Revisão – Tópicos de Combinatória
Prof. Fredão

- Permutação **Circular**

Questão 01. De quantas formas 4 pessoas podem sentar-se ao redor de uma mesa circular?

Solução: Tomemos como exemplo o desenho abaixo.

Figura I

Caso estivéssemos interessados em organizar 4 pessoas – A, B, C e D – em uma fila, teríamos $P_4 = 4! = 24$ formas de organizá-la (permutação simples). Das 24 possibilidades, quatro seriam as filas ADBC, CADB, BCAD e DBCA, consideradas distintas. Isto ocorre pelo fato de tais filas apresentarem indivíduos distintos à esquerda e à direita.

Já na **Figura I**, a rotação de tais indivíduos não muda a configuração do problema, pois as *posições relativas entre os indivíduos é a mesma*! Em ambos os casos, a pessoa à frente de A é a B. A pessoa à esquerda de A é a D e à direita, a C. Note, ainda, que existem outras duas rotações para o problema que mantém tal configuração, como mostra a **Figura II**.

Figura II

Esse é um problema conhecido como ***permutação circular***! Nele, devemos analisarmos o problema em sentido horário (ou anti-horário) e desconsiderar eventuais repetições, considerando apenas uma delas. No problema proposto, há 4 rotações que geram uma mesma configuração. Logo, a quantidade de permutações circulares existentes é dada por

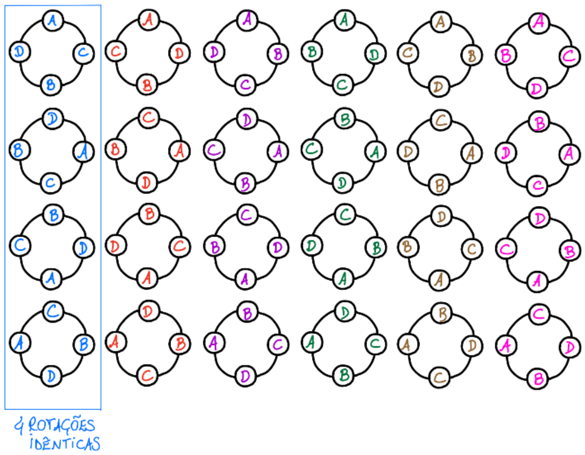
$$PC_4 = \frac{P_4}{4} = \frac{4!}{4} = 6\,.$$

Alternativamente, poderíamos fixar um dos elementos em determinada posição, que serviria como um *ponto de partida* para a rotação, e, a partir daí permutar livremente os demais $n-1$ elementos.

De uma forma ou de outra, podemos obter uma expressão para permutações circulares, dada por

$$PC_n = \frac{P_n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!\,.$$

Podemos visualizar o problema pela figura abaixo, na qual as configurações de mesma cor representam a mesma disposição dos indivíduos ao redor da mesa, devendo ser considerada apenas uma dentre cada uma das quatro rotações idênticas, como mostrado abaixo.



(Permutação Circular) A quantidade de maneiras de colocarmos n objetos distintos em n lugares equiespaçados em torno de um círculo, se considerarmos equivalentes disposições que possam coincidir por rotações é calculada como

$$\frac{P_n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Cada forma de ordenação é denominada uma *permutação circular de n objetos*. Logo, a quantidade de permutações circulares, representada por PC_n, é dada por $PC_n = (n-1)!$.

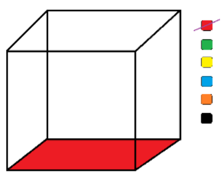
Questão 02. (ITA 2016) Pintam-se N cubos iguais utilizando-se 6 cores diferentes, uma para cada face. Considerando que cada cubo pode ser perfeitamente distinguido dos demais, o maior valor possível de N é igual a

a) 10. b) 15. c) 20. d) 25. e) 30.

Solução: Vamos pensar no problema nos colocando no papel de alguém que decida pintar tal cubo e que esse cubo terá a sua face inferior apoiada em uma suposta mesa (isso será fundamental no final!).

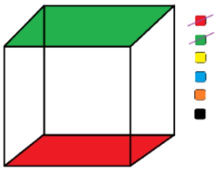
1ª Decisão: como pintar a face da base inferior do cubo?

Nesse caso, há **6 possibilidades**, pois não há qualquer restrição inicial no problema. Suponha que a tenhamos pintado de vermelho. Sobram, então, 5 cores.



2ª Decisão: como pintar a face da base superior do cubo?

Agora, há **5 possibilidades**, uma vez que não podemos repetir cores. Suponha que a base superior tenha sido pintada de verde. Sobram, assim, 4 cores.



3ª Decisão: como pintar as demais 4 faces (laterais do cubo)?

Aqui entra a *permutação circular*! Imagine, por um segundo, que a base superior seja transparente. Note que as duas configurações abaixo representam cubos indistinguíveis por meio de uma rotação de 90º para a esquerda (o que faz com que o dado da esquerda seja o mesmo da direita)!

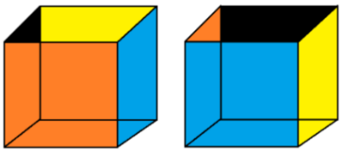


Figura III

Logo, podemos escolher as 4 cores das faces laterais de $PC_4 = (4-1)!$ formas, ou seja, há **6 possibilidades**.

Pelo princípio multiplicativo, teríamos $6 \times 5 \times 6 = 180$ possíveis cubos distintos. Mas espere...

E se eu tivesse pintado a base inferior de verde, a superior de vermelho e mantivesse a mesma 3ª decisão, ilustrada na Figura III? Esse novo cubo não seria idêntico ao que foi sugerido inicialmente?

Claro! Então devemos dividir o resultado por 2? Ainda não, calma!

Note que, para um determinado dado escolhido, existem 6 formas de escolher uma das faces para ficar apoiada sobre a suposta mesa. Assim, existem **grupos de 6 dados formados que são indistinguíveis** (pois o que os diferenciava era, justamente, a face que estava apoiada na nossa suposta mesa!). Logo, o total de possibilidades de pintura de tais cubos é dado por $\frac{6 \times 5 \times 6}{6} = 30$.

Outra maneira de pensar no problema seria a seguinte: como sabemos que haverá rotações que gerarão os mesmos cubos, fixamos uma das cores como sendo a sua base inferior (**1 possibilidade**) e começamos o problema a partir daí! Logo, teremos **5 possibilidades** para a base superior e $PC_4 = 3!$, ou seja, **6 possibilidades**. Assim, pelo princípio multiplicativo, teremos **30 possibilidades** de pintura dos cubos ($1 \times 5 \times 6$).

Revisão – Tópicos de Combinatória
Prof. Fredão

Questão 03. Um nutricionista recomenda a um atleta que este tome, toda manhã, uma vitamina que contenha pelo menos três dentre dez tipos variados de ingredientes: morango, açaí, aveia, linhaça, pasta de amendoim, água, iogurte, extrato de soja, whey protein e mel.

É possível que esse atleta tome uma vitamina diferente em cada um dos 366 dias de um ano bissexto?

Solução: caso o atleta deseje fazer uma vitamina com exatamente três ingredientes, ele terá $C_{10,3} = \dfrac{10!}{3! \times 7!} = 120$ opções distintas. Caso deseje fazer uma vitamina com exatamente quatro ingredientes, terá $C_{10,4} = \dfrac{10!}{4! \times 6!} = 210$ opções distintas, e assim por diante.

Logo, o total de possibilidades será dada por

$$\sum_{i=3}^{10} C_{10,i} = C_{10,3} + C_{10,4} + \cdots + C_{10,10} = 968 \,.$$

Logo, o atleta conseguiria tomar uma vitamina diferente a cada dia do ano!

Apesar de relativamente simples, calcular os valores de cada uma das combinações pode tornar-se trabalhoso. Se aumentássemos o *número de ingredientes para 20*, por exemplo, passaríamos a ter *mais de um milhão de vitaminas distintas* (!!!), sendo necessários, em tese, o cálculo de 18 diferentes combinações, desde $C_{20,3}$ a $C_{20,20}$.

E se conseguíssemos minimizar este trabalho, reduzindo a quantidade de cálculos necessários? Veremos que essa é apenas uma das utilidades/propriedades do tópico que estudaremos a seguir: o **Triângulo de Pascal**! Mas antes, algumas considerações:

- Vimos que $C_{n,k} = \dfrac{n!}{k! \times (n-k)!}$. Daqui em diante, utilizaremos uma outra forma de expressar essas combinações, denominada coeficiente binomial: $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \times (n-k)!}$;
- Note que $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$, pois dado um conjunto com n elementos, escolher um subconjunto com k equivale a não escolher $n-k$ elementos, formando, simultaneamente, um conjunto complementar. Essa propriedade recebe o nome de *complementariedade dos números binomiais*;
- $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} = 1$ e $\dbinom{n}{1} = \dbinom{n}{n-1} = n$.

- Triângulo de **Pascal**

O Triângulo de Pascal nada mais é do que uma forma triangular infinita de arranjar os coeficientes binomiais. Os números de tal arranjo triangular apresentam diversar propriedades/características interessantes, como veremos adiante.

Começaremos dispondo os coeficientes binomais em linhas e colunas. Assim, $\dbinom{n}{k}$ ocupará a linha n e coluna k do nosso arranjo triangular, como mostra a **Figura 1**.

$$\begin{array}{lccccccc}
 & \text{COLUNA 0} \downarrow & \text{COLUNA 1} \downarrow & \text{COLUNA 2} \downarrow & \text{COLUNA 3} \downarrow & & & \\
\text{LINHA 0} \rightarrow & \binom{0}{0} & & & & & & \\
\text{LINHA 1} \rightarrow & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & \\
\text{LINHA 2} \rightarrow & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & \\
\text{LINHA 3} \rightarrow & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & \\
 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & \\
 & \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6}
\end{array}$$

Figura 1

O nosso próximo passo será substituir cada um dos coeficientes binomiais pelos seus respectivos resultados numéricos. Dadas as considerações feitas previamente, podemos começar substituindo os valores extremos de cada linha, como mostra a **Figura 2**.

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & \binom{4}{2} & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & 5 & 1 & \\
1 & 6 & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & 6 & 1
\end{array}$$

Figura 2

Para finalizar a substituição dos coeficientes pelos respectivos valores numéricos, utilizaremos uma propriedade conhecida como ***Relação de Stifel***, que será explicada com o auxílio do exemplo a seguir.

Revisão – Tópicos de Combinatória
Prof. Fredão

Questão 04. Um grupo de $n+1$ amigos, sendo um deles Ocirederf, decide alugar uma casa para o réveillon, mas a casa tem apenas $k+1$ espaços ($k \le n$). Sabendo que um grupo de $k+1$ amigos ocupará a casa,

a) de quantas maneiras esse grupo pode ser escolhido com a presença de Ocirederf?

b) de quantas maneiras esse grupo pode ser escolhido sem a presença de Ocirederf?

c) de quantas maneiras esse grupo pode ser escolhido?

Solução:

a) A quantidade de maneiras de formarmos subconjuntos de $k+1$ elementos, *sendo um deles José*, dentre os $n+1$ disponíveis, é dado por $\binom{n}{k}$, uma vez que José ocupa um dos espaços e há n elementos disponíveis para que sejam ocupados os demais k espaços livres.

b) A quantidade de maneiras de formarmos subconjuntos de $k+1$ elementos, *sem a presença de José*, dentre os $n+1$ disponíveis, é dado por $\binom{n}{k+1}$, uma vez que há n elementos disponíveis (dado que José estará, necessariamente, fora do grupo escolhido) para que sejam ocupados os $k+1$ espaços livres.

c) O total de maneiras de escolhermos esse grupo é dado por $\binom{n+1}{k+1}$.

Um fato que pode passar despercebido é que a soma dos resultados das letras *a)* e *b)* é igual ao resultado da letra *c)*. De certa forma, é fácil perceber que se existem m grupos com a presença de José e n grupos sem a presença de José, então existem $m+n$ grupos ao todo.

Tal resultado nos leva a uma propriedade combinatória conhecida como ***Relação de Stifel***:

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}.$$

Essa relação tem papel fundamental na "criação" do triângulo de Pascal, pois ao adicionarmos dois elementos adjacentes de uma mesma linha, o resultado estará imediatamente na linha de baixo, conforme mostra a **Figura 3**.

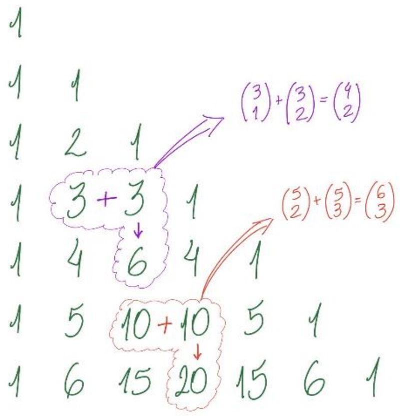


Figura 3

Por meio da relação de Stifel, podemos prosseguir infinitamente com o triângulo de Pascal, conforme mostra a **Figura 4**.

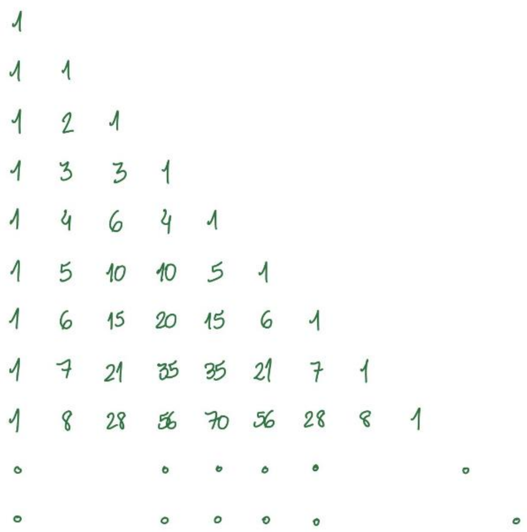
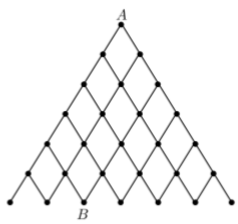


Figura 4

Questão 05 (Exame de Acesso PROFMAT 2013)

A figura mostra uma rede de canos de água que tem início no ponto A. Quando se coloca água nesse ponto, ela flui para baixo de tal modo que, em cada ponto assinalado, a água que chega pelo cano superior se distribui igualmente pelos dois canos inferiores.



Se um litro de água é colocado em A, qual o volume de água, em litros, que chegará a B?

Revisão – Tópicos de Combinatória
Prof. Fredão

- Combinação Completa / Método **Traço–Bola**

Questão 06. Determine a quantidade de soluções inteiras não-negativas da equação

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_7 = 4.$$

Solução: Em primeiro lugar, vamos entender algumas das possíveis soluções e não-soluções.

- $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (2,1,0,0,0,2,0)$ não é uma solução, uma vez que $x_1 + x_2 + \ldots + x_7 = 5$;
- $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (2,1,0,0,0,1,0)$ é uma das possíveis soluções, distinta de $(1,0,0,0,0,1,2)$, já que os valores das variáveis são diferentes entre si.
- $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (-2,1,0,0,3,2,0)$ não é uma solução para o problema. Apesar de termos $x_1 + x_2 + \ldots + x_7 = 4$, o nosso interesse está apenas nas soluções inteiras não-negativas.

Uma maneira alternativa – comumente utilizada – para representar as soluções do problema proposto é o chamado **método pau–bola** ou **traço–bola**. Nele, os traços representam a separação entre as incógnitas e cada bola representa uma unidade no valor da incógnita. Veja abaixo algumas soluções possíveis sendo representadas no método traço-bola:

- $x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7$
  $(1,0,0,0,2,0,1) \Rightarrow \bullet\,|\quad|\quad|\quad|\,\bullet\bullet\,|\quad|\,\bullet$;
- $x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7$
  $(0,0,0,0,3,1,0) \Rightarrow \quad|\quad|\quad|\quad|\,\bullet\bullet\bullet\,|\,\bullet\,|\quad$;
- $(0,0,2,0,0,2,0) \Rightarrow ||\bullet\bullet|||\bullet\bullet|$

Na realidade, *pouco importam os símbolos utilizados*. Poderíamos ter recorrido ao sistema binário, substituindo traço por 1 e bola por 0, de forma que a sequência 0011000110 representaria a mesma solução que $||\bullet\bullet|||\bullet\bullet|$: $(0,0,2,0,0,2,0)$. Ou ainda, manter os sinais de "+" como separadores das incógnitas e o 1 como a unidade de cada incógnita, representando a solução proposta nesse parágrafo como $++11+++11+$.

O que realmente importa aqui é que o aluno seja capaz de *perceber que está diante de um problema já estudado anteriormente*: o de **permutação com repetição**. Repare que há uma bijeção entre as soluções do problema proposto e as permutações com repetição dos 10 objetos (seis traços/zeros/+ e quatro bolas/uns). Assim, a quantidade de soluções não-negativas da equação é dada por

$$PR_{10}^{6,4} = \frac{10!}{6! \times 4!} = 210.$$

Questão 07. De quantos modos é possível comprar 4 sorvetes em uma loja que oferece 7 sabores?

Solução: A resposta mais natural seria $C_{7,4} = 35$. Porém, o que representa, de fato, essa combinação? Representa a quantidade de modos de *escolhermos 4 sabores* ***distintos*** *de sorvete, dentre os 7 disponíveis*. Note, porém, que não foi isso que foi pedido, uma vez que sendo um dos sabores o de creme, poderíamos ter comprado 4 sorvetes de creme!

Esse é um problema conhecido como **combinação completa**, e a sua solução é representada por $CR_{7,4}$, número de *combinações completas de classe 4 de 7 objetos*. Assim, $CR_{7,4}$ é o número de modos de escolher 4 objetos entre 7 objetos distintos, *valendo escolher o mesmo objeto mais de uma vez*.

De modo geral, $C_{n,k}$ é a quantidade de maneiras de selecionar k objetos distintos entre os n objetos distintos disponíveis, enquanto $CR_{n,k}$ é a quantidade de maneiras de selecionar k objetos, *distintos ou não*, entre os n objetos distintos disponíveis. Tomando como exemplo um conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ temos:

- $C_{4,3} = 4 \Rightarrow \{abc, abd, acd, bcd\}$;
- $CR_{4,3} = 20 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} aaa & aab & bba & cca & dda & abc \\ bbb & aac & bbc & ccb & ddb & abd \\ ccc & aad & bbd & ccd & ddc & acd \\ ddd & & & & & bcd \end{matrix}\right\}.$

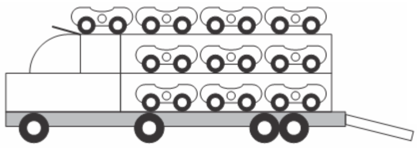
Voltando ao problema dos sorvetes, podemos enxergá-lo de uma maneira alternativa: considere x_1 a quantidade de sorvetes que compraremos do 1º sabor, x_2 a quantidade de sorvetes que compraremos do 2º sabor, ..., x_7 a quantidade de sorvetes que compraremos do 7º sabor.

Note que não há interesse na ordem em que foram escolhidos os sorvetes (combinação) e que pode haver repetição de sorvetes (combinação completa). Além disso, é claro que $x_1, x_2, \ldots, x_7$ devem ser inteiros não-negativos tais que $x_1 + x_2 + \ldots + x_7 = 4$. Tendo como referência o **Questão 07**, teremos que $CR_{7,4} = PR_{10}^{6,4} = C_{10,4} = 210$.

De maneira geral, o número de formas de escolhermos k objetos, dentre os n disponíveis, *podendo haver repetição*, (soluções inteiras não-negativas de $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$, com $n-1$ traços e k bolas) é dado por

$$CR_{n,k} = PR_{k+n-1}^{k,n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1,k}.$$

Questão 08 (ENEM 2017)**.** Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

a) $C_{6,\,4}$

b) $C_{9,\,3}$

c) $C_{10,\,4}$

d) 6^4

e) 4^6

Questão 09 (PAS|UnB 1998)

Um ecologista deseja reflorestar uma pequena área quadrada de 4.900 m^2, usando 5 espécies de árvores: aroeira, mogno, castanheira, ipê e angico. Para isso, a área será dividida em 49 quadrados iguais e, no centro de cada um deles, será plantada uma muda de uma dessas árvores. Das 49 mudas que ele adquiriu, sabe-se que existem pelo menos 5 de cada uma das espécies citadas. O ecologista decide plantar na primeira fileira de quadrados exatamente 3 espécies distintas entre as 5 disponíveis. Desconsiderando a ordem em que as árvores serão plantadas nessa fileira, calcule o número de maneiras distintas que o ecologista pode compô-la.

Revisão – Tópicos de Combinatória
Prof. Fredão

- **Partições** Ordenadas e Não-Ordenadas

Questão 10. De quantas formas podemos dividir 4 pessoas em 2 grupos de 2 pessoas cada?

Questão 11. De quantas maneiras podemos colocar 10 pessoas em três salas A, B e C de modo que em A fiquem 4 pessoas, em B fiquem 3 pessoas e em C também 3 pessoas?

Solução: Vamos organizar as nossas tomadas de decisão por sala.

1ª Decisão: Sala A. De quantas maneiras podemos escolher 4 das 10 pessoas disponíveis? Resposta: $C_{10,4}=210$ maneiras.

2ª Decisão: Sala B. Uma vez escolhidos as 4 pessoas da sala A, de quantas maneiras podemos escolher 3 das 6 pessoas restantes para a sala B? Resposta: $C_{6,3}=20$ maneiras.

3ª Decisão: Sala C. Escolhidas as 4 pessoas da sala A e as 3 pessoas da sala B, nos restam exatamente 3 pessoas para as 3 vagas da sala C. Ou seja, há apenas $C_{3,3}=1$ maneira de se tomar essa decisão.

Assim, pelo Princípio Multiplicativo, temos $210\times 20\times 1=4200$ modos de dispormos as 10 pessoas nas 3 salas citadas.

Esse é um problema de **partição ordenada**. Vejamos agora um problema levemente diferente.

Questão 12. De quantas maneiras podemos distribuir nove alunos em três salas, cada uma delas com exatamente três alunos?

Solução: Vamos tentar seguir a mesma lógica.

1ª Decisão: 1ª Sala. De quantas maneiras podemos escolher 3 das 9 pessoas disponíveis? Resposta: $C_{9,3}=84$ maneiras.

2ª Decisão: 2ª Sala. Uma vez escolhidos as 3 pessoas da 1ª sala, de quantas maneiras podemos escolher 3 das 6 pessoas restantes para a 2ª sala? Resposta: $C_{6,3}=20$ maneiras.

3ª Decisão: 3ª Sala. Escolhidas as 3 pessoas da 1ª sala e as 3 pessoas da 2ª sala, nos restam exatamente 3 pessoas para as 3 vagas da 3ª sala. Ou seja, há apenas $C_{3,3}=1$ maneira de se tomar essa decisão.

Assim, pelo Princípio Multiplicativo, temos, **em tese**, $84\times 20\times 1=1680$ modos de dispormos as 9 pessoas nas 3 salas citadas. Mas por que **em tese**?

Em primeiro lugar, esse é um problema de **partição não-ordenada**. E o que isso significa? Significa dizer que nós formamos grupos demais, incluindo várias repetições, uma vez que não há ordenação entre as salas.

Por exemplo: se definirmos as 9 pessoas como $P_1, P_2, \dots, P_9$, as nossas escolhas para as três salas pode ter sido dos grupos $\{P_1, P_4, P_7\}$, $\{P_2, P_5, P_8\}$ e $\{P_3, P_6, P_9\}$, nessa ordem. Porém, uma escolha que foi considerada distinta, mas que se mostra exatamente a mesma seria a dos grupos $\{P_2, P_5, P_8\}$, $\{P_3, P_6, P_9\}$ e . $\{P_1, P_4, P_7\}$, nessa ordem.

Diferentemente da **Questão 11**, como não há salas A, B e C, as duas situações acima devem ser consideradas idênticas. Mas não apenas elas! Uma vez que todas as salas têm a mesma dimensão (3 alunos por sala), cada grupo de $3!=6$ partições ordenadas dá origem à mesma partição não-ordenada.

Logo, o número de partições não ordenadas será dado por

$$\frac{C_{9,3}\times C_{6,3}\times C_{3,3}}{3!}=\frac{84\times 20\times 1}{3\times 2\times 1}=280.$$

Questão 13 (PAS 2017). O conto O burrinho pedrês, de Guimarães Rosa, narra os acontecimentos de um dia na vida de Sete-de-Ouros, o burrinho do major Saulo, dono da Fazenda da Tampa, e de 11 vaqueiros que, juntos, levavam 460 bovinos para a estação de trem. Entre os vaqueiros, Francolim era o secretário do major Saulo, Sebastião, o capataz, e Zé Grande, o guia da comitiva. Uma tensão extra na viagem ficava por conta do vaqueiro Silvino, que planejava, por ciúmes, matar o companheiro Badu.

Considere que, no embarque, nos trens, além dos 460 animais da Fazenda da Tampa, tenham embarcado mais 400 da Fazenda Boa Vista e 340 da Fazenda Monte Verde, estando cada um dos animais com a identificação da fazenda de origem. A tabela a seguir mostra a distribuição dos animais, por fazenda e por idade (*I*) em meses.

idade	Tampa	Boa Vista	Monte Verde	total
$I < 24$	90	110	80	280
$24 \le I \le 36$	230	190	150	570
$I > 36$	140	100	110	350
total	460	400	340	1.200

Tendo como referência essas informações, julgue o item **01** e faça o que se pede no item **02**, que é do **tipo B**.

(01) Se o major Saulo quiser escolher entre os 11 vaqueiros, de maneira aleatória, um grupo de 3 para preparar a refeição da comitiva em determinado dia, a quantidade de maneiras distintas de fazê-lo é superior a 170.

(02) Considere que, no acampamento para pernoite, Francolim divida a barraca com o major Saulo e que os demais vaqueiros dividam duas barracas, cada uma com capacidade para cinco vaqueiros. Nessa situação, calcule a quantidade de maneiras distintas de separação dos demais vaqueiros em dois grupos de 5, de modo que Badu e Silvino fiquem sempre em grupos diferentes. Após efetuar todos os cálculos solicitados, despreze, para a marcação no **Caderno de Respostas**, a parte fracionária do resultado final obtido, caso exista.

Revisão – Tópicos de Combinatória
Prof. Fredão

- Princípio de Dirichlet **(Casa dos Pombos)**

Em Combinatória nem sempre estamos interessados em contabilizar a quantidade de casos possíveis. Por vezes, deseja-se determinar a existência de determinada condição, provando afirmações como a que veremos no **Exemplo 1**. Uma ferramenta simples para a resolução desse tipo de problemas é o ***Princípio das Gavetas de Dirichlet***, também conhecido com ***Princípio da Casa dos Pombos***. Vejamos.

Questão 14. Dado um grupo de 13 amigos, prove que pelo menos dois deles aniversariam no mesmo mês do ano.

*Solução (por **absurdo**):* suponha que a afirmação esteja errada e que seja possível dizer que cada amigo faz aniversário em um mês diferente. Nesse caso, seriam necessários 13 meses distintos em um ano, quando na realidade, há apenas 12 meses. Logo, temos um **absurdo**, e pelo menos dois deles devem fazer aniversário em um mesmo mês, mesmo não sendo possível determinar qual seria esse mês!

(Princípio das Gavetas de Dirichlet) Se $n+1$ objetos devem ser colocados em, no máximo, n gavetas, então pelo menos uma delas conterá dois ou mais objetos.

Na **Questão 14**, as gavetas podem ser entendidas como os 12 meses do ano, enquanto os objetos são os 13 amigos.

Em alguns problemas pode ser necessária a seguinte extensão do princípio de Dirichlet:

Se $nk+1$ objetos devem ser colocados em, no máximo, n gavetas, então pelo menos uma delas conterá $k+1$ ou mais objetos.

Questão 15. Qual a menor quantidade de alunos necessários em uma sala de aula para que possamos garantir que há cinco alunos cujos aniversários ocorrem no mesmo mês?

Solução: o complementar matemático de “pelo menos cinco alunos com aniversários no mesmo mês” seria “no máximo quatro alunos fazendo aniversários em meses distintos”, totalizando 48 alunos. Logo, são necessários 49 alunos $\left(\left(\underbrace{12}_{n}\times\underbrace{4}_{k}\right)+1\right)$ para que seja possível garantir que pelo menos cinco $\left(\underbrace{4}_{k}+1\right)$ fazem aniversário no mesmo mês.

Questão 16. Dados doze números naturais quaisquer, prove que sempre existem dois deles cuja diferença é um número inteiro múltiplo de 11.

Revisão – Tópicos de Combinatória
Prof. Fredão

- Princípio da **Inclusão–Exclusão**

O *Princípio da Inclusão–Exclusão* é uma fórmula que contabiliza o número de elementos que pertencem à união de uma certa quantidade de conjuntos não necessariamente disjuntos. Vejamos a sua versão para dois e três conjuntos.

(Princípio da Inclusão–Exclusão) Seja $|X|$ a quantidade de elementos do conjunto X, então $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

Para 3 conjuntos, temos

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|.$$

Para 4 conjuntos teríamos

$$|A\cup B\cup C\cup D|=|A|+|B|+|C|+|D|-|A\cap B|-|A\cap C|-|A\cap D|-|B\cap C|$$
$$-|B\cap D|-|C\cap D|+|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|+|B\cap C\cap D|$$
$$-|A\cap B\cap C\cap D|$$

Note que a lógica é sempre a mesma: o número de elementos da união é obtido somando os números de elementos de cada conjunto, subtraindo os números de elementos das interseções dois a dois, somando os das interseções três a três, subtraindo os das interseções quatro a quatro, e assim por diante.

Vejamos agora alguns exemplos de onde podemos utilizar o Princípio da Inclusão–Exclusão (P.I.E.).

Questão 17. Quantos inteiros entre 1 e 1 000 são divisíveis por 3 ou 7?

Solução: Lembrando que "*ser divisível por*" equivale a "*ser múltiplo de*", comecemos a resolução definindo os dois conjuntos de interesse:

- A = conjunto dos múltiplos de 3 entre 1 e 1 000;
- B = conjunto dos múltiplos de 7 entre 1 e 1 000.

O menor elemento do conjunto A é o número $3=3\times 1$ e o maior é o número $999=3\times 333$. Logo, $|A|=333$.

O menor elemento do conjunto B é o número $7=7\times 1$ e o maior é o número $994=7\times 142$. Logo, $|B|=142$.

Porém, existem números que são múltiplos tanto de 3 quanto de 7: os múltiplos de 21. O menor e o maior múltiplo de 21 entre 1 e 1 000, respectivamente, são os números $21=21\times 1$ e $987=21\times 47$. Logo, $|A\cap B|=47$.

Assim, $|A\cup B|=333+142-47=328$.

Questão 18. Quantos são os anagramas da palavra CAPÍTULO que têm as letras C na 1ª posição ou A na 2ª posição ou P na 3ª posição?

- Permutação **Caótica**

Questão 19. (FUVEST 2017 – Adaptada) Cláudia, Paulo, Rodrigo e Ana brincam entre si de amigo-secreto (ou amigo-oculto). Cada nome é escrito em um pedaço de papel, que é colocado em uma urna, e cada participante retira um deles ao acaso.

Quantas são as configurações nas quais nenhum participante retira o seu próprio nome?

Solução: Suponha que as pessoas que irão retirar os nomes sejam, nesta ordem, Ana, Cláudia, Paulo e, por fim, Rodrigo. As sequências de retiradas nas quais nenhum dos amigos retira o próprio nome está ilustrada na **Figura 1**.

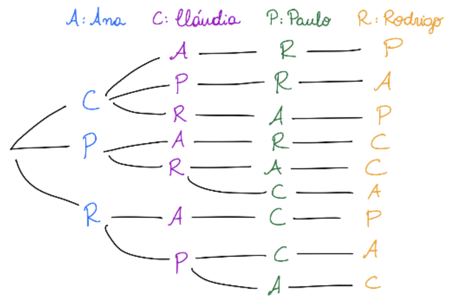


Figura 1

Outra forma de visualizar o problema é escrever todas as $4!=24$ permutações possíveis dos nomes dos quatro amigos. Na **Figura 2**, as letras vermelhas correspondem aos amigos que retiraram os próprios nomes, enquanto as marcações em verde correspondem às configurações nas quais ninguém retirou o próprio nome.

ANA RETIRA	CLÁUDIA RETIRA	PAULO RETIRA	RODRIGO RETIRA
A	C	P	R
A	C	R	P
A	P	C	R
A	P	R	C
A	R	C	P
A	R	P	C

ANA RETIRA	CLÁUDIA RETIRA	PAULO RETIRA	RODRIGO RETIRA
C	A	P	R
C	A	R	P
C	P	A	R
C	P	R	A
C	R	A	P
C	R	P	A

ANA RETIRA	CLÁUDIA RETIRA	PAULO RETIRA	RODRIGO RETIRA
P	A	C	R
P	A	R	C
P	C	A	R
P	C	R	A
P	R	A	C
P	R	C	A

ANA RETIRA	CLÁUDIA RETIRA	PAULO RETIRA	RODRIGO RETIRA
R	A	C	P
R	A	P	C
R	C	A	P
R	C	P	A
R	P	A	C
R	P	C	A

Figura 2

Logo, há 9 configurações possíveis.

A brincadeira do "amigo oculto" traz consigo um problema do século XVIII que motivou o matemático Leonard Euler a resolver um problema proposto por Nicolaus Bernoulli, conhecido como o *Problema das Cartas Mal Endereçadas*:

Revisão – Tópicos de Combinatória
Prof. Fredão

"*De quantas formas distintas pode-se colocar n cartas em n envelopes, endereçados a n destinatários diferentes, de modo que nenhuma das cartas seja colocada no envelope correto?*"

Esse tipo de problema é conhecido como ***permutação caótica*** ou ***desarranjo***. Uma permutação de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é chamada de *caótica* quando nenhum dos a_i's se encontra na posição original, isto é, na i-ésima posição.

Em seu trabalho, Euler demonstrou uma fórmula para o número de permutações caóticas de n elementos utilizando, de maneira engenhosa, a ideia de recorrências. Apesar de ser comumente ensinada em treinamentos de olimpíadas de matemática para alunos do *ensino fundamental*, a ideia das recorrências é tratada apenas superficialmente no ensino médio, em sequências como a sequência de Fibonacci.

Porém, é possível demonstrar tal fórmula utilizando o Princípio da Inclusão–Exclusão, estudado no tópico anterior!

Fazendo um paralelo com o Exemplo 3, definamos quatro conjuntos:

A = {Ana sorteia o seu próprio nome}

B = {Cláudia sorteia o seu próprio nome}

C = {Paulo sorteia o seu próprio nome}

D = {Rodrigo sorteia o seu próprio nome}

A quantidade de maneiras em que pelo menos um deles sorteia o seu próprio nome será dada por $|A \cup B \cup C \cup D|$. Além disso, é relativamente simples mostrar que

i) $|A| = |B| = |C| = |D| = 3!$;

ii) $|A \cap B| = |A \cap C| = \ldots = |C \cap D| = 2!$;

iii) $|A \cap B \cap C| = |A \cap B \cap D| = |A \cap C \cap D| = |B \cap C \cap D| = 1$;

iv) $|A \cap B \cap C \cap D| = 1$.

Como a quantidade de subconjuntos unitários, duplos, triplos e quádruplos representam combinações, podemos escrever que $|A \cup B \cup C \cup D|$ é igual a:

$$= \binom{4}{1} \cdot 3! - \binom{4}{2} \cdot 2! + \binom{4}{3} \cdot 1! - \binom{4}{0} \cdot 0!$$
$$= \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot 3! - \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 2! + \frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot 1! - \frac{4!}{0! \cdot 4!} \cdot 0!$$
$$= \frac{4!}{1!} - \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{3!} - \frac{4!}{4!}.$$

Como há $4!$ permutações possíveis, então o número de permutações caóticas é dado por

$$4! - \left(\frac{4!}{1!} - \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{3!} - \frac{4!}{4!}\right) = \left(\frac{4!}{2!} - \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{4!}\right) = 4! \times \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right)$$

Por fim, a ***probabilidade de que ocorra uma permutação caótica*** é dada por $\dfrac{4! \times \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right)}{4!} = \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} = \dfrac{3}{8}$.

(Permutação Caótica) Ao estendermos a fórmula para casos em que há n elementos, na qual D_n representa a quantidade de permutações caóticas de n elementos, temos

$$D_n = n! \times \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \times \frac{1}{n!}\right),$$

e a probabilidade $P_{!n}$ de ocorrência de uma permutação caótica de n elementos será dada por

$$P_{!n} = \frac{D_n}{n!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \times \frac{1}{n!}.$$

Sugestão 1: decore o resultado $3/8$ para casos em que há 4 elementos. Nas poucas vezes em que vi tal assunto em vestibulares, as questões utilizavam 4 elementos em suas permutações, o que possibilita, inclusive, que o candidato o resolva por meio de uma árvore de possibilidades, como fizemos antes de demonstrar a fórmula.

Questão 20. (ENEM 2009 Cancelado) Em um concurso realizado em uma lanchonete, apresentavam-se ao consumidor quatro cartas voltadas para baixo, em ordem aleatória, diferenciadas pelos algarismos 0, 1, 2 e 5. O consumidor selecionava uma nova ordem ainda com as cartas voltadas para baixo. Ao desvirá-las, verificava-se quais delas continham o algarismo na posição correta dos algarismos do número 12,50 que era o valor, em reais, do trio-promoção. Para cada algarismo na posição acertada, ganhava-se R$ 1,00 de desconto. Por exemplo, se a segunda carta da sequência escolhida pelo consumidor fosse 2 e a terceira fosse 5, ele ganharia R$ 2,00 de desconto.

Qual é a probabilidade de um consumidor não ganhar qualquer desconto? (*as alternativas não foram inseridas aqui por não haver alternativa correta*)

Revisão – Tópicos de Combinatória
Prof. Fredão

- ### Lemas de **Kaplansky**

Questão 21. Tomando o conjunto $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, de quantas maneiras podemos formar um subconjunto com 3 elementos, sem que haja números consecutivos no subconjunto formado?

Solução: Representemos a escolha de um número como S (Sim) e a não escolha de um número como N (Não).

Dessa forma, o subconjunto $\{1,4,6\}$ é equivalente ao código SNNSNSN, sendo um subconjunto válido (que satisfaz as condições do problema). Por sua vez, o subconjunto $\{1,6,7\}$, cujo código é SNNNNSS, não é um subconjunto válido, uma vez que 6 e 7 são números consecutivos.

Assim, o nosso problema é alterado para o seguinte problema: quantos são os anagramas da palavra SSSNNNN nos quais não há duas letras S consecutivas (o que representaria a escolha de dois números consecutivos)?

Uma forma de resolver esse problema é fixar as letras N e representar por _ os espaços que podem ser ocupados pelas letras S (uma vez que, no máximo, podemos colocar uma letra S entre duas letras N):

_ N _ N _ N _ N _

Logo, há $\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\times 2!}=10$ formas de escolher os espaços onde ficarão as letras S e, consequentemente, há 10 soluções para o problema proposto, que são: $\{1,3,5\}$, $\{1,3,6\}$, $\{1,3,7\}$, $\{1,4,6\}$, $\{1,4,7\}$, $\{1,5,7\}$, $\{2,4,6\}$, $\{2,4,7\}$, $\{2,5,7\}$ e $\{3,5,7\}$.

De maneira geral, temos um Lema conhecido como 1º Lema de Kaplansky, que pode ser enunciado da seguinte maneira:

> **(1º Lema de Kaplansky)** O número de subconjuntos de k elementos do conjunto $\{1,2,3,\ldots,n\}$ nos quais não há números consecutivos é dado por
>
> $$f(n,k)=\binom{n-k+1}{k}.$$

Questão 22. Quantos são os anagramas da palavra MISSISSIPI nos quais não há duas letras S consecutivas?

Solução: Inicialmente devemos escolher 4 dos 10 espaços para colocar a letra S sem que sejam escolhidos espaços consecutivos. Esse é um problema no qual podemos usar o 1º Lema de Kaplansky:

$$f(10,4)=\binom{10-4+1}{4}=\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!\times 3!}=35.$$

Depois, devemos permutar as 6 demais letras, sendo que há a repetição de 4 letras I. Logo, temos um problema de permutação com repetição, cujo resultado é dado por:

$$PR_6^{4,1,1}=\frac{6!}{4!\times 1!\times 1!}=30.$$

Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $35\times 30=1050$ soluções.

Questão 23. Tomando o conjunto $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, de quantas maneiras podemos formar um subconjunto com 3 elementos, sem que haja números consecutivos no subconjunto formado e considerando que 1 e 7 também sejam números consecutivos?

Solução: nesse caso, usamos uma variação do 1º Lema de Kaplansky, conhecido como o 2º Lema de Kaplansky.

> **(2º Lema de Kaplansky)** O número de subconjuntos de k elementos do conjunto $\{1,2,3,\ldots,n\}$ nos quais não há números consecutivos é, considerando 1 e n como consecutivos, igual a
>
> $$g(n,k)=\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}.$$

Logo, temos $g(7,3)=\frac{7}{7-3}\binom{7-3}{3}=\frac{7}{4}\times\frac{4!}{3!\times 1!}=7$ soluções para o Exercício 14. Tais soluções são idênticas às 10 do Exercício 12, retirando-se as soluções $\{1,3,7\}$, $\{1,4,7\}$ e $\{1,5,7\}$.

Questão 24. (IME 1986)

12 cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos 12 cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de 5 cavaleiros para libertar uma princesa e, nesse grupo, não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.