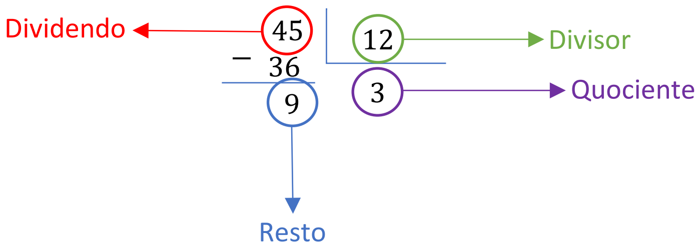
DIVISÃO DE POLINÔMIOS

A divisão de polinômios é realizada com base na mesma lógica da divisão euclidiana. Nesta última, tínhamos um valor que ao ser dividido por outro, resultava em um quociente e quando a divisão são era exata havia resto. Por exemplo, ao dividir 45 por 12, teríamos:



Ou seja, $45=12\cdot3+9$. Essa relação valerá sempre: O dividendo é igual ao produto entre o divisor e o quociente adicionado ao resto. Nos polinômios, precisamos da mesma relação, uma vez que não estamos mudando de operação apenas os elementos que serão operados. Quando realizamos uma divisão euclidiana (divisão com resto), a primeira coisa que procuramos é um valor que quando multiplicado pelo divisor resulte no dividendo ou no maior valor mais próximo dele, mas que não maior que ele. Na divisão anterior, o valor 4 multiplicado pelo divisor ultrapassaria o 45 (dividendo) e o 2 multiplicado pelo divisor não resultaria no maior valor mais próximo do 45. Após realizarmos a primeira parte do algoritmo da divisão, encontramos o número 9. Sempre que o número obtido for menor do que o dividendo, então finalizamos a conta e temos a nossa resposta. Caso o resultado for maior que o dividendo, devemos realizar o mesmo processo de encontrar um número que multiplicado pelo divisor, resulte naquele valor ou no mais próximo possível dele. O processo só termina quando o número a ser dividido seja menor que o divisor, a esse valor damos o nome de resto. É importante lembrarmos que uma divisão euclidiana **não admite** números decimais no quociente: ou a divisão é exata ou ela deixará resto.

Consideremos então os polinômios $P(x)=3x^3+4x^2-2x+1$ e o polinômio $D(x)=x+1$. Vamos realizar a divisão $\frac{P(x)}{D(x)}$:

$$3x^3+4x^2-2x+1 \,\big|\, \underline{x+1}$$

Quando estávamos dividindo números, buscávamos encontrar um que multiplicado pelo divisor resultasse no dividendo ou no maior valor mais próximo dele. Intuitivamente, faz sentindo que na divisão de polinômios busquemos um outro polinômio quando multiplicado pelo polinômio divisor resulte no polinômio dividendo ou no maior valor mais próximo. Vocês concordam que, se escolhermos $3x^2$ ao multiplicarmos por $x+1$ obteremos o primeiro termo do polinômio divisor?

$$\begin{array}{rl|l} - & 3x^3+4x^2-2x+1 & x+1 \\ & 3x^3+3x^2 & 3x^2 \\ \hline & \quad x^2-2x+1 & \end{array}$$

Ao multiplicarmos o polinômio $3x^2$ pelo polinômio $x+1$ obtemos o polinômio $3x^3+3x^2$. Assim como na divisão de números, realizamos a subtração entre o dividendo e este valor obtido. Após realizado a subtração, temos o polinômio do segundo grau x^2-2x+1. Aqui deveremos parar quando o resto for 0, indicando que a divisão é exata, ou quando o resto for um polinômio de grau menor do que o divisor. Neste caso, o resto ou será zero ou um polinômio de grau zero. Continuando a divisão, temos:

$$\begin{array}{rr|l} - & 3x^3+4x^2-2x+1 & x+1 \\ & 3x^3+3x^2 \qquad\quad & 3x^2+x-3 \\ \hline & x^2-2x+1 & \\ - & x^2+x \qquad & \\ \hline & -3x+1 & \\ - & -3x-3 & \\ & 4 & \end{array}$$

Paramos então no valor 4, pois ele é um polinômio de grau zero, afinal $4=4x^0$. Aplicando a lógica utilizada na divisão euclidiana, o dividendo deve ser igual ao produto entre o divisor e o quociente adicionado ao resto, com o dividendo sendo $P(x)=3x^3+4x^2-2x+1$, o divisor $D(x)=x+1$, o quociente $Q(x)=3x^2+x-3$ e o resto $R(x)=4$, teremos:

$$P(x)=Q(x)\cdot D(x)+R(x)$$

$$3x^3+4x^2-2x+1=(3x^2+x-3)(x+1)+4$$

Esse processo pode ser utilizado para divisão de quaisquer dois polinômios. Se ainda houver dúvidas de como saber qual o valor que eu devo usar para multiplicar, preste atenção na seguinte dica: Um polinômio é uma soma de monômios e cada monômio possui um coeficiente e uma parte literal. Quando for realizar a divisão, observe no dividendo qual o monômio de maior grau, no exemplo apresentado seria o monômio $3x^3$. Deste modo, o valor que buscamos para multiplicar pelo divisor é um monômio com mesmo coeficiente e com um grau menor do que o do monômio $3x^3$. Logo, o monômio com essa descrição é o $3x^2$. Após subtrair o resultado da multiplicação de $3x^2$ pelo divisor $(D(x))$ do dividendo $(P(x))$ obteremos um outro polinômio, neste caso x^2-2x+1, como ele tem grau 2 e o dividendo tem grau 1 este não pode ser o resto, então realizamos o mesmo processo. O próximo valor a ser multiplicado deve ter o mesmo coeficiente e um grau a menos do que o monômio de maior grau do último polinômio obtido, sendo x o valor para o exemplo apresentado. E seguimos esse algoritmo até que obtenhamos um polinômio cujo grau seja menor do que o do dividendo ou encontremos o valor 0.

No exemplo apresentado anteriormente, temos que o quociente da divisão é um polinômio de grau 2. Pode ocorrer de divisão ser exata e o quociente ser um polinômio de grau 2 ou maior. Nestes casos, podemos efetuar outra divisão, realizando assim o processo denominado de **divisões sucessivas**. Por exemplo, vamos considerar os polinômios $P(x)=x^3-3x^2-10x+24$ e os polinômios $Q(x)=x-2$, $A(x)=x+3$ e $B(x)=x-4$. Vamos realizar a divisão $\frac{P(x)}{Q(x)}$:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-3x^2-10x+24 & x-2 \\
-\;(x^3-2x^2) \qquad\qquad\quad & \overline{x^2-x-12} \\
\hline
-x^2-10x+24 & \\
-\;(-x^2+2x) \qquad\; & \\
\hline
-12x+24 & \\
-\;(-12x+24) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Temos então que $P(x)=(x^2-x-12)(x-2)$. Como o resto da divisão foi zero e o quociente da divisão é um polinômio de grau maior que 1, então podemos dividir $Q(x)$ por $A(x)$ ou $B(x)$, desde que essa divisão também seja exata. Realizaremos divisão por $A(x)$:

$$
\begin{array}{r|l}
x^2-x-12 & x+3 \\
-\;(x^2+3x) \qquad & \overline{x-4} \\
\hline
-4x-12 & \\
-\;(-4x-12) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Note que $Q(x)=(x+3)(x-4)$, logo podemos substituir esse resultado na primeira divisão, obtendo $P(x)=(x+3)(x-4)(x-2)$. Quando realizamos divisões sucessivas até que todos os fatores sejam polinômios do primeiro grau, temos a forma mais simplificada possível de um polinômio. Sabemos que a divisão é exata quando o resto da divisão é zero, e que o encontramos após realizarmos a divisão, mas seria possível saber se o resto é zero sem a necessidade de realizar todas as contas? A resposta é sim, e a obtemos por meio do Teorema do resto.

Seja $P(x)$ um polinômio que será dividido pelo dividendo $D(x)$ que é um polinômio do primeiro grau, ou seja, $D(x)=ax+b$. O resto da divisão $\frac{P(x)}{D(x)}$ será:

$$R(x)=P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

Podemos verificar o teorema para o primeiro exemplo apresentado no qual $P(x)=3x^3+4x^2-2x+1$ e $D(x)=x+1$. Aqui temos que $-\frac{a_0}{a_1}=-\frac{1}{1}=-1$, agora vamos calcular $P(-1)$:

$$P(-1)=3(-1)^3+4\cdot(-1)^2-2\cdot(-1)+1$$

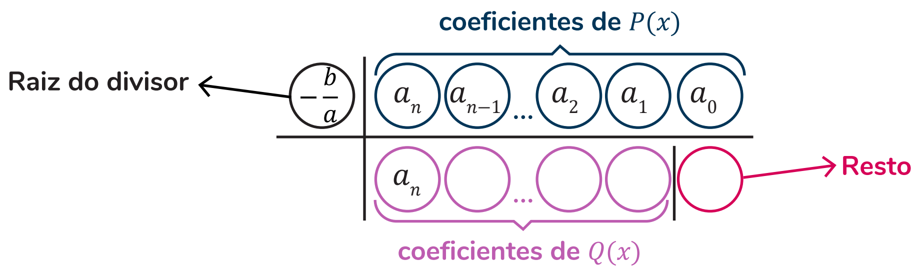
$$P(-1)=3\cdot(-1)+4\cdot 1-2\cdot(-1)+1$$

$$P(-1)=-3+4+2+1$$

$$P(-1)=4$$

Logo, o $R(x)=4$. Note que obtivemos o mesmo resto de duas maneiras distintas de cálculo. Basta escolher qual a melhor quando for utilizá-la. Um detalhe que vale a pena chamar atenção é que, para aplicar o teorema do resto, é necessário que o dividendo seja um polinômio de primeiro grau, enquanto que para realizar a divisão não tem nenhuma restrição.

Existe um outro método que pode ser utilizado quando queremos encontrar o quociente e o resto, mas não queremos realizar toda a divisão, esse é o famoso método de Briot-Ruffini. Para realizarmos esse método, devemos considerar um polinômio $P(x)=a_n\, x^n+a_{n-1}\, x^{n-1}\ +\ ...\ +\ a_2\, x^2\ +\ a_1\, x^1+a_0$ que será dividido por um outro na forma $D(x)=ax+b$. O método consiste em utilizar os coeficientes do polinômio $P(x)$ e a raiz de $D(x)$, ou seja, $x=-\frac{b}{a}$. A tabela utilizada para realizar o método é:



Começamos calculando a raiz do polinômio que está no dividendo, $D(x)=ax+b$, cujo resultado é $x=-\frac{b}{a}$. Em seguida, listamos todos os coeficientes do polinômio $P(x)$, conforme ilustrado na figura. O primeiro coeficiente do polinômio $Q(x)$ é sempre igual ao de $P(x)$, logo o repetimos na linha de baixo. Para encontrarmos os outros valores começamos multiplicando a raiz do divisor pelo primeiro coeficiente de $Q(x)$ e adicionamos ao resultado o valor do segundo coeficiente de $P(x)$, ou seja, $a_n\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)+a_{n-1}$, que resultará no segundo coeficiente de $Q(x)$. Esse processo é realizado até que se esgotem todos os coeficientes do polinômio de $Q(x)$. O último valor obtido na segunda coluna, aquele que está logo abaixo do coeficiente a_0, será o resto da divisão do polinômio $P(x)$ pelo $D(x)$. Vamos realizar novamente a divisão entre os polinômios $P(x)=3x^3+4x^2-2x+1$ e $D(x)=x+1$.

Conforme explicado anteriormente, calculamos a raiz de $D(x)$ que é igual à

$$x = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{1} = -1$$

Agora, posicionamos a raiz no devido espaço destinado a ela e na sequência listamos todos os coeficientes do polinômio que será dividido. Por fim, repetimos o valor do primeiro coeficiente e então estaremos prontos para aplicar o método.

-1	3	4	-2	1
	3			

Iniciamos com a multiplicação do primeiro valor da segundo coluna pela raiz $(3{\cdot}(-1))$, resultando em -3 e depois adicionamos o valor do segundo coeficiente da primeira linha, $(3{\cdot}(-1)+4)$, resultando no segundo valor da segunda coluna.

-1	3	4	-2	1
	3	1		

Repetimos o processo multiplicando o segundo coeficiente da segunda linha pela raiz $(1{\cdot}(-1))$ e adicionando o terceiro valor da primeira linha (-2) resultando em -3.

-1	3	4	-2	1
	3	1	-3	

Realizamos uma última vez, agora multiplicando o terceiro valor da segunda linha pela raiz $((-3){\cdot}(-1))$ e adicionamos o quarto valor da segunda linha (1) resultando em 4.

-1	3	4	-2	1
	3	1	-3	4

Esse último valor obtido é o resto da divisão de $P(x)$ por $D(x)$ e o quociente $Q(x)$ é:

$$Q(x)=3x^2+x-3$$

Deste modo, o polinômio $P(x)$ pode ser escrito como:

$$P(x)=(3x^2+x-3)(x+1)+4$$

Como já sabíamos dos métodos anteriores.

ANOTAÇÕES