Aula 05: Circunferência trigonométrica: trigonometria no ciclo.

Sumário

Olá jovem aprendiz, como vai você? Tudo tranquilo? Espero que estejamos prosseguindo com avanços e evoluções. É claro que nunca avançamos como imaginávamos que iríamos, mas só de você não estar mais no repouso intelectual de antes já demonstra que a sua vida já mudou. A próxima mudança será, certamente, seu nome na lista de aprovados!

Mas voltemos com nossos pés no chão, e falemos um pouco sobre a aula de hoje. Hoje versaremos aqui sobre trigonometria. Sim, novamente! Mas dessa vez, veremos um *outro aspecto da trigonometria*. É a chamada trigonometria no ciclo. Nessa aula veremos como podemos calcular senos, cossenos e tangentes de ângulos superiores a $90°$ (ou mesmo acima de $360°$). Veremos também o que significam ângulos negativos e como podemos calcular suas funções trigonométricas principais.

Após isso estudaremos algumas fórmulas e expressões muito importantes chamadas comumente de *identidades trigonométricas*, importante para substituirmos expressões muito complicadas por expressões mais simples, ou mesmo para efetuar cortes de maneira mais prática. Veremos mais detalhes quando expor o conteúdo. Finalmente, após isso, falaremos sobre as equações e inequações trigonométricas, finalizando, com isso, o conteúdo. Vamos lá, então? Siga comigo, jovem, e não deixe de tirar as suas dúvidas!


ESA
PARE

CRONOGRAMA DE AULAS

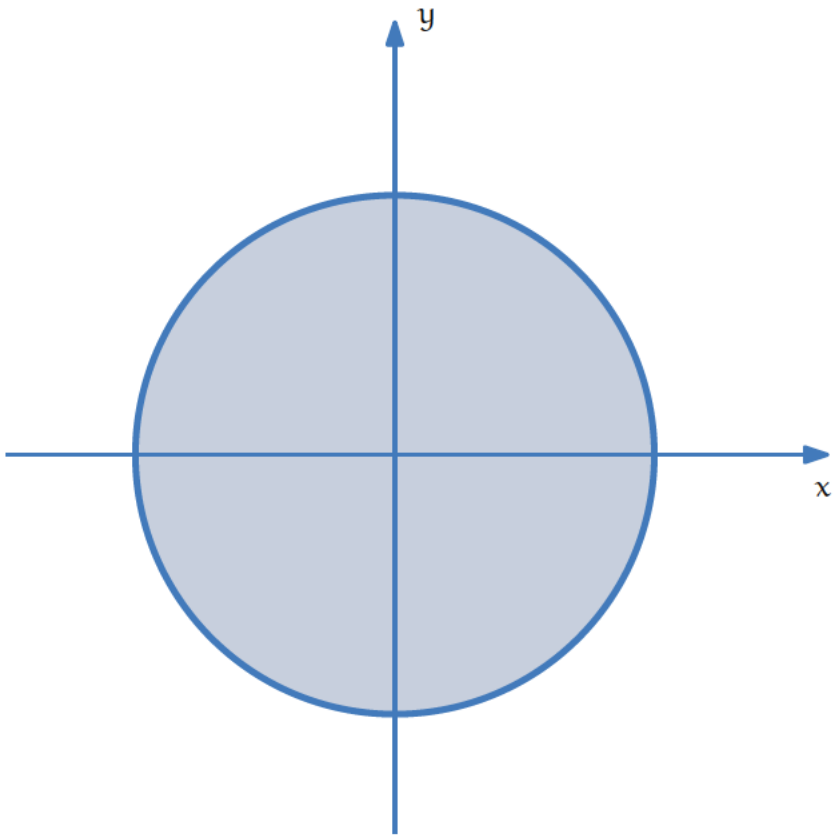
DISPONÍVEL	*CONTEÚDO*
Aula 00	*Fundamentos da Geometria Plana: elementos primitivos, axiomas e postulados. Ângulos: definição, elementos, notações, unidades de medida, classificação, ângulos consecutivos, ângulos adjacentes, bissetriz de um ângulo, ângulos opostos pelo vértice, retas paralelas cortadas por transversais. Triângulos: definição, elementos, relações angulares, condição de existência, classificação, cevianas, pontos notáveis, base média, congruência.*
Aula 01	*Teorema de Tales, semelhança de triângulos e teorema das bissetrizes. Relações métricas no triângulo retângulo. Polígonos: definição, elementos, nomenclatura, polígonos côncavos, polígonos convexos, classificação, relações angulares e número de diagonais.*
Aula 02	*Quadriláteros notáveis: definição, elementos, relações angulares, classificação, base média e mediana de Euler.*
Aula 03	*Polígonos regulares: Polígonos regulares inscritos e polígonos regulares circunscritos. Circunferência: definição de circunferência e de círculo, elementos, posições relativas, ângulos na circunferência, quadriláteros inscritíveis, teorema de Pitot,e potência de ponto.*
Aula 04	*Trigonometria: razões trigonométricas no triângulo retângulo, trigonometria num triângulo qualquer (Lei dos senos e dos cossenos)*
Aula 05	*Circunferência trigonométrica, operações com arcos (adição, subtração e arco duplo) e funções trigonométricas.*
Aula 06	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*
Aula 07	*Áreas de figuras planas.*
Aula 08	*Introdução à Geometria Espacial. Prismas: definição, elementos, classificação, planificação, áreas, volume e casos especiais: cubos e paralelepípedos. Cilindros: definição, elementos, classificação, planificação, áreas e volume.*
Aula 09	*Pirâmides: definição, elementos, classificação, relações métricas na pirâmide, áreas e volume. Cones: definição, elementos, classificação, relação métricas no cone, áreas e volume.*
Aula 10	*Esferas: definição, elementos, secção esférica, área da superfície esférica e volume. Troncos.*
Aula 11	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*

1.0– Aspectos iniciais do ciclo trigonométrico

1.1– Definição e elementos básicos

O que é o ciclo trigonométrico?

Vamos começar nossa teoria observando o círculo a seguir.

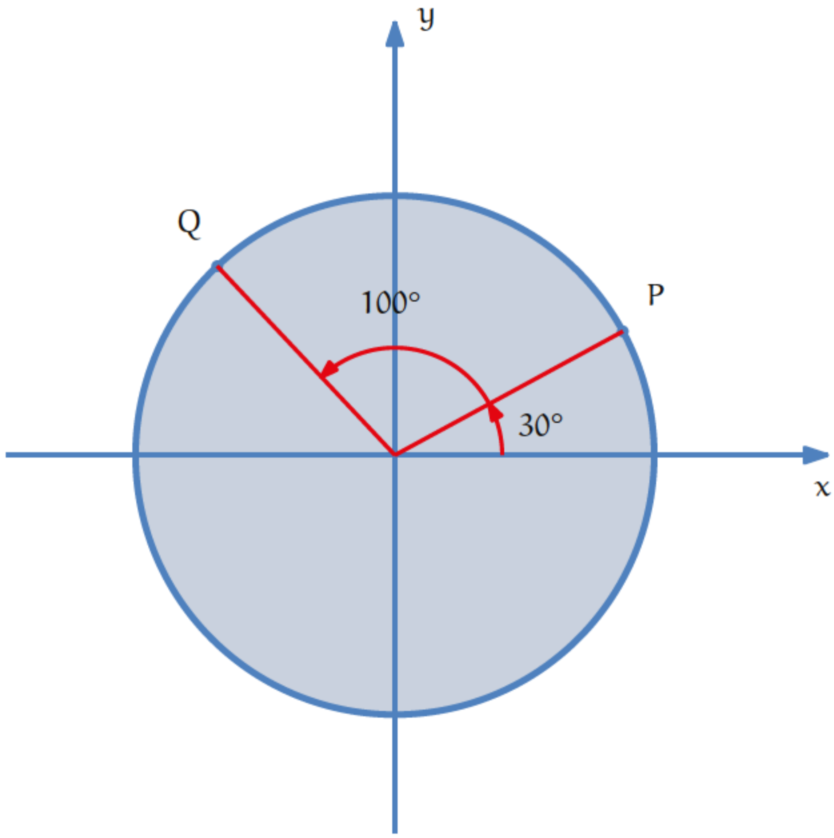


O círculo acima será chamado de uma circunferência trigonométrica caso esteja centrado na origem de um sistema cartesiano ortogonal (que seria a dupla de eixos que desenhei acima) e caso possua raio de medida 1. Veremos já já o porquê dessa restrição tão específica, de restringir esse círculo a ter seu raio com medida 1.

Podemos então dizer:

> Uma circunferência será dita trigonométrica quando for unitária e estiver centrada na origem de num sistema cartesiano ortogonal.

O interesse inicial que teremos nessa circunferência está ligado aos pontos que estão sobre essa circunferência. Mais especificamente, estaremos interessados num determinado ângulo que podemos formar a partir desse ciclo. Veja, por exemplo, o ponto P abaixo:



Veja que o ponto P define, de acordo com a construção feita, um ângulo de $30°$. Portanto diremos que P determina um arco de $30°$ (ou, como já vimos, $\frac{\pi}{6}$ radianos[1]).

Desenhamos também, na figura anterior, um ponto Q. Você consegue me dizer que arco que ele determina?

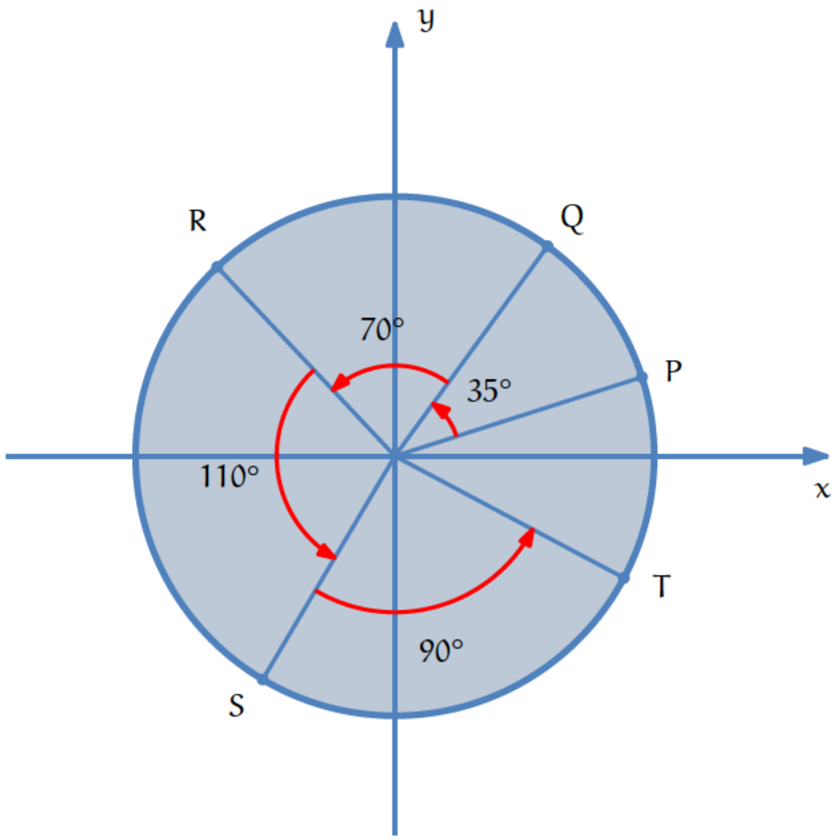
Exatamente, coruja! Às vezes, por distração, poderíamos vir a achar que o ponto Q determina um arco de $100°$, mas devemos sempre começar a contar a partir do eixo x, no sentido anti-horário. Então, o ponto Q determina um arco de $130°$. Muito bom, coruja! Com isso, já conseguimos entender que cada ponto de uma circunferência trigonométrica está associado a algum ângulo. Vamos, então, continuar com esse mesmo raciocínio.

[1]Não deixe de relembrar o conceito de radianos no livro eletrônico que versa sobre *Círculos*, caso encontre dificuldades em fazer a conversão.

Redesenharei esse ciclo colocando mais alguns ângulos. Colocarei isso em forma de exercício, para a gente poder se testar. Vamos lá, então?

QUESTÃO 1

Sabe-se que, na figura abaixo, P determina um arco de 20° sobre a circunferência trigonométrica.



Acerca dessas circunstâncias, considere as afirmativas a seguir:

I. O ponto Q representa um arco de 55°;

II. O ponto R representa um arco de 105°;

III. O ponto S representa um arco de 235°;

IV. O ponto T representa um arco de 325°;

V. O ponto P representa um arco de 380°.

Podemos concluir que, dentre as afirmativas, é (são) verdadeira(s):

(a) apenas uma afirmativa.

(b) apenas duas afirmativas.

(c) apenas três afirmativas.

(d) apenas quatro afirmativas.

(e) todas as afirmativas.

R: Comentemos afirmativa por afirmativa:

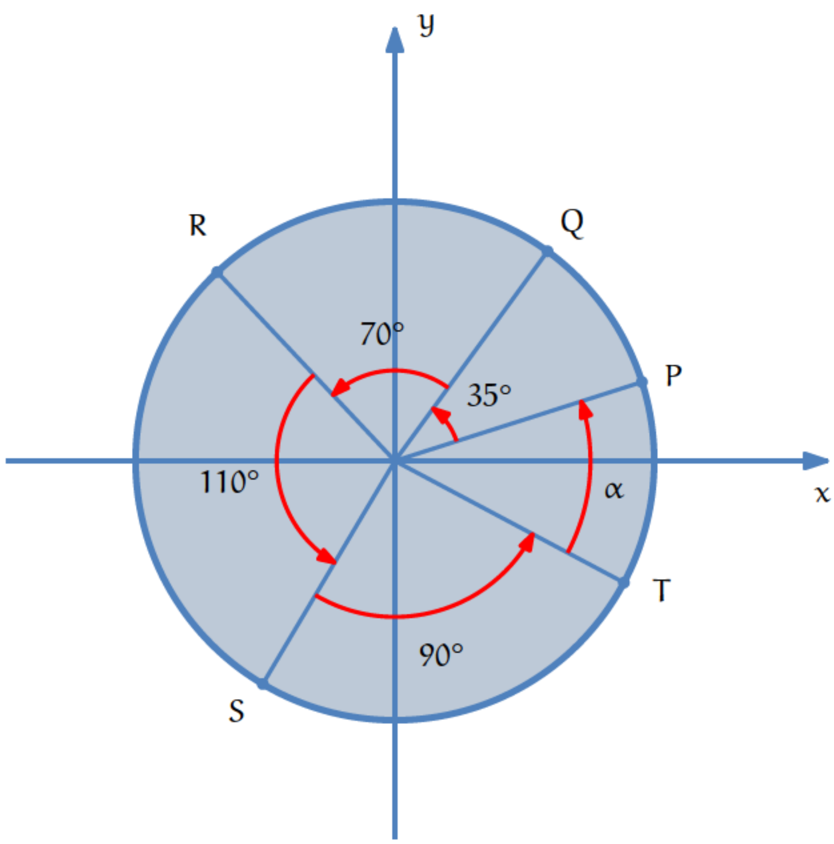
I. Afirmativa verdadeira. Veja que o ponto P corresponde a um arco de $20°$; para alcançarmos Q, precisamos adicionar $35°$ a esse arco, alcançando $20° + 35° \quad 55°$. Podemos, se quiser, utilizar a notação: $Q \quad P + 35°$ (é importantíssimo que você consiga enxergar isso olhando para a circunferência trigonométrica anterior).

II. Afirmativa falsa. Veja que $R \quad Q + 70°$, e como $Q \quad 55°$, temos $R \quad 55° + 70° \quad 125°$.

III. Afirmativa verdadeira. Veja que $S \quad R + 110° \quad 125° + 110° \quad 235°$.

IV. Afirmativa verdadeira. Temos $T \quad S + 90° \quad 235° + 90° \quad 325°$.

V. Afirmativa, por mais incrível que pareça, verdadeira. Primeiro, observe o ciclo trigonométrico que nos foi dado:



Não sabemos aquele último arco de medida α. Podemos calculá-lo percebendo que a soma de todos é $360°$:

$$\begin{aligned} 35^\circ + 70^\circ + 110^\circ + 90^\circ + \alpha &\quad 360^\circ \\ 305^\circ + \alpha &\quad 360^\circ \\ \alpha &\quad 360^\circ - 305^\circ \\ \alpha &\quad 55^\circ. \end{aligned}$$

Veja também que, segundo a figura, $P \quad T + \alpha$. Então:

$$\begin{aligned} P &\quad T + \alpha \\ &\quad 325^\circ + 55^\circ \\ &\quad 380^\circ. \end{aligned}$$

Tivemos, então, quatro afirmativas verdadeiras.

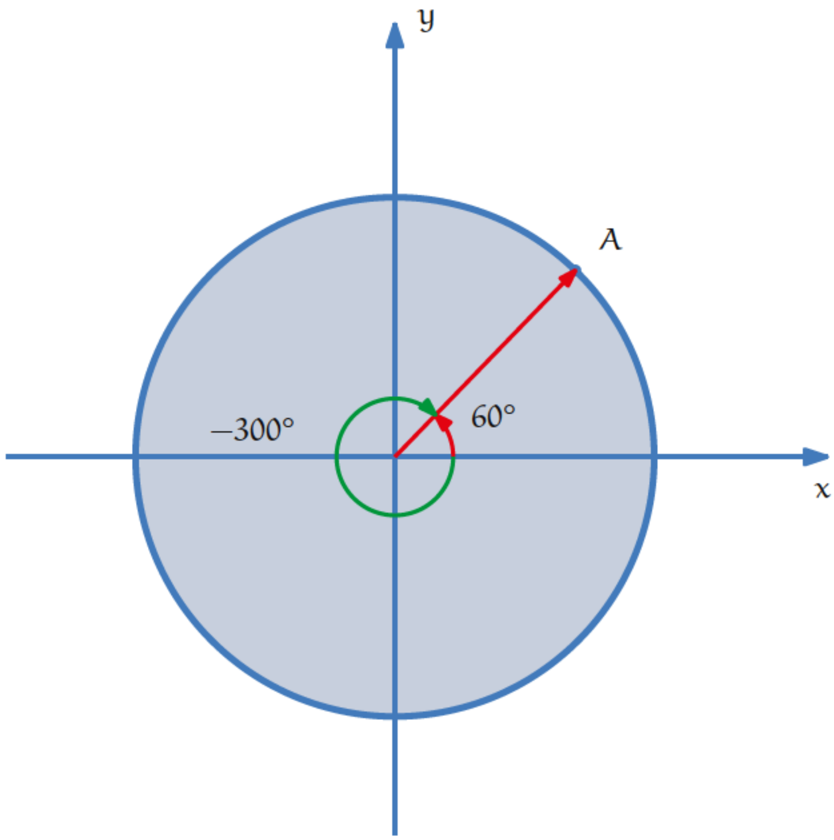
Gabarito: D

O que aprendemos com esse último exercício, mais especificamente com a última afirmativa sendo verdadeira, é que um mesmo ponto pode represdentar mais de um arco. O ponto P, na questão, representou 20° e 380°. Vê que Esses 380° podem ser obtidos a partir de 20° somando-o 360°?

Isso acontece porque, após uma volta, acaba que ***retornamos ao mesmo ponto***! E somar 360° significa dar uma volta completa! Então, sempre que somarmos 360° a um arco, não alteramos a sua posição na circunferência trigonométrica.

Para representarmos essas possíveis voltas, utilizamos a parcela $k \cdot 360^\circ$, com $k \in \mathbb{Z}$ (conjunto dos números inteiros). O ponto P, então, representa arcos do tipo: $20^\circ + 360^\circ \cdot k$. Veja que, por exemplo, $k \quad 0$ nos dá: $P \quad 20^\circ$ e de fato esse ponto representa esse arco. Veja também que $k \quad 1$ nos dá: $P \quad 360^\circ + 20^\circ \quad 380^\circ$; de fato, esse arco é representando pelo ponto P (após uma volta completa no círculo). Se eu substituo $k \quad 2$: $P \quad 20^\circ + 720^\circ \quad 740^\circ$; esse arco também é representado pelo ponto P (após duas voltas completas a partir de P). Poderíamos também substituir k por um número negativo, como -1. Substituir k por um número negativo significa andar ***no sentido contrário***, isto é no sentido horário. Em nosso caso, teríamos: $20^\circ - 360^\circ \quad -340^\circ$, ou seja, 20° no sentido anti-horário é o mesmo que 340° no sentido horário.

Então temos aí uma definição para ângulos negativos: são ângulos medidos no sentido horário. Observe a figura a seguir:



Podemos ver que, na figura acima, o ponto A pode ser representado por um arco de $60°$ (positivo, pois segue no sentido anti-horário) ou por um arco de $-300°$ (sentido horário).

Os ângulos são positivos no sentido anti-horário e negativos no sentido horário.

Caso um exercício perguntasse quais são os arcos representados por A, na figura acima, teríamos de responder, portanto: $60° + 360° \cdot k$, para podermos inserir tantas voltas quanto queiramos. A resposta também poderia ser dada em radianos:

$$60° + 360° \cdot k \qquad \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Para representarmos todos os arcos possíveis determinados por determinado ponto na circunferência trigonométrica, adicionamos a parcela $2k\pi$ ao valor do arco ainda na primeira volta.

Vejamos um exercício sobre esse fato.

QUESTÃO 2

Um arco de $140°$ pode também ser representado por:

(a) $500°, 860°, -220°$, etc.
(b) $360°, 720°, 1080°$, etc.
(c) $140°, 280°, 420°$, etc.
(d) $400°, 760°, -120°$, etc.

R: Vejamos algumas das possíveis soluções para esse arco:

Parâmetro: k	**Arcos côngruos a** $140°$: $140° + 360° \cdot k$
-1	$140° + 360° \cdot (-1)$ $-220°$
0	$140° + 360° \cdot 0$ $140°$
1	$140° + 360° \cdot 1$ $500°$
2	$140° + 360° \cdot 2$ $860°$
3	$140° + 360° \cdot 3$ $1220°$
4	$140° + 360° \cdot 4$ $1580°$

Todos os arcos acima encontram-se num mesmo ponto na circunferência trigonométrica. A única alternativa em que todos os ângulos fornecidos encontram-se dentro das possibilidades é a A.
Uma outra forma de fazermos isso é a seguinte: suponha que desejemos saber se $860°$ é uma das soluções. Basta dividir esse ângulo por $360°$ (sempre esse valor, pois equivale a uma volta) e analisar o resto. Veja:

$$\begin{array}{r|l} 860 & 360 \\ \cline{2-2} 140 & 2 \end{array}$$

Como o resto foi igual a $140°$ significa que $860°$ é representado *na primeira volta* também por $140°$. O quociente dessa divisão dirá para você quantas voltas foram dadas até chegar àquele ângulo.
Vejamos, por outro exemplo, $10580°$:

$$\begin{array}{r|l} 10580 & 360 \\ \cline{2-2} 3380 & 29 \\ 140 & \end{array}$$

Veja que o resto continua sendo $140°$. Então essa é uma das infinitas soluções para arcos que representem $140°$ (após 29 voltas, como demonstra o quociente da divisão).

Gabarito: A

Aqui vai uma definição:

Dois arcos serão ditos *côngruos* quando representarem um mesmo arco.

No exercício anterior, então, os arcos de $140°, -220°, 500°, ...$ são arcos côngruos, pois todos representam o mesmo arco.

Quando dizemos o valor de um arco em sua primeira volta, chamamos esse valor de *a primeira determinação positiva* do arco. Vejamos um exercício aplicando esse conceito.

QUESTÃO 3

Ache a primeira determinação positiva do arco de $1890°$.

(a) $45°$
(b) $90°$
(c) $135°$
(d) $180°$

R: Basta dividirmos o arco por $360°$ e analisarmos o resto:

$$\begin{array}{r|l} 1890 & \underline{360} \\ 90 & 5 \end{array}$$

Veja então que $1890°$ é côngruo a $90°$ ainda na primeira volta. Logo $90°$ é a primeira determinação positiva de $1890°$.

Gabarito: B

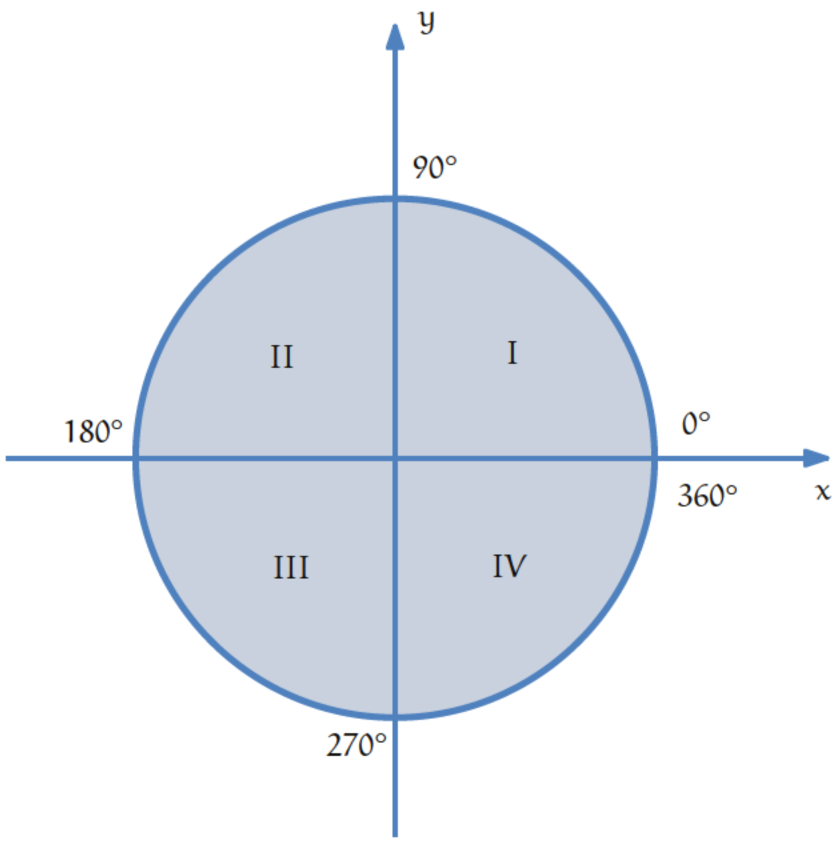
1.2– Redução de quadrantes

O que são quadrantes?

Ainda não falaremos de seno, cosseno ou tangente aqui. Por enquanto a nossa circunferência trigonométrica continuará sendo apenas um conjunto de pontos onde cada ponto representa um arco específico, como estamos vendo até o momento.

Sim, sim, coruja. Não se preocupe. Aliás, não poderia ser uma aula de trigonometria sem senos, cossenos ou tangentes aparecendo por aí. O que estamos fazendo, por enquanto, é entender o que significa, em termos práticos, ângulos maiores que $180°$. Agora faz muito mais sentido o que seria, por exemplo, um ângulo de $400°$ (poderíamos dizer que é, por exemplo, um arco de $40°$ após uma volta). Algumas questões podem vir cobrando, inclusive, *apenas esse aspecto do conteúdo*! Pode nem vir o seno ou o cosseno, na verdade. As questões anteriores, por exemplo, nem mencionaram essa parte do conteúdo. Mas têm a ver com a circunferência trigonométrica. Tudo bem, coruja? Então sigamos com o conteúdo. Agora aprenderemos um pouco mais sobre os quadrantes, e sobre o que chamamos de a *primeira volta*.

Você já percebeu que, quando centramos a circunferência trigonométrica na origem de um plano cartesiano, o círculo fica dividido em quatro partes? Observe:



A circunferência fica dividida em quatro *quadrantes*. Temos o quadrante I, II, III e IV. Chamamos esses quadrantes, respectivamente, de: 1°, 2°, 3° e 4° quadrantes.

Veja que podemos organizar os quadrantes da seguinte forma:

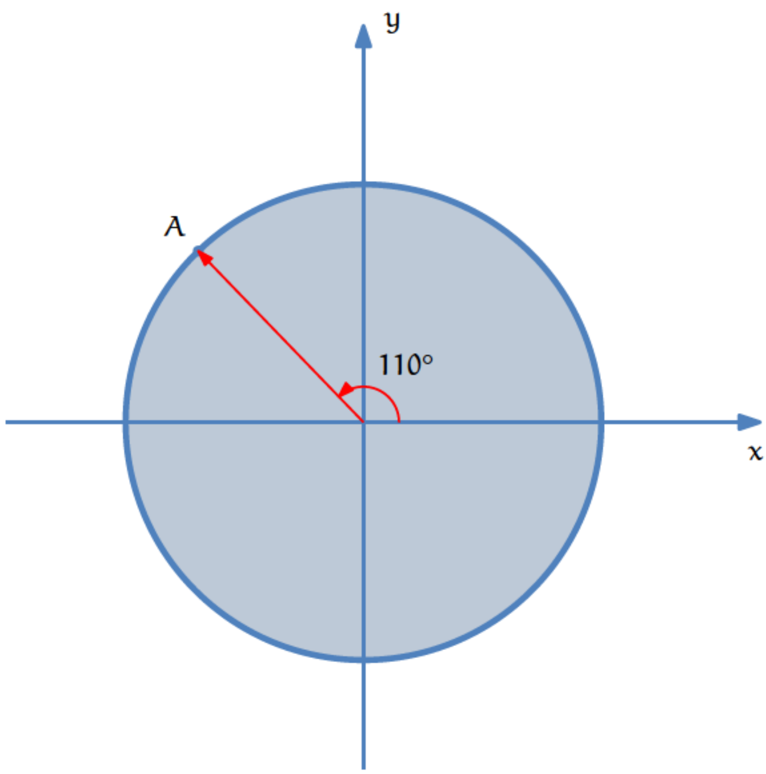
Quadrante	Extremidades
1º	Entre $0°$ e $90°$
2º	Entre $90°$ e $180°$
3º	Entre $180°$ e $270°$
4º	Entre $270°$ e $360°$

Essa tabela foi deduzida diretamente da figura anterior, como é possível vermos. O primeiro quadrante, por exemplo, começa no exato arco correspondente a $0°$ e termina no arco de $90°$ (lembrando de sempre caminhar no sentido anti-horário).

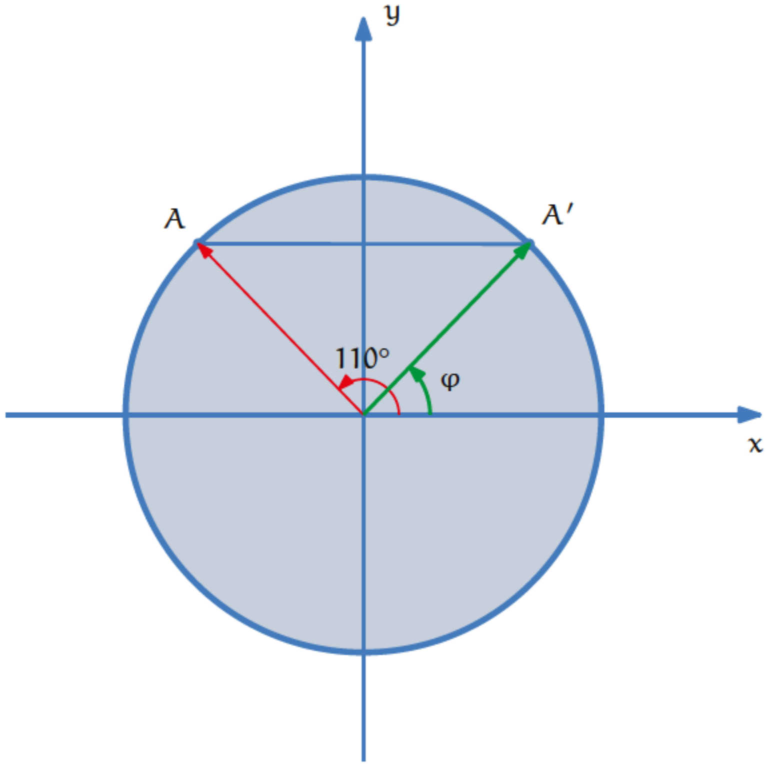
Nosso interesse por aqui, após esse entendimento de que sejam quadrantes, é aprender a *reduzir arcos para o primeiro quadrante*. O primeiro quadrante é o quadrante mais importante de toda a trigonometria. Eu digo isso, claro, em termos de provas militares. Quando formos calcular senos, cossenos e tangentes de arcos, quase sempre tentaremos reduzi-los ao primeiro quadrante. E para podermos fazer isso com calma e sabedoria, precisamos aprender de antemão como fazer isso. Vamos lá, então.

Redução do segundo quadrante para o primeiro

Considere um arco do segundo quadrante, como o representando pelo ponto A a seguir, formando um arco de $110°$.



Reduzir ao primeiro quadrante significa *refletir* o ponto A em relação ao eixo y e tomar o novo arco da reflexão. Veja o que estou querendo dizer:



Aquele novo arco determinado por A', que mede φ, é a redução do ângulo de 110° ao primeiro quadrante. É como se o eixo y funcionasse como um espelho, daí o nome reflexão. Veja também que o ângulo φ é o ***suplemento*** de 110°, ou seja, $\varphi \quad 180^\circ - 110^\circ \quad 70^\circ$. Dessa forma, a redução de 110° ao primeiro quadrante é um arco de 70°.

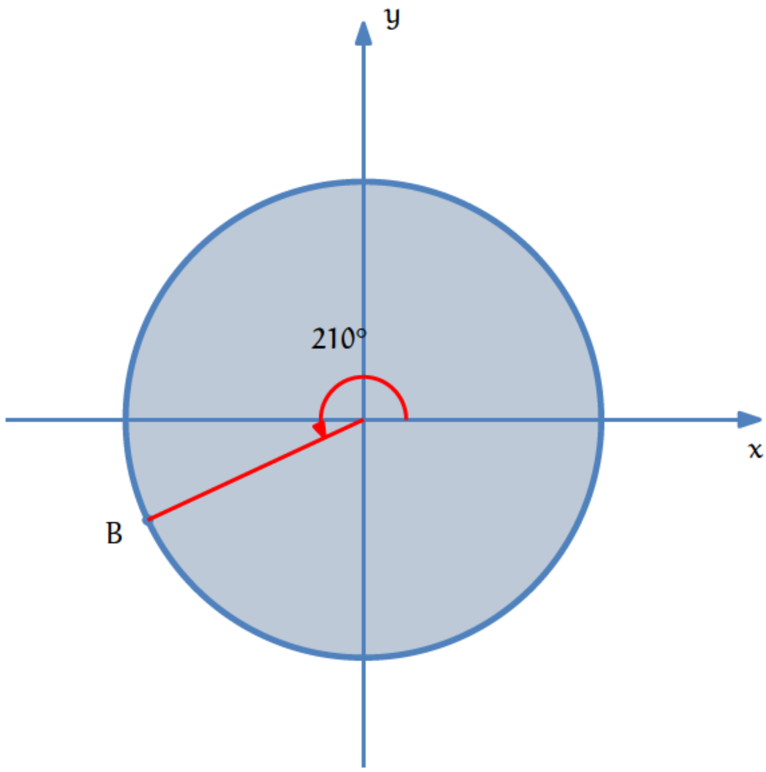
REGRA PRÁTICA PARA REDUÇÃO DO SEGUNDO AO PRIMEIRO QUADRANTE

Seja x um arco do segundo quadrante. Seu correspondente no primeiro quadrante será, então, $180^\circ - x$.

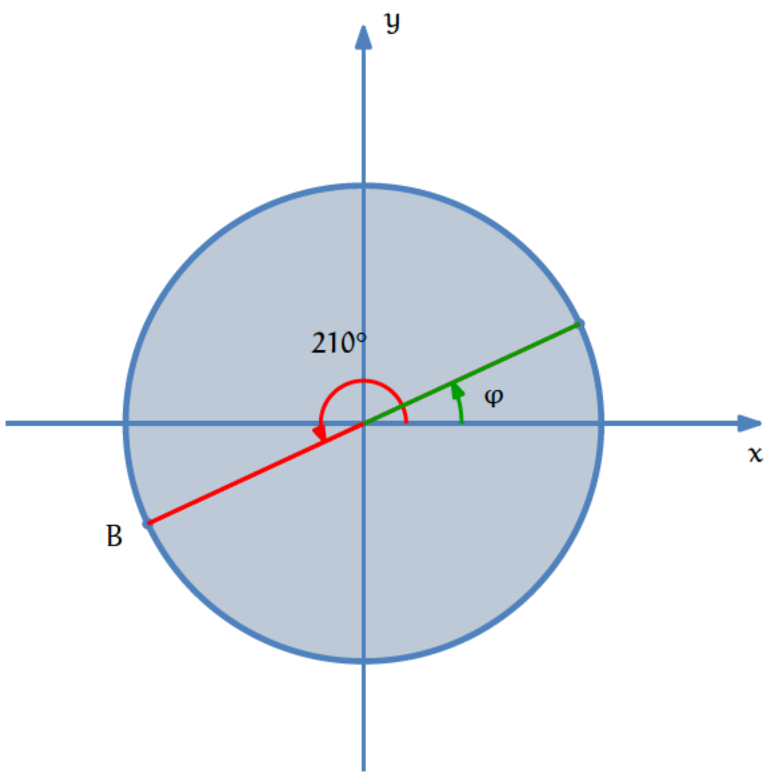
Na maioria dos casos, caso a questão não dificulte muito, não será necessário desenhar nada para reduções de quadrantes. Basta utilizarmos as regras práticas que enunciarei para cada caso. Mas caso queiramos nos preparar para todo e qualquer tipo de questão, precisamos nos acostumar com a circunferência trigonométrica para essas reduções também.

Redução do terceiro quadrante ao primeiro

Observe a seguir um arco do terceiro quadrante.



Para reduzirmos esse ângulo para o primeiro quadrante, basta prolongarmos a reta que determina o arco, da seguinte forma:



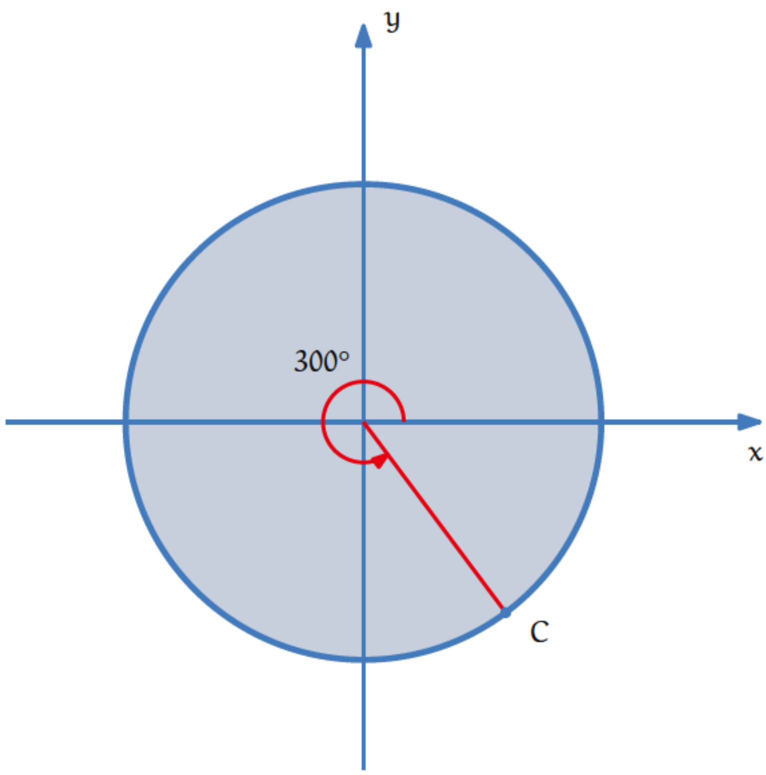
Veja que $210^\circ - \varphi \quad 180^\circ$ (antes de dizer que não entendeu, jovem, dê uma boa olhada na figura; esse conteúdo de ângulos não tem nada de trigonometria, é o conteúdo básico de nossa primeira aula; mas havendo dúvida ainda assim, não hesite em entrar em contato). Dessa forma, podemos verificar que φ 30°, que é o arco reduzido de 210°.

REGRA PRÁTICA PARA REDUÇÃO DO TERCEIRO AO PRIMEIRO QUADRANTE

> Seja x um arco do terceiro quadrante. Seu correspondente no primeiro quadrante será, então, $x - 180^\circ$.

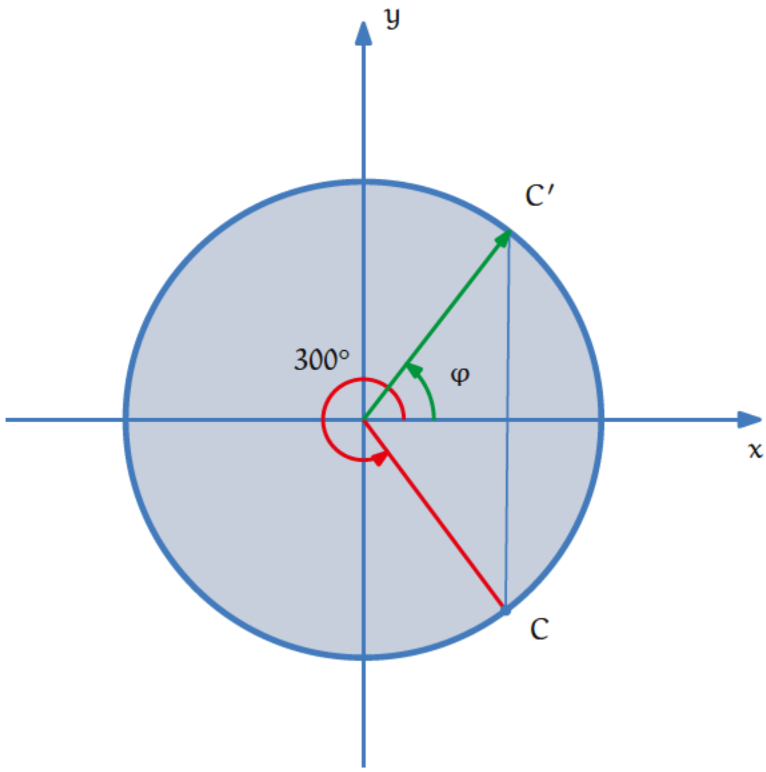
Redução do quarto quadrante ao primeiro

Vejamos um arco no 4° quadrante:



Para reduzirmos esse arco para o primeiro quadrante, basta refletirmos esse arco em relação ao eixo x.

Um pequeno comentário. percebeu que a ideia de redução de quadrantes tem a ver com a simples ideia de reflexão, em todos os três casos? leve sempre isso em consideração, a fim de resolver alguns problemas mais complexos. Vamos, então, dar uma olhada na reflexão de C em relação ao eixo x:



Veja que φ é o replemento de 300°. dessa forma, temos que $\varphi \quad 360^\circ - 300^\circ \quad 60^\circ$.

REGRA PRÁTICA PARA REDUÇÃO DO QUARTO AO PRIMEIRO QUADRANTE

Seja x um arco do quarto quadrante. Seu correspondente no primeiro quadrante será, então, $360^\circ - x$.

Então finalizamos aqui o conteúdo de redução de quadrantes, um dos conteúdos mais importantes da trigonometria no ciclo. Veremos agora alguns casos particulares de redução.

Redução de arcos maiores que 360°

Já vimos anteriormente, certo? Basta dividimos o arco por 360° e considerar o valor encontrado no resto. Daí utilizamos uma das três regras anteriores para a redução ao primeiro quadrante, caso seja necessário.

Vejamos um exercício para uma aplicação direta.

QUESTÃO 4

Reduza o arco de 2100° ao primeiro quadrante.

(a) 30°

(b) $45°$

(c) $60°$

(d) $80°$

(e) $300°$

R: Efetuemos a divisão:

$$\begin{array}{r|l} 2100 & 360 \\ \hline 300 & 5 \end{array}$$

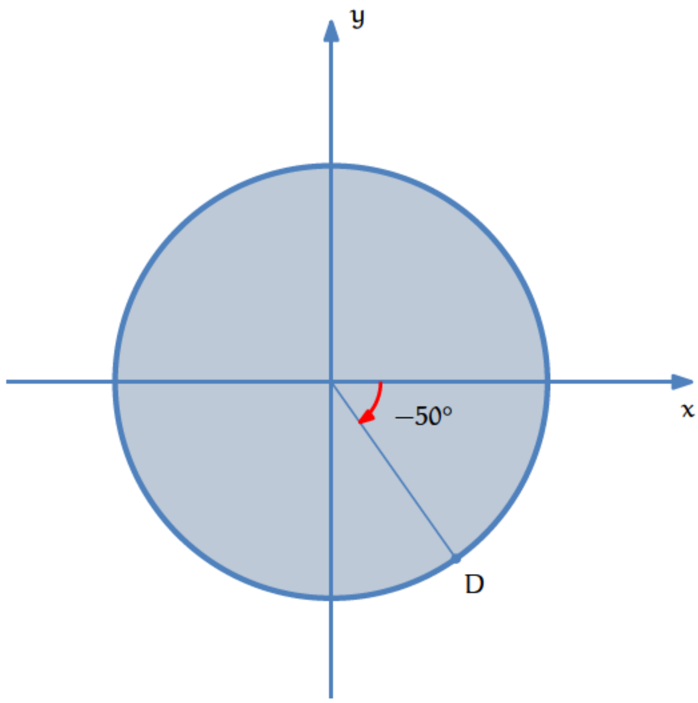
Então, o arco de $2100°$ é côngruo ao de $300°$. Como se trata de um arco do quarto quadrante, para reduzi-lo ao primeiro:

$$360° - 300° \quad 60°.$$

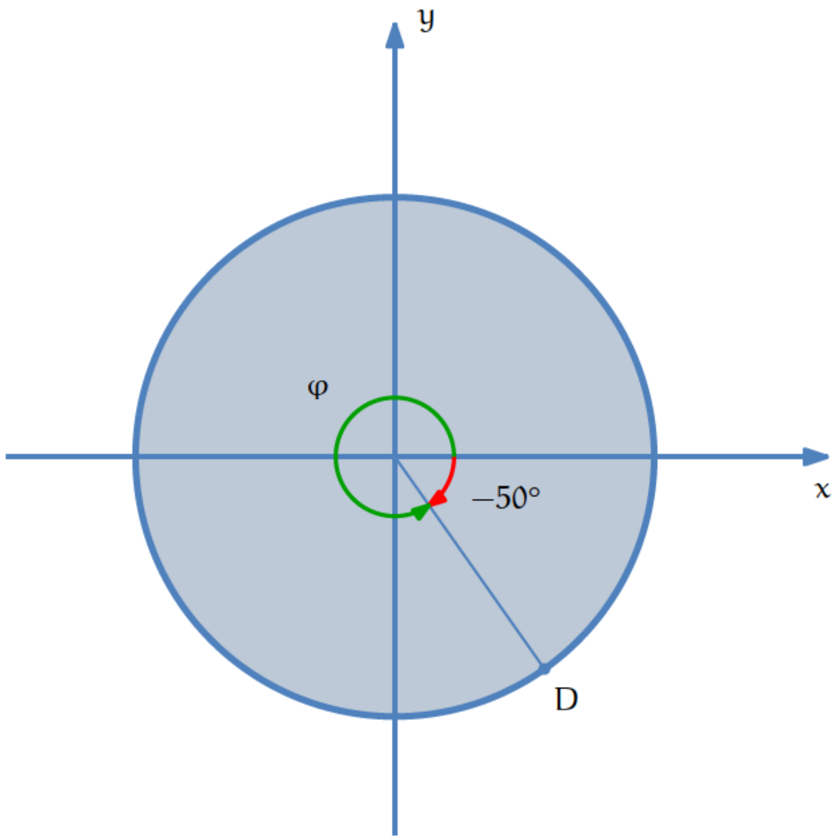
Gabarito: C

Redução de arcos negativos ao primeiro quadrante

Um arco é negativo quando ele é verificado no sentido horário. Vejamos, por exemplo, o ângulo de $-50°$ desenhado abaixo:



Para trazê-lo para a sua forma positiva, precisaríamos tomar o arco verde, marcado a seguir:



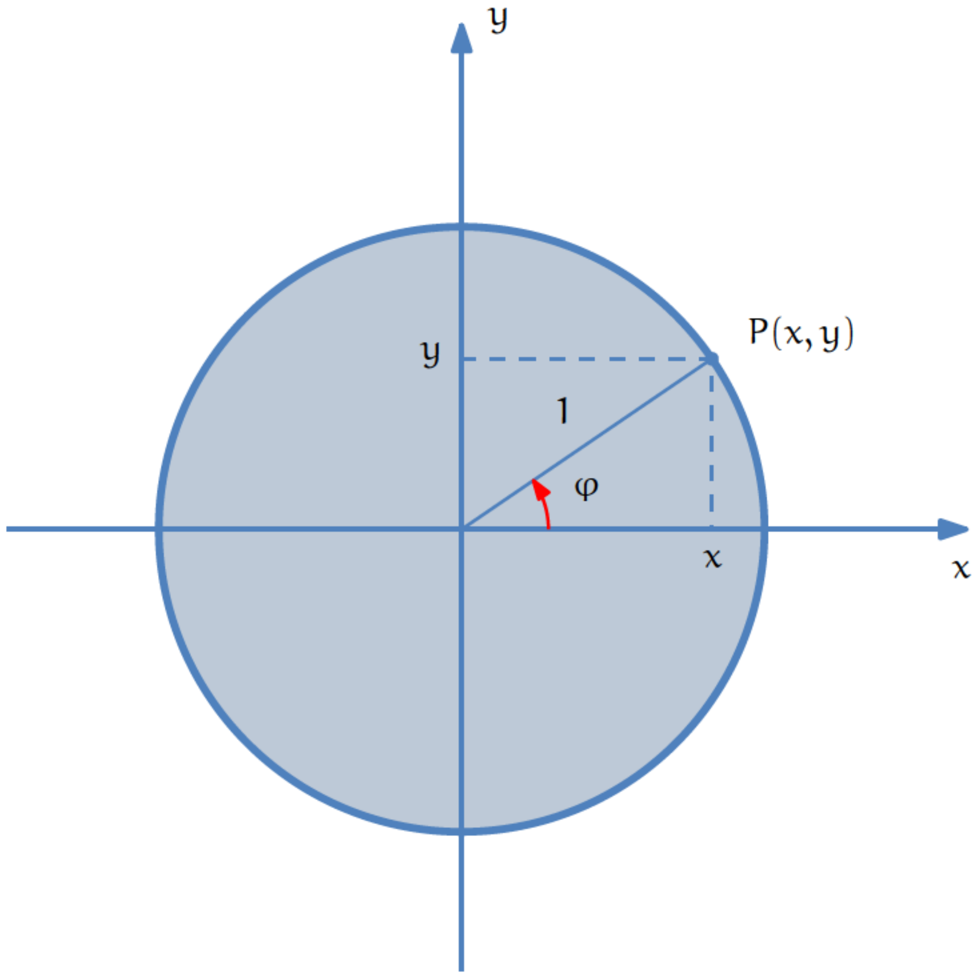
Perceba que esse arco mede simplesmente $360^\circ+(-50^\circ) \quad 310^\circ$. Então um arco de -50° equivale a um arco de 310°.

2.0– Trigonometria no ciclo

2.1– Relações trigonométricas no ciclo

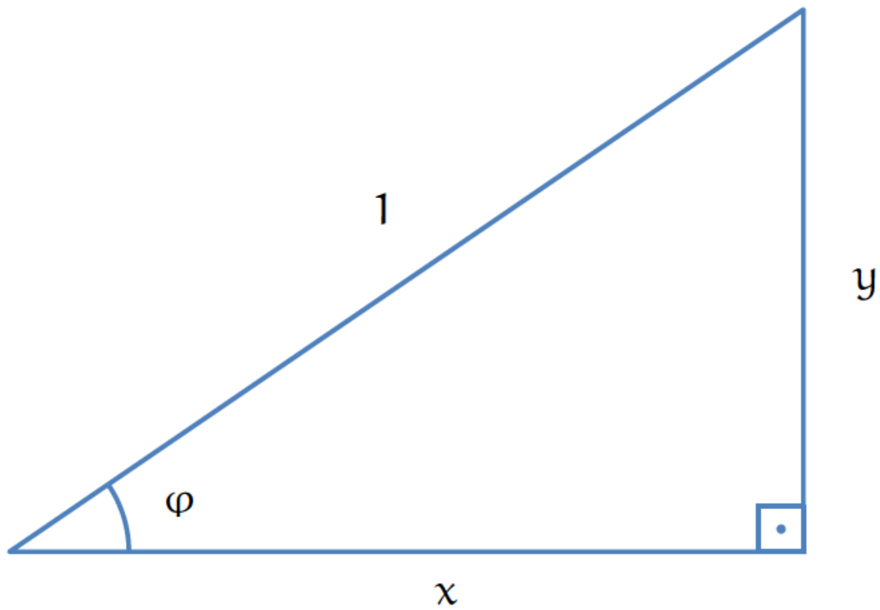
Seno e cosseno

Finalmente, vamos falar um pouco sobre seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico. Inicialmente, vamos dar uma olhada na figura abaixo:



Nessa figura, podemos perceber a presença de um ponto P sobre a circunferência da figura (lembrando sempre que essa circunferência tem raio 1). Esse ponto tem, na figura, coordenadas $P(x, y)$, como podemos observar.

Concluiremos, agora, alguns fatos super importantes dessa figura. Vejamos. Primeiro, perceba que podemos destacar um triângulo retângulo dela, que tem o seguinte formato:



Aplicaremos agora a nossa primeira trigonometria no livro eletrônico atual. Calcularei o cosseno de φ, do jeito que estamos acostumados a fazer:

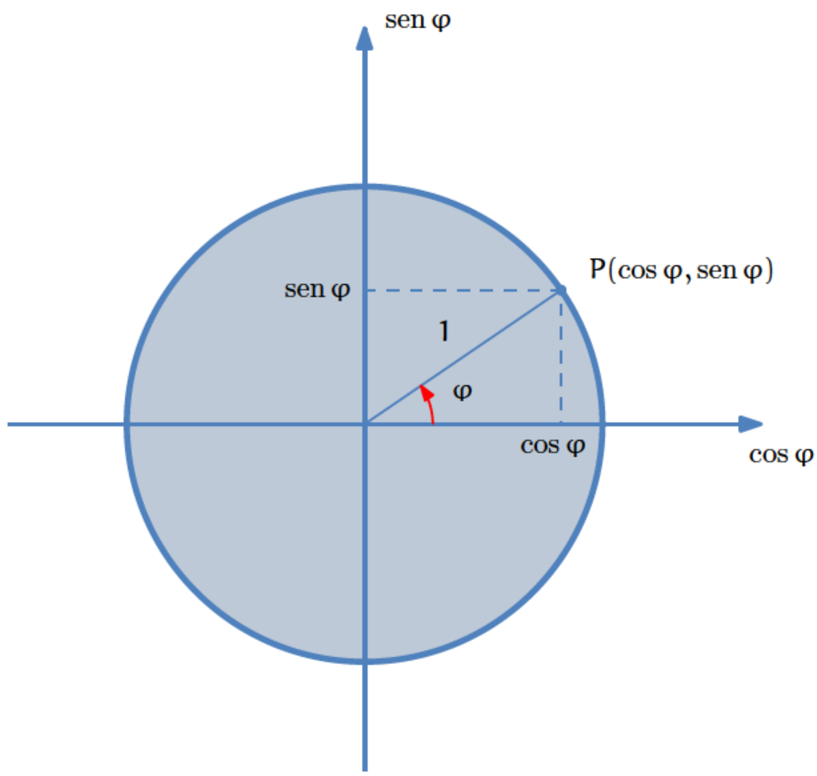
$$\cos\varphi \quad \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$
$$\cos\varphi \quad \frac{x}{1}$$
$$\cos\varphi \quad x.$$

Analogamente, podemos calcular o seno:

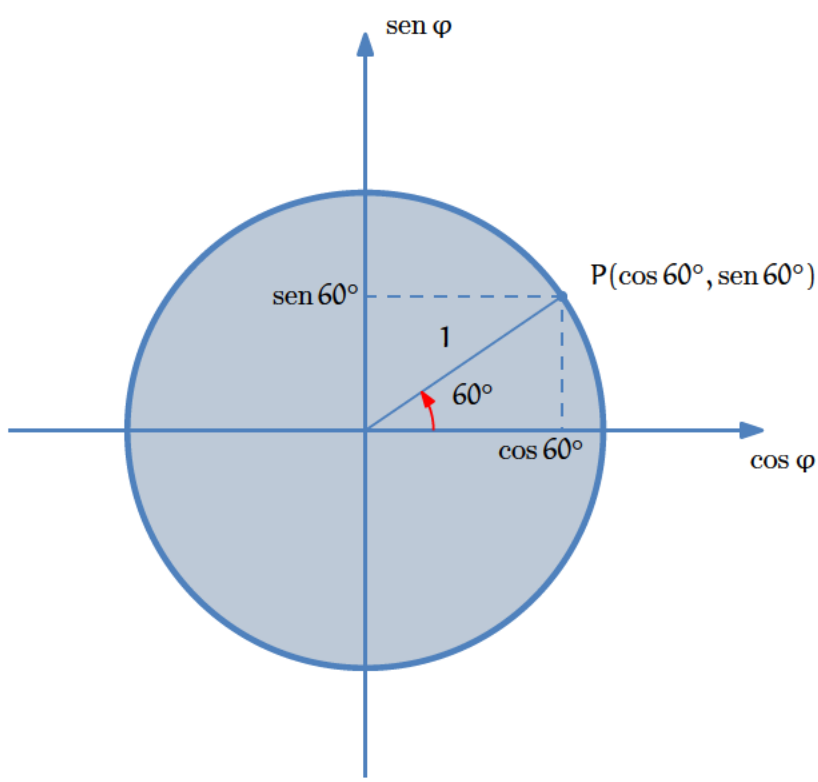
$$\operatorname{sen}\varphi \quad \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$
$$\operatorname{sen}\varphi \quad \frac{y}{1}$$
$$\operatorname{sen}\varphi \quad y.$$

O que descobrimos com isso? Em primeiro lugar, descobrimos o porquê de considerarmos o raio da circunferência trigonométrica igual a 1: para que os denominadores dos cálculos acima sumam, como aconteceu.

Em segundo lugar, você percebe que encontramos $x \quad \cos\varphi$ e $y \quad \operatorname{sen}\varphi$? então, podemos redesenhar nossa figura trocando todos os x que encontrarmos por $\cos\varphi$, assim como y. Veja:



Vou te explicar melhor as consequências disso. Vamos supor que φ 60°, por exemplo, como na figura abaixo:

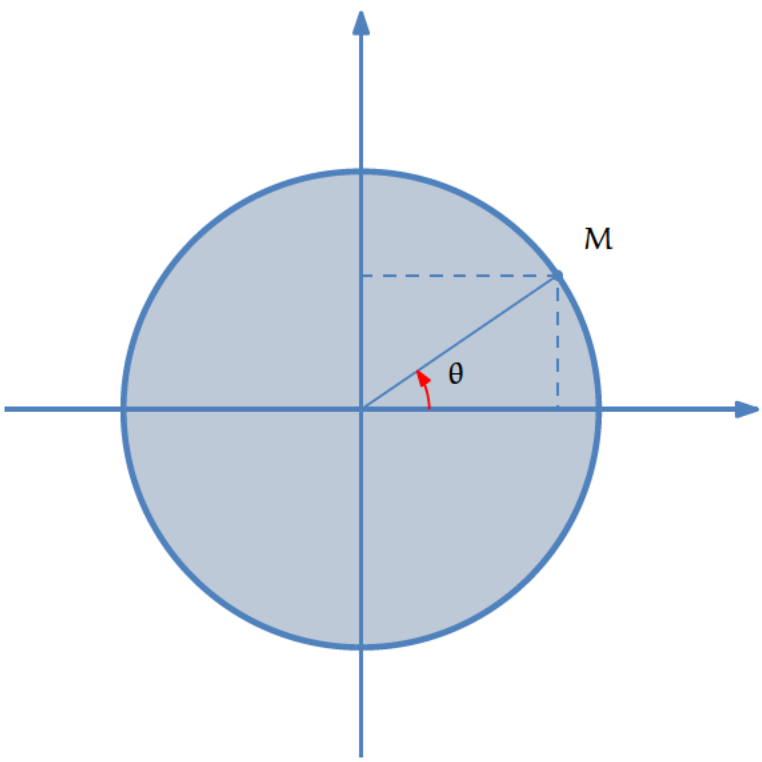


Vê que, apenas com a medida do ângulo dada, já podemos dizer as *coordenadas* de P? As coordenadas de P são: $(\cos 60^\circ, \text{sen}\, 60^\circ)$, ou seja, $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Isso significa que, dado um φ qualquer, basta localizarmos esse arco no ciclo trigonométrico, e analisarmos as suas coordenadas. A primeira coordenada será o cosseno e a segunda o seno. Veja um exercício sobre isso.

QUESTÃO 5

No ciclo trigonométrico a seguir, sabendo que $\text{sen}\,\theta \quad 0,8$ e $\cos\theta \quad 0,6$, calcule as coordenadas do ponto M.



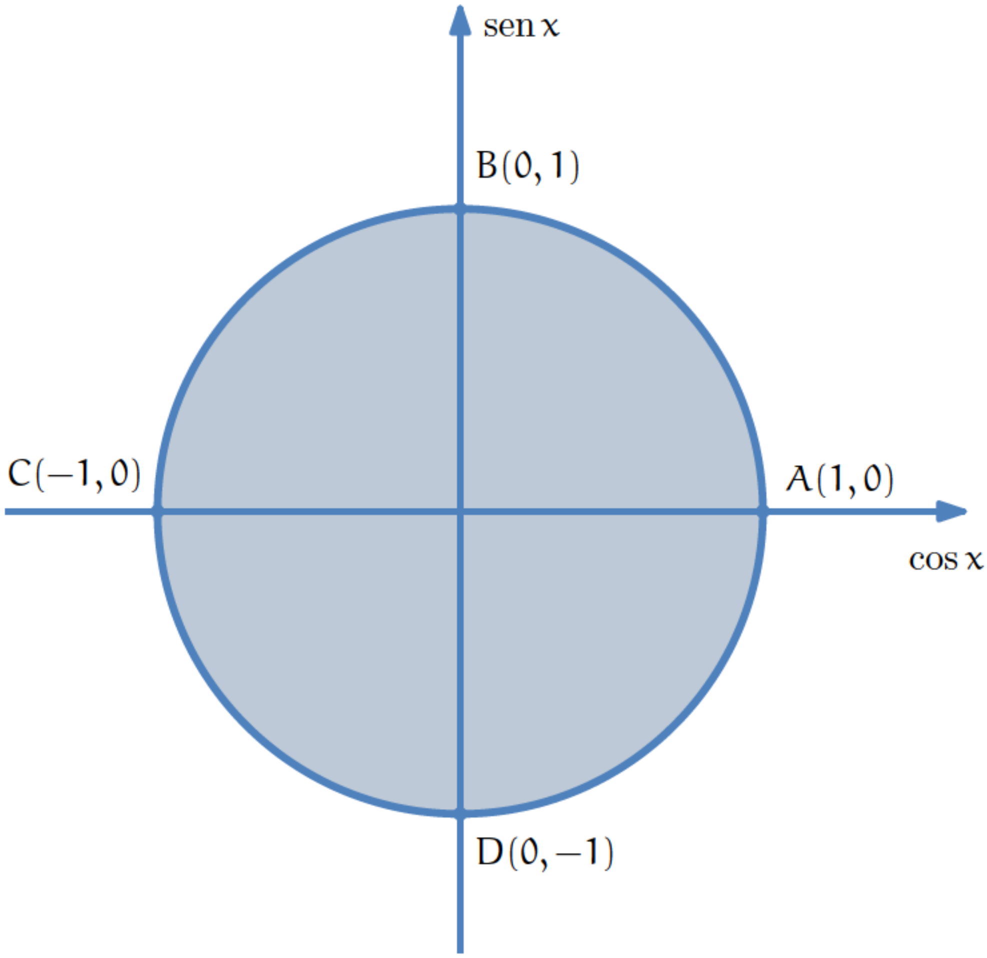
(a) $(0,6; 0,8)$
(b) $(0,8; 0,6)$
(c) $(-0,8; 0,6)$
(d) $(-0,6; 0,8)$

R: As coordenadas de um ponto no ciclo trigonométrico são o cosseno e o seno do arco que esse ponto determina (revise o capítulo anterior, se necessário, para aprender como um ponto pode vir a determinar um arco sobre o ciclo). Então, as coordenadas do ponto M são:

$$(\cos\theta, \text{sen}\,\theta) \quad (0,6; 0,8).$$

Gabarito: A

Quer ver um outro fato interessante? Dê uma olhada nas coordenadas da extremidades de cada quadrante (lembre-se de que o raio do ciclo trigonométrico é 1):



Agora, você se lembra dos arcos que esses pontos definem, na primeira volta? Vamos nos recordar: A representa um arco de $0°$ e $360°$; B representa um arco de $90°$; C representa um arco de $180°$ e D representa um arco de $270°$. Co isso, a gente pode calcular o seno e o cosseno de qualquer um desses quatro ângulos, olhando apenas para as coordenadas deles!

Suponha, por exemplo, que queiramos calcular o cosseno de $180°$. Bom, o arco de $180°$ é representado, na figura, pelo ponto C. então, como a primeira coordenada de C é -1, temos que $\cos 180° \quad -1$ (olhando para o mesmo ponto, percebemos que $\text{sen}\, 180° \quad 0$).

Podemos, então, a partir dessas observações, criar a seguinte tabela:

	0°	90°	180°	270°	360°
Seno	0	1	0	−1	0
Cosseno	1	0	−1	0	1

Podemos também perceber que o eixo horizontal (anteriormente eixo x) é o eixo que contém todos os valores de $\cos x$; dessa forma:

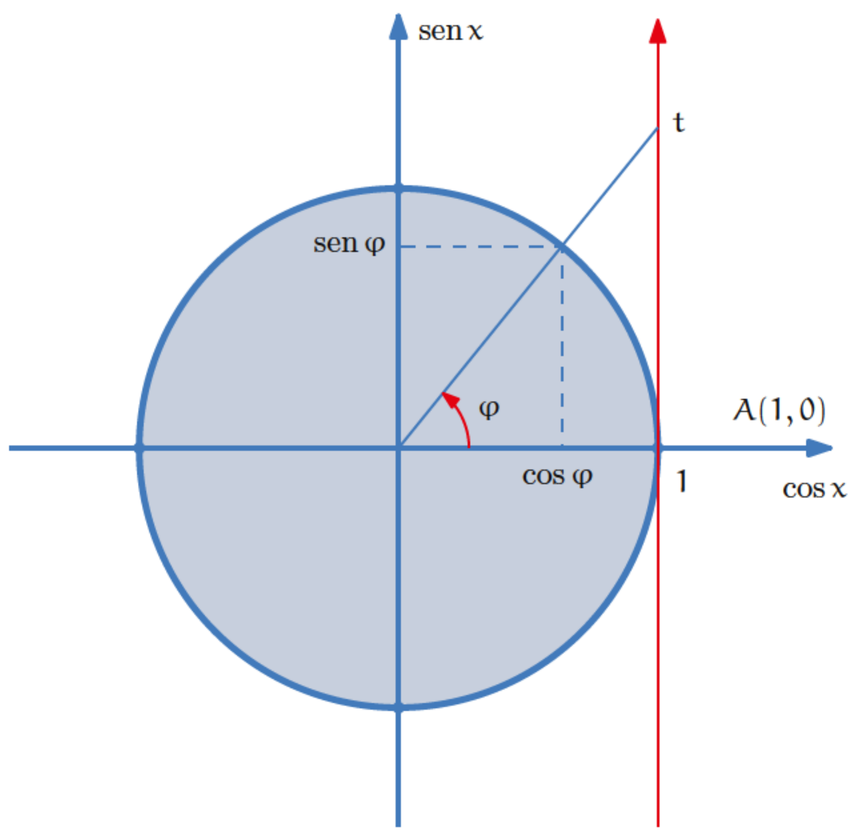
O eixo horizontal é o eixo dos cossenos.

Analogamente, o eixo vertical é aquele que contém todos os valores dos senos dos arcos, isto é, se $\operatorname{sen} x$; dessa forma:

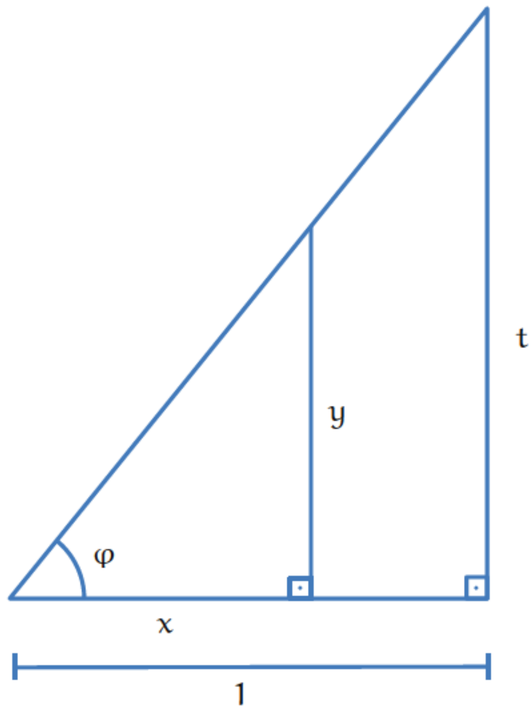
O eixo vertical é o eixo dos senos.

Tangente

Considere o ciclo trigonométrico a seguir, onde uma reta tangente foi traçada em relação ao ponto A:



Separemos, então, o triângulo formado:



Temos então:

$$\text{tg}\,\varphi \quad \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$
$$\text{tg}\,\varphi \quad \frac{y}{x}$$
$$\text{tg}\,\varphi \quad \frac{\text{sen}\,\varphi}{\cos\varphi}.$$

Aqui vemos novamente que (já vimos na aula de trigonometria em triângulos):

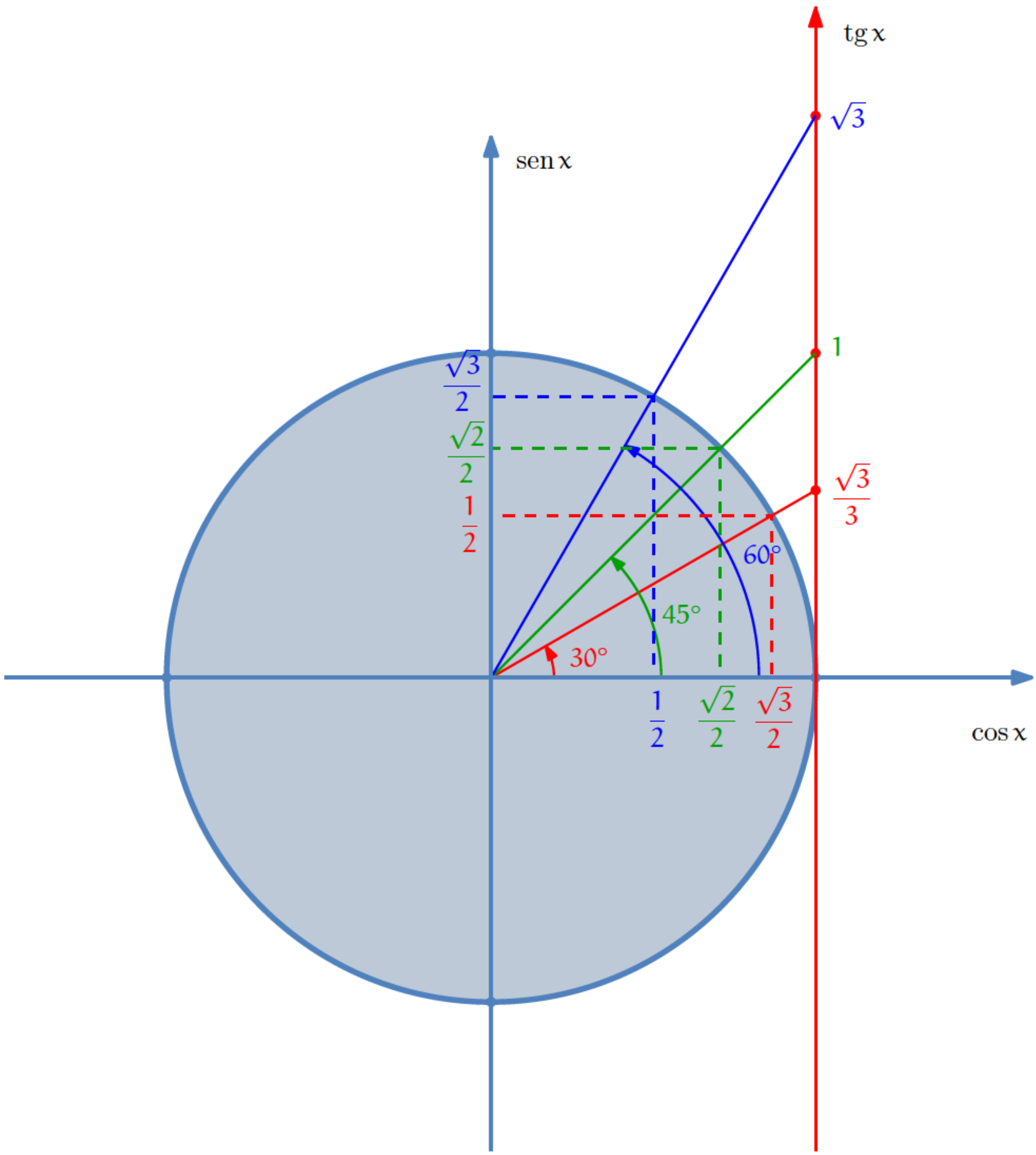
$$\boxed{\text{tg}\,\varphi \quad \frac{\text{sen}\,\varphi}{\cos\varphi}.}$$

Mas veja que, para o triângulo grande:

$$\text{tg}\,\varphi \quad \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$
$$\text{tg}\,\varphi \quad \frac{t}{1}$$
$$\text{tg}\,\varphi \quad t.$$

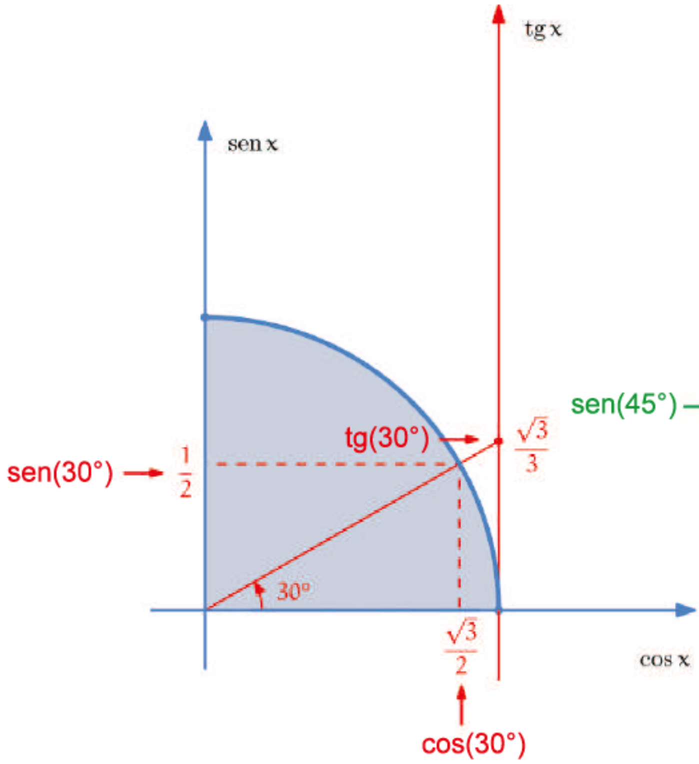
Daí, podemos chamar o eixo vermelho de ***eixo das tangentes***.

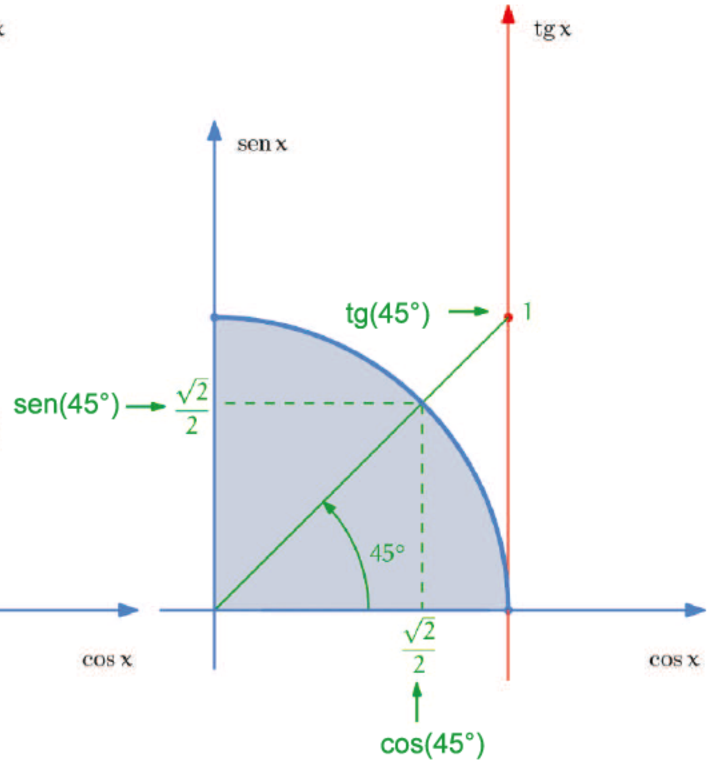
Agora, observe a figura abaixo (e não se preocupe com a sua complexidade, haverá uma boa explicação em seguida de que ela se trata):

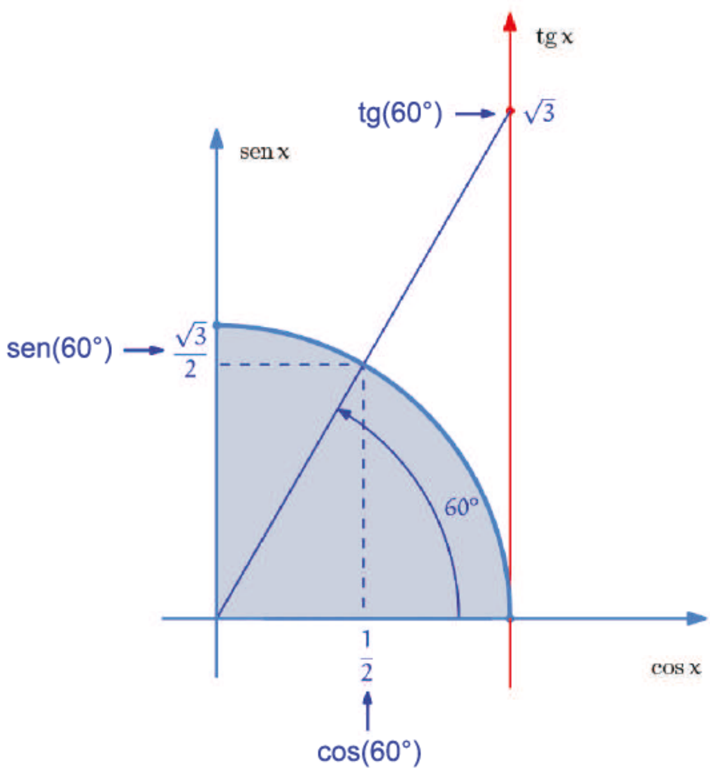


Fiz a figura acima para você ver todos os ângulos que você conhece, sob o ponto de vista dos eixos.

O que podemos ver são os ângulos conhecidos, os nosso famosos ângulos notáveis, representados no ciclo trigonométrico! Vou separar a figura que fiz em três, uma para cada ângulo (e desenharei apenas o primeiro quadrante delas. para não ocupar muito espaço):







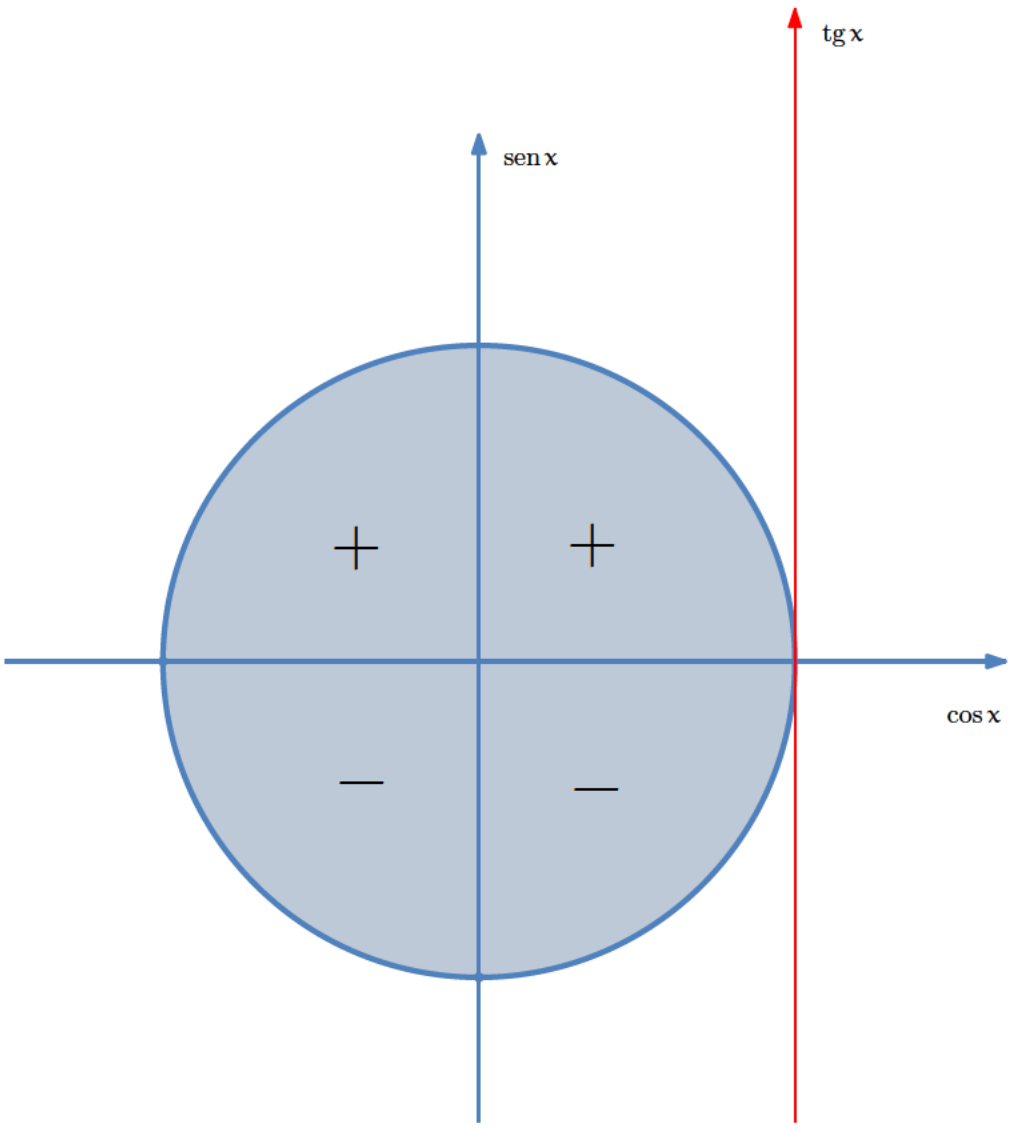
	Ângulos notáveis		
	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$

Sinais

Dentro do ciclo trigonométrico, diferentes arcos podem ter diferentes sinais. Vamos dar uma olhada rápida nisso.

Como o seno está representado no eixo vertical, ele é positivo nos quadrantes superiores e negativo nos quadrantes inferiores. O mesmo vale para a cossecante (estudada na aula de trigonometria em triângulos):

Regra de sinais para o seno e para a cossecante



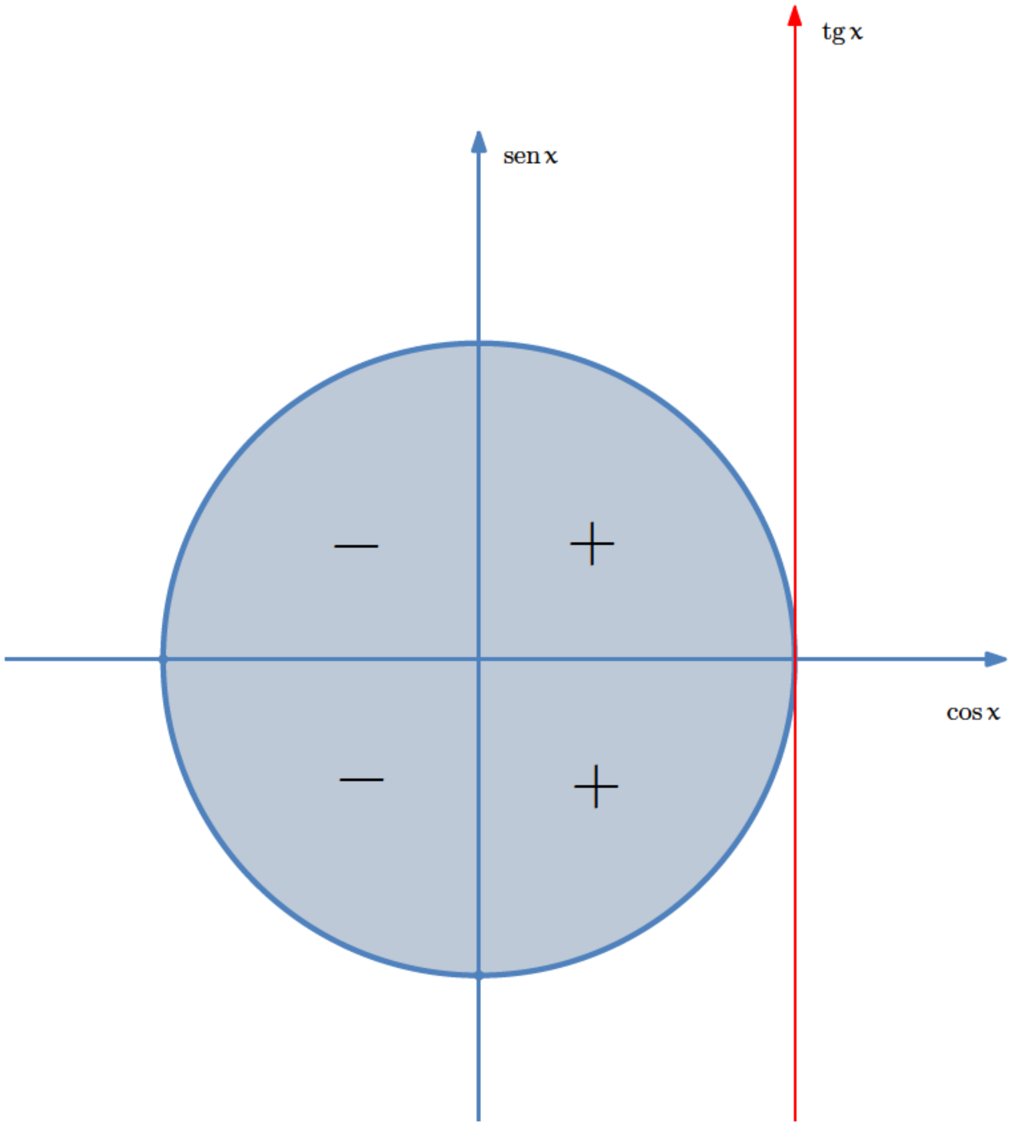
Então, se buscamos, por exemplo, calcular sen 240°, eis o processo.

Primeiro, você reduz o arco para o primeiro quadrante, a partir das regras que já aprendemos. em nosso caso, 240° é um ângulo do terceiro quadrante. Passando para o primeiro, ficamos com $240^\circ - 180^\circ \quad 60^\circ$.

Veja, porém, que o seno no terceiro quadrante é negativo. Então $\text{sen}\,240^\circ \quad -\text{sen}\,60^\circ \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Para o cosseno, vemos que ele se trata do eixo horizontal. então, os quadrantes à direita terão arcos com cossenos positivos, e os da esquerda com cossenos negativos. As mesmas regras valem para a secante. Veja:

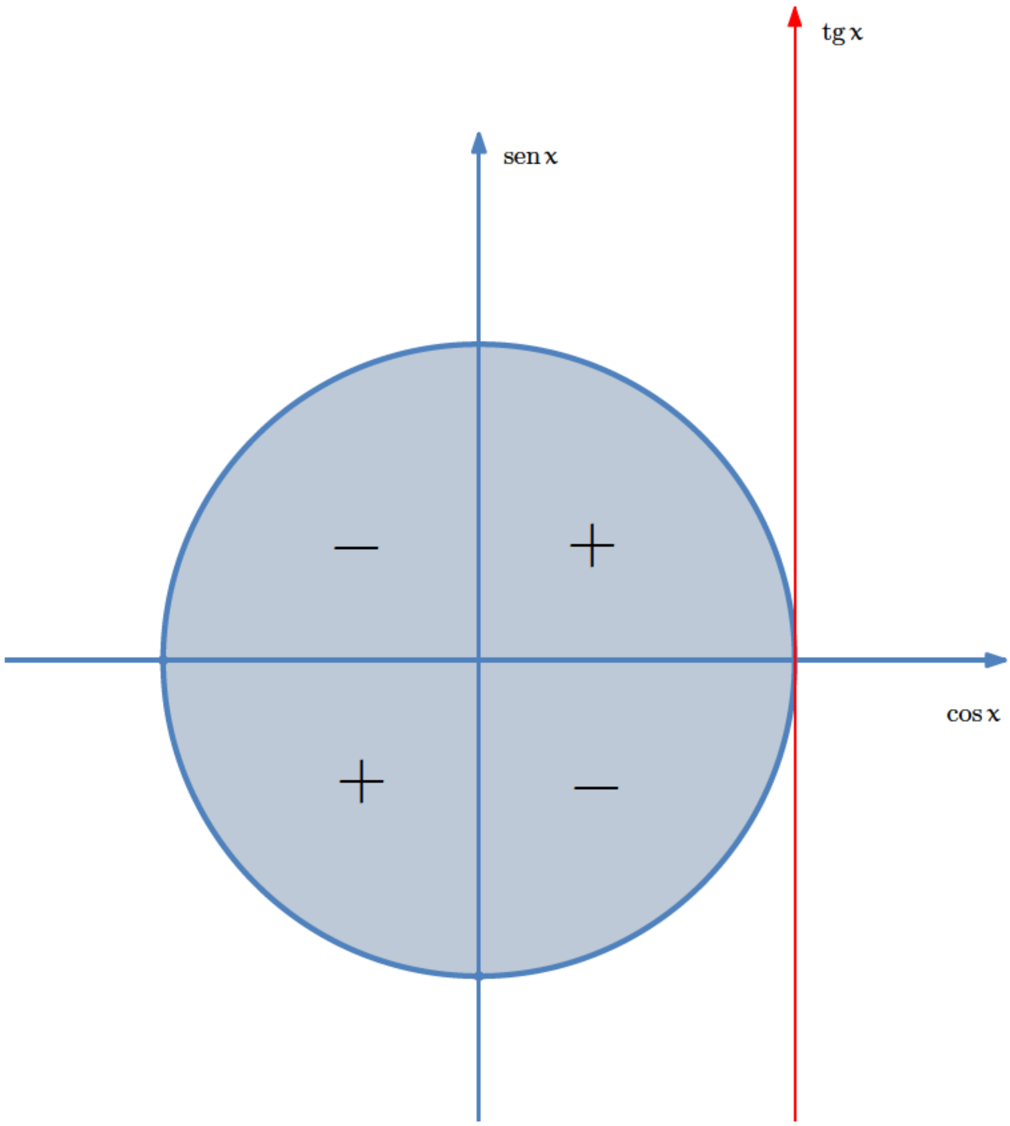
REGRA DE SINAIS PARA O COSSENO E PARA A SECANTE



Suponha, por exemplo, que queiramos calcular $\cos 120^\circ$. Como se trata de um arco do 2º quadrante, reduzindo ao primeiro, temos: $180^\circ - 120^\circ \quad 60^\circ$. Como o cosseno no 2º quadrante é negativo, temos: $\cos 120^\circ \quad -\cos 60^\circ \quad -\frac{1}{2}$.

Finalmente, para a tangente e para a cotangente, visto que $\text{tg}\,x \quad \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}$, teremos:

REGRA DE SINAIS PARA A TANGENTE E PARA A COTANGENTE



3.0– IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Nosso objetivo nesse capítulo será: *fórmulas e expressões*. Trigonometria é uma disciplina recheada de expressões. Devemos conhecer tantas quanto possíveis, para afastar possíveis dificuldades. Então, vamos lá.

3.1– FÓRMULAS DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE ARCOS

Senos

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(a+b) & \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a \\ \operatorname{sen}(a-b) & \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a \end{array}}$$

Cossenos

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos(a+b) & \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \\ \cos(a-b) & \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \end{array}}$$

Tangentes

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{tg}(a+b) & \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \\ \operatorname{tg}(a-b) & \dfrac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \end{array}}$$

Vejamos como podemos utilizar essas fórmulas.

QUESTÃO 6.

Calcule $\cos 105°$.

(a) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

(b) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(c) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(d) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

(e) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

R: Podemos verificar que: $105^\circ \quad 60^\circ + 45^\circ$. Dessa forma, podemos verificar que:

$$\begin{aligned} \cos 105^\circ \quad & \cos(60^\circ + 45^\circ) \\ & \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen} 45^\circ \\ & \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

Gabarito: A

Podemos ver então que, se puder parcelar um arco em outros que sejam conhecidos, podemos utilizar essas fórmulas para ajudar nossos cálculos. Veja alguns arcos em que essa mecânica é imprescindível para a resolução:

Arco em sua forma inicial	Arco parcelado	Seno	Cosseno	Tangente
15°	$45^\circ - 30^\circ$	$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
75°	$45^\circ + 30^\circ$	$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$
105°	$60^\circ + 45^\circ$	$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$	$-(2+\sqrt{3})$

3.2– Fórmulas de arcos duplos

Essas fórmulas são utilizadas para calcular senos, cossenos e tangentes do *dobro de um arco*. Vejamos.

Senos

Sabemos que $\operatorname{sen}(a+b) \quad \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$. Fazendo $b \quad a$, temos:

$$\operatorname{sen}(a+b) \quad \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+a) &\quad \operatorname{sen} a \cos a + \operatorname{sen} a \cos a \\ \operatorname{sen}(2a) &\quad 2 \operatorname{sen} a \cos a. \end{aligned}$$

Concluímos então a seguinte expressão:

$$\boxed{\operatorname{sen} 2a \quad 2 \operatorname{sen} a \cos a.}$$

Cossenos

Sabemos que $\cos(a+b) \quad \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \cos b$. Fazendo $b \quad a$, temos:

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &\quad \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \cos b \\ \cos(a+a) &\quad \cos a \cos a - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} a \\ \cos(2a) &\quad \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a. \end{aligned}$$

Concluímos então a seguinte expressão:

$$\boxed{\cos 2a \quad \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a.}$$

Muito cuidado para não se confundir! Na aula de trigonometria em triângulos, aprendemos que $\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a \quad 1$; essa expressão é quase a mesma, só que com o sinal trocado. Então, tome cuidado!

Tangente

Sabemos que $\operatorname{tg}(a+b) \quad \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$. Fazendo $b \quad a$, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(a+b) &\quad \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \\ \operatorname{tg}(a+a) &\quad \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} a} \\ \operatorname{tg}(2a) &\quad \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}. \end{aligned}$$

Concluímos então a seguinte expressão:

$$\operatorname{tg} 2a \quad \frac{2 \operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}.$$

Infelizmente eu tenho de te responder que sim, coruja. Essas expressões são muito importantes mesmo, você vai perceber nas resoluções de questões. Mas olha: você percebeu que essas fórmulas de arcos duplos vêm todas daquelas primeiras que vimos, as fórmulas de adição e subtração de arcos? Então você pode decorar apenas estas, e deduzir as de arcos duplos como fizemos acima! Não deixe de entender as demonstrações que estamos fazendo aqui, é muito importante que fiquem bem entendidas. Sua aprovação pode vir a depender disso!

QUESTÕES PARA MEMORIZAÇÃO

(ESSA-2012) QUESTÃO 7

A soma dos valores m que satisfazem as igualdades sen $x \quad \frac{m+1}{m}$ e cos $x \quad \frac{m+2}{m}$ é

(a) 5
(b) 6
(c) 4
(d) -4
(e) -6

(ESSA-2016) QUESTÃO 8

Sabendo que x pertence ao 4º quadrante e que cos $x \quad 0,8$, pode-se afirmar que o valor de sen $2x$ é igual a:

(a) $0,28$
(b) $-0,96$
(c) $-0,28$
(d) $0,96$
(e) 1

(EEAR-2000) QUESTÃO 9

O valor de $(\text{sen}\,112°30' + \cos 112°30')^2$ é:

(a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
(b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(c) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

(d) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

(EEAR-2001) QUESTÃO 10

A expressão $\frac{1+\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}$ é identicamente igual a:

(a) $\operatorname{cotg} x$
(b) $\sec x$
(c) $\operatorname{sen} x$
(d) $\operatorname{tg} x$

(EEAR-2001) QUESTÃO 11

O menor valor real e positivo de x tal que $4^{\operatorname{sen} x} \quad \frac{1}{2}$ é:

(a) $\frac{\pi}{6}$
(b) $\frac{5\pi}{6}$
(c) $\frac{7\pi}{6}$
(d) $\frac{11\pi}{6}$

(EEAR-2001) QUESTÃO 12

Se $\operatorname{tg} x \quad -3$, então $\operatorname{tg} 4x$ é igual a:

(a) $-\frac{3}{4}$
(b) $-\frac{24}{7}$
(c) $\frac{3}{4}$
(d) $\frac{24}{7}$

(EEAR-2001) QUESTÃO 13

Em $0 \le x \le 2\pi$, a expressão $y \quad \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{cotg} x}$ é tal, que:

(a) $y > 0$ somente se $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
(b) $y < 0$ se $x \ / \ k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

(c) $y > 0$ se $x \;/\; k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

(d) $y < 0$ somente se $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

(EEAR-2001) QUESTÃO 14

Numere a segunda coluna de acordo com a primeira, sendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$

(1)	$\text{sen}^2\, 2x$	( )	$2\cos^2 x$
(2)	$1 + \cos 2x$	( )	$2\,\text{sen}\, x \cos x$
(3)	$\text{sen}\, 2x$	( )	$1 - \cos^2 2x$
(4)	$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$	( )	$-\text{sen}\, x$
(5)	$\text{sen}(-x)$	( )	$\cos x$

Lendo-se a segunda coluna de cima para baixo, a seqüência correta é:

(a) 1, 3, 4, 5, 2

(b) 2, 3, 1, 5, 4

(c) 3, 1, 2, 4, 5

(d) 2, 3, 5, 1, 4

(EEAR-2002) QUESTÃO 15

Se θ é um ângulo tal que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e o dobro do seu seno é igual ao triplo do quadrado da sua tangente, então o valor do seu cosseno é

(a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(d) $\frac{2}{3}$

(EEAR-2002) QUESTÃO 16

A solução da inequação $\frac{1}{2} < \cos x < 1$, no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$, é dada por x real, tal que:

(a) $\left\{0 < x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

(b) $\left\{0 < x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leq x < 2\pi\right\}$
(c) $\left\{0 < x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leq x < 2\pi\right\}$
(d) $\left\{0 < x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

(EEAR-2002) QUESTÃO 17

O sen $\frac{122\pi}{9}$ é igual ao

(a) sen $\frac{5\pi}{9}$
(b) sen $\frac{4\pi}{9}$
(c) $-$ sen $\frac{5\pi}{9}$ e) $-$ sen $\frac{4\pi}{9}$

(EEAR-2002) QUESTÃO 18

Se a tg $x \quad \frac{3}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, então o valor de cos $x -$ sen x é igual a:

(a) $\frac{7}{5}$
(b) $-\frac{7}{5}$
(c) $-\frac{1}{5}$
(d) $\frac{1}{5}$

(EEAR-2002) QUESTÃO 19

Das afirmações:

I. cos $x \quad \sqrt{1 - \text{sen}\, x}$

II. sen $2x \quad 2\,\text{sen}\, x \cos x$

III. cos $2x \quad \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

Sendo x um arco no ciclo trigonométrico compreendido entre $\frac{\pi}{2}$ e π, conclui-se que:

(a) a única falsa é I
(b) a única falsa é II

(c) a única falsa é III

(d) as três são verdadeiras

(EEAR-2002) QUESTÃO 20

Resolvendo a equação sen $x \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$, onde $0 \leq x \leq 2\pi$, obtemos como conjunto solução:

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \quad 60° + k \cdot 360°$ ou $x \quad 120° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \quad 30° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \quad 60° + k \cdot 360°$ ou $x \quad 240° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}\}$

(d) $\{x \quad 30° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}\}$

(EEAR-2002) QUESTÃO 21

A inequação sen $\frac{x}{2} \geq \frac{1}{2}$, onde $0 \leq x \leq 2\pi$, é verdadeira se, e somente se,

(a) $\frac{\pi}{6} \leq x \leq 2\pi$

(b) $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$

(c) $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$

(d) $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

(EEAR-2002) QUESTÃO 22

Sejam a e b dois números reais tais que $0 < b < a < \frac{\pi}{2}$. Assinale a alternativa incorreta:

(a) $2^{\text{tg}\, b} < 2^{\text{tg}\, a}$

(b) cos $b <$ cos a

(c) sen $a >$ sen b

(d) $2^{\text{cotg}\, b} > 2^{\text{cotg}\, a}$

(EEAR-2003) QUESTÃO 23

O produto $(\text{tg}\, x) \cdot (\text{sen}\, 2x)$ é igual a

(a) $\text{sen}^2 x$

(b) $\cos^2 x$

(c) $2\,\text{sen}^2 x$

(d) $2\cos^2 x$

(EEAR-2003) QUESTÃO 24

A expressão trigonométrica $\cos^2 x - \text{sen}^2 x$ é igual a

(a) 1 para todo número real x.
(b) -1 para todo número real x.
(c) $2\cos^2 x - 1$, para todo número real x.
(d) $\frac{4}{3}$ para alguns números reais de x.

(EEAR-2003) QUESTÃO 25

Sendo $a - b \quad 30°$, calculando $y \quad (\text{sen}\, a + \cos b)^2 + (\text{sen}\, b - \cos a)^2$, obtemos

(a) 1
(b) $\frac{2}{3}$
(c) 3
(d) $2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

(EEAR-2003) QUESTÃO 26

A expressão $\frac{1 + \text{cotg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x}$ é idêntica à (ao)

(a) $\text{tg}^2 x$
(b) $\text{sen}^2 x$
(c) $\text{cotg}^2 x$
(d) $\cos^2 x$

(EEAR-2003) QUESTÃO 27

No ciclo trigonométrico, a igualdade $\text{sen}(\pi x) \quad 0$ é verdadeira se e somente se x é um número

(a) real qualquer.
(b) inteiro.
(c) imaginário.
(d) irracional.

(EEAR-2003) QUESTÃO 28

A solução geral da equação $\text{sen}^2 x - 2\,\text{sen}\,x\cos x + \cos^2 x \quad 0$, sendo $U \quad \mathbb{R}$, é

(a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \quad \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right\}$
(b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \quad \frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$
(c) $\left\{-\frac{\pi}{4}\right\}$
(d) $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

(EEAR-2003) QUESTÃO 29

Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então a expressão $\text{tg}\,\frac{x}{2} + \text{cotg}\,\frac{x}{2}$ é equivalente a:

(a) $2\,\text{sen}\,x$
(b) $2\sec x$
(c) $2\cos x$
(d) $2\text{cossec}\,x$

(EEAR-2003) QUESTÃO 30

Uma das raízes da equação $x^2 - (2\,\text{tg}\,a)x - 1 \quad 0$ é, sendo $a \ / -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

(a) $\text{tg}\,a + \text{cossec}\,a$
(b) $\text{tg}\,a - \cos a$
(c) $\text{tg}\,a + \text{sen}\,a$
(d) $\text{tg}\,a - \sec a$

(EEAR-2003) QUESTÃO 31

No ciclo trigonométrico:

I. o arco $\frac{11\pi}{4}$ rad pertence ao 2º quadrante.
II. o arco $1510°$ pertence ao 3º quadrante.
III. o arco $-\frac{13\pi}{3}$ rad pertence ao 4º quadrante.

A(s) assertiva(s) correta(s) é(são):

(a) II.

(b) I e II.

(c) I e III.

(d) I, II e III.

(EEAR-2004) QUESTÃO 32

Seja x um arco do 1º quadrante. Se cossec x $\frac{5}{2}$, então $\cos 2x$ é

(a) $\frac{4}{25}$.

(b) $\frac{33}{25}$.

(c) $\frac{21}{25}$.

(d) $\frac{17}{25}$.

(EEAR-2005) QUESTÃO 33

Sendo sen α $\frac{3}{5}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, o valor de $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ é

(a) 1

(b) 7

(c) $\frac{1}{7}$

(d) $\frac{7}{16}$

(EEAR-2005) QUESTÃO 34

Seja $\operatorname{sen} a \cdot \cos a \ / \ 0$. Simplificando-se a expressão $\frac{\operatorname{sen} a + \cos a}{\operatorname{sen} a} + \frac{\operatorname{sen} a - \cos a}{\cos a}$, obtém-se

(a) $\frac{1}{\operatorname{sen} 2a}$

(b) $\frac{1}{\cos 2a}$

(c) $\frac{2}{\operatorname{sen} 2a}$

(d) $\frac{2}{\cos 2a}$

(EEAR-2005) QUESTÃO 35

Existirá $x \in \mathbb{R}$ que satisfaça a igualdade sen x $2k - 5$ se, e somente se,

(a) $1 < k \leq 3.$

(b) $1 < k < 4.$

(c) $2 \leq k < 4.$

(d) $2 \leq k \leq 3.$

(EEAR-2005) QUESTÃO 36

Se tg α $\frac{1}{3}$, então tg 2α é

(a) $\frac{1}{3}$

(b) $\frac{2}{3}$

(c) $\frac{3}{8}$

(d) $\frac{3}{4}$

(EEAR-2006) QUESTÃO 37

Se $x \in$ 1ºQ e cos x $\frac{3}{8}$, então cos $\frac{x}{2}$

(a) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

(b) $\frac{\sqrt{5}}{8}$

(c) $\frac{\sqrt{11}}{4}$

(d) $\frac{\sqrt{11}}{8}$

(EEAR-2006) QUESTÃO 38

Sejam as medidas de arcos trigonométricos:

I- $\frac{17\pi}{8}$ rad e $\frac{41\pi}{8}$ rad;

II- $1490°$ e $-1030°$.

É correto afirmar que as medidas

(a) em I são de arcos côngruos.

(b) em I são de arcos suplementares.

(c) em II são de arcos côngruos.

(d) em II são de arcos complementares.

(EEAR-2006) QUESTÃO 39

O quadrante em que as funções seno, cosseno e tangente são, simultaneamente, crescentes é o

(a) 1º.
(b) 2º.
(c) 3º.
(d) 4º.

(EEAR-2006) QUESTÃO 40

O domínio da função $f(x) \quad 3 \cdot \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ é:

(a) $\left\{x \in \mathbb{R} | x \ / \ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
(b) $\left\{x \in \mathbb{R} | x \ / \ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
(c) $\left\{x \in \mathbb{R} | x \ / \ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
(d) $\left\{x \in \mathbb{R} | x \ / \ \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

(EEAR-2006) QUESTÃO 41

A solução real da inequação $\frac{1}{2} < \text{sen}\, x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$, é:

(a) $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]$
(b) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]$
(c) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right[$
(d) $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right[$

(EEAR-2006) QUESTÃO 42

Se $2 \cdot \text{sen}\, x + 5 \cdot \cos x \quad 0$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então $\cos x$

(a) $-\frac{2\sqrt{29}}{29}$

(b) $\frac{2\sqrt{29}}{29}$
(c) $-\frac{5\sqrt{29}}{29}$
(d) $\frac{5\sqrt{29}}{29}$

(EEAR-2007) QUESTÃO 43

Seja x um arco do 1º quadrante. Se $\cos x \quad \frac{1}{8}$, então $\text{tg}\,\frac{x}{2}$

(a) $\frac{\sqrt{7}}{3}$
(b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
(c) $\frac{\sqrt{5}}{4}$
(d) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

(EEAR-2007) QUESTÃO 44

Os valores de x, sendo $0 \leq x \leq \pi$, para os quais obtêm-se $2\cos x - 1 > 0$, são tais que

(a) $0 < x < \frac{5\pi}{6}$
(b) $\frac{\pi}{3} < x \leq \pi$
(c) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$
(d) $0 \leq x < \frac{\pi}{3}$

(EEAR-2007) QUESTÃO 45

Seja x um arco do 1º quadrante. Se $\cos x \quad \frac{1}{8}$, então $\text{tg}\,\frac{x}{2}$

(a) $\frac{\sqrt{7}}{3}$
(b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
(c) $\frac{\sqrt{5}}{4}$
(d) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

(EEAR-2007) QUESTÃO 46

O conjunto imagem da função $f(x) \quad 3 + 5\,\text{sen}\,x$ é

(a) $[-2, 8]$.
(b) $[3, 7]$.
(c) $[-1, 5]$.
(d) $[0, 4]$.

(EEAR-2007) QUESTÃO 47

Dois ângulos medem $\frac{2\pi}{9}$ rad e $\frac{5\pi}{18}$ rad. O menor deles, em graus, mede

(a) 30.
(b) 40.
(c) 50.
(d) 60.

(EEAR-2007) QUESTÃO 48

Considere a soma S:

$$\begin{vmatrix} \cos 1 & \cos 2 \\ \cos 2 & \cos 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{sen}\,1 & \text{sen}\,2 \\ \text{sen}\,2 & \text{sen}\,1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cos 3 & \cos 4 \\ \cos 4 & \cos 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{sen}\,3 & \text{sen}\,4 \\ \text{sen}\,4 & \text{sen}\,3 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} \cos 9 & \cos 10 \\ \cos 10 & \cos 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{sen}\,9 & \text{sen}\,10 \\ \text{sen}\,10 & \text{sen}\,9 \end{vmatrix}$$

O valor de $\log S$ é

(a) zero.
(b) positivo.
(c) negativo.
(d) inexistente.

(EEAR-2007) QUESTÃO 49

Se $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, então a maior raiz positiva da equação $(\text{tg}\,x - 1)(4\,\text{sen}^2 x - 3) \quad 0$ é

(a) $\frac{4\pi}{3}$
(b) $\frac{5\pi}{4}$
(c) $\frac{7\pi}{6}$

(d) $\frac{7\pi}{4}$

(EEAR-2007) QUESTÃO 50

Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, e $y \quad \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \text{cossec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$, então y é igual a

(a) tg x.
(b) cos x.
(c) sec x.
(d) sen x.

(EEAR-2007) QUESTÃO 51

Se $0 < x < \frac{\pi}{4}$ e tg x + cotg $x \quad 3$, então sen $2x$ é igual a:

(a) $\frac{1}{2}$
(b) $\frac{1}{3}$
(c) $\frac{2}{3}$
(d) $\frac{2}{5}$

(EEAR-2008) QUESTÃO 52

O valor da expressão $\frac{\text{tg}\, x}{\text{cossec}\, x - 1}$, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e sen $x \quad \frac{1}{3}$, é:

(a) $\frac{1}{4}$
(b) $\frac{1}{2}$
(c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
(d) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

(EEAR-2008) QUESTÃO 53

Sendo $0 \leq x < 2\pi$, o conjunto solução da equação sen $3x \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$ é

(a) $\left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}\right\}$
(b) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{10}\right\}$
(c) $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}\right\}$
(d) $\left\{\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{8}\right\}$

(EEAR-2008) QUESTÃO 54

O valor da expressão $\dfrac{\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{6} - \text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{3}}{\cos\frac{\pi}{2} + \text{sen}\,\frac{\pi}{3}}$ é

(a) $1-\sqrt{2}$
(b) $1+\sqrt{2}$
(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(EEAR-2008) QUESTÃO 55

Comparando-se $\text{tg}\,20°$, $\text{tg}\,110°$ e $\text{tg}\,200°$, obtém-se

(a) $\text{tg}\,20° \quad \text{tg}\,200° > \text{tg}\,110°$.
(b) $\text{tg}\,20° \quad \text{tg}\,110° < \text{tg}\,200°$.
(c) $\text{tg}\,20° < \text{tg}\,110° < \text{tg}\,200°$.
(d) $\text{tg}\,200° < \text{tg}\,20° < \text{tg}\,110°$.

(EEAR-2008) QUESTÃO 56

Os valores de m que verificam simultaneamente as igualdades $\text{sen}\,x \quad m$ e $\cos x \quad 1-m$ pertencem ao intervalo

(a) $[-1, 0[$.
(b) $]0, 1[$.
(c) $]1, 3]$.
(d) $[0, 2[$.

(EEAR-2008) QUESTÃO 57

Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e sen $\alpha \quad \frac{2}{3}$, então sen 2α é igual a:

(a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
(b) $\frac{\sqrt{5}}{3}$
(c) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$
(d) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

(EEAR-2009) QUESTÃO 58

Se x e y são arcos do 1º quadrante, sen $x \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$ e cos $y \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$, então o valor de $\cos(x + y)$ é igual a

(a) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$
(b) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}$
(c) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
(d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$

(EEAR-2009) QUESTÃO 59

Sejam a e b arcos do primeiro quadrante. Se $a + b \quad 90°$, então $\cos(a - b)$, em função de b, é igual a

(a) sen $2b$
(b) cos $2b$
(c) $\frac{\text{sen } 2b}{2}$
(d) $\frac{\cos 2b}{2}$

(EEAR-2009) QUESTÃO 60

Considere as igualdades:

I- tg $10° \quad$ tg$(-10°)$

II- $\text{tg}\,770^\circ \quad -\text{tg}\,50^\circ$

III- $sen 250^\circ \quad \text{sen}\,20^\circ$

IV- $\text{sen}\,460^\circ \quad \text{sen}\,100^\circ$

O número de igualdades verdadeiras é

(a) 1.
(b) 2.
(c) 3.
(d) 4.

(EEAR-2009) QUESTÃO 61

São negativas, no 4º quadrante, as funções

(a) seno, cosseno e tangente.
(b) seno, cosseno e cotangente.
(c) cosseno, tangente e secante.
(d) seno, tangente e cossecante.

(EEAR-2010) QUESTÃO 62

Para $x \cdot y \;/\; 0$, a expressão

$$\frac{y^2 \cos 180^\circ - xy \,\text{sen}\, 270^\circ + y^2 \,\text{sen}\, 90^\circ}{x^2 \cos 0^\circ}$$

equivale a:

(a) $\frac{y}{x}$
(b) $\frac{1}{x}$
(c) $\frac{y}{x^2}$
(d) $\frac{y^2}{x^2}$

(EEAR-2010) QUESTÃO 63

O valor de $\cos 15^\circ$ é

(a) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

(b) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

(c) $2-\sqrt{2}$

(d) $2+\sqrt{3}$

(EEAR-2010) QUESTÃO 64

Seja x 150°. Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças, a seguir assinale a alternativa que apresenta o número de sentenças verdadeiras

I) $\cos x \quad \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

II) $\operatorname{sen} 2x < 0$

III) $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

(EEAR-2010) QUESTÃO 65

Se $\operatorname{sen} x + \cos 2x \quad 1$, então um dos valores de $\operatorname{sen} x$ é

(a) 1

(b) $\dfrac{1}{2}$

(c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(d) $\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$

(EEAR-2010) QUESTÃO 66

Simplificando-se a expressão $\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{cossec} x}$, obtém-se

(a) $\operatorname{cossec} x$.

(b) $\cos x$.

(c) $\sec x$.

(d) $\operatorname{tg} x$.

(EEAR-2011) QUESTÃO 67

Se $\cos x \quad \frac{2}{3}$ e $\operatorname{sen} x > 0$, então $\operatorname{sen} 2x$ é

(a) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$
(b) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$
(c) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$
(d) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

(EEAR-2011) QUESTÃO 68

Se $A \quad \operatorname{tg} 120°$ e $B \quad \operatorname{tg} 240°$, então

(a) $B \quad A$.
(b) $B \quad -A$.
(c) $B \quad 2A$.
(d) $B \quad -2A$.

(EEAR-2011) QUESTÃO 69

Se $\operatorname{sen} y \quad m$ e $\cos y \quad n$, o valor de $\frac{\sec y}{\operatorname{cossec} y}$ é

(a) m.
(b) n^2.
(c) mn.
(d) $\frac{m}{n}$.

(EEAR-2011) QUESTÃO 70

Se a e b são arcos do 2º quadrante tais que $\operatorname{sen} a \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos b \quad -\frac{1}{2}$, então $\operatorname{sen}(a+b)$ é

(a) $\frac{\sqrt{2}(-\sqrt{3}+\sqrt{2})}{4}$
(b) $\frac{-\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$

(c) $\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}{4}$

(d) $\dfrac{3(3-\sqrt{2})}{4}$

(EEAR-2012) QUESTÃO 71

Um arco de circunferência de $\dfrac{5\pi}{6}$ rad pode ser dividido em ____ arcos de $30°$.

(a) 6

(b) 5

(c) 4

(d) 3

(EEAR-2012) QUESTÃO 72

Sejam as sentenças:

I- período $p \quad \pi$;

II- domínio $D \quad \mathbb{R}$;

III- conjunto imagem $\mathrm{Im} \quad [-1, 1]$.

Em relação à função tangente, é (são) verdadeira(s) a(s) sentença(s)

(a) I.

(b) III.

(c) I e II.

(d) II e III.

(EEAR-2013) QUESTÃO 73

Sendo tg $x \quad \dfrac{1}{t}$ e sen $x \quad u$, uma maneira de expressar o valor de cos x é

(a) t

(b) $\dfrac{u}{t}$

(c) $u \cdot t$

(d) $u + t$

(EEAR-2013) QUESTÃO 74

Sejam $\operatorname{sen} x \quad \frac{3}{5}$, $\cos x \quad \frac{4}{5}$ e $\operatorname{sen} 2x \quad \frac{a}{b}$. Se $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível, então $b - a$ é igual a

(a) 1.
(b) 2.
(c) 3.
(d) 4.

(EEAR-2013) QUESTÃO 75

Ao expressar $\frac{16\pi}{9}$ rad em graus, obtém-se

(a) $170°$
(b) $220°$
(c) $280°$
(d) $320°$

(EEAR-2013) QUESTÃO 76

Se x é um arco do 1º quadrante, com $\operatorname{sen} x \quad a$ e $\cos x \quad b$, então $y \quad \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\operatorname{tg} x \cdot \cos(\pi + x)}$ é:

(a) a
(b) b
(c) $-a$
(d) $-b$

(EEAR-2013) QUESTÃO 77

Seja x um arco do 3º quadrante tal que $\operatorname{sen} x \quad -\frac{1}{3}$. Então o valor de $\cos x$ é

(a) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$
(b) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$
(c) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
(d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

(EEAR-2013) QUESTÃO 78

Se α é um ângulo do 1º quadrante, tal que sen $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$, a única alternativa que apresenta um possível valor para α é

(a) $15°$
(b) $30°$
(c) $50°$
(d) $65°$

(EEAR-2014) QUESTÃO 79

Se x é um arco do terceiro quadrante tal que tg $x \quad \frac{2}{3}$, o valor de sen x é

(a) $\frac{\sqrt{13}}{13}$
(b) $\frac{-\sqrt{13}}{13}$
(c) $\frac{-2\sqrt{13}}{13}$
(d) $\frac{-3\sqrt{13}}{13}$

(EEAR-2014) QUESTÃO 80

Se sen $x \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $0 \leq x < 2\pi$, então a soma dos valores possíveis para x é

(a) $\frac{\pi}{2}$
(b) π
(c) $\frac{3\pi}{2}$
(d) 2π

(EEAR-2014) QUESTÃO 81

Dados sen $a \quad x$, cos $a \quad y$, sen $b \quad z$ e cos $b \quad w$, então sen$(a+b)$ é igual a

(a) $xw + yz$.
(b) $xz + yw$.
(c) $xy - wz$.
(d) $xw - yz$.

(EEAR-2015) QUESTÃO 82

O valor de $\frac{7\pi}{30}$ rad em graus é:

(a) 36
(b) 38
(c) 42
(d) 46

(EEAR-2015) QUESTÃO 83

Seja $A \quad \frac{\text{sen}\, x \cdot \sec x}{\text{tg}\, x}$, com tg $x \ / \ 0$. Nessas condições, o valor de A é

(a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(b) $\sqrt{2}$
(c) 2
(d) 1

(EEAR-2015) QUESTÃO 84

Ao simplificar a expressão $(1 + \cos x)(1 - \cos x)$, tem-se

(a) 2.
(b) sen $2x$.
(c) cos $2x$.
(d) $2 + \cos 2x$.

(EEAR-2015) QUESTÃO 85

Se sen $\alpha \cdot \cos\beta \quad \frac{4}{13}$ e sen $\beta \cdot \cos\alpha \quad \frac{36}{65}$, então sen$(\alpha + \beta)$ é igual a:

(a) $\frac{56}{65}$
(b) $\frac{40}{65}$
(c) $\frac{13}{36}$
(d) $\frac{13}{56}$

(EEAR-2016) QUESTÃO 86

O valor correspondente ao cos $15°$ é

(a) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
(b) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$
(c) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$
(d) 1

(EEAR-2016) QUESTÃO 87

No ciclo trigonométrico os valores de x, tais que $\cos x \leq \frac{1}{2}$, são:

(a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{5\pi}{3}\right\}$
(b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{3}\right\}$
(c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{6} \leq x < \dfrac{11\pi}{6}\right\}$
(d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{6} \text{ ou } \dfrac{7\pi}{6} \leq x \leq 2\pi\right\}$

(EEAR-2016) QUESTÃO 88

O valor de $\cos 735°$ é:

(a) $\dfrac{1}{4}$
(b) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$
(c) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
(d) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}$

(EEAR-2017) QUESTÃO 89

Ao somar as medidas angulares $120°$ e $\dfrac{3\pi}{2}$ rad, obtém-se a medida de um arco pertencente ao ____ quadrante.

(a) 1º

(b) 2º

(c) 3º

(d) 4º

(EEAR-2017) QUESTÃO 90

No intervalo $[0, \pi]$, a soma das raízes da equação $3\cos^2 x - 7\,\text{sen}^2 x + 2 \quad 0$ é igual a

(a) 4π

(b) 3π

(c) 2π

(d) π

(EEAR-2017) QUESTÃO 91

Seja $M \quad \dfrac{\text{cossec}\, x + \sec x}{\text{cotg}\, x + 1}$, com $x \;/\; \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Utilizando-se as identidades trigonométricas, pode-se considerar M igual a

(a) $\text{sen}\, x$

(b) $\cos x$

(c) $\sec x$

(d) $\text{cossec}\, x$

(EEAR-2018) QUESTÃO 92

O valor de $\text{sen}(a + b) - \text{sen}(a - b)$ é igual a

(a) $\text{sen}\, 2a$

(b) $\cos 2a$

(c) $2\,\text{sen}\, b \cdot \cos a$

(d) $2\,\text{sen}\, a \cdot \cos b$

(EEAR-2018) QUESTÃO 93

As funções $f(x) \quad \text{sen}\, x$ e $g(x) \quad \cos x$, no segundo quadrante, são, respectivamente,

(a) decrescente e decrescente

(b) decrescente e crescente

(c) crescente e decrescente

(d) crescente e crescente

(EEAR-2018) QUESTÃO 94

O valor de sen $1270°$ é igual a

(a) $-\cos 10°$

(b) $-\text{sen}\, 30°$

(c) $-\text{sen}\, 10°$

(d) $-\cos 30°$

(EEAR-2019) QUESTÃO 95

Gabriel verificou que a medida de um ângulo é $\frac{3\pi}{10}$ rad. Essa medida é igual a

(a) $48°$

(b) $54°$

(c) $66°$

(d) $72°$

(EEAR-2019) QUESTÃO 96

Se $0° \leq x \leq 90°$ e se $\text{sen}\, 4x \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}$, um dos possíveis valores de x é

(a) $30°$

(b) $45°$

(c) $75°$

(d) $85°$

(EEAR-2019) QUESTÃO 97

Simplificando a expressão $\text{sen}(2\pi - x) + \text{sen}(3\pi + x)$, obtém-se

(a) $\text{sen}\, x$

(b) $-\text{sen}\, x$

(c) $2\,\text{sen}\, x$

(d) $-2\,\text{sen}\, x$

(EEAR-2019) QUESTÃO 98

Se $\cos\alpha \quad \frac{-\sqrt{3}}{2}$ e α é um arco cuja extremidade pertence ao 2º quadrante, então α pode ser ____ $\frac{\pi}{6}$ rad.

(a) 7
(b) 17
(c) 27
(d) 37

3.3– GABARITO

Q. 1: D	**Q. 21**: B	**Q. 41**: D	**Q. 61**: D	**Q. 81**: A
Q. 2: A	**Q. 22**: B	**Q. 42**: B	**Q. 62**: A	**Q. 82**: C
Q. 3: B	**Q. 23**: C	**Q. 43**: A	**Q. 63**: B	**Q. 83**: D
Q. 4: C	**Q. 24**: C	**Q. 44**: D	**Q. 64**: C	**Q. 84**: B
Q. 5: A	**Q. 25**: C	**Q. 45**: A	**Q. 65**: B	**Q. 85**: A
Q. 6: A	**Q. 26**: C	**Q. 46**: A	**Q. 66**: C	**Q. 86**: A
Q. 7: E	**Q. 27**: B	**Q. 47**: B	**Q. 67**: A	**Q. 87**: B
Q. 8: B	**Q. 28**: B	**Q. 48**: D	**Q. 68**: B	**Q. 88**: C
Q. 9: C	**Q. 29**: D	**Q. 49**: A	**Q. 69**: D	**Q. 89**: A
Q. 10: A	**Q. 30**: D	**Q. 50**: C	**Q. 70**: B	**Q. 90**: D
Q. 11: C	**Q. 31**: C	**Q. 51**: C	**Q. 71**: B	**Q. 91**: C
Q. 12: D	**Q. 32**: D	**Q. 52**: D	**Q. 72**: A	**Q. 92**: C
Q. 13: C	**Q. 33**: B	**Q. 53**: C	**Q. 73**: C	**Q. 93**: A
Q. 14: B	**Q. 34**: C	**Q. 54**: A	**Q. 74**: A	**Q. 94**: C
Q. 15: B	**Q. 35**: D	**Q. 55**: A	**Q. 75**: D	**Q. 95**: B
Q. 16: A	**Q. 36**: D	**Q. 56**: D	**Q. 76**: D	**Q. 96**: C
Q. 17: D	**Q. 37**: C	**Q. 57**: C	**Q. 77**: A	**Q. 97**: D
Q. 18: C	**Q. 38**: C	**Q. 58**: C	**Q. 78**: D	**Q. 98**: B
Q. 19: A	**Q. 39**: D	**Q. 59**: A	**Q. 79**: C	
Q. 20: A	**Q. 40**: B	**Q. 60**: A	**Q. 80**: B	

3.3– Índice Remissivo