}$ b) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$

c) $\frac{a^2-b^2}{ab}$ d) $\frac{a^2+b^2}{ab}$

e) n.d.a.

RESOLUÇÃO:

$$f(x) = \sqrt{\sec^2 x + \mathrm{cossec}^2 x} = \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 x + 1 + \mathrm{cotg}^2 x}$$

$$f(x) = \sqrt{\mathrm{tg}^2 x + 2 + \frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}} = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}^4 x + 2\,\mathrm{tg}^2 x + 1}{\mathrm{tg}^2 x}}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{(\mathrm{tg}^2 x + 1)^2}{\mathrm{tg}^2 x}} \Rightarrow f(x) = \frac{\mathrm{tg}^2 x + 1}{|\mathrm{tg}\ x|}$$

Se $\alpha \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \mathrm{tg}\ \alpha = \frac{a}{b} > 0$ **e**

$$f(\alpha) = \frac{\mathrm{tg}^2 \alpha + 1}{|\mathrm{tg}\ \alpha|} = \frac{\frac{a^2}{b^2} + 1}{\frac{a}{b}} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

Resposta: D

4. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação
$5\,\mathrm{sen}^2 x - 3\,\mathrm{sen}\ x \cdot \cos x + 4\cos^2 x = 3$

RESOLUÇÃO:

Como $\cos x \neq 0$, **pois** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ **não é solução da equação, tem-se** $5\,\mathrm{sen}^2 x - 3\,\mathrm{sen}\ x \cdot \cos x + 4\cos^2 x = 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{5\,\mathrm{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\,\mathrm{sen}\ x \cdot \cos x}{\cos^2 x} + \frac{4\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{3}{\cos^2 x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\,\mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\ x + 4 = 3\sec^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\,\mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\ x + 4 = 3(1 + \mathrm{tg}^2 x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\,\mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\ x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tg}\ x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \mathrm{tg}\ x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, \text{ em que } \alpha = \mathrm{arc\ tg}\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = \alpha + k\pi, \alpha = \mathrm{arc\ tg}\ \frac{1}{2} \text{ e } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

MÓDULO 31

Trigonometria I

1. Os valores reais de **a** para que a equação
$\mathrm{sen}^4 x - 2\cos^2 x + a^2 = 0$ admita raízes reais são tais que:

a) $|a| \geq 2$ b) $|a| = 3$

c) $|a| \leq \sqrt{2}$ d) $-\sqrt{3} \leq a < -\sqrt{2}$

e) $\sqrt{2} < a \leq \sqrt{3}$

RESOLUÇÃO:

$$\mathrm{sen}^4 x - 2\cos^2 x + a^2 = 0 \Leftrightarrow (1 - \cos^2 x)^2 - 2\cos^2 x + a^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^4 x - 4\cos^2 x + (1 + a^2) = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x = 2 \pm \sqrt{3 - a^2}$$

Como $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ **e** $2 + \sqrt{3 - a^2} > 1$, **para todo a tal que** $a^2 \leq 3$, **devemos ter:**

1) $3 - a^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3}$ **(I)**

e

2) $0 \leq 2 - \sqrt{3 - a^2} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{3 - a^2} \leq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$ **(II)**

De (I) e (II), tem-se $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$, **portanto,** $|a| \leq \sqrt{2}$

Resposta: C

2. **(ITA-2006)** – Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{77}\,\text{sen}[5(x + \pi/6)]$ e seja B o conjunto dado por $B = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$. Se m é o maior elemento de $B \cap (-\infty, 0)$ e n é o menor elemento de $B \cap (0, +\infty)$, então m + n é igual a:

a) $2\pi/15$ b) $\pi/15$ c) $-\pi/30$
d) $-\pi/15$ e) $-2\pi/15$

RESOLUÇÃO:

1) **Com** $k \in \mathbb{Z}$ temos:

$$f(x) = \sqrt{77}\,.\,\text{sen}\left[5\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 0 \Leftrightarrow \text{sen}\left[5\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 5\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = k\,\pi \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{k\pi}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{5} \text{ e } B = \left\{x \in \mathbb{R}: x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{5};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2) $B \cap (-\infty,0) = \left\{-\frac{\pi}{6}; \frac{-11\pi}{30}; \frac{-17\pi}{30}; \frac{-23\pi}{30}; \ldots\right\}$

cujo maior elemento é $m = -\frac{\pi}{6}$

3) $B \cap (0, +\infty) = \left\{\frac{\pi}{30}; \frac{7\pi}{30}; \frac{13\pi}{30}; \frac{19\pi}{30}; \ldots\right\}$,

cujo menor elemento é $n = \frac{\pi}{30}$.

4) **Dos itens (2) e (3) conclui-se**

$$m + n = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{30} = -\frac{2\pi}{15}$$

Resposta: E

3. **(ITA-2007)** – Assinale a opção que indica a soma dos elementos de $A \cup B$, sendo:

$$A = \left\{x_k = \text{sen}^2\left(\frac{k^2\pi}{24}\right) : k = 1,2\right\} \text{ e}$$

$$B = \left\{y_k = \text{sen}^2\left(\frac{(3k+5)\pi}{24}\right) : k = 1,2\right\}.$$

a) 0 b) 1 c) 2
d) $\left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)/3$ e) $\left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)/3$

RESOLUÇÃO:
Sendo:

$$A = \left\{x_k = \text{sen}^2\left(\frac{k^2.\pi}{24}\right) : k = 1,2\right\} =$$

$$= \left\{x_1 = \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{24}\right);\ x_2 = \text{sen}^2\left(\frac{4\pi}{24}\right)\right\}$$

$$B = \left\{y_k = \text{sen}^2\left(\frac{(3k+5).\pi}{24}\right) : k = 1,2\right\} =$$

$$= \left\{y_1 = \text{sen}^2\left(\frac{8.\pi}{24}\right);\ y_2 = \text{sen}^2\left(\frac{11.\pi}{24}\right)\right\}$$

temos: $A \cup B = \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$

Portanto: $x_1 + x_2 + y_1 + y_2 =$

$$= \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{24}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{4\pi}{24}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{8\pi}{24}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{11\pi}{24}\right) =$$

$$= \underbrace{\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{24}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right)}_{1} =$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2$$

Resposta: C

4. **(ITA)** – Se tg(2A) = 5 então

$\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+A\right)-\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-A\right)$ é igual a:

a) – 40/21 b) – 2 c) 5
d) 8 e) 10

RESOLUÇÃO:

Se tg 2A = 5 então:

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+A\right)-\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-A\right)=$$

$$=\frac{\text{tg}\,\frac{\pi}{4}+\text{tg}\,A}{1-\text{tg}\,\frac{\pi}{4}\,.\,\text{tg}\,A}-\frac{\text{tg}\,\frac{\pi}{4}-\text{tg}\,A}{1+\text{tg}\,\frac{\pi}{4}\,.\,\text{tg}\,A}=$$

$$=\frac{1+\text{tg}\,A}{1-\text{tg}\,A}-\frac{1-\text{tg}\,A}{1+\text{tg}\,A}=2\,.\,\frac{2\,.\,\text{tg}\,A}{1-\text{tg}^2\,A}=2\text{tg}(2A)=2\,.\,5=10$$

Resposta: E

MÓDULO 32

Trigonometria I

1. **(IME)** – Determine o conjunto-solução da equação $\text{sen}^3x+\cos^3x=1-\text{sen}^2x\,.\,\cos^2x$

RESOLUÇÃO:

$$\text{sen}^3x+\cos^3x=1-\text{sen}^2x\cos^2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\text{sen}\,x+\cos x)(\text{sen}^2x-\text{sen}\,x\,.\,\cos x+\cos^2x)=1-(\text{sen}\,x\,.\,\cos x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\text{sen}\,x+\cos x)(1-\text{sen}\,x\,.\,\cos x)=$$

$$=(1+\text{sen}\,x\,.\,\cos x)(1-\text{sen}\,x\,.\,\cos x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}1-\text{sen}\,x\,.\,\cos x=0\\ \text{ou}\\ \text{sen}\,x+\cos x=1+\text{sen}\,x\,.\,\cos x\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{sen}\,x\,.\,\cos x=1\\ \text{ou}\\ 1+\text{sen}\,x\,.\,\cos x-\text{sen}\,x-\cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2\,\text{sen}\,x\,.\,\cos x=2\\ \text{ou}\\ \cos x\,.\,(\text{sen}\,x-1)-(\text{sen}\,x-1)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{sen}\,(2x)=2\\ \text{ou}\\ (\text{sen}\,x-1)(\cos x-1)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \text{sen}\,x=1 \text{ ou } \cos x=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=2k\pi \text{ ou } x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Resposta: $S=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ x=2k\pi \text{ ou } x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

2. **(ITA)** – A expressão

$$\frac{2\left[\text{sen}\left(x+\dfrac{11}{2}\pi\right)+\text{cotg}^2x\right]\text{tg}\,\dfrac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\,\dfrac{x}{2}}$$

é equivalente a

a) $[\cos x-\text{sen}^2x]\ \text{cotg}\ x$.
b) $[\text{sen}\ x+\cos x]\ \text{tg}\ x$.
c) $[\cos^2 x-\text{sen}\ x]\ \text{cotg}^2\ x$.
d) $[1-\text{cotg}^2\ x]\ \text{sen}\ x$.
e) $[1+\text{cotg}^2\ x]\ [\text{sen}\ x+\cos x]$.

RESOLUÇÃO:

$$\frac{2\,.\left[\text{sen}\left(x+\dfrac{11}{2}\pi\right)+\text{cotg}^2x\right].\,\text{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1+\text{tg}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2\,.\left[\text{sen}\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)+\text{cotg}^2x\right].\,\text{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\sec^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2\,.\,[-\cos x+\text{cotg}^2x]\dfrac{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}=$$

$= 2 \,.\, \text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) . \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) . [\text{cotg}^2\, x - \cos x] =$

$= \text{sen}\, x \,.\, \left[\dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} - \cos x\right] = \dfrac{\text{sen}\, x \,.\, [\cos^2 x - \cos x \,.\, \text{sen}^2 x]}{\text{sen}^2 x} =$

$= \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x} \,.\, [\cos x - \text{sen}^2 x] = \text{cotg}\, x \,.\, [\cos x - \text{sen}^2 x]$

Resposta: A

3. **(ITA)** – Seja a equação

$\text{sen}^3\, x \cos x - \text{sen}\, x \cos^3 x = \dfrac{1}{m}$ onde m é um número real não nulo. Podemos afirmar que:

a) A equação admite solução qualquer que seja m, $m \neq 0$.
b) Se $|m| < 4$ esta equação não apresenta solução real.
c) Se $m > 1$ esta equação não apresenta solução real.
d) Se $|m| > 2$ esta equação sempre apresenta solução real.
e) Se $m < 4$ esta equação não apresenta solução real.

RESOLUÇÃO:

1) $\text{sen}^3\, x \,.\, \cos x - \text{sen}\, x \,.\, \cos^3 x = \dfrac{1}{m} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}\, x \,.\, \cos x \,.\, (\text{sen}^2\, x - \cos^2\, x) = \dfrac{1}{m} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \,.\, \text{sen}\, 2x \,.\, (-\cos 2x) = \dfrac{1}{m} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \,.\, \text{sen}\, 4x = \dfrac{2}{m} \Leftrightarrow \text{sen}\, 4x = -\dfrac{4}{m}$

2) **Como $-1 \leq \text{sen}\, 4x \leq 1$, para a equação ter solução real, deve-se ter:**

$-1 \leq -\dfrac{4}{m} \leq 1 \Leftrightarrow m \leq -4 \text{ ou } m \geq 4 \Leftrightarrow |m| \geq 4$

Portanto, a equação não tem solução real se $|m| < 4$

Resposta: B

4. **(ITA)** – A respeito da equação

$\text{sen}\, x + \sqrt{3} \cos x = 2, 0 \leq x < 2\pi$, podemos afirmar que:

a) Existe apenas uma solução real no primeiro quadrante.
b) Existe apenas uma solução real no segundo quadrante.
c) Existe apenas uma solução real no terceiro quadrante.
d) Existe apenas uma solução real no quarto quadrante.
e) Existem duas soluções no intervalo $0 \leq x < 2\pi$.

RESOLUÇÃO:

$\text{sen}\, x + \sqrt{3} \cos x = 2 \Rightarrow \text{sen}\, x \,.\, \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \,.\, \cos x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\, x \,.\, \cos \dfrac{\pi}{3} + \text{sen} \dfrac{\pi}{3} \,.\, \cos x = 1 \Rightarrow \text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$

Como $0 \leq x < 2\pi$ temos:

$x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

No intervalo [0; 2π], apenas $x = \dfrac{\pi}{6}$ é solução.

Resposta: A

exercícios-tarefa

■ MÓDULO 29

1. Se sec x . cossec x = 3, então $tg^3x + cotg^3x$ é igual a
a) 9 b) 15 c) 18 d) 21 e) 27

2. **(ITA)** – Se num quadrilátero convexo de área S, o ângulo agudo entre as diagonais mede π/6 radianos, então o produto do comprimento destas diagonais é igual a:
a) S b) 2S c) 3S d) 4S e) 5S

■ MÓDULO 30

1. Considere o sistema $\begin{cases} 2 \text{ sen } \theta = 2x - 1 \\ 2 \cos \theta = \sqrt{x+2} \end{cases}$, para $x \in \mathbb{R}$

e $0 \le \theta \le 2\pi$. Então, é correto afirmar que

a) o sistema possui solução única.

b) o sistema possui solução $(x_0; \theta_0)$, com $\dfrac{\pi}{2} < \theta_0 < \pi$.

c) o sistema possui solução única $(x_0; \theta_0)$, com $x_0 > -2$.

d) o sistema possui duas soluções distintas.

e) $\text{tg } \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2. Esboce o gráfico da função **f** definida por

$f(x) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\sec^2 x}}$ + sen x, com contradomínio em $\mathbb{R}$.

3. **(ITA)** – Se $\cos^4 4x - \text{sen}^4 4x = a \neq 0$, então cos 8x vale:
a) 2a b) a c) 4a d) zero e) a + 4

■ MÓDULO 31

1. **(ITA)** – O valor de x > 0 que satisfaz a equação

$\sqrt{x} = \text{tg } \dfrac{\pi}{12}$ é:

a) $x = 4\sqrt{3}$ b) $x = 5 - 4\sqrt{3}$

c) $x = 7 - \sqrt{3}$ d) $x = 7 - 4\sqrt{3}$

e) $x = 9 - 4\sqrt{3}$

2. **(ITA)** – Sejam a e b constantes reais positivas. Considere $x = a^2 \text{tg } t + 1$ e $y^2 = b^2 \sec^2 t - b^2$ onde $0 \le t < \dfrac{\pi}{2}$. Então uma relação entre x e y é dada por:

a) $y = \dfrac{b}{a}(x-1)^2, x \ge a.$

b) $y = \dfrac{b^2}{a^4}(x-1)^2, x \ge 1.$

c) $y = \dfrac{b}{a^2}(x-1), \forall x \in \mathbb{R}.$

d) $y = \dfrac{-b}{a^2}(x-1), x \ge 1.$

e) $y = \dfrac{a^2}{b^4}(x-1), x \le 1.$

■ MÓDULO 32

1. **(ITA)** Sabendo-se que θ é um ângulo tal que $2 \text{ sen}(\theta - 60°) = \cos(\theta + 60°)$, então tg θ é um número da forma $a + b\sqrt{3}$ onde

a) a e b são reais negativos; b) a e b são inteiros;

c) a + b = 1; d) a e b são pares;

e) $a^2 + b^2 = 1$.

2. **(ITA)** – Suponha x e y números reais, tais que

$$\begin{cases} \text{tg}(x-y) = \sqrt{3} \\ (\text{tg } x)(\text{tg } y) = 1 \end{cases}$$

Calcule o módulo do número S = tg x + tg y.

resolução dos exercícios-tarefa

■ MÓDULO 29

1) **1)** $\text{tg } x + \text{cotg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} =$

$= \dfrac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cdot \text{sen } x} = \dfrac{1}{\cos x \cdot \text{sen } x} =$

$= \sec x \cdot \text{cossec } x = 3$

2) $\text{tg}^2 x + \text{cotg}^2 x = (\text{tg } x + \text{cotg } x)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$

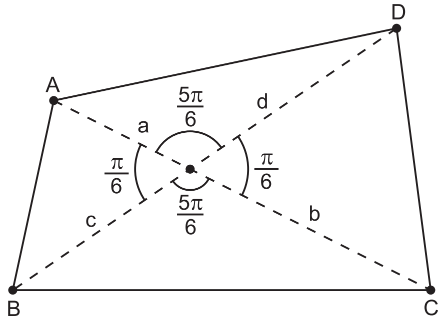
3) $\text{tg}^3 x + \text{cotg}^3 x =$

$= (\text{tg } x + \text{cotg } x)(\text{tg}^2 x - \text{tg } x \cdot \text{cotg } x + \text{cotg}^2 x) =$

$= 3 \cdot (7 - 1) = 18$

Resposta: C

2) **No quadrilátero convexo ABCD da figura, sendo AC = a + b e BD = c + d, tem-se:**



$$\frac{1}{2} \,.\, a \,.\, c \,.\, \text{sen}\, \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \,.\, b \,.\, c \,.\, \text{sen}\, \frac{5\pi}{6} +$$

$$+ \frac{1}{2} \,.\, b \,.\, d \,.\, \text{sen}\, \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\, a \,.\, d \,.\, \text{sen}\, \frac{5\pi}{6} = S$$

Assim:

$$\frac{ac}{4} + \frac{bc}{4} + \frac{bd}{4} + \frac{ad}{4} = S \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ac + bc + bd + ad = 4S \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a + b) \,.\, (c + d) = 4S \Leftrightarrow AC \,.\, BD = 4S$$

Resposta: D

■ MÓDULO 30

1) $$\begin{cases} 2\,\text{sen}\,\theta = 2x - 1 \\ 2\cos\theta = \sqrt{x + 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}\,\theta = \dfrac{2x - 1}{2} \\ \cos\theta = \dfrac{\sqrt{x + 2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2x - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{x + 2}}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 + x + 2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{4}$$

Para $x = 1$**, tem-se** $\text{sen}\,\theta = \dfrac{1}{2}$, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **e**

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

Para $x = -\dfrac{1}{4}$**, tem-se** $\text{sen}\,\theta = -\dfrac{3}{4}$,

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$$

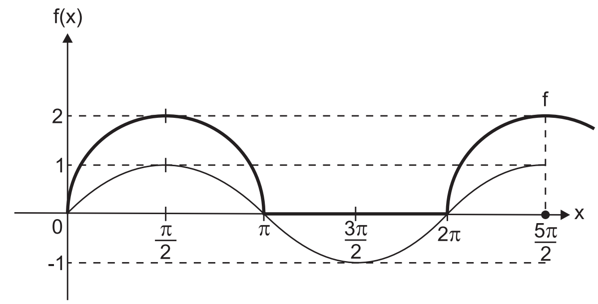
Resposta: D

2) $$f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{\sec^2 x}} + \text{sen}\, x = \sqrt{1 - \cos^2 x} + \text{sen}\, x =$$

$$= \sqrt{\text{sen}^2 x} + \text{sen}\, x = |\text{sen}\, x| + \text{sen}\, x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 2\,\text{sen}\, x; \text{ se sen } x \geq 0 \\ 0 \quad ; \text{ se sen } x < 0 \end{cases}$$

e o gráfico de f é:



Resposta: Gráfico

3) $$\cos^4 4x - \text{sen}^4 4x =$$

$$= (\cos^2 4x + \text{sen}^2 4x)(\cos^2 4x - \text{sen}^2 4x)$$

Então:

$$\cos^4 4x - \text{sen}^4 4x = \cos^2 4x - \text{sen}^2 4x = \cos 8x = a$$

Resposta: B

■ MÓDULO 31

1) **Para** $x > 0$ **tem-se:**

I) $$\text{tg}\, \frac{\pi}{6} = \frac{2\,\text{tg}\,\dfrac{\pi}{12}}{1 - \text{tg}^2\,\dfrac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{3}\,\text{tg}^2\, \frac{\pi}{12} = 6\text{tg}\, \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \text{tg}\, \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$$

II) $$\sqrt{x} = \text{tg}\, \frac{\pi}{12} \Rightarrow x = \text{tg}^2\, \frac{\pi}{12} = 7 - 4\sqrt{3}$$

2)

I) $$y^2 = b^2 \,.\, \sec^2 t - b^2 = b^2 \,.\, (\sec^2 t - 1) = b^2 \,.\, \text{tg}^2 t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \pm\, b \,.\, \text{tg}\, t$$

II) $$\begin{cases} x = a^2 \,.\, \text{tg}\, t + 1 \\ 0 \leq t < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{tg } t = \frac{x-1}{a^2}, \ x \geq 1, \text{ supondo } a \neq 0$$

De (I) e (II), vem:

$$y = \pm b \cdot \left(\frac{x-1}{a^2}\right), x \geq 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{b}{a^2} \cdot (x-1), x \geq 1.$$

Uma relação entre x e y pode ser:

$$y = -\frac{b}{a^2} \cdot (x-1), x \geq 1$$

Resposta: D

■ MÓDULO 32

1) $2 \text{ sen } (\theta - 60°) = \cos(\theta + 60°) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \cdot (\text{sen } \theta \cdot \cos 60° - \cos \theta \cdot \text{sen } 60°) =$

$= \cos \theta \cdot \cos 60° - \text{sen } \theta \cdot \text{sen } 60° \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{sen } \theta - \sqrt{3} \cdot \cos \theta = \frac{1}{2} \cdot \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{sen } \theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen } \theta \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cos \theta \cdot \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{tg } \theta = \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = -4 + 3\sqrt{3}$$

Sendo $\text{tg } \theta = a + b \cdot \sqrt{3}$**, temos** $a = -4$ **e** $b = 3$.

Resposta: B

2) Sendo x e y, números reais, tais que:

$$\begin{cases} \text{tg}(x-y) = \sqrt{3} \\ \text{tg } x \cdot \text{tg } y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\text{tg } x - \text{tg } y}{1 + \text{tg } x \cdot \text{tg } y} = \sqrt{3} \\ \text{tg } x \cdot \text{tg } y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

temos: $\dfrac{\text{tg } x - \text{tg } y}{1 + 1} = \sqrt{3} \Rightarrow \text{tg } x - \text{tg } y = 2 \cdot \sqrt{3}$

Como: $(\text{tg } x + \text{tg } y)^2 = (\text{tg } x - \text{tg } y)^2 + 4 \cdot \text{tg } x \cdot \text{tg } y$

resulta: $(\text{tg } x + \text{tg } y)^2 = (2 \cdot \sqrt{3})^2 + 4 \cdot 1 = 16$

e, portanto: $|S| = |\text{tg } x + \text{tg } y| = 4$

Resposta: $|S| = |\text{tg } x + \text{tg } y| = 4$