Capítulo 13
Geometria métrica: Corpos redondos

Para pensar

1. A secção transversal de um cilindro tem forma circular.

2. Antes de ser ampliada a área da secção da perna da mulher é dada por: πr^2
E, depois de ser ampliada: $\pi(3r)^2 = 9\pi r^2$

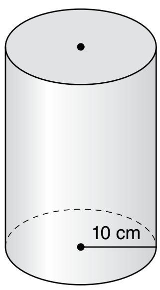
3. Se o raio da perna da mulher fosse triplicado, sua massa seria ampliada $3 \cdot 3 \cdot 3$ vezes, ou seja, a massa da perna da mulher seria multiplicada por 27.

Exercícios propostos

1. **a)** A área B de cada base é a área de um círculo de raio 3 cm:
$B = \pi \cdot 3^2 \text{ cm}^2 = 9\pi \text{ cm}^2$
b) A área lateral A_ℓ é a área de um retângulo de comprimento 6π cm e altura 10 cm:
$A_\ell = (6\pi \cdot 10) \text{ cm}^2 = 60\pi \text{ cm}^2$
c) A área total A_T é a soma da área lateral com as áreas das duas bases:
$A_T = (60\pi + 2 \cdot 9\pi) \text{ cm}^2 = 78\pi \text{ cm}^2$
d) A área A_{SM} de uma secção meridiana do cilindro é a área de um retângulo de base 6 cm e altura 10 cm.
$A_{SM} = (6 \cdot 10) \text{ cm}^2 = 60 \text{ cm}^2$

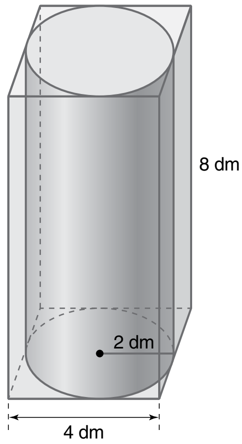
2. **a)** No cilindro equilátero, a altura é igual ao diâmetro $2r$ da base:
$h = 2r \Rightarrow 6 \text{ dm} = 2r$
$\therefore r = 3 \text{ dm}$
b) $B = \pi r^2 = (\pi \cdot 3^2) \text{ dm}^2 = 9\pi \text{ dm}^2$
c) $A_\ell = 2\pi r h = (2\pi \cdot 3 \cdot 6) \text{ dm}^2 = 36\pi \text{ dm}^2$
d) A área total A_T é a soma da área lateral A_ℓ com as áreas das duas bases, ou simplesmente:
$A_T = A_\ell + 2B = (36\pi + 2 \cdot 9\pi) \text{ dm}^2 = 54\pi \text{ dm}^2$

3.



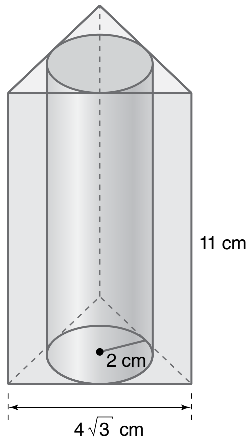
Como figuras planas equivalentes são figuras de mesma área, então a área da secção meridiana é igual à área da base do cilindro.
Assim:
$A_{SM} = B \Rightarrow 2rh = \pi r^2$
$\therefore (2 \cdot 10 \cdot h) \text{ cm}^2 = (\pi \cdot 10^2) \text{ cm}^2 \Rightarrow h = \left(\dfrac{100\pi}{20}\right) \text{cm}$
$\therefore h = 5\pi \text{ cm}$
A área lateral é dada por: $A_\ell = 2\pi r h$
Assim:
$A_\ell = (2\pi \cdot 10 \cdot 5\pi) \text{ cm}^2 = 100\pi^2 \text{ cm}^2$

4. **a)** Em um cilindro inscrito em um prisma quadrangular regular, a medida r do raio da base é metade da medida da aresta da base do prisma e a medida h da altura é a mesma da altura do prisma. Assim, temos: $r = 2$ dm e $h = 8$ dm



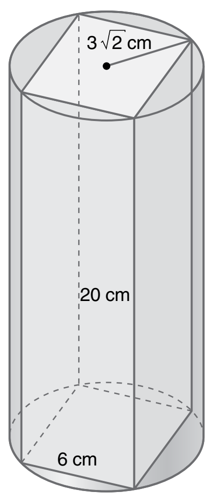
Logo, a área total A_T desse cilindro é dada por:
$A_T = (2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 8 + 2 \cdot \pi \cdot 2^2) \text{ dm}^2 = 40\pi \text{ dm}^2$

b) Em um cilindro inscrito em um prisma triangular regular, a medida r do raio da base é a terça parte da medida da altura do triângulo equilátero da base do prisma e a medida h da altura é a mesma da altura do prisma. Assim, temos:
$r = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ cm} =$
$= 2 \text{ cm}$ e $h = 11$ cm



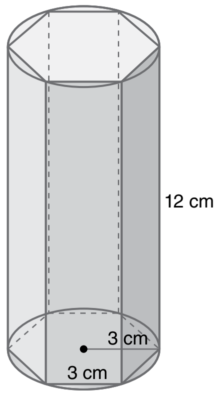
Logo, a área lateral A_ℓ desse cilindro é dada por:
$A_\ell = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 11 \text{ cm}^2 = 44\pi \text{ cm}^2$

5. **a)** Em um cilindro circunscrito a um prisma quadrangular regular, a medida r do raio da base é a metade da medida da diagonal do quadrado da base do prisma e a medida h da altura é a mesma da altura do prisma. Assim, temos:
$r = \dfrac{6 \cdot \sqrt{2}}{2} \text{ cm} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$ e $h = 20$ cm



Logo, a área lateral A_ℓ desse cilindro é dada por:
$A_\ell = \left(2 \cdot \pi \cdot 3\sqrt{2} \cdot 20\right) \text{ cm}^2 = 120\pi\sqrt{2} \text{ cm}^2$

b) Em um cilindro circunscrito a um prisma hexagonal regular, a medida r do raio da base é a mesma medida da aresta da base do prisma e a medida h da altura é a mesma da altura do prisma.
Assim, temos: $r = 3$ cm e $h = 12$ cm



Logo, a área total A_T desse cilindro é dada por:
$A_T = (2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 12 + 2 \cdot \pi \cdot 3^2)$ cm^2 = 90π cm^2

6. Sabemos que a área lateral A_ℓ do cilindro de raio da base $r = 3$ dm é a terça parte da área total A_T.
Assim:
$A_\ell = \frac{1}{3}A_T \Rightarrow A_\ell = \frac{1}{3}(A_\ell + 2B)$
$\therefore A_\ell - \frac{1}{3}A_\ell = \frac{2}{3}B \Rightarrow A_\ell = B$
Portanto:
$2\pi rh = \pi r^2 \Rightarrow 6\pi h = 9\pi$
$\therefore h = 1{,}5$
Logo, a altura desse cilindro é 1,5 dm.

7. Sendo h e r as medidas da altura e do raio da base do semicilindro, respectivamente, temos:
$A_\ell = 2rh + \pi rh \Rightarrow$
$\Rightarrow A_\ell = (2 \cdot 5 \cdot 15 + \pi \cdot 5 \cdot 15)$ cm^2 = $75(2 + \pi)$ cm^2
$A_T = A_\ell + \pi r^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow A_T = (150 + 75\pi + \pi \cdot 5^2)$ cm^2 = $50(3 + 2\pi)$ cm^2

8. Sendo r a medida, em centímetro, do raio da base do cilindro, temos que o rótulo é um retângulo de comprimento $2\pi r$ e altura 10 cm. Assim, temos:
$$2\pi r \cdot 10 = 80\pi \Rightarrow r = 4$$
Logo, a área total da superfície da lata é dada por:
$A_T = (2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 10 + 2 \cdot \pi \cdot 4^2)$ cm^2 = 112π cm^2

9. As áreas laterais A_m e A_M dos cilindros menor e maior, respectivamente, são dadas por:
$A_m = (2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 18)$ cm^2 = 72π cm^2 e
$A_M = (2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 23)$ cm^2 = 138π cm^2
Assim, a área S que seria pintada pelo rolo menor no mesmo tempo em que com o rolo maior pintam-se 46 m^2 pode ser calculada pela regra de três:

Área lateral do cilindro (cm^2)	Área pintada (m^2)
138π	46
72π	S

De onde concluímos que S = 24 m^2.

10. A área lateral A da cobertura é a terça parte (120°) da área lateral de um cilindro circular reto de altura 20 m e raio da base 10 m, ou seja:
$A = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 10 \cdot 20$ m^2 = $\frac{400\pi}{3}$ m^2
Alternativa **c**.

11. Sendo r e h as medidas do raio da base e da altura do cilindro, respectivamente, temos:
$V = \pi r^2 h \Rightarrow V = (\pi \cdot 0{,}64 \cdot 2)$ m^3 = $1{,}28\pi$ m^3
Logo, o volume desse cilindro é $1{,}28\pi$ m^3.

12. $\text{sen } 30° = \frac{h}{h + 6} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{h + 6}$
$\therefore h = 6$ cm
Assim, o volume V do cilindro é dado por:
$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 6$ cm^3 = 150π cm^3
Logo, o volume desse cilindro é 150π cm^3.

13. Sendo r e h as medidas do raio da base e da altura do cilindro, respectivamente, a área lateral é dada por $A_\ell = 2\pi rh$ e, portanto:
$54\pi = 2\pi \cdot 0{,}3 \cdot h \Rightarrow h = 90$ dm
Logo, o volume V do cilindro é dado por:
$V = \pi r^2 h = \pi \cdot (0{,}3)^2 \cdot 90$ dm^3, ou seja:
$V = 8{,}1\pi$ dm^3 = $8.100\ \pi$ cm^3

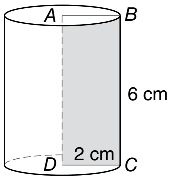
14. Sendo r e h as medidas do raio da base e da altura do cilindro equilátero, temos $h = 2r$ e, portanto, o volume V é dado por: $V = \pi r^2 h$, ou seja, $V = 2\pi r^3$.
Logo:
$128\pi = 2\pi r^3 \Rightarrow r = 4$ cm
Concluímos, calculando a área total A_T:
$A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2 \Rightarrow A_T = (2\pi \cdot 4 \cdot 8 + 2\pi \cdot 4^2)$ cm^2
$\therefore A_T = 96\pi$ cm^2

15. A área lateral do cilindro é dada por $A_\ell = 2\pi rh$, em que r é o raio da base e h é a altura do cilindro. Para $A_\ell = 120\pi$ cm^2 e $h = 12$ cm, temos:
$A_\ell = 2\pi rh \Rightarrow 120\pi = 2\pi \cdot r \cdot 12$
$\therefore r = 5$ cm
Assim, podemos calcular o volume V do cilindro:
$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 12$ cm^3 = 300π cm^3
Logo, o volume desse cilindro é 300π cm^3.

16. Como a secção meridiana é equivalente a uma das bases, então a área A_{SM} da secção meridiana é igual à área B da base do cilindro, de raio $r = 10$ cm e altura h.
Assim:
$A_{SM} = B \Rightarrow 2rh = \pi r^2$
$\therefore 2 \cdot 10 \cdot h = \pi 10^2 \Rightarrow h = 5\pi$ cm
Assim, podemos calcular o volume V do cilindro:
$V = \pi r^2 h \Rightarrow V = \pi \cdot 100 \cdot 5\pi$ cm^3 = $500\pi^2$ cm^3
Logo, o volume desse cilindro é $500\pi^2$ cm^3.

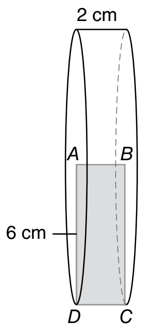
17. Como sólidos equivalentes são sólidos de mesmo volume, o volume do cilindro equilátero é igual ao volume do cubo de aresta $2\sqrt[3]{2\pi}$. Assim, sendo r o raio da base do cilindro, temos:
$V_{cilindro} = V_{cubo} \Rightarrow \pi r^2 \cdot 2r = \left(2\sqrt[3]{2\pi}\right)^3$
$\therefore 2\pi r^3 = 16\pi \Rightarrow r^3 = 8$
$\therefore r = 2$
Agora, podemos calcular a área lateral A_ℓ, dada por:
$A_\ell = 2\pi r \cdot 2r \Rightarrow A_\ell = 2\pi \cdot 2 \cdot (2 \cdot 2) = 16\pi$
Logo, a área lateral mede 16π unidades de área.

18. a)



$V = (\pi \cdot 2^2 \cdot 6)\ cm^3 = 24\pi\ cm^3$

b)



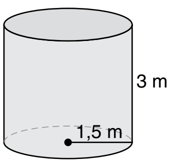
$A_T = (2\pi \cdot 6 \cdot 2 + 2 \cdot \pi \cdot 6^2)\ cm^2 = 96\pi\ cm^2$

19. O volume V do semicilindro circular reto de altura h e raio da base r é dado por $V = \frac{1}{2}\pi r^2 h$. Assim, temos:

$V = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 12 = 96\pi$

Portanto, o volume do semicilindro é $96\pi\ cm^3$.

20.



$V = (\pi \cdot (1{,}5)^2 \cdot 3)\ m^3$

$\therefore\ V = (3{,}14 \cdot 2{,}25 \cdot 3)\ m^3$

$\therefore\ V = 21{,}195\ m^3 = 21.195\ dm^3$

Logo, a capacidade dessa caixa é 21.195 L.

21. A panela cilíndrica moldada tem 16 cm de raio da base e 12 cm de altura; logo, a capacidade V da panela é dada por:

$V = (\pi \cdot 16^2 \cdot 12)\ cm^3 = 3.072\pi\ cm^3$ ou, de modo equivalente, $V = 3{,}072\pi\ dm^3$

Logo, a capacidade da panela é de $3{,}072\pi$ L ou, aproximadamente, 9,6 L.

22. Temos que: 350 L = 350 dm^3, 8 cm = 0,8 dm e 1,2 m = 12 dm. Assim, indicando por r a medida, em decímetro, do raio da base do cilindro, temos:

$\pi \cdot r^2 \cdot 0{,}8 = 350 \Rightarrow \pi r^2 = \frac{350}{0{,}8} = 437{,}5$

Logo, a capacidade V do reservatório é dada por:

$V = \pi r^2 \cdot 12\ dm^3 = 437{,}5 \cdot 12\ dm^3 = 5.250\ dm^3$

Ou seja, a capacidade do tanque é de 5.250 L.

Alternativa **d**.

23. Temos que 1 m = 100 cm e 10,99 kg = 10.990 g. Assim, o volume V de PVC que compõe o tubo é dado por:

$V = (\pi \cdot 13^2 \cdot 100 - \pi \cdot 12^2 \cdot 100)\ cm^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 2.500\pi\ cm^3$

Adotando $\pi = 3{,}14$, temos que $V = 7.850\ cm^3$.

Assim, a densidade d do PVC é calculada por:

$d = \frac{10.990\ g}{7.850\ cm^3} = 1{,}4\ g/cm^3$

Alternativa **d**.

24 Considerando que as medidas R e r estejam em metro, temos que:

$\begin{cases} \pi \cdot R^2 \cdot 1 = 12 \\ \pi \cdot R^2 \cdot 1 - \pi \cdot r^2 \cdot 1 \geqslant 4 \end{cases}$

De onde obtemos que $\pi r^2 \leqslant 8$.

Aproximando para 3 o valor de π, concluímos:

$$3 \cdot r^2 \leqslant 8 \Rightarrow 0 < r \leqslant \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Logo, o maior valor possível de r é $\frac{2\sqrt{6}}{3}$, que vale aproximadamente 1,6.

Alternativa **a**.

25. Temos que: $i_C = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\pi R^2 H_2}{\pi R^2 H_1} = \frac{H_2}{H_1}$; logo, o índice de compressão i_C também pode ser expresso por $i_C = \frac{H_2}{H_1}$.

Alternativa **e**.

26. Sabemos que 90.000 L = 90.000 dm^3 = 90 m^3. Assim, sendo h a medida, em metro, da altura do cilindro, temos:

$\pi \cdot 3^2 \cdot h = 90 \Rightarrow h = \frac{10}{\pi}$

Logo, a área total A_T do cilindro é dada por:

$A_T = \left(2\pi \cdot 3 \cdot \frac{10}{\pi} + 2 \cdot \pi \cdot 3^2\right) m^2 \approx 116{,}52\ m^2$

Como cada metro quadrado de chapa custa R$ 100,00, concluímos que o custo C, em real, é dado por:

$C \approx 116{,}52 \cdot 100 = 11.652$

Alternativa **e**.

27. Um tronco de cilindro circular reto de raio da base r, cujas geratrizes medem G e g, respectivamente, tem volume V dado por:

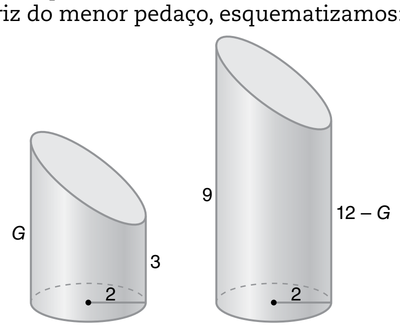
$V = \frac{\pi r^2 (G + g)}{2}$. Assim, para

$r = 4$ cm, $G = 8$ cm e $g = 6$ cm, temos:

$V = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot (8 + 6)}{2}\ cm^3 = 112\pi\ cm^3$

Logo, o volume desse tronco é $112\pi\ cm^3$.

28. Indicando por G a medida, em centímetro, da maior geratriz do menor pedaço, esquematizamos:



Como o volume do maior pedaço é o dobro do volume do menor, concluímos:

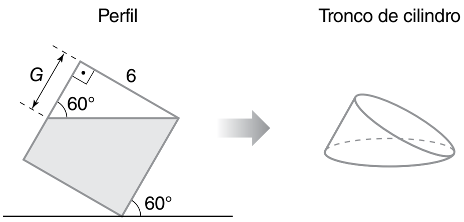
$\frac{\pi \cdot 2^2 \cdot (9 + 12 - G)}{2} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot (G + 3)}{2} \Rightarrow G = 5$

Ou seja a medida da maior geratriz do menor pedaço é 5 cm.

29. A água contida no copo tem a forma de um tronco de cilindro circular reto cujas geratrizes maior e menor medem 10 cm e 8 cm e o raio da base circular mede 3 cm. Logo, o volume V de água é dado por:

$V = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot (10 + 8)}{2}\ cm^3 = 81\pi\ cm^3$

30. O volume de óleo derramado é igual ao volume do tronco de cilindro representado pelo espaço vazio dentro do recipiente inclinado. Indicando por G a medida, em centímetro, da maior geratriz desse tronco (note que a menor geratriz mede 0 cm), esquematizamos:



Assim, temos:

$\text{tg } 60° = \dfrac{6}{G} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{6}{G}$

$\therefore G = 2\sqrt{3}$

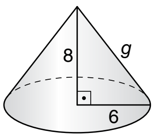
Concluímos, então, que o volume V de óleo derramado é dado por:

$$V = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot \left(2\sqrt{3} + 0\right)}{2}\ \text{cm}^3 = 9\pi\sqrt{3}\ \text{cm}^3$$

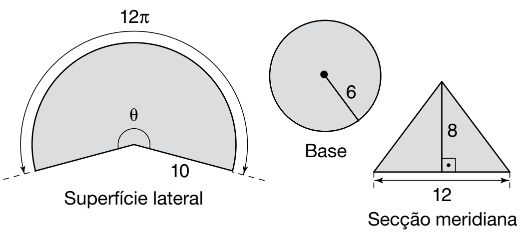
Como 1 cL = 10 cm³, temos que $V = \dfrac{9\pi\sqrt{3}}{10}$ cL.

Alternativa **b**.

31.



$g^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow g = 10$



a) $A_\ell = \pi r g \Rightarrow A_\ell = \pi \cdot 6 \cdot 10\ \text{cm}^2$

$\therefore A_\ell = 60\pi\ \text{cm}^2$

b) $A_T = A_\ell + B \Rightarrow A_T = (60\pi + \pi \cdot 6^2)\ \text{cm}^2$

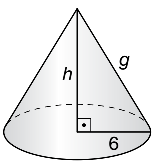
$\therefore A_T = 96\pi\ \text{cm}^2$

c) $A_{SM} = \dfrac{12 \cdot 8}{2}\ \text{cm}^2 = 48\ \text{cm}^2$

d) $\theta = \dfrac{2\pi r}{g}\ \text{rad} \Rightarrow \theta = \dfrac{12\pi}{10}\ \text{rad}$

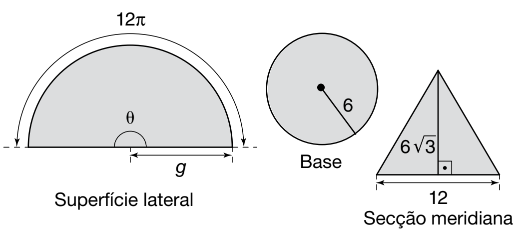
$\therefore \theta = \dfrac{6\pi}{5}\ \text{rad}$

32.



$g = 2r = 12$

$h^2 + 6^2 = 12^2 \Rightarrow h = 6\sqrt{3}$



a) $A_\ell = \pi r g \Rightarrow A_\ell = \pi \cdot 6 \cdot 12\ \text{cm}^2$

$\therefore A_\ell = 72\pi\ \text{cm}^2$

b) $A_T = A_\ell + B \Rightarrow A_T = (72\pi + \pi \cdot 6^2)\ \text{cm}^2$

$\therefore A_T = 108\pi\ \text{cm}^2$

c) $A_{SM} = \dfrac{12 \cdot 6\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2 = 36\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

d) $\theta = \dfrac{2\pi r}{g}\ \text{rad} \Rightarrow \theta = \dfrac{12\pi}{12}\ \text{rad}$

$\therefore \theta = \pi\ \text{rad}$

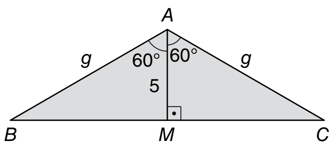
33. A medida θ, em radiano, do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral de qualquer cone circular reto é dada por:

$\theta = \dfrac{2\pi r}{g}$

em que r e g são as medidas do raio da base e da geratriz do cone, respectivamente. Como no cone equilátero temos $g = 2r$, concluímos que, nesse tipo de cone:

$\theta = \dfrac{2\pi r}{2r}\ \text{rad} \Rightarrow \theta = \pi\ \text{rad}$

34.



Secção meridiana

Do triângulo AMC, deduzimos:

$\cos 60° = \dfrac{5}{g}$

ou seja:

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{g} \Rightarrow g = 10$

Logo, cada geratriz do cone mede 10 cm.

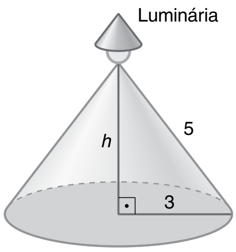
35. Sendo r a medida, em metro, do raio da região circular iluminada, temos:

$\pi \cdot r^2 = 28{,}26 \Rightarrow r^2 = \dfrac{28{,}26}{\pi}$

Considerando $\pi = 3{,}14$, chegamos a:

$r^2 = \dfrac{28{,}26}{3{,}14} = 9 \Rightarrow r = 3$

Assim, esquematizamos:



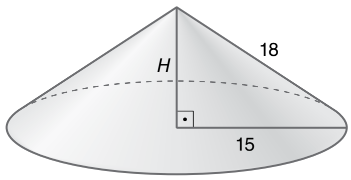
Pelo teorema de Pitágoras, concluímos:

$$h^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow h = 4$$

Ou seja, a luminária deve ser colocada a 4 m de altura.

Alternativa **b**.

36. Esquematizando o cone depois de pronto, temos:



Pelo teorema de Pitágoras, determinamos a medida H, em centímetro:

$$H^2 + 15^2 = 18^2 \Rightarrow H = 3\sqrt{11}$$

A medida R do raio do setor circular equivalente à superfície lateral do cone é medida da geratriz do cone; logo, $R = 18$ cm.

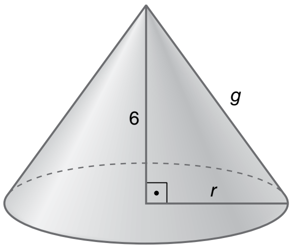
A medida α do ângulo central, em radiano, do setor circular equivalente à superfície lateral do cone é obtida dividindo-se o comprimento do arco desse setor pelo seu raio R. Como o comprimento C desse arco é o comprimento da circunferência da base do cone, isto é, $C = 2 \cdot \pi \cdot 15$ cm $= 30\pi$ cm, temos:

$$\alpha = \frac{30\pi}{18} \text{ rad} = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}$$

Convertendo para grau a medida α, concluímos: $\alpha = 300°$.

Resumindo, temos $R = 18$ cm, $\alpha = 300°$ e $H = 3\sqrt{11}$ cm.

37. Indicando por r e g as medidas, em decímetro, do raio da base e da geratriz do cone, esquematizamos:



Pelo teorema de Pitágoras e pelo fato de a área lateral A_ℓ ser o dobro da área B da base, temos:

$$\begin{cases} g^2 = r^2 + 6^2 \\ \pi r g = 2\pi r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g^2 = r^2 + 36 \\ r = \dfrac{g}{2} \end{cases}$$

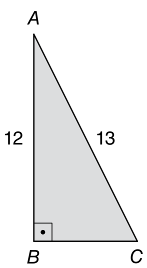
De onde concluímos que $g = 4\sqrt{3}$ dm.

38. Igualando a área total do cone com a área lateral do cilindro, temos:

$$\pi R(2R + R) = 2\pi RH \Rightarrow H = \frac{3R}{2}$$

Alternativa **b**.

39.



$$(BC)^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow BC = 5$$

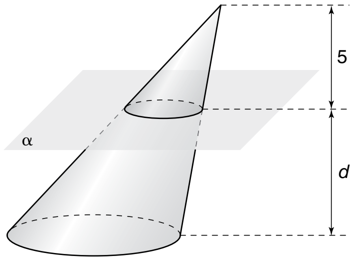
a) A revolução do triângulo ABC em torno do lado $\overline{AB}$ gera um cone com 5 cm de raio da base e 13 cm de geratriz. Logo, a área lateral $A_{\ell(\overline{AB})}$ desse cone é:

$$A_{\ell(\overline{AB})} = \pi \cdot 5 \cdot 13 \text{ cm}^2 = 65\pi \text{ cm}^2$$

b) A revolução do triângulo ABC em torno do lado $\overline{BC}$ gera um cone com 12 cm de raio da base e 13 cm de geratriz. Logo, a área lateral $A_{\ell(\overline{BC})}$ desse cone é:

$$A_{\ell(\overline{BC})} = \pi \cdot 12 \cdot 13 \text{ cm}^2 = 156\pi \text{ cm}^2$$

40. Sendo d a distância pedida, temos:

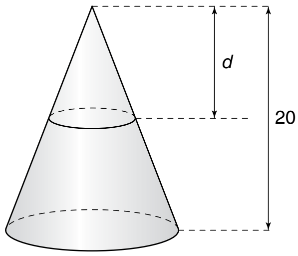


$$\frac{25}{4} = \left(\frac{d+5}{5}\right)^2 \Rightarrow \frac{d+5}{5} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore\ d = \frac{15}{2} \text{ cm} = 7{,}5 \text{ cm}$$

Logo, a distância entre o plano α e a base do cone é 7,5 cm.

41. Sendo b a área da secção transversal e $4b$ a área da base do cone, temos:

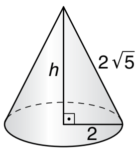


$$\frac{4b}{b} = \left(\frac{20}{d}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{20}{d}$$

$$\therefore\ d = 10 \text{ cm}$$

Logo, essa secção transversal dista 10 cm do vértice do cone.

42.

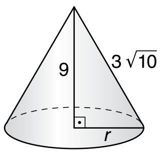


$$h^2 + 2^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow h = 4$$

Logo, o volume V do cone é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 4 \text{ dm}^3 = \frac{16\pi}{3} \text{ dm}^3$$

43.

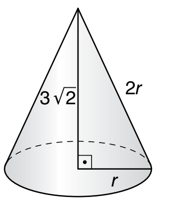


$$r^2 + 9^2 = \left(3\sqrt{10}\right)^2 \Rightarrow r = 3$$

Logo, o volume V do cone é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 9 \text{ cm}^3 = 27\pi \text{ cm}^3$$

44.

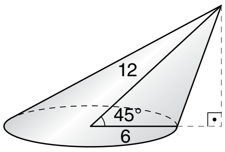


$$(2r)^2 = r^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow r = \sqrt{6}$$

Logo, o volume V do cone é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\sqrt{6}\right)^2 \cdot 3\sqrt{2} \text{ cm}^3 = 6\sqrt{2}\,\pi \text{ cm}^3$$

45.



$\text{sen } 45° = \frac{h}{12} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{12}$

$\therefore\ h = 6\sqrt{2}$

Logo, o volume V do cone é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 6\sqrt{2}\ \text{dm}^3 = 72\sqrt{2}\,\pi\ \text{dm}^3$

46. Figuras planas equivalentes são figuras de mesma área. Assim, indicando por r a medida, em decímetro, do raio da base do cone, temos:

$\frac{2r \cdot 3}{2} = \pi r^2 \Rightarrow r = \frac{3}{\pi}$

Logo, o volume do cone é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{3}{\pi}\right)^2 \cdot 3\ \text{dm}^3 = \frac{9}{\pi}\ \text{dm}^3$

47. Figuras tridimensionais equivalentes são figuras de mesmo volume. Assim, indicando por r a medida, em decímetro, do raio da base do cone, temos:

$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 6 = r^3 \Rightarrow r = 2\pi$

Logo, a área B da base do cone é dada por:

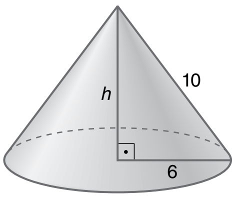
$B = \pi \cdot (2\pi)^2\ \text{dm}^2 = 4\pi^3\ \text{dm}^2$

48. Indicando por r a medida, em centímetro, do raio da base desse cone, temos:

$\pi \cdot r \cdot 10 = \pi \cdot r^2 + 24 \cdot \pi \Rightarrow r^2 - 10r + 24 = 0$

$\therefore\ r = 6$ ou $r = 4$

O cone de volume máximo é o que tem maior raio, ou seja, $r = 6$ cm. Pelo teorema de Pitágoras, obtemos a medida h, em centímetro, da altura do cone:

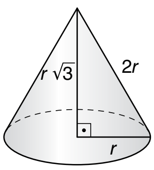


$h^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow h = 8$

Assim, o volume V desse cone é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 8\ \text{cm}^3 = 96\pi\ \text{cm}^3$

49.



$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r\sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{\pi r^3 \sqrt{3}}{3}$

a) $V = 9\pi\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\pi r^3\sqrt{3}}{3} = 9\pi\sqrt{3}$

$\therefore\ r = 3$ dm

b) $A_\ell = \pi r g \Rightarrow A_\ell = \pi \cdot 3 \cdot 6\ \text{dm}^2$

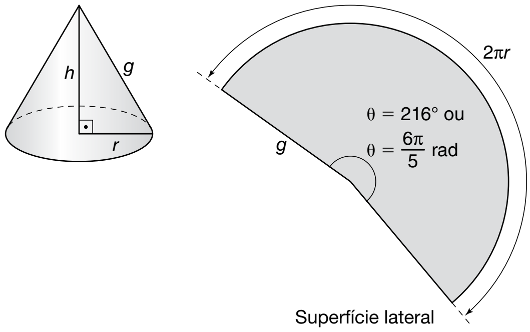
$\therefore\ A_\ell = 18\pi\ \text{dm}^2$

c) $A_T = A_\ell + B \Rightarrow A_T = (18\pi + \pi \cdot 3^2)\ \text{dm}^2$

$\therefore\ A_T = 27\pi\ \text{dm}^2$

d) $A_{SM} = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2}\ \text{dm}^2 = 9\sqrt{3}\ \text{dm}^2$

50.



$\theta = \frac{2\pi r}{g}\ \text{rad} \Rightarrow \frac{6\pi}{5} = \frac{2\pi r}{15}$

$\therefore\ r = 9$ cm

Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos a medida h:

$h^2 + 9^2 = 15^2 \Rightarrow h^2 = 144$

$\therefore\ h = 12$ cm

Logo, o volume V do cone é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9^2 \cdot 12\ \text{cm}^3 = 324\pi\ \text{cm}^3$

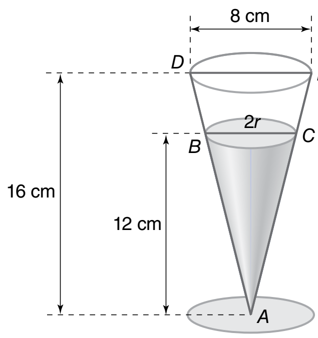
51. O volume V de biju com cada casquinha é a diferença entre os volumes dos cones de alturas 12 cm e 11 cm e raios das bases 3 cm e 2,7 cm, respectivamente, ou seja:

$V = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2{,}7)^2 \cdot 11\right)\text{cm}^3 =$

$= 9{,}27\pi\ \text{cm}^3 \approx 29{,}12\ \text{cm}^3$

Logo, o volume de biju em cada casquinha é $9{,}27\pi\ \text{cm}^3$ ou aproximadamente $29{,}12\ \text{cm}^3$.

52. Uma secção meridiana desse cone mostra dois triângulos semelhantes ABC e ADE, conforme a figura a seguir, em que r é a medida, em centímetro, do raio da base do cone formado pela água.



Dessa semelhança, resulta:

$\frac{8}{2r} = \frac{16}{12} \Rightarrow r = 3$

Logo, o volume V de água no copo é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 12\ \text{cm}^3 = 36\pi\ \text{cm}^3$

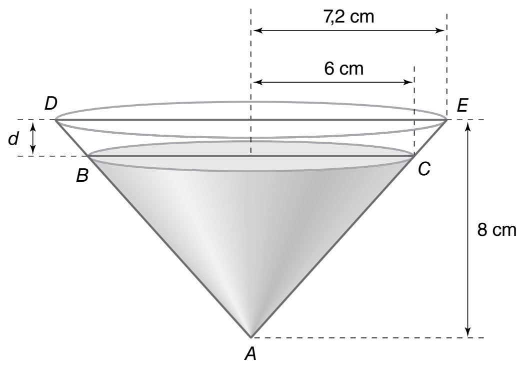
Como $1\ \text{cm}^3 = 1$ mL, concluímos que o volume de água no copo é de 36π mL.

53. Indicando por h a medida, em milímetro, da altura do cone, temos que o volume do cone somado com o volume da parte restante do lápis resulta em $2.304\pi\ \text{mm}^3$, isto é:

$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot h + \pi \cdot 4^2 \cdot (150 - h) = 2.304\pi \Rightarrow h = 9$

Ou seja, a altura do cone é 9 mm.

54. **a)** Uma secção meridiana desse cone mostra dois triângulos semelhantes *ABC* e *ADE*, conforme a figura a seguir.



Dessa semelhança, resulta:

$$\frac{14{,}4}{12} = \frac{8 + d}{8} \Rightarrow d = 1{,}6$$

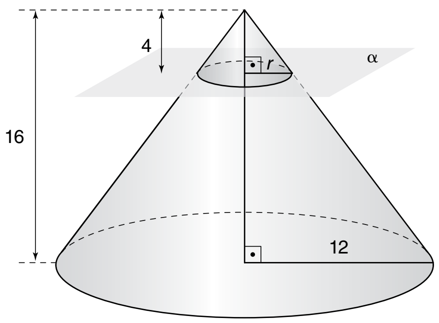
Ou seja, a distância entre o plano da base do cone e a superfície do óleo em seu nível máximo é 1,6 cm.

b) O volume máximo V de óleo para que o freio funcione perfeitamente é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 8 \text{ cm}^3 = 96\pi \text{ cm}^3$$

Como 1 L = 1 dm^3 e 96π cm^3 = $0{,}096\pi$ dm^3, concluímos que o volume máximo V é $0{,}096\pi$ L ou, aproximadamente, 0,3 L.

55. A medida *r* do raio da secção transversal pode ser obtida por semelhança de triângulos:



$$\frac{16}{4} = \frac{12}{r} \Rightarrow r = 3$$

As medidas G e *g* das geratrizes do cone original e do cone acima do plano α são obtidas pelo teorema de Pitágoras:

$$\begin{cases} G^2 = 16^2 + 12^2 \\ g^2 = 4^2 + 3^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G = 20 \\ g = 5 \end{cases}$$

Assim:

a) O volume V do tronco de cone é dado por:

$$V = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 16 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4\right) \text{cm}^3 =$$

$$= 756\pi \text{ cm}^3$$

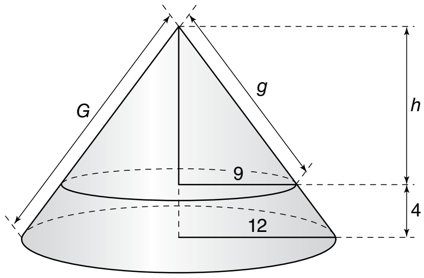
b) A área lateral A_ℓ do tronco de cone é dada por:

$A_\ell = (\pi \cdot 12 \cdot 20 - \pi \cdot 3 \cdot 5)$ cm^2 = 225π cm^2

c) A área total A_T do tronco de cone é dada por:

$A_T = (225\pi + \pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 12^2)$ cm^2 = 378π cm^2

56. Prolongando as geratrizes do tronco, obtemos o cone que contém esse tronco:



Pela semelhança dos cones, temos:

$$\frac{h + 4}{h} = \frac{12}{9} \Rightarrow 12h = 9h + 36$$

$\therefore h = 12$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{cases} g^2 = 9^2 + 12^2 \\ G^2 = 12^2 + 16^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = 15 \\ G = 20 \end{cases}$$

Assim:

a) O volume V desse tronco de cone é dado por:

$$V = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 16 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9^2 \cdot 12\right) \text{cm}^3 =$$

$$= 444\pi \text{ cm}^3$$

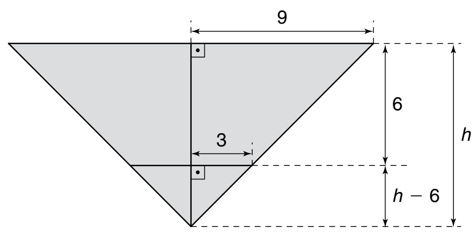
b) A área lateral A_ℓ desse tronco de cone é dada por:

$A_\ell = (\pi \cdot 12 \cdot 20 - \pi \cdot 9 \cdot 15)$ cm^2 = 105π cm^2

c) A área total A_T desse tronco de cone é dada por:

$A_T = (105\pi + \pi \cdot 12^2 + \pi \cdot 9^2)$ cm^2 = 330π cm^2

57. Sendo *h* a medida, em metro, do cone obtido pelos prolongamentos das geratrizes desse tronco, temos a secção meridiana.



$$\frac{h}{h - 6} = \frac{9}{3} \Rightarrow h = 9$$

Assim, o volume V do tronco de cone é dado por:

$$V = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9^2 \cdot 9 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 3\right) \text{m}^3 = 234\pi \text{ m}^3$$

Para $\pi = 3{,}14$, temos:

V = 734,76 m^3 = 734.760 dm^3

Como 1L = 1 dm^3, concluímos que a capacidade do reservatório é 734.760 L.

58. Sendo *v* o volume do cone C′, temos que o volume do tronco de cone é 7*v* e, portanto, o volume do cone original é 8*v*. Assim, concluímos:

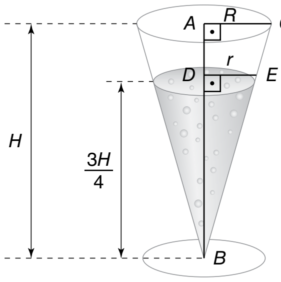
$$\frac{8v}{v} = \left(\frac{18}{d}\right)^3 \Rightarrow 8 = \left(\frac{18}{d}\right)^3$$

$$\therefore \frac{18}{d} = \sqrt[3]{8} \Rightarrow d = 9$$

Logo, a secção transversal dista 9 cm do vértice do cone.

59. Sendo R e r os raios da boca do copo e da superfície do suco, respectivamente, temos da semelhança entre os triângulos ABC e DBC, destacados na figura abaixo:

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{\frac{3H}{4}} \Rightarrow r = \frac{3R}{4}$$



Assim, a capacidade C do copo e o volume V de suco, em função de R e H, são dados por:

$$C = \pi R^2 H \text{ e } V = \pi \cdot \left(\frac{3R}{4}\right)^3 \cdot \frac{3H}{4} = \frac{27\pi R^2 H}{64}$$

Para obter a relação entre C e V, dividimos seus valores:

$$\frac{C}{V} = \frac{\pi R^2 H}{\frac{27\pi R^2 H}{64}} \Rightarrow C = \frac{64V}{27}$$

$$\therefore C = \frac{64 \cdot 135}{27} = 320$$

Concluímos, assim, que a capacidade do copo é 320 mL.

Outro modo

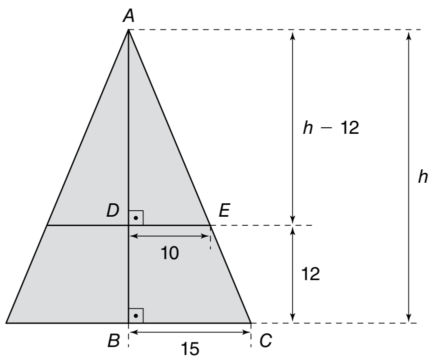
Da semelhança entre os cones representados pelo copo e pelo suco, temos:

$$\frac{135}{V} = \left(\frac{\frac{3H}{4}}{H}\right)^3 \Rightarrow \frac{135}{V} = \frac{27}{64}$$

$\therefore V = 320$

Logo, a capacidade do copo é de 320 mL.

60. Sendo h a medida, em centímetro, da altura do cone obtido pelos prolongamentos das geratrizes desse tronco, temos a secção meridiana:



$$\frac{h}{h - 12} = \frac{15}{10} \Rightarrow h = 36$$

Pelo teorema de Pitágoras, obtemos as medidas G e g das hipotenusas dos triângulos ABC e ADE, respectivamente:

$$\begin{cases} G^2 = 36^2 + 15^2 \\ g^2 = 24^2 + 10^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G = 39 \\ g = 26 \end{cases}$$

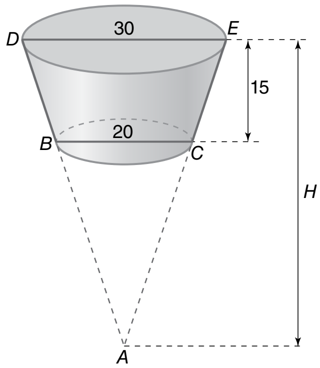
Assim, a área lateral A do tronco de cone é dada por:

$A = (\pi \cdot 15 \cdot 39 - \pi \cdot 10 \cdot 26)\ cm^2 = 325\pi\ cm^2$

Alternativa **d**.

61. Sendo V_M e V_m os volumes dos troncos de cone maior e menor, respectivamente, a capacidade da forma é dada pela diferença $V_M - V_m$.

I. Para o cálculo de V_M, prolongamos as geratrizes do tronco maior, representando o cone de altura H que contém esse tronco. Uma secção meridiana desse cone mostra dois triângulos semelhantes ABC e ADE, conforme a figura a seguir.



Essa semelhança, temos:

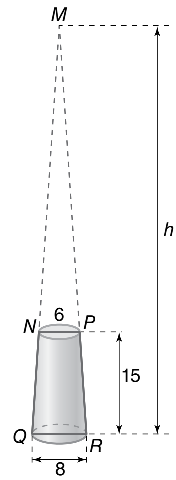
$$\frac{30}{20} = \frac{H}{H - 15} \Rightarrow H = 45 \text{ cm}$$

Logo,

$$V_M = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15^2 \cdot 45 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 30\right) cm^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_M = 2.375\pi\ cm^3$$

II. Analogamente, para o cálculo de V_m, prolongamos as geratrizes do tronco menor, representando o cone de altura h que contém esse tronco. Uma secção meridiana desse cone mostra dois triângulos semelhantes MNP e MQR, conforme a figura a seguir.



Dessa semelhança, temos:

$$\frac{8}{6} = \frac{h}{h - 15} \Rightarrow h = 60$$

Logo,

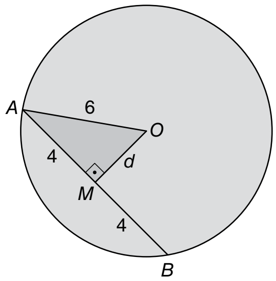
$$V_m = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 60 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 45\right) cm^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_m = 185\pi\ cm^3$$

Concluímos, então, que a capacidade V da forma é dada por:

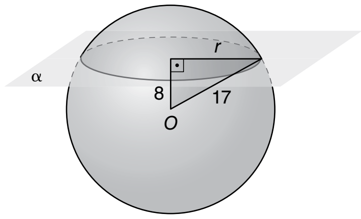
$$V = (2.375\pi - 185\pi)\ cm^3 = 2.190\pi\ cm^3$$

62. A figura abaixo representa a secção plana da esfera pelos pontos *A*, *B* e *O*.



Pelo teorema de Pitágoras, temos:
$d^2 + 4^2 = 6^2 \Rightarrow d = 2\sqrt{5}$
Logo, a distância entre o centro *O* e a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é $2\sqrt{5}$ cm.

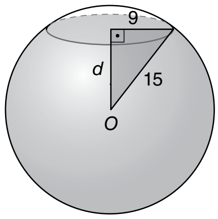
63. **a)** Sendo *r* a medida do raio do círculo, temos:



$r^2 + 8^2 = 17^2 \Rightarrow r = 15$
Logo, o raio do círculo mede 15 cm.

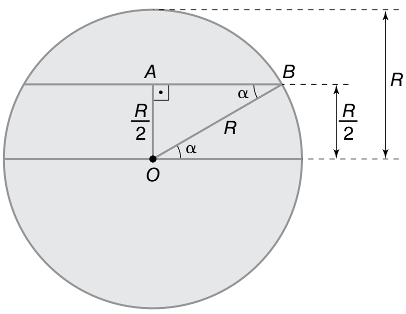
b) A área A da secção é dada por:
$A = \pi \cdot 15^2 \text{ cm}^2 = 225\pi \text{ cm}^2$

64. Sendo *r* a medida do raio da secção plana, temos:
$\pi r^2 = 81\pi \Rightarrow r = 9$ dm



Assim, pelo teorema de Pitágoras, calculamos a distância *d* pedida:
$d^2 + 9^2 = 15^2 \Rightarrow d = 12$
Logo, a distância entre o centro *O* e o plano que contém a secção é 12 dm.

65. Indicando por O o centro da Terra e por α a latitude desse paralelo, em grau, esquematizamos:

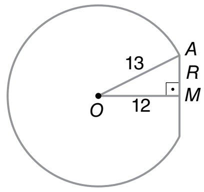


Assim, do triângulo *OAB*, temos:

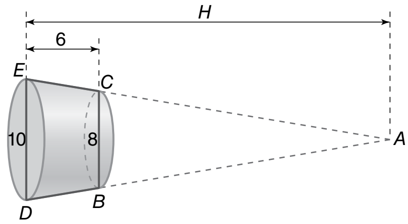
$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\frac{R}{2}}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$$

Logo, esse paralelo tem latitude 30° norte.

66. A distância entre o centro O da esfera e o plano da base do cone é (13 − 1) mm, ou seja, 12 mm, como mostra a figura a seguir, em que *R* é a medida, em milímetro, do raio da base maior do cone.



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *OAM*, obtemos $R = 5$ mm.
A altura do tronco de cone é (71 − 25 − 40) mm, ou seja, 6 mm, e a base menor desse tronco tem 4 mm de raio. Assim, calculamos o volume V_T do tronco de cone, representando o cone de altura *H* que contém esse tronco, prolongando suas geratrizes:



Na secção meridiana, observamos os triângulos semelhantes *ABC* e *ADE*. Dessa semelhança, obtemos *h*:

$$\frac{10}{8} = \frac{H}{H - 6} \Rightarrow H = 30$$

Logo, o volume V_T do tronco é dado por:

$$V_T = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 30 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 24\right) \text{mm}^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_T = 122\pi \text{ mm}^3$$

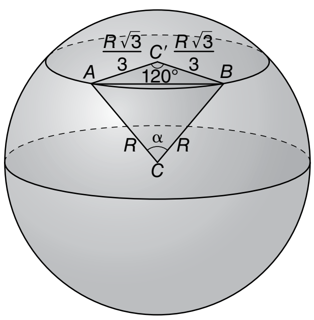
O volume V_C da parte cilíndrica do cabo é dado por:

$$V_C = \pi \cdot 4^2 \cdot 40 \text{ mm}^3 \Rightarrow V_C = 640\pi \text{ mm}^3$$

Concluímos, então, que o volume V do cabo é calculado por:

$$V = (122\pi + 640\pi) \text{ mm}^3 = 762\pi \text{ mm}^3$$

67. Sendo *C′* o centro do paralelo e α a medida do ângulo $A\hat{C}B$, temos:



Pela lei dos cossenos, aplicada no triângulo ABC′, temos:

$$(AB)^2 = \left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \frac{2R\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 120° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = R$$

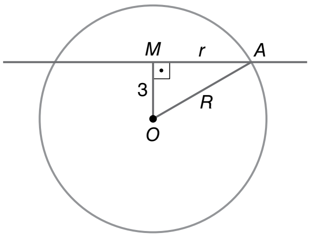
Assim, o triângulo *ABC* é equilátero e, portanto, $\alpha = 60°$.
Alternativa **d**.

68. $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 \text{ m}^3 = \frac{32\pi}{3} \text{ m}^3$

69. $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 \text{ cm}^3 = 144\pi \text{ cm}^3$

70. Sendo R a medida do raio da esfera, temos:
$\pi R^2 = 16\pi \Rightarrow R = 4$
Logo, o volume V da esfera é dado por:
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 \text{ m}^3 = \frac{256\pi}{3} \text{ m}^3$

71. Indicando por R e r as medidas, em centímetro, do raio da esfera de centro O e do raio da secção de centro M, esquematizamos:



Assim, devido à área da secção ser $27\pi \text{ cm}^2$ e pelo teorema de Pitágoras aplicado no triângulo OMA, temos:
$\begin{cases} \pi r^2 = 27\pi \\ r^2 + 3^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow R = 6$
Concluímos, então, que o volume V da esfera é dado por:
$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot 6^3}{3} \text{ cm}^3 = 288\pi \text{ cm}^3$

72. Sendo r a medida do raio da base do cilindro, temos:
$V_{\text{esfera}} = V_{\text{cilindro}} \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = \pi \cdot r^2 \cdot 4$
$\therefore r = 3$
Logo, o raio da base do cilindro mede 3 cm.

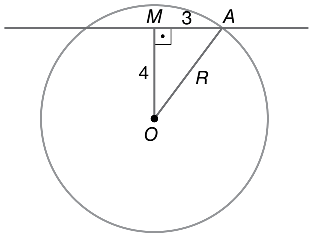
73. O volume V da cuia é a diferença entre os volumes de duas semiesferas de raios 6 cm e 5 cm, isto é:
$V = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot 6^3}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot 5^3}{3}\right) \text{cm}^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow V = \frac{182\pi}{3} \text{ cm}^3$
Logo, a massa m da cuia é calculada por:
$m = \frac{182\pi}{3} \cdot 2{,}5 \text{ g} = \frac{455\pi}{3}$ g ou, aproximadamente, 476 g

74. Sendo R a medida, em centímetro, do raio da esfera original, temos:
$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = 8 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 \Rightarrow R = 10$

75. a) O raio da esfera é perpendicular à reta tangente no ponto de tangência. Assim:
$A\hat{C}B \cong A\hat{T}O$ (I)
O ângulo $O\hat{A}T$ é comum aos triângulos ATO e ACB. Assim:
$O\hat{A}T \cong C\hat{A}B$ (II)
As condições (I) e (II) caracterizam o caso ângulo-ângulo de semelhança de triângulos; portanto:
$\triangle OAT \sim \triangle CAB$

b) Sendo R a medida, em centímetro, do raio da esfera, temos, pela semelhança de triângulos demonstrada no item **a** e pelo teorema de Pitágoras:
$\begin{cases} \frac{R}{6} = \frac{2}{AB} \\ (AB)^2 = 6^2 + 8^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = \frac{12}{AB} & \text{(I)} \\ AB = 10 & \text{(II)} \end{cases}$
Substituímos (II) em (I), obtendo: $R = 1{,}2$ cm
Logo, o volume V da esfera é dado por:
$V = \frac{4\pi(1{,}2)^3}{3} \text{ cm}^3 = 2{,}304\pi \text{ cm}^3$

76. Indicando por R a medida, em centímetro, do raio da esfera, e por M o centro da secção, esquematizamos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OMA, chegamos a $R = 5$. Assim, a área S da superfície esférica é calculada por:
$$S = 4 \cdot \pi \cdot 5^2 \text{ cm}^2 = 100\pi \text{ cm}^2$$

77. Sendo R a medida do raio da esfera, temos:
$V_{\text{esfera}} = \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow \frac{32\pi}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}$
$\therefore R = 2$ m
Logo, a área A da superfície dessa esfera é dada por:
$A = 4\pi \cdot 2^2 \text{ m}^2 = 16\pi \text{ m}^2$

78. Sendo R a medida do raio da esfera, temos:
$2\pi R = 20\pi \Rightarrow R = 10$
Logo, a área A da superfície dessa esfera é dada por:
$A = 4\pi \cdot 10^2 \text{ cm}^2 = 400\pi \text{ cm}^2$

79. Sendo R a medida do raio da esfera, temos:
$4\pi R^2 = 400\pi \Rightarrow R = 10$ cm
Logo, o volume V dessa esfera é dado por:
$V = \frac{4\pi \cdot 10^3}{3} \text{ cm}^3 = \frac{4.000\pi}{3} \text{ cm}^3$

80. A área A do hemisfério é a soma da área da superfície da semiesfera com a área da secção plana da base, isto é:
$S = \left(\frac{4 \cdot \pi \cdot 3^2}{2} + \pi \cdot 3^2\right) \text{cm}^2 \Rightarrow S = 27\pi \text{ cm}^2$

81. a) Indicando por V_i o volume inicial do balão, quando ele tinha 12 cm de raio, e por V_f o volume final, quando foi atingida a capacidade máxima,temos:
$V_i = \frac{4 \cdot \pi \cdot 12^3}{3} \text{ cm}^3 = 2.304\pi \text{ cm}^3$ e
$V_f = (2.304\pi + 61 \cdot 36\pi) \text{ cm}^3 = 4.500 \text{ cm}^3$
Assim, sendo R a medida do raio, em centímetro, quando o balão atingiu a capacidade máxima, concluímos:
$\frac{4\pi R^3}{3} = 4.500\pi \Rightarrow R = 15$
Ou seja, a capacidade máxima foi alcançada quando o raio do balão atingiu 15 cm.

b) A taxa média t de variação é calculada por:

$$t = \frac{4 \cdot \pi \cdot 15^2 - 4 \cdot \pi \cdot 12^2}{61}\ \text{cm}^2/\text{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{324\pi}{61}\ \text{cm}^2/\text{s}$$ ou, aproximadamente, 16,7 cm^3/s

82.

$$\begin{array}{ccc} \text{Ângulo (grau)} & & \text{Volume (cm}^3\text{)} \\ 360 & \text{———} & \dfrac{4\pi \cdot 6^3}{3} \\ 36 & \text{———} & V_{cunha} \end{array} \Rightarrow V_{cunha} = \frac{144\pi}{5}\ \text{cm}^3$$

83.

$$\begin{array}{ccc} \text{Ângulo (radiano)} & & \text{Área (cm}^2\text{)} \\ 2\pi & \text{———} & 4\pi \cdot 4^2 \\ \dfrac{\pi}{8} & \text{———} & A_{fuso} \end{array} \Rightarrow A_{fuso} = 4\pi\ \text{cm}^2$$

84. Sendo α a medida do ângulo diedro, temos:

$$\begin{array}{ccc} \text{Ângulo (grau)} & & \text{Área (m}^2\text{)} \\ 360 & \text{———} & 4\pi \cdot 5^2 \\ \alpha & \text{———} & 20\pi \end{array} \Rightarrow \alpha = 72°$$

85. Sendo α a medida do ângulo diedro, temos:

$$\begin{array}{ccc} \text{Ângulo (radiano)} & & \text{Volume (cm}^3\text{)} \\ 2\pi & \text{———} & \dfrac{4\pi \cdot 3^3}{3} \\ \alpha & \text{———} & \dfrac{36\pi}{5} \end{array} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{5}\ \text{rad}$$

86. a)

$$\begin{array}{ccc} \text{Ângulo (grau)} & & \text{Volume (cm}^3\text{)} \\ 360 & \text{———} & \dfrac{4 \cdot \pi \cdot 15^3}{3} \\ 30 & \text{———} & V_c \end{array} \Rightarrow V_C = 375\pi\ \text{cm}^3$$

b)

$$\begin{array}{ccc} \text{Ângulo (grau)} & & \text{Área (cm}^2\text{)} \\ 360 & \text{———} & 4 \cdot \pi \cdot 15^2 \\ 30 & \text{———} & A_f \end{array} \Rightarrow A_f = 75\pi\ \text{cm}^2$$

c) A área total A_T desse pedaço é dada pela soma da área A_f do fuso com duas áreas A_{SC} do semicírculo de raio igual a 15 cm. Assim:

$$A_T = 2 \cdot \frac{\pi \cdot 15^2}{2} + 75\pi \Leftrightarrow A_T = 225\pi + 75\pi$$

$$\therefore A_T = 300\pi\ \text{cm}^2$$

87. a) A área A_f do fuso pode ser calculada pela regra de três:

$$\begin{array}{ccc} \text{Medida do ângulo diedro (grau)} & & \text{Área (m}^2\text{)} \\ 360 & \text{———} & 4 \cdot \pi \cdot 20^2 \\ 120 & \text{———} & A_f \end{array}$$

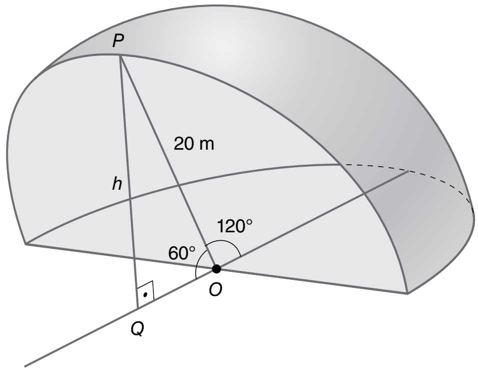
De onde obtemos: $A_f = \dfrac{1.600\pi}{3}\ \text{m}^2$

Como a área A da lona deve ter 10% a mais que a área do fuso, concluímos que:

$$A = 1{,}1 \cdot \frac{1.600\pi}{3}\ \text{m}^2 = \frac{1.760\pi}{3}\ \text{m}^2$$

b) A medida do referido ângulo é o suplemento de 120°, ou seja, 60°.

c) Indicando por P o ponto onde será instalado o canhão de luz, por Q a projeção ortogonal de P sobre o plano do palco e por h a medida PQ, em metro, esquematizamos:



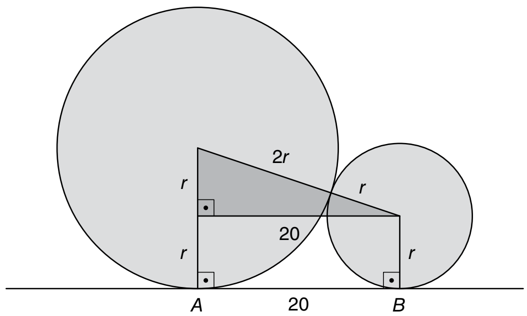
Do triângulo OPQ, temos:

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{20} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{20}$$

$\therefore h = 10\sqrt{3}$

Logo, a altura pedida é $10\sqrt{3}$ m.

88. Sendo r a medida do raio da esfera menor, temos:

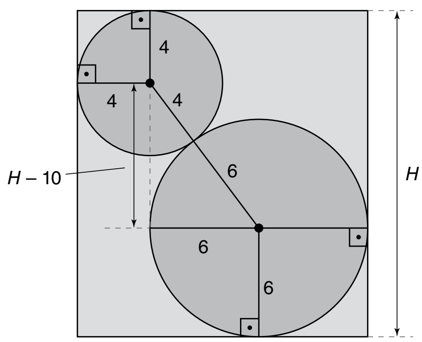


$(3r)^2 = r^2 + 20^2 \Rightarrow r^2 = 50$

$\therefore r = 5\sqrt{2}$

Logo, os raios dessas esferas medem $5\sqrt{2}$ cm e $10\sqrt{2}$ cm.

89. Seja H a medida, em centímetro, da altura mínima necessária para que as esferas fiquem submersas:



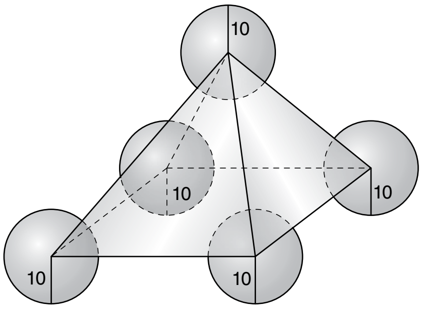
Assim, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(H - 10)^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow H = 18$

Logo, a altura pedida é 18 cm.

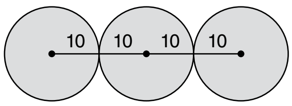
Alternativa **b**

90. Representando as bolas cujos centros são vértices da pirâmide, temos:

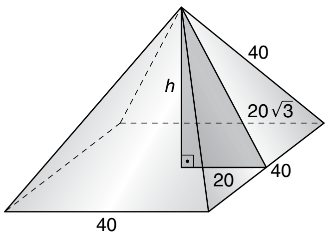


Assim, sendo h a altura da pirâmide, em centímetro, a altura da pilha de bolas é $h + 20$.

Para o cálculo de h, observemos que cada aresta da pirâmide tem comprimento 40 cm:



Assim, temos:



$h^2 + 20^2 = \left(20\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow h = 20\sqrt{2}$

Logo, a medida H da altura da pilha de bolas é dada por:

$H = \left(20\sqrt{2} + 20\right)$ cm $= 20\left(\sqrt{2} + 1\right)$ cm

Alternativa **b**.

91. Sendo a a medida da aresta do cubo, temos:

$a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$

A medida r do raio da esfera inscrita no cubo mede metade da medida da aresta desse cubo; logo:

$r = \dfrac{a}{2} \Rightarrow r = 0{,}5$ m

92. Sendo d e a as medidas da diagonal e de uma aresta do cubo, respectivamente, temos:

$d = a\sqrt{3}$

Para $d = \sqrt{48}$, deduzimos que:

$\sqrt{48} = a\sqrt{3} \Rightarrow a = 4$

Logo, a medida r do raio da esfera inscrita nesse cubo é dada por:

$r = \dfrac{4}{2}$ cm $= 2$ cm

93. A medida a da aresta do cubo é o dobro da medida do raio da esfera inscrita e, portanto, $a = 5$ cm.

Logo, o volume V desse cubo é dado por:

$V = 5^3\ \text{cm}^3 = 125\ \text{cm}^3$

94. A distância d entre um vértice do cubo e a esfera inscrita é a diferença entre a metade da medida da diagonal do cubo e a medida do raio da esfera, isto é:

$d = \left(\dfrac{5\sqrt{3}}{2} - \dfrac{5}{2}\right)$ cm $= \dfrac{5\left(\sqrt{3} - 1\right)}{2}$ cm

95. A medida da diagonal do cubo é $8\sqrt{3}$ cm.

Como a medida R do raio da esfera circunscrita ao cubo é metade da medida da diagonal desse cubo, concluímos:

$R = \dfrac{8\sqrt{3}}{2}$ cm $= 4\sqrt{3}$ cm

96. Sendo a a medida de uma aresta do cubo, temos:

$a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}$

Assim, cada diagonal desse cubo mede 3 cm e, portanto, o raio da esfera circunscrita a esse cubo mede $\dfrac{3}{2}$ cm.

Concluímos, então, que a área A da superfície dessa esfera é dada por:

$A = 4\pi\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\ \text{cm}^2 = 9\pi\ \text{cm}^2$

97. Sendo R a medida do raio da esfera circunscrita ao cubo, temos:

$\dfrac{4\pi R^3}{3} = 36\pi \Rightarrow R = 3$ dm

Indicando por a a medida da aresta do cubo e observando que cada diagonal do cubo é diâmetro da esfera circunscrita, temos:

$a\sqrt{3} = 6 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$ dm

Concluímos, então, que o volume V do cubo é dado por:

$V = \left(2\sqrt{3}\right)^3\ \text{dm}^3 = 24\sqrt{3}\ \text{dm}^3$

98. Indicando por a a medida da aresta do cubo, temos que a medida do raio da esfera inscrita é $\dfrac{a}{2}$.

Assim, a razão entre as áreas das superfícies do cubo e da esfera inscrita, nessa ordem, é $\dfrac{6a^2}{4\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$, ou seja, $\dfrac{6}{\pi}$.

99. Indicando por R a medida do raio da esfera, temos que a aresta do cubo inscrito mede $\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$ e a do cubo circunscrito mede 2R. Assim, a razão entre os volumes dos cubos inscrito e circunscrito à esfera, nessa ordem, é $\dfrac{\left(\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}\right)^3}{(2R)^3}$, ou seja, $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

100. As medidas dos raios das esferas inscrita e circunscrita são 2 cm e $2\sqrt{3}$ cm, respectivamente. Assim, indicando por S_{Ei} a área da superfície da esfera E_i; por S_{Ec} a área da superfície da esfera E_c; por V_{Ei} o volume da esfera E_i; e por V_{Ec} o volume da esfera E_c, temos:

a) V, pois $S_{Ei} = 4 \cdot \pi \cdot 2^2\ \text{cm}^2 = 16\pi\ \text{cm}^2$ e
$S_{Ec} = 4 \cdot \pi \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^2\ \text{cm}^2 = 48\pi\ \text{cm}^2$

b) V, pois essa razão é calculada por: $\dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

c) F, pois $\dfrac{V_{Ec}}{V_{Ei}} = \dfrac{\dfrac{4 \cdot \pi \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^3}{3}}{\dfrac{4 \cdot \pi \cdot 2^3}{3}} = 3\sqrt{3}$

d) F, pois o ponto P é um vértice do cubo; logo, a distância entre P e a esfera E_i é a diferença entre as medidas dos raios das esferas, isto é $\left(2\sqrt{3} - 2\right)$ cm, ou seja, $2\left(\sqrt{3} - 1\right)$ cm.

e) V, pois a medida OM é metade da medida da diagonal de uma face do cubo, ou seja, $OM = 2\sqrt{2}$ cm. Assim, $MQ = \left(2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right)$ cm $= 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$ cm.

101. As arestas coplanares de um octaedro regular são lados de um quadrado e, portanto, a medida do raio da esfera circunscrita ao octaedro é metade da medida da diagonal desse quadrado. Assim, sendo a a medida da aresta do octaedro, temos:

$$20 = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = 20\sqrt{2} \text{ cm}$$

102. Sendo a a medida da aresta do octaedro, temos:

$$6 = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = 6\sqrt{2} \text{ dm}$$

O volume V do octaedro é a soma dos volumes de duas pirâmides quadrangulares regulares cujas arestas das bases têm medida $6\sqrt{2}$ dm e cuja altura tem medida igual à do raio da esfera circunscrita ao octaedro, ou seja:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (6\sqrt{2})^2 \cdot 6 \text{ dm}^3 = 288 \text{ dm}^3$$

Logo, o volume do octaedro é 288 dm^3.

103. Sendo a a medida da aresta do octaedro, temos que a medida do raio da esfera circunscrita é $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Assim, sendo A_E a área da superfície da esfera e A_T a área total do octaedro regular inscrito nessa esfera, temos:

$$A_E = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\pi a^2 \text{ e } A_T = 8 \cdot \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = 2a^2\sqrt{3}$$

Concluímos, então, que:

$$\frac{A_E}{A_T} = \frac{2\pi a^2}{2a^2\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$$

104. Indicando por a a medida, em decímetro, da aresta do octaedro, temos:

$$\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 5\sqrt{2}$$

Assim, a medida do raio da circunferência circunscrita ao octaedro mede $\frac{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2}$ dm, ou seja, 5 dm.

Logo, o volume V dessa esfera é dado por:

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot 5^3}{3} \text{ dm}^3 = \frac{500\pi}{3} \text{ dm}^3$$

105. A maior distância possível entre dois vértices de um octaedro regular é o comprimento de uma diagonal desse poliedro, que é, também, a diagonal de um quadrado cujos lados são arestas desse poliedro. Assim, indicando por a a medida, em centímetro, da diagonal do octaedro, temos:

$$a\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow a = 3$$

A distância d entre os planos que contêm duas faces paralelas do octaedro é a medida do diâmetro da esfera inscrita nesse poliedro, ou seja:

$$d = 2 \cdot \frac{3\sqrt{6}}{6} \text{ cm} = \sqrt{6} \text{ cm}$$

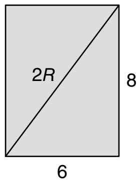
106. A altura do cilindro mede 8 cm, e o raio da base mede 4 cm; logo, a área total A_T desse cilindro é dada por:

$$A_T = (2\pi \cdot 4 \cdot 8 + 2 \cdot \pi \cdot 4^2) \text{ cm}^2 = 96\pi \text{ cm}^2$$

107. Indicando por R a medida do raio da esfera, temos que a medida do raio da base e da altura do cilindro circunscrito são R e 2R, respectivamente. Assim, a razão entre a área lateral do cilindro e a área da superfície esférica, nessa ordem, é dada por:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot 2R}{4 \cdot \pi \cdot R^2} = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^2}{4 \cdot \pi \cdot R^2} = 1$$

108. A medida R do raio da esfera é metade da medida da diagonal de uma secção meridiana do cilindro. Assim, temos:



$$(2R)^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow 2R = 10$$
$$\therefore R = 5 \text{ cm}$$

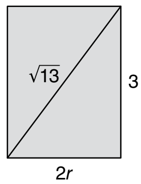
Logo, o volume V da esfera é dado por:

$$V = \frac{4\pi \cdot 5^3}{3} \text{ cm}^3 = \frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3$$

109. Sendo R a medida do raio da esfera, temos:

$$4\pi R^2 = 13\pi \Rightarrow R = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Assim, sendo r a medida do raio da base do cilindro, temos que uma secção meridiana desse cilindro é:

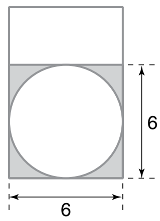


Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(2r)^2 + 3^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 \Rightarrow r = 1$$

Logo, o raio da base do cilindro mede 1 dm.

110. A medida do raio da esfera é 3 cm; logo, a superfície da água tangente à bola está a 6 cm de altura em relação ao fundo do copo. Uma secção meridiana dessa figura é apresentada ao lado:

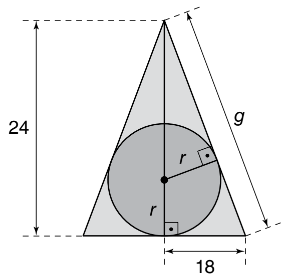


Logo, o volume V de água colocada no copo é dado por:

$$V = \left(\pi \cdot 3^2 \cdot 6 - \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{3}\right) \text{ cm}^3 = 18\pi \text{ cm}^3$$

Como 1 cL = 10 cm^3, concluímos que V = 1,8π cL.

111. Sendo g a medida da geratriz do cone e r a medida do raio da esfera inscrita nele, temos que uma secção meridiana desse cone é:



Pelo teorema de Pitágoras e por semelhança de triângulos, temos:

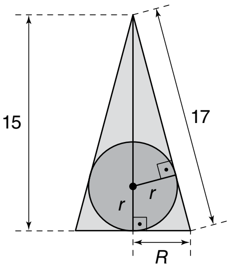
$$\begin{cases} g^2 = 18^2 + 24^2 \\ \frac{g}{24 - r} = \frac{18}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = 30 & \text{(I)} \\ \frac{g}{24 - r} = \frac{18}{r} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituímos (I) em (II), obtendo:

$$\frac{30}{24 - r} = \frac{18}{r} \Rightarrow r = 9$$

Logo, o raio da esfera mede 9 cm.

112. Sendo r e R as medidas dos raios da esfera e do cone, respectivamente, temos que uma secção meridiana do cone é:



Pelo teorema de Pitágoras e por semelhança de triângulos, temos:

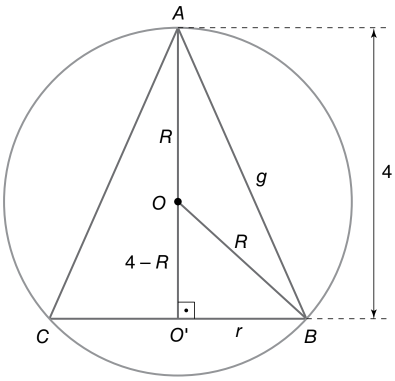
$$\begin{cases} R^2 + 15^2 = 17^2 \\ \dfrac{17}{15 - r} = \dfrac{R}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 8 & \text{(I)} \\ \dfrac{17}{15 - r} = \dfrac{R}{r} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituímos (I) em (II), obtendo:

$$\frac{17}{15 - r} = \frac{8}{r} \Rightarrow r = \frac{24}{5}$$

Logo, o raio da esfera inscrita no cone mede $\dfrac{24}{5}$ cm, ou seja, 4,8 cm.

113. Na esfera, sejam O e R o centro e medida do raio, em decímetro, respectivamente. No cone, sejam O', r e g o centro da base e as medidas do raio da base e da geratriz, respectivamente. Assim, uma secção meridiana dessa figura é apresentada a seguir.



Pelo fato de a área lateral do cone ser 15π dm^2 e pelo teorema de Pitágoras aplicado nos triângulos $AO'B$ e $OO'B$, chegamos a:

$$\begin{cases} \pi r g = 15\pi \\ g^2 = 4^2 + r^2 \\ R^2 = (4 - R)^2 + r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = \dfrac{15}{r} & \text{(I)} \\ g^2 = 16 + r^2 & \text{(II)} \\ R^2 = (4 - R)^2 + r^2 & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

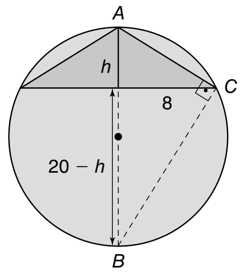
$$\left(\frac{15}{r}\right)^2 = 16 + r^2 \Rightarrow r = 3$$

Substituindo r por 3 em (III), concluímos:

$$R^2 = (4 - R)^2 + 3^2 \Rightarrow R = \frac{25}{8}$$

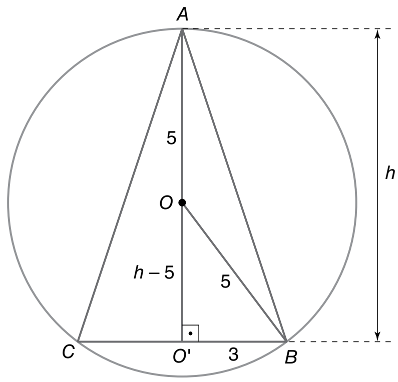
Logo, o raio da esfera mede $\dfrac{25}{8}$ dm, ou seja, 3,125 dm.

114. Uma secção meridiana desse cone é:



Assim, do triângulo retângulo ABC, temos:
$8^2 = h(20 - h) \Rightarrow h^2 - 20h + 64 = 0$
$\therefore h = 16$ ou $h = 4$
Como, por hipótese, a altura h é menor que o raio da esfera, concluímos que $h = 4$ dm.

115. Na esfera, seja O o centro. No cone, sejam O' e h o centro da base e a medida da altura, em centímetro. Assim, uma secção meridiana dessa figura é apresentada a seguir.



Pelo teorema de Pitágoras, aplicado no triângulo $OO'B$, temos:

$$(h - 5)^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow h = 9$$

Logo, os volumes V_c e V_e do cone e da esfera, respectivamente, são dados por:

$$V_c = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 9 \text{ cm}^3 = 27\pi \text{ cm}^3 \text{ e}$$

$$V_e = \frac{4 \cdot \pi \cdot 5^3}{3} \text{ cm}^3 = \frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Assim, concluímos:

$$\frac{V_c}{V_e} = \frac{27\pi}{\frac{500\pi}{3}} = \frac{81}{500} = 0{,}162 = 16{,}2\%$$

Ou seja, o volume do cone corresponde a 16,2% do volume da esfera.
Alternativa **e**.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1. A área B de cada base é a área de um círculo de raio r.
$B = \pi r^2$

a) Como $B = 4\pi$ m^2, temos:
$4\pi \text{ m}^2 = \pi \cdot r^2 \text{ m}^2 \Rightarrow r^2 = 4$
$\therefore r = 2$ m

b) A área lateral A_ℓ é a área de um retângulo de comprimento 4π m e altura 5 m, ou simplesmente:
$A_\ell = 2\pi \cdot r \cdot h = (2\pi \cdot 2 \cdot 5)\ m^2 = 20\pi\ m^2$

c) A área total A_T é a soma da área lateral com as áreas das duas bases:
$A_T = (20\pi + 2 \cdot 4\pi)\ m^2 = 28\pi\ m^2$

d) A área A_{SM} de uma secção meridiana do cilindro é a área de um retângulo de base 4 m e altura 5 m, ou simplesmente:
$A_{SM} = 2 \cdot r \cdot h = (2 \cdot 2 \cdot 5)\ m^2 = 20\ m^2$

2. a) No cilindro equilátero, a altura é o dobro do raio r da base. Assim, temos:
$A_{SM} = 2rh \Rightarrow A_{SM} = 4r^2$
Sabemos que $A_{SM} = 25\ cm^2$; então:
$25\ cm^2 = 4r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{25}{4}\ cm^2$
$\therefore\ r = 2,5\ cm$

b) $B = \pi r^2 = \pi \cdot (2,5)^2\ cm^2 = 6,25\pi\ cm^2$

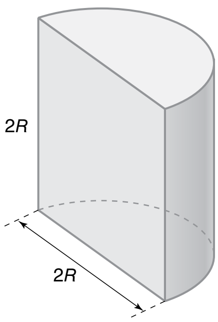
c) $A_\ell = 4\pi r^2 = (4\pi \cdot 6,25)\ cm^2 = 25\pi\ cm^2$

d) $A_T = A_\ell + 2B = (25\pi + 2 \cdot 6,25\pi)\ cm^2 = 37,5\pi\ cm^2$

3. a) O cilindro gerado pela revolução do retângulo $ABCD$ em torno do lado $\overline{AD}$ tem raio da base $r = 10$ cm e altura $h = 4$ cm.
Assim:
$A_T = A_\ell + 2B \Rightarrow A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2$
$\therefore\ A_T = (2\pi \cdot 10 \cdot 4 + 2 \cdot \pi \cdot 100)\ cm^2 = 280\pi\ cm^2$

b) O cilindro gerado pela revolução do retângulo $ABCD$ em torno do lado $\overline{AB}$ tem raio da base $r = 4$ cm e altura $h = 10$ cm.
Assim:
$A_T = A_\ell + 2B = 2\pi rh + 2\pi r^2 =$
$= (2\pi \cdot 4 \cdot 10 + 2\pi \cdot 16)\ cm^2$
$\therefore\ A_T = 112\pi\ cm^2$

4. Indicando por R a medida, em centímetro, do raio da base do cilindro, representamos abaixo um dos semicilindros obtidos.



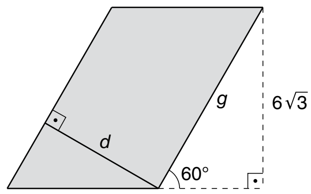
A área total A_s de cada um dos semicilindros é calculada por:

$$A_S = \underbrace{2R \cdot 2R}_{\text{Área da secção meridiana}} + \underbrace{\frac{2\pi R \cdot 2R}{2}}_{\text{Metade da área lateral do cilindro}} + \underset{\text{Metade da área da base do cilindro}}{\frac{\pi R^2}{2}} + \underset{\text{Metade da área da base do cilindro}}{\frac{\pi R^2}{2}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A_S = 4R^2 + 3\pi R^2$
A área total A_t do cilindro é dada por: $A_t = 6\pi R^2$
Assim, chegamos a:
$A_s + A_s = 128 + A_t \Rightarrow 8R^2 + 6\pi R^2 = 128 + 6\pi R^2$
$\therefore\ R^2 = 16 \Rightarrow R = 4$
Ou seja, a medida do raio da base do cilindro é 4 cm.

5. A medida do raio da base do cilindro é $\frac{2}{3}$ da medida da altura do triângulo equilátero da base do prisma. Logo, a medida R do raio da base do cilindro é dada por:
$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2}\ cm = 6\ cm$
Como a altura do cilindro é a mesma do prisma, concluímos que a área total A_T do cilindro é calculada por:
$A_T = (2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 15 + 2 \cdot \pi \cdot 6^2)\ cm^2 = 252\pi\ cm^2$

6. Sendo g e d as medidas da geratriz do cilindro e da distância entre as geratrizes contidas em β, temos a secção meridiana:

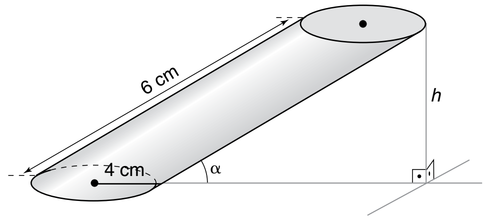


Assim:

$$\begin{cases} gd = 60 \\ \text{sen } 60° = \dfrac{6\sqrt{3}}{g} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} gd = 60 & \text{(I)} \\ g = 12 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituímos (II) em (I), obtendo:
$d = 5$ cm
Logo, a distância entre as geratrizes contidas em β é 5 cm.

7. Nesse cilindro a medida r do raio da base é 4 cm e a medida h da altura, em centímetro, é dada por $h = 6$ sen α, em que α é a medida de um ângulo agudo que cada geratriz forma com os planos das bases.



Como o volume V é dado por $V = \pi r^2 h$, temos:
$48\sqrt{3}\pi = \pi \cdot 4^2 \cdot 6 \cdot \text{sen } \alpha \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$
Logo, $\alpha = 60°$.

8. Igualando as expressões que representam as áreas das superfícies laterais dos cilindros, temos:
$2\pi R_1 H_1 = 2\pi R_2 H_2 \Rightarrow \frac{H_1}{H_2} = \frac{R_2}{R_1}$ (I)
Assim, a razão entre os volumes dos cilindros é dada por:

$$\frac{\text{volume}(V_1)}{\text{volume}(V_2)} = \frac{\pi (R_1)^2 \cdot H_1}{\pi (R_2)^2 \cdot H_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \cdot \frac{H_1}{H_2} \quad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), concluímos:

$$\frac{\text{volume}(V_1)}{\text{volume}(V_2)} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \cdot \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

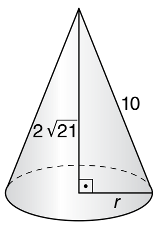
Alternativa **b**.

9. Indicando, respectivamente, por A_i e V_i a área lateral e o volume do cilindro i, temos:
$A_I = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 6\ m^2 \approx 72\ m^2$ e $V_I = \pi \cdot 2^2 \cdot 6\ m^3 \approx 72\ m^3$;
$A_{II} = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 8\ m^2 \approx 96\ m^2$ e $V_{II} = \pi \cdot 2^2 \cdot 8\ m^3 \approx 96\ m^3$;
$A_{III} = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 8\ m^2 \approx 144\ m^2$ e $V_{III} = \pi \cdot 3^2 \cdot 8\ m^3 \approx 216\ m^3$.
Assim, calculando a razão $\dfrac{\text{área}}{\text{capacidade}}$ nos cilindros I, II e III, respectivamente, obtemos: 1, 1 e $\dfrac{2}{3}$. Como $\dfrac{2}{3}$ é a menor das três razões, concluímos que o menor custo por metro cúbico corresponde ao cilindro III.
Alternativa **d**.

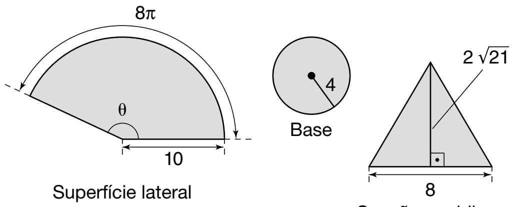
10. O volume V do semicilindro equilátero de raio da base r é dado por $V = \pi r^3$. Assim, temos:
$27\pi = \pi r^3 \Rightarrow r = 3$
Logo, a área lateral A_ℓ desse semicilindro é:
$A_\ell = (3\pi \cdot 6 + 6 \cdot 6)\ cm^2 \Rightarrow A_\ell = 18(\pi + 2)\ cm^2$

11. Conhecemos o volume, $V = 81\pi\ dm^3$, e as medidas, $G = 10$ dm e $g = 8$ dm, das geratrizes maior e menor do tronco de cilindro circular reto. Assim, a medida r do raio da base desse tronco é obtida por:
$V = \dfrac{\pi r^2(G + g)}{2} \Rightarrow 81\pi = \dfrac{\pi r^2(10 + 8)}{2}$
$\therefore r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$
Concluímos, então, que o raio da base circular desse tronco mede 3 dm.

12.



$r^2 + (2\sqrt{21})^2 = 10^2 \Rightarrow r = 4$



Superfície lateral — Base — Secção meridiana

a) $A_\ell = \pi r g \Rightarrow A_\ell = \pi \cdot 4 \cdot 10\ dm^2$
$\therefore A_\ell = 40\pi\ dm^2$

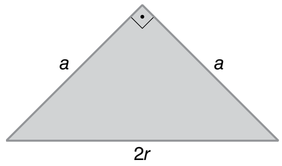
b) $A_T = A_\ell + B \Rightarrow A_T = (40\pi + \pi \cdot 4^2)\ dm^2$
$\therefore A_T = 56\pi\ dm^2$

c) $A_{SM} = \dfrac{8 \cdot 2\sqrt{21}}{2}\ dm^2 = 8\sqrt{21}\ dm^2$

d) $\theta = \dfrac{2\pi r}{g}$ rad $\Rightarrow \theta = \dfrac{8\pi}{10}$ rad
$\therefore \theta = \dfrac{4\pi}{5}$ rad

13. A secção meridiana de um cone equilátero é um triângulo equilátero. Indicando por a a medida, em centímetro, do lado desse triângulo, temos que sua área é $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Assim, temos:
$\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \Rightarrow a = 6$
Logo, a área total A_T do cone é dada por:
$$A_T = (\pi \cdot 3 \cdot 6 + \pi \cdot 3^2)\ cm^2 = 27\pi\ cm^2$$

14. Indicando por a a medida da geratriz e por r a medida do raio da base do cone, representamos a seguir uma secção meridiana dessa figura:

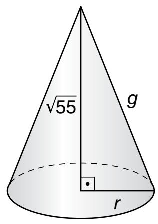


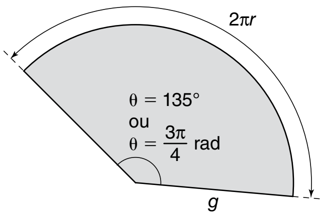
Pelo teorema de Pitágoras, obtemos:
$$(2r)^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$
Assim, o comprimento do arco do setor circular equivalente à superfície lateral do cone tem medida $2\pi \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, ou seja, $\pi a\sqrt{2}$. Logo, a medida α, em grau, do ângulo central desse setor pode ser calculada pela regra de três:

Comprimento do arco do setor	Medida em grau do ângulo central do setor
$2\pi a$	360
$\pi a\sqrt{2}$	α

De onde obtemos: $\alpha = 180° \cdot \sqrt{2}$
Como $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$, concluímos que $253{,}8° < \alpha < 255{,}6°$.
Alternativa **e**.

15.



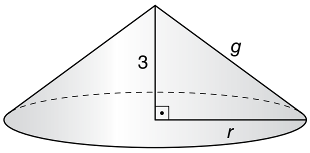


Superfície lateral

$$\begin{cases} g^2 = r^2 + (\sqrt{55})^2 \\ \dfrac{2\pi r}{g} = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g^2 = r^2 + 55 & \text{(I)} \\ r = \dfrac{3g}{8} & \text{(II)} \end{cases}$$
Substituímos (II) em (I), obtendo:
$$g^2 = \left(\frac{3g}{8}\right)^2 + 55 \Rightarrow g = 8$$
Substituímos então g por 8 em (II), obtendo $r = 3$.
Concluímos calculando a área total A_T do cone:
$A_T = \pi r g + \pi r^2 \Rightarrow A_T = (\pi \cdot 3 \cdot 8 + \pi \cdot 3^2)\ cm^2$
$\therefore A_T = 33\pi\ cm^2$

16. A medida g da geratriz do cone é a mesma do raio do setor circular equivalente à superfície lateral; logo, $g = 10$ cm. Indicando por r a medida do raio da base do cone, temos:
$\dfrac{2\pi r}{10} = \dfrac{9\pi}{5} \Rightarrow r = 9$
Assim, a medida h da altura do cone é obtida pelo teorema de Pitágoras:
$$9^2 + h^2 = 10^2 \Rightarrow h = \sqrt{19}$$
Ou seja, a altura do cone é $\sqrt{19}$ cm.

17.



$$\begin{cases} g^2 = r^2 + 3^2 \\ \pi rg = 20\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g^2 = r^2 + 9 & \text{(I)} \\ g = \dfrac{20}{r} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituímos (II) em (I), obtendo:

$$\left(\frac{20}{r}\right)^2 = r^2 + 9 \Rightarrow r^4 + 9r^2 - 400 = 0$$

Fazendo a mudança de variável $t = r^2$, temos:

$t^2 - 9t - 400 = 0 \Rightarrow t = -25$ ou $t = 16$

Retornamos então à variável original:

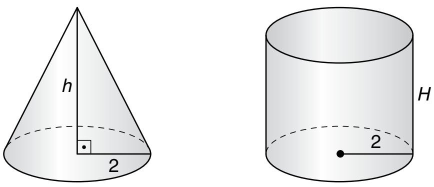
- $t = -25 \Rightarrow r^2 = -25$ (não existe número real r sob essa condição)
  ou
- $t = 16 \Rightarrow r^2 = 16$

$\therefore r = 4$

Assim, uma secção meridiana desse cone é um triângulo isósceles com 8 cm de base e 3 cm de altura; portanto:

$$A_{SM} = \frac{8 \cdot 3}{2}\ \text{cm}^2 = 12\ \text{cm}^2$$

18.



$$\begin{cases} A_{\ell(\text{cone})} = A_{\ell(\text{cilindro})} \\ g^2 = h^2 + 2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi \cdot 2 \cdot g = 2\pi \cdot 2 \cdot H \\ g^2 = h^2 + 4 \end{cases}$$

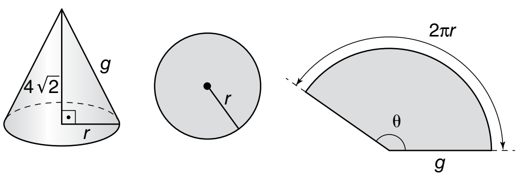
$$\therefore \begin{cases} g = 2H & \text{(I)} \\ g^2 = h^2 + 4 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituímos (I) em (II), obtendo:

$(2H)^2 = h^2 + 4 \Rightarrow h = 2\sqrt{H^2 - 1}$

Alternativa **d**.

19.



$$\begin{cases} A_T = 4B \\ g^2 = r^2 + (4\sqrt{2})^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi rg + \pi r^2 = 4\pi r^2 \\ g^2 = r^2 + 32 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} g = 3r & \text{(I)} \\ g^2 = r^2 + 32 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituímos (I) em (II), obtendo:

$(3r)^2 = r^2 + 32 \Rightarrow r = 2$

Para $r = 2$, deduzimos da equação (I) que $g = 6$.

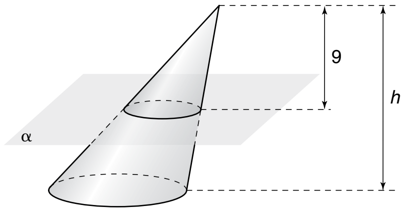
Concluímos calculando a medida θ:

$$\theta = \frac{2\pi r}{g}\ \text{rad} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi \cdot 2}{6}\ \text{rad}$$

$$\therefore \theta = \frac{2\pi}{3}\ \text{rad ou } \theta = 120°$$

Logo, a medida pedida é 120°.

20.

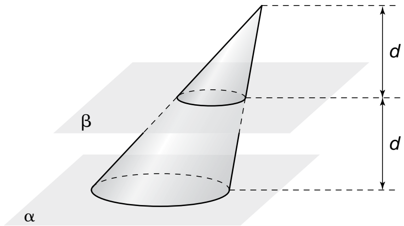


$$\frac{49}{36} = \left(\frac{h}{9}\right)^2 \Rightarrow \frac{h}{9} = \frac{7}{6}$$

$$\therefore h = \frac{21}{2} = 10{,}5$$

Logo, a altura do cone é 10,5 cm.

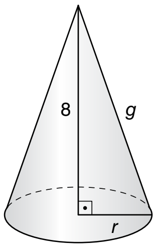
21.



Sendo B e b as áreas da base do cone e da secção transversal contida em β, respectivamente, temos:

$$\frac{B}{b} = \left(\frac{2d}{d}\right)^2 \Rightarrow \frac{B}{b} = 4$$

22.



$$\begin{cases} \pi rg = 3\pi r^2 \\ g^2 = r^2 + 8^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = 3r & \text{(I)} \\ g^2 = r^2 + 64 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$(3r)^2 = r^2 + 64 \Rightarrow r = 2\sqrt{2}$

Logo, o volume V do cone é dado por:

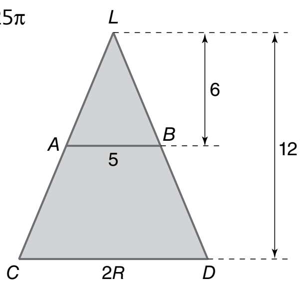
$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot 8\ \text{cm}^3 = \frac{64\pi}{3}\ \text{cm}^3$$

23. Sendo r a medida, em centímetro, do raio da secção transversal S temos:

$S = 6{,}25\pi \Rightarrow \pi r^2 = 6{,}25\pi$

$\therefore r = 2{,}5$

Assim, esquematizamos, ao lado, uma secção meridiana da figura, em que R é a medida, em centímetro, do raio da base do cone:



Da semelhança entre os triângulos LAB e LCD, obtemos:

$$\frac{2R}{5} = \frac{12}{6} \Rightarrow R = 5$$

Logo, o volume V do cone é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 12\ \text{cm}^3 = 100\pi\ \text{cm}^3$$

Alternativa **e**.

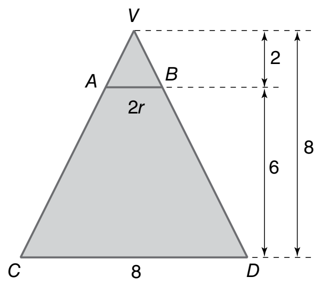
24. Sendo B a área das bases do cone e do cilindro, temos:

$V_{\text{cone}} = V_{\text{cilindro}} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = B \cdot H$

$\therefore h = 3H$

Alternativa **b**.

25. Indicando por r a medida, em centímetro, do raio da base do cone menor, esquematizamos a seguir uma secção meridiana dessa figura:



Da semelhança entre os triângulos VAB e VCD, obtemos:

$$\frac{8}{2r} = \frac{8}{2} \Rightarrow r = 1$$

Logo, o volume V do cone menor é:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 2 \text{ cm}^3 = \frac{2\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Alternativa **c**.

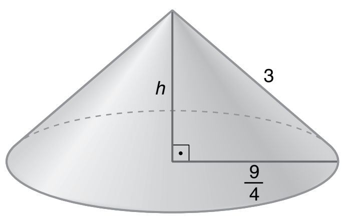
26. A medida do raio do setor circular é igual à medida g da geratriz do cone; logo, $g = 3$ cm.

Convertendo 270° para radiano, obtemos $\frac{3\pi}{2}$ rad.

Assim, a medida r, em centímetro, é obtida por:

$\frac{2\pi r}{3} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow r = \frac{9}{4}$

Indicando por h a medida, em centímetro, da altura do cone, esquematizamos:



Pelo teorema de Pitágoras, calculamos a medida h:

$h^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2 = 3^2 \Rightarrow h = \frac{3\sqrt{7}}{4}$

Logo, o volume V do cone é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^2 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{4} \text{ cm}^3 = \frac{81\pi\sqrt{7}}{64} \text{ cm}^3$

27. Sendo h e x, respectivamente, as medidas da altura e do raio da base do cone, com $6 \leqslant h \leqslant 15$, temos:

$\frac{h}{x} = \frac{6}{2} \Rightarrow h = 3x$

a) A lei que expressa o volume $f(x)$, em centímetro cúbico, em função da medida x, em centímetro, do raio da base do cone, com $2 \leqslant x \leqslant 5$, é:

$f(x) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot x^2 \cdot 3x$

ou seja:

$f(x) = \pi x^3$

b) $f(x) > 27\pi \Rightarrow \pi x^3 > 27\pi$

$\therefore x^3 > 27 \Rightarrow x > 3$ (I)

Temos, ainda:

$2 \leqslant x \leqslant 5$ (II)

Assim, por (I) e (II), concluímos que $f(x) > 27\pi$ se, e somente se, $3 < x \leqslant 5$.

28. a) Pela semelhança dos cones, temos:

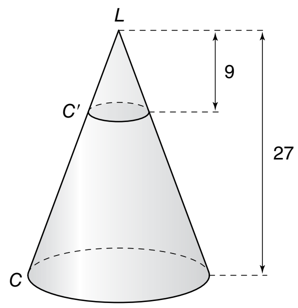
$\frac{9}{d} = \frac{6}{2} \Rightarrow d = 3$

Logo, o plano α dista 3 cm do vértice do cone.

b) O volume V do tronco de cone é dado por:

$V = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 9 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 3\right) \text{cm}^3 = 104\pi \text{ cm}^3$

29.

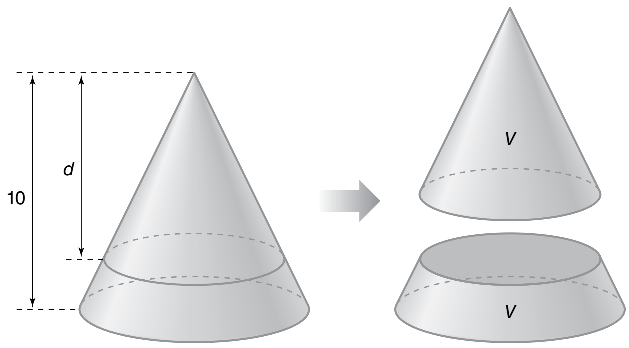


A razão entre os volumes de dois cones semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança entre eles. Assim:

$\frac{V_{(LC)}}{V_{(LC')}} = \left(\frac{27}{9}\right)^3 \Rightarrow \frac{V_{(LC)}}{18} = 3^3$

$\therefore V_{(LC)} = 486 \text{ dm}^3$

30. Indicando por d a distância, em centímetro, entre o plano α e o vértice do cone, e por V o volume de cada um dos sólidos determinados, esquematizamos:



A razão entre os volumes de dois sólidos semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança. Como o cone original e o cone acima do plano α são semelhantes, temos:

$\frac{2V}{V} = \left(\frac{10}{d}\right)^3 \Rightarrow 2 = \frac{1.000}{d^3}$

$\therefore d^3 = 500 \Rightarrow d = \sqrt[3]{500} = 5\sqrt[3]{4}$

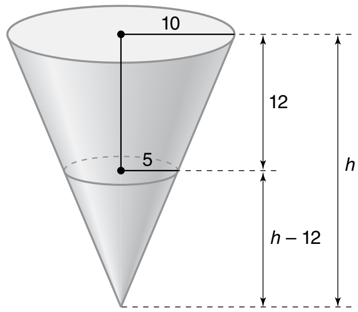
Ou seja, o plano α deve passar à distância de $5\sqrt[3]{4}$ cm do vértice do cone.

31. a) F, pois as áreas B e b das bases maior e menor, respectivamente, são dadas por:

$B = \pi \cdot 10^2 \text{ cm}^2 = 100\pi \text{ cm}^2$ e

$b = \pi \cdot 5^2 \text{ cm}^2 = 25\pi \text{ cm}^2$

b) F, conforme a justificativa a seguir.
Prolongando as geratrizes do tronco, obtemos o cone que o contém. Indicando por h a medida, em centímetro, da altura desse cone, esquematizamos:



Da semelhança entre os cones, obtemos:

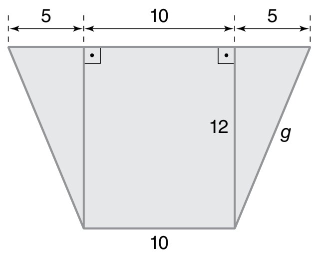
$$\frac{10}{5} = \frac{h}{12} \Rightarrow h = 24$$

Logo, o volume V do tronco é dado por:

$$V = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 24 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 12\right) \text{cm}^3 = 700\pi \text{ cm}^3$$

Como $\pi > 3{,}14$, concluímos que $V > 700 \cdot 3{,}14 \text{ cm}^3$, ou seja, $V > 2.198 \text{ cm}^3$.

c) V, conforme a justificativa a seguir.
Uma secção meridiana desse tronco é um trapézio isósceles com 10 cm e 20 cm de bases, e 12 cm de altura. Assim, a medida g, em centímetro, da geratriz do tronco pode ser obtida pelo teorema de Pitágoras, conforme segue:



$g^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow g = 13$

d) V, conforme a justificativa a seguir.
A medida A da área da superfície lateral do tronco é igual à diferença entre as superfícies laterais dos dois cones observados na figura do item **b**. As medidas G_M e G_m, em centímetro, das geratrizes do cone maior e do cone menor, respectivamente, são obtidas pelo teorema de Pitágoras:

$$(G_M)^2 = 10^2 + 24^2 \Rightarrow G_M = 26$$

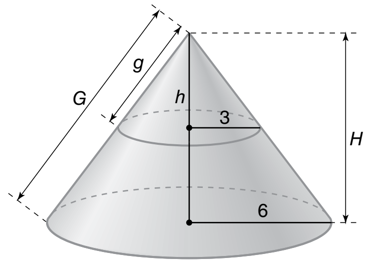
e

$$(G_m)^2 = 5^2 = 12^2 \Rightarrow G_m = 13$$

Assim, concluímos que a área lateral A do tronco é calculada por:

$$A = (\pi \cdot 10 \cdot 26 - \pi \cdot 5 \cdot 13) \text{ cm}^2 = 195\pi \text{ cm}^2$$

32. a) Prolongando as geratrizes do tronco obtemos o cone C que o contém, cujas medidas, em centímetro, da altura e da geratriz indicaremos por H e G, respectivamente. Indicaremos, respectivamente, por h e g as medidas, em centímetro, da altura e da geratriz do cone C′, contido em C, cuja base coincide com a base menor do tronco.
A figura a seguir ilustra essa situação.



Como a área lateral A do tronco é igual à soma das áreas das bases, obtemos:

$\pi \cdot 6 \cdot G + \pi \cdot 3 \cdot g = \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 3^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow g = 2G - 15$

Pela semelhança entre os cones C e C′, deduzimos:

$$\frac{G}{g} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{G}{2G - 15} = \frac{6}{3}$$

$\therefore G = 10$

Pelo teorema de Pitágoras, obtemos as medidas H e h:

$H^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow 8$

e

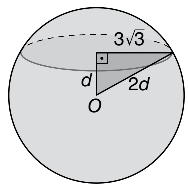
$h^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow h = 4$

Finalmente, concluímos que a altura do tronco mede (8 − 4) cm, ou seja, 4 cm.

b) O volume V do tronco de cone é a diferença entre os volumes dos cones C e C′, descritos no item **a**, isto é:

$$V = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 8 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4\right) \text{cm}^3 = 84\pi \text{ cm}^3$$

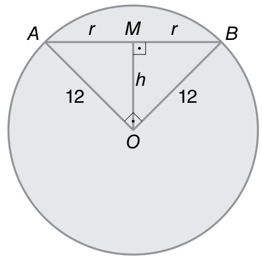
33. Sendo r a medida do raio da secção plana, temos:
$2\pi r = 6\sqrt{3}\pi \Rightarrow r = 3\sqrt{3}$ m
Sendo d a distância pedida, temos:



$(2d)^2 = d^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow d = 3$

Logo, a distância entre O e α é 3 m.

34. Indicando por h e r as medidas, em centímetro, da altura e do raio da base do cone, esquematizamos a seguir uma secção meridiana dessa figura.



Pelo teorema de Pitágoras, aplicado nos triângulos AOB e MOB, obtemos:

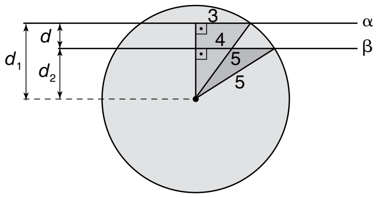
$$\begin{cases}(2r)^2 = 12^2 + 12^2 \\ r^2 + h^2 = 12^2\end{cases} \Rightarrow r = 6\sqrt{2} \text{ e } h = 6\sqrt{2}$$

Logo, o volume V do cone é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(6\sqrt{2}\right)^2 \cdot 6\sqrt{2} \text{ cm}^3 = 144\pi\sqrt{2} \text{ cm}^3$$

Alternativa **d**.

35.



$\begin{cases}(d_1)^2 + 3^2 = 5^2 \\ (d_2)^2 + 4^2 = 5^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}d_1 = 4 \\ d_2 = 3\end{cases}$

A distância d entre os planos α e β é dada por:

$d = d_1 - d_2 = 4 - 3 = 1$

Logo, a distância entre os planos é 1 dm.

36. Sendo R a medida do raio da esfera, temos:

$2\pi R = 20\pi \Rightarrow R = 10$

Logo, o volume V da esfera é dado por:

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 10^3 \text{ cm}^3 = \frac{4.000\pi}{3} \text{ cm}^3$

37. Sendo r a medida do raio da base do cone, temos:

$V_{esfera} = V_{cone} \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot 36$

$\therefore\ r = 2\sqrt{6}$ cm

Logo, o raio da base do cone mede $2\sqrt{6}$ cm.

38. A oitava parte de cada esfera está contida no cubo; logo, as partes das 8 esferas que estão contidas no cubo equivalem a uma esfera. Indicando por R a medida do raio de cada esfera, temos que cada aresta do cubo mede 2R; logo, a razão pedida é $\frac{\frac{4\pi R^3}{3}}{(2R)^3}$, ou seja, $\frac{\pi}{6}$.

Alternativa **a**.

39. Indicando por R a medida do raio da esfera S′, temos:

$\frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3} = 2 \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} \Rightarrow R = r\sqrt[3]{2}$

Logo, o fator pelo qual devemos multiplicar r é $\sqrt[3]{2}$.

Alternativa **a**.

40. Sendo R a medida do raio da esfera, temos:

$\pi R^2 = 64\pi \Rightarrow R = 8$ dm

Logo, a área A da superfície dessa esfera é dada por:

$A = 4\pi \cdot 8^2 \text{ dm}^2 = 256\pi \text{ dm}^2$

41. Sendo R a medida do raio da esfera, temos:

$\frac{4\pi R^3}{3} = 36\pi \Rightarrow R = 3$ dm

Logo, a área A da superfície dessa esfera é dada por:

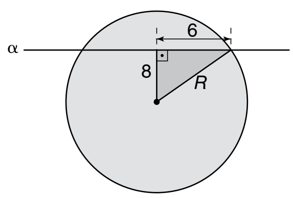
$A = 4\pi \cdot 3^2 \text{ dm}^2 = 36\pi \text{ dm}^2$

42. Sendo r a medida do raio da secção, temos:

$\pi r^2 = 36\pi \Rightarrow r = 6$

Assim, sendo R a medida do raio da esfera, temos:

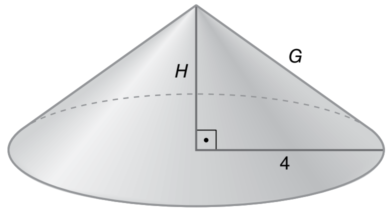
$R^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow R = 10$



Logo, a área A da superfície dessa esfera é dada por:

$A = 4\pi \cdot 10^2 \text{ dm}^2 = 400\pi \text{ dm}^2$

43. Sejam H e G as medidas, em centímetro, da altura e da geratriz do cone.



É dado que o volume do cone é 16π cm³, logo:

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot H = 16\pi \Rightarrow H = 3$$

Pelo teorema de Pitágoras, obtemos G:

$$G^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow G = 5$$

Como a área da superfície da esfera e a área total do cone são iguais, temos que a medida R, em centímetro, do raio da esfera é obtida por:

$$4 \cdot \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 4 \cdot 5 + \pi \cdot 4^2 \Rightarrow R = 3$$

Alternativa **c**.

44. O sólido gerado é um hemisfério de raio 4 cm. Logo:

$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi \cdot 4^3}{3} \text{ cm}^3 = \frac{128\pi}{3} \text{ cm}^3$

$A = \left(\frac{4\pi \cdot 4^2}{2} + \pi \cdot 4^2\right) \text{cm}^2 = 48\pi \text{ cm}^2$

45. Temos:

$6a^2 = 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{a^2}{r^2} = \frac{4\pi}{6}$

$\therefore \left(\frac{a}{r}\right)^2 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{a}{r} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} = \frac{\sqrt{6\pi}}{3}$

Alternativa **a**.

46. Sendo R a medida do raio do fuso, temos:

Ângulo (grau)		Área (dm^2)	
360	———	$4\pi R^2$	$\Rightarrow R = 5$ dm
54	———	15π	

Portanto, o raio desse fuso mede 5 dm.

47. • Cálculo da área total

A área total A_T da cunha esférica é a soma da área A_f do fuso com as áreas de dois semicírculos com 2 cm de raio.

A área A_f pode ser calculada pela regra de três:

Medida do ângulo diedro (grau)		Área do fuso (cm^2)
360	———	$4\pi \cdot 2^2$
60	———	A_f

De onde deduzimos que: $A_f = \frac{8\pi}{3}$ cm²

A soma das áreas dos dois semicírculos com 2 cm de raio é $\pi \cdot 2^2$ cm², ou seja, 4π cm².

Logo:

$$A_T = \left(\frac{8\pi}{3} + 4\pi\right) \text{cm}^2 = \frac{20\pi}{3} \text{ cm}^2$$

- Cálculo do volume
  O volume V_C da cunha esférica pode ser calculado pela regra de três:

Medida do ângulo diedro (grau)		Volume da cunha (cm^3)
360	———	$\frac{4\pi \cdot 2^3}{3}$
60	———	V_C

De onde deduzimos que: $V_C = \frac{16\pi}{9}$ cm^3.

48. • Cálculo do volume V_R do sólido gerado pela rotação de 120° do retângulo $ABCD$ em torno do lado $\overline{AD}$.

Medida do ângulo de rotação (grau)		Volume da cunha (cm^3)
360	———	$\pi \cdot 8^2 \cdot 6$
120	———	V_R

De onde deduzimos que: $V_R = 128\pi$ cm^3

- Cálculo do volume V_S do sólido gerado pela rotação de 120° do semicírculo retirado, em torno do lado $\overline{AD}$.

Medida do ângulo de rotação (grau)		Volume da cunha (cm^3)
360	———	$\frac{4\pi \cdot 2^3}{3}$
120	———	V_S

De onde deduzimos que: $V_S = \frac{32\pi}{9}$ cm^3

Concluímos, então, que o volume V pedido é dado por:
$V = V_R - V_S \Rightarrow$
$\Rightarrow V = \left(128\pi = \frac{32\pi}{9}\right) \text{cm}^3 = \frac{1.120\pi}{9}$ cm^3

49. a) A soma dos volumes, em centímetro cúbico, das seis cunhas esféricas é dado por:
$\frac{9\pi}{4} + \frac{15\pi}{4} + \frac{21\pi}{4} + \frac{27\pi}{4} + \frac{33\pi}{4} + \frac{39\pi}{4} =$
$= \frac{144\pi}{4} = 36\pi$

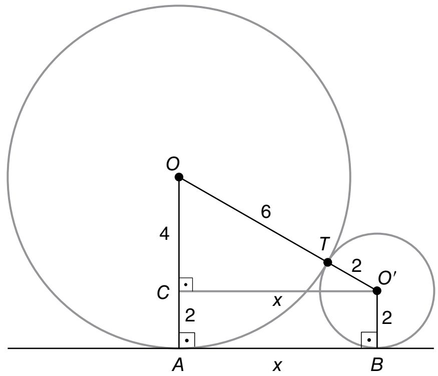
Esse volume é igual ao volume da esfera. Indicando por R a medida, em centímetro, do raio da esfera, temos:
$\frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3} = 36\pi \Rightarrow R = 3$
Ou seja, o raio da esfera mede 3 cm.

b) A maior cunha esférica tem volume igual a $\frac{39\pi}{4}$ cm^3. Indicando por α a medida do ângulo diedro dessa cunha, temos:

Medida do ângulo diedro (radiano)		Volume da cunha (cm^3)
2π	———	$\frac{4\pi \cdot 3^3}{3}$
α	———	$\frac{39\pi}{4}$

De onde concluímos que: $\alpha = \frac{39\pi}{72}$ rad

50. Os centros das esferas e o ponto de tangência são colineares. Assim, esquematizamos a seguir uma secção meridiana dessa figura, em que O e O' são os centros das esferas, $\overline{CO'}$ é paralelo a $\overline{AB}$, e x é a distância, em centímetro, entre os pontos A e B.



Pelo teorema de Pitágoras, temos:
$x^2 + 4^2 = 8^2 \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$
Ou seja, a distância entre os pontos A e B é $4\sqrt{3}$ cm.

51. Sendo a a medida de uma aresta do cubo, temos:
$6a^2 = 24 \Rightarrow a = 2$ dm
Como o raio da esfera inscrita nesse cubo mede metade da medida da aresta do cubo, concluímos que a área A da superfície dessa esfera é dada por:
$A = 4\pi \cdot 1^2 \text{ dm}^2 = 4\pi \text{ dm}^2$

52. Sendo a a medida da aresta do cubo, temos:
$a\sqrt{2} = 3 \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ dm
Assim, o raio da esfera inscrita nesse cubo mede $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ dm e, portanto, a área A da superfície dessa esfera é dada por:
$A = 4\pi\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 \text{dm}^2 = \frac{9\pi}{2} \text{dm}^2$

53. Sendo a a medida de cada aresta do cubo, temos:
$a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$ m
Assim, a diagonal desse cubo mede $\sqrt{3}$ m e, portanto, o raio da esfera circunscrita mede $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m.
Logo, a área A da superfície da esfera circunscrita a esse cubo é dada por:
$A = 4\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \text{m}^2 = 3\pi \text{ m}^2$

54. Sendo a a medida da aresta do cubo inscrito, temos que o diâmetro da esfera é $a\sqrt{3}$; logo, a aresta do cubo circunscrito mede $a\sqrt{3}$. Assim, concluímos:
$\frac{A_i}{A_c} = \frac{6a^2}{6(a\sqrt{3})^2} = \frac{1}{3}$

55. A medida do raio da esfera é metade da medida da aresta do cubo. O volume V da região limitada pelas superfícies do cubo e da esfera é a diferença entre o volume do cubo e o da esfera, isto é:
$V = a^3 - \frac{4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3}{3} \Rightarrow V = \frac{a^3(6 - \pi)}{6}$

56. A medida do diâmetro da esfera é igual à medida da diagonal do cubo. Assim, indicando por a a medida, em centímetro, da aresta do cubo, temos que:

$a\sqrt{3} = 6 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$

O volume V da região limitada pelas superfícies do cubo e da esfera é a diferença entre os volumes da esfera e do cubo, isto é:

$$V = \left[\frac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{3} - (2\sqrt{3})^3\right] \text{cm}^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 12(3\pi - 2\sqrt{3})\ \text{cm}^3$$

57. Além da sigla uc, adotaremos a sigla uv com o significado de "unidade de volume".

a) A medida R do raio da esfera inscrita no cubo é metade da medida da aresta do cubo, ou seja, $R = 50$ (uc). Logo, o volume V_S da esfera inscrita nesse cubo é dado por:

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot 50^3}{3}\ (uv) \Rightarrow V = \frac{500.000\pi}{3}\ (uv)$$

b) O volume V_{Ck} de cada um dos cubos C_k é dado por:

$$V_{Ck} = \frac{100^3}{1.000}\ (uv) \Rightarrow V_{Ck} = 1.000\ (uv)$$

Assim, a medida de cada aresta dos cubos C_k é 10 (uc); portanto, a medida do raio da esfera inscrita em cada um desses cubos é 5 (uc). Concluímos, então, que a soma V_T dos volumes das mil esferas é dada por:

$$V_T = 1.000 \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot 5^3}{3}\ (uv) \Rightarrow V_T = \frac{500.000\pi}{3}\ (uv)$$

58. Consideremos, em ordem decrescente, a sequência (a_i) das medidas, em centímetro, das arestas dos cubos, isto é:

$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$, em que $a_1 = 4$ dm

A medida do diâmetro de cada esfera é igual à medida da diagonal do cubo nela inscrito; logo:

$$a_2\sqrt{3} = 4 \Rightarrow a_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$a_3\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a_3 = \frac{4}{3}$$

$$a_4\sqrt{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow a_4 = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

$$\vdots$$

Assim, a sequência (s_i), em que s_i é a área total, em centímetro cúbico, do cubo de aresta a_i é:

$$\left(6 \cdot 4^2, 6 \cdot \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2, 6 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2, 6 \cdot \left(\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)^2, \ldots\right), \text{ ou seja,}$$

$$\left(96, 32, \frac{32}{3}, \frac{32}{9}, \ldots\right)$$

Observamos, assim, que a sequência (s_i) é uma progressão geométrica infinita de razão $\frac{1}{3}$ e $S_1 = 96$ dm². Concluímos, então, que a soma S_∞ dos infinitos termos dessa progressão é calculada por:

$$S_\infty = \frac{96}{1 - \frac{1}{3}}\ \text{dm}^2 \Rightarrow S_\infty = 144\ \text{dm}^2$$

59. A medida r do raio da esfera inscrita em octaedro regular de aresta a é dado por $r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. Assim, sendo a a medida, em centímetro, da aresta do octaedro, temos que:

$$6 = \frac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow a = 6\sqrt{6}$$

A distância x de um vértice ao centro do octaedro é metade da medida da diagonal de um quadrado com $6\sqrt{6}$ cm de lado, isto é, $x = 6\sqrt{3}$ cm. Logo, a distância d, em centímetro, entre um vértice do octaedro e a esfera nele inscrita é dada por:

$d = (6\sqrt{3} - 6)\ \text{cm} = 6(\sqrt{3} - 1)\ \text{cm}$

60. Sendo a a medida da aresta do octaedro, temos:

$$1 = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \sqrt{2}\ \text{cm}$$

A área de cada face do octaedro regular é igual à área de um triângulo equilátero; logo, a área total A_T do octaedro é dada por:

$$A_T = 8 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2}}{2}\ \text{cm}^2 = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

61. Sendo R a medida do raio da esfera, temos:

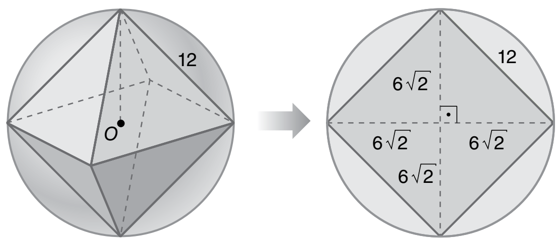
$$R = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2}\ \text{dm} = 2\sqrt{6}\ \text{dm}$$

Logo, o volume V da esfera é dado por:

$$V = \frac{4\pi(2\sqrt{6})^3}{3}\ \text{dm}^3 = 64\pi\sqrt{6}\ \text{dm}^3$$

62. **a)** (F), pois os únicos pontos comuns ao octaedro e à esfera são os vértices do octaedro, que são 6.

b) (F), pois a medida R do raio da esfera inscrita no octaedro é metade da medida da diagonal de um quadrado com 12 cm de lado; logo, $R = 6\sqrt{2}$ cm.



secção

c) (F), pois o volume V do octaedro é calculado por:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 6\sqrt{2}\ \text{cm}^3 = 576\sqrt{2}\ \text{cm}^3$$

d) (F), pois a área total A_T do octaedro é 8 vezes a área de um triângulo equilátero com 12 cm de lado; logo:

$$A_T = 8 \cdot \frac{12^2\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2 = 288\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

e) (F), pois, sendo V_E e V_O os volumes, em centímetro cúbico, da esfera e do octaedro, respectivamente,temos:

$$V_E = \frac{4 \cdot \pi \cdot (6\sqrt{2})^3}{3}\ \text{cm}^3 = 576\pi\sqrt{2}\ \text{cm}^3 \text{ e}$$

$V_O = 576\sqrt{2}$ cm³, como visto no item **c**. Assim, a parte do volume da esfera que é exterior ao octaedro é a diferença $V_E - V_O$, ou seja, $(576\pi\sqrt{2} - 576\sqrt{2})$ cm³, ou seja, $576\sqrt{2}(\pi - 1)$ cm³, que é menor que $1.152\sqrt{2}$ cm³.

63. Sendo r a medida do raio da esfera, temos:

$$\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow r = 1 \text{ dm}$$

Assim, a altura do cilindro mede 2 cm e o raio da base mede 1 cm e, portanto, o volume V do cilindro é dado por:

$V = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 \text{ dm}^3 = 2\pi \text{ dm}^3$

64. Sendo r a medida do raio da esfera, temos que as medidas do raio da base e da altura do cilindro são, respectivamente, r e $2r$. Assim:

$16\pi = 2\pi r \cdot 2r \Rightarrow r = 2 \text{ cm}$

Logo, a área A da superfície da esfera é dada por:

$A = 4\pi \cdot 2^2 \text{ cm}^2 = 16\pi \text{ cm}^2$

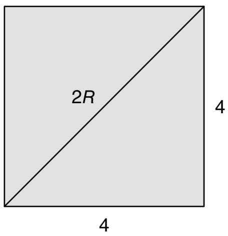
65. Sendo r e V, respectivamente, a medida do raio da base e o volume do cilindro equilátero, temos:

$V = 2\pi r^3 \Rightarrow 16\pi = 2\pi r^3$

$\therefore r = 2 \text{ cm}$

A medida R do raio da esfera é metade da medida da diagonal de uma secção meridiana do cilindro. Assim, temos:

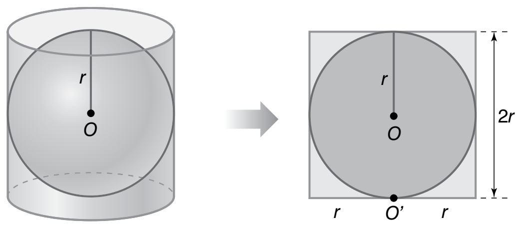
$(2R)^2 = 4^2 + 4^2 \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$



Concluímos calculando o volume V da esfera:

$$V = \frac{4\pi\left(2\sqrt{2}\right)^3}{3} \text{ cm}^3 = \frac{64\pi\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$$

66. Indicando por r a medida do raio de esfera, esquematizamos:



secção plana

Assim, a razão entre a área total A_T do cilindro e a área S da superfície da esfera é dada por:

$$\frac{A_T}{S} = \frac{2\pi r \cdot 2r + 2\pi r^2}{4\pi r^2} \Rightarrow \frac{A_T}{S} = \frac{3}{2}$$

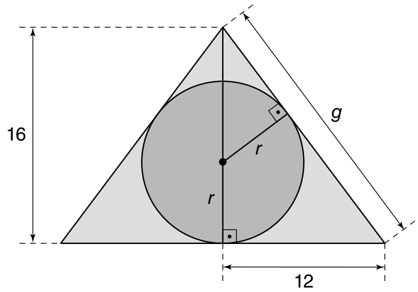
Alternativa **e**.

67. Temos que $V = \frac{4\pi R^3}{3}$ e $V' = 2\pi R^3$, logo:

$$\frac{V}{V' - V} = \frac{\frac{4\pi R^3}{3}}{2\pi R^3 - \frac{4\pi R^3}{3}} = 2$$

Alternativa **d**.

68. Sendo g a medida da geratriz do cone e r a medida do raio da esfera inscrita nele, temos que uma secção meridiana desse cone é:



Pelo teorema de Pitágoras e por semelhança de triângulos, temos:

$$\begin{cases} g^2 = 12^2 + 16^2 \\ \dfrac{g}{16 - r} = \dfrac{12}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = 20 & \text{(I)} \\ \dfrac{g}{16 - r} = \dfrac{12}{r} & \text{(II)} \end{cases}$$

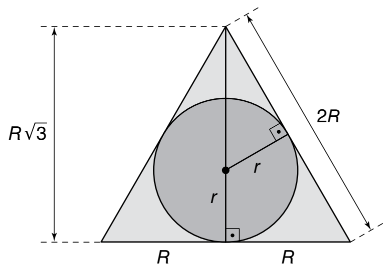
Substituímos (I) em (II), obtendo:

$$\frac{20}{16 - r} = \frac{12}{r} \Rightarrow r = 6$$

Logo, a área A da esfera é dada por:

$A = 4\pi \cdot 6^2 \text{ cm}^2 = 144\pi \text{ cm}^2$

69. Sendo R e r as medidas dos raios da base do cone e da esfera inscrita, respectivamente, temos que uma secção meridiana desse cone é :



Por semelhança de triângulos, temos:

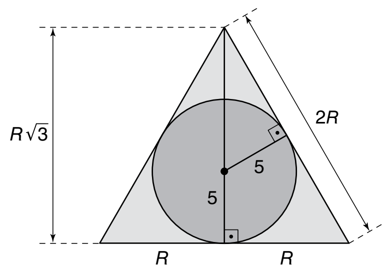
$$\frac{r}{R} = \frac{R\sqrt{3} - r}{2R} \Rightarrow 2r = R\sqrt{3} - r$$

$$\therefore 3r = R\sqrt{3} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

70. Sendo r a medida do raio da esfera, temos:

$4\pi r^2 = 100\pi \Rightarrow r = 5$

Assim, sendo R a medida do raio da base do cone equilátero, temos que uma secção meridiana desse cone é:



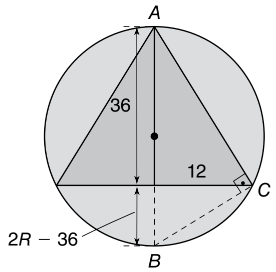
Por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{R}{5} = \frac{2R}{R\sqrt{3} - 5} \Rightarrow R\sqrt{3} - 5 = 10$$

$\therefore R = 5\sqrt{3} \text{ cm}$

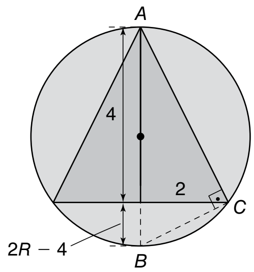
Logo, o raio da base do cone mede $5\sqrt{3}$ cm.

71. Sendo R a medida do raio da esfera, temos que uma secção meridiana desse cone é:



Assim, do triângulo retângulo ABC, temos:
$12^2 = 36(2R - 36) \Rightarrow R = 20$
Logo, o raio da esfera mede 20 cm.

72. Sendo R a medida do raio da esfera, temos que uma secção meridiana desse cone é:



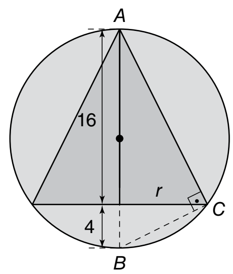
Assim, do triângulo retângulo ABC, temos:

$2^2 = 4(2R - 4) \Rightarrow R = \frac{5}{2}$

Logo, a área A da superfície da esfera é dada por:

$A = 4\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \text{ dm}^2 = 25\pi \text{ dm}^2$

73. Sendo r a medida do raio da base do cone, temos que uma secção meridiana desse cone é:



Assim, do triângulo retângulo ABC, temos:
$r^2 = 16 \cdot 4 \Rightarrow r = 8$
Logo, o raio da base do cone mede 8 cm.

74. 01 (V), pois o centro das bases dos cones pode coincidir com o centro da esfera e não pode pertencer à superfície da esfera; assim, $0 \leqslant x < R$.

02 (F), pois se $x = 0$, então os dois cones serão congruentes com altura R e raio da base R; assim, a soma S de seus volumes será:

$S = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot R = \frac{2\pi R^3}{3}$, que é metade do volume da esfera.

04 (V), pois a razão do volume V_M do cone maior para o volume V_m do cone menor é dada por:

$$\frac{V_M}{V_m} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (R + x)}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (R - x)} = \frac{R + x}{R - x}$$

08 (F), pois se $x = \frac{R}{2}$ temos que os volumes V_M e V_m dos cones maior e menor, respectivamente, são dados por:

$V_M = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \left(R + \frac{R}{2}\right) = \frac{\pi r^2 R}{2}$ e

$V_m = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \left(R - \frac{R}{2}\right) = \frac{\pi r^2 R}{6}$

ou seja, V_M é o triplo de V_m.

(16) V, de acordo com a justificativa a seguir.
A soma S dos volumes dos dois cones é dada por:

$S = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (R + x) + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (R - x) =$

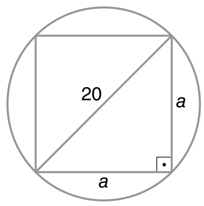
$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (R + x + R - x) \Rightarrow S = \frac{2\pi r^2 R}{3}$

Como o maior valor possível de r é R, temos que:

$S \leqslant \frac{2\pi R^3}{3}$, em que $\frac{2\pi R^3}{3}$ é o volume de um hemisfério dessa esfera.

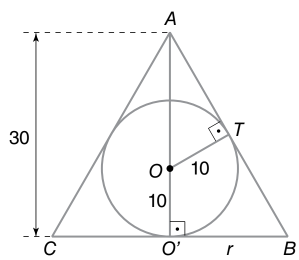
- A soma das alternativas corretas é:
  01 + 04 + 16 = 21

75. 01) (V), de acordo com a justificativa a seguir.
Indicando por a a medida, em centímetro, do diâmetro da base e da altura do cilindro, temos a seguinte secção meridiana da figura:



Pelo teorema de Pitágoras, obtemos a medida a:
$a^2 + a^2 = 20^2 \Rightarrow a = 10\sqrt{2}$
Logo, o volume V do cilindro é dado por:
$V = \pi \cdot (5\sqrt{2})^2 \cdot 10\sqrt{2} \text{ cm}^2 = 500\pi\sqrt{2} \text{ cm}^2$

02) (V), de acordo com a justificativa a seguir.
Indicando por r a medida, em centímetro, do raio da base do cone, temos a seguinte secção meridiana da figura, em que O e O' são os centros da esfera e da base do cone, e T e ponto de tangência de uma geratriz na esfera:



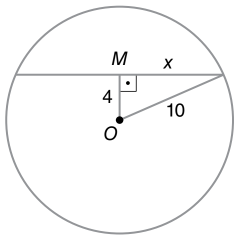
Pelo teorema de Pitágoras, obtemos a medida AT:
$(AT)^2 + 10^2 = 20^2 \Rightarrow AT = 10\sqrt{3}$

Da semelhança entre os triângulos ABO' e AOT, concluímos:

$\frac{r}{10} = \frac{30}{10\sqrt{3}} \Rightarrow r = 10\sqrt{3}$

Ou seja, o raio da base do cone mede $10\sqrt{3}$ cm.

04) (F), de acordo com a justificativa a seguir.
Indicando por x a medida, em centímetro, do raio da circunferência C, obtemos a seguinte secção meridiana da figura, em que O e M são os centros da esfera e da circunferência C, respectivamente:



Pelo teorema de Pitágoras, obtemos a medida x:
$x^2 + 4^2 = 10^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{21}$
Ou seja, o raio da circunferência C mede $2\sqrt{21}$ cm.

08) (F), de acordo com a justificativa a seguir.
O raio do círculo máximo da esfera é 10 cm; logo, sua área A é dada por:
$A = \pi \cdot 10^2\ \text{cm}^2 = 100\pi\ \text{cm}^2$
Substituindo π por 3,1, obtemos $A = 310\ \text{cm}^2$; logo, $A > 300\ \text{cm}^2$.

16) (F), de acordo com a justificativa a seguir.
A área A_E da superfície esférica e a área total A_T do tetraedro são dadas por:
$A_E = 4 \cdot \pi \cdot (10)^2\ \text{cm}^2 = 400\pi\ \text{cm}^2$ e

$A_T = 4 \cdot \frac{30^2\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2 = 900\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

Substituindo π por 3,1 e $\sqrt{3}$ por 1,7, chegamos a: $A_E = 1.240\ \text{cm}^2$ e $A_T = 1.530\ \text{cm}^2$; logo, $A_E < A_T$

- A soma das alternativas corretas é:
  01 + 02 = 03

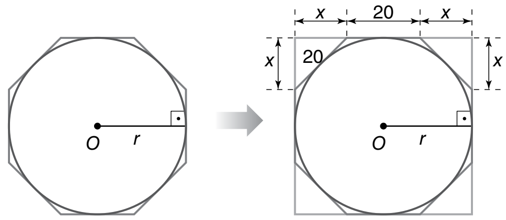
Exercícios contextualizados

76. A área A de cada embalagem, em metro quadrado, é dada por:
$A = 2\pi \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}10 + 2\pi \cdot (0{,}04)^2 = 0{,}0112\pi$
Para $\pi = 3{,}14$, temos:
$A = 0{,}035168\ \text{m}^2$
A área da folha de alumínio é 4 m². Como existe uma perda de 12,08%, a área útil A_U da folha de alumínio é dada por:
$A_U = (4 - 0{,}1208 \cdot 4)\ \text{m}^2 = 3{,}5168\ \text{m}^2$
Assim, o número E de embalagens que serão fabricadas é dado por:

$E = \frac{A_U}{A} = \frac{3{,}5168}{0{,}035168} = 100$

Logo, serão fabricadas 100 embalagens.

77. A área A_c da base da pizza embalada na caixa cilíndrica é dada por: $A_c = \pi \cdot 20^2\ \text{cm}^2 = 400\pi\ \text{cm}^2$
Para obter a área A_{oc} da base da pizza embalada na caixa octogonal, vamos calcular a medida r de seu raio, em centímetro, por meio do esquema a seguir, em que O é o centro da pizza e do octógono.
Na segunda figura, prolongamos os lados do octógono obtendo um quadrado cujo lado mede $20 + 2x$, que é igual a $2r$.



Pelo teorema de Pitágoras, obtemos a medida x:
$x^2 + x^2 = 20^2 \Rightarrow x = 10\sqrt{2}$
Logo, $20 + 20\sqrt{2} = 2r \Rightarrow r = 10 + 10\sqrt{2}$.
Assim, a área A_{oc} é dada por:
$A_{oc} = \pi(10 + 10\sqrt{2})^2\ \text{cm}^2$
Substituindo $\sqrt{2}$ por 1,4, chegamos a $A_{oc} = 576\pi\ \text{cm}^2$.
Observando que $A_{oc} > A_c$, calculamos o custo de produção p da pizza menor por meio da regra de três:

Área da pizza (cm²)		Custo (R$)
576π	———	21,60
400π	———	p

De onde concluímos que $p = 15$, ou seja, o custo de produção da pizza menor é R$ 15,00.

78. As medidas r e h do raio da base e da altura do cilindro são, respectivamente, $\frac{3{,}9}{2}$ cm e 3,9 cm.
Assim, o volume V desse cilindro é dado por:

$V = \pi \cdot \left(\frac{3{,}9}{2}\right)^2 \cdot 3{,}9\ \text{cm}^3 = \frac{(3{,}9)^3\pi}{4}\ \text{cm}^3$

Assim, a densidade D desse cilindro é dada por:

$$D = \frac{1.000}{\frac{(3{,}9)^3\pi}{4}}\ \text{g/cm}^3 = \frac{4 \cdot 10^3}{(3{,}9)^3\pi}\ \text{g/cm}^3 =$$

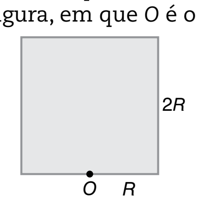
$$= 4 \cdot \left(\frac{10}{3{,}9}\right)^3 \cdot \frac{1}{\pi}\ \text{g/cm}^3 = 4 \cdot \left(\frac{100}{39}\right)^3 \frac{1}{\pi}\ \text{g/cm}^3 =$$

$$= \frac{4 \cdot 10^6}{39^3\pi}\ \text{g/cm}^3$$

Alternativa **c**.

79. O volume V do rolo de papel é a diferença entre os volumes de dois cilindros de alturas iguais a 50 cm e raios 10 cm e r (raio do orifício), ou seja:
$4.800\pi = \pi \cdot 10^2 \cdot 50 - \pi r^2 \cdot 50 \Rightarrow r = 2$
Logo, o diâmetro do orifício mede 4 cm.

80. Indicando por R a medida, em centímetro, do raio da base do cilindro, esquematizamos uma secção meridiana da figura, em que O é o centro da base:



Igualando a área lateral a $64\pi\ \text{cm}^2$, obtemos:
$2\pi R \cdot 2R = 64\pi \Rightarrow R = 4$
Logo, a capacidade V do copo é dada por:

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 8\ \text{cm}^3 = 128\pi\ \text{cm}^3$$

Como 1 cL = 10 cm³, concluímos que $V = 12{,}8\pi$ cL ou, substituindo π por 3,14, $V = 40{,}192$ cL.

81. Sendo, respectivamente, R e H as medidas do raio e da altura do cilindro do projeto original, temos que, após a alteração do projeto, essas medidas passaram a ser 1,1R e 0,9H. Assim, sendo C_1 e C_2 as capacidades das embalagens dos projetos original e modificado, respectivamente, temos:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\pi \cdot (1{,}1R)^2 \cdot 0{,}9H}{\pi R^2 H} = 1{,}089 \Rightarrow C_2 = 1{,}089C_1$$

Logo, a capacidade da nova embalagem aumentou 8,9% em relação ao projeto original.
Alternativa **a**.

82. Indicando por R e H as medidas do raio da base e da altura do cilindro, respectivamente, e por V_A e V_B as capacidades obtidas por André e Bruno, respectivamente, temos:

$$V_A = 3R^2H \text{ e } V_B = 3{,}141R^2H$$

Assim, temos que:

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{3{,}141R^2H}{3R^2H} = \frac{3{,}141}{3} = 1{,}047 \Rightarrow V_B = 104{,}7\% \cdot V_A$$

Logo, o valor obtido por Bruno foi 4,7% maior que o obtido por André.
Alternativa **c**.

83. A capacidade C do copo é dada por:

$$C = \pi \cdot 2^2 \cdot 10 \text{ cm}^3 \Rightarrow C = 120 \text{ cm}^3$$

Para cada parte p de açúcar devem ser misturadas $5p$ de água. Admitindo que os volumes de água e de açúcar se somem, temos:

$$6p = 120 \text{ cm}^3 \Rightarrow p = 20 \text{ cm}^3$$
$$\therefore 5p = 100 \text{ cm}^3 = 100 \text{ mL}$$

Logo, a quantidade de água que deve ser utilizada na mistura é cerca de 100 mL.
Alternativa **c**.

84. O volume e a altura de um cilindro são diretamente proporcionais; logo, o volume que corresponde a 10% do volume do cilindro é 10% de 6 m, ou seja, 0,6 m, que corresponde a 60 cm.
Alternativa **b**.

85. O volume V de ar contido no reservatório é dado por:
$V = \pi \cdot 2^2 \cdot 5 \text{ m}^3 = 20\pi \text{ m}^3$
Assim, a massa M de ar contido no reservatório é dada por:
$M = 20\pi \cdot 1{,}22 \text{ kg} \approx 76{,}6 \text{ kg}$
Alternativa **d**.

86. **I.** Sendo V o volume de cada pistão, a cilindrada C do motor desse automóvel é dada por $4V$, isto é:

$$C = 4 \cdot 3{,}14 \cdot (4{,}1)^2 \cdot 7{,}5 \text{ cm}^3 = 1.583{,}502 \text{ cm}^3$$

(*Nota*: Na indústria de veículos automotores, esse valor é arredondado para 1.600 cilindradas.)

II. Temos que $1.583{,}502 \text{ cm}^3 = 1{,}583502 \text{ dm}^3$.
Como $1 \text{ dm}^3 = 1$ L, concluímos que:
$1{,}583502 \text{ dm}^3 \approx 1{,}6$ L
Alternativa **c**.

III. O volume V de cada pistão é dado por:

$$V = \frac{9.300}{6} \text{ cm}^3 = 1.550 \text{ cm}^3$$

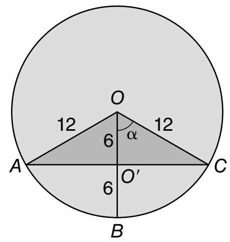
Assim, indicando o curso (altura) de cada pistão por h, em centímetro, temos:
$3{,}14 \cdot 5^2 \cdot h = 1.550 \Rightarrow h \approx 19{,}7$
Ou seja, o curso de cada pistão é 19,7 cm, aproximadamente.

87. O volume V_p do prisma hexagonal regular de altura 5 mm e aresta da base 4 mm é dado por:

$$V_p = 6 \cdot \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} \cdot 5 \text{ mm}^3 = 120\sqrt{3} \text{ mm}^3$$

O volume V_c do cilindro circular reto de altura 25 mm e raio da base 2 mm é dado por:
$V_c = \pi \cdot 2^2 \cdot 25 \text{ mm}^3 = 100\pi \text{ mm}^3$
Como a rosca diminui em 1% o volume do cilindro, concluímos que o volume V do parafuso é dado por:
$V = V_p + V_c - 0{,}01V_c$, ou seja,
$V = \left(120\sqrt{3} + 100\pi - 0{,}01 \cdot 100\pi\right) \text{ mm}^3 =$
$= \left(120\sqrt{3} + 99\pi\right) \text{ mm}^3$
Alternativa **b**.

88. Uma secção transversal do cilindro é:



A medida α do ângulo $B\hat{O}C$ é tal que

$$\cos \alpha = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ e, portanto, } \alpha = 60°.$$

Assim:
- $m(A\hat{O}C) = 120°$
- A área A_{set} do setor circular $OABC$ é dada por:

$$A_{set} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \text{ dm}^2 = 48\pi \text{ dm}^2$$

Considerando o triângulo retângulo $OO'C$, calculamos a medida x do segmento $\overline{O'C}$, em decímetro:
$12^2 = 6^2 + x^2 \Rightarrow x = 6\sqrt{3}$
Assim, a área do triângulo AOC, em decímetro quadrado, pode ser calculada por:

$$A_{AOC} = \frac{12\sqrt{3} \cdot 6}{2} = 36\sqrt{3}$$

Logo, a área, em decímetro quadrado, da região relativa ao combustível na secção meridiana é dada pela diferença entre a área do setor circular $OABC$ e do triângulo AOC:
$48\pi - 36\sqrt{3} = 12\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$
Portanto, o volume do combustível, em decímetro cúbico, é dado por:
$V = 12\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right) \cdot 50 \Rightarrow V = 600\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$
Como $1 \text{ dm}^3 = 1$L, o volume pedido é $600\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$L.

89. O comprimento da circunferência da base circular do tronco é 37,2 cm; logo, indicando por R a medida, em centímetro, dessa base, temos:
$2 \cdot 3{,}1 \cdot R = 37{,}2 \Rightarrow R = 6$
Assim, a área S de cada manga é metade da área lateral de um cilindro circular reto com 6 cm de raio da base e 34 cm de altura, isto é:

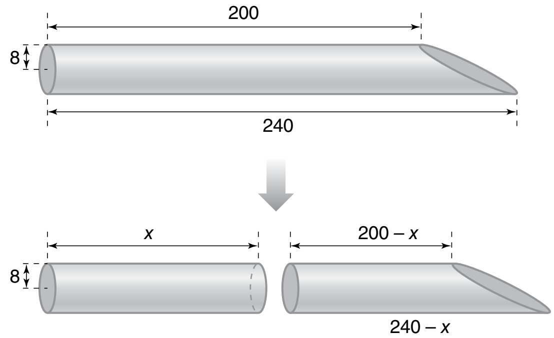
$$S = \frac{2 \cdot 3{,}1 \cdot 6 \cdot 34}{2} \text{ cm}^2 = 632{,}4 \text{ cm}^2$$

90. Sendo R a medida, em centímetro, do raio da base circular do tronco, temos:

$$\frac{\pi R^2(22 + 18)}{2} = 565{,}2 \Rightarrow R = 3$$

Logo, o raio da base circular de cada tronco mede 3 cm.

91. Um dos pedaços obtidos é um cilindro circular. Indicando por x a medida, em centímetro, da altura desse cilindro, e convertendo as demais medidas para centímetro, esquematizamos:



O volume do cilindro obtido após o corte deve ser igual à metade do volume do tronco original; logo:

$$\pi \cdot 8^2 \cdot x = \frac{\dfrac{\pi \cdot 8^2 \cdot (200 + 240)}{2}}{2} \Rightarrow x = 110 \text{ cm}$$

Portanto, a distância entre a base circular da tora e o corte plano a ser feito deve ser de 110 cm.

92. O volume V_C de combustível com o tanque cheio é dado por:

$V_c = \pi \cdot 1^2 \cdot 4 \text{ m}^3 = 4\pi \text{ m}^3$

O volume V_D de combustível derramado é igual ao volume do tronco de cilindro representado pelo espaço vazio dentro do tanque inclinado, isto é:

$$V_D = \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot (2 + 0)}{2} \text{ m}^3 = \pi \text{ m}^3$$

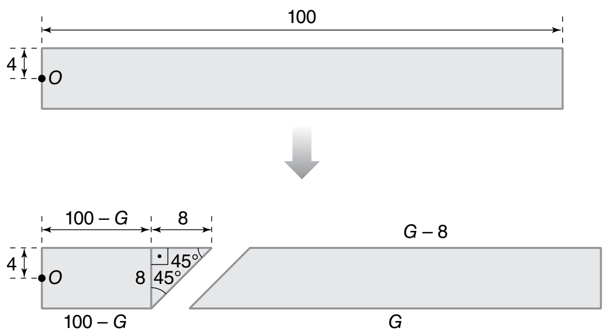
Assim, o volume V_R de combustível restante no tanque é dado por:

$$V_R = V_C - V_D = 3\pi \text{ m}^3$$

Substituindo π pelo valor aproximado 3,14, concluímos que: $V_R \approx 9{,}42 \text{ m}^3$

Alternativa **a**.

93. Indicando por G a medida, em centímetro, da maior geratriz do pedaço maior, e convertendo para centímetro as demais medidas, esquematizamos as secções meridianas dessas figuras, em que O é o centro de uma base do cilindro:



O volume do maior pedaço é $\frac{3}{4}$ do volume do cilindro original; logo:

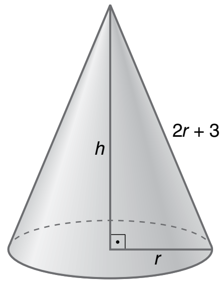
$$\frac{\pi \cdot 4^2 \cdot (G + G - 8)}{2} = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 100 \Rightarrow G = 79$$

Concluímos, então, que a maior geratriz do maior pedaço mede 79 cm.

94. Sendo A_ℓ a área lateral do cone, temos que:

$1{,}1 \cdot A_L = 99\pi \text{ cm}^2 \Rightarrow A_\ell = 90 \text{ cm}^2$

Indicando por r e h as medidas, em centímetro, do raio da base e da altura do cone, esquematizamos:



Devido à área lateral ser $90\pi \text{ cm}^2$ e pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

$$\begin{cases} \pi r(2r + 3) + \pi r^2 = 90\pi & \text{(I)} \\ r^2 + h^2 = (2r + 3)^2 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), chegamos a: $r = 5$

Substituindo r por 5, em (II), concluímos:

$$5^2 + h^2 = 13^2 \Rightarrow h = 12$$

Resumindo, temos: $r = 5$ cm, $g = 13$ cm e $h = 12$ cm

95. Sendo h e g as medidas, em metro, da altura e da geratriz do cone, respectivamente, temos:

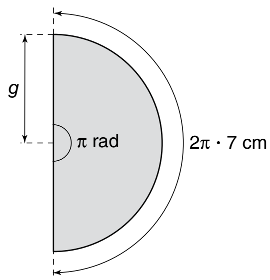
$$\begin{cases} \pi \cdot 1{,}5 \cdot g = \dfrac{15\pi}{4} \\ g^2 = h^2 + (1{,}5)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = \dfrac{5}{2} & \text{(I)} \\ g^2 = h^2 + 2{,}25 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituímos (I) em (II), obtendo:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = h^2 + 2{,}25 \Rightarrow h = 2$$

Logo, a distância do vértice do cone ao plano de sua base é 2 m.

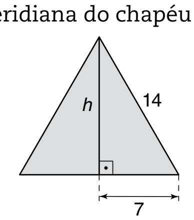
96. Sendo g a medida, em centímetro, da geratriz do cone, temos que sua superfície lateral é equivalente ao setor:



Assim, temos:

$$\frac{14\pi}{g} = \pi \Rightarrow g = 14$$

Uma secção meridiana do chapéu de altura h é:



e, portanto:

$h^2 + 7^2 = 14^2 \Rightarrow h = 7\sqrt{3}$

Logo, a distância do bico do chapéu à mesa é $7\sqrt{3}$ cm.

97. Indicando por r e g as medidas do raio da base e da geratriz desses sólidos, temos que as áreas laterais A_{co} e A_{ci} do cone e do cilindro, respectivamente, são dadas por:

$A_{co} = \pi rg$ e $A_{ci} = 2\,\pi rg$

Como a área lateral do cilindro é o dobro da área lateral do cone, deduzimos que o tempo necessário para pintar o copo cilíndrico é o dobro do tempo necessário para pintar o copo cônico. Logo, no tempo em que o artista pinta 30 copos cônicos ele pintaria 15 copos cilíndricos.

98. Sendo r a medida, em centímetro, do raio do círculo determinado pela superfície da água, temos:

$$\frac{\pi \cdot 6^2}{\pi r^2} = \left(\frac{H}{\frac{H}{3}}\right)^2 \Rightarrow r = 2$$

Logo, a área A desse círculo é dada por:

$A = \pi \cdot 2^2\ m^2 = 4\pi\ m^2$

99. Indicando por h a medida, em centímetro, de cada cone, temos que a medida do raio da base é $0{,}2h$. Assim, o volume V de areia é dado por:

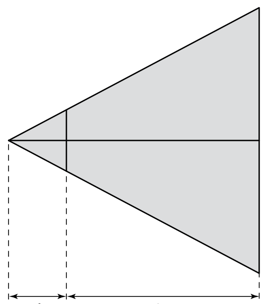
$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (0{,}2h)^2 \cdot h\ cm^3 = \frac{0{,}04\pi h^3}{3}\ cm^3$$

Como essa areia demora 60 minutos para vazar do cone superior para o inferior, à razão de $6\pi\ cm^3$/min, deduzimos que $V = 60 \cdot 6\pi\ cm^3 = 360\pi\ cm^3$; logo:

$$\frac{0{,}04\pi h^3}{3} = 360\pi \Rightarrow h = 30$$

Assim, concluímos que a medida do raio da base dos cones é 6 cm.

100. Sendo d a distância, em centímetro, entre a lâmpada e a lente, temos o seguinte esquema:



Logo: $\frac{29.400}{150} = \left(\frac{65 + d}{d}\right)^2 \Rightarrow 196 = \left(\frac{65 + d}{d}\right)^2$

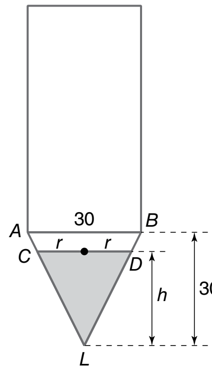
$\therefore 14 = \frac{65 + d}{d} \Rightarrow d = 5$

Concluímos, então, que a lâmpada dista 5 cm da lente da lanterna.

101. **a)** O volume V_{co} da parte cônica do tubo é dado por:

$$V_{co} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15^2 \cdot 30\ mm^3 = 2.250\pi\ mm^3$$

Temos que $1\ mL = 1\ cm^3$ e $2.250\pi\ mm^3 = 2{,}250\pi\ cm^3$; logo a capacidade da parte cônica do tubo é de $2{,}250\pi$ mL. Como o volume do líquido colocado no tubo é de 2π mL, e $2\pi < 2{,}250\pi$, deduzimos que o nível da superfície desse líquido fica abaixo da base do cone. Indicando por h a medida, em milímetro, da altura da superfície do líquido, em relação ao vértice L do cone, e por r o raio do círculo representado pela superfície do líquido, esquematizamos uma secção meridiana do tubo:



Pela semelhança dos triângulos LAB e LCD, temos:

$$\frac{30}{2r} = \frac{30}{h} \Rightarrow r = \frac{h}{2}$$

Assim, o volume V_{li} do líquido, expresso em função de h, é dado por:

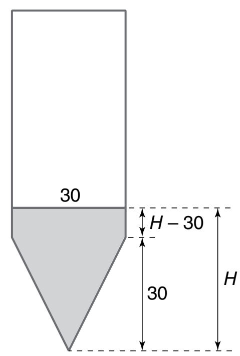
$$V_{li} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{\pi h^3}{12}$$

Como esse volume é $2.000\pi\ mm^3$, concluímos:

$$\frac{\pi h^3}{12} = 2.000\pi \Rightarrow h = 20\sqrt[3]{3}$$

Ou seja, a altura da superfície do líquido, em relação ao vértice do cone, é de $20\sqrt[3]{3}$ mm.

b) No item **a**, vimos que a capacidade da parte cônica do tubo é de $2{,}250\pi$ mL. Como, neste item, o volume do líquido colocado no tubo é de 4π mL, e $4\pi > 2{,}250\pi$, deduzimos que a superfície do líquido fica acima da base do cone (o líquido não transborda, porque a capacidade do tubo é de 18π mL, que é maior que o volume do líquido). Indicando por H a medida, em milímetro, da altura da superfície do líquido, em relação ao vértice L do cone, esquematizamos uma secção meridiana do tubo:



O volume V_{LI} do líquido, em milímetro cúbico, expresso em função de H é dado por:

$$V_{LI} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15^2 \cdot 30 + \pi \cdot 15^2 \cdot (H - 30) =$$
$$= 225\pi H - 4.500\pi$$

Esse volume é igual a $4.000\pi\ mm^3$; logo:

$$225\pi H - 4.500\pi = 4.000\pi \Rightarrow H = \frac{340}{9}$$

Ou seja, a altura da superfície do líquido, em relação ao vértice do cone, é de $\frac{340}{9}$ mm.

102. A medida r, em centímetro, do raio da base do cone formado pela primeira solução pode ser calculada por:

$\frac{20}{r} = \frac{60}{15} \Rightarrow r = 5$

Logo, o volume V_I da primeira solução é calculado por:

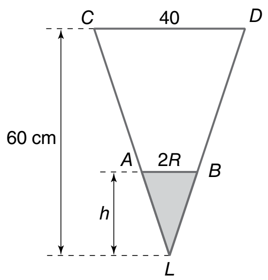
$V_I = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 15\ cm^3 = 125\pi\ cm^3$

O volume de álcool dessa solução é $0{,}8 \cdot 125\pi\ cm^3$, ou seja, $100\pi\ cm^3$. Sendo x a quantidade de água, em centímetro cúbico, que deve ser acrescentada nessa solução para se obter uma nova solução aquosa de álcool a 25%, temos:

$\frac{100\pi}{125\pi + x} = 0{,}25 \Rightarrow x = 275\pi$

Ou seja, o volume V_{II} da segunda solução é $(125\pi + 275\pi)\ cm^3$, ou seja, $400\pi\ cm^3$.

Indicando por R e h as medidas, em centímetro, do raio da base e da altura do cone formado pela segunda solução, esquematizamos uma secção meridiana dessa figura:



Da semelhança entre os triângulos LAB e LCD, obtemos R em função de h:

$\frac{40}{2R} = \frac{60}{h} \Rightarrow R = \frac{h}{3}$

Assim, calculamos o volume V_{II} em função de h:

$V_{II} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot h = \frac{\pi h^3}{27}$

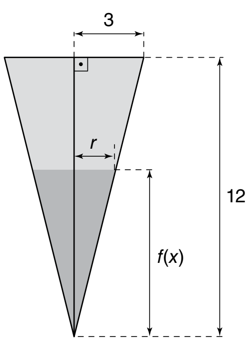
Como esse volume é $400\pi\ cm^3$, concluímos:

$\frac{\pi h^3}{27} = 400\pi \Rightarrow h = 6\sqrt[3]{50}$

Ou seja, a altura h da superfície da nova solução, em relação ao vértice do cone, é $6\sqrt[3]{50}$.

103. **a)** Sabemos que 10 mL = 10 cm^3. Assim, em x segundos a torneira despeja $10x\ cm^3$ de *milk-shake* na taça.

Sendo r a medida do raio da superfície do *milk-shake* na taça, depois de x segundos de aberta a torneira, temos:



$$\begin{cases} \frac{r}{3} = \frac{f(x)}{12} \\ \frac{\pi r^2 f(x)}{3} = 10x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{f(x)}{4} & \text{(I)} \\ \frac{\pi r^2 f(x)}{3} = 10x & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituímos (I) em (II), obtendo:

$$\frac{\pi \cdot \left(\frac{f(x)}{4}\right)^2 \cdot f(x)}{3} = 10x \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{\frac{480x}{\pi}}$$

b) Indicando a função f por $y = \sqrt[3]{\frac{480x}{\pi}}$, adotamos os seguintes procedimentos para obter a inversa de f:

- Permutamos x e y, obtendo:

  $x = \sqrt[3]{\frac{480y}{\pi}}$

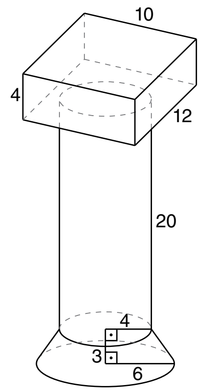
- Após a permutação de x e y, isolamos y, obtendo:

  $y = \frac{\pi x^3}{480}$

Concluímos, então, que a inversa de f é:

$f^{-1}(x) = \frac{\pi x^3}{480}$

104.

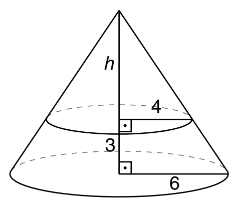


Os volumes V_B, do bloco, e V_T, do tubulão, são dados por:

$V_B = 12 \cdot 10 \cdot 4\ dm^3 = 480\ dm^3$ e

$V_T = \pi \cdot 4^2 \cdot 20\ dm^3 = 320\pi\ dm^3$

Para o cálculo do volume V_S, da sapata, vamos prolongar as geratrizes do tronco, visualizando o cone que o contém:



Da semelhança entre os triângulos retângulos destacados, temos:

$\frac{6}{4} = \frac{3 + h}{h} \Rightarrow h = 6$

Assim:

$V_S = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 9 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 6\right) dm^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_S = 76\pi\ dm^3$

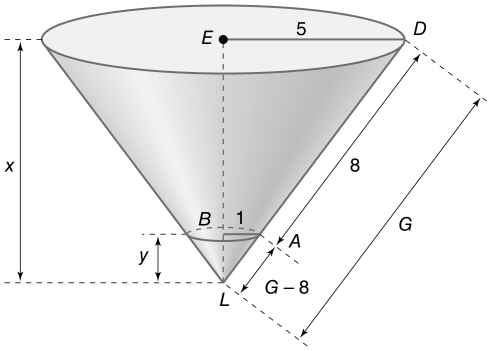
Concluímos, então, que o volume V de concreto que compõe esse elemento da fundação é dado por:

$V = (480 + 320\pi + 76\pi)\ dm^3 \Rightarrow V = 12\,(33\pi + 40)\ dm^3$

Aproximando o valor de π para 3,14, temos:

$V \approx 1.723{,}44\ dm^3$

105. a) Prolongando as geratrizes do tronco, obtemos o cone C que o contém. Assim, esquematizamos a figura a seguir, em que G e x são as medidas, em centímetro, da geratriz e da altura de C, respectivamente, e y é a medida, em centímetro, da altura do cone C', contido em C, cuja base coincide com a base menor do tronco.



Pelo teorema de Pitágoras e pela semelhança entre os triângulos LAB e LDE, temos:

$$\begin{cases} x^2 + 5^2 = G^2 \\ \dfrac{5}{1} = \dfrac{G}{G-8} = \dfrac{x}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 25 = G^2 & \text{(I)} \\ 5G - 40 = G & \text{(II)} \\ x = 5y & \text{(III)} \end{cases}$$

De (II), obtemos: $G = 10$

Substituindo G por 10 em (I), obtemos: $x = 5\sqrt{3}$

Substituindo x por $5\sqrt{3}$ em (III), obtemos: $y = \sqrt{3}$

Concluímos, então, que o volume V_{Tr} do tronco é dado por:

$$V_{Tr} = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 5\sqrt{3} - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3}\right) \text{cm}^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{Tr} = \frac{124\pi\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$$

b) O volume total V_{Fu} do funil é dado por:

$$V_{Fu} = \left(\frac{124\pi\sqrt{3}}{3} + \pi \cdot 1^2 \cdot 4\sqrt{3}\right) \text{cm}^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{Fu} = \frac{136\pi\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$$

c) Como 1 mL = 1 cm^3, temos que a água entra no funil à razão de 127 cm^3/s e sai à razão de 42 cm^3/s, ou seja, o volume de água cresce no interior do funil à razão de 85 cm^3/s. Assim, o tempo t necessário para encher o funil é dado por:

$$t = \frac{\frac{136\pi\sqrt{3}}{3}}{85} \text{ s} \Rightarrow t = \frac{8\pi\sqrt{3}}{15} \text{ s}$$

106. a) O comprimento da circunferência que limita a base menor do tronco é 18π cm; logo, a medida r, em centímetro, do raio dessa base é dada por:

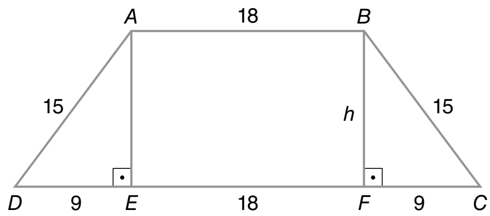
$$2\pi r = 18\pi \Rightarrow r = 9$$

O comprimento da circunferência que limita a base maior do tronco é 36π cm; logo, a medida R, em centímetro, do raio dessa base é dada por:

$$2\pi R = 36\pi \Rightarrow R = 18$$

Temos, portanto, que os raios das bases do tronco medem 9 cm e 18 cm.

b) Os diâmetros das bases do tronco medem 18 cm e 36 cm, e a geratriz mede 15 cm. Assim, uma secção meridiana desse tronco é o trapézio isósceles representado a seguir, em que h é a medida, em centímetro, da altura do tronco.

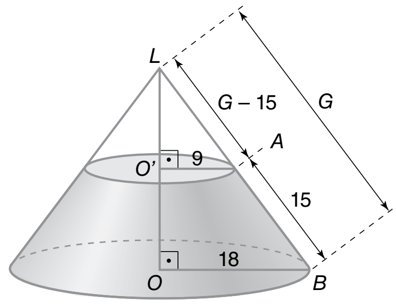


Pelo teorema de Pitágoras aplicado no triângulo BCF, obtemos h:

$$h^2 + 9^2 = 15^2 \Rightarrow h = 12$$

Ou seja, a medida da altura do tronco é 12 cm.

c) Prolongando as geratrizes do tronco, obtemos o cone C que o contém. Assim, esquematizamos a figura a seguir, em que O e O' são os centros das bases e G é a medida, em centímetro, da geratriz de C. Observe que $G - 15$ é a medida da geratriz, em centímetro, da geratriz do cone C', contido em C, cuja base coincide com a base menor do tronco.



Da semelhança entre os triângulos LOB e $LO'A$, obtemos a medida G:

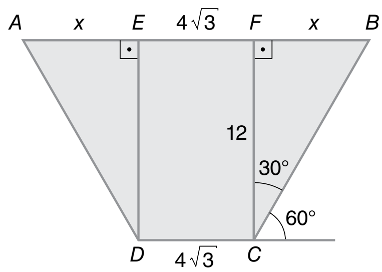
$$\frac{18}{9} = \frac{G}{G-15} \Rightarrow G = 30$$

Assim, a área lateral A_ℓ do tronco é dada por:

$$A_\ell = (\pi \cdot 18 \cdot 30 - \pi \cdot 9 \cdot 15) \text{ cm}^2 = 405\pi \text{ cm}^2$$

Ou seja, a área de tecido usado na confecção dessa copa é de 405π cm^2.

107. O trapézio isósceles $ABCD$, abaixo, representa uma secção meridiana desse tronco de cone, em que x é a medida, em metro, do segmento da projeção ortogonal $\overline{FB}$ do lado $\overline{BC}$ sobre a base maior do trapézio.



Do triângulo retângulo BCF, temos:

$$\text{tg } 30° = \frac{x}{12} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{12}$$

$\therefore\ x = 4\sqrt{3}$

Como $AB = 4\sqrt{3} + 2x$, temos que $AB = 12\sqrt{3}$.

Assim, deduzimos que o raio da base maior do tronco mede $6\sqrt{3}$ m, com o que concluímos que a área S dessa base é dada por:

$S = \pi \cdot (6\sqrt{3})^2 \text{ m}^2 = 108\pi \text{ m}^2$

Ou seja, a tampa a ser comprada deverá cobrir uma área de 108π m².

Alternativa **b**.

108. Indicando por V o volume do cone formado pelo primeiro líquido colocado no copo, temos que o volume formado pelos dois líquidos juntos é 2V. Esses cones são semelhantes; logo:

$$\frac{V}{2V} = \left(\frac{x}{8}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{x}{8}\right)^3 = \frac{1}{2}$$

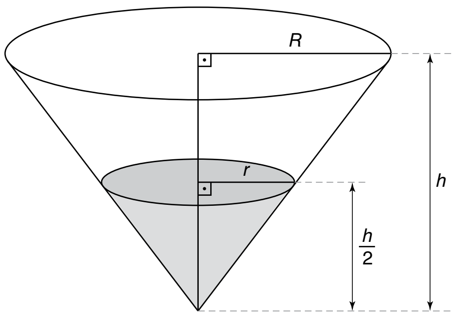
$$\therefore \frac{x}{8} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$\therefore x = 4\sqrt[3]{4}$$

Concluímos, então, que a altura atingida pelo primeiro líquido colocado deve ser $4\sqrt[3]{4}$ cm.

Alternativa **e**.

109. Indicando por R e h o raio da base e a altura do cone, respectivamente, e por r o raio do círculo formado pela superfície da água, temos, da semelhança entre os triângulos retângulos destacados na figura abaixo:



$$\frac{R}{r} = \frac{h}{\frac{h}{2}} \Rightarrow R = 2r$$

Sendo V_T e V_A o volume interno do tanque e o da água, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} V_T = \dfrac{\pi(2r)^2h}{3} \\ V_A = \dfrac{\pi r^2\left(\dfrac{h}{2}\right)}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_T = \dfrac{4\pi r^2 h}{3} \\ V_A = \dfrac{\pi r^2 h}{6} \end{cases}$$

A relação entre V_T e V_A pode ser obtida através da razão entre eles:

$$\frac{V_T}{V_A} = \frac{\frac{4\pi r^2 h}{3}}{\frac{\pi r^2 h}{6}} \Rightarrow \frac{V_T}{V_A} = 8$$

$$\therefore V_T = 8V_A = 8\pi$$

Alternativa **e**.

Outro modo

Sendo V a capacidade do copo e h sua altura, temos que:

$$\frac{V}{p} = \left(\frac{h}{\frac{h}{2}}\right)^3 \Rightarrow V = 8p$$

Alternativa **e**.

110. Indicando por r o raio da base menor do tronco de cone representado pelo líquido da figura 1, e por R e x o raio da base e a altura do cone representado pelo líquido da figura 2, esquematizamos:

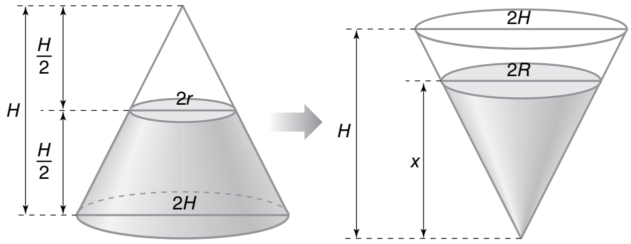


Figura 1 Figura 2

Na figura 1, o cone original e o cone representado pelo espaço vazio no interior do recipiente são semelhantes. Dessa semelhança, temos:

$$\frac{2H}{2r} = \frac{H}{\frac{H}{2}} \Rightarrow r = \frac{H}{2}$$

Logo, o volume V_{Tr} do tronco de cone representado pelo líquido no interior do recipiente da figura 1 é dado por:

$$V_{Tr} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot H^2 \cdot H - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{H}{2}\right)^2 \cdot \frac{H}{2} \Rightarrow V_{Tr} = \frac{7\pi H^3}{24}$$

Na figura 2, o cone original e o cone representado pelo líquido no interior do recipiente são semelhantes. Dessa semelhança, temos:

$$\frac{2H}{2R} = \frac{H}{x} \Rightarrow x = R$$

Logo, o volume V_{Co} do cone representado pelo líquido no interior do recipiente da figura 2 é dado por:

$$V_{Co} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot x^2 \cdot x \Rightarrow V_{Co} = \frac{\pi x^3}{3}$$

Como os volumes V_{Co} e V_{Tr} são iguais, concluímos:

$$\frac{\pi x^3}{3} = \frac{7\pi H^3}{24} \Rightarrow x = \frac{H\sqrt[3]{7}}{2}$$

Alternativa **b**.

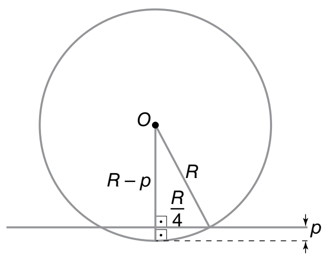
111. Sendo x a medida, em centímetro, de uma aresta do cubo, temos:

$x^3 = 13.824 \Rightarrow x = 24$

Como o diâmetro de cada esfera é 12 cm, cada uma das dimensões do cubo – comprimento, largura e altura – equivale a dois diâmetros. Logo, o número máximo de esferas que podem ser armazenadas em uma caixa é $2 \cdot 2 \cdot 2$, ou seja, 8.

Alternativa **b**.

112. A figura a seguir representa uma secção meridiana da figura, em que O é do centro da bola:



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(R - p)^2 + \left(\frac{R}{4}\right)^2 = R^2 \Rightarrow 16p^2 - 32Rp + R^2 = 0$$

Resolvendo essa equação do 2º grau, na incógnita p, obtemos:

$$p = \frac{R\left(4 + \sqrt{15}\right)}{4} \text{ ou } p = \frac{R\left(4 - \sqrt{15}\right)}{4}$$

Note que a raiz que nos convém é $\frac{R\left(4 - \sqrt{15}\right)}{4}$, pois a outra raiz é maior que R.

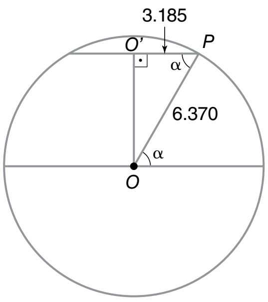
Logo, a profundidade máxima a que pode estar um ponto da superfície da bola é $\frac{R\left(4 - \sqrt{15}\right)}{4}$.

113. Em 24 horas, o ponto P descreve uma circunferência de comprimento $4 \cdot \frac{3.185\pi}{2}$ km, ou seja, 6.370π km.

Sendo r a medida, em quilômetro, do raio dessa circunferência, temos:

$$2 \cdot \pi \cdot r = 6.370\pi \Rightarrow r = 3.185$$

Assim, sendo α a latitude, em grau, do ponto P, esquematizamos a seguir uma secção meridiana dessa figura, em que O é o centro da Terra e O' é o centro do paralelo descrito por P:



Do triângulo $OO'P$, temos:

$$\cos \alpha = \frac{3.185}{6.370} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$$

Logo, a latitude do ponto P é 60°, ao norte ou ao sul.

Alternativa **d**.

114. A medida do raio da Lua é 1.740 km, aproximadamente; logo, o volume V da lua é dado, aproximadamente, por:

$$V \approx \frac{4 \cdot \pi \cdot 1.740^3}{3} \text{ km}^3 \Rightarrow V \approx 2{,}2 \cdot 10^{10} \text{ km}^3$$

Convertendo essa medida para metro cúbico, obtemos: $V \approx 2{,}2 \cdot 10^{19}$ m^3

Concluímos, assim, que a ordem de grandeza do volume da Lua, em metro cúbico, é 10^{19}.

Alternativa **d**.

115. O volume V de champanhe servido no copo semiesférico é dado por:

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{3} \text{ cm}^3 = 18\pi \text{ cm}^3$$

Esse mesmo volume de champanhe deve ser servido na taça cônica; logo, a altura h, em centímetro, é calculada por:

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot h = 18\pi \Rightarrow h = 6$$

Alternativa **b**.

116. Sendo V o volume da esfera, temos:

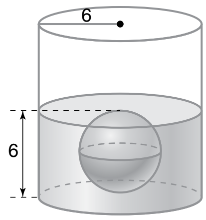
$$V = \frac{4\pi \cdot 5^3}{3} \text{ cm}^3 = \frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Assim, a medida a, em centímetro, da aresta do cubo é tal que:

$$a^3 = \frac{500\pi}{3} \Rightarrow a = \frac{5\sqrt[3]{36\pi}}{3}$$

Alternativa **e**.

117. Após mergulhar a esfera, o cilindro C representado pelo espaço ocupado pela água e pela esfera tem 6 cm de raio e 6 cm de altura:



Logo, o volume V_C desse cilindro é dado por:

$$V_c = \pi \cdot 6^2 \cdot 6 \text{ cm}^3 = 216\pi \text{ cm}^3$$

Assim, o volume V_A de água é a diferença entre V_C e o volume da esfera, isto é:

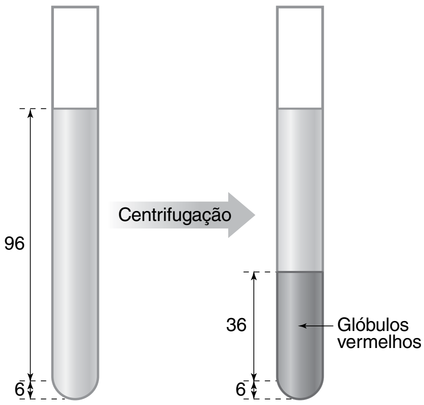
$$V_A = \left(216\pi - \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{3}\right) \text{cm}^3 = 180\pi \text{ cm}^3$$

Esse volume de água formava um cilindro de altura h antes de ser mergulhada a esfera; logo, a medida h, em centímetro, é obtida por:

$$\pi \cdot 6^2 \cdot h = 180\pi \Rightarrow h = 5$$

Ou seja, antes da esfera ser mergulhada, a altura da superfície da água, em relação ao fundo do vaso, era de 5 cm.

118. Esquematizando a secção meridiana da figura formada pelo líquido no tubo, temos:



Assim, temos que o volume V_S e V_G de sangue analisado e de glóbulos vermelhos, respectivamente, são dados por:

$$V_S = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot 6^3}{3} + \pi \cdot 6^2 \cdot 96\right) \text{mm}^3 = 3.600\pi \text{ mm}^3$$

e

$$V_G = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot 6^3}{3} + \pi \cdot 6^2 \cdot 36\right) \text{mm}^3 = 1.440\pi \text{ mm}^3$$

Concluímos, então, que o valor Ht é dado por:

$$Ht = \frac{V_G}{V_S} = \frac{1.440\pi}{3.600\pi} = 0{,}4 \Rightarrow Ht = 40\%$$

119. O volume V da Terra é dado por:

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot 6.370^3}{3} \text{ km}^3 \Rightarrow V \approx 1{,}08 \cdot 10^{12} \text{ km}^3$$

Convertendo essa medida para centímetro cúbico, obtemos:

$$V \approx 1{,}08 \cdot 10^{27} \text{ cm}^3$$

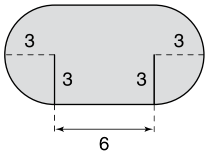
Logo, a massa M do nosso planeta é calculada por:

$$M \approx 1{,}08 \cdot 10^{27} \cdot 5{,}5 \text{ g} \Rightarrow M \approx 5{,}94 \cdot 10^{27} \text{ g}$$

Convertendo essa medida para quilograma, concluímos:

$$M \approx 5{,}94 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

120. A medida do raio de cada semiesfera é 300 mm, que é a mesma medida do raio do cilindro. Assim, temos as dimensões, em decímetro:



Portanto, o volume interno V desse tanque é dado por:

$$V = \left(\frac{4\pi 3^3}{3} + \pi \cdot 3^2 \cdot 6\right) \text{dm}^3 = 90\pi \text{ dm}^3$$

Como 1 dm^3 = 1 L, deduzimos que a capacidade do tanque é $V = 90\pi$ L, ou, para $\pi = 3{,}14$, $V = 282{,}6$ L.

A quantidade máxima Q de metro cúbico de gás por litro nesse tanque é dada por:

$$Q = \frac{68{,}6718}{282{,}6} \text{ m}^3/\text{L} = 0{,}243 \text{ m}^3/\text{L}$$

Alternativa **b**.

121. Indicando por r e R as medidas do raio da bola e do raio interno do aro, respectivamente, temos:

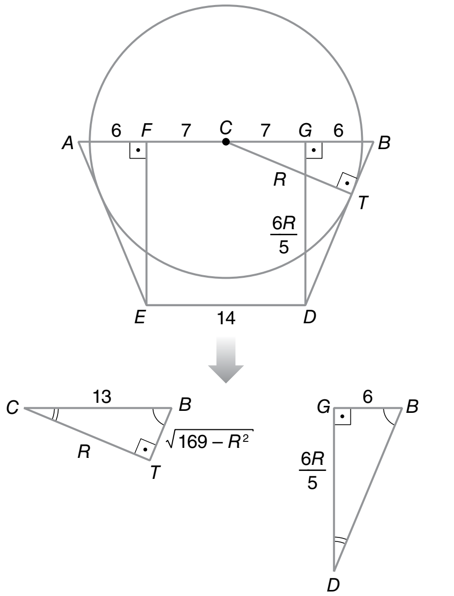
$$\begin{cases} 4\pi r^2 = 576\pi \\ 2\pi R = 45\pi \end{cases} \Rightarrow r = 12 \text{ e } R = 22{,}5$$

Assim, obtemos:

$$\frac{2R}{2r} = \frac{45}{24} = 1{,}875 = 187{,}5\%$$

Logo, o diâmetro interno do aro é 87,5% maior que o diâmetro da bola.

122. O esquema abaixo representa uma secção meridiana da figura, em que a medida BT foi calculada, em função de R, pelo teorema de Pitágoras.



Da semelhança entre os triângulos TBC e GBD, temos:

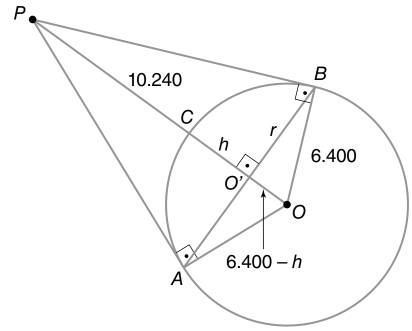
$$\frac{\sqrt{169 - R^2}}{6} = \frac{R}{\frac{6R}{5}} \Rightarrow \sqrt{169 - R^2} = 5$$

$$\therefore 169 - R^2 = 25 \Rightarrow R = 12$$

Logo, a área S da superfície da bola é dada por:

$$S = 4 \cdot \pi \cdot 12^2 \text{ cm}^2 = 576\pi \text{ cm}^2$$

123. O esquema abaixo representa uma secção meridiana dessa figura, em que O é o centro da Terra, e O' e r são, respectivamente, o centro e a medida, em quilômetro, do raio da calota esférica atingida pelos sinais do satélite.



Pelo teorema de Pitágoras, obtemos a medida PB, em quilômetro:

$$(PB)^2 + 6.400^2 = 16.640^2 \Rightarrow PB = 15.360$$

Os triângulos PBO e $BO'O$ são semelhantes. Dessa semelhança, obtemos:

$$\frac{16.640}{6.400} = \frac{6.400}{6.400 - h} = \frac{15.360}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2{,}6 = \frac{6.400}{6.400 - h} = \frac{15.360}{r}$$

$$\therefore h \approx 3.938{,}46 \text{ e } r \approx 5.907{,}69$$

Logo, a área S da calota esférica atingida pelos sinais do satélite é dada por:

$$S \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5.907{,}69 \cdot 3.938{,}46 \text{ km}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S \approx 146.118.000 \text{ km}^2$$

124. a)

Ângulo (grau)	Área (cm²)
360°	$4 \cdot \pi \cdot 6^2$
40°	A_f

$\Rightarrow A_f = 16\pi \text{ cm}^2$

b)

Ângulo (grau)	Volume (cm³)
360°	$\frac{4 \cdot \pi \cdot 6^2}{3}$
40°	V

$\Rightarrow V = 32\pi \text{ cm}^3$

c) A área total A_T desse pedaço é dada pela soma da área A_f do fuso com duas áreas A_{SC} do semicírculo de raio igual a 6 cm. Assim:

$$A_T = 2 \cdot \frac{\pi \cdot 6^2}{2} + 16\pi \Rightarrow A_T = 36\pi + 16\pi$$

$$\therefore A_T = 52\pi \text{ cm}^2$$

125. Sendo R a medida, em quilômetro, do raio da Terra, temos:

$$2\pi R = 40.000 \Rightarrow R = \frac{20.000}{\pi}$$

Como o ângulo diedro de cada fuso A_f mede 15°, temos:

Ângulo (grau)	Área (km²)
360	$4 \cdot \pi \left(\frac{20.000}{\pi}\right)^2$
15	A_f

$$A_f = \left(\frac{\frac{15 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 10^8}{\pi^2}}{360}\right) = \frac{2}{3\pi} \cdot 10^8 \text{ km}^2$$

Alternativa **c**.

126. **a)** Observando, na figura 1, que a diagonal de uma face do cubo mede $4R$, concluímos que:
$a\sqrt{2} = 4R \Rightarrow a = 2R\sqrt{2}$

b) $V_C = \left(2R\sqrt{2}\right)^3 = 16R^3\sqrt{2}$

c) $V_A = 4 \cdot \dfrac{4\pi R^3}{3} = \dfrac{16\pi R^3}{3}$

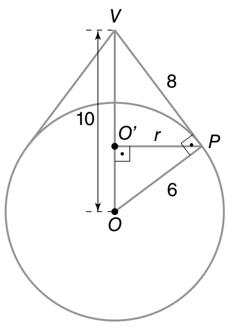
d) $FEA_{(NaC\ell)} = \dfrac{\frac{16\pi R^3}{3}}{16R^3\sqrt{2}} = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{6} \Rightarrow FEA_{(NaCl)} \approx 0{,}74$

$FEA_{(NaC\ell)} \approx 74\%$

127. Uma diagonal de um cubo é diâmetro da esfera circunscrita a ele. Assim, indicando por a a medida da aresta do cubo, temos que o diâmetro da esfera circunscrita mede $a\sqrt{3}$. Logo, a razão entre as medidas dessa aresta e desse diâmetro é $\dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
Alternativa **c**.

128. A medida r do raio da esfera inscrita nesse octaedro é dada por:
$r = \dfrac{2\sqrt{6}}{6}$ cm $= \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ cm
Logo, o volume dessa esfera é calculado por:
$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3}{3} \Rightarrow V = \frac{8\pi\sqrt{6}}{27}$$
Alternativa **e**.

129. O esquema abaixo mostra uma secção meridiana dessa figura, em que O' e r são o centro e a medida, em centímetro, do raio da base do cone, respectivamente; e a medida VP foi calculada pelo teorema de Pitágoras aplicado no triângulo VOP.

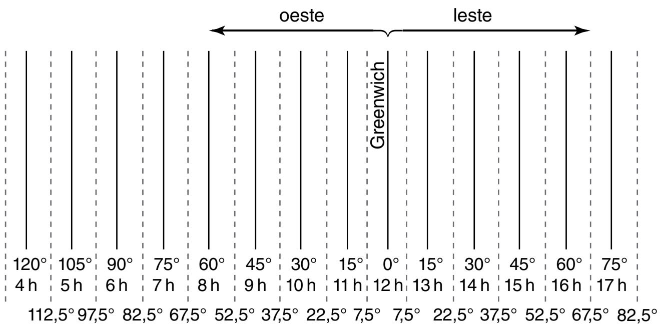


Por uma das relações métricas do triângulo retângulo VOP, obtemos r:
$$10r = 8 \cdot 6 \Rightarrow r = 4{,}8$$
Logo, a área A de cartolina usada no chapéu é dada por:
$$A = \pi \cdot 4{,}8 \cdot 8 \text{ cm}^2 = 38{,}4\pi \text{ cm}^2$$

Trabalhando em equipe

Matemática sem fronteiras

Esquematizando, temos:



Concluímos, então, que:

a) A 65° e 81° a leste do meridiano de Greenwich, são 16 h e 17 h, respectivamente.

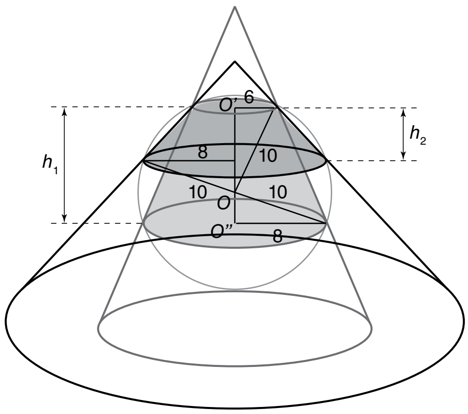
b) A 93° e 120° a oeste do meridiano de Greenwich, são 6 h e 4 h, respectivamente.

Análise da resolução

COMENTÁRIO: A resolução está incompleta, pois há outra possibilidade que também obedece às condições enunciadas: a que apresenta um cone cujo tronco está contido em um hemisfério (metade da esfera).

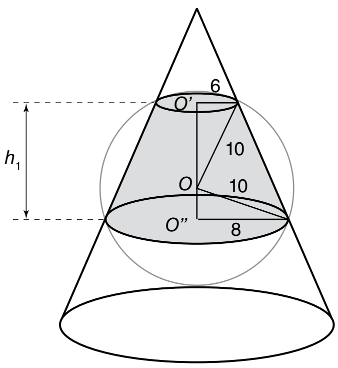
Resolução correta:

As bases do tronco podem estar contidas em um mesmo hemisfério ou em hemisférios opostos, como mostra a figura. Portanto, há duas possibilidades para a posição do tronco de cone em relação à esfera.



1ª possibilidade:

Sendo O o centro da esfera e O′ e O″ os centros das bases do tronco de cone de altura h_1, esquematizamos:



Pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

$(OO')^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow OO' = 8$

$(OO'')^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow OO'' = 6$

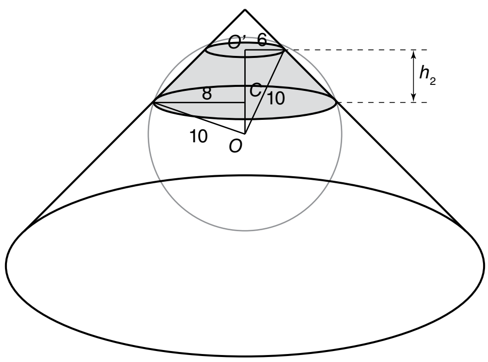
Concluímos, então, que a altura h_1 do tronco de cone é dada por:

$h_1 = OO' + OO'' = (8 + 6)$ cm $\Rightarrow$

$\Rightarrow h_1 = 14$ cm

2ª possibilidade:

Sendo O o centro da esfera e O′ e C os centros das bases do tronco de cone de altura h_2, esquematizamos:



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(OO')^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow OO' = 8$

$(OC)^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow OC = 6$

Concluímos, então, que a altura h_2 do tronco de cone é dada por:

$h_2 = OO' - OC = (8 - 6)$ cm $\Rightarrow$

$\Rightarrow h_2 = 2$ cm