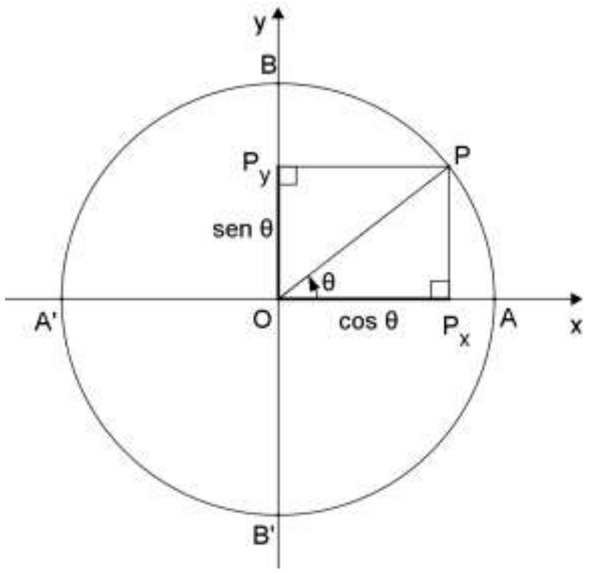
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

1. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

1.1. FUNÇÃO SENO

Seja P a imagem de um ângulo θ no ciclo trigonométrico. Já vimos que o seno do ângulo θ é definido como a ordenada de P, ou seja, $\text{sen}\theta = \overline{OP_y}$. Assim, para obter o seno de θ, devemos projetar P sobre o eixo vertical Oy, denominado **eixo dos senos**.



$$\mathbf{sen\theta = \overline{OP_y}}$$

A função seno é a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $\mathbf{f(x) = sen\,x}$.

O domínio da função seno é $\mathbf{D_{sen}} = \mathbb{R}$ e a imagem $\mathbf{Im_{sen}} = [-1,1]$.

A função seno é periódica de período $\mathbf{2\pi}$.

Vamos analisar o gráfico da função seno, estudando os valores do seno de um ângulo de 0 a 2π. Assim, observe o que acontece com o segmento orientado $\overline{OP_y}$ conforme o ponto P dá uma volta no ciclo trigonométrico.

1º. De A até B, ou seja, de $\theta = 0$ até $\theta = \frac{\pi}{2}$, o seno cresce de $f(0) = \text{sen}0 = 0$ até $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\frac{\pi}{2} = 1$.

2º. De B até A’, ou seja, de $\theta = \frac{\pi}{2}$ até $\theta = \pi$, o seno decresce de $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ até $f(\pi) = \text{sen}\pi = 0$.

3º. De A’ até B’, ou seja, de $\theta = \pi$ até $\theta = \frac{3\pi}{2}$, o seno decresce de $f(\pi) = \text{sen}\pi = 0$ até $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \text{sen}\frac{3\pi}{2} = -1$.

4º. De B’ até A, ou seja, de $\theta = \frac{3\pi}{2}$ até $\theta = 2\pi$, o seno cresce de $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \text{sen}\frac{3\pi}{2} = -1$ até $f(2\pi) = \text{sen}2\pi = 0$.

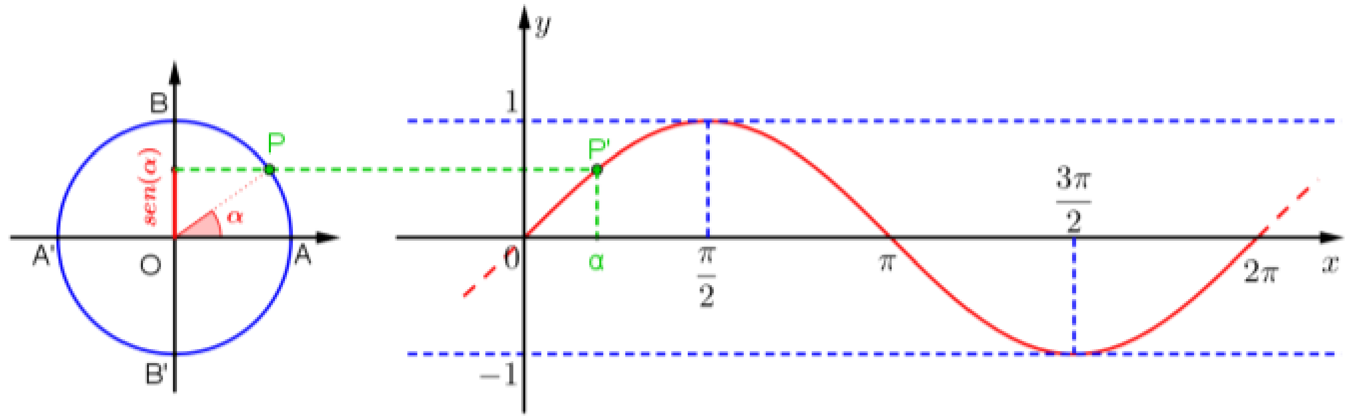
A análise do seno no ciclo trigonométrico permitiu identificar os intervalos de crescimento, decrescimento e os pontos de máximo e mínimo.

Vamos estudar a segunda derivada da função para identificar a sua concavidade.

$f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x \Rightarrow f''(x) = -\operatorname{sen} x$

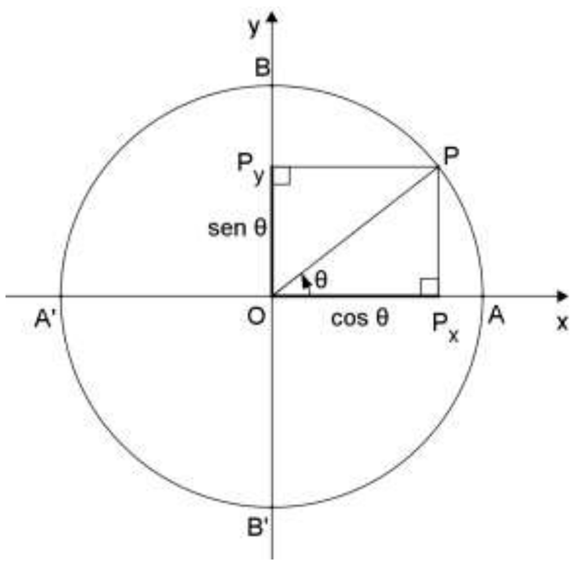
Assim, no 1º e no 2º quadrantes, onde a função seno é positiva, a segunda derivada será negativa e a concavidade da função estará voltada para baixo. Já no 3º e no 4º quadrantes, onde a função seno é negativa, a segunda derivada será positiva e a concavidade da função estará voltada para cima. Nos arcos de imagem A e A' ocorrem mudanças de concavidade, ou seja, esses pontos são pontos de inflexão da função seno.

A partir dessa análise, vamos construir um esboço do gráfico da função seno.



1.2. FUNÇÃO COSSENO

Seja P a imagem de um ângulo θ no ciclo trigonométrico. Já vimos que o cosseno do ângulo θ é definido como a abscissa de P, ou seja, $\cos\theta = \overline{OP_x}$. Assim, para obter o cosseno de θ, devemos projetar P sobre o eixo horizontal Ox, denominado eixo dos cossenos.



$\cos\theta = \overline{OP_x}$

A função cosseno é a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $\mathbf{f(x) = \cos x}$.

O domínio da função cosseno é $\mathbf{D_{cos}} = \mathbb{R}$ e a imagem $\mathbf{Im_{cos}} = [-1,1]$.

A função cosseno é periódica de período $\mathbf{2\pi}$.

Vamos analisar o gráfico da função cosseno, estudando os valores do cosseno de um ângulo de 0 a 2π. Assim, observe o que acontece com o segmento orientado $\overline{OP_x}$ conforme o ponto P dá uma volta no ciclo trigonométrico.

1º. De A até B, ou seja, de $\theta = 0$ até $\theta = \frac{\pi}{2}$, o cosseno decresce de $f(0) = \cos 0 = 1$ até $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

2º. De B até A’, ou seja, de $\theta = \frac{\pi}{2}$ até $\theta = \pi$, o cosseno decresce de $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ até $f(\pi) = \cos\pi = -1$.

3º. De A’ até B’, ou seja, de $\theta = \pi$ até $\theta = \frac{3\pi}{2}$, o cosseno cresce de $f(\pi) = \cos\pi = -1$ até $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$.

4º. De B’ até A, ou seja, de $\theta = \frac{3\pi}{2}$ até $\theta = 2\pi$, o cosseno cresce de $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$ até $f(2\pi) = \cos 2\pi = 1$.

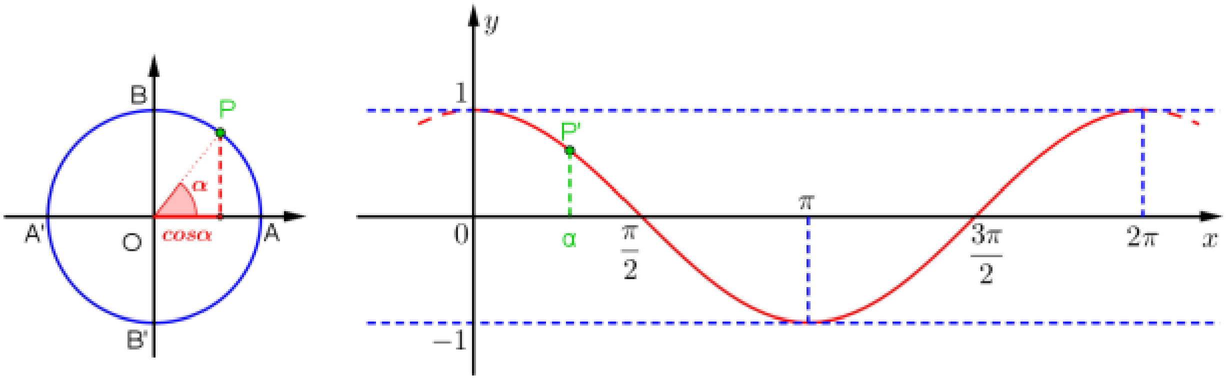
A análise do cosseno no ciclo trigonométrico permitiu identificar os intervalos de crescimento, decrescimento e os pontos de máximo e mínimo.

Vamos estudar a segunda derivada da função para identificar a sua concavidade.

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow f''(x) = -\cos x$$

Assim, no 1º e no 4º quadrantes, onde a função cosseno é positiva, a segunda derivada será negativa e a concavidade da função estará voltada para baixo. Já no 2º e no 3º quadrantes, onde a função cosseno é negativa, a segunda derivada será positiva e a concavidade da função estará voltada para cima. Nos arcos de imagem A e A’ ocorrem mudanças de concavidade, ou seja, esses pontos são pontos de inflexão da função cosseno.

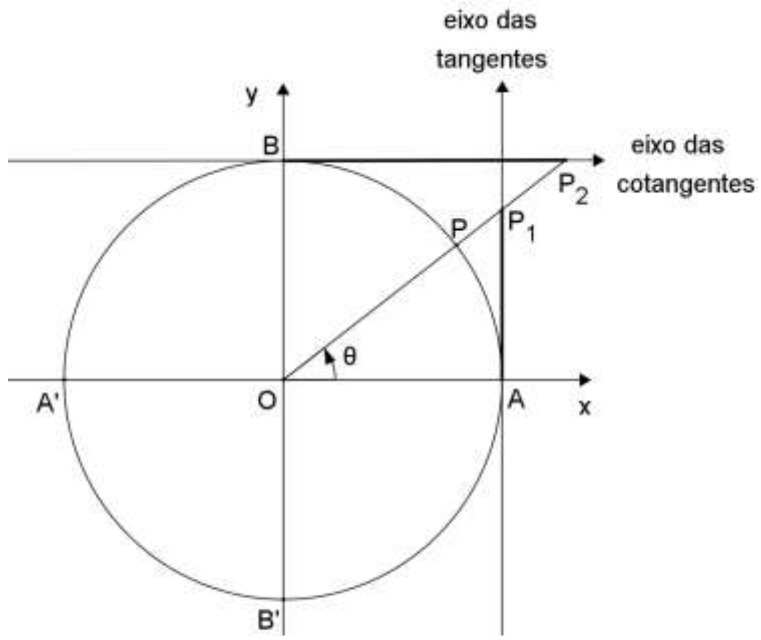
A partir dessa análise, vamos construir um esboço do gráfico da função cosseno.



1.3. FUNÇÃO TANGENTE

Já vimos que, no ciclo trigonométrico, o eixo paralelo ao eixo Oy com a mesma orientação que este e passando pelo ponto A é denominado **eixo das tangentes.**

Vimos também que, se um ângulo θ tal que $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tem imagem no ciclo trigonométrico P, então a tangente de θ é a medida algébrica do segmento $\overline{AP_1}$, onde P_1 é a interseção da reta $\overline{OP}$ com o eixo das tangentes.



$\mathbf{tg\,\theta = \overline{AP_1}}$

A função tangente é a função de $\mathbf{D_{tg}}$ em $\mathbb{R}$ definida por $\mathbf{f(x) = tg\,x}$.

O domínio da função tangente é $\mathbf{D_{tg} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}}$ e a imagem $\mathbf{Im_{tg}} = \mathbb{R}$.

A função tangente é periódica de período $\boldsymbol{\pi}$.

Vamos analisar o gráfico da função tangente, estudando os valores da tangente de um ângulo de 0 a 2π. Assim, observe o que acontece com o segmento orientado $\overline{AP_1}$ conforme o ponto P dá uma volta no ciclo trigonométrico.

1º. De A até B, ou seja, de $\theta = 0$ até $\theta = \frac{\pi}{2}$ (exclusive), a tangente cresce de $f(0) = tg\,0 = 0$ até $+\infty$.

2º. De B até A’, ou seja, de $\theta = \frac{\pi}{2}$ (exclusive) até $\theta = \pi$, a tangente cresce de $-\infty$ até $f(\pi) = tg\,\pi = 0$.

3º. De A' até B', ou seja, de $\theta=\pi$ até $\theta=\frac{3\pi}{2}$ (exclusive), a tangente cresce de $f(\pi)=\text{tg}\,\pi=0$ até $+\infty$.

4º. De B' até A, ou seja, de $\theta=\frac{3\pi}{2}$ (exclusive) até $\theta=2\pi$, a tangente cresce de $-\infty$ até $f(2\pi)=\text{tg}\,2\pi=0$.

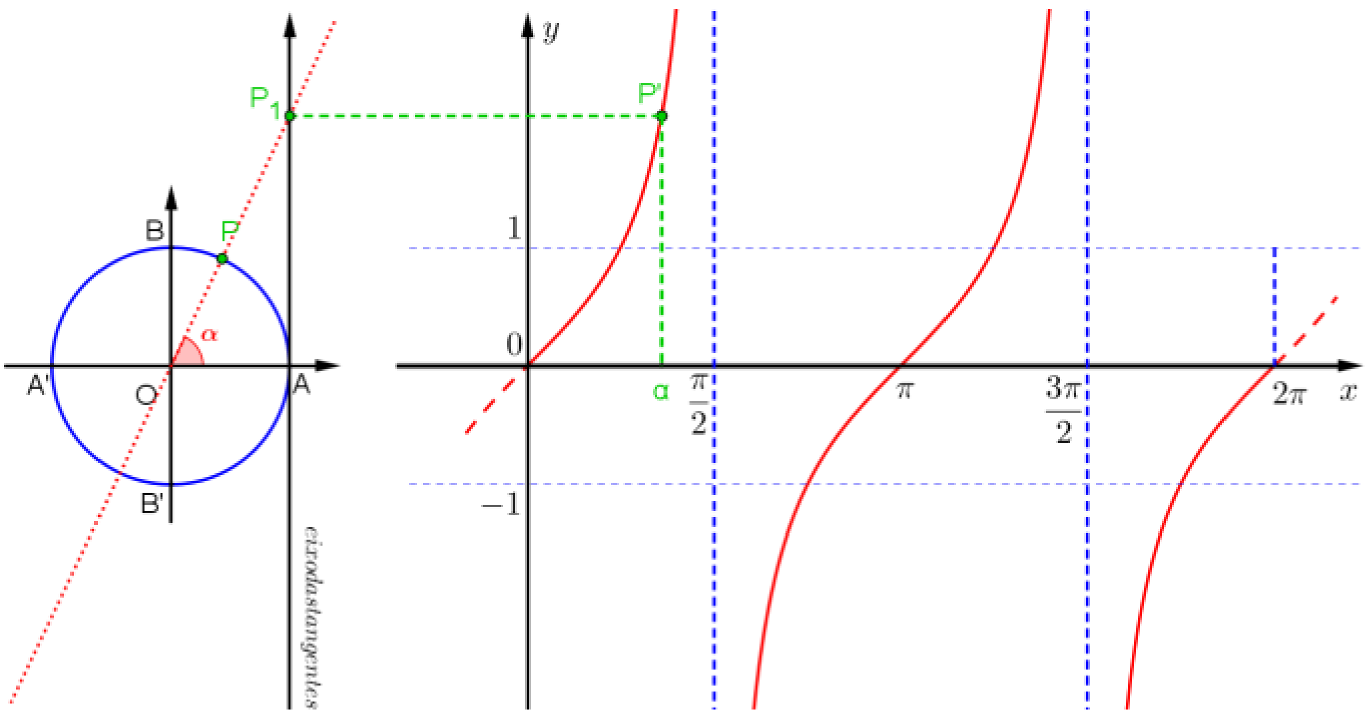
A análise da tangente no ciclo trigonométrico permitiu identificar os intervalos de crescimento e os pontos de descontinuidade.

Vamos estudar a segunda derivada da função para identificar a sua concavidade.

$$f(x)=\text{tg}\,x \Rightarrow f'(x)=\sec^2 x \Rightarrow f''(x)=2\,\text{tg}\,x\cdot\sec^2 x$$

Assim, no 1º e no 3º quadrantes, onde a função tangente é positiva, a segunda derivada será positiva e a concavidade da função estará voltada para cima. Já no 2º e no 4º quadrantes, onde a função tangente é negativa, a segunda derivada será negativa e a concavidade da função estará voltada para baixo. Nos arcos de imagem A e A' ocorrem mudanças de concavidade, ou seja, esses pontos são pontos de inflexão da função tangente. Nos arcos de imagem B e B' também há mudança de concavidade antes e depois, mas eles são pontos de descontinuidade.

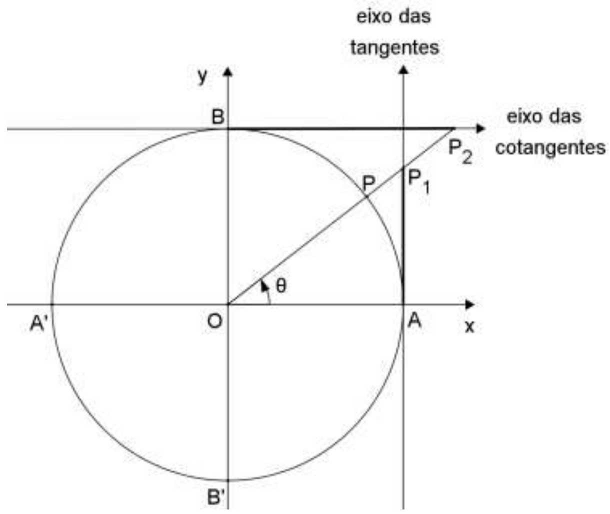
A partir dessa análise, vamos construir um esboço do gráfico da função tangente.



1.4. FUNÇÃO COTANGENTE

Já vimos que, no ciclo trigonométrico, o eixo paralelo ao eixo Ox com a mesma orientação que este e passando pelo ponto B é denominado **eixo das cotangentes.**

Vimos também que, se um ângulo θ tal que $\theta \neq k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tem imagem no ciclo trigonométrico P, então a cotangente de θ é a medida algébrica do segmento $\overline{BP_2}$, onde P_2 é a interseção da reta $\overline{OP}$ com o eixo das cotangentes.



$$\mathbf{cotg}\,\theta = \overline{\mathbf{BP_2}}$$

A função cotangente é a função de $\mathbf{D_{cotg}}$ em $\mathbb{R}$ definida por $\mathbf{f(x) = cotg\,x}$.

O domínio da função cotangente é $\mathbf{D_{cotg}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} \,|\, \mathbf{x} \neq \mathbf{k\pi}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}\}$ e a imagem $\mathbf{Im_{cotg}} = \mathbb{R}$.

A função cotangente é periódica de período $\boldsymbol{\pi}$.

Vamos analisar o gráfico da função cotangente, estudando os valores da cotangente de um ângulo de 0 a 2π. Assim, observe o que acontece com o segmento orientado $\overline{BP_2}$ conforme o ponto P dá uma volta no ciclo trigonométrico.

1º. De A até B, ou seja, de $\theta = 0$ (exclusive) até $\theta = \frac{\pi}{2}$, a cotangente decresce de $+\infty$ até $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{cotg}\frac{\pi}{2} = 0$.

2º. De B até A', ou seja, de $\theta = \frac{\pi}{2}$ até $\theta = \pi$ (exclusive), a cotangente decresce de $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{cotg}\frac{\pi}{2} = 0$ até $-\infty$.

3º. De A' até B', ou seja, de $\theta = \pi$ (exclusive) até $\theta = \frac{3\pi}{2}$, a cotangente decresce de $+\infty$ até $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \text{cotg}\frac{3\pi}{2} = 0$.

4º. De B’ até A, ou seja, de $\theta = \frac{3\pi}{2}$ até $\theta = 2\pi$ (exclusive), a cotangente decresce de $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \text{cotg}\,\frac{3\pi}{2} = 0$ até $-\infty$.

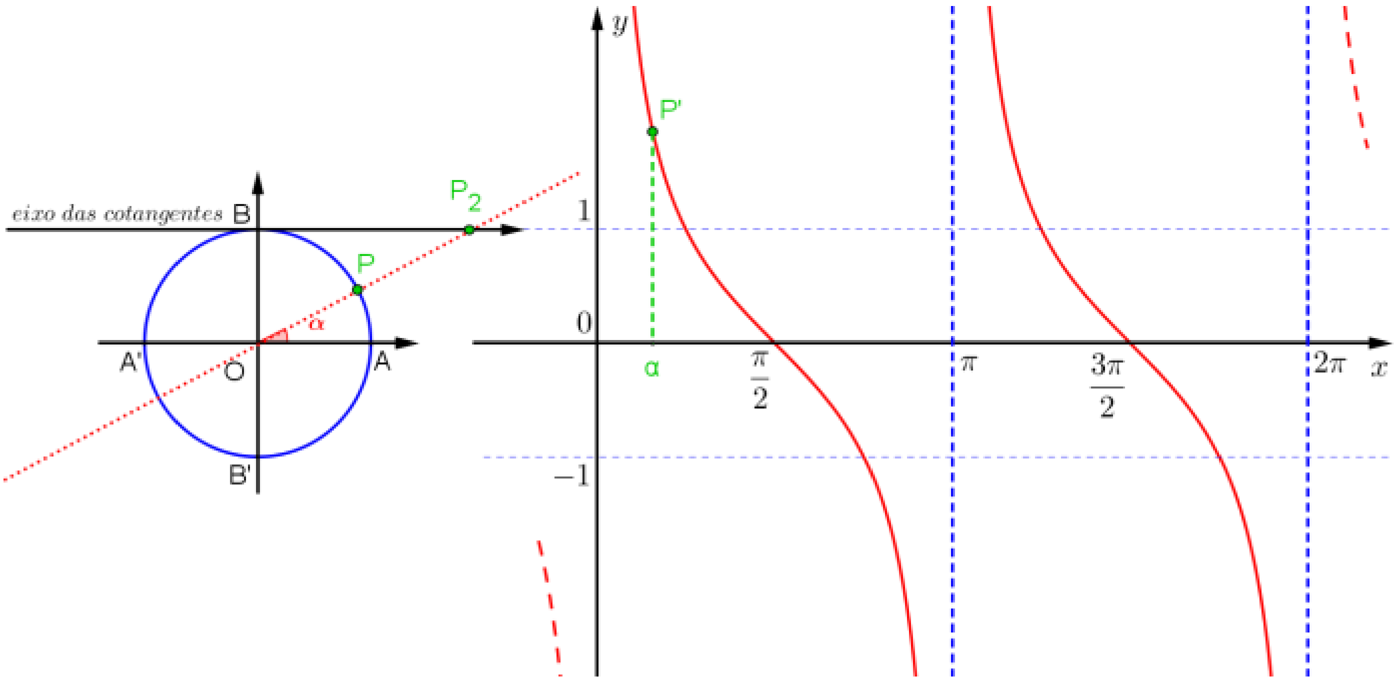
A análise da cotangente no ciclo trigonométrico permitiu identificar os intervalos de decrescimento e os pontos de descontinuidade.

Vamos estudar a segunda derivada da função para identificar a sua concavidade.

$$f(x) = \text{cotg}\,x \Rightarrow f'(x) = -\text{cossec}^2 x \Rightarrow f''(x) = 2\,\text{cotg}\,x \cdot \text{cossec}^2 x$$

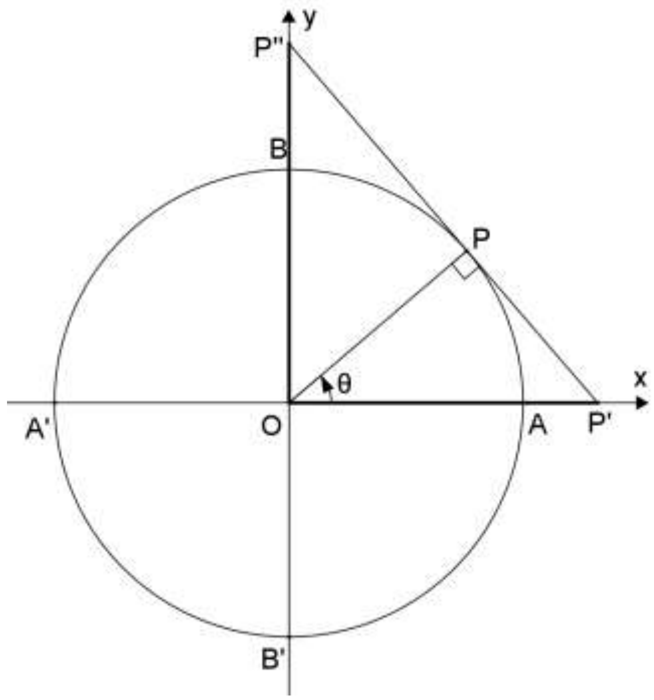
Assim, no 1º e no 3º quadrantes, onde a função cotangente é positiva, a segunda derivada será positiva e a concavidade da função estará voltada para cima. Já no 2º e no 4º quadrantes, onde a função cotangente é negativa, a segunda derivada será negativa e a concavidade da função estará voltada para baixo. Nos arcos de imagem B e B’ ocorrem mudanças de concavidade, ou seja, esses pontos são pontos de inflexão da função cotangente. Nos arcos de imagem A e A’ também há mudança de concavidade antes e depois, mas eles são pontos de descontinuidade.

A partir dessa análise, vamos construir um esboço do gráfico da função cotangente.



1.5. FUNÇÃO SECANTE

Seja θ um ângulo tal que $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e cuja imagem no ciclo trigonométrico é P. A secante de θ é a medida algébrica do segmento $\overline{OP'}$, onde P' é a interseção da reta tangente ao ciclo trigonométrico em P com o eixo dos cossenos.



$\sec\theta = \overline{OP'}$

A função secante é a função de $\mathbf{D_{sec}}$ em $\mathbb{R}$ definida por $\mathbf{f(x) = sec\,x}$.

O domínio da função secante é $\mathbf{D_{sec}} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R} \mid \mathbf{x} \neq \frac{\pi}{2} + \mathbf{k}\pi, \mathbf{k} \in \mathbb{Z} \right\}$ e a imagem

$\mathbf{Im_{sec}} = \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[= \mathbb{R} - \left]-1, 1\right[$.

A função secante é periódica de período $\mathbf{2\pi}$.

Vamos analisar o gráfico da função secante, estudando os valores da secante de um ângulo de 0 a 2π. Assim, observe o que acontece com o segmento orientado $\overline{OP'}$ conforme o ponto P dá uma volta no ciclo trigonométrico.

1º. De A até B, ou seja, de $\theta = 0$ até $\theta = \frac{\pi}{2}$ (exclusive), a secante cresce de $f(0) = \sec 0 = 1$ até $+\infty$.

2º. De B até A', ou seja, de $\theta = \frac{\pi}{2}$ (exclusive) até $\theta = \pi$, a secante cresce de $-\infty$ até $f(\pi) = \sec\pi = -1$.

3º. De A' até B', ou seja, de $\theta = \pi$ até $\theta = \frac{3\pi}{2}$ (exclusive), a secante decresce de $f(\pi) = \sec\pi = -1$ até $-\infty$.

4º. De B' até A, ou seja, de $\theta = \frac{3\pi}{2}$ (exclusive) até $\theta = 2\pi$, a secante decresce de $+\infty$ até $f(2\pi) = \sec 2\pi = 1$.

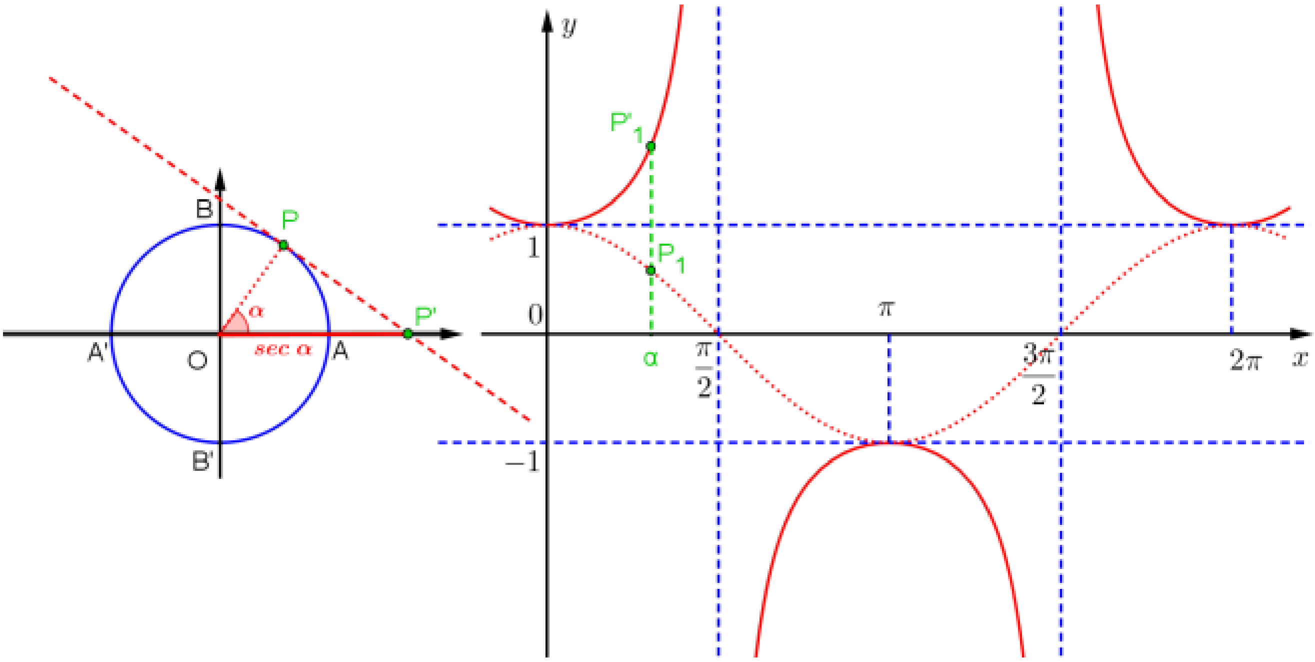
A análise da secante no ciclo trigonométrico permitiu identificar os intervalos de crescimento, decrescimento, os pontos de máximo e mínimo locais e os pontos de descontinuidade.

Vamos estudar a segunda derivada da função para identificar a sua concavidade.

$$f(x)=\sec x \Rightarrow f'(x)=\sec x\cdot \operatorname{tg} x \Rightarrow f''(x)=\sec x\cdot\left(\operatorname{tg}^2 x+\sec^2 x\right)$$

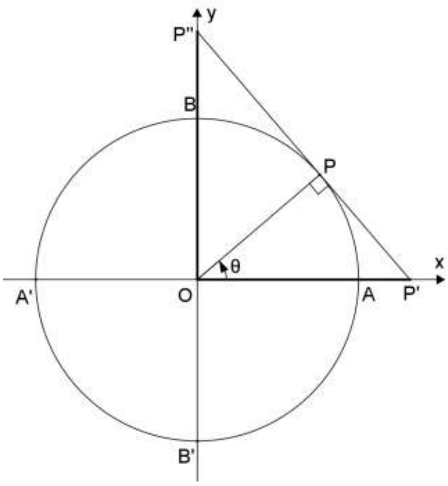
Assim, no 1º e no 4º quadrantes, onde a função secante é positiva, a segunda derivada será positiva e a concavidade da função estará voltada para cima. Já no 2º e no 3º quadrantes, onde a função secante é negativa, a segunda derivada será negativa e a concavidade da função estará voltada para baixo.

A partir dessa análise, vamos construir um esboço do gráfico da função cotangente.



1.6. FUNÇÃO COSSECANTE

Seja θ um ângulo tal que $\theta \neq k\cdot\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, e cuja imagem no ciclo trigonométrico é P. A cossecante de θ é a medida algébrica do segmento $\overline{OP''}$, onde P" é a interseção da reta tangente ao ciclo trigonométrico em P com o eixo dos senos.



$$\operatorname{cossec}\theta=\overline{OP''}$$

A função cossecante é a função de $\mathbf{D_{cossec}}$ em $\mathbb{R}$ definida por $\mathbf{f(x)=cossec\,x}$.

O domínio da função secante é $\mathbf{D_{cossec}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}\}}$ e a imagem

$\mathbf{Im_{cossec}=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[=\mathbb{R}-]-1,1[}$.

A função cossecante é periódica de período $\mathbf{2\pi}$.

Vamos analisar o gráfico da função cossecante, estudando os valores da cossecante de um ângulo de 0 a 2π. Assim, observe o que acontece com o segmento orientado $\overline{OP''}$ conforme o ponto P dá uma volta no ciclo trigonométrico.

1º. De A até B, ou seja, de $\theta=0$ (exclusive) até $\theta=\frac{\pi}{2}$, a cossecante decresce de $+\infty$ até $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\text{cossec}\frac{\pi}{2}=1$.

2º. De B até A’, ou seja, de $\theta=\frac{\pi}{2}$ até $\theta=\pi$ (exclusive), a cossecante cresce de $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\text{cossec}\frac{\pi}{2}=1$ até $+\infty$.

3º. De A’ até B’, ou seja, de $\theta=\pi$ (exclusive) até $\theta=\frac{3\pi}{2}$, a cossecante cresce de $-\infty$ até $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\text{cossec}\frac{3\pi}{2}=-1$.

4º. De B’ até A, ou seja, de $\theta=\frac{3\pi}{2}$ até $\theta=2\pi$ (exclusive), a cossecante decresce de $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\text{cossec}\frac{3\pi}{2}=-1$ até $-\infty$.

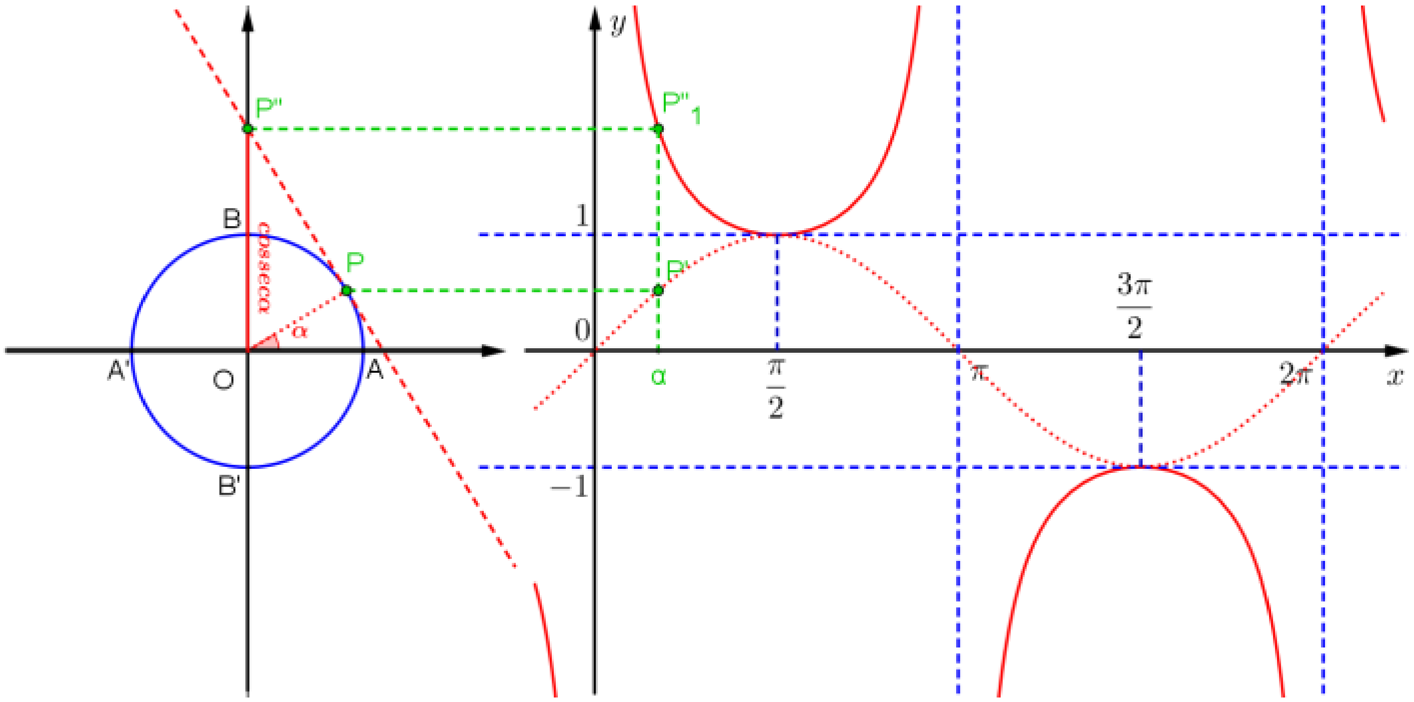
A análise da cossecante no ciclo trigonométrico permitiu identificar os intervalos de crescimento, decrescimento, os pontos de máximo e mínimo locais e os pontos de descontinuidade.

Vamos estudar a segunda derivada da função para identificar a sua concavidade.

$$f(x)=\text{cossec}\,x \Rightarrow f'(x)=-\text{cossec}\,x\cdot\text{cotg}\,x \Rightarrow f''(x)=\text{cossec}\,x\cdot\left(\text{cotg}^2\,x+\text{cossec}^2\,x\right)$$

Assim, no 1º e no 2º quadrantes, onde a função cossecante é positiva, a segunda derivada será positiva e a concavidade da função estará voltada para cima. Já no 3º e no 4º quadrantes, onde a função cossecante é negativa, a segunda derivada será negativa e a concavidade da função estará voltada para baixo.

A partir dessa análise, vamos construir um esboço do gráfico da função cotangente.

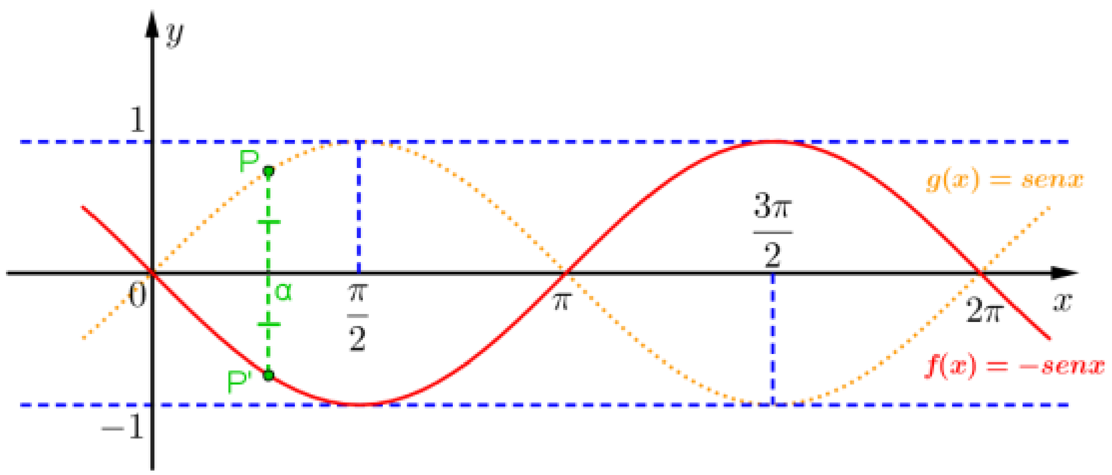


2. ESTUDO DOS GRÁFICOS

Vamos estudar os gráficos de funções trigonométricas da forma $f(x) = A\text{sen}(Bx + C) + D$. Para isso vamos analisar a influência de cada um dos coeficientes separadamente. Observe que o desenvolvimento feito para a função cosseno se aplica de maneira similar às outras funções trigonométricas.

2.1. REFLEXÃO EM RELAÇÃO AO EIXO Ox

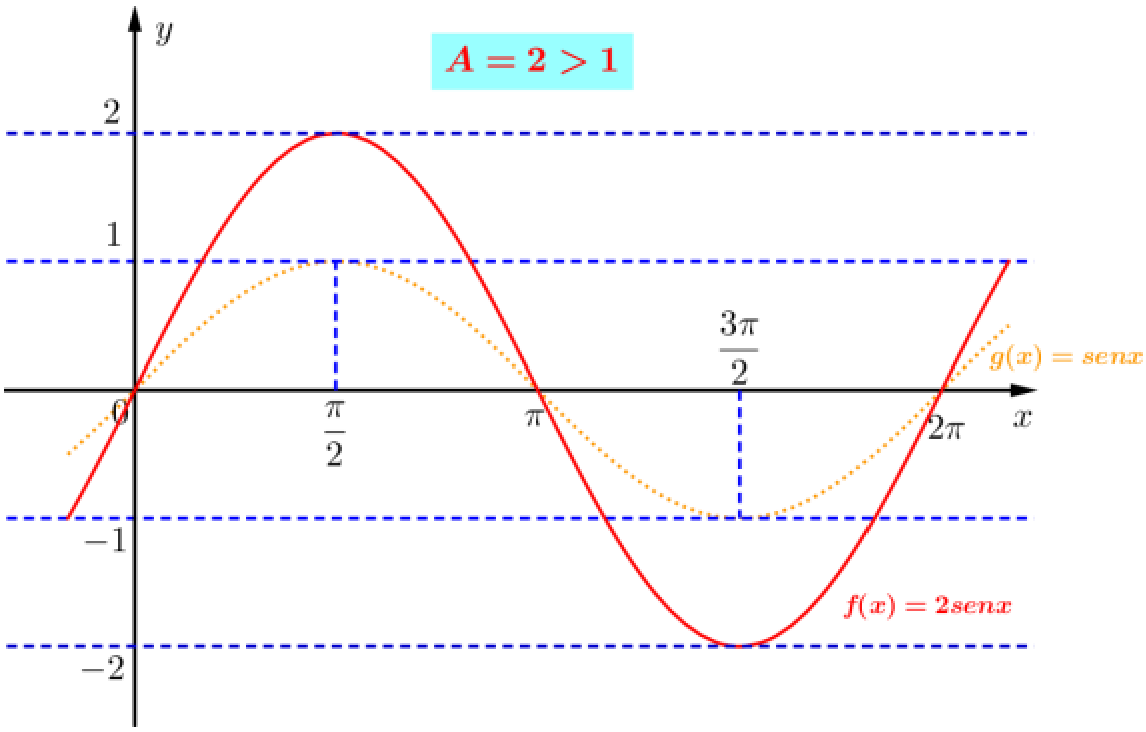
A função $f(x) = -\text{sen}x$ possui gráfico simétrico ao gráfico de $g(x) = \text{sen}x$ em relação ao eixo Ox.



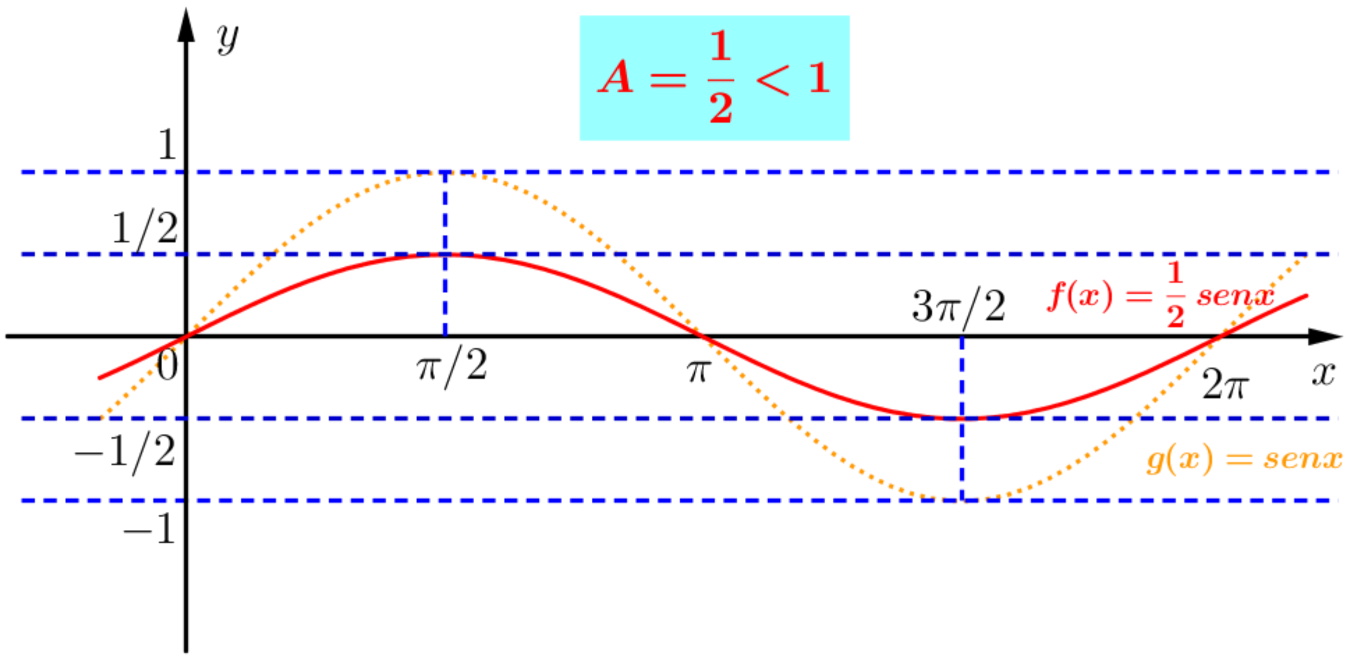
2.2. AMPLITUDE

A função $g(x) = \text{sen}x$ tem amplitude 1 e imagem $\text{Im}_g = [-1,1]$. A função $f(x) = A\text{sen}x$, com $A > 0$, tem amplitude A e imagem $\text{Im}_f = [-A, A]$.

Exemplo: O gráfico da função $f(x) = 2\text{sen}x$ tem amplitude $A = 2$ e imagem $\text{Im} = [-2,2]$.



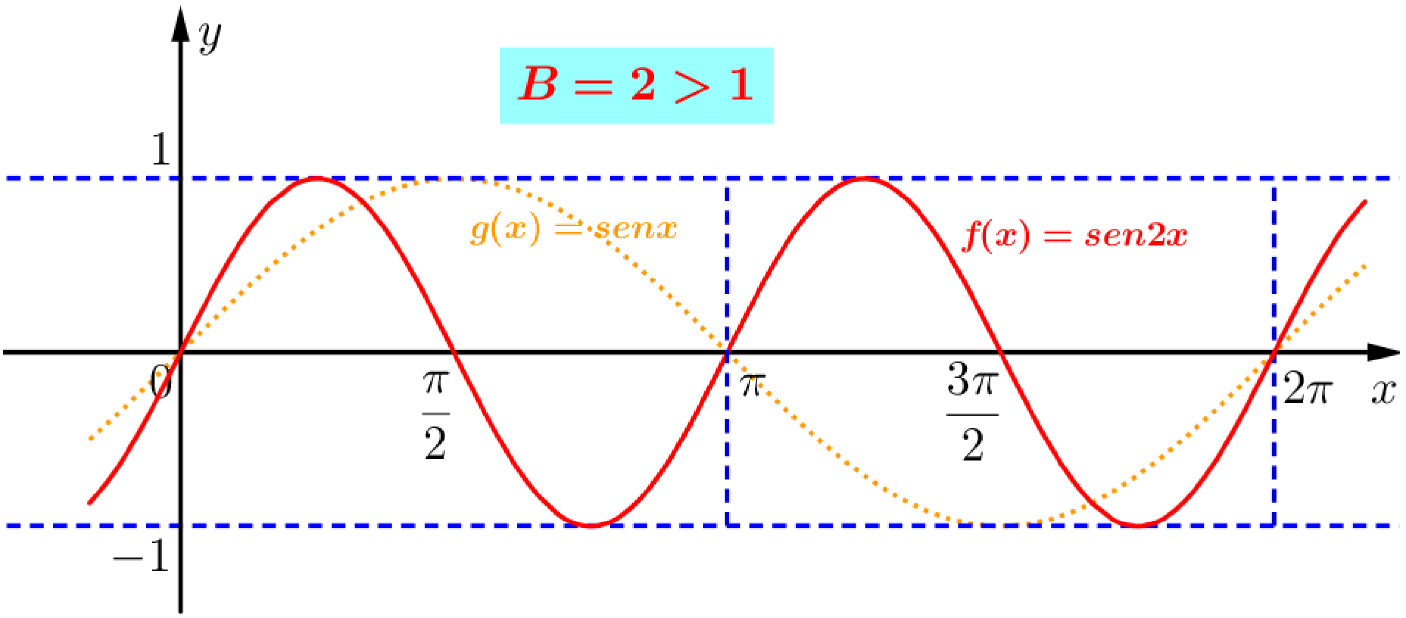
Exemplo: O gráfico da função $f(x) = \frac{1}{2}\text{sen}x$ tem amplitude $A = \frac{1}{2}$ e imagem $\text{Im} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$



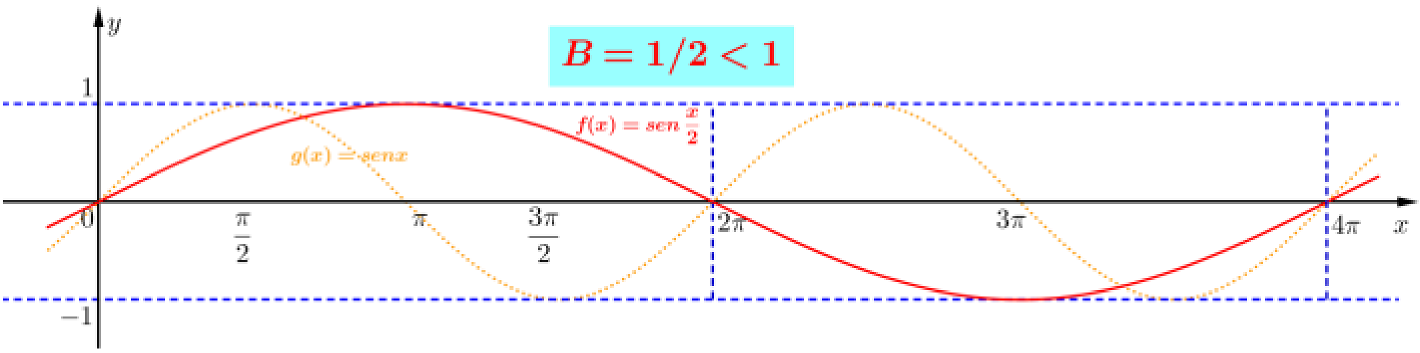
2.3. PERÍODO

A função $f(x)=\text{sen}Bx$ possui período $T=\dfrac{2\pi}{|B|}$.

Exemplo: A função $f(x)=\text{sen}2x$ possui período $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.



Exemplo: A função $f(x)=\text{sen}\dfrac{x}{2}$ possui período $T=\dfrac{2\pi}{1/2}=4\pi$.



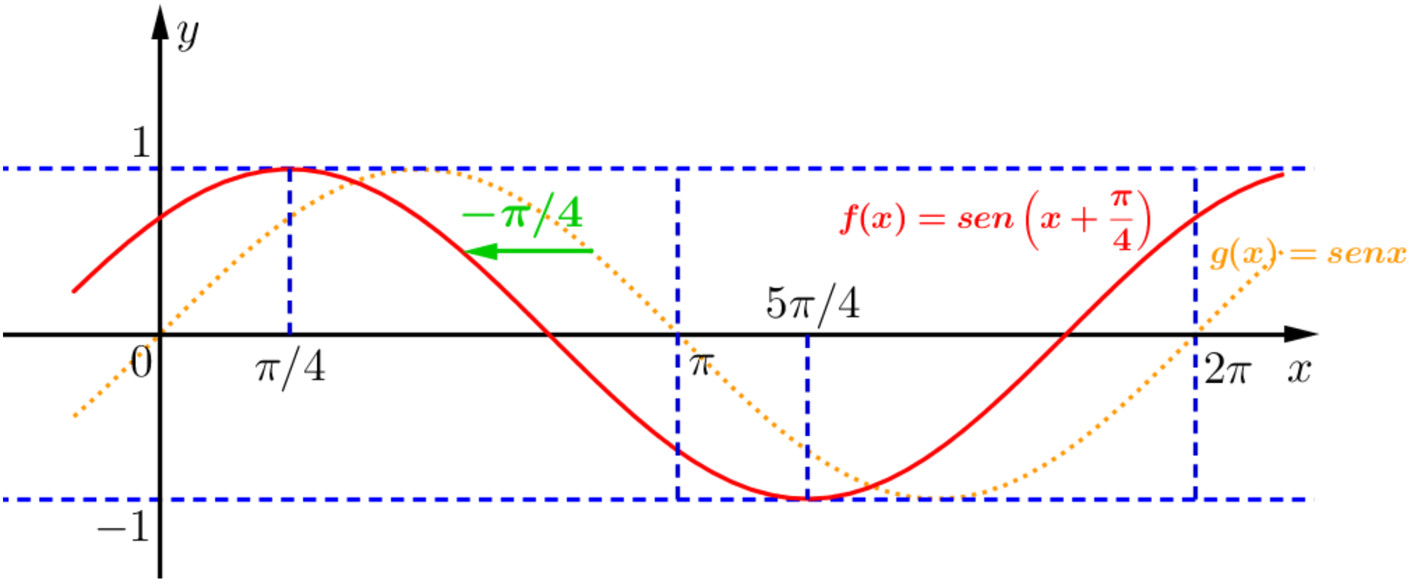
2.4. DESLOCAMENTO HORIZONTAL

O gráfico da função $f(x)=\text{sen}(Bx+C)$ é igual ao gráfico igual ao gráfico de $g(x)=\text{sen}Bx$ deslocado na horizontal de $-\dfrac{C}{B}$. Se $\left(-\dfrac{C}{B}\right)>0$, o gráfico se desloca para a direita e, se $\left(-\dfrac{C}{B}\right)<0$, o gráfico se desloca para a esquerda.

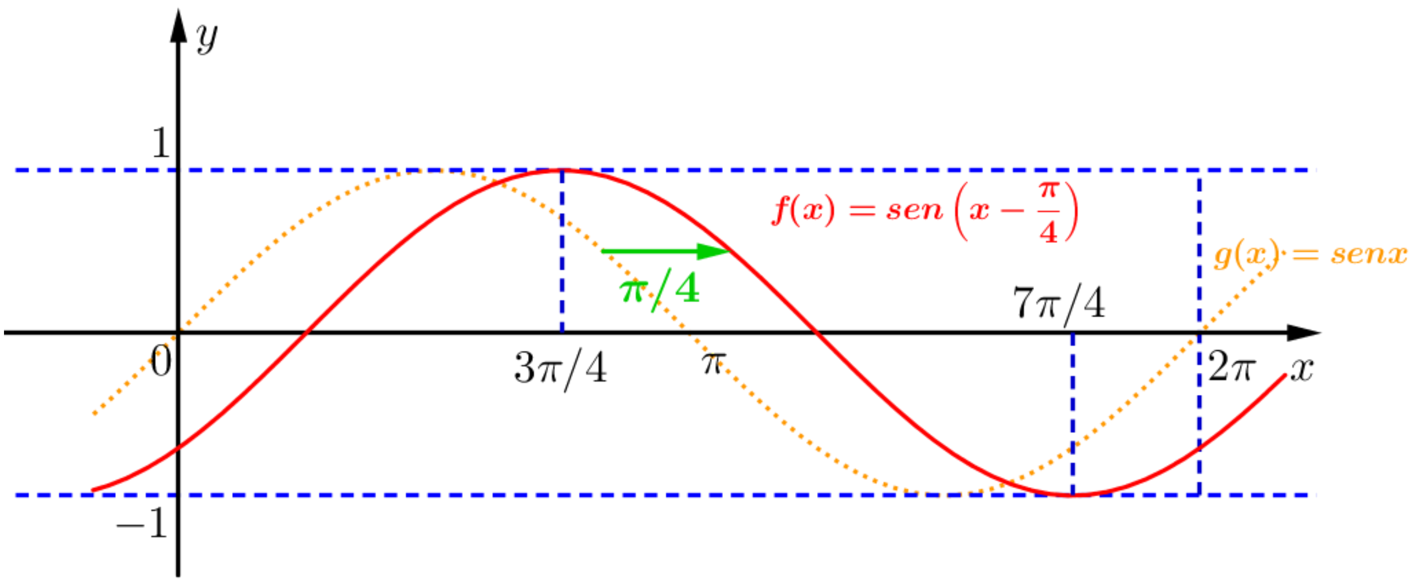
OBSERVAÇÃO

Para encontrar o deslocamento na horizontal da função $\mathbf{f(x)=sen(Bx+C)}$, devemos fazer $\mathbf{Bx+C=0 \Leftrightarrow x=-\frac{C}{B}}$. Se o resultado for positivo, o deslocamento é para a direita e, se for negativo, o deslocamento é para a esquerda.

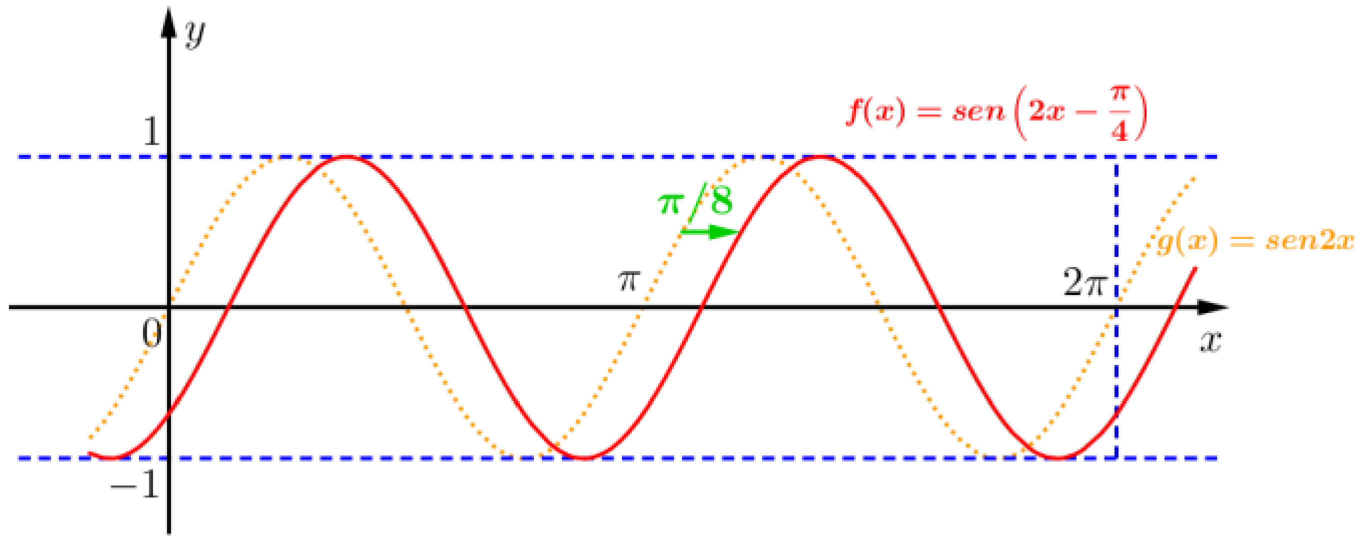
Exemplo: A função $f(x)=\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ tem gráfico igual ao de $f(x)=\text{sen}x$ deslocado de $\frac{\pi}{4}$ unidades para a esquerda.



Exemplo: A função $f(x)=\text{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ tem gráfico igual ao de $f(x)=\text{sen}x$ deslocado de $\frac{\pi}{4}$ unidades para a direita.



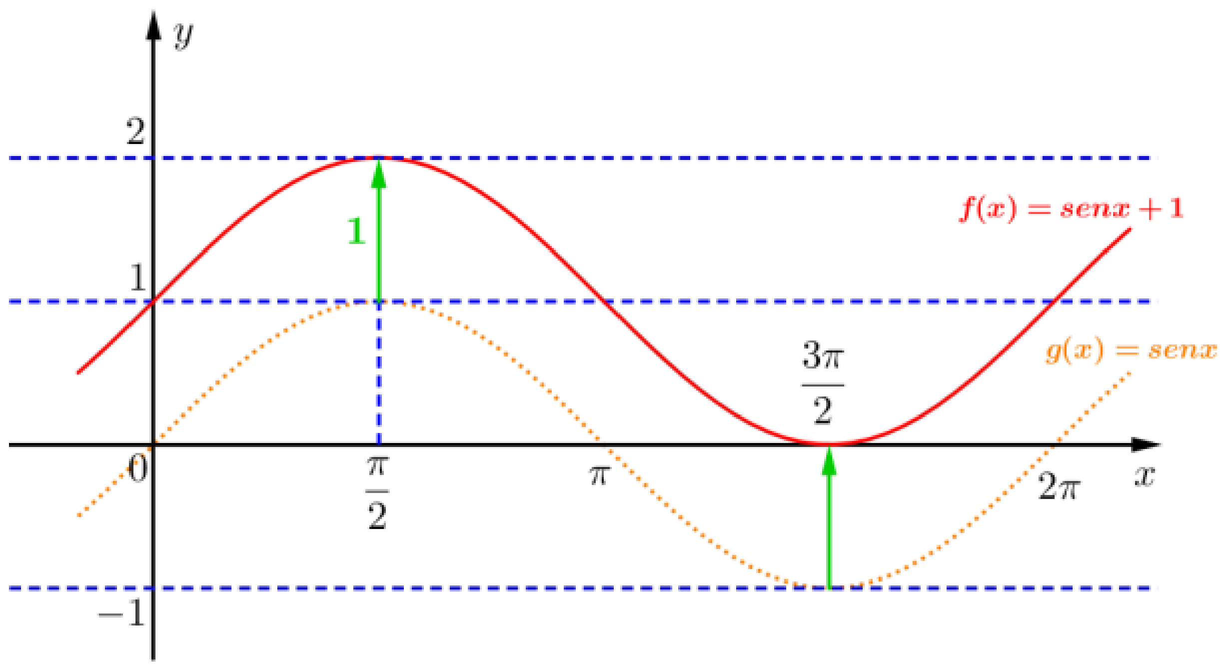
Exemplo: A função $f(x) = \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ tem gráfico igual ao de $f(x) = \text{sen}x$ deslocado de $\frac{\pi}{8}$ unidades para a direita.



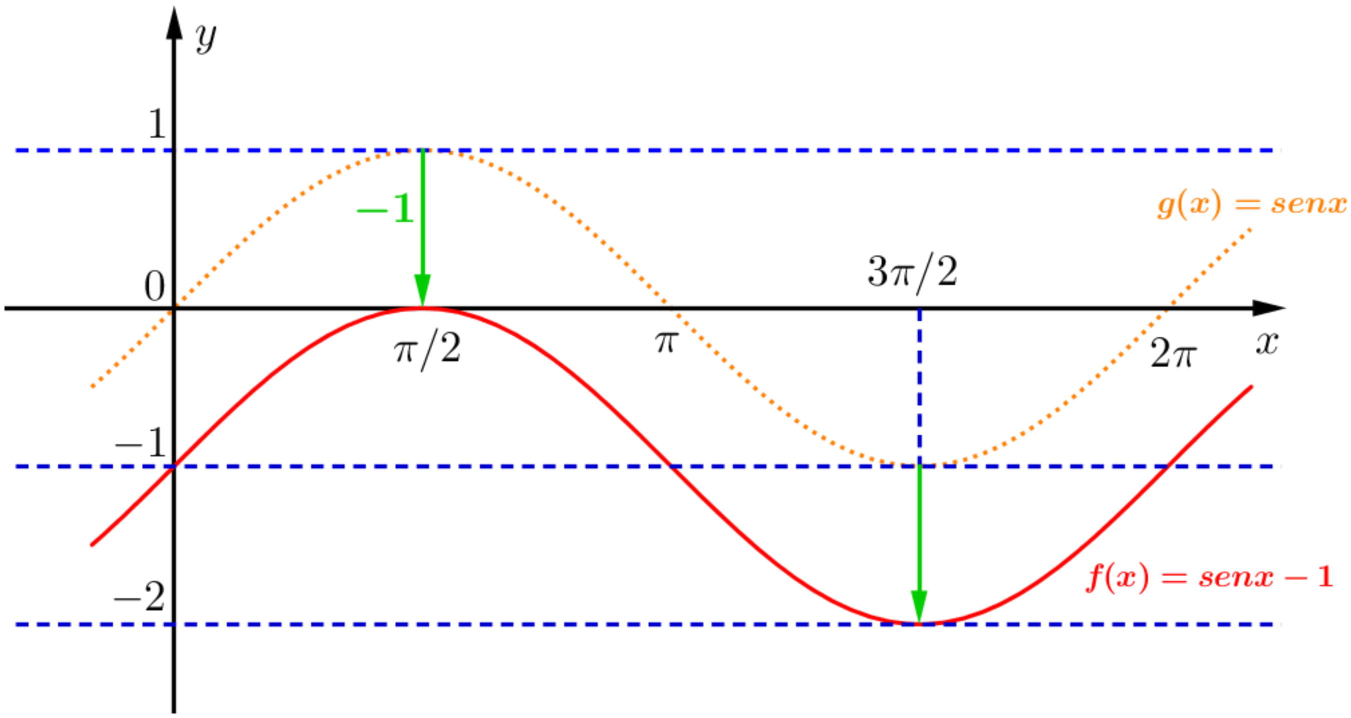
2.5. DESLOCAMENTO VERTICAL

O gráfico da função $f(x) = \text{sen}x + D$ é igual ao gráfico de $f(x) = \text{sen}x$ deslocado na vertical de D unidades. Se $D > 0$, o gráfico se desloca para cima e, se $D < 0$, o gráfico se desloca para baixo.

Exemplo: A função $f(x) = \text{sen}x + 1$ tem gráfico igual ao de $g(x) = \text{sen}x$ deslocado de 1 unidade para cima.



Exemplo: A função $f(x) = \text{sen}x - 1$ tem gráfico igual ao de $g(x) = \text{sen}x$ deslocado de 1 unidade para baixo.



O gráfico de $\mathbf{f(x) = A sen(Bx + C) + D}$ é tal que:

- $|\mathbf{A}|$ é a amplitude;
- $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{2\pi}}{|\mathbf{B}|}$ é o período;
- $\left(-\dfrac{\mathbf{C}}{\mathbf{B}}\right)$ é o número de fase, ou seja, o deslocamento na horizontal (para direita, se positivo, ou para a esquerda, se negativo); e
- D indica o deslocamento vertical (para cima, se positivo, ou para baixo, se negativo).

Exemplo: Construa o gráfico de $f(x) = 2\operatorname{sen}\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 1$.

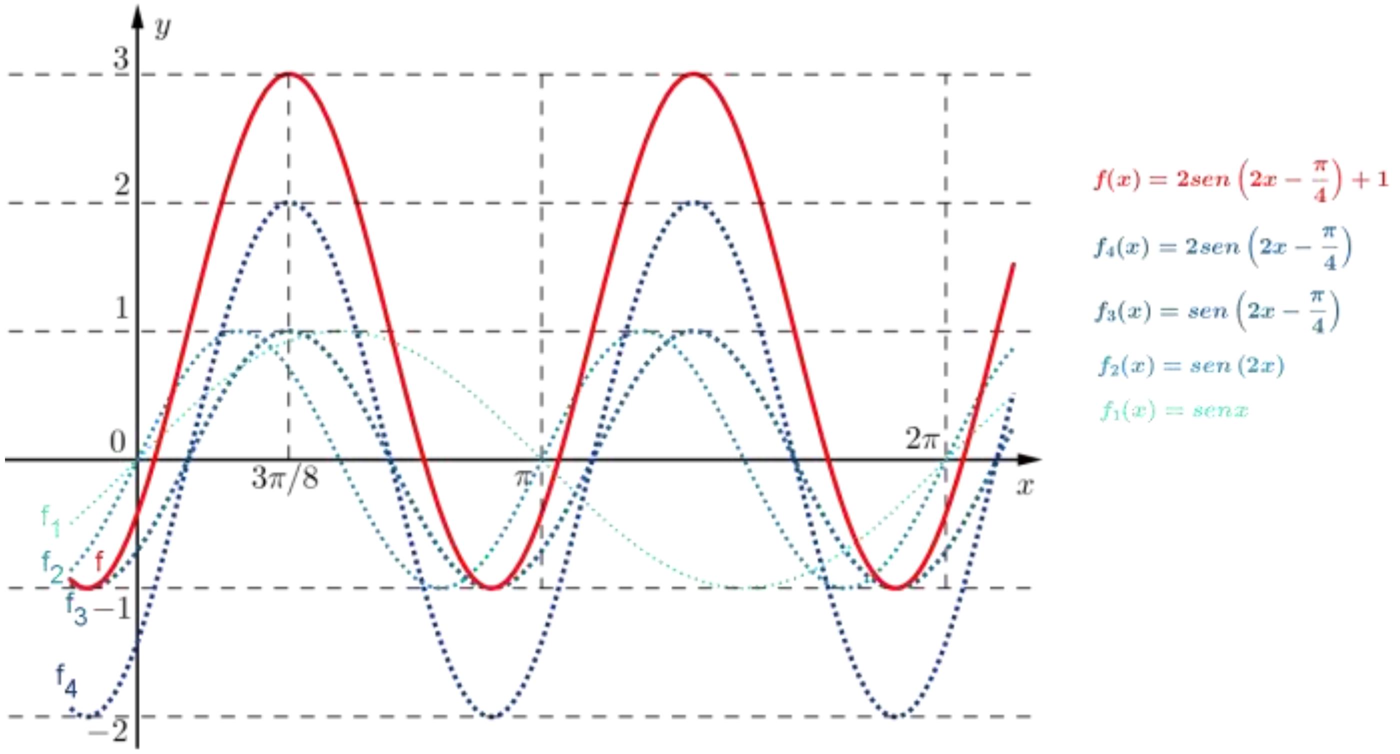
1º. Constrói-se $f_1(x) = \operatorname{sen} x$.

2º. Constrói-se $f_2(x) = \operatorname{sen} 2x$, a partir de f_1, com período $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

3º. Constrói-se $f_3(x) = \operatorname{sen}\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$, a partir de f_2, deslocando-se $\dfrac{\pi}{8}$ na horizontal para a direita.

4º. Constrói-se $f_4(x) = 2\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, a partir de f_3, com amplitude 2.

5º. Constrói-se $f(x) = 2\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$, a partir de f_4, deslocando-se 1 na vertical para cima.



2.6. CÁLCULO DO PERÍODO

Seja $f(x)$ uma função periódica de período P, então o período da função $g(x) = A \cdot f(Bx + C) + D$ é $T = \frac{P}{|B|}$.

Note que as funções seno, cosseno, secante e cossecante são periódicas de período 2π e as funções tangente e cotangente são periódicas de período π.

Exemplo: Calcule o período das seguintes funções.

a) $y = \text{sen}2x$ b) $y = \cos\frac{x}{2}$ c) $y = \text{tg}3x$ d) $y = \text{cotg}\frac{x}{3}$

e) $y = \sec\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ f) $y = \text{cossec}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ g) $y = 2\text{tg}\left(\frac{x + \pi}{6}\right) + 3$ h) $y = \frac{\cos\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right)}{2} - 1$

RESOLUÇÃO:

a) $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$ b) $T=\dfrac{2\pi}{1/2}=4\pi$ c) $T=\dfrac{\pi}{3}$ d) $T=\dfrac{\pi}{1/3}=3\pi$

e) $T=\dfrac{2\pi}{1}=2\pi$ f) $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$ g) $T=\dfrac{\pi}{1/6}=6\pi$ h) $T=\dfrac{2\pi}{3}$

Sejam $f_1(x)$ e $f_2(x)$ duas funções periódicas de período P_1 e P_2, respectivamente, com $P_1 \neq P_2$. Se $\dfrac{P_1}{P_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$, onde n_1 e n_2 são inteiros positivos e primos entre si, então as funções $(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$ e $(f_1 \cdot f_2)(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$ são periódicas de período $P=n_2P_1=n_1P_2$.

Exemplo: Calcule o período das seguintes funções.

a) $y=\text{tg}\,3x+\cos 4x$ b) $y=\text{sen}\dfrac{x}{2}\cdot\cos 3x$ c) $y=\sec x-\text{sen}\,x$

RESOLUÇÃO:

a) $\text{tg}\,3x:\ P_1=\dfrac{\pi}{3}$; $\cos 4x:\ P_2=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{P_1}{P_2}=\dfrac{\pi/3}{\pi/2}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow T=3\cdot\dfrac{\pi}{3}=2\cdot\dfrac{\pi}{2}=\pi$

b) $\text{sen}\dfrac{x}{2}:\ P_1=\dfrac{2\pi}{1/2}=4\pi$; $\cos 3x:\ P_2=\dfrac{2\pi}{3}$; $\dfrac{P_1}{P_2}=\dfrac{4\pi}{2\pi/3}=\dfrac{6}{1}\Rightarrow T=1\cdot 4\pi=6\cdot\dfrac{2\pi}{3}=4\pi$

c) $y=\sec x-\text{sen}\,x:\ P_1=P_2=2\pi$

$$y=\sec x-\text{sen}\,x=\frac{1}{\cos x}-\text{sen}\,x=\frac{1-\text{sen}\,x\cos x}{\cos x}=\frac{1-\frac{1}{2}\cdot 2\,\text{sen}\,x\cos x}{\cos x}=\frac{1-\frac{1}{2}\text{sen}\,2x}{\cos x}$$

$1-\dfrac{1}{2}\text{sen}\,2x:\ P_1=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$; $\cos x:\ P_2=2\pi$; $\dfrac{P_1}{P_2}=\dfrac{\pi}{2\pi}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow T=2\cdot\pi=1\cdot 2\pi=2\pi$

3. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Vamos agora estudar as funções trigonométricas inversas. Todas as funções trigonométricas que nós estudamos não são bijetoras. Para podermos definir suas funções inversas, vamos restringir o domínio das funções de maneira conveniente a fim de obter uma função bijetora. O gráfico das funções trigonométricas inversas pode ser obtido refletindo-se o gráfico da função trigonométrica em relação à reta $y=x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares).

3.1. FUNÇÃO ARCO SENO

Seja $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ tal que $f(x)=\operatorname{sen}x$ uma função bijetora, então a sua inversa é $f^{-1}:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ tal que $f^{-1}(x)=\operatorname{arcsen}x$. Assim, temos: $y=f(x)=\operatorname{sen}x \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)=\operatorname{arcsen}y$.

PROPRIEDADE FUNDAMENTAL:

$$\boldsymbol{\theta=\operatorname{arcsen}k,\ k\in[-1,1]\Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta=k\ \wedge\ \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$$

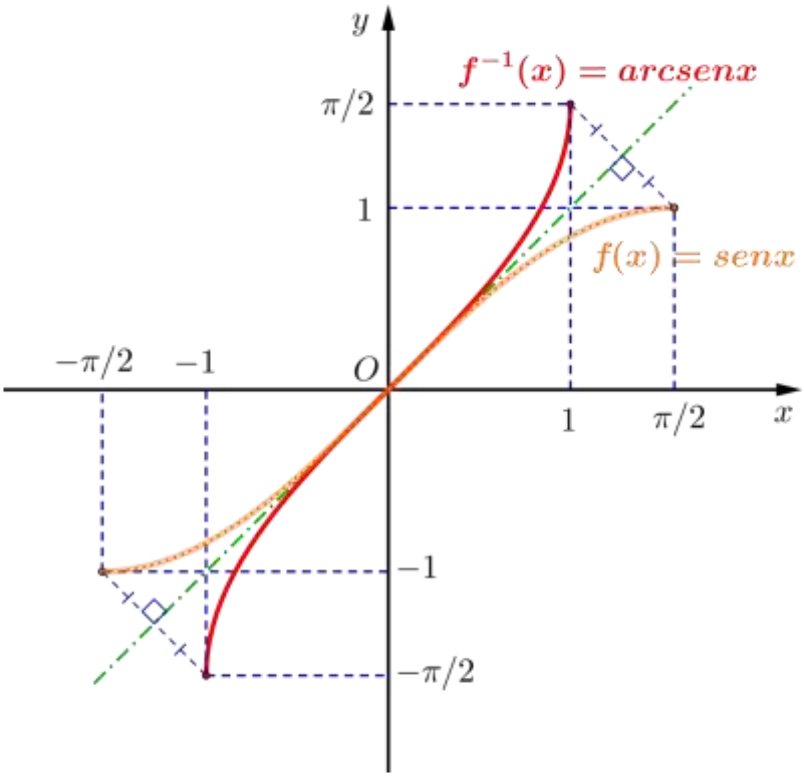
Propriedades:

$\operatorname{arcsen}(-x)=-\operatorname{arcsen}x,\ \forall x\in[-1,1]$

$\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}x)=x;\ \forall x\in[-1,1]$

$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}y)=y;\ \forall y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

A figura seguinte mostra o gráfico da função arco seno.



3.2. FUNÇÃO ARCO COSSENO

Seja $f:[0,\pi]\to[-1,1]$ tal que $f(x)=\cos x$ uma função bijetora, então a sua inversa é $f^{-1}:[-1,1]\to[0,\pi]$ tal que $f^{-1}(x)=\arccos x$. Assim, temos: $y=f(x)=\cos x \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)=\arccos y$.

PROPRIEDADE FUNDAMENTAL:

$$\theta=\arccos k,\ k\in[-1,1]\Leftrightarrow \cos\theta=k \wedge \theta\in[0,\pi]$$

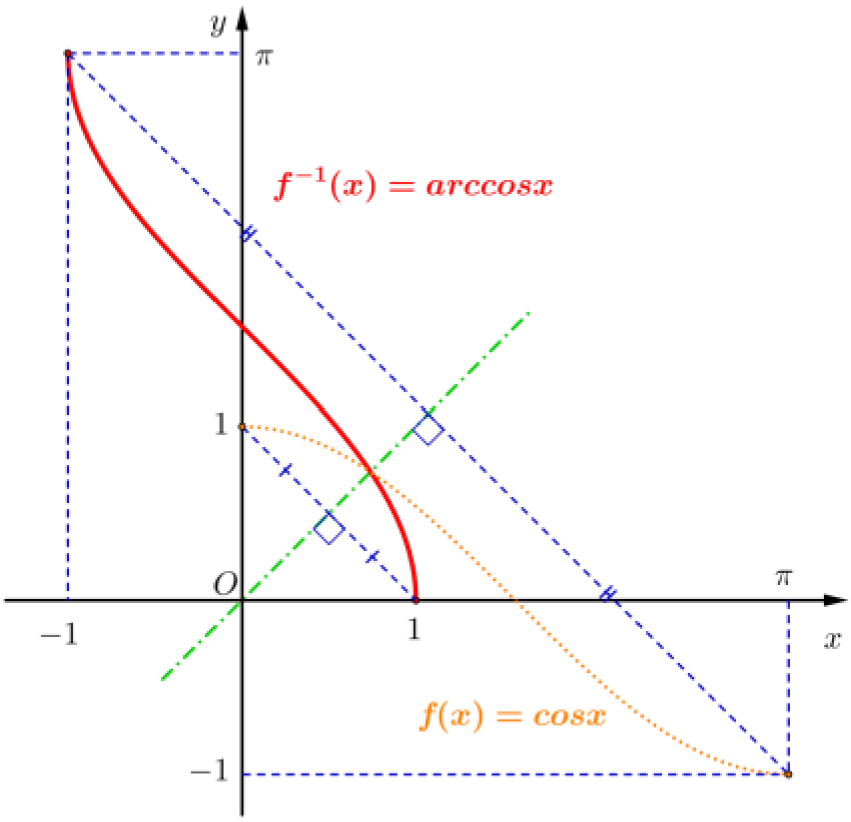
Propriedades:

$\arccos(-x)=\pi-\arccos x,\ \forall x\in[-1,1]$

$\cos(\arccos x)=x;\ \forall x\in[-1,1]$

$\arccos(\cos y)=y;\ \forall y\in[0,\pi]$

A figura seguinte mostra o gráfico da função arco cosseno.



3.3. FUNÇÃO ARCO TANGENTE

Seja $f: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{tg} x$ uma função bijetora, então a sua inversa é $f^{-1}: \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$. Assim, temos: $y = f(x) = \operatorname{tg} x \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$.

PROPRIEDADE FUNDAMENTAL:

$$\theta = \operatorname{arctg} k,\ k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta = k \ \wedge\ \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

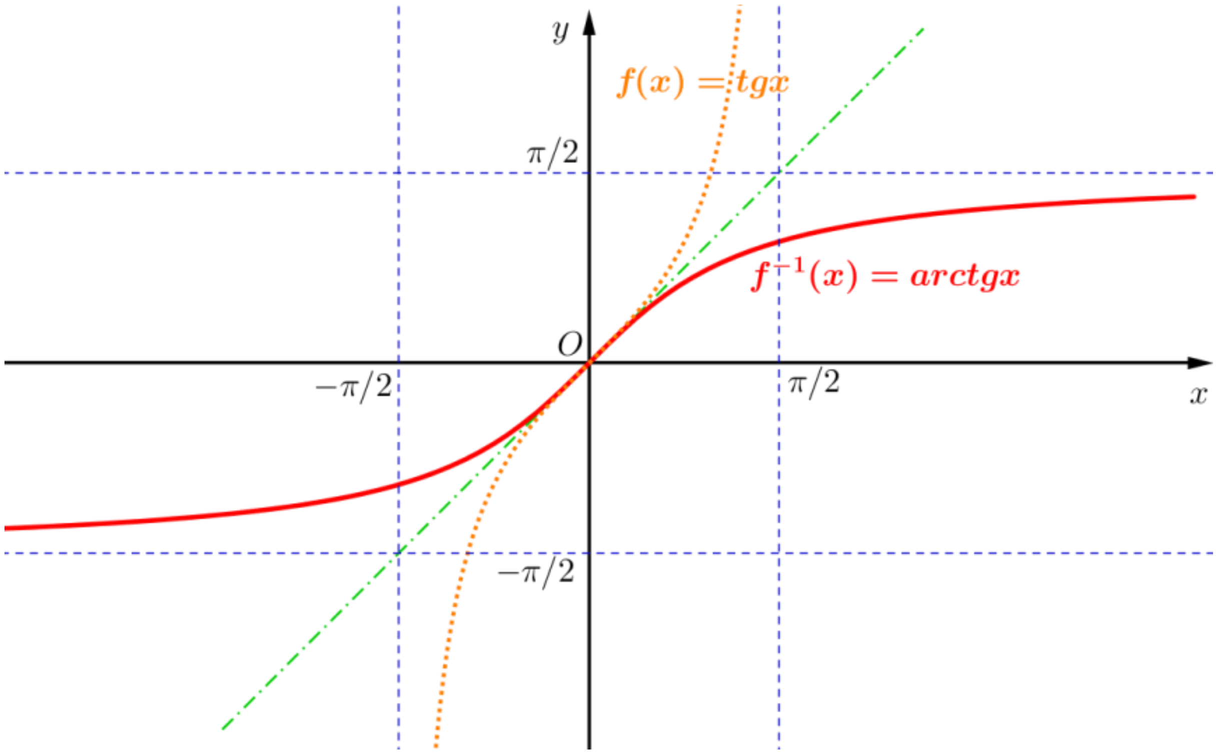
Propriedades:

$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x;\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} y) = y;\ \forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

A figura seguinte mostra o gráfico da função arco tangente.



3.4. FUNÇÃO ARCO COTANGENTE

Seja $f:]0,\pi[\to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{cotg}\, x$ uma função bijetora, então a sua inversa é $f^{-1}: \mathbb{R} \to]0,\pi[$ tal que $f^{-1}(x) = \text{arccotg}\, x$. Assim, temos: $y = f(x) = \text{cotg}\, x \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \text{arccotg}\, y$.

PROPRIEDADE FUNDAMENTAL:

$$\theta = \text{arccotg}\, k,\ k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{cotg}\, \theta = k \ \wedge\ \theta \in]0,\pi[$$

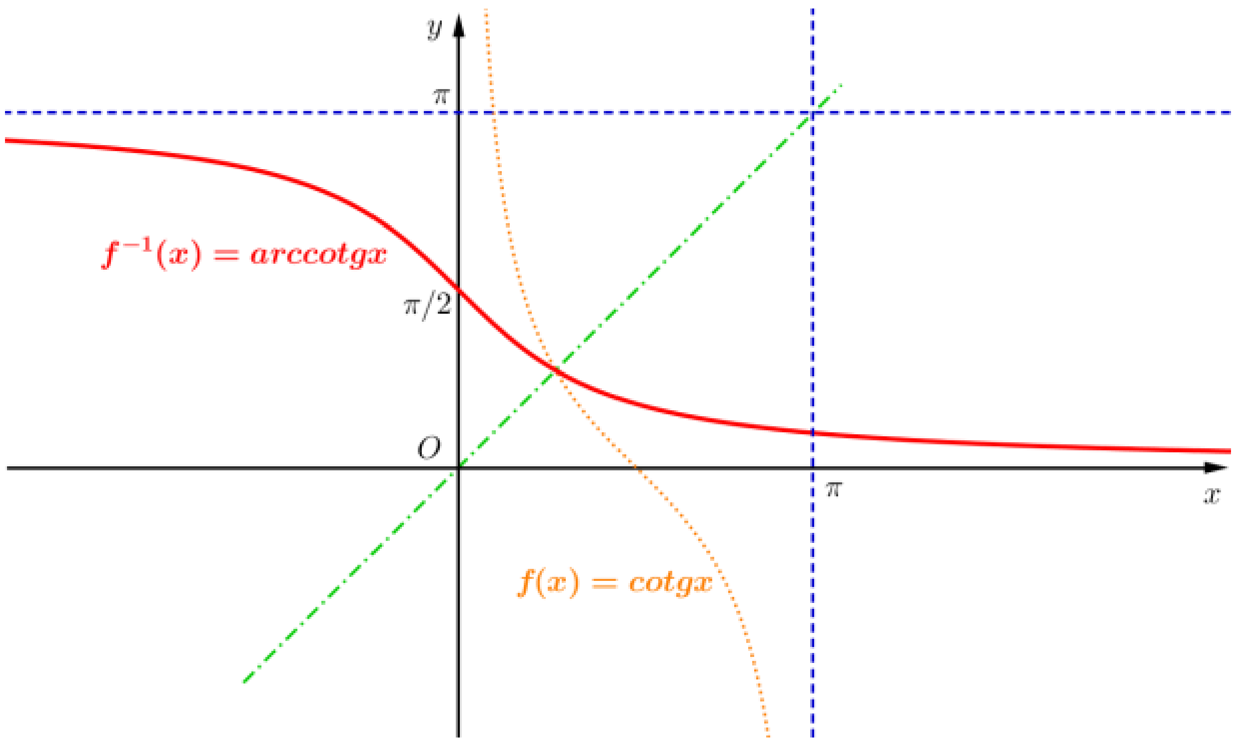
Propriedades:

$\text{arccotg}(-x) = \pi - \text{arccotg}\, x,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\text{cotg}(\text{arccotg}\, x) = x;\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\text{arccotg}(\text{cotg}\, y) = y;\ \forall y \in]0,\pi[$

A figura seguinte mostra o gráfico da função arco cotangente.



3.5. FUNÇÃO ARCO SECANTE

Seja $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]\to\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[$ tal que $f(x)=\sec x$ uma função bijetora, então a sua inversa é $f^{-1}:\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[\to\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$ tal que $f^{-1}(x)=\operatorname{arcsec} x$. Assim, temos:

$y=f(x)=\sec x\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)=\operatorname{arcsec} y$.

PROPRIEDADE FUNDAMENTAL:

$$\theta=\operatorname{arcsec} k,\ k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \sec\theta=k\ \wedge\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$$

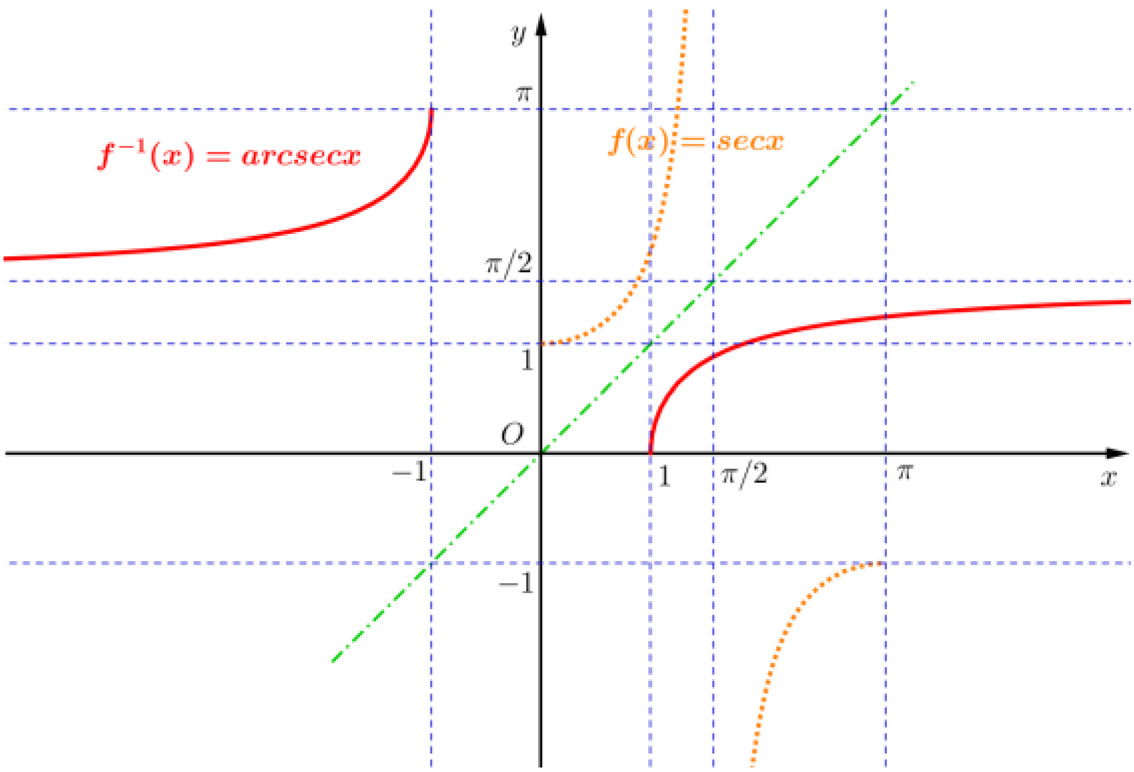
Propriedades:

$\operatorname{arcsec}(-x)=\pi-\operatorname{arcsec} x,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\sec(\operatorname{arcsec} x)=x;\ \forall x\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[$

$\operatorname{arcsec}(\sec y)=y;\ \forall y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$

A figura seguinte mostra o gráfico da função arco secante.



3.6. FUNÇÃO ARCO COSSECANTE

Seja $f:\left[-\frac{\pi}{2},0\right[\cup\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\to\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[$ tal que $f(x)=\operatorname{cossec} x$ uma função bijetora, então a sua inversa é $f^{-1}:\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[\to\left[-\frac{\pi}{2},0\right[\cup\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ tal que $f^{-1}(x)=\operatorname{arccossec} x$. Assim, temos: $y=f(x)=\operatorname{cossec} x\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)=\operatorname{arccossec} y$.

Propriedade Fundamental:

$$\boldsymbol{\theta=\operatorname{arccossec} k,\ k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \operatorname{cossec}\theta=k\ \wedge\ \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right[\cup\left]0,\frac{\pi}{2}\right]}$$

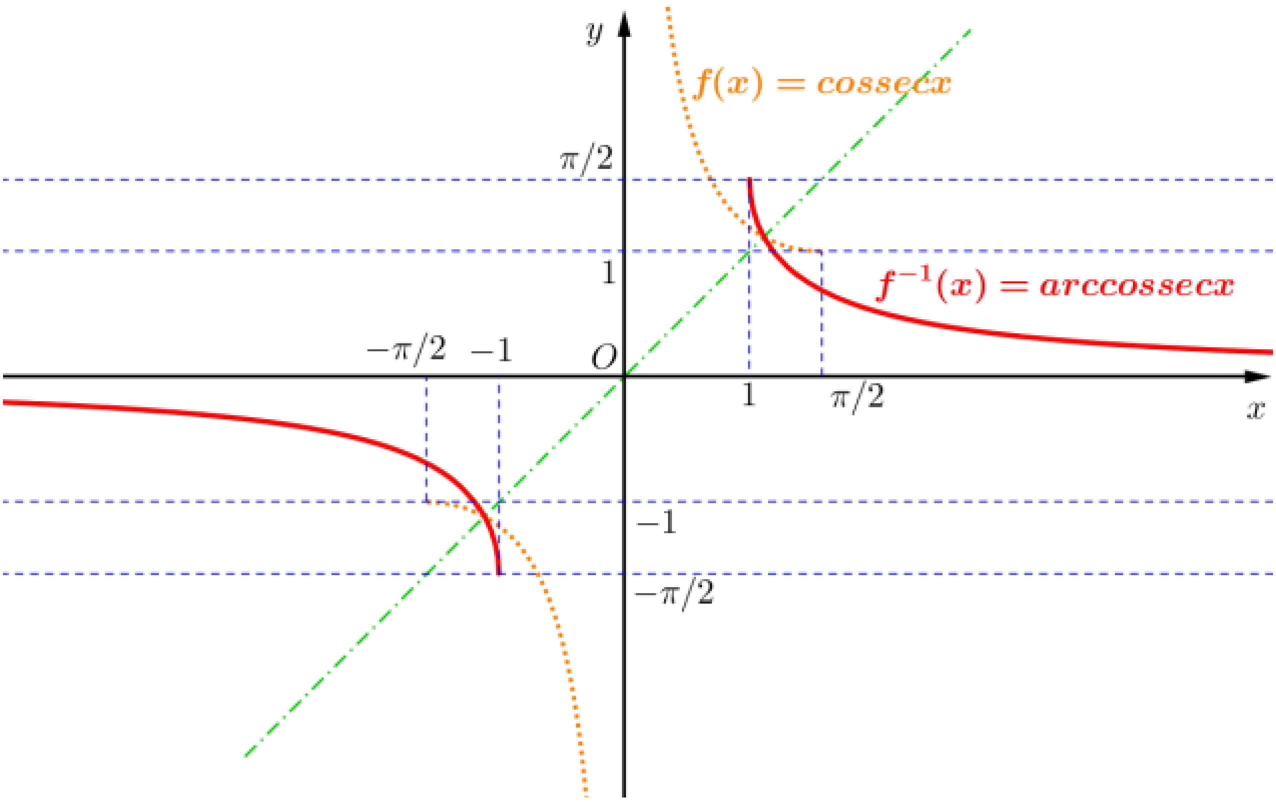
Propriedades:

$\operatorname{arccossec}(-x)=-\operatorname{arccossec} x,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\operatorname{cossec}(\operatorname{arccossec} x)=x;\ \forall x\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[$

$\operatorname{arccossec}(\operatorname{cossec} y)=y;\ \forall y\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right[\cup\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$

A figura seguinte mostra o gráfico da função arco cossecante.



3.7. OUTRAS PROPRIEDADES

$\cos(\text{arcsen}\,x)=\sqrt{1-x^2},\ \forall x\in[-1,1]$

$\text{sen}(\arccos x)=\sqrt{1-x^2},\ \forall x\in[-1,1]$

$\text{arcsen}\,x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\ \forall x\in[-1,1]$

$\text{arctg}\,x+\text{arccotg}\,x=\frac{\pi}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\text{arcsec}\,x+\text{arccossec}\,x=\frac{\pi}{2},\ \forall x\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[$

$\text{arcsen}\,x=\text{arccossec}\left(\frac{1}{x}\right);\ \forall x\in[-1,1]-\{0\}$

$\arccos x=\text{arcsec}\left(\frac{1}{x}\right);\ \forall x\in[-1,1]-\{0\}$

$\text{arctg}\,x=\text{arccotg}\left(\frac{1}{x}\right);\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*$

$\text{arctg}\,x=\text{arccotg}\left(\frac{1}{x}\right)-\pi;\ \forall x\in\mathbb{R}_-^*$

3.8. QUADRO RESUMO

FUNÇÃO INVERSA	DOMÍNIO	IMAGEM
$y=\text{arcsen}\,x$	$x\in[-1,1]$	$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$	$y\in[0,\pi]$
$y=\text{arctg}\,x$	$x\in\mathbb{R}$	$y\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
$y=\text{arccotg}\,x$	$x\in\mathbb{R}$	$y\in\left]0,\pi\right[$
$y=\text{arcsec}\,x$	$x\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[$	$y\in[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
$y=\text{arccossec}\,x$	$x\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[$	$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$

Exemplo: Calcule o valor das expressões a seguir:

a) $\text{arcsen}\frac{1}{2}$ b) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\text{arctg}\sqrt{3}$ d) $\text{arccotg}1$ e) $\text{arcsec}2$

f) $\text{arccossec}\frac{2\sqrt{3}}{3}$ g) $\text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$ h) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ i) $\text{arctg}(-1)$ j) $\text{arccotg}\left(-\sqrt{3}\right)$

RESOLUÇÃO:

a) $\text{arcsen}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$

b) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$

c) $\text{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$

d) $\text{arccotg}1=\frac{\pi}{4}$

e) $\text{arcsec}2=\frac{\pi}{3}$

f) $\text{arccossec}\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3}$

g) $\text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$

h) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$

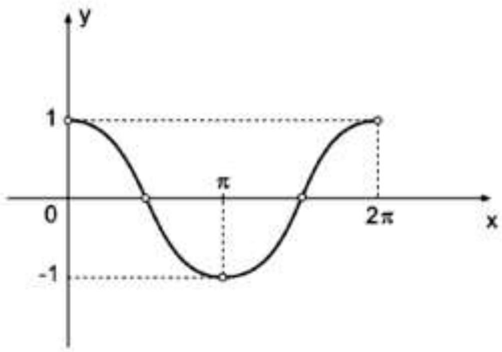
i) $\text{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$

j) $\text{arccotg}\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{5\pi}{6}$

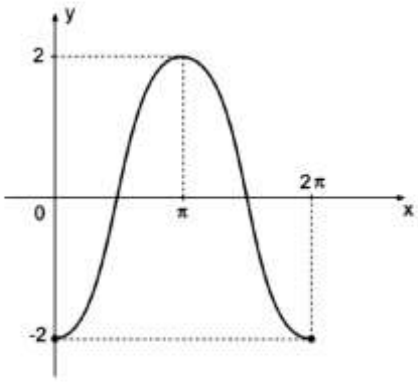
EXERCÍCIOS DE COMBATE

1. (EPCAr 3A 2008) Resguardado seu respectivo domínio, o gráfico que representa um período da função f definida por $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\cdot\cos(\pi-x)}{2\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)\cdot\operatorname{cotg}(\pi+x)}$ é

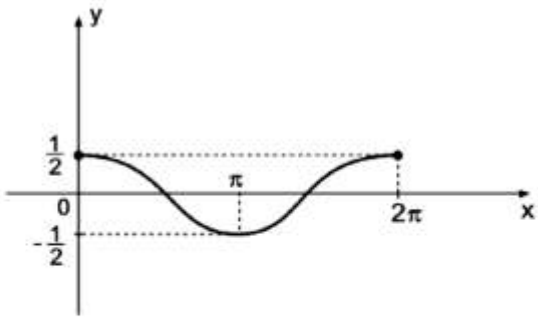
a)



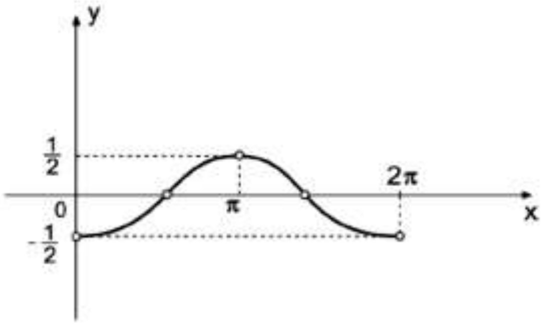
b)



c)

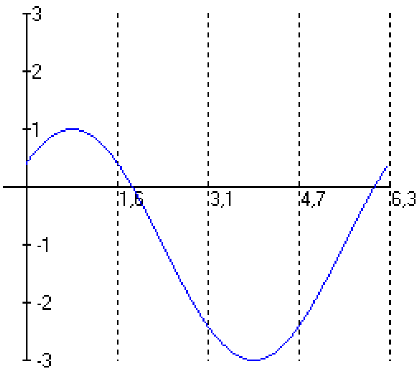


d)

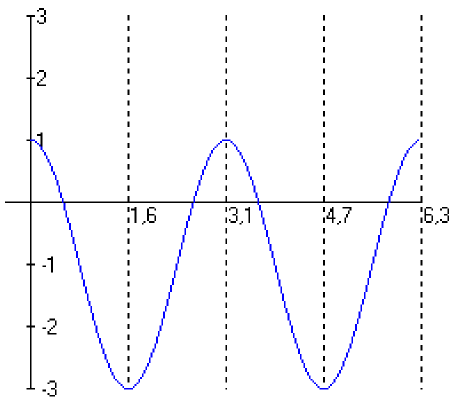


2. Assinale a alternativa cujo gráfico pode representar a função $f(x)=2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1$

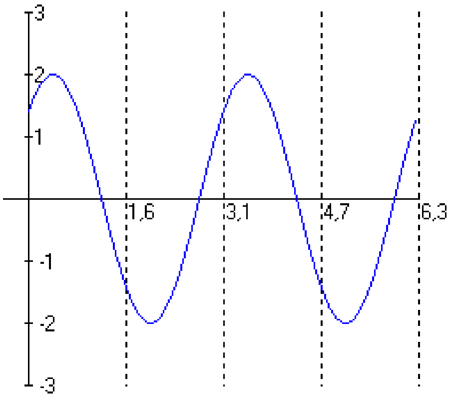
a)



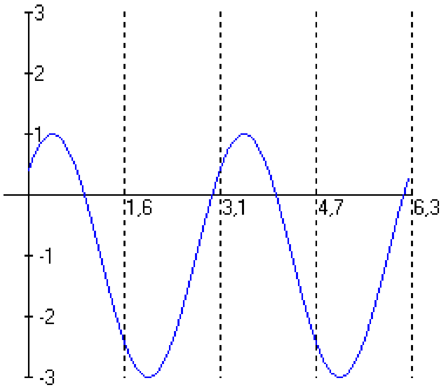
b)



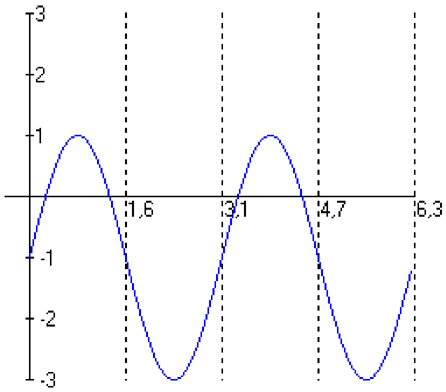
c)



d)



e)



3. (ITA 2008) O conjunto imagem e o período de $f(x)=2\text{sen}^2(3x)+\text{sen}(6x)-1$ são, respectivamente,

a) $[-3,3]$ e 2π

b) $[-2,2]$ e $\frac{2\pi}{3}$

c) $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$ e $\frac{\pi}{3}$

d) $[-1,3]$ e $\frac{\pi}{3}$

e) $[-1,3]$ e $\frac{2\pi}{3}$

4. (ITA 1998) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função definida por $f(x)=2\text{sen}2x-\cos 2x$. Então:

a) f é ímpar e periódica de período π.

b) f é par e periódica de período $\pi/2$.

c) f não é par nem ímpar e é periódica de período π.

d) f não é par e é periódica de período $\pi/4$

e) f não é ímpar e não é periódica.

5. (ITA 2006) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\sqrt{77}\,\text{sen}\left[5\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]$ e seja B o conjunto dado por $B=\{x\in\mathbb{R}:f(x)=0\}$. Se m é o maior elemento de $B\cap(-\infty,0)$ e n é o menor elemento de $B\cap(0,+\infty)$, então $m+n$ é igual a

a) $\frac{2\pi}{15}$

b) $\frac{\pi}{15}$

c) $-\frac{\pi}{30}$

d) $-\frac{\pi}{15}$

e) $-\frac{2\pi}{15}$

6. (ITA 2000) Considere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2\,\text{sen}\,3x-\cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right)$. Sobre f podemos afirmar que:

a) é uma função par.

b) é uma função ímpar e periódica de período fundamental 4π.

c) é uma função ímpar e periódica de período fundamental $4\pi/3$.

d) é uma função periódica de período fundamental 2π.

e) não é par, não é ímpar e não é periódica.

7. (AFA 2015) Considere as funções reais f e g definidas por $f(x)=\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}2 & \cos(2x)\\ 2\,\text{sen}(2x) & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$, $g(x)=\frac{1}{2}-f(x)$ e marque a alternativa INCORRETA.

a) O conjunto imagem da função f é o intervalo $[0,1]$.

b) A função g é ímpar.

c) A função real h definida por $h(x)=-\frac{1}{2}+g(x)$ possui duas raízes no intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

d) O período da função real j definida por $j(x)=\left|-\frac{1}{2}+g(x)\right|$ é $\frac{\pi}{2}$.

8. (AFA 2014) Sejam f e g funções reais dadas por $f(x)=\left|\frac{\text{sen}2x}{\cos x}\right|$ e $g(x)=2$, cada uma definida no seu domínio mais amplo possível.

Analise as afirmações abaixo.

I. O conjunto solução da equação $f(x)=g(x)$ contém infinitos elementos.

II. No intervalo $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$, a função f é crescente.

III. O período da função f é $p=\pi$.

Sobre as afirmações é correto afirmar que

a) apenas III é verdadeira.

b) apenas I e II são verdadeiras.

c) todas são falsas.

d) apenas II e III são verdadeiras.

9. (AFA 2013) Uma piscina com ondas artificiais foi programada de modo que a altura da onda varie com o tempo de acordo com o modelo $f(x)=3\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi x}{4}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ em que $y=f(x)$ é a altura da onda, em metros, e x o tempo, em minutos.

Dentre as alternativas que seguem, assinale a única cuja conclusão **NÃO** condiz com o modelo proposto.

a) A altura de uma onda nunca atinge 2 metros.

b) Entre o momento de detecção de uma crista (altura máxima de uma onda) e o de outra seguinte, passam-se 2 minutos.

c) De zero a 4 minutos, podem ser observadas mais de duas cristas.

d) As alturas das ondas observadas com 30, 90, 150, ... segundos são sempre iguais.

10. (AFA 2013) Sejam as funções reais f, g e h definidas por $f(x)=\frac{\text{sen}x}{\text{cossec}x}+\frac{\cos x}{\sec x}$, $g(x)=|\sec x|$ e $h(x)=|\text{cossec}x|$, nos seus domínios mais amplos contidos no intervalo $[0,2\pi]$.

A(s) quantidade(s) de interseção(ões) dos gráficos de f e g; f e h; g e h é(são), respectivamente

a) 0, 0 e 4

b) 3, 1 e 4

c) 2, 3 e 4

d) 0, 2 e 3

11. (AFA 2012) Considere A o conjunto mais amplo possível na função real $f: A \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cossec} x} + \frac{\cos x}{\sec x}$. Sobre a função f é correto afirmar que

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) é periódica com período igual a π.

c) é decrescente se $x \in \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) é ímpar.

12. (AFA 2011) O período da função real **f** definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x}{\cos 3x + \cos x}$ é igual a

a) 2π

b) π

c) $\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{2}$

13. (AFA 2010) Sobre a função real f definida por $f(x) = -1 - |6(\operatorname{sen} x)(\cos x)|$, é **INCORRETO** afirmar que:

a) $\operatorname{Im}(f) = [-1, 2]$.

b) é decrescente para todo $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

c) possui 8 raízes no intervalo $[0, 2\pi]$.

d) tem período igual ao período da função real g dada por $g(x) = 2f(x)$.

14. (AFA 2009) Considere a função real $f: A \to [1,3]$ definida por $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$. Sabendo-se que a função f é inversível, é correto afirmar que um possível intervalo para o conjunto A é

a) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right]$

b) $\left[\frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right]$

c) $\left[\frac{4\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}\right]$

d) $\left[\frac{7\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}\right]$

15. (AFA 2009) Em relação à função real f definida por $f(x) = \left|1 - 8\operatorname{sen}^2(2x)\cos^2(2x)\right| - 2$ é **INCORRETO** afirmar que

a) $\operatorname{Im}(f) = [-2, -1]$

b) tem seu valor mínimo como imagem de algum $x \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right]$.

c) seu período é igual a $\frac{\pi}{8}$.

d) é estritamente crescente em $\left[\frac{\pi}{16}, \frac{3\pi}{16}\right]$.

16. (EFOMM 2012) O gráfico da função $f(x) = \left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right) - \frac{\pi}{5}\right] \cdot \left[-x - \frac{\pi}{7}\right]$ intercepta o eixo x nos pontos de coordenadas:

a) $\left(-\frac{\pi}{7}, 0\right)$ e $\left(\frac{\pi}{5}, 0\right)$

b) $\left(-\frac{\pi}{7}, 0\right)$ e $\left(-\frac{\pi}{5}, 0\right)$

c) $\left(\frac{\pi}{7}, 0\right)$ e $\left(-\frac{\pi}{5}, 0\right)$

d) $\left(0, -\frac{\pi}{7}\right)$ e $\left(0, \frac{\pi}{5}\right)$

e) $\left(0,\frac{\pi}{7}\right)$ e $\left(0,-\frac{\pi}{5}\right)$

17. (EsPCEx 2015) A população de peixes em uma lagoa varia conforme o regime de chuvas da região. Ela cresce no período chuvoso e decresce no período de estiagem. Esta população é descrita pela expressão $P(t)=10^3\left(\cos\left(\left(\frac{t-2}{6}\right)\pi\right)+5\right)$ em que o tempo t é medido em meses. É correto afirmar que

a) o período chuvoso corresponde a seis meses do ano.

b) a população atinge seu máximo em $t=6$.

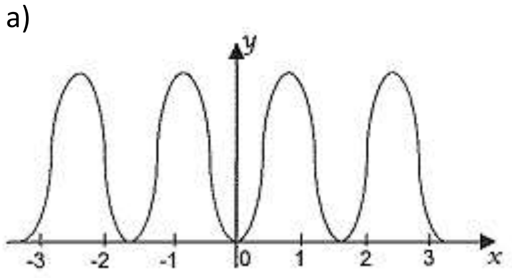
c) o período de seca corresponde a 4 meses do ano.

d) a população média anual é de 6.000 animais.

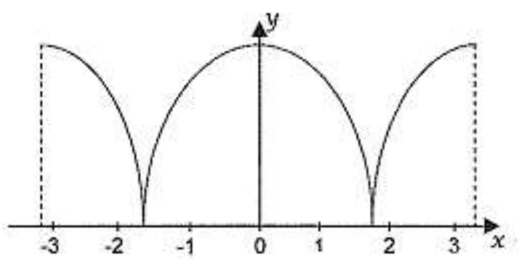
e) a população atinde seu mínimo em $t=4$ com 6.000 animais.

18. (EN 2015) Sejam A a matriz quadrada de ordem 2 definida por $A=\begin{bmatrix} 2\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right) & \cos(x+\pi) \\ \cos x & 1 \end{bmatrix}$ e f a função real tal que $f(x)=\left|\det\left(A+A^T\right)\right|$, onde A^T representa a matriz transposta de A. O gráfico que melhor representa a função $y=f(x)$ no intervalo $-\pi\le x\le\pi$ é

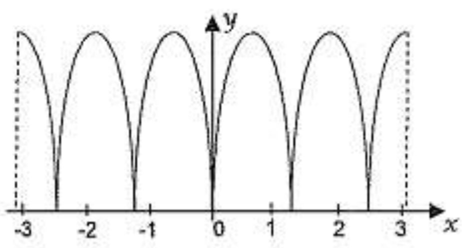
a)



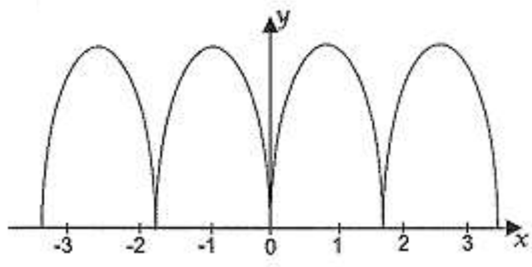
b)



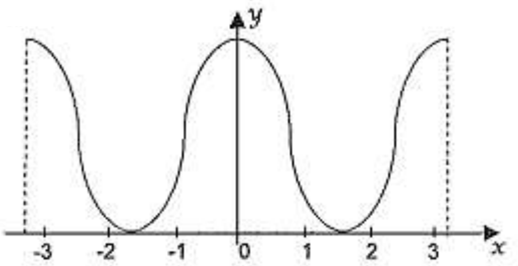
c)



d)



e)



19. (EN 2014) Considerando que a função $f(x)=\cos x$, $0\le x\le \pi$, é inversível, o valor de $\text{tg}\left(\arccos\frac{2}{5}\right)$ é

a) $-\frac{\sqrt{21}}{5}$

b) $-\frac{4}{25}$

c) $-\frac{\sqrt{21}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{21}}{25}$

e) $\frac{\sqrt{21}}{2}$

20. (EN 2013) Qual o valor da expressão $\sqrt{\text{cossec}^2\,\pi x+\text{cotg}\frac{\pi x}{2}+2}$, onde x é a solução da equação trigonométrica $\text{arctg}\,x+\text{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right)=\frac{\pi}{4}$ definida no conjunto $\mathbb{R}-\{-1\}$?

a) $\sqrt{3}$

b) -1

c) $\frac{6+\sqrt{2}}{2}$

d) 2

e) $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$

21. O valor de $\text{arcsen}(1/3)+\text{arcsen}(3/4)$ é:

a) $\text{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{7}-6\sqrt{2}}{12}\right)$

b) $\text{arccos}\left(\dfrac{\sqrt{7}+6\sqrt{2}}{12}\right)$

c) 120º

d) $\text{arcsen}\left(\dfrac{2\sqrt{14}-3}{12}\right)$

e) $\text{arccos}\left(\dfrac{2\sqrt{14}-3}{12}\right)$

22. O valor de $\text{arcsen}(2/3)+\text{arcsen}(3/4)$ é:

a) $\text{arcsen}\left(\dfrac{2\sqrt{7}+3\sqrt{5}}{12}\right)$

b) $\text{arccos}\left(\dfrac{2\sqrt{7}+3\sqrt{5}}{12}\right)$

c) 150º

d) $\text{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{35}-6}{12}\right)$

e) $\text{arccos}\left(\dfrac{\sqrt{35}-6}{12}\right)$

23. Qual o valor de $\text{arcsen}\left(\text{sen}2000^\circ\right)$?

a) 2000°

b) $\dfrac{100\pi}{9}$

c) $\dfrac{17\pi}{9}$

d) $\dfrac{\pi}{9}$

e) $-\dfrac{\pi}{9}$

24. Resolva a equação $\text{arcsen}(x\sqrt{3}) = \text{arcsen}(2x) - \text{arcsen}(x)$.

25. A soma das soluções da equação $\text{arctg}\frac{x}{2} - \text{arctg}\frac{x}{3} = \text{arctg}\frac{1}{5}$ é:

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

e) 8

26. (IME 2010) O valor da expressão $y = \text{sen}\left[\text{arcsen}\left(a^2 - 1\right) + \text{arccos}\left(a^2 - 1\right)\right]$, onde a é um número real e $a \in (-1,0)$, é:

a) –1

b) 0

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) 1

27. (IME 2001) Calcule o valor exato de: $\text{sen}\left[2\text{arccotg}\left(\frac{4}{3}\right)\right] + \cos\left[2\text{arccossec}\left(\frac{5}{4}\right)\right]$.

GABARITO

1.

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cdot\cos(\pi-x)}{2\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cdot\operatorname{cotg}(\pi+x)}=\frac{\cos x\cdot(-\cos x)}{2\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{cotg}x}=-\frac{1}{2}\cos x$$

O gráfico da alternativa d é o que corresponde à multiplicação da cossenoide em $[0,2\pi]$ por $-\frac{1}{2}$.

RESPOSTA: D

2. A função tem imagem $[-3,1]$, período $P=\frac{2\pi}{2}=\pi$ e está deslocado $2x-\frac{\pi}{4}=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}$ unidades para a direita. Logo, o gráfico correto é o da alternativa d).

RESPOSTA: D

3.

$$f(x)=2\operatorname{sen}^2(3x)+\operatorname{sen}(6x)-1=\operatorname{sen}(6x)-\cos(6x)=\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(6x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Logo, o conjunto imagem é dado por $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$ e o período é dado por $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$.

RESPOSTA: C

4.

$$f(x)=2\operatorname{sen}2x-\cos 2x=\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{sen}2x-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2x\right)$$

Seja θ tal que $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ e $\operatorname{sen}\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, então

$$f(x)=\sqrt{5}(\operatorname{sen}2x\cos\theta-\operatorname{sen}\theta\cos 2x)=\sqrt{5}\operatorname{sen}(2x-\theta)$$

Análise da paridade:

$$f\left(-\frac{\theta}{2}\right)=\sqrt{5}\operatorname{sen}\left(2\left(-\frac{\theta}{2}\right)-\theta\right)=\sqrt{5}\operatorname{sen}(-2\theta)=-\sqrt{5}\operatorname{sen}2\theta$$

$$f\left(\frac{\theta}{2}\right)=\sqrt{5}\operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{\theta}{2}-\theta\right)=\sqrt{5}\operatorname{sen}(0)=0$$

Como $\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5} \neq 0$, então $f\left(-\frac{\theta}{2}\right) \neq f\left(\frac{\theta}{2}\right)$ e $f\left(-\frac{\theta}{2}\right) \neq -f\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Logo, f não é par e nem ímpar.

Cálculo do período: $P = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

RESPOSTA: C

5.

$$f(x) = \sqrt{77}\operatorname{sen}\left[5\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right] = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(5x+\frac{5\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow 5x+\frac{5\pi}{6} = k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{5}, k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow B = \{x\in\mathbb{R} : f(x)=0\} = \left\{x\in\mathbb{R} : x = -\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{5}, k\in\mathbb{Z}\right\}$$

O maior elemento de $B\cap(-\infty,0)$ ocorre quando $k=0$, então $m = -\frac{\pi}{6}$.

O menor elemento de $B\cap(0,+\infty)$ ocorre quando $k=1$, então $n = -\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{30}$.

$$\Rightarrow m+n = -\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{30} = -\frac{4\pi}{30} = -\frac{2\pi}{15}.$$

RESPOSTA: E

6.

$$f(x) = 2\operatorname{sen}3x - \cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right) = 2\operatorname{sen}3x - \cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right) = 2\operatorname{sen}3x - \operatorname{sen}\frac{x}{2}$$

Análise da paridade:

$$f(-x) = 2\operatorname{sen}(-3x) - \operatorname{sen}\left(-\frac{x}{2}\right) = -2\operatorname{sen}3x + \operatorname{sen}\frac{x}{2} = -\left(2\operatorname{sen}3x - \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right) = -f(x)$$

Logo, f é uma função ímpar.

É possível chegar a essa mesma conclusão a partir do fato de f ser uma diferença de duas funções ímpares, que também é uma função ímpar.

Obtenção do período:

O período de $2\operatorname{sen}3x$ é $\frac{2\pi}{3}$; e o período de $-\operatorname{sen}\frac{x}{2}$ é $\frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$. Como $\frac{2\pi}{3}\cdot 6 = 4\pi\cdot 1$ e $\operatorname{mdc}(6,1) = 1$, então o período de $f(x) = 2\operatorname{sen}3x - \operatorname{sen}\frac{x}{2}$ é 4π.

RESPOSTA: B

7.

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 2 & \cos(2x) \\ 2\text{sen}(2x) & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\cdot(1-2\text{sen}(2x)\cos(2x))=\frac{1}{2}\cdot(1-\text{sen}(4x))$$

$g(x)=\frac{1}{2}-f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot(1-\text{sen}(4x))=\frac{\text{sen}(4x)}{2}$ que é um função ímpar.

a) CORRETA:

$$-1\le\text{sen}(4x)\le 1\Leftrightarrow -1\le-\text{sen}(4x)\le 1\Leftrightarrow 0\le 1-\text{sen}(4x)\le 2$$

$$\Leftrightarrow 0\le\frac{1}{2}\cdot(1-\text{sen}(4x))\le 1\Rightarrow \text{Im}(f)=[0,1]$$

b) CORRETA: $g(-x)=\frac{\text{sen}(4(-x))}{2}=\frac{\text{sen}(-4x)}{2}=\frac{-\text{sen}(4x)}{2}=-g(x)$, o que implica que g é uma função ímpar

c) INCORRETA:

$$h(x)=-\frac{1}{2}+g(x)=-\frac{1}{2}+\frac{\text{sen}(4x)}{2}=0\Leftrightarrow \text{sen}(4x)=1\Leftrightarrow 4x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$$

Se $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow S=\left\{\frac{\pi}{8}\right\}$, ou seja, há apenas uma raiz nesse intervalo.

d) CORRETA:

$$j(x)=\left|-\frac{1}{2}+g(x)\right|=\left|-\frac{1}{2}+\frac{\text{sen}(4x)}{2}\right|$$

$$-1\le\frac{-1+\text{sen}(4x)}{2}\le 0\Rightarrow j(x)=\frac{1}{2}-\frac{\text{sen}(4x)}{2}$$

Assim, o período de j é $P=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

RESPOSTA: C

8.

$f(x)=\left|\frac{\text{sen}2x}{\cos x}\right|=\left|\frac{2\text{sen}x\cos x}{\cos x}\right|=2|\text{sen}x|$, com $\cos x\ne 0\Leftrightarrow x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

I) FALSA

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow |2\operatorname{sen}x|=2\Leftrightarrow |\operatorname{sen}x|=1\Leftrightarrow \operatorname{sen}x=\pm 1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Mas essas soluções não pertencem ao domínio de f, logo $S=\varnothing$.

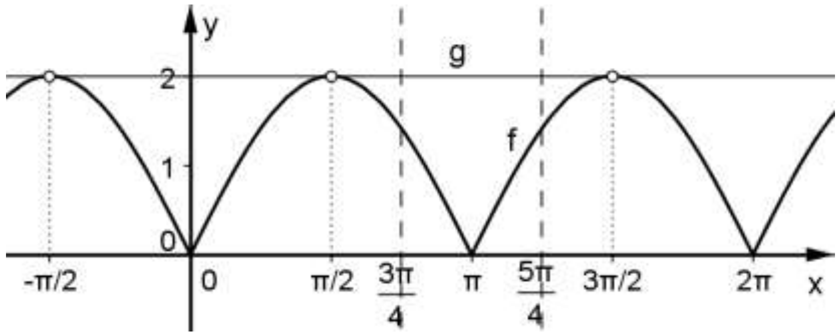
II) FALSA

Contraexemplo: $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\left|2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right|=\sqrt{2}$ e $f(\pi)=|2\operatorname{sen}\pi|=0$, ou seja, $\frac{3\pi}{4}<\pi$ e $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)>f(0)$.

III) VERDADEIRA

O período de $f(x)=|2\operatorname{sen}x|$ é $p=\pi$.

A seguir encontra-se um esboço do gráfico das duas funções, onde podem ser observados os pontos de descontinuidade de f, o seu comportamento no intervalo $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ e o seu período.



RESPOSTA: A

9.

$$f(x)=3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi x}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)=3\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{\pi x}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{3}{2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1-\cos(\pi x)}{2}=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\cdot\cos(\pi x)$$

Como a função $\operatorname{sen}x$ tem imagem $[-1,1]$, então a imagem de $f(x)=\frac{3}{2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ é $\left[0,\frac{3}{2}\right]$.

O período de $f(x)=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\cdot\cos(\pi x)$ é $\frac{2\pi}{\pi}=2$ (minutos).

a) CORRETA, pois o valor máximo de f é $\frac{3}{2}=1,5$.

b) CORRETA, pois o período de f é 2.

c) INCORRETA, pois o período de f é 2 e $f(0)=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\cos(\pi\cdot 0)=0$ não é uma crista.

d) CORRETA, pois o período de f é $2\min = 60\text{ s}$.

RESPOSTA: C

10. O domínio de $f(x)=\frac{\text{sen}x}{\text{cossec}x}+\frac{\cos x}{\sec x}$ é tal que $x\neq\frac{k\pi}{2}$, onde $k\in\mathbb{Z}$, que limitado a $[0,2\pi]$ resulta $D_f=[0,2\pi]-\left\{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi\right\}$.

$$f(x)=\frac{\text{sen}x}{\text{cossec}x}+\frac{\cos x}{\sec x}=\frac{\text{sen}x}{1/\text{sen}x}+\frac{\cos x}{1/\cos x}=\text{sen}^2 x+\cos^2 x=1$$

O domínio de $g(x)=|\sec x|$ é tal que $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, onde $k\in\mathbb{Z}$, que limitado a $[0,2\pi]$ resulta $D_g=[0,2\pi]-\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\}$. A imagem da função $g(x)=|\sec x|$ é $\text{Im}_g=[1,+\infty[$ e ela assume o valor 1 em $\{0,\pi,2\pi\}$.

O domínio de $h(x)=|\text{cossec}x|$ é tal que $x\neq k\pi$, onde $k\in\mathbb{Z}$, que limitado a $[0,2\pi]$ resulta $D_h=[0,2\pi]-\{0,\pi,2\pi\}$. A imagem da função $h(x)=|\text{cossec}x|$ é $\text{Im}_g=[1,+\infty[$ e ela assume o valor 1 em $\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\}$.

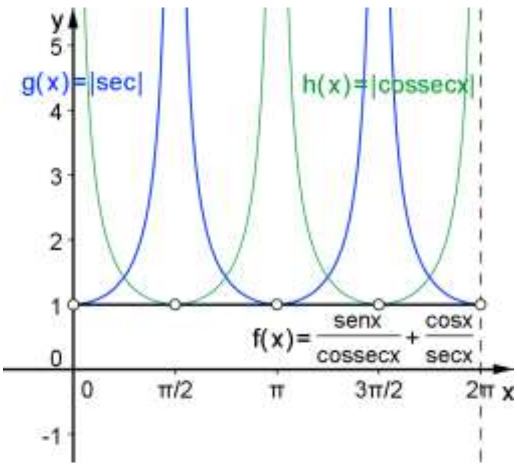
Como os pontos em que g e h assumem o valor 1 não estão no domínio de f não há pontos de interseção entre f e g, e nem entre f e h.

Os pontos de interseção entre g e h são dados por:

$$|\sec x|=|\text{cossec}x|\Leftrightarrow\left|\frac{1}{\cos x}\right|=\left|\frac{1}{\text{sen}x}\right|\Leftrightarrow\left|\frac{\text{sen}x}{\cos x}\right|=1\Leftrightarrow|\text{tg}x|=1\Leftrightarrow\text{tg}x=\pm1\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}$$

Logo, há 4 pontos de interseção entre g e h.

Observe o gráfico a seguir representativo das três funções.



RESPOSTA: A

11. O domínio da função $\text{cossec}\,x$ é dado por $\text{sen}\,x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

O domínio da função $\sec x$ é dado por $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Além das restrições anteriores, o domínio de $f(x) = \frac{\text{sen}\,x}{\text{cossec}\,x} + \frac{\cos x}{\sec x}$ deve satisfazer $\text{cossec}\,x \neq 0$ e $\sec x \neq 0$, o que ocorre sempre que essas funções estão definidas.

Assim, $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Para $x \in A$, temos: $f(x) = \frac{\text{sen}\,x}{\text{cossec}\,x} + \frac{\cos x}{\sec x} = \frac{\text{sen}\,x}{1/\text{sen}\,x} + \frac{\cos x}{1/\cos x} = \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

Logo, a função f é constante e, portanto, não é periódica de período π, não é decrescente em nenhum intervalo e não é ímpar.

RESPOSTA: A

12.

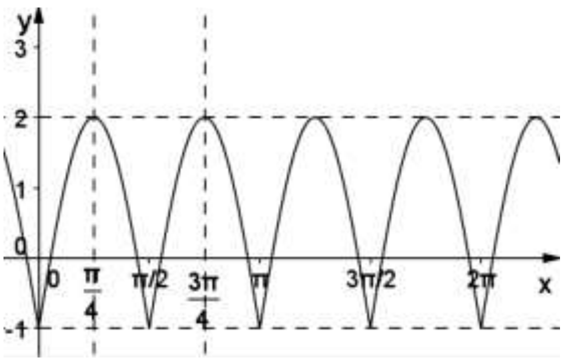
$$f(x) = \frac{\text{sen}3x + \text{sen}\,x}{\cos 3x + \cos x} = \frac{2\,\text{sen}2x\cos x}{2\cos 2x \cos x} = \text{tg}2x$$

Como o período da função $\text{tg}x$ é π, segue que o período da função $f(x)$ é $\frac{\pi}{2}$.

RESPOSTA: D

13.

$$f(x) = -1 + |6(\text{sen}\,x)(\cos x)| = -1 + 3|\text{sen}2x|$$



a) CORRETA: $\text{Im}(f) = [-1, 2]$

b) INCORRETA: $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow f(x)$ é decrescente em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ e crescente de $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

c) CORRETA: há 8 raízes em $[0,2\pi]$.

d) CORRETA: O período de f(x) é $\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$. O período de $g(x)=2f(x)$ é o mesmo de f, pois a multiplicação por 2 somente altera a amplitude da senoide, não afetando o seu período.

RESPOSTA: B

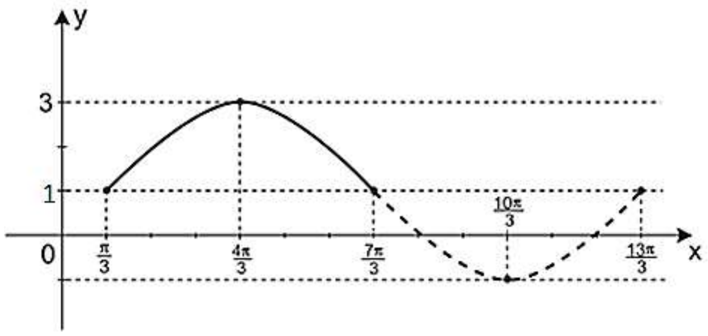
14.

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & \text{sen}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right) \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1+2\text{sen}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$

A função $f:A\to[1,3]$ é se, e somente se, a função $g(x)=\text{sen}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$ for bijetora de A em $[0,1]$.

Como a função seno é bijetora de $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ em [0,1], o conjunto A pode ser o conjunto-solução de $\frac{\pi}{2}\le\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\le\pi\Leftrightarrow\frac{4\pi}{3}\le x\le\frac{7\pi}{3}$.

Observe a seguir o gráfico da função f:



RESPOSTA: B

15.

$$f(x)=\left|1-8\text{sen}^2(2x)\cos^2(2x)\right|-2=\left|1-2\cdot(2\text{sen}(2x)\cos(2x))^2\right|-2=\left|1-2\text{sen}^2(4x)\right|-2=\left|\cos(8x)\right|-2$$

a) CORRETO

$$\left|\cos(8x)\right|\in[0,1]\Rightarrow f(x)=\left|\cos(8x)\right|-2\in[-2,-1]\Rightarrow \text{Im}(f)=[-2,-1]$$

b) CORRETO

O valor mínimo ocorre quando $\cos 8x=0\Leftrightarrow 8x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{8}, k\in\mathbb{Z}$.

Assim, um dos valores de x para o qual a função assume seu valor mínimo é $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{16}\in\left[\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4}\right]$.

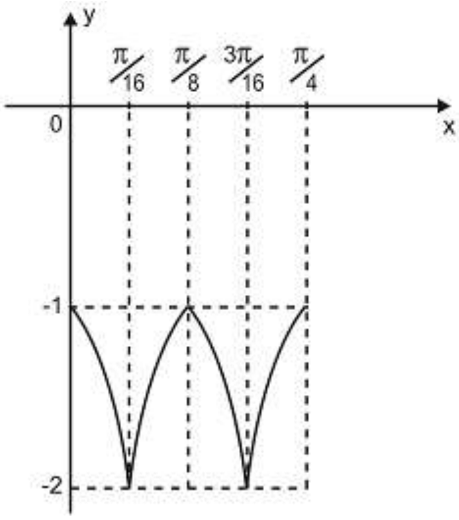
c) CORRETO

O período de $y=\cos 8x$ é $T=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$. O período de $y=|\cos 8x|$ é $T=\frac{\pi/4}{2}=\frac{\pi}{8}$.

d) INCORRETO

Como $f\left(\frac{\pi}{16}\right)=f\left(\frac{3\pi}{16}\right)=-2$, a função não pode ser estritamente crescente em $\left[\frac{\pi}{16},\frac{3\pi}{16}\right]$.

Observe a seguir o gráfico da função:



RESPOSTA: D

16.

O gráfico de $f(x)$ intercepta o eixo x quando $f(x)=0$. Assim,

$$f(x)=\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right)-\frac{\pi}{5}\right]\cdot\left[-x-\frac{\pi}{7}\right]=0\Leftrightarrow \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x))-\frac{\pi}{5}=0\ \vee\ -x-\frac{\pi}{7}=0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(x)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right)\vee x=-\frac{\pi}{7}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{5}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\ \vee x=-\frac{\pi}{7}$$

Logo, o gráfico de $f(x)$ intercepta o eixo x em infinitos pontos, dentre os quais $\left(\frac{\pi}{5},0\right)$ e $\left(-\frac{\pi}{7},0\right)$.

RESPOSTA: A

17. Restringindo o período de análise a um ano, t deve ser um número natural de 0 a 12.

A função $P(t)=10^3\left(\cos\left(\left(\frac{t-2}{6}\right)\pi\right)+5\right)$ tem período $T=\frac{2\pi}{\pi/6}=12$.

A função é simétrica em relação à reta $y=5\cdot 10^3$. Assim, a população média anual é de 5.000 animais.

A função cresce de $t=0$ a $t=2$, decresce de $t=2$ a $t=8$ e cresce de $t=8$ a $t=12$. Assim, o período chuvoso ocorre nos dois primeiros e nos quatro últimos meses do ano. De forma, que temos 6 meses chuvosos e 6 meses de seca.

A população atinge seu máximo quando

$$\cos\left(\left(\frac{t-2}{6}\right)\pi\right)=1 \Leftrightarrow \left(\frac{t-2}{6}\right)\pi=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow t=12k+2,\ k\in\mathbb{Z} \overset{0\le t\le 12}{\Rightarrow} t=2$$

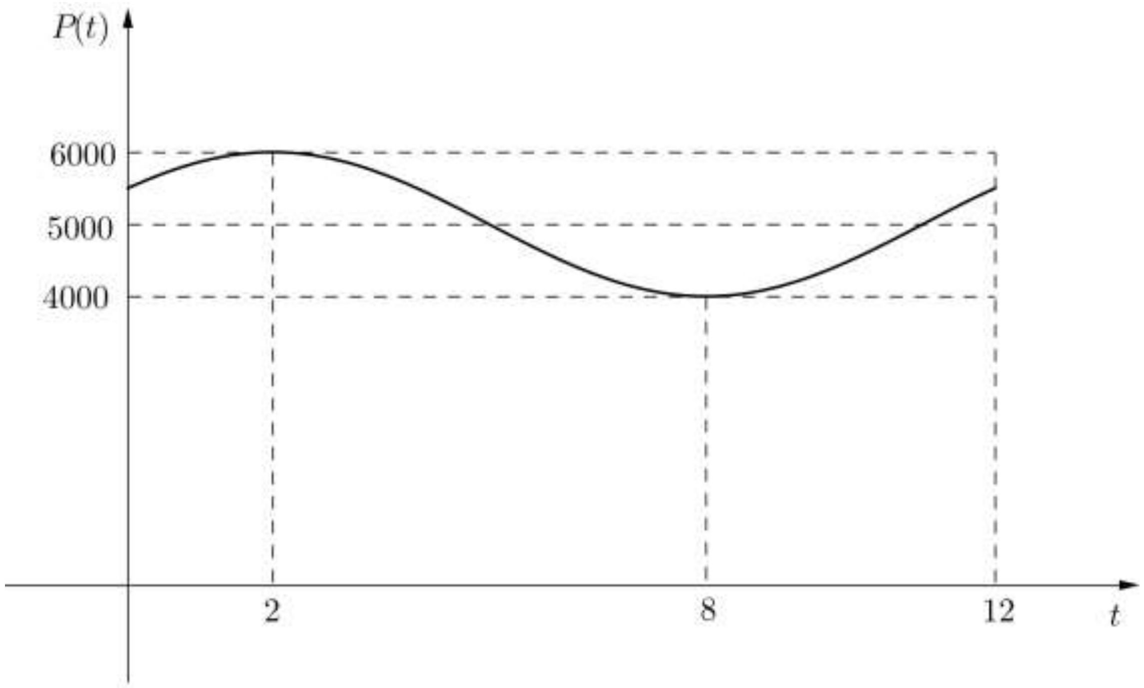
$$P(2)=10^3\left(\cos\left(\left(\frac{2-2}{6}\right)\pi\right)+5\right)=6.000$$

A população atinge seu mínimo quando

$$\cos\left(\left(\frac{t-2}{6}\right)\pi\right)=-1 \Leftrightarrow \left(\frac{t-2}{6}\right)\pi=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow t=12k+8,\ k\in\mathbb{Z} \overset{0\le t\le 12}{\Rightarrow} t=8$$

$$P(8)=10^3\left(\cos\left(\left(\frac{8-2}{6}\right)\pi\right)+5\right)=4.000$$

A seguir encontra-se o gráfico de $P(t)=10^3\left(\cos\left(\left(\frac{t-2}{6}\right)\pi\right)+5\right)$, para $0\le t\le 12$, onde é possível identificar o que foi calculado acima.



RESPOSTA: A

18.

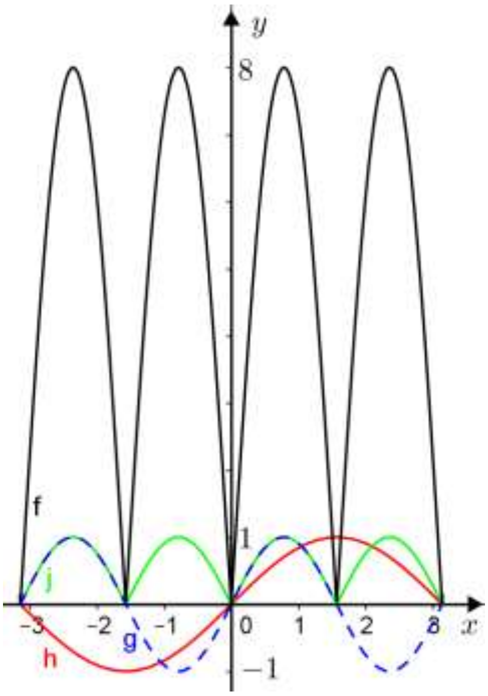
$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\text{sen}2x$$

$$\cos(x+\pi)=-\cos x$$

$$A=\begin{bmatrix} 2\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right) & \cos(x+\pi) \\ \cos x & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\text{sen}2x & -\cos x \\ \cos x & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{bmatrix} 2\text{sen}2x & \cos x \\ -\cos x & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A+A^T=\begin{bmatrix} 4\text{sen}2x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\Rightarrow f(x)=\left|\det\left(A+A^T\right)\right|=|8\text{sen}2x|$$

A função $f(x)=|8\text{sen}2x|$ tem imagem $[0,8]$ e período $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. Portanto, entre $-\pi$ e π temos dois períodos completos.



A construção do gráfico é feita sequencialmente:

1°) $h(x)=\text{sen}(x)$ (função básica)

2°) $g(x)=\text{sen}(2x)$ (reduz o período à metade)

3º) $j(x)=|\text{sen}(2x)|$ (parte negativa é espelhada para cima)

4°) $f(x)=8\cdot|\text{sen}(2x)|=|8\text{sen}(2x)|$ (imagem ampliada de $[0,1]$ para $[0,8]$)

RESPOSTA: D

19.

$$\theta=\arccos\frac{2}{5}\Leftrightarrow\cos\theta=\frac{2}{5}\ \wedge\ \theta\in[0,\pi]$$

$$\theta\in[0,\pi]\Rightarrow\text{sen}\theta\geq 0$$

$$\text{sen}\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{4}{25}}=\frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\mathrm{tg}\left(\arccos\frac{2}{5}\right)=\mathrm{tg}\,\theta=\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{21}}{5}}{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{21}}{2}$$

RESPOSTA: E

20. Sejam $\mathrm{arctg}\,x=\alpha$ e $\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right)=\beta$, então $\mathrm{tg}\,\alpha=x$, $\mathrm{tg}\,\beta=\frac{x}{x+1}$ e $\alpha,\beta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

$$\mathrm{arctg}\,x+\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right)=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}=1$$

$$\Rightarrow\frac{x+\frac{x}{x+1}}{1-x\cdot\frac{x}{x+1}}=1\Leftrightarrow\frac{x^2+2x}{x+1-x^2}=1\Leftrightarrow 2x^2+x-1=0\Leftrightarrow x=-1\vee x=\frac{1}{2}$$

Como $x+1\neq 0\Leftrightarrow x\neq -1$, então $x=\frac{1}{2}$. Logo,

$$\sqrt{\mathrm{cossec}^2\,\pi x+\mathrm{cotg}\frac{\pi x}{2}+2}=\sqrt{\mathrm{cossec}^2\frac{\pi}{2}+\mathrm{cotg}\frac{\pi}{4}+2}=\sqrt{1^2+1+2}=2.$$

RESPOSTA: D

21.

$\alpha=\mathrm{arcsen}(1/3)$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\mathrm{sen}\,\alpha=\frac{1}{3}$ e $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\beta=\mathrm{arcsen}(3/4)$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\mathrm{sen}\,\beta=\frac{3}{4}$ e $\cos\beta=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\gamma=\alpha+\beta$

$$\mathrm{sen}\,\gamma=\mathrm{sen}(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{7}+6\sqrt{2}}{12}$$

Como $0<\alpha+\beta<\pi$ é preciso identificar se γ encontra-se no 1º ou 2º quadrante. Para tanto vamos calcular o seu cosseno.

$\cos\gamma=\cos(\alpha+\beta)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{14}-3}{12}>0$ Logo, γ está no 1º quadrante e $\gamma=\arccos\left(\frac{2\sqrt{14}-3}{12}\right)$ ou $\gamma=\mathrm{arcsen}\left(\frac{\sqrt{7}+6\sqrt{2}}{12}\right)$.

Referência: Temas Selectos de Matematicas Elementales – G. Dorofeiev e outros – pg. 302

RESPOSTA: E

22.

$\alpha = \text{arcsen}(2/3)$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{2}{3}$ e $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\beta = \text{arcsen}(3/4)$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{sen}\beta = \frac{3}{4}$ e $\cos\beta = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\gamma = \alpha + \beta$

$\text{sen}\gamma = \text{sen}(\alpha + \beta) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2\sqrt{7} + 3\sqrt{5}}{12}$

Como $0 < \alpha + \beta < \pi$ é preciso identificar se γ encontra-se no 1º ou 2º quadrante. Para tanto vamos calcular o seu cosseno.

$\cos\gamma = \cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{35} - 6}{12} < 0$

Logo, γ está no 2º quadrante e $\gamma = \arccos\left(\frac{\sqrt{35} - 6}{12}\right)$

Referência: Temas Selectos de Matematicas Elementales – G. Dorofeiev e outros – pg. 302

RESPOSTA: E

23.

$2000^\circ = 11\pi + \frac{\pi}{9} \Rightarrow \text{sen}2000^\circ = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{9}\right)$

Como $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{9} < \frac{\pi}{2}$, então:

$\Rightarrow \text{arcsen}\left(\text{sen}2000^\circ\right) = \text{arcsen}\left(\text{sen}\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right) = -\frac{\pi}{9}$

Referência: Chinese Mathematics Competitions and Olympiads 1993-2001 - A. Liu – Pg. 34.

RESPOSTA: E

24.

$$\theta=\text{arcsen}\left(x\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\text{sen}\theta=x\sqrt{3}\\ \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\\ -1\le x\sqrt{3}\le 1\Leftrightarrow-\frac{\sqrt{3}}{3}\le x\le\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

$$\alpha=\text{arcsen}\left(2x\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\text{sen}\alpha=2x\\ \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\\ -1\le 2x\le 1\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}\end{cases}\quad\Rightarrow\cos\alpha\ge 0\ \text{ e }\ \cos\alpha=\sqrt{1-4x^2}$$

$$\beta=\text{arcsen}\left(x\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\text{sen}\beta=x\\ \beta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\\ -1\le x\le 1\end{cases}\quad\Rightarrow\cos\beta\ge 0\ \text{ e }\ \cos\beta=\sqrt{1-x^2}$$

$$\text{arcsen}(x\sqrt{3})=\text{arcsen}(2x)-\text{arcsen}(x)\ \Leftrightarrow\ \theta=\alpha-\beta$$

$$\Rightarrow\ \text{sen}\theta=\text{sen}\left(\alpha-\beta\right)=\text{sen}\alpha\cos\beta-\text{sen}\beta\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow\ x\sqrt{3}=2x\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-4x^2}$$

1º caso: x = 0

2º caso: $x\ne 0\Rightarrow\ \sqrt{3}=2\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}\ \Leftrightarrow\ \sqrt{3}+\sqrt{1-4x^2}=2\sqrt{1-x^2}$

Elevando ambos os membros ao quadrado, vem: $2\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2}=0\ \Leftrightarrow\ x=\pm\frac{1}{2}$

As três soluções encontradas satisfazem à condição de existência $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$, logo $S=\left\{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right\}$.

RESPOSTA: $\left\{-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right\}$

25.

$$\text{arctg}\frac{x}{2}-\text{arctg}\frac{x}{3}=\text{arctg}\frac{1}{5}$$

$$\alpha=\text{arctg}\frac{x}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{tg}\alpha=\frac{x}{2}\\ \alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

$$\beta=\text{arctg}\frac{x}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{tg}\beta=\frac{x}{3}\\ \beta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

$$\theta=\text{arctg}\frac{1}{5}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{tg}\theta=\frac{1}{5}\\ \theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

$$\alpha-\beta=\theta\ \Rightarrow\ \text{tg}(\alpha-\beta)=\text{tg}\theta\Leftrightarrow\frac{\text{tg}\alpha-\text{tg}\beta}{1+\text{tg}\alpha\text{tg}\beta}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\frac{\frac{x}{2}-\frac{x}{3}}{1+\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}}=\frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{6+x^2}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow x^2-5x-6=0\Leftrightarrow x=\frac{5\pm7}{2}\ \Leftrightarrow x=-1 \text{ ou } x=6$$

Soma das raízes: 5

RESPOSTA: C

26.

$$a\in(-1,0)\Rightarrow a^2-1\in(-1,0)$$

$$y=\text{sen}\left[\text{arc sen}\left(a^2-1\right)+\text{arc cos}\left(a^2-1\right)\right]$$

$$\text{arcsen}\left(a^2-1\right)=\alpha\Leftrightarrow\text{sen}\alpha=a^2-1<0\ \text{ e }\ \alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$$

$$\text{arccos}\left(a^2-1\right)=\beta\Leftrightarrow\cos\beta=a^2-1<0\text{ e }\ \beta\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$$

$$\text{sen}\alpha=\cos\beta\Leftrightarrow\text{sen}\alpha=\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta\Leftrightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow y=\text{sen}\frac{\pi}{2}=1$$

RESPOSTA: E

27.

$$\alpha = \operatorname{arccotg}\left(\frac{4}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{cotg}\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{24}{25} \\ \alpha \in \left]0,\pi\right[\end{cases}$$

$$\beta = \operatorname{arccossec}\left(\frac{5}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{cossec}\beta = \frac{5}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\beta = 1 - 2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25} \\ \beta \in \left[-\frac{\pi}{2},0\right[\cup \left]0,\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$\operatorname{sen}\left[2\operatorname{arccotg}\left(\frac{4}{3}\right)\right] + \cos\left[2\operatorname{arccossec}\left(\frac{5}{4}\right)\right] = \operatorname{sen}(2\alpha) + \cos(2\beta) = \frac{24}{25} + \left(-\frac{7}{25}\right) = \frac{17}{25}$$

RESPOSTA: $\frac{17}{25}$