Álgebra – Equações Elementares

1. EQUAÇÃO DO 1º GRAU

a) Definição

É uma sentença aberta do tipo $\boxed{ax + b = 0}$, com $a \neq 0$

b) Resolução

$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{a}$

c) Conjunto Verdade: $V = \{-\dfrac{b}{a}\}$

2. EQUAÇÃO DO 2º GRAU

a) Definição

É uma sentença aberta do tipo $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$, com $a \neq 0$

b) Resolução

$\boxed{x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$, onde $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

(fórmula de Baskara)

c) Discussão

$\Delta > 0 \Rightarrow V = \{\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\}$

$\Delta = 0 \Rightarrow V = \{-\dfrac{b}{2a}\}$

$\Delta < 0 \Rightarrow V = \phi$ (supondo $V \subset \mathbb{R}$)

d) Propriedades das raízes

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

e) Uma equação do 2º grau cujo conjunto verdade é $\{x_1; x_2\}$ é $\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$, sendo $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1 \cdot x_2$.

3. EQUAÇÃO "PRODUTO" E EQUAÇÃO "QUOCIENTE"

a) $a \cdot b = 0 \iff a = 0$ ou $b = 0$

b) $\dfrac{a}{b} = 0 \iff a = 0$ e $b \neq 0$

4. EQUAÇÕES REDUTÍVEIS A 1º OU 2º GRAU

Se a equação proposta não é do 1º grau, nem do 2º grau, deve-se, se possível:

a) Fatorar

Exemplo:

$x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 \cdot (x - 4) - (x - 4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 4) \cdot (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 4 = 0$ ou $x^2 - 1 = 0$

Logo: $V = \{1, -1, 4\}$

b) Fazer uma troca de variáveis

Exemplo:

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ pode ser transformada em $y^2 - 5y + 4 = 0$, substituindo x^2 por y.

Assim:

$y^2 - 5y + 4 = 0 \iff y = \dfrac{5 \pm 3}{2} \iff$

$\iff y = 4$ ou $y = 1$

Voltando para a incógnita inicial x temos:

$x^2 = 4$ ou $x^2 = 1 \iff x = \pm 2$ ou $x = \pm 1$

Logo: $V = \{1, -1, 2, -2\}$

Álgebra – Funções Elementares e Resolução de Inequações – I

1. PROPRIEDADES DAS DESIGUALDADES

Sendo x, y e a números reais, valem as seguintes propriedades:

a) $x < y \iff x + a < y + a, \forall a \in \mathbb{R}$

b) $x < y \iff a \cdot x < a \cdot y, \forall a \in \mathbb{R}^*_+$

c) $x < y \iff a \cdot x > a \cdot y, \forall a \in \mathbb{R}^*_-$

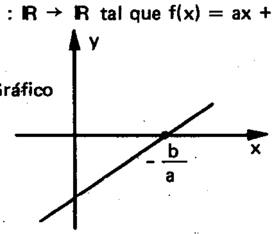
2. FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU

a) Definição

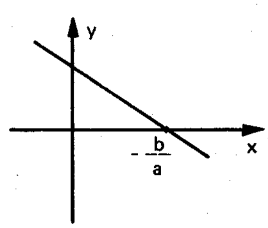
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$.

b) Gráfico

$a > 0 \Rightarrow$



$a < 0 \Rightarrow$



3. FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU

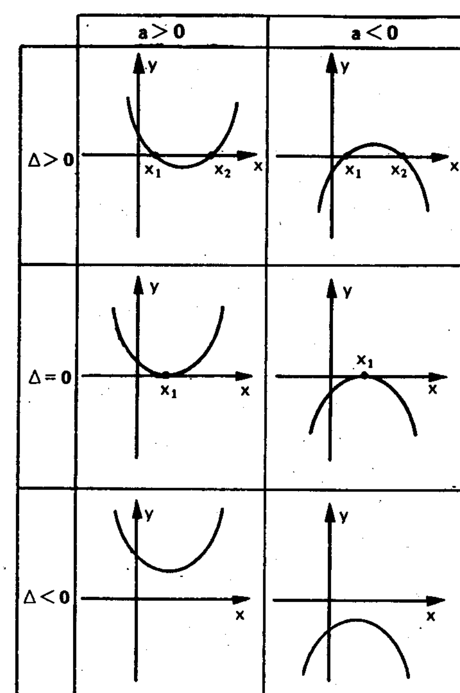
a) Definição

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

b) Resolvendo a equação $ax^2 + bx + c = 0$ obtemos as raízes de f, que são os pontos em que o gráfico de f corta o eixo x. Dependendo de $\Delta = b^2 - 4ac$ podemos encontrar duas, uma, ou nenhuma raiz.

c) Gráfico

É sempre uma parábola, com eixo de simetria paralelo ao eixo y. Conforme o sinal de a e de Δ podemos obter seis tipos de gráficos.



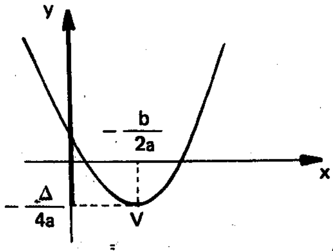
Álgebra — Funções Elementares e Resolução de Inequações — II

d) Vértice

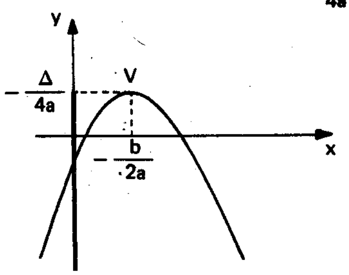
É o ponto $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

e) Conjunto Imagem

$a > 0 \Rightarrow Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{\Delta}{4a}\}$



$a < 0 \Rightarrow Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\frac{\Delta}{4a}\}$



f) Sinal das raízes

Lembrando que $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $P = x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$, temos:

I. Raízes Estritamente Positivas $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

II. Raízes Estritamente Negativas $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

III. Raízes de Sinais Contrários $\Leftrightarrow P < 0$

4. FUNÇÃO MODULAR

a) Módulo de um número real

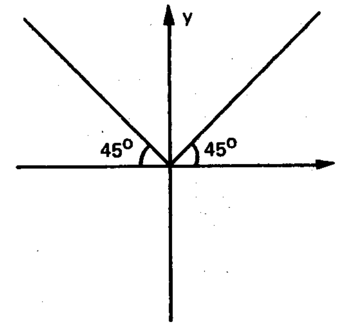
$x \geqslant 0 \Rightarrow |x| = x$

$x \leqslant 0 \Rightarrow |x| = -x$

b) Função Modular

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$

c) Gráfico



d) Propriedades

Sendo $a > 0$, temos:

I. $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ ou $x = -a$

II. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

III. $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ ou $x > a$

e) $\sqrt{x^2} = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$

Álgebra — Potenciação - Radiciação - Função Exponencial

1. POTENCIAÇÃO

a) Definições

Se $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$, define-se:

$a^n = \underbrace{a . a . a . \ldots . a}_{n \text{ fatores}} \quad (n > 1)$

$a^1 = a \;;\; a^0 = 1$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$

b) Propriedades

$a^n . a^m = a^{n+m}$

$a^n \div a^m = a^{n-m} \; (a \neq 0)$

$a^n . b^n = (ab)^n$

$a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \; (b \neq 0)$

$(a^n)^m = a^{nm}$

2. RADICIAÇÃO

a) Definições

$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a$

b) Propriedades

$\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} \quad (p \neq 0)$

c) Potência de Expoente Racional

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

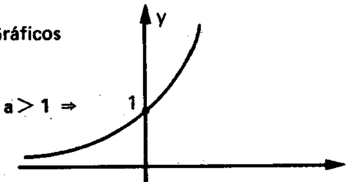
3. FUNÇÃO EXPONENCIAL

a) Definição

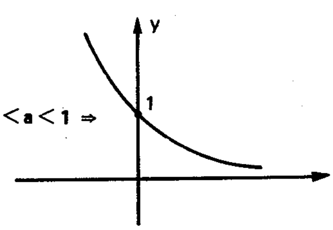
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

b) Gráficos

$a > 1 \Rightarrow$



$0 < a < 1 \Rightarrow$



c) O gráfico de f contém o ponto $(0;1)$

d) A função é **INJETORA**, ou seja:

$\boxed{a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2}$

e) Se $a > 1$ então:

$\boxed{a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2}$

pois a função é **ESTRITAMENTE CRESCENTE**

f) Se $0 < a < 1$ então:

$\boxed{a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2}$

pois a função é **ESTRIT. DECRESCENTE**

Álgebra – Função Logarítmica

1. DEFINIÇÃO

$$\boxed{\log_a N = \alpha \iff a^\alpha = N}$$

sendo: **N** o logaritmando, **b** a base e α o LOGARITMO.

2. CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA

$$\boxed{N > 0 \;;\; a > 0 \;;\; a \neq 1}$$

3. CONSEQUÊNCIAS DA DEFINIÇÃO

a) $\log_a 1 = 0$ b) $\log_a a = 1$ c) $a^{\log_a N} = N$

4. PROPRIEDADES

a) $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$

b) $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

c) $\log_a (N^m) = m \cdot \log_a N$

d) $\log_a \sqrt[m]{N} = \frac{1}{m} \cdot \log_a N$

5. COLOGARITMO

$\text{colog}_a N = \log_a \frac{1}{N} = -\log_a N$

6. MUDANÇA DE BASE

$$\boxed{\log_a N = \frac{\log_c N}{\log_c a}} \quad (1 \neq c > 0)$$

7. LOGARITMOS DECIMAIS

a) Logaritmo decimal de um número positivo N, pode ser escrito na forma:

$$\boxed{\log N = c + m}$$

onde: $c \in \mathbb{Z}$ é a **característica** e

$0 \leqslant m < 1$ é a **mantissa**, sendo m encontrado na Tábua de Logaritmos.

b) **Determinação da característica:**

Regra 1 – A característica do logaritmo decimal de um número $N > 1$ é igual ao número de algarismos de sua parte inteira, menos 1.

Exemplos:

$\log 2 = 0, \ldots$

$\log 231 = 2; \ldots$

Regra 2 – A característica do logaritmo decimal de um número $0 < N < 1$ é igual ao oposto do número de zeros que precedem o 1º algarismo significativo.

Exemplos:

$\log 0{,}02 = -2 + 0, \ldots = \bar{2}, \ldots$

Obs.: **Para se passar um logarítmo negativo para a forma mista** (característica negativa e mantissa positiva), **basta somar 1 à sua parte decimal e subtrair 1 de sua parte inteira.**

c) **Propriedade da mantissa**

Multiplicando-se ou dividindo-se um número positivo por 10, 100, 1000, etc., a mantissa do seu logaritmo decimal NÃO SE ALTERA.

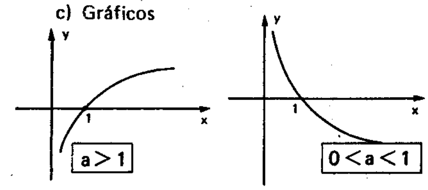
8. FUNÇÃO LOGARÍTMICA

a) Definição

$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

b) A função logarítmica é a INVERSA da função exponencial, pois: $y = a^x \iff x = \log_a y$

c) Gráficos



d) A função logarítmica é INJETORA, ou seja:

$$\boxed{\log_a x_1 = \log_a x_2 \iff x_1 = x_2 > 0}$$

e) Se $\boxed{a > 1}$ então:

$$\boxed{\log_a x_1 < \log_a x_2 \iff 0 < x_1 < x_2}$$

pois a função é ESTRITAMENTE CRESCENTE.

f) Se $\boxed{0 < a < 1}$ então

$$\boxed{\log_a x_1 < \log_a x_2 \iff x_1 > x_2 > 0}$$

pois a função é ESTRITAMENTE DECRESCENTE.

Álgebra – Binômio de Newton e Análise Combinatória – I

1. FATORIAL

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n \cdot (n-1)!, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

2. NÚMERO BINOMIAL

Definição:

$$\begin{cases} n \geqslant k \Rightarrow \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} \\ n < k \Rightarrow \binom{n}{k} = 0 \end{cases} \quad (n, k \in \mathbb{N})$$

Propriedades:

a) Binomiais complementares são iguais

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

b) Relação de STIFEL

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

c) Relação de FERMAT

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \binom{n}{k}$$

3. TRIÂNGULO DE PASCAL

$\binom{0}{0}$ $\xrightarrow{(b)}$ 2^n

$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$

$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$ (c)

$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$ (d)

$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$

. . . .

$\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\binom{n}{4} \ldots \binom{n}{n}$

. . . .

4. APLICAÇÕES

a) A relação de STIFEL pode ser memorizada assim:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$
$$\|$$
$$\binom{n+1}{k+1}$$

b) Soma na linha

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

c) Soma na coluna

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

d) Soma na diagonal

$$\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+2}{2} + \ldots + \binom{n}{n-k} = \binom{n+1}{n-k}$$

Álgebra – Binômio de Newton e Análise Combinatória – II

5. TEOREMA DO BINÔMIO

a) $(x+y)^n = \underbrace{\binom{n}{0}.x^n.y^0}_{} + \underbrace{\binom{n}{1}.x^{n-1}.y^1}_{} + \underbrace{\binom{n}{2}.x^{n-2}.y^2}_{} + \dots + \underbrace{\binom{n}{k}.x^{n-k}.y^k}_{} + \dots + \underbrace{\binom{n}{n}.x^0.y^n}_{} = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}.x^{n-k}.y^k}_{}$

b) Cálculo dos coeficientes

A maneira mais prática de calcular os coeficientes é lembrar que o primeiro é **sempre igual a 1** e os demais são calculados a partir do anterior pela relação de Fermat:

(cada coeficiente) x (expoente de x) ÷ (expoente de y aumentado de 1) = coeficiente seguinte

c) **Termo Geral**

O termo de ordem $k+1$ do desenvolvimento, feito segundo os expoentes decrescentes de x, é: $T_{k+1} = \binom{n}{k}.x^{n-k}.y^k$

O termo de ordem $k+1$ do desenvolvimento, feito segundo os expoentes crescentes de x, é: $T_{k+1} = \binom{n}{k}.x^{k}.y^{n-k}$

d) **Número de parcelas:** o desenvolvimento de $(x+y)^n$ tem $n+1$ parcelas.

e) **Soma de Coeficientes:** a soma dos coeficientes numéricos do desenvolvimento de $(ax+by)^n$, com a e b constantes é $(a+b)^n$

6. ARRANJOS

São agrupamentos que diferem entre si ou pela **natureza** ou pela **ordem** de seus elementos.

a) Cálculo dos arranjos simples:

$$\boxed{A_{n,k} = \underbrace{n.(n-1).(n-2).\dots.(n-k+1)}_{k\ \text{fatores}} = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

b) Cálculo dos arranjos com repetição

$$\boxed{A^*_{n,k} = \underbrace{n.n.n.\dots.n}_{k\ \text{fatores}} = n^k}$$

7. PERMUTAÇÃO

São agrupamentos que diferem entre si apenas pela **ordem** dos seus elementos.

As permutações são um caso particular dos arranjos em que $n = k$

a) Cálculo das permutações simples

$$\boxed{P_n = A_{n,n} \Rightarrow P_n = n!}$$

b) Cálculo das permutações com elementos repetidos.

$$\boxed{P_n^{\alpha,\beta} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!}}$$

8. COMBINAÇÕES

São agrupamentos que diferem entre si apenas pela **natureza** de seus elementos.

a) Cálculo das combinações simples

$$\boxed{C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}}$$

b) Cálculo das combinações com repetição

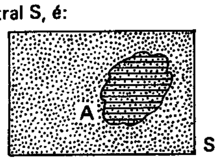
$$\boxed{C^*_{n,k} = C_{n+k-1,\,k}}$$

Álgebra – Probabilidade e Estatística

1. DEFINIÇÃO

A probabilidade do evento A, subconjunto de um espaço amostral S, é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$



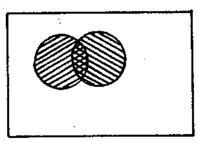
sendo n(A) o número de elementos do evento A e n(S) o número de elementos do espaço amostral S.

2. DECORRE da definição que

a) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

b) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

3. UNIÃO DE EVENTOS

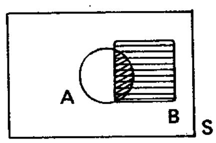


a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

b) Se $A \cap B = \phi$ os eventos A e B são chamados **mutuamente exclusivos** e neste caso:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

4. PROBABILIDADE CONDICIONADA



A probabilidade de ocorrer o evento A, sabendo que já ocorreu o evento B, é chamada de **probabilidade de A condicionada a B.**

$$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

5. EVENTOS INDEPENDENTES

a) $P(A \mid B) = P(A)$ e $P(B \mid A) = P(B) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ A e B são eventos independentes.

b) $P(A \mid B) \neq P(A)$ ou $P(B \mid A) \neq P(B) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ A e B são eventos dependentes.

6. INTERSECÇÃO DE EVENTOS

a) $P(A \cap B) = P(A).P(B \mid A)$

b) A e B independentes $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$$

7. LEI BINOMIAL DE PROBABILIDADE

Repetindo n vezes uma experiência onde um evento A tem probabilidade de ocorrer igual a **p**, a probabilidade de ocorrer apenas k vezes o evento A é

$$\boxed{C_{n,k}.p^k.(1-p)^{n-k}}$$

8. ESTATÍSTICA

a) Média: $\overline{X} = \dfrac{\Sigma f_i X_i}{n}$, com $\Sigma f_i = n$

b) Moda (M_o): é o elemento de freqüência máxima.

c) Mediana (M_d): é o elemento que ocupa a posição central.

d) Desvio: $D = X_i - \overline{X}$

e) Desvio Médio: $D_m = \dfrac{\Sigma f_i \mid D_i \mid}{n}$

f) Desvio Padrão: $s = \sqrt{\dfrac{\Sigma f_i D_i^2}{n}}$

g) Variância: $s^2 = \dfrac{\Sigma f_i D_i^2}{n}$

Álgebra – Conjuntos Numéricos I

1. NÚMEROS NATURAIS

a) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

b) **Divisão Euclidiana em $\mathbb{N}$**

$$\begin{array}{r|l} a & b \neq 0 \\ \hline r & q \end{array} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = b \cdot q + r \\ r < b \end{cases}$$

Se $r = 0$ a divisão é chamada exata.
Se $a < b$ então $q = 0$ e $r = a$

2. NÚMEROS INTEIROS

a) $\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

b) **Múltiplo e divisor em $\mathbb{Z}$**

$$a = b \cdot c \Rightarrow \begin{cases} a \text{ é múltiplo de } b \text{ e de } c \\ b \text{ e } c \text{ são divisores (fatores) de } a \end{cases}$$

c) **Conjunto dos múltiplos de a**

$M(a) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = ak, k \in \mathbb{Z}\} =$
$= \{0, \pm a, \pm 2a, \dots\}$

d) **Número par e número ímpar**

$a \in \mathbb{Z}$ é par $\Longleftrightarrow a \in M(2) \Longleftrightarrow a = 2k, k \in \mathbb{Z}$

$a \in \mathbb{Z}$ é ímpar $\Longleftrightarrow a \notin M(2) \Longleftrightarrow a = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$

e) **Número primo e número composto**

$$p \in \mathbb{Z} \text{ é primo} \Longleftrightarrow \begin{cases} p \neq 0, p \neq 1, p \neq -1 \\ D(p) = \{1, -1, p, -p\} \end{cases}$$

$$a \in \mathbb{Z} \text{ é composto} \Longleftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, a \neq 1, a \neq -1 \\ n[D(a)] > 4 \end{cases}$$

f) **Teorema fundamental da aritmética**

Todo número composto pode ser decomposto (fatorado) num produto de fatores primos. A menos da ordem dos fatores e do sinal dos fatores, a decomposição é única.

É a decomposição em fatores primos, da qual obtemos o Dispositivo Prático para obter todos os divisores naturais de um número natural.

g) **Exemplo**

Obter os divisores naturais de 120

		1
120	2	2 **divisores naturais de 120**
60	2	4
30	2	8
15	3	3, 6, 12, 24
5	5	5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120
1		

h) **Número de divisores**

Se $a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$, onde $p_1, p_2, \dots, p_n$ são os fatores primos naturais, distintos, do número natural a e $k_1, k_2, \dots, k_n$ os respectivos expoentes, então o **número de divisores naturais de a é**

$$(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot (k_3 + 1) \cdot \dots \cdot (k_n + 1)$$

i) **mdc e mmc**

$\text{mdc}(a, b) = \text{máx}[D(a) \cap D(b)]$

$\text{mmc}(a, b) = \text{mín}[M_+^*(a) \cap M_+^*(b)]$

j) **Propriedades do mdc e do mmc**

$\text{mdc}(a, b) \cdot \text{mmc}(a, b) = a \cdot b, \ \forall a, b \in \mathbb{N}^*$
$D(a) \cap D(b) = D[\text{mdc}(a, b)]$
$M_+^*(a) \cap M_+^*(b) = M_+^*[\text{mmc}(a, b)]$

k) **Números primos entre si**

a e b primos entre si $\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow$ **$\text{mdc}(a, b) = 1 \Longleftrightarrow \text{mmc}(a, b) = ab$**

l) **Teoremas importantes**

1) Se x divide a e x divide b então x divide $a \pm b$.

Álgebra – Conjuntos Numéricos II

$$\left.\begin{array}{l} x \in D(a) \\ x \in D(b) \end{array}\right\} \Rightarrow x \in D(a \pm b)$$

2) Se p é primo e p divide a.b então p é divisor de a ou p é divisor de b.

$$\left.\begin{array}{l} p \text{ primo} \\ p \in D(a.b) \end{array}\right\} \Rightarrow p \in D(a) \text{ ou } p \in D(b)$$

3) Se a é divisor de x, b é divisor de x, a e b são primos entre si então ab é divisor de x.

$$\left.\begin{array}{l} a \in D(x) \\ b \in D(x) \\ \text{mdc}(a,b) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot b \in D(x)$$

4) $\text{mdc}(a; b) = \text{mdc}(a; a \pm b)$

3. NÚMEROS RACIONAIS

a) $\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{a}{b}, \text{ com } a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\}$

b) Todo número racional é **inteiro ou decimal exato ou decimal não exato e periódico** (dízima periódica)

c) **Exemplos**

Inteiros: $\frac{3}{1} = 3$; $\frac{0}{2} = 0$; $\frac{10}{2} = 5$; etc...

Decimais Exatos: $\frac{6}{5} = 1{,}2$; $\frac{3}{4} = 0{,}75$; etc...

Decimais Não Exatos Periódicos:
$\frac{2}{3} = 0{,}666\dots$; $\frac{37}{30} = 1{,}2333\dots$

d) **Fração geratriz da dízima periódica**

$$0{,}414141\dots = \frac{41}{99}$$

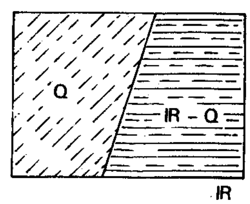
$$1{,}2333\dots = \frac{12{,}333\dots}{10} = \frac{12 + 0{,}333\dots}{10} = \frac{12 + \frac{3}{9}}{10} = \frac{37}{30}$$

e) Os únicos números que não são racionais (isto é: que não podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$ com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$) são os **decimais não exatos e não periódicos.** Estes números são chamados **irracionais.** O conjunto dos números irracionais é representado por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Exemplos: $\pi, e, \sqrt{2}, \sqrt{3}$, etc. .

4. NÚMEROS REAIS

a) O conjunto dos números reais é a união **dos racionais com os irracionais**

b) Observe que:



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

$\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \phi$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ (reais positivos)

$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ (reais estrit. positivos)

$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ (reais negativos)

$\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ (reais estrit. negativos)

c) **Fechamento**

$r \in \mathbb{Q}$ e $s \in \mathbb{Q} \Rightarrow r \pm s \in \mathbb{Q}$
$r \in \mathbb{Q}$ e $s \in \mathbb{Q} \Rightarrow r \cdot s \in \mathbb{Q}$
$r \in \mathbb{Q}$ e $s \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$
$r \in \mathbb{Q}$ e $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow r \pm \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$
$r \in \mathbb{Q}^*$ e $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow r \cdot \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$
$r \in \mathbb{Q}^*$ e $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{r}{\alpha} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$
$\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $\beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha \pm \beta \in \mathbb{R}$
$\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $\beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}$
$\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $\beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R}$

MATEMÁTICA Prof. André FICHA 11

Álgebra — Complexos

1. FORMA ALGÉBRICA

$z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$

2. OPERAÇÕES NA FORMA ALGÉBRICA

a) Adição:
$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

b) Subtração:
$(a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$

c) Multiplicação:
$(a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$

d) Divisão: (supondo $c + di \neq 0$)

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} =$$
$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i$$

e) Potências de i:

$e_1)$ $\boxed{i^0 = 1}$ $\boxed{i^1 = i}$ $\boxed{i^2 = -1}$ $\boxed{i^3 = -i}$

$e_2)$ $\begin{array}{r|l} n & 4 \\ \hline r & q \end{array} \Rightarrow \boxed{i^n = i^r}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$e_3)$ $i^n \in \{1, i, -1, -i\}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

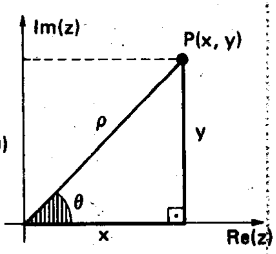
3. IGUALDADE

$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$

4. CONJUGADO

Se $z = x + yi$ então o conjugado de z é o complexo $\bar{z}$ tal que: $\bar{z} = x - yi$.

5. FORMA TRIGONOMÉTRICA E REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA



a) Módulo: $|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) Argumento: é o ângulo θ, tal que $\theta \in 0 \vdash 2\pi$ e $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\rho} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{y}{\rho} \end{cases}$ $(\rho \neq 0)$

c) Forma Trigonométrica: $z = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$

6. OPERAÇÕES NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

a) Multiplicação: $z_1 \cdot z_2 = (\rho_1 \cdot \rho_2) \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$

b) Divisão: $\dfrac{z_1}{z_2} = \left(\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right) \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$

c) Potenciação: $z^n = \rho^n \cdot [\cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}(n\theta)]$

d) Radiciação: $z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2\pi}{n} \cdot k\right) + i \cdot \text{sen}\left(\dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2\pi}{n} \cdot k\right)\right]$, com $k \in \{0, 1, 2, \ldots n-1\}$

Conclusões:

a) Todo complexo $z \neq 0$ admite no campo complexo **n raízes n-ésimas.**

b) Todas as raízes n-ésimas de z possuem o **mesmo módulo**, que vale $\sqrt[n]{\rho}$.

c) Os argumentos das raízes n-ésimas de z **são os n primeiros termos de uma P.A.** cujo primeiro termo é $\dfrac{\theta}{n}$ e cuja razão é $\dfrac{2\pi}{n}$.

MATEMÁTICA Prof. André FICHA 12

Álgebra — Polinômios

1. DEFINIÇÃO

$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$
onde $n \in \mathbb{N}^*$, $y \in C$ e $a_i \in \mathbb{C}$

2. VALOR NUMÉRICO: $P(\alpha)$

Substituir x por α e efetuar as operações indicadas.

3. GRAU

É o maior expoente de x com coeficiente diferente de zero.

$a_0 \neq 0 \Rightarrow G = n$

$a_0 = 0$ e $a_1 \neq 0 \Rightarrow G = n - 1$

$a_0 = a_1 = 0$ e $a_2 \neq 0 \Rightarrow G = n - 2$

. . . .

$a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$ e $a_n \neq 0 \Rightarrow G = 0$

$a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0 \Rightarrow$ não se define grau

4. POLINÔMIO IDENTICAMENTE NULO

a) **Definição**
$P(x) \equiv 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{C}$

b) **C.N.S.**
$\boxed{P(x) \equiv 0 \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0}$

5. POLINÔMIOS IDÊNTICOS

a) **Definição**
$A(x) \equiv B(x) \Leftrightarrow A(x) = B(x)$, $\forall x \in \mathbb{C}$

b) **C.N.S.**
$A(x) \equiv B(x) \Leftrightarrow a_0 = b_0$; $a_1 = b_1$; $a_2 = b_2$; . . . ; $a_n = b_n$

6. DIVISÃO DE POLINÔMIOS

a) **Definição**

$\begin{array}{r|l} A(x) & B(x) \neq 0 \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x) \\ G_R < G_B \text{ ou } R(x) \equiv 0 \end{cases}$

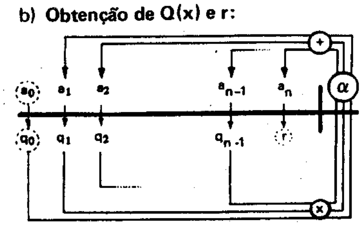
b) **Obtenção de Q(x) e R(x):**
Método da chave ou
Método dos Coeficientes a determinar

7. DIVISÃO POR $\boxed{x - \alpha}$

Valem as propriedades do item (6) e além disso:

a) **Obtenção de r:**
$\boxed{r = A(\alpha)}$ (T. de D'Alambert)

b) **Obtenção de Q(x) e r:**



(Briott-Ruffini)

c) Se A(x) é divisível por $x - \alpha \Leftrightarrow \alpha$ é raiz de A(x).

d) Se A(x) é divisível por $x - \alpha$ e por $x - \beta$, com $\alpha \neq \beta$, então A(x) é divisível por $(x - \alpha) \cdot (x - \beta)$.

8. DIVISÃO POR ax + b

Valem as propriedades do item (7), observando que:

a) O α, tanto no teorema de D'Alambert como no dispositivo de Briott-Ruffini, **é sempre a raiz do divisor ax + b.**

b) No dispositivo de Briott-Ruffini o último coeficiente já é o resto.

c) Os demais coeficientes devem ser divididos por a que é o coeficiente de x no divisor.

Álgebra — Equações Algébricas

1. DEFINIÇÃO

$$F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

2. T.F.A.

Toda equação de grau estritamente positivo admite no campo complexo **pelo menos uma raiz.**

3. T. DA DECOMPOSIÇÃO

$$F(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n).$$

4. DE 2 E 3 CONCLUÍMOS

Toda equação de grau estritamente positivo admite no campo complexo **pelo menos uma raiz e no máximo n raízes.**

5. RELAÇÕES DE GIRARD

$$\boxed{\begin{array}{l} r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + \ldots = +\dfrac{a_2}{a_0} \\ r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \ldots = -\dfrac{a_3}{a_0} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \ldots \cdot r_n = (-1)^n \cdot \dfrac{a_n}{a_0} \end{array}}$$

6. RAÍZES RACIONAIS

Se $\frac{p}{q}$ é raiz de $F(x) = 0$ de coeficientes inteiros então **p é divisor de a_n e q é divisor de a_0.**

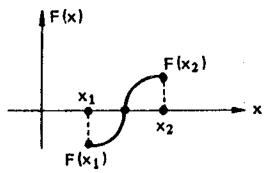
Obs.: $\frac{p}{q}$ é fração irredutível.

7. RAÍZES MÚLTIPLAS

Se r é raiz de multiplicidade $\boxed{m}$ de $F(x) = 0$ será também raiz de **$F'(x) = 0$ com multiplicidade** $\boxed{m - 1}$.

8. RAÍZES REAIS

$\boxed{F(x_1) \cdot F(x_2) < 0}$ $\Rightarrow$ **número ímpar de** raízes reais no intervalo x_1 ——— x_2.



9. RAÍZES COMPLEXAS

Se $\boxed{z = a + bi}$, com $b \neq 0$, é raiz de uma equação de coeficientes reais então $\boxed{\bar{z} = a - bi}$ também é. Além disso **z** e **$\bar{z}$** são raízes de mesma multiplicidade.

Conseqüência: Toda equação algébrica de coeficientes reais e grau **ímpar** sempre admite **pelos menos uma raiz real.**

10. EQUAÇÕES RECÍPROCAS

a) $\begin{cases} \text{De 1ª espécie se: } a_0 = a_n;\ a_1 = a_{n-1}; \ldots \\ \text{De 2ª espécie se: } a_0 = -a_n;\ a_1 = -a_{n-1}; \ldots \end{cases}$

b) Os números 1 e -1 geralmente são raízes.

c) Colocando em evidência os fatores correspondentes ao item (b), recai-se numa equação recíproca de 1ª espécie e grau par: para resolver esta existe um "artifício".

d) Se $a \neq 0$ é raiz de uma equação recíproca então $\frac{1}{a}$ também é.

Álgebra — Fatoração

1. DEFINIÇÃO

Fatorar é transformar uma **soma de duas ou mais parcelas** num **produto de dois ou mais fatores.**

2. CASOS TÍPICOS

1º caso: FATOR COMUM

$$\boxed{ax + bx = x \cdot (a + b)}$$

2º caso: AGRUPAMENTO

$$\boxed{\begin{array}{l} ax + bx + ay + by = x \cdot (a + b) + y \cdot (a + b) = \\ = (a + b) \cdot (x + y) \end{array}}$$

3º caso: DIFERENÇA DE QUADRADOS

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)}$$

4º caso: QUADRADO PERFEITO

$$\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2}$$

$$\boxed{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b) \cdot (a - b) = (a - b)^2}$$

5º caso: SOMA e DIFERENÇA DE CUBOS

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)}$$

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)}$$

6º caso: CUBO PERFEITO

$$\boxed{\begin{array}{l} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = \\ = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^3 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = \\ = (a - b) \cdot (a - b) \cdot (a - b) = (a - b)^3 \end{array}}$$

7º caso: TRINÔMIO DO 2º GRAU

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - r_1)\ (x - r_2)}$$

onde r_1 e r_2 são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$

8º caso: UM ARTIFÍCIO

$$a^4 + a^2 + 1 = a^4 + 2a^2 + 1 - a^2 = (a^2 + 1)^2 - a^2 = (a^2 + 1 + a)\ (a^2 + 1 - a)$$

3. EXEMPLOS

1. Fatorar $x^2 - 5x + 6$

   As raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ são $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$; o coeficiente $a = 1$

   Logo:

   $$x^2 - 5x + 6 = 1(x - 2)\ (x - 3)$$

2. $x^2z^2 + y^2w^2 - x^2w^2 - y^2z^2 =$

   $= x^2(z^2 - w^2) - y^2\ (z^2 - w^2) =$

   $= (x^2 - y^2)\ (z^2 - w^2)$. Pode-se continuar a fatoração por diferença de quadrados $(x^2 - y^2)(z^2 - w^2) = (x + y)(x - y)(z + w)(z - w)$

3. Fatore desenvolvendo:

   $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 =$
   $= a^3 - b^3 - 3ab(a - b) =$
   $= (a - b)(a^2 + ab + b^2) - 3ab(a - b) =$
   $= (a - b)(a^2 + ab + b^2 - 3ab) =$
   $= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) =$
   $= (a - b)(a - b)^2 = (a - b)^3$

Álgebra – Conjuntos

1. CONJUNTO E ELEMENTO

Se x é um elemento de um conjunto A, escreveremos: $x \in A$ (lê-se "x é elemento de A").

Se x não é um elemento de um conjunto A, escreveremos: $x \notin A$ (lê-se "x não é elemento de A").

2. CONJUNTO VAZIO

$A = \phi \Leftrightarrow \forall x, x \notin A$

3. SUBCONJUNTO OU PARTE – RELAÇÃO DE INCLUSÃO

$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$

$A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x)\ (x \in A \text{ e } x \notin B)$

$x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subset A$

$x \notin A \Leftrightarrow \{x\} \not\subset A$

4. IGUALDADE DE CONJUNTOS

$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ e } B \subset A$

$A \neq B \Leftrightarrow A \not\subset B \text{ ou } B \not\subset A$

5. CONJUNTO DAS PARTES DE UM CONJUNTO

a) Definição

$P(A) = \{x \,/\, x \subset A\}$

$x \in P(A) \Leftrightarrow x \subset A$

b) Teorema

Se A tem k elementos então P(A) tem 2^k elementos.

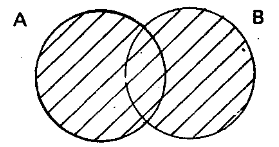
c) Propriedades

1) $A \in P(A)$
2) $\phi \in P(A)$
3) Se A tem k elementos então A possui 2^k subconjuntos.

6. OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS

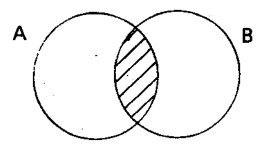
a) Reunião ou União

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$



b) Intersecção

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

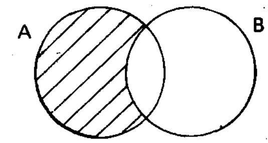


$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Se $A \cap B = \phi$ então dizemos que A e B são Disjuntos.

c) Subtração

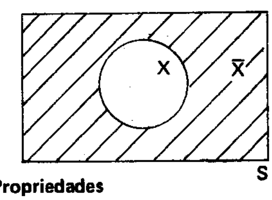
1) $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$



$C_A^B = A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$

$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

2) $X \subset S \Rightarrow \overline{X} = S - X = C_S X$



d) Propriedades

$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$

$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Álgebra – Funções I

1. FUNÇÃO OU APLICAÇÃO

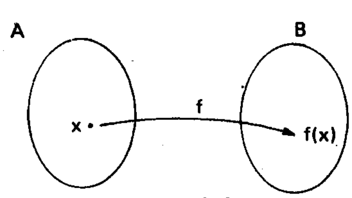
a) Definição

Seja f uma Relação Binária de A em B. Dizemos que f é uma Função de A em B se, e somente se, estão verificadas as seguintes condições:

F.1. – **Todo** $x \in A$ se relaciona com **algum** $y \in B$.

F.2. – **Cada** $x \in A$ que se relaciona, relaciona-se com um **único** $y \in B$.

O único $y \in B$ chama-se IMAGEM DE x PELA FUNÇÃO f e é indicado por f(x).



b) Conjunto domínio de f

$D(f) = A$

c) Conjunto contradomínio de f

$CD(f) = B$

d) Conjunto-Imagem de f

$Im(f) = \{f(x) \in B \mid x \in A\}$

2. TIPOS DE FUNÇÕES

a) Função Sobrejetora

Uma função $f: A \to B$ é sobrejetora se, e somente se, $Im(f) = CD(f)$.

b) Função Injetora

Uma função $f: A \to B$ é injetora, se e somente se:

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in A$

c) Função Bijetora

Uma função $f: A \to B$ é bijetora, se e somente se, f é **sobrejetora** e **injetora**.

3. FUNÇÕES MONOTÔNICAS (MONÓTONAS)

Sejam: $f: A \to B$ uma função, I um subconjunto de A e x_1 e x_2 elementos de I.

a) f é ESTRITAMENTE CRESCENTE EM I se, e somente se:

$\boxed{x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)}$

b) f é CRESCENTE EM I se, e somente se:

$x_1 < x_2 \Rightarrow \boxed{f(x_1) \leqslant f(x_2)}$

c) f é ESTRITAMENTE DECRESCENTE EM I, se e somente se:

$\boxed{x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)}$

d) f é DECRESCENTE EM I, se e somente se:

$x_1 < x_2 \Rightarrow \boxed{f(x_1) \geqslant f(x_2)}$

e) f é CONSTANTE EM I se, e somente se:

$x_1 < x_2 \Rightarrow \boxed{f(x_1) = f(x_2)},\ \forall x_1, x_2 \in I$

4. FUNÇÃO PAR E FUNÇÃO ÍMPAR

Seja $f: A \to R$ uma função.

a) f é uma **Função Par** se, e somente se:

$\boxed{f(-x) = f(x)}$, para todo $x \in A$.

b) f é uma **Função Ímpar** se, e somente se:

$\boxed{f(-x) = -f(x)}$, para todo $x \in A$

c) O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo dos y.

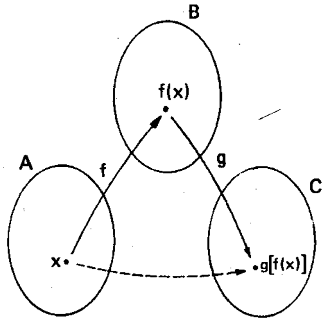
d) O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem do sistema de coordenadas.

Álgebra – Funções II

5. COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

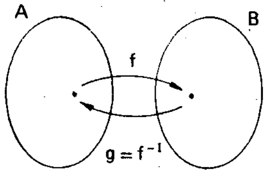
Sejam $f: A \to B$ e $g: B \to C$ duas funções.
Chama-se Função Composta de f com g à função $gof: A \to C$, tal que:

$$\boxed{(gof)\,(x) = g\,[\,f(x)\,]}$$



6. FUNÇÃO INVERSA

Seja $f: A \to B$ uma função e i a função identidade.
Se existir uma função $g: B \to A$ tal que:
a) $gof = i_A$ b) $fog = i_B$
dizemos que g é a função inversa de f e a indicamos por f^{-1}.



Observemos que:

1) A função $f: A \to B$ é inversível se, e somente se, f é bijetora.
2) Para se determinar a sentença da função inversa basta:
a) isolar x na sentença de f
b) trocar x por y.
3) Os gráficos de f e f^{-1} **são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.**

7. FUNÇÃO LIMITADA

Seja $f: A \to R$ uma função.
A função f é limitada se, e somente se, existem a e b reais tais que:

$$\boxed{a \leqslant f(x) \leqslant b}$$

Se f é uma função limitada, o seu gráfico está contido em uma faixa horizontal.

8. FUNÇÃO PERIÓDICA

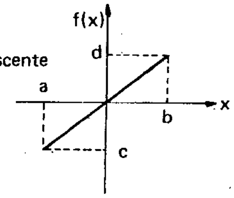
Uma função $f: A \to R$ é periódica se, e somente se, existe $p \in R^*$, tal que.

f(x + p) = f(x), para todo $x \in A$.

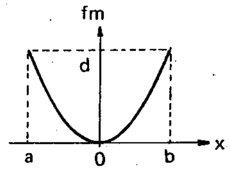
Se $f(x + p) = f(x)$ para todo $x \in A$, então $f(x + K.p) = f(x)$ para todo $x \in A$, com $K \in Z$.
Se uma função é periódica então o menor valor positivo de p chama-se período de f.

9. EXEMPLOS

a) $f: [\,a\,;\,b\,] \to [\,c\,;\,d\,]$ tal que $f(x) = x$
A função é:
Bijetora
Estritamente crescente
Ímpar
Inversível
Limitada



b) $f: [\,a\,;\,b\,] \to [\,0\,;\,d\,]$ tal que $f(x) = x^2$
A função é:
Sobrejetora
Par
Limitada
A função não é injetora.



Álgebra – Progressão Aritmética e Progressão Geométrica

1. SEQUÊNCIA REAL

Definição: é toda função $f: N^* \to R$ que a cada número natural n associa um único número real a_n.
Notação: $f = (a_n)_{n \in N^*} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ onde $a_1, a_2, \ldots$ são chamados termos da seqüência.

2. PROGRESSÃO ARITMÉTICA (P.A.)

a) Definição:
Dados os números a e r define-se:
$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ é uma P.A. $\iff$

$$\iff \begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + r \end{cases}$$

b) Termo Geral: $a_n = a_1 + (n-1).r$

c) Soma: $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)}{2}.n$

d) Propriedades:

1) $a_k = \dfrac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$, isto é: numa P.A. cada termo, a partir do segundo, é média aritmética entre o anterior e o posterior.

2) $a_{k+1} + a_{n-k} = a_1 + a_n$, ou seja: considerando os n primeiros termos de uma P.A. a soma de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

3. PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (P.G.)

a) Definição:
Dados os números a e q define-se:
$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ é uma P.G. $\iff$

$$\iff \begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \end{cases}$$

b) Termo Geral: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

c) Produto: $|P_n| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

d) Propriedades

1) $a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}$, isto é: numa P.G. cada termo, a partir do segundo, é média geométrica entre o anterior e o posterior.

2) $a_{k+1} \cdot a_{n-k} = a_1 \cdot a_n$, ou seja: considerando os n primeiros termos de uma P.G., o produto de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

e) Soma dos termos da P.G.:

1) Se $q = 1$ então $S_n = n \cdot a_1$

2) Se $q \neq 1$ então:

$$S_n = \frac{a_1\,(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

3) Se $-1 < q < 1$ então

$$S_\infty = \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

4. EXEMPLOS

1. Problema proposto a Gauss quando o mesmo deduziu intuitivamente uma forma de obter a soma dos n primeiros termos de uma P.A.
Ache a soma dos primeiros 100 números naturais (excluindo o zero).
$a_1 = 1$ $r = 1$
$a_n = 100$
$n = 100$ $S_{100} = \dfrac{1 + 100}{2} \times 100 = 5050$

2. Em um tabuleiro de xadrez, colocando-se 1 grão de milho na 1ª casa, 2 na 2ª, 4 na 3ª e assim sucessivamente até a 64ª casa, qual o número total de grãos de milho teremos sobre o tabuleiro?
Observa-se uma P.G.
Com $a_1 = 1$
$q = 2$
$n = 64$
logo:

$$S_n = \frac{1\,(2^{64} - 1)}{1} = 2^{64} - 1$$

Álgebra – Matrizes e Determinantes I

I. MATRIZES

1. DEFINIÇÕES

a) Matriz m x n

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

Se m = n então a matriz M é quadrada.

b) Matriz nula

$0 = (x_{ij})_{m \times n}$ tal que $x_{ij} = 0$

c) Matriz identidade ou unidade de ordem n.

$I_n = (x_{ij})_{n x n}$ tal que $x_{ij} = 1$ se $i = j$ e $x_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n x n}$$

d) Matriz oposta

Se $A = (a_{ij})_{m x n}$ é uma matriz então $B = (b_{ij})_{m x n}$ é a matriz oposta de A se e somente se $b_{ij} = -a_{ij}$.

e) Matriz transposta.

Se $A = (a_{ij})_{m x n}$ é uma matriz então $A^t = (a'_{ij})_{n x m}$ é a matriz transposta de A se e somente se $a'_{ji} = a_{ij}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} m \times n$$

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} n \times m$$

f) Matrizes iguais

$A = (a_{ij})_{m x n}$ e $B = (b_{ij})_{m x n}$ são matrizes iguais, se, e somente se,

$$a_{ij} = b_{ij}.$$

2. OPERAÇÕES

a) Adição

Se $A = (a_{ij})_{m x n}$, $B = (b_{ij})_{m x n}$ e $C = (c_{ij})_{m x n}$ então $C = A + B$ se, e somente se, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

b) Multiplicação (de número por matriz)

Se $A = (a_{ij})_{mxn}$, $B = (b_{ij})_{mxn}$ e α é um número qualquer então $B = \alpha . A$ se, e somente se, $b_{ij} = \alpha . a_{ij}$.

c) Multiplicação (de matriz por matriz)

Se $A = (a_{ik})_{mxp}$, $B = (b_{kj})_{pxn}$ e $C = (c_{ij})_{mxn}$ então $C = A.B$ se, e somente se, $c_{ij} = a_{i1} . b_{1j} + a_{i2} . b_{2j} + \dots + a_{ip} . b_{pj}$.

3. PROPRIEDADES

As propriedades das operações com números reais valem para as operações com matrizes, porém, na multiplicação de matrizes não valem as propriedades comutativa, anulamento do produto e cancelamento, ou seja:

a) Existem matrizes A e B tais que $A . B \neq B . A$

Álgebra – Matrizes e Determinantes II

b) Pode-se ter $A . B = 0$ mesmo com $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

c) Pode-se ter $A . C = B . C$ mesmo com $A \neq B$ e $C \neq 0$.

Se A e B são matrizes conformes para operação indicada em cada caso e α é um número qualquer então:

d) $(A^t)^t = A$

e) $(A + B)^t = A^t + B^t$

f) $(\alpha . A)^t = \alpha . A^t$

g) $(A . B)^t = B^t . A^t$

II. DETERMINANTES

1. DEFINIÇÕES

a) Determinante de matriz de 1ª ordem.

Se $M = (a_{11})$ então $\det M = a_{11}$

b) Determinante de matriz de ordem $n \geq 2$.

O determinante é igual à soma dos produtos $(-1)^P . a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \dots a_{n\alpha_n}$ onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ é uma permutação genérica dos segundos índices e p é o número de inversões em relação à fundamental 1, 2, 3, . . ., n.

c) Cofator A_{ij}

Se $M = (a_{11})$ então $A_{11} = 1$.

Se M é matriz quadrada de ordem $n \geq 2$ então $A_{ij} = (-1)^{i+j} . D_{ij}$ onde D_{ij} é o determinante que se obtém de M suprimindo a linha i e a coluna j.

2. REGRAS PRÁTICAS

a) Determinante de ordem 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} . a_{22} - a_{12} . a_{21}$$

$$\ominus \qquad \oplus$$

b) Determinante de ordem 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$\ominus \quad \ominus \quad \ominus \qquad \oplus \quad \oplus \quad \oplus$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} + - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

3. PROPRIEDADES

Grupo 1 – Teoremas de Laplace e Cauchy

Numa matriz quadrada a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer:

a) pelos respectivos cofatores é igual ao determinante da matriz. (T. de Laplace)

b) pelos cofatores dos elementos correspondentes de outra fila paralela é zero. (T. de Cauchy)

Grupo 2 – Determinante igual a zero.

O determinante de uma matriz quadrada é igual a zero, se a matriz possui:

a) uma fila nula.

b) duas filas paralelas iguais.

c) duas filas paralelas proporcionais.

d) uma fila que é combinação linear das outras filas paralelas.

Grupo 3 – Determinante não se altera.

O determinante de uma matriz quadrada não se altera se:

a) trocarmos ordenadamente linhas por colunas ($\det M = \det M^t$).

b) somarmos a uma fila uma combinação linear de outras filas paralelas (T. de Jacobi).

Álgebra – Matrizes e Determinantes III

Grupo 4 – Alterações no deteminante

O determinante de uma matriz quadrada de ordem n altera-se:

a) trocando de sinal, quando duas filas paralelas trocam de lugar entre si.

b) ficando multiplicado por α, quando os elementos de uma fila são multiplicados por α.

c) ficando multiplicado por α^n quando a matriz é multiplicada por α.

Grupo 5 – Propriedades complementares

a) Teorema de Binet – Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem então **det (AB) = det A . det B.**

b) $\begin{vmatrix} a & p+q & x \\ b & m+n & y \\ c & r+s & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & p & x \\ b & m & y \\ c & r & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & q & x \\ b & n & y \\ c & s & z \end{vmatrix}$

c) Determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a).(c-a).(c-b)$$

d) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ x & b & 0 & 0 \\ y & z & c & 0 \\ m & n & p & d \end{vmatrix} = abcd$

III. MATRIZ INVERSA

1. DEFINIÇÃO

M^{-1} é inversa de M se, e somente se, $M.M^{-1} = M^{-1}.M = I_n$

2. EXISTÊNCIA

M é inversível se, e somente se, det M $\neq 0$.

3. ELEMENTO

$$b_{ij} \text{ de } M^{-1} = \frac{\text{cofator de } a_{ji} \text{ de } M}{\det M}$$

4. REGRA

a) Calcule det M

b) Determine a matriz dos cofatores de M: M'

c) Determine a matriz adjunta: $\overline{M} = M'^t$

d) Aplique a fórmula: $M^{-1} = \frac{1}{\det M} . \overline{M}$

5. PROPRIEDADES

a) A^{-1} é única.

b) $(A^{-1})^{-1} = A$

c) $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

d) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

e) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

6. EXEMPLO

Determine a inversa da matriz M dada:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Det M = 6 - 5 = 1 ∴ det M $\neq 0$

b) $M' = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\overline{M} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

d) $M^{-1} = \frac{1}{1} . \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

Álgebra – Sistemas Lineares

1. DEFINIÇÕES

a) Sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Obs.: Se $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, o sistema é homogêneo.

b) Matriz Incompleta.

$$M.I. = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

c) Matriz Completa

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

d) Se a matriz incompleta for quadrada o seu determinante é chamado determinante do sistema (D).

2. SISTEMA NORMAL

a) m = n e D $\neq 0$

b) Teorema de Cramer – qualquer sistema normal é possível e determinado.

c) Resolução (regra de Cramer)

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; x_2 = \frac{D_2}{D}; \ldots; x_n = \frac{D_n}{D}$$

3. CARACTERÍSTICA

A característica de uma matriz é "p" se, e somente se:

a) Existir um menor de ordem p (determinante) diferente de zero.

b) Todos os menores de ordem p + 1 (determinante) que se obtém ORLANDO o menor de ordem p do item (a) são iguais a zero.

4. DISCUSSÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Sendo: p, a característica de M.I.
q, a característica de M.C.
n, o número de incógnitas

O teorema de Rouché-Cappelli nos permite concluir que:

a) p $\neq$ q ⇔ (s) é impossível (nenhuma solução).

b) p = q = n ⇔ (s) é possível e determinado (única solução).

c) p = q < n ⇔ (s) é possível e indeterminado (infinitas soluções).

5. SISTEMA LINEAR HOMOGÊNEO

a) p = q, sempre ⇒ sistema possível.

b) a enupla (0, 0, . . . , 0) sempre é solução (trivial).

c) p = n ⇒ só admite a solução trivial.

d) p < n ⇒ outras soluções além da trivial.

Exemplo:

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 8$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 12$$

$$x = \frac{4}{4} = 1; \quad y = \frac{8}{4} = 2; \quad z = \frac{12}{4} = 3$$

Solução: (x; y; z) = (1; 2; 3)

Álgebra – Limites

1. LIMITE DE UMA FUNÇÃO

L é o limite da função f, quando x tende ao ponto a, se, e somente se:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

2. FUNÇÃO CONTÍNUA

f é contínua no ponto $a \in D(f)$ se, e somente se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

3. FUNÇÃO DESCONTÍNUA

f é descontínua no ponto $a \in D(f)$ se, e somente se, ou $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$ ou $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

4. LIMITE TRIGONOMÉTRICO FUNDAMENTAL

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 \text{ (x em radianos)}$$

5. LIMITE EXPONENCIAL FUNDAMENTAL

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

6. PROPRIEDADES DOS LIMITES

a) O limite de uma função f: $A \to \mathbb{R}$, se existir é unico.

b) Sejam f, g e h três funções tais que: $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, $\forall x \neq a$

$\lim_{x \to a} g(x) = b$

$\lim_{x \to a} h(x) = b$

Pode-se concluir que $\lim_{x \to a} f(x) = b$

7. OPERAÇÕES

a) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

b) $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

c) $\lim_{x \to a} [f(x) \, . \, g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \, . \lim_{x \to a} g(x)$

d) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ (se $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$)

8. LIMITES INFINITOS

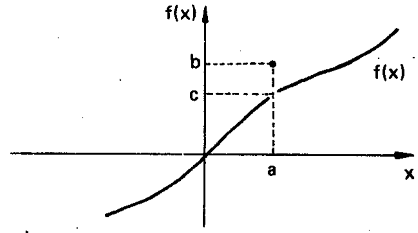
a) Se $\lim f(x) = 0$ e se para x "muito próximo de a" $f(x) \neq 0$ então:

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \pm\infty \text{ ou } \nexists \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)}$$

b) Se $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ então $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

Exemplo:

Analise a continuidade da função descrita pelo gráfico abaixo:



observamos que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to a^+} f(x) = c \\ \lim_{x \to a^-} f(x) = c \\ f(a) = b \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = c \neq f(a) = b$$

logo:

A função é descontínua em a, apesar de existir o $\lim_{x \to a} f(x)$.

Álgebra – Derivadas – I

1. DEFINIÇÃO

Seja f: $I \to \mathbb{R}$ uma função de variável real. f é derivável no ponto $a \in I$, se e somente se, existe um número real d tal que:

$$d = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

O número real d é a derivada da função f no ponto a e é indicado por $f'(a)$.

Se fizermos $x - a = h$ então:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2. FUNÇÃO DERIVADA

Seja f: $I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em I. Chama-se função derivada da Função f à função f': $I \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

3. TABELA DE DERIVADAS

a) Operações com funções:

Sejam $u = f(x)$ e $v = g(x)$ duas funções e k um número real.

$y = k \, . \, u \Rightarrow y' = k \, . \, u'$

$y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'$

$y = u - v \Rightarrow y' = u' - v'$

$y = u \, . \, v \Rightarrow y' = v \, . \, u' + v' \, . \, u$

$y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{v \, . \, u' - u \, . \, v'}{v^2}$

b) Função Constante

$y = k \Rightarrow y' = 0$

c) Função Identidade

$y = x \Rightarrow y' = 1$

d) Função Potência

$y = x^k \Rightarrow y' = k \, . \, x^{k-1}$

e) Função Exponencial

$y = a^x \Rightarrow y' = a^x \, . \ln a$

$y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

f) Função Logarítmica

$y = \log_a x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln a}$

$y = \ln x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x}$

g) Funções Trigonométricas

$y = \text{sen } x \Rightarrow y' = \cos x$

$y = \cos x \Rightarrow y' = -\text{sen } x$

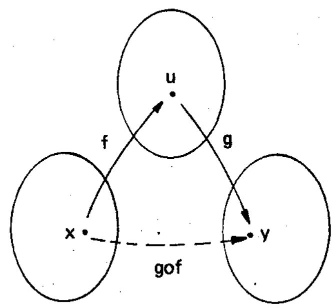
$y = \text{tg } x \Rightarrow y' = \sec^2 x$

$y = \text{cotg } x \Rightarrow y' = -\text{cossec}^2 x$

$y = \sec x \Rightarrow y' = \sec x \, . \, \text{tg } x$

$y = \text{cossec } x \Rightarrow y' = -\text{cossec } x \text{ cotg } x$

h) Função Composta



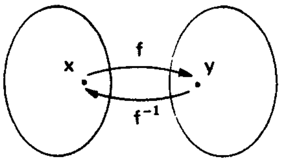
Álgebra – Derivadas – II

$$u = f(x) \Rightarrow \frac{du}{dx}$$

$$y = g(u) \Rightarrow \frac{dy}{du}$$

$$\therefore\ y = g[\,f(x)\,] \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

i) Função Inversa



$$\underbrace{y = f(x)}_{\frac{dy}{dx}} \Leftrightarrow \underbrace{x = f^{-1}(y)}_{\frac{dx}{dy}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

4. APLICAÇÕES DE DERIVADAS

a) Ponto crítico de f.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Um ponto $a \in I$ é chamado **ponto crítico de f** se, e somente se, $f'(a) = 0$.

Se $a \in I$ é um ponto crítico de f então:

$$\begin{cases} \text{ou a é minimante} \\ \text{ou a é maximante} \\ \text{ou a é abscissa de ponto de inflexão horizontal.} \end{cases}$$

b) Função Monotônica (Monótona)

Se $f: I \to \mathbb{R}$ é derivável em $J \subset I$, então:

– **f é estritamente crescente** em J se, e somente se, $f'(x) > 0$ para todo $x \in J$.

– **f é estritamente decrescente** em J se, e somente se, $f'(x) < 0$ para todo $x \in J$.

c) Pontos de Máximo e Mínimo Locais:

Se $f: I \to \mathbb{R}$ é derivável e $f': I \to \mathbb{R}$ é também derivável, então:

$f'(a) = 0$ e $f''(a) < 0 \Rightarrow$ a é ponto de máximo.

$f'(a) = 0$ e $f''(a) > 0 \Rightarrow$ a é ponto de mínimo.

d) Pontos de Inflexão:

Seja $f: I \to \mathbb{R}$ derivável tal que f' e f'' sejam também deriváveis. Se $f''(a) = 0$ e $f'''(a) \neq 0$, então:

$f'(a) = 0 \Rightarrow$ a é ponto de inflexão horizontal.

$f'(a) \neq 0 \Rightarrow$ a é ponto de inflexão oblíqua.

e) Interpretação Geométrica.

A derivada de f no ponto a é o coeficiente angular da reta t, tangente a curva f no ponto P(a, f(a)).

A equação da reta tangente à curva f no ponto de abscissa a é $y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$.

Exemplo:

Determine o ponto de máximo (ou mínimo) de uma função quadrática.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0).$$

$$f'(x) = 2ax + b = 0 \Rightarrow x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$y_v = f(x_v) = a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \;\therefore$$

$$\therefore\ y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Álgebra – Grandezas Proporcionais

1. PROPORÇÕES

Sejam a, b, c e d números reais não nulos.

a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$

b) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

c) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

d) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

2. GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

(a, b, c) é diretamente proporcional a (m, n, p) se, e somente se:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} = k = \frac{a+b+c}{m+n+p}$$

3. GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

(a, b, c) é inversamente proporcional a (m, n, p) se, e somente se: $a \cdot m = b \cdot n = c \cdot p = k$

4. PORCENTAGEM

p% de C é $\frac{p}{100} \cdot C$.

Após um aumento de p% sobre c passamos a ter $(100 + p)\% \cdot C = \frac{(100 + p)}{100} \cdot C$

Após um desconto de p% sobre C passamos a ter $(100 - p)\%C = \frac{100 - p}{100} \cdot C$

Após dois aumentos sucessivos de p% sobre C passamos a ter

$$(100 + p)\% \cdot (100 + p)\% \cdot C = \left(\frac{100 + p}{100}\right)^2 \cdot C$$

Se um capital C é aplicado a uma taxa de i% por período após t períodos teremos um juro composto j tal que

$$j = C\,[\,(100 + 1)\%)^t - 1]$$

5. JUROS SIMPLES

Se um capital C rende juros simples j após um tempo t aplicado a uma taxa de i% então:

$$j = \frac{C\,i\,t}{100}$$

6. MÉDIAS

a) Média Aritmética

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

b) Média Aritmética Ponderada

$$P = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

c) Média Harmônica

$$H = \frac{1}{\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n}}$$

d) Média Geométrica

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

e) A média aritmética é sempre maior ou igual à média geométrica

$$A \geqslant G$$

MATEMÁTICA Prof. André **FICHA 27**

Trigonometria I

1. MEDIDAS DE ARCOS E ÂNGULOS

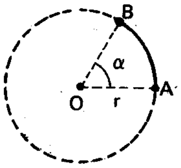
Sistema Grau

Grau (^{o}) $= \dfrac{1}{90}$ do ângulo reto

Minuto (') $= \dfrac{1}{60}$ do grau

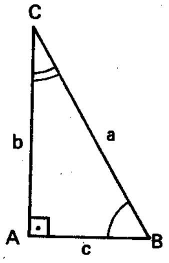
Segundo ('') $= \dfrac{1}{60}$ do minuto

Sistema Radiano



$$\alpha = \frac{\text{comp}(\widehat{AB})}{r}$$

2. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO



$$\text{seno} = \frac{\text{cat. oposto}}{\text{hipot.}}$$

$$\text{co-seno} = \frac{\text{cat. adjac.}}{\text{hipot.}}$$

$$\text{tangente} = \frac{\text{cat. oposto}}{\text{cat. adjac.}}$$

$$\text{sen } B = \frac{b}{a} = \cos C$$

$$\cos B = \frac{c}{a} = \text{sen } C$$

$$\text{tg } B = \frac{b}{c} = \text{cotg } C$$

$$\text{cotg } B = \frac{c}{b} = \text{tg } C$$

$$\sec B = \frac{a}{c} = \text{cossec } C$$

$$\text{cossec } B = \frac{a}{b} = \sec C$$

Ângulos complementares têm co-funções iguais.

3. VALORES NOTÁVEIS

x		sen x	cos x	tg x
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

4. RELAÇÕES FUNDAMENTAIS E AUXILIARES

F.I.) $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

F.II.) $\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$

F.III.) $\text{cotg } x = \dfrac{1}{\text{tg } x} = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}$

F.IV.) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

F.V.) $\text{cossec } x = \dfrac{1}{\text{sen } x}$

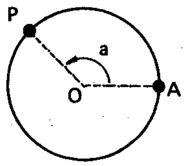
A.I.) $\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$

A.II.) $\text{cossec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x$

5. ARCO TRIGONOMÉTRICO

$\widehat{AP}$ é o conjunto de todos os arcos de origem A e extremidade P.

Conjunto das determinações:



$\boxed{a + n \cdot 2\pi}$

ou

$\boxed{a + n \cdot 360^{o}}$

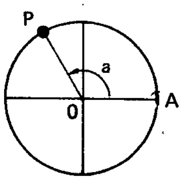
$(n \in \mathbb{Z})$

MATEMÁTICA Prof. André **FICHA 28**

Trigonometria II

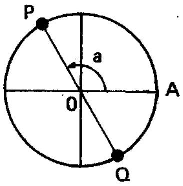
Casos Notáveis:

I)



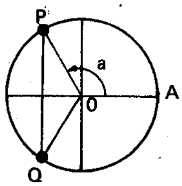
$a + n \cdot 360^{o}$
$a + n \cdot 2\pi$

II)



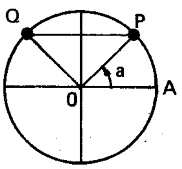
$a + n \cdot 180^{o}$
$a + n \cdot \pi$

III)



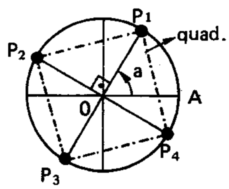
$\pm a + n \cdot 360^{o}$
$\pm a + n \cdot 2\pi$

IV)



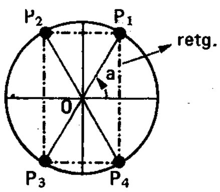
$(-1)^n \cdot a + n \cdot 180^{o}$
$(-1)^n \cdot a + n \cdot \pi$

V)

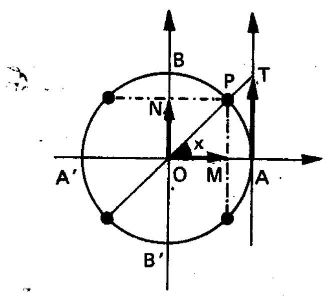


$a + n \cdot 90^{o}$
$a + n \cdot \pi/2$

VI)



$\pm a + n \cdot 180^{o}$
$\pm a + n \cdot \pi$



Do ciclo trigonométrico definimos:

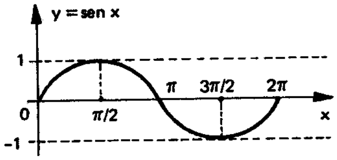
sen x = ON
cos x = OM
tg x = AT

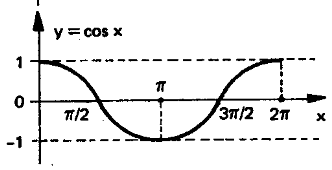
6. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

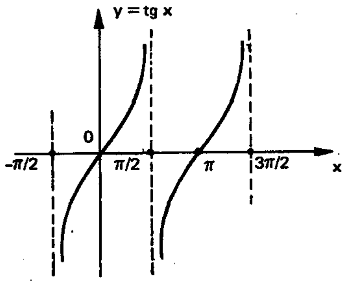
Função	Domínio	Imagem	I	II	III	IV	Par ou Ímpar	Período	Sinais
sen x	$\mathbb{R}$	[-1 ; 1]	↗	↘	↘	↗	Ímpar sen(-x) = -sen x	2π	+ + / − −
cos x	$\mathbb{R}$	[-1 ; 1]	↘	↘	↗	↗	Par cos x = cos (-x)	2π	− + / − +
tg x	$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$	$\mathbb{R}$	↗	↗	↗	↗	Ímpar tg(-x) = -tg x	π	− + / + −

Trigonometria III

Gráficos







7. VARIAÇÃO DO PERÍODO DE UMA FUNÇÃO

a) Seja $y = f(x)$ de período **p** e Y de período **P**

I) $Y = K + f(x)$ então $P = p$

II) $Y = K \cdot f(x)$ então $P = p$

III) $Y = f(x + K)$ então $P = p$

IV) $Y = f(K \cdot x)$ então $P = \dfrac{p}{|K|}$

b) Graficamente ocorrem as seguintes mudanças:

I) O gráfico da função **sobe** K se $K > 0$ ou **desce** K se $K < 0$.

II) O gráfico da função deforma-se na vertical (**abre** ou **fecha**). Se $K < 0$ o gráfico também gira em 180° em torno do eixo x.

III) O gráfico desloca-se K, para a **esquerda** se $K > 0$ ou para a **direita** se $K < 0$.

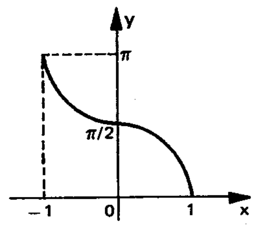
IV) O gráfico deforma-se na horizontal (**abre** ou **fecha**), devido a mudança do período.

8. FUNÇÕES INVERSAS

a) A função inversa da função

$f : [0\,;\pi] \to [-1\,;1]$ t.q. $f(x) = \cos x$ é:

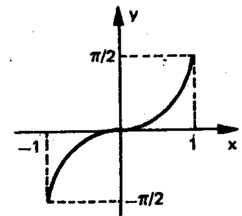
$f^{-1} : [-1\,;1] \to [0;\pi]$ t.q. $f^{-1}(x) = \text{arc}\cos x$



b) A função inversa da função

$f : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1;1]$ t.q. $f(x) = \text{sen}\,x$ é

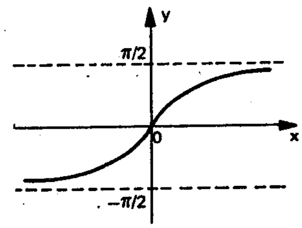
$f^{-1} : [-1;1] \to [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ t.q. $f^{-1}(x) = \text{arc sen}\,x$



c) A função inversa da função

$f :]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ t.q. $f(x) = \text{tg}\,x$ é

$f^{-1} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ t.q. $f^{-1}(x) = \text{arc tg}\,x$.



Trigonometria IV

9. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE ARCOS

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$$

$$\text{sen}(a \pm b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \text{sen}\,b$$

$$\text{tg}(a \pm b) = \frac{\text{tg}\,a \pm \text{tg}\,b}{1 \mp \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}$$

10. ARCO DUPLO

$$\cos(2 \cdot a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\,\text{sen}^2 a$$

$$\text{sen}(2 \cdot a) = 2 \cdot \text{sen}\,a \cdot \cos a$$

$$\text{tg}(2 \cdot a) = \frac{2 \cdot \text{tg}\,a}{1 - \text{tg}^2 a}$$

11. ARCO TRIPLO

$$\cos(3 \cdot a) = 4 \cdot \cos^3 a - 3 \cdot \cos a$$

$$\text{sen}(3 \cdot a) = 3 \cdot \text{sen}\,a - 4 \cdot \text{sen}^3 a$$

12. FÓRMULAS DE REVERSÃO (WERNER)

A partir de:

I) $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$

II) $\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos + \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$

III) $\text{sen}(a + b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b + \cos a \cdot \text{sen}\,b$

IV) $\text{sen}(a - b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b - \cos a \cdot \text{sen}\,b$

obtém-se

I + II: $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cdot \cos a \cdot \cos b$

I − II: $\cos(a + b) - \cos(a - b) = -2 \cdot \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$

III + IV: $\text{sen}(a + b) + \text{sen}(a - b) = 2 \cdot \text{sen}\,a \cdot \cos b$

III − IV: $\text{sen}(a + b) - \text{sen}(a - b) = 2 \cdot \cos a \cdot \text{sen}\,b$

13. TRANSFORMAÇÃO EM PRODUTO

$$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \cdot \text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\text{sen}\,p + \text{sen}\,q = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

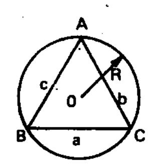
$$\text{sen}\,p - \text{sen}\,q = 2 \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

14. RELAÇÕES NUM TRIÂNGULO QUALQUER

I. Lei dos Senos

As medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos e a constante de proporcionalidade é a medida do diâmetro da circunferência circunscrita.

$$\frac{a}{\text{sen}\,A} = \frac{b}{\text{sen}\,B} = \frac{c}{\text{sen}\,C} = 2R$$



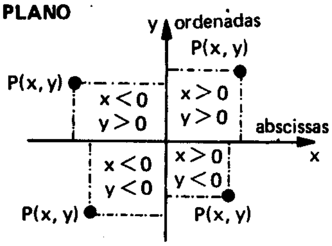
II. Lei dos Cossenos

O quadrado de um lado é a soma dos quadrados dos lados restantes, menos o duplo produto desses dois lados pelo co-seno do ângulo que eles formam.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$$

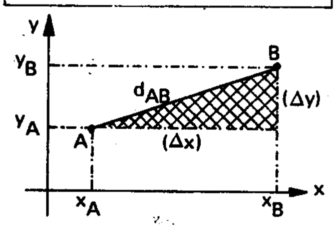
Geometria Analítica I

1. COORDENADAS CARTESIANAS NO PLANO



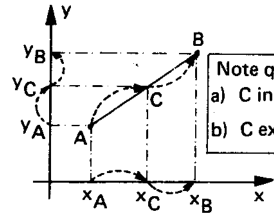
2. DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

$$\boxed{d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$



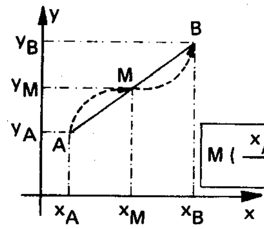
3. RAZÃO DE SECÇÃO

$$r = \frac{AC}{CB} \begin{cases} \text{em } \vec{O}x : r = \dfrac{x_C - x_A}{x_B - x_C} \\ \text{em } \vec{O}y : r = \dfrac{y_C - y_A}{y_B - y_C} \end{cases}$$



Note que:
a) C interno a AB $\Longleftrightarrow r > 0$
b) C externo a AB $\Longleftrightarrow r < 0$

Ponto Médio:



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$\boxed{M\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)}$$

4. ALINHAMENTO DE 3 PONTOS

Sejam:

$$\left.\begin{matrix} A(x_A, y_A) \\ B(x_B, y_B) \\ C(x_C, y_C) \end{matrix}\right\} \text{ e } D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

$D = 0 \Longleftrightarrow$ A, B, C são colineares

$D \neq 0 \Longleftrightarrow$ A, B, C formam triângulo

5. ÁREA DO TRIÂNGULO

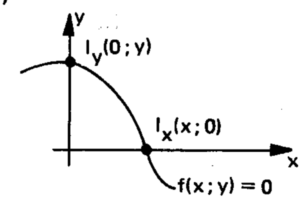
$$\boxed{\text{Área do triângulo} = \frac{1}{2} \cdot |D|}$$

6. INTERCEPTOS

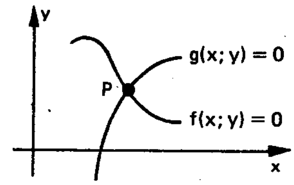
Obtenção de:

$I_x \rightarrow$ toma-se $y = 0$ em $y = f(x)$

$I_y \rightarrow$ toma-se $x = 0$ em $y = f(x)$



7. INTERSECÇÃO DE CURVAS



As coordenadas do ponto de intersecção são as soluções do sistema

$$\begin{cases} f(x; y) = 0 \\ g(x; y) = 0 \end{cases}$$

Geometria Analítica II

8. ESTUDO DA RETA

8.1. EQUAÇÃO DA RETA

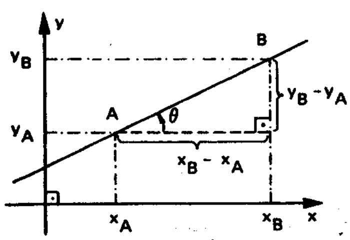
$\boxed{ax + by + c = 0}$ a e b não simultaneamente nulos.

$\boxed{a = 0 \Rightarrow y = -\frac{c}{b} \Rightarrow y = K}$ Reta horizontal

$\boxed{b = 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = K}$ Reta vertical

$\boxed{c = 0 \Rightarrow ax + by = 0}$ Reta passa pela origem

8.2. DECLIVIDADE



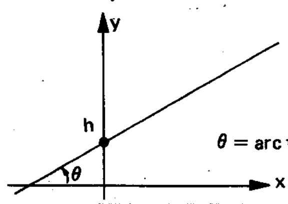
$$\boxed{m = \operatorname{tg} \theta = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

8.3. EQUAÇÃO GERAL

$$\left.\begin{matrix} A(x_A, y_A) \\ B(x_B, y_B) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax + by + c = 0$$

8.4. EQUAÇÃO REDUZIDA



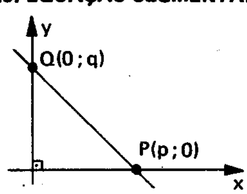
$$\boxed{y = mx + h}$$

$\theta = \operatorname{arc\,tg} m$

$m = -\dfrac{a}{b}$ coef. angular

$h = -\dfrac{c}{b}$ coef. linear

8.5. EQUAÇÃO SEGMENTÁRIA



$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$$

8.6. POSIÇÃO RELATIVA DE DUAS RETAS

- $r : y = m_1 x + h_1$
  $s : y = m_2 x + h_2$

$m_1 = m_2$ e $h_1 \neq h_2 \Longleftrightarrow$ r e s paralelas
$m_1 = m_2$ e $h_1 = h_2 \Longleftrightarrow$ r e s coincidentes
$m_1 \neq m_2 \Longleftrightarrow$ r e s concorrentes
$m_1 = -\dfrac{1}{m_2} \Longleftrightarrow$ r e s perpendiculares

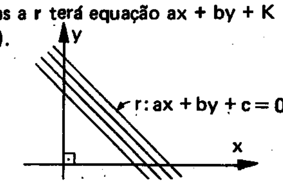
- $r : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$
  $s : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$

$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2} \Longleftrightarrow$ r e s paralelas
$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \Longleftrightarrow$ r e s coincidentes
$\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2} \Longleftrightarrow$ r e s concorrentes
$a_1 . a_2 + b_1 . b_2 = 0 \Leftrightarrow$ r e s perpendiculares

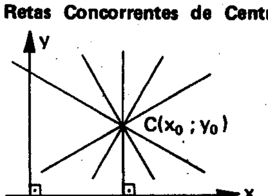
8.7. FEIXE DE RETAS

- **Feixe de Retas Paralelas**

$r : ax + by + c = 0$ então o feixe de retas paralelas a r terá equação $ax + by + K = 0$ $(K \in R)$.



- **Feixe de Retas Concorrentes de Centro $C(X_0, Y_0)$**

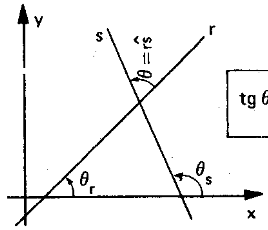


$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0) \quad (m \in R) \quad \text{ou} \quad x = x_0}$

Geometria Analítica III

8.8. ÂNGULO ENTRE DUAS RETAS

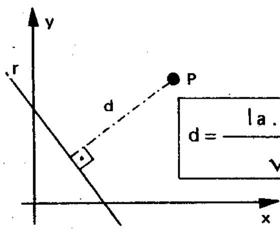
Conhecidos os coeficientes angulares m_r e m_s, temos:



$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}}$$

8.9. DISTÂNCIA DE PONTO A RETA

Dado o ponto: $P(x_P, y_P)$ e a reta $r: ax + by + c = 0$, temos:

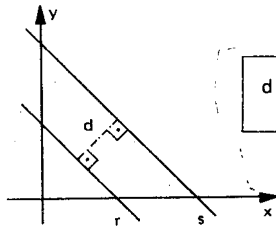


$$\boxed{d = \frac{|a \cdot x_P + b \cdot y_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

8.10 DISTÂNCIA ENTRE DUAS RETAS

Dadas as retas paralelas

$$\begin{cases} r: a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \\ s: a \cdot x + b \cdot y + c' = 0 \end{cases}, \text{ temos:}$$



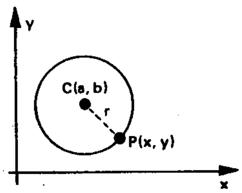
$$\boxed{d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

9. ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA

9.1. EQUAÇÃO CARTESIANA (ou reduzida)

A equação da circunferência de centro **C(a, b)** e raio **r** é:

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2} \quad (I)$$



Caso particular

Se o centro da circunferência for a **origem** do sistema cartesiano então **C(0, 0)** e a equação será:

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

9.2. EQUAÇÃO GERAL (ou Normal)

Desenvolvendo-se (I), obtemos:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + p = 0}$$

9.3. EQUAÇÃO DO 2º GRAU E A CIRCUNFERÊNCIA

A equação do segundo grau

$$x^2 + y^2 + k \cdot xy + mx + ny + p = 0$$

será a equação de uma circunferência de centro

$$C(a, b), \quad \text{com} \quad a = -\frac{m}{2} \quad \text{e} \quad b = -\frac{n}{2},$$

e raio $r = \sqrt{a^2 + b^2 - p}$

se, e somente se:

a) Os coeficientes de x^2 e y^2 forem iguais e não nulos. Podemos sempre supor que sejam ambos iguais a 1.

b) "Não existir" o termo em xy, ou seja $k = 0$.

c) $r^2 = a^2 + b^2 - p > 0$.

Observação:

a) Se $a^2 + b^2 - p = 0$ a equação representa apenas o ponto C(a, b).

b) Se $a^2 + b^2 - p < 0$ o conjunto verdade da equação é o conjunto vazio.

Geometria Analítica IV

9.4. POSIÇÃO DE UM PONTO EM RELAÇÃO A UMA CIRCUNFERÊNCIA

Sejam $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$ a equação de uma circunferência e $P(x_0, y_0)$ um ponto qualquer. Seja, ainda,

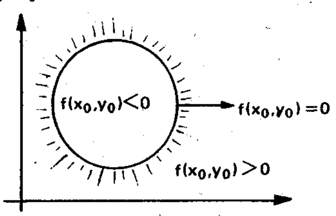
$$f(x_0, y_0) = x_0^2 + y_0^2 + m \cdot x_0 + n \cdot y_0 + p$$

A posição do ponto P em relação à circunferência é determinada pelo valor de $f(x_0, y_0)$. Assim:

$f(x_0, y_0) = 0 \iff$ **P pertence à circunferência**

$f(x_0, y_0) > 0 \iff$ **P externo à circunferência**

$f(x_0, y_0) < 0 \iff$ **P interno à circunferência**



9.5. POSIÇÃO RELATIVA DE RETA E CIRCUNFERÊNCIA

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0 \end{cases}$$

recai-se numa equação do 2º grau de discriminante Δ. A reta e a circunferência serão:

secantes	$\iff$	$\Delta > 0$
tangentes	$\iff$	$\Delta = 0$
exteriores	$\iff$	$\Delta < 0$

10. ESTUDO DA ELIPSE

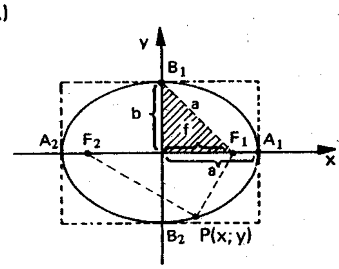
- **Definição**

Dados dois pontos F_1 e F_2 (focos) e um segmento de medida 2a, denomina-se ELIPSE ao L.G. dos pontos do plano tais que:

$$\boxed{PF_1 + PF_2 = 2a}$$

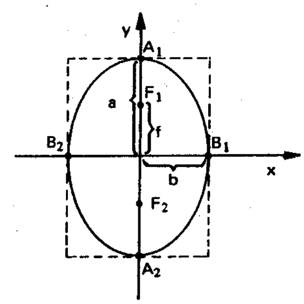
- **Equação Reduzida**

A)



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

B)



$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

- **Relação entre os coeficientes**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Eixo maior: } A_1A_2 = 2a \\ \text{Eixo menor: } B_1B_2 = 2b \\ \text{Distância focal: } F_1F_2 = 2f \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + f^2}$$

Observação:

Se o centro da elipse for o ponto C(g; h) então as equações A e B transformar-se-ão em:

$$\frac{(x - g)^2}{a^2} + \frac{(y - h)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x - g)^2}{b^2} + \frac{(y - h)^2}{a^2} = 1$$

Geometria Analítica V

11. ESTUDO DA HIPÉRBOLE

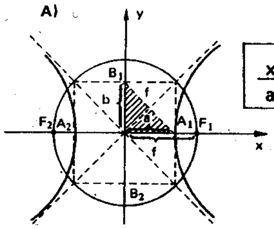
- **Definição**

Dados dois pontos F_1 e F_2 (focos) e um segmento de medida 2a, denomina-se HIPÉRBOLE ao L.G. dos pontos do plano tais que:

$$\boxed{|PF_1 - PF_2| = 2a}$$

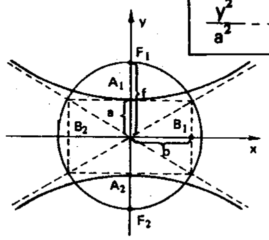
- **Equação Reduzida**

A)



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

B)



$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

- **Relação entre os coeficientes**

Eixo transverso: $A_1A_2 = 2a$
Eixo conjugado: $B_1B_2 = 2b$
Distância focal: $F_1F_2 = 2f$

$\Rightarrow \boxed{f^2 = a^2 + b^2}$

Observações:

1) As equações das assíntotas da hipérbole com centro C(0; 0) são:

$y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$	item A
$y = \pm \frac{a}{b} \cdot x$	item B

2) Se o centro da hipérbole for o ponto C(g; h) as equações A e B transformar-se-ão em:

$$\boxed{\frac{(x-g)^2}{a^2} - \frac{(y-h)^2}{b^2} = 1}$$

$$\boxed{\frac{(y-h)^2}{a^2} - \frac{(x-g)^2}{b^2} = 1}$$

12. ESTUDO DA PARÁBOLA

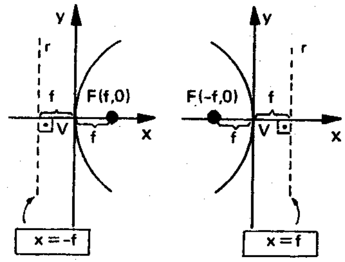
- **Definição**

Dado um ponto F (foco) e uma reta r (diretriz), denomina-se PARÁBOLA ao L.G. dos pontos do plano eqüidistantes de F e de r.

$$\boxed{PF = Pr}$$

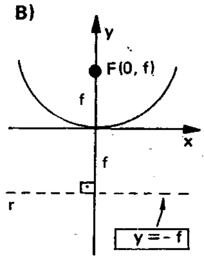
- **Equação Reduzida**

A)



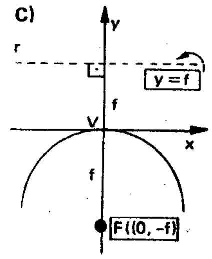
$\boxed{y^2 = 4.f.x}$ $\boxed{y^2 = -4.f.x}$

B)



$\boxed{x^2 = 4.f.y}$

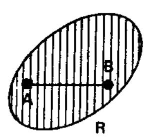
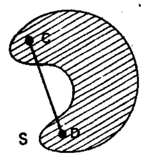
C)



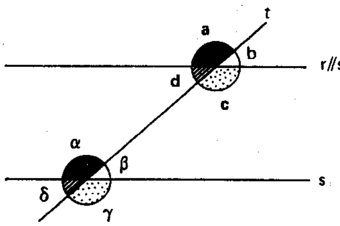
$\boxed{x^2 = -4.f.y}$

Geometria Plana – I

1. REGIÃO CONVEXA E NÃO CONVEXA

convexa	não convexa
	
$\forall A, B \in R$, $A \neq B$ $\Rightarrow \overline{AB} \subset R$	$\exists C, D \in S \mid \overline{CD} \not\subset S$

2. PARALELISMO



a) **Ângulos Correspondentes:** $\boxed{r//s \Leftrightarrow \alpha = a}$

Analogamente: $\beta = b$; $\gamma = c$; $\delta = d$

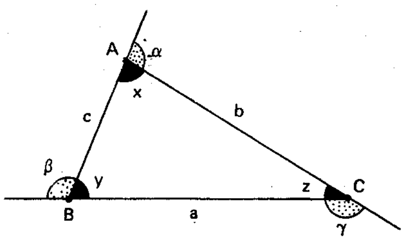
b) **Ângulos Alternos:** $\boxed{r//s \Leftrightarrow \alpha = c}$

Analogamente: $\beta = d$; $\gamma = a$; $\delta = b$

c) **Ângulos Colaterais:** $\boxed{r//s \Leftrightarrow \alpha + d = 180^\circ}$

Analogamente: $\beta + c = \gamma + b = \delta + a = 180^\circ$

3. TRIÂNGULOS



a) **Relações Angulares**

$\boxed{x + y + z = 180^\circ}$

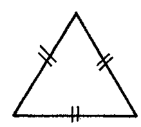
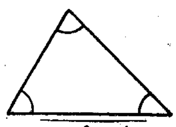
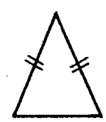
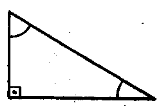
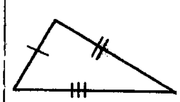
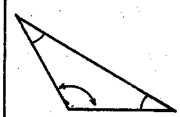
$\alpha = y + z$	$\beta = x + z$	$\gamma = x + y$

$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ}$

b) **Condições de Existência**

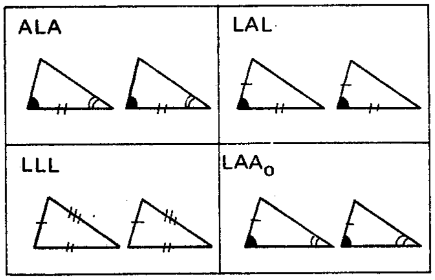
$a < b + c$	$b < a + c$	$c < a + b$

c) **Classificação**

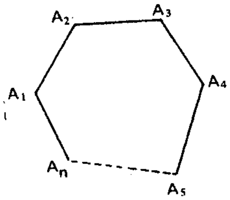
Quanto aos lados	Quanto aos ângulos
 equilátero	 acutângulo
 isósceles	 retângulo
 escaleno	 obtusângulo

Geometria Plana – II

d) Critérios de Congruência



4. POLÍGONOS CONVEXOS DE n LADOS



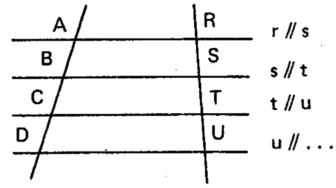
- $d = \dfrac{n(n-3)}{2}$
- $S_i = (n-2) \cdot 180^o$
- $S_e = 360^o$

Se o polígono for regular então

a) Cada ângulo interno vale: $\dfrac{(n-2) \cdot 180^o}{n}$

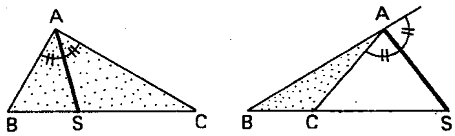
b) Cada ângulo externo vale: $\dfrac{360^o}{n}$

5. TEOREMA DE TALES



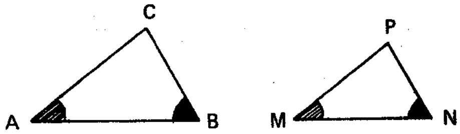
$$\boxed{r//s//t//u// \ldots \Rightarrow \frac{AB}{RS} = \frac{BC}{ST} = \frac{CD}{TU} = \ldots}$$

6. TEOREMA DA BISSETRIZ



$$\boxed{\vec{AS} \text{ é bissetriz} \iff \frac{AB}{BS} = \frac{AC}{CS}}$$

7. SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS



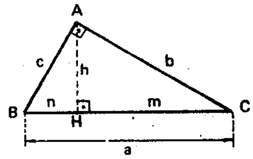
a) $\Delta ABC \sim \Delta MNP \iff \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{M}, \hat{B} \cong \hat{N}, \hat{C} \cong \hat{P} \\ \dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{NP} = \dfrac{AC}{MP} = k \end{cases}$

b) $\Delta ABC \sim \Delta MNP \Rightarrow \dfrac{\text{Área } (\Delta ABC)}{\text{Área } (\Delta MNP)} = k^2$

c) Critérios: | AA∼ | LAL ∼ | LLL∼ |

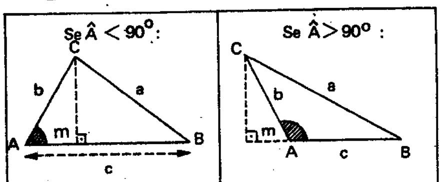
8. RELAÇÕES MÉTRICAS NOS TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

- $a^2 = b^2 + c^2$ (Teorema de Pitágoras)
- $b^2 = a \cdot m$
- $c^2 = a \cdot n$
- $h^2 = m \cdot n$
- $b \cdot c = a \cdot h$



Geometria Plana – III

9. RELAÇÕES MÉTRICAS NUM TRIÂNGULO QUALQUER

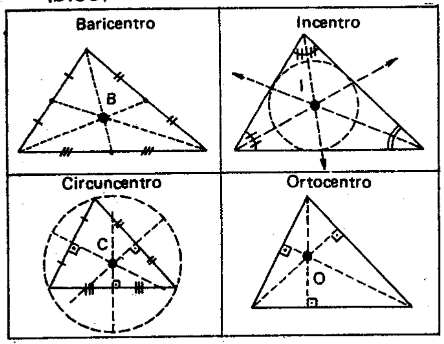


$a^2 = b^2 + c^2 - 2mc$ $\qquad$ $a^2 = b^2 + c^2 + 2mc$

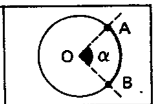
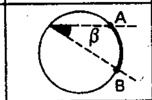
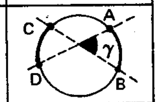
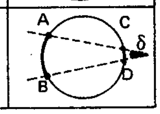
Calculando **m** em função de **b** e **cos A** obtemos, em ambos os casos, o teorema dos co-senos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

10. PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO (BICO)



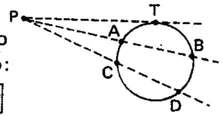
11. ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

CENTRAL	$\alpha = \widehat{AB}$	
INSCRITO	$\beta = \dfrac{\widehat{AB}}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$	
EXCÊNTRICO INTERIOR	$\gamma = \dfrac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$	
EXCÊNTRICO EXTERIOR	$\delta = \dfrac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$	

12. POTÊNCIA DE PONTO

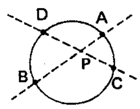
a) Se P for externo à circunferência, então:

$$\boxed{PA \cdot PB = PC \cdot PD = PT^2}$$



b) Se P for interno à circunferência, então:

$$\boxed{PA \cdot PB = PC \cdot PD}$$

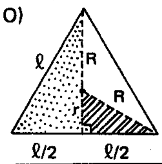


13. POLÍGONOS REGULARES

Seja **R** o raio da circunferência circunscrita, **r** o raio da inscrita, **ℓ** o lado do polígono e **a** o apótema.

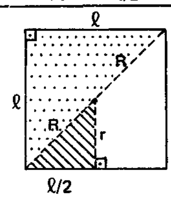
a) Triângulo Eqüilátero

- Os quatro pontos notáveis coincidem ($B \equiv I \equiv C \equiv O$)
- $a = r = \dfrac{R}{2}$
- $h = R + r$
- $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$



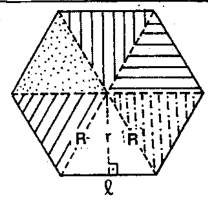
b) Quadrado

- d é diagonal
- $d = 2R$
- $d = \ell\sqrt{2}$
- $a = r = \dfrac{\ell}{2}$



c) Hexágono Regular

- Seis triângulos eqüiláteros
- $\ell = R$
- $a = r = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

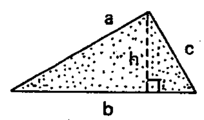
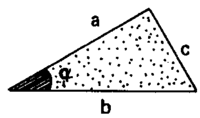
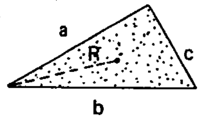
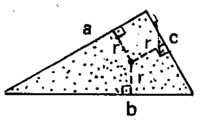
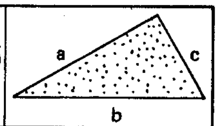
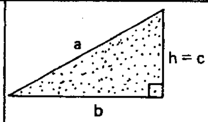
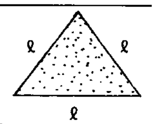


Geometria Plana – IV

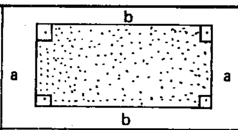
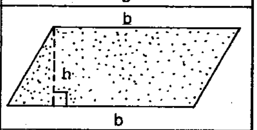
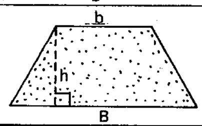
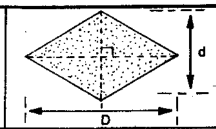
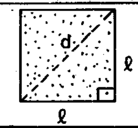
12. ÁREAS DAS FIGURAS PLANAS

a) Triângulos

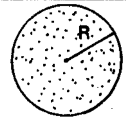
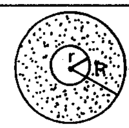
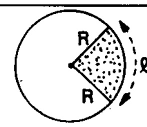
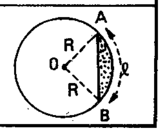
Sendo **R** o raio da circunferência circunscrita, r o da inscrita e $p = \frac{a+b+c}{2}$ o semiperímetro, a área de um triângulo pode ser calculada das seguintes formas:

$S = \frac{b \cdot h}{2}$	
$S = \frac{ab \cdot \text{sen}\,\alpha}{2}$	
$S = \frac{a\,b\,c}{4R}$	
$S = p \cdot r$	
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ fórmula de Hierão	
$S = \frac{b\ c}{2}$	
$S = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$	

b) Quadriláteros Notáveis

Retângulo: $S = ab$	
Paralelogramo: $S = b\,h$	
Trapézio: $S = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$	
Losango: $S = \frac{D\ d}{2}$	
Quadrado: $S = \ell^2 = \frac{d^2}{2}$	

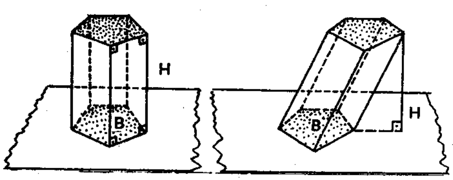
c) Figuras Circulares

Área do círculo: $S = \pi R^2$ Comprimento da circunf.: $\ell = 2\pi R$	
Coroa Circular $S = \pi(R^2 - r^2)$	
Setor Circular: $S = \frac{\ell\ R}{2}$	
Segmento Circular: $S = \frac{\ell\ R}{2} - S_{\triangle OAB}$	

Geometria Métrica – I

1. PRISMAS

a) Prisma Reto e Prisma Oblíquo



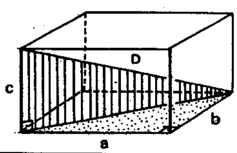
b) Área e Volume

$A_T = A_L + 2\,A_B$	$V = A_B \cdot H$

c) Prima Regular

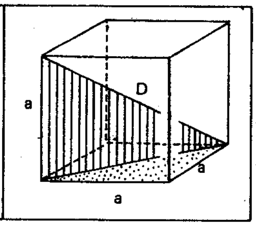
É o prisma reto cujas bases são polígonos regulares.

d) Paralelepípedo Reto-Retângulo



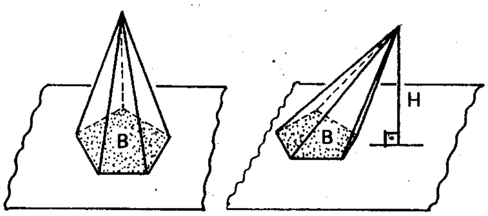
$A_T = 2(ab + ac + bc)$	$V = ab\,c$
Diagonal: $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$	

e) Cubo

• $A_T = 6a^2$ • $V = a^3$ • $D = a\sqrt{3}$	

2. PIRÂMIDES

a) Pirâmide Reta e Pirâmide Oblíqua



b) Área e Volume

$A_T = A_L + A_B$	$V = \frac{A_B \cdot H}{3}$

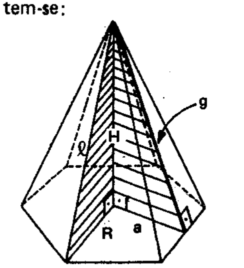
c) Pirâmide Regular

É a pirâmide reta cuja base é um polígono regular.

Sendo:

p o semi perímetro da base
a o apótema da base
R o raio da circunscrita
g o apótema lateral
ℓ a aresta lateral, tem-se:

- $g^2 = H^2 + a^2$
- $\ell^2 = H^2 + R^2$
- $A_B = p \cdot a$
- $A_L = p \cdot g$
- $V = \frac{p\,a\,H}{3}$

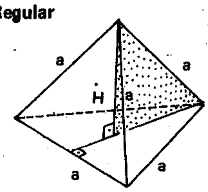


d) Tetraedro Regular

$H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$A_T = a^2\sqrt{3}$

$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

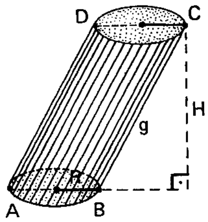


Geometria Métrica – II

3. CILINDROS

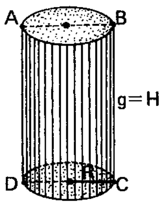
a) Cilindro Oblíquo

- $A_T = A_L + 2A_B$
- $V = A_B \cdot H$
- O paralelogramo ABCD é a secção meridiana



b) Cilindro Reto

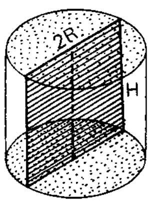
- $A_B = \pi R^2$
- $A_L = 2\pi R H$
- $A_T = 2\pi R(R+H)$
- $V = \pi R^2 H$
- A secção meridiana é um retângulo



c) Cilindro Eqüilátero

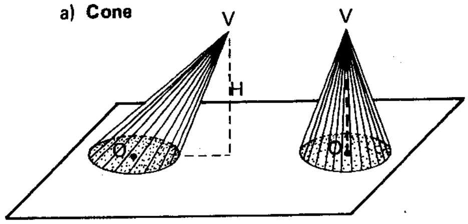
É aquele cuja secção meridiana é um quadrado

$\boxed{H = 2R}$



4. CONES

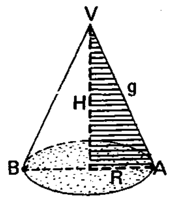
a) Cone



b) Cone Reto

É aquele em que a projeção ortogonal do vértice V é o centro O da base

- $g^2 = R^2 + H^2$
- $A_B = \pi R^2$
- $A_L = \pi R g$
- $A_T = \pi R(g+R)$
- $V = \dfrac{\pi R^2 H}{3}$
- O triângulo isósceles VAB é a secção meridiana



c) Cone Eqüilátero

É aquele cuja secção meridiana é um triângulo eqüilátero.

$\boxed{g = 2R}$

5. LEMBRETE

a) Para sólidos de "secção constante" tais como cilindro, prisma, etc., tem-se:

$\boxed{\text{Volume} = (\text{Área da base}) \cdot \text{Altura}}$

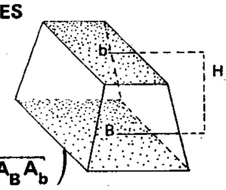
b) Para sólidos "com ponta", como pirâmide e cone, tem-se:

$\boxed{\text{Volume} = \dfrac{(\text{Área da Base}) \cdot \text{Altura}}{3}}$

6. TRONCOS DE BASES PARALELAS

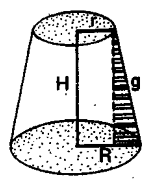
a) De Pirâmide

- $A_T = A_L + A_B + A_b$
- $V = \dfrac{H}{3}\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B A_b}\right)$



b) De Cone

- $g^2 = H^2 + (R-r)^2$
- $A_L = \pi(R+r)g$
- $V = \dfrac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$



Geometria Métrica – III

7. ESFERA E SUAS PARTES

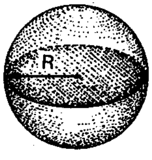
a) Superfície Esférica e Esfera

- **Área** da superfície esférica

$\boxed{A = 4\pi R^2}$

- **Volume** da esfera

$\boxed{V = \dfrac{4}{3}\pi R^3}$

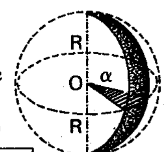


b) Fuso Esférico e Cunha Esférica

- O fuso esférico de ângulo equatorial α (em graus) é parte da superfície esférica. É a **"casca do gomo da laranja".**
- Pela regra de três

$$\begin{cases} 360^\circ \longrightarrow 4\pi R^2 \\ \alpha \longrightarrow A_{fuso} \end{cases}$$

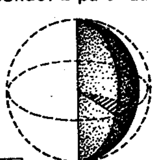
obtemos: $\boxed{A_{fuso} = \dfrac{\pi R^2 \alpha}{90^\circ}}$



- A cunha esférica é um sólido. É parte da esfera. É o **"gomo da laranja".**
- Pela regra de três

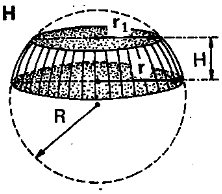
$$\begin{cases} 360^\circ \longrightarrow \dfrac{4}{3}\pi R^3 \\ \alpha \longrightarrow V_{cunha} \end{cases}$$

obtemos: $\boxed{V_{cunha} = \dfrac{\pi R^3 \alpha}{270^\circ}}$



c) Zona Esférica e Segmento Esférico de duas bases

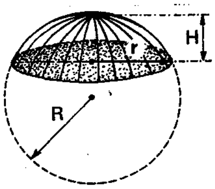
- **Zona Esférica** é parte da superfície esférica. É a **"casca".**
- $A_{zona} = 2\pi R H$
- **Segmento esférico** é o sólido limitado pela zona esférica.



- $V_{seg.} = \dfrac{\pi H}{6}(3r^2 + 3r_1^2 + H^2)$

d) Calota Esférica e Segmento Esférico de uma base

- Fazendo $r_1 = 0$ obtemos a **calota esférica** e o **segmento esférico de uma base.**

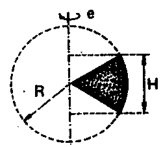


- $A_{calota} = 2\pi R H$
- $V_{seg} = \dfrac{\pi H}{6}(3r^2 + H^2)$

d) Setor Esférico

- A rotação do **setor circular** em torno do eixo e gera o **setor esférico** cujo volume é:

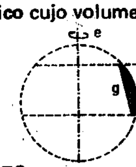
$\boxed{V = \dfrac{2}{3}\pi R^2 H}$



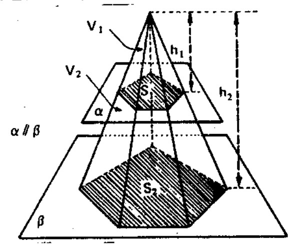
e) Anel Esférico

- A rotação do **segmento circular** em torno do eixo e gera o **anel esférico** cujo volume é:

$\boxed{V = \dfrac{\pi h}{6} g^2}$



8. SÓLIDOS SEMELHANTES

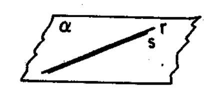
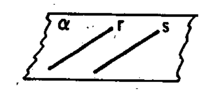
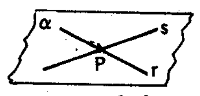
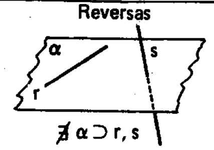


$$\boxed{\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 \text{e } \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3}$$

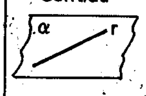
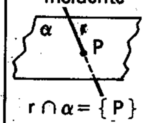
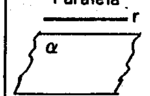
Geometria de Posição – I

1. POSIÇÕES RELATIVAS

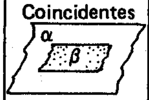
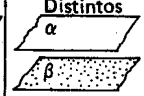
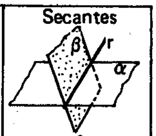
a) Entre Retas

Paralelas Coincidentes	Paralelas Distintas
 $r = s$	 $r \subset \alpha$; $s \subset \alpha$; $r \cap s = \phi$
Concorrentes	Reversas
 $r \cap s = \{P\}$	 $\nexists\, \alpha \supset r, s$

b) Entre Reta e Plano

Contida	Incidente	Paralela
 $r \cap \alpha = r$	 $r \cap \alpha = \{P\}$	 $r \cap \alpha = \phi$

c) Entre Planos

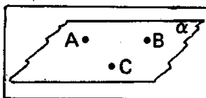
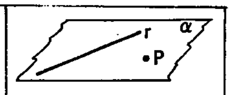
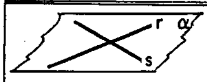
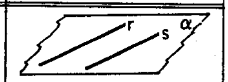
Paralelos Coincidentes	Paralelos Distintos	Secantes
 $\alpha = \beta$	 $\alpha \cap \beta = \phi$	 $\alpha \cap \beta = r$

2. PRINCIPAIS POSTULADOS E TEOREMAS

a) Da Determinação da Reta

Dois pontos distintos determinam uma reta

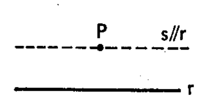
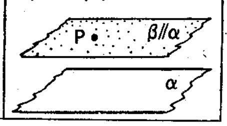
b) Da Determinação de Planos

	
Três pontos não colineares	Uma reta e um ponto não pertencente a ela
	
Duas retas concorrentes	Duas retas paralelas distintas

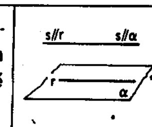
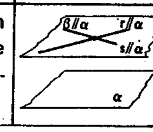
c) Da Inclusão

Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, a reta está contida nesse plano.

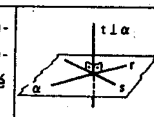
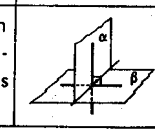
d) Da Unicidade

Por P é única a reta s paralela a r	Por P é único o plano β paralelo a α
	

e) Do Paralelismo

• Se uma reta não contida em um plano é paralela a uma reta do plano então ela é paralela ao plano.	
• Se um plano contém duas retas concorrentes entre si e paralelas a outro plano então os planos são paralelos.	

f) Do Perpendicularismo

• Se uma reta forma ângulo reto com duas concorrentes de um plano então ela é perpendicular ao plano.	
• Se um plano contém uma reta perpendicular a outro plano então os dois planos são perpendiculares.	

g) Das Três Perpendiculares

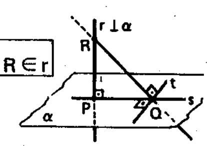
$r \perp \alpha$, em P

$s \subset \alpha$ por P

$t \perp s$, em α

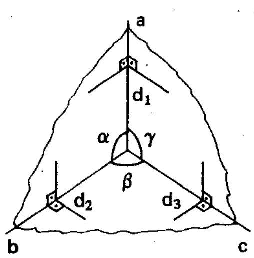
$Q \neq P$

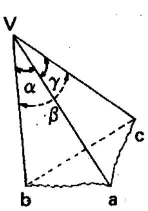
$\Rightarrow \boxed{\overleftrightarrow{RQ} \perp t, \forall R \in r}$



Geometria de Posição – II

4. DIEDROS E TRIEDROS





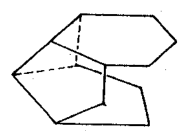
a, b e c são arestas
α, β e γ são faces
d_1, d_2 e d_3 são diedros (ângulos entre faces).
São válidas as seguintes desigualdades:

- $0^o < \alpha + \beta + \gamma < 360^o$
- $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$
- $180^o < d_1 + d_2 + d_3 < 540^o$
- $d_1 + 180^o > d_2 + d_3$

5. SUPERFÍCIES POLIÉDRICAS E POLIEDROS

a) Superfícies Poliédricas Abertas

Sendo V o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces, para as superfícies poliédricas convexas abertas e conexas é válida a seguinte relação:



$$V - A + F = 1$$

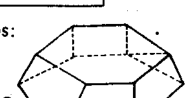
b) Superfícies Poliédricas Fechadas

• Para todo poliedro convexo e para alguns poliedros não convexos é válida a seguinte relação: $\boxed{V - A + F = 2 \text{ (Euler)}}$

No Poliedro da figura temos:

$V = 13$, $A = 21$ e $F = 10$

$V - A + F = 13 - 21 + 10 = 2$



• Em todo poliedro Euleriano ($V - A + F = 2$) a soma de todos os ângulos de todas as faces é $360^o (V - 2)$.

c) Poliedros de Platão

É todo poliedro Euleriano ($V - A + F = 2$) onde:

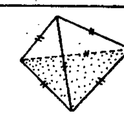
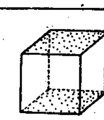
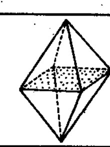
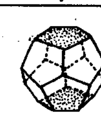
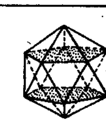
• A quantidade de arestas nos vértices é constante.

• A quantidade de lados nas faces é constante.

Existem somente 5 poliedros de Platão: Tetraedro, Hexaedro, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro (THODI).

e) Poliedros Regulares

São poliedros de Platão cujas faces são polígonos regulares. São eles:

Tetraedro Regular • faces triangulares • $V = 4$; $A = 6$; $F = 4$	
Hexaedro Regular ou Cubo • faces quadrangulares • $V = 8$; $A = 12$; $F = 6$	
Octaedro Regular • faces triangulares • $V = 6$; $A = 12$; $F = 8$	
Dodecaedro Regular • faces pentagonais • $V = 20$; $A = 30$; $F = 12$	
Icosaedro Regular • faces triangulares • $V = 12$; $A = 30$; $F = 20$	

AULAS DE MAT, FIS, QUI
9709-8662.