Máximo Divisor Comum (M.D.C)

Definição:

$$\begin{cases} mdc(18, 30) = 6 \\ D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \\ D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} \end{cases}$$

Divisores comuns de 18 e 30 $\Rightarrow$ 1, 2, 3 e 6

Regra

Os divisores comuns de dois números são os divisores do MDC deles

1º MODO:

"Fatorando junto"

		MDC
18, 30	$\boxed{2}$	$2 \times 3 = 6$
9, 15	$\boxed{3}$	
3, 5	3	
1, 5	5	
1, 1		

$$\underbrace{2 \cdot 3^2 \cdot 5}_{\text{MMC}} = 90$$

2º MODO:

Fatorar os caras e pegar apenas os fatores comuns com seus menores expoentes

$$\begin{cases} 100 = 2^2 \cdot 5^2 \\ 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \end{cases}$$

MMC: $2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 = 600$

MDC: $2^2 \times 5^1 = 20$

$\text{mdc}(100, 120) = 20$

→ Quais os divisores comuns de 100 e 120?

$D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

3º MODO:

Divisões sucessivas

$\text{mdc}(60, 36) = 12$

quociente

	1	1	2
60	36	24	12
24	12	0	

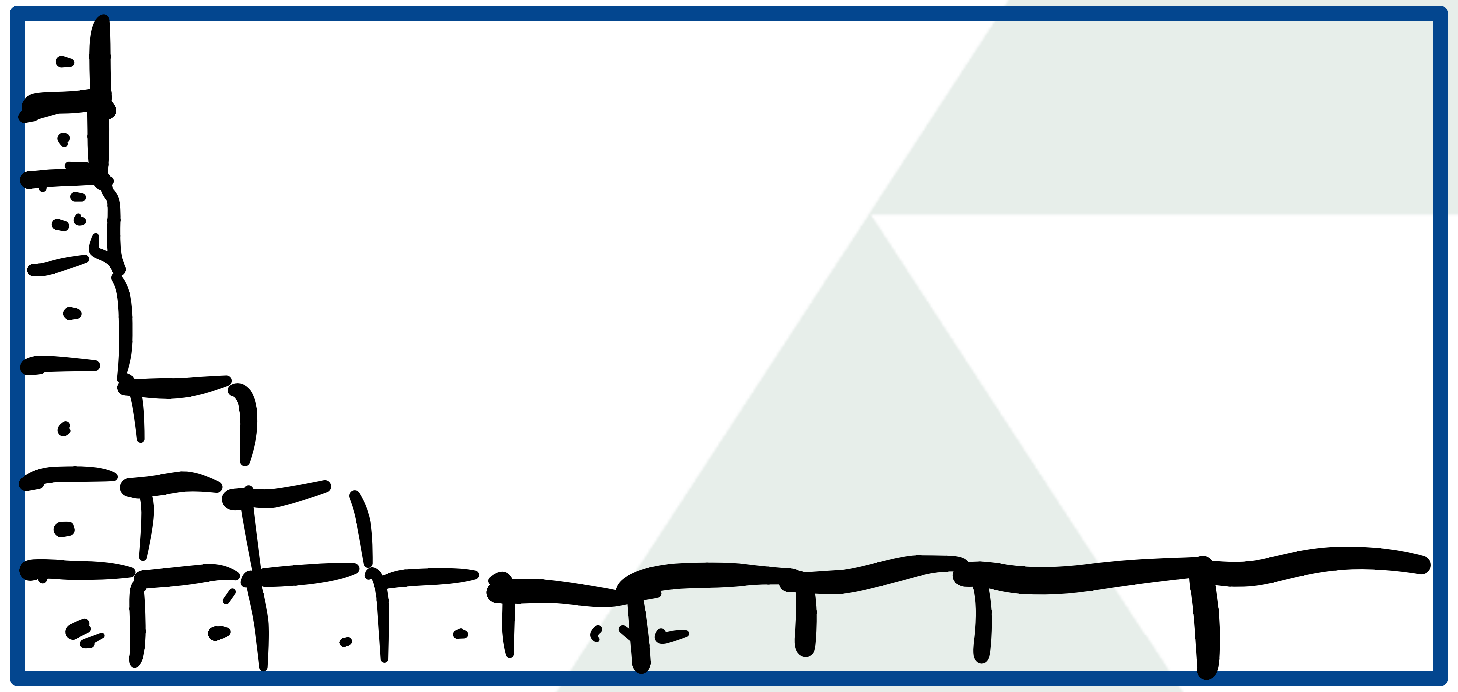
resto

Exemplo 1

Pretende-se preencher um retângulo de 56cm por 72cm com quadrados iguais, cujo lado é um nº inteiro e sem sobrar espaços.

1) De quantas maneiras pode-se executar essa tarefa?

D(8) = 1, 2, 4 e 8 → 4 maneiras



56cm

8

8

72 cm

2) Qual o menor nº de quadrados que pode-se usar?

Lado = 8

Grande

$$\frac{\cancel{72}^{\,9} \times \cancel{56}^{\,7}}{\cancel{8} \times \cancel{8}} = 63$$

Lado do quadrado: tem que ser divisor de 72 e 56

mdc (72, 56) = 8

Exemplo 2

Dividindo-se os números 62, 87 e 137 pelo mesmo nº natural X obtém-se restos 2, 3 e 5, respectivamente.

a) Qual o maior valor de X? $\Rightarrow$ mdc $(60, 84, 132) = 12$

b) Qual a soma dos possíveis valores de X? $\quad 6 + 12 = \underline{18}$

$$
\begin{array}{r|l} 62 & x \\ \hline 2 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} 87 & x \\ \hline 3 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} 137 & x \\ \hline 5 & \end{array}
$$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$$
\begin{array}{r|l} 60 & x \\ \hline 0 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} 84 & x \\ \hline 0 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} 132 & x \\ \hline 0 & \end{array}
$$

$\Rightarrow$ X é divisor comum de 60, 84 e 132.

Possíveis X $\Rightarrow$ $D(12) = \{\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \underline{6}, \underline{12}\}$

Soma = 18

MESTRES DA MATEMÁTICA

$$\begin{cases} 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \\ 132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \end{cases}$$

$$\text{mdc} = 2^2 \times 3^1 = 12$$

Exemplo 3

Nas divisões dos números naturais 153, 228 e 453 pelo número natural n encontramos restos iguais a 3. Sabendo que n não é um quadrado perfeito, então podemos afirmar que a soma dos possíveis valores de n é igual a:

a) 95

b) 105

c) 120

d) 124

- $153 \,|\!\underline{\,n\,}$, resto 3 → $150 \,|\!\underline{\,n\,}$, resto 0
- $228 \,|\!\underline{\,n\,}$, resto 3 → $225 \,|\!\underline{\,n\,}$, resto 0
- $453 \,|\!\underline{\,n\,}$, resto 3 → $450 \,|\!\underline{\,n\,}$, resto 0

⟹ (n) é divisor comum de 150, 225 e 450

$$mdc(150, 225, 450) = 75$$

Possíveis n → $D(75) = \cancel{1}, \cancel{3}, \underbrace{5, 15, \cancel{25}, 75}$ → quad. perfeito

$$S = 5 + 15 + 75 = 95$$

MESTRES DA MATEMÁTICA

Exemplo 4

(PUC MG) Um latifundiário decide lotear três terrenos com áreas de 145 ha, 174 ha e 232 ha, de modo que os lotes sejam de áreas iguais e cada um deles tenha a maior área possível. Nessas condições, o número de lotes, depois de feita a divisão, é

a) 15

b) 17

c) 19

d) 21

$$\text{mdc}(145, 174, 232) = 29 \text{ (ÁREA DO TERRENO)}$$

145	5
29	29
1	

174	2
87	3
29	29
1	

232	2
116	2
58	2
29	29
1	

$$\begin{cases} 145 = 5 \cdot 29 \\ 174 = 2 \cdot 3 \cdot 29 \\ 232 = 2^3 \cdot 29 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{mdc} = 29}$$

$$\frac{145}{29} = 5$$
$$+$$
$$\frac{174}{29} = 6$$
$$+$$
$$\frac{232}{29} = 8$$

19 LOTES

MESTRES DA MATEMÁTICA

Exemplo 5

(IFPE 2016) Na Escola Pierre de Fermat, foi realizada uma gincana com o objetivo de arrecadar alimentos para a montagem e doação de cestas básicas. Ao fim da gincana, foram arrecadados 144 pacotes de feijão, 96 pacotes de açúcar, 192 pacotes de arroz e 240 pacotes de fubá. Na montagem das cestas, a diretora exigiu que fosse montado o maior número de cestas possível, de forma que não sobrasse nenhum pacote de alimento e nenhum pacote fosse partido. Seguindo a exigência da diretora, quantos pacotes de feijão teremos em cada cesta?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

nº de cestas = mdc(144, 96, 192, 240) = 48 cestas

48 cestas

$$\frac{144}{48} = 3 \qquad \frac{192}{48} = 4 \qquad \frac{240}{48} = 5 \qquad \frac{96}{48} = 2$$

Cada cesta

2 Açúcar
3 Feijão
4 Arroz
5 Fubá

MESTRES DA MATEMÁTICA