PROVA DE MATEMÁTICA

Prova de Matemática – ITA 2000

Principais notações

R – o conjunto de todos os números reais

$[a,b] = \{x \in \mathbf{R} : a \le x \le b\}$

$]a,b[= \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$

(a,b) – par ordenado

gof – função composto de g e f

A^{-1} – matriz inversa da matriz A

A^{T} – matriz transposta da matriz A

det (A) – determinante da matriz A

As questões de **01 a 15 não devem ser resolvidas no caderno de respostas**. Para responde-las, marque a opção escolhida para cada questão na **folha de leitura óptica** e na **folha de respostas** (que se encontra na última página do caderno de respostas).

Questão 01. Sejam f, g : ***R*** → ***R*** definidas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = 10^{3\cos 5x}$. Podemos afirmar que:

A ( ) f é injetora e par e g é ímpar.
B ( ) g é sobrejetora e gof é par.
C ( ) f é bijetora e gof é ímpar.
D ( ) g é par e gof é ímpar.
E ( ) f é ímpar e gof é par.

Resolução
Alternativa E
Como, para todo x $\in$ ***R,*** $f(-x) = (-x^3) = -x^3 = -f(x)$***, f é ímpar.***
Temos que, para todo x $\in$ ***R,*** $g(x) = 10^{3\cos 5x} > 0$***. Logo g não é sobrejetora.***
Finalmente, gof: R $\to$ ***R,*** $gof(x) = g(f(x)) = g(x^3) = 10^{3\cos 5x^3}$ ***e, portanto,*** $gof(-x) = 10^{3\cos 5(-x)^3} = 10^{3\cos 5x^3} = gof(x)$***, isto é, gof é par.***
Assim, podemos afirmar que f é ímpar e gof é par.

Questão 02. Denotemos por n(X) o número de elementos de um conjunto finito X. Sejam A, B e C conjuntos tais que $n(A\cup B) = 8$, $n(A\cup C) = 9$, $n(B\cup C) = 10$, $n(A\cup B\cup C) = 11$ e $n(A\cap B\cap C) = 2$. Então, n(A) + n(B) + n(C) é igual a:

A ( ) 11. **B** ( ) 14. **C** ( ) 15.
D ( ) 18. **E** ( ) 25.

Resolução
Temos
$n(A\cup B) = 8 \Leftrightarrow n(A) + n(B) - n(A\cap B) = 8 \Leftrightarrow n(A\cap B) = n(A) + n(B) - 8$ ***Da mesma forma,***
$n(A\cup C) = 9 \Leftrightarrow n(A\cap C) = n(A) + n(C) - 9$ ***e*** $n(B\cup C) = 10 \Leftrightarrow n(B\cap C) = n(B) + n(C) - 10$.
Como $n(A\cup B\cup C) = 11$ ***e*** $n(A\cap B\cap C) = 2$***, concluímos que*** $n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) - n(A\cap C) - n(B\cap C) + n(A\cap B\cap C) \Leftrightarrow 11 = n(A) + n(B) + n(C) - (n(A) + n(B) - 8) - (n(A) + n(C) - 9) - (n(B) + n(C) - 10) + 2 \Leftrightarrow n(A) + n(B) + n(C) = 18$

Questão 03. Seja f(x) $\sum_{n=0}^{20} \frac{20!}{n!\,(20-n)!} x^n$ uma função real de variável real em que n! indica o fatorial de n. Considere as afirmações:

I. f(1) = 2
II. f(-1) = 0
III. f(-2) = 1

Podemos concluir que

A ( ) Somente as afirmações I e II são verdadeiras.
B ( ) Somente as afirmações II e III são verdadeiras.
C ( ) Apenas a afirmação I é verdadeira.
D ( ) Apenas a afirmação II é verdadeira.
E ( ) Apenas a afirmação III é verdadeira.

Resolução

Temos f(x) $\sum_{n=0}^{20} \frac{20!}{n!\,(20-n)!}.x^n = \sum_{n=0}^{20} \binom{20}{n} 1^{20-n}.x^n = (1+x)^{20}$,
f: R $\to$ ***R.***
Logo:
I. Falsa. $f(1) = (1+1)^{20} = 2^{20}$.
II. Verdadeira. $f(-1) = (1+(-1))^{20} = 0$.
III. Verdadeira. $f(-2) = (1+(-2))^{20} = 1$.

Questão 04. Quantos números de seis algarismos distinta podemos formar usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?

A ( ) 144. **B** ( ) 180. **C** ( ) 240.
D ( ) 288. **E** ( ) 360.

Resolução
Podemos formar 2! 5! números de seis algarismos distintos nos quais o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes. Podem ainda ser formados 2! 2! 4! números que, além das condições acima, também tenham o 1 e o 2 ocupando posições adjacentes. Logo o total de números nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes é 2! 5! -2! 2! 4! = 144.

Questão 05. Sendo 1 e 1 + 2i raízes da equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais, então

A ( ) b + c = 4 **D** ( ) b + c = 1
B ( ) b + c = 3 **E** ( ) b + c = 0

C ( ) b + c = 2

Resolução

Como os coeficientes da equação polinomial são reais e ela admite a raiz 1 + 2i, então admite também a raiz conjugada 1 + 2i = 1 - 2i, ou seja, as raizes da equação são 1, 1 + 2i e 1 - 2i.

Das relações entre coeficientes e raízes.

b/1 = 1.(1+2i)+1.(1-2i)+(1+2i).(1-2i)

-c/1 = 1.(1+2i).(1-2i)

b = 7 e c = -5

Portanto b + c = 7 + (-5) = 2.

Questão 06. A soma das raízes reais positivas da equação $4^{x^2} - 5.2^{x^2} + 4 = 0$ vale

A ( ) 2. **B**( ) 5. **C** ( ) $\sqrt{2}$.

D ( ) 1. **E**( ) $\sqrt{3}$.

Resolução

Alternativa C

$$4^{x^2} - 5.2^{x^2} + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(2^{x^2}\right)^2 - 5.2^{x^2} + 4 = 0 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2^{x^2} = y \\ y^2 - 5y + 4 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2^{x^2} = y \\ (y = 1 \text{ ou } y = 4) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2^{x^2} = 1 = 2^0 \\ 2^{x^2} = 4 = 2^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ x^2 = 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Assim, a soma das raízes reais positivas da equação é $\sqrt{2}$ **.**

Questão 07. Sendo I um intervalo de números reais com extremidades em a e b, com a < b, o número real b - a é chamado de comprimento de I. Considere a inequação $6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x < 0$. A soma dos comprimentos dos intervalos nos quais ela é verdadeira é igual a:

a) 3/4 b) 3/2 c) 7/3 d) 11/6 e) 7/6

Resolução

Seja $p(x) = 6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x = x(6x^3 - 5x^2 - 7x + 4)$.

Como p(-1) = 0, dividamos $6x^3 - 5x^2 - 7x + 4$ ***por x - (-1) = x + 1,***

-1	*6*	*-5*	*-7*	*4*
	6	*-11*	*4*	*0*

Assim $p(x) = x.(x+1)(6x^2-11x+4)$ ***e*** $6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x < 0$ **Û** $x(x+1)(6x^2-11x+4) < 0$.

Sendo A(x) = x, B(x) = x + 1 e $C(x) = 6x^2 - 11x + 4$***, C(x) = 0*** **Û** ***x = 1/2 ou x = 4/3, e estudando o sinal de A.B.C, obtemos:***

		-1	0	1/2	4/3
A	-	-	+	+	+
B	-	+	+	+	+
C	+	+	+	-	+
A.B.C	+		+		+

Assim a soma dos conjuntos dos intervalos nos quais a inequação é verdadeira é igual a (0-(-1) + (4/3 - 1/2) = 11/6.

Questão 08. Seja S = [-2,2] e considere as afirmações:

I. $1/4 \le (1/2)^x < 6$, para todo x ∈ S.

II. $\dfrac{1}{\sqrt{32-2^x}} < \dfrac{1}{\sqrt{32}}$, para todo x ∈ S.

III. $2^{2x} - 2^x \le 0$, para todo x ∈ S.

Então, podemos dizer que:

a) apenas I é verdadeira.
b) apenas III é verdadeira.
c) somente I e II são verdadeiras.
d) apenas II é falsa.
e) todas as afirmações são falsas.

Resolução

Alternativa A

I. ***Verdadeira. Temos -2 £ x £ 2 Û (1/2)***$^{-2}$ ***³ (1/2)***^{x} ***³ (1/2)***^{2} ***Û 1/4 £ (1/2)***^{x} ***< 6.***

II. ***Falsa. Por exemplo, se x = 2 Î S,***

$$\frac{1}{\sqrt{32-2^x}} < \frac{1}{\sqrt{32-2^2}} = \frac{1}{\sqrt{28}} > \frac{1}{\sqrt{32}}$$

III. ***Falsa. Por exemplo, se x = 2Î S,*** $2^{2x} - 2^x = 2^{2.2} - 2^2$ ***= 16 - 4 > 0.***

Questão 09. Seja z_0 o número complexo 1 + i. Sendo S o conjunto solução no plano complexo de $|z - z_0| = |z + z_0| = 2$, então o produto dos elementos de S é igual a

a) 4(1-i) b) 2(1+i) c) 2(i-1)
d) -2i e) 2i

Resolução

As medidas das diagonais do paralelogramo de lados adjacentes z - 0 e z_0 ***- 0 são*** $|z - z_0|$ ***e*** $|z + z_0|$***. Como*** $|z_0 - 0| = |z_0| = \sqrt{2}$ ***é a medida de um dos lados do paralelogramo e*** $|z - z_0| = |z + z_0| = 2$***, então*** $|z - z_0| = |z + z_0| = |z_0|\sqrt{2}$ ***e, portanto, o paralelogramo é um quadrado.***

Assim, as soluções de $|z - z_0| = |z + z_0| = 2$ ***são obtidas de*** z_0 ***por rotação de centro na origem e ângulos de 90º e -90º, ou seja, são*** iz_0 ***e*** $-iz_0$***, cujo produto é*** $(iz_0)(-iz_0) = z^2_0 = (1+i)^2 = 2i$***.***

Questão 10. Considere f: R → R definida por $f(x) = 2\text{sen}3x - \cos\left(\dfrac{x-\pi}{2}\right)$. Sobre f podemos afirmar que:

a) é uma função par.
b) é uma função ímpar e periódica de período fundamental 4π.
c) é uma função ímpar e periódica de período fundamental 4π/3.
d) é uma função periódica de período fundamental 2π.
e) não é par, não é ímpar e não é periódica.

Resolução

Alternativa B

Como $\cos\left(\dfrac{x-\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{2}\right) = \text{sen}\,\dfrac{x}{2}$***, temos:***

f(x) = 2 sen3x - $\cos\left(\dfrac{x-\pi}{2}\right)$ ***= 2 sen3(-x) - sen(-x/2) = -2sen3x + senx/2 = -f(x), ou seja, f é ímpar. Os períodos de 2sen3x e senx/2 são, respectivamente, 2p/3 e 2p/1/2 = 4p. Como 4p = 6(2p/3), f é periódica de período fundamental 4p.***

Questão 11. O valor de n que torna a seqüência 2 + 3n, -5n, 1 - 4n uma progressão aritmética pertence ao intervalo.

a) [-2,-1] b) [-1,0] c) [0,1]
d) [1,2] e) [2,3]

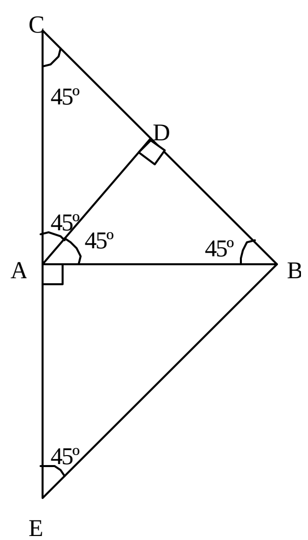
Resolução
A seqüência dada é progressão aritmética se, e somente se,
$2 + 3n + 1 - 4n = 2 \cdot (-5n) \Leftrightarrow n = -1/3$
Como $-1 \leq -1/3 \leq 0$, $n \in [-1,0]$.

Questão 12. Considere um triângulo isósceles ABC, retângulo em A. Seja D a intersecção da bissetriz do ângulo Â como o lado BC e E um ponto da reta suporte do cateto AC de tal modo que os segmentos de reta BE e AD sejam paralelos.

Sabendo que AD mede $\sqrt{2}$ cm, então a área do círculo inscrito no triângulo EBC é

a) $\pi\left(4-2\sqrt{3}\right)cm^2$ b) $2\pi\left(3-2\sqrt{2}\right)cm^2$
c) $3\pi\left(4-2\sqrt{3}\right)cm^2$ d) $4\pi\left(3-2\sqrt{2}\right)cm^2$
e) $\pi\left(4-2\sqrt{2}\right)cm^2$

Resolução
Alternativa D
Como ABC é um triângulo isósceles, retângulo em A, temos que $m(A\hat{C}B) = m(A\hat{B}C) = 45^o$. AD é bissetriz de BÂC, logo m(CÂD) = m(BÂD) = 45º. Como BE é paralelo a AD, m(CÊB) = m(CÂD) = 45º.



Temos AC = AB = AE = AD$\sqrt{2}$ = 2cm, BE = BC = AC $\sqrt{2}$ = 2 $\sqrt{2}$ cm e EC = 2AC = 4cm.
Assim, o semiperímetro do triângulo BCE é

$$\frac{BC+BE+EC}{2} = \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4}{2} = 2\sqrt{2}+2cm$$ ***e sua área é***

$$\frac{CE.AB}{2} = \frac{4.2}{2} = 4\,cm^2$$

Portanto o raio da circunferência inscrita no triângulo EBC é $\frac{4}{2\sqrt{2}+2} = 2\left(\sqrt{2}-1\right)cm$ ***e sua área é***

$$\pi(2(\sqrt{2}-1))^2 = 4\pi(3-2\sqrt{2})\,cm^2$$

Questão 13. A área de um triângulo é de 4 unidades de superfície, sendo dois de seus vértices os pontos A: (2,1) e B (3,-2). Sabendo que o terceiro vértice encontra-se sobre o eixo das abcissas, pode-se afirmar que suas coordenadas são

a) (-1/2,0) ou (5,0) b) (-1/2,0) ou (4,0)
c) (-1/3,0) ou (5,0) d) (-1/3,0) ou (4,0)
e) (-1/5,0) ou (3,0)

Resolução
Seja C = (x;0) o terceiro vértice. Assim, podemos escrever:

$$\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{matrix}\right\| = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|x-4-3+2x\right| = 4 \Leftrightarrow \left|3x-7\right| = 8 \Leftrightarrow$$

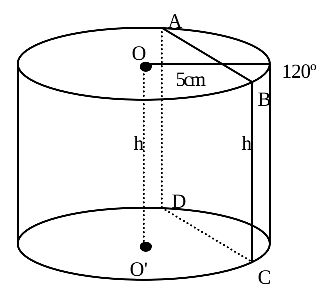
$$\Leftrightarrow \left| \begin{matrix} x = 5 \\ \text{ou} \\ x = -1/3 \end{matrix} \right.$$

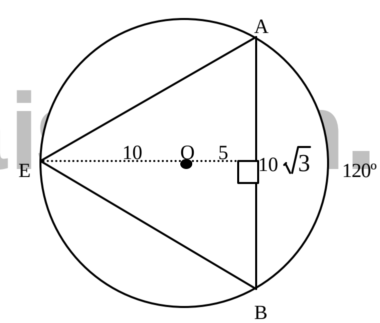
Logo C = (5;0) ou C = (-1/3;0)

Questão 14. Um cilindro circular reto é seccionado por um plano paralelo ao seu eixo. A secção fica a 5cm do eixo e separa na base um arco de 120º. Sendo de $30\sqrt{3}$ cm^2 a área da secção plana retangular, então o volume da parte menor do cilindro seccionado mede, em cm^3.

a) $30\pi - 10\sqrt{3}$ b) $30\pi - 20\sqrt{3}$
c) $20\pi - 10\sqrt{3}$ d) $50\pi - 25\sqrt{3}$
e) $100\pi - 75\sqrt{3}$

Resolução





Nas figuras, a secção é o retângulo ABCD, cujos lados são a altura do cilindro e a corda AB correspondente a um arco de

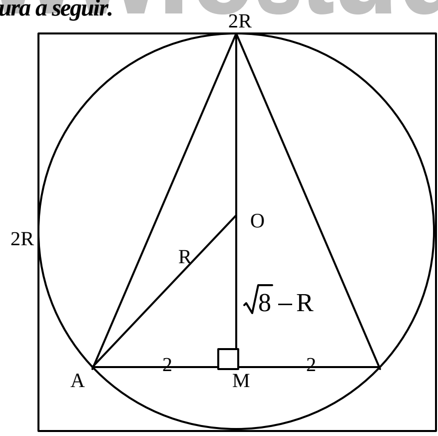
120º na circunferência da base. Essa corda é o lado do triângulo equilátero ABE, inscrito na circunferência. Como o apótema desse triângulo (distância do centro aos lados) mede 5cm, concluímos que o raio da circunferência mede 10cm, e o lado do triângulo equilátero inscrito mede, portanto, $10\sqrt{3}$ cm. Sendo h a altura do cilindro, a área da secção vale $10\sqrt{3}\,.\,h = 30\sqrt{3} \Leftrightarrow h = 3$cm.
O volume pedido é o produto da área do segmento circular de raio 10cm e ângulo 120º pela altura do cilindro, ou seja,

$$\left(\frac{120^\circ}{360^\circ}.\pi.10^2 - \frac{10^2.\,\text{sen}\,120^\circ}{2}\right)3 = 100\pi - 75\sqrt{3}\text{cm}^3$$

Questão 15. Um cone circular reto com altura de $\sqrt{8}$ cm e raio da base de 2cm está inscrito numa esfera que, por sua vez, está inscrita num cilindro. A razão entre as áreas das superfícies totais do cilindro e do cone é igual a

a) $\frac{3}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$ b) $\frac{9}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)$
c) $\frac{9}{4}\left(\sqrt{6}-1\right)$ d) $\frac{27}{8}\left(\sqrt{3}-1\right)$
e) $\frac{27}{16}\left(\sqrt{3}-1\right)$

Resolução
Alternativa D
Um plano contendo o eixo do cilindro determina a secção representada na figura a seguir.



No triângulo retângulo OAM, temos

$$R^2 = 2^2 + (\sqrt{8}-R)^2 \Leftrightarrow R = \frac{3}{\sqrt{2}}\text{ cm}$$

A área da superfície total do cilindro é

$$2\pi R^2 + 2\pi R.2R = 6\pi R^2 = 6\pi\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = 27\pi\text{cm}^2$$

A geratriz do cone é $\sqrt{2^2+\left(\sqrt{8}\right)^2} = 2\sqrt{3}\text{cm}$. ***Assim, a área da superfície total do cone é***

$$\pi.2^2 + \pi.2.2\sqrt{3} = 4\pi\left(\sqrt{3}+1\right)\text{cm}^2.$$

A razão entre as duas áreas, na ordem apresentada, é:

$$\frac{27\pi}{4\pi\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{27}{8}\left(\sqrt{3}-1\right)$$

Questão 16. Duas retas r_1 e r_2 são paralelas à reta 3x - y = 37 e tangentes à circunferência $x^2 + y^2 - 2x - y = 0$. Se d_1 é a distância de r_1 até a origem e d_2 é a distância de r_2 até a origem, então $d_1 + d_2$ é igual a

a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{15}$ c) $\sqrt{7}$ d) $\sqrt{10}$ e) $\sqrt{5}$

Resolução
Temos que r_1 e r_2 são tangentes `a circunferência de centro $C = \left(1;\frac{1}{2}\right)$ ***e raio*** $\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. ***Como a origem à circunferência, d_1 + d_2 é igual à distância entre r_1 e r_2, ou seja, é igual ao diâmetro da circunferência. Logo d_1 + d_2 =*** $\sqrt{5}$

Questão 17. Sabe-se que x é um número real pertencente ao intervalo]0,2π[e que o triplo da sua secante, somado ao dobro da sua tangente, é igual a 3. Então, o cosseno de x é igual a:

a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{5}{13}$ d) $\frac{15}{26}$ e) $\frac{13}{49}$

Resolução
Alternativa C
Temos

$$3\sec x + 2\text{tg}x = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{\cos x} + 2\frac{\text{sen } x}{\cos x} = 3 \Leftrightarrow 3\cos x - 2\,\text{sen } x = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{3}}\cos x - \frac{2}{\sqrt{3}}\text{sen } x = \frac{3}{\sqrt{3}}.$$

Seja α = arc cos $\frac{3}{\sqrt{3}}$. Então $0 < \alpha < \pi/2$, cos α = $\frac{3}{\sqrt{3}}$ e senα = $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Portanot cosα.cosx - senα.senx = cosα $\Leftrightarrow$ cos(x + α) =cos α $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -2\alpha + 2k\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

Como 0 < x < 2π, concluímos que x = 2π - 2α. Logo cosx = cos (2π - 2α) = cos2α = 2cos$^2\alpha$ - 1 =

$$2\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 - 1 = \frac{18}{13} - 1 = \frac{5}{13}.$$

Questão 18. Seja P(x) um polinômio divisível por x - 1. Dividindo-o por $x^2 + x$, obtêm-se o quociente $Q(x) = x^2 - 3$ e o resto R(x). Se R(4) = 10, então o coeficiente do termo de grau 1 de P(x) é igual a

a) -5 b) -3 c) -1 d) 1 e) 3

Resolução
Como P(x) é divisível por x - 1, P(1) = 0.
Temos
$P(x) = (x^2 - 3).(x^2 + x) + R(x)$, onde
$R(x) = ax + b$, a, b $\in$ R.

Assim, $\begin{vmatrix} P(1)=0 \\ R(4)=10 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -4+a+b=0 \\ 4a+b=10 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a=2 \\ b=2 \end{vmatrix}$

Logo $R(x) = 2x + 2$ e $P(x) = (x^2 - 3) \cdot (x^2 + x) + 2x + 2 \Leftrightarrow$ $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$.

Então o coeficiente do termo de grau 1 de P(x) é -1.

Questão 19. Considere as matrizes

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se X é solução de $M^{-1}NX = P$, então $x^2 + y^2 + z^2$ é igual a:

a) 35 b) 17 c) 38 d) 14 e) 29

Resolução

Temos $M^{-1}NX = P \Leftrightarrow NX = MP \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2z=-1 \\ 3x+2y=1 \\ x+y+z=3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x=-3 \\ y=5 \\ z=1 \end{vmatrix}$$

Logo $x^2 + y^2 + z^2 = (-3)^2 + 5^2 + 1^2 = 35$.

Questão 20. Sendo x um número real positivo, considere as matrizes.

$$A = \begin{pmatrix} \log_{1/3} x & \log_{1/3} x^2 & 1 \\ 0 & -\log_3 x & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & \log_{1/3} x^2 \\ 1 & 0 \\ -3\log_{1/3} x & -4 \end{pmatrix}$$

A soma de todos os valores de x para os quais $(AB) = (AB)^T$ é igual a:

a) 25/3 b) 28/3 c) 32/3 d) 27/2 e) 25/2

Resolução

Alternativa B

Seja $AB = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$. Temos $AB = (AB)^T \Leftrightarrow C = C^T$

$\Leftrightarrow c_{12} = c_{21} \Leftrightarrow \log_{1/3}x \cdot \log_{1/3}x^2 + \log_{1/3}x^2 \cdot 0 + 1 \cdot (-4) = 0 \cdot 0 + (-\log_3 x) \cdot 1 + 1 \cdot (-3\log_{1/3}x) \Leftrightarrow 2 \cdot (\log_{1/3}x)^2 - 4 = \log_{1/3}x - 3\log_{1/3}x \Leftrightarrow (\log_{1/3}x)^2 + (\log_{1/3}x) - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \log_{1/3} x = -2 \\ \text{ou} \\ \log_{1/3} x = 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x = 9 \\ \text{ou} \\ x = 1/3 \end{vmatrix}$$

A soma dos valores de x é 9 + 1/3 = 28/3.

Questão 21. Considere as matrizes reais

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $a \neq 0$ e a, b e c formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q > 0$. Sejam λ_1, λ_2 e λ_3 as raízes da equação $\det(M - \lambda I) = 0$. Se $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = a$ e $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7a$, então $a^2 + b^2 + c^2$ é igual a

a) 21/8 b) 91/9 c) 36/9 d) 21/16 e) 91/36

Resolução

Alternativa A

Temos $\det(M - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & b-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & c-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (a - \lambda)(b - \lambda)(c - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = a$ ou $\lambda = b$ ou $\lambda = c$.

Como a, b e c formam, nessa ordem, uma PG de razão $q > 0$, com $a \neq 0$, $b = aq$ e $c = aq^2$.

Assim

$$\begin{vmatrix} \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = a \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7a \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a.aq.aq^2 = a \\ a + aq + aq^2 = 7a \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a^2q^3 = 1 \\ q^2 + q - 6 = 0 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a^2 = 1/8 \\ q = 2 \end{vmatrix}$$

Logo $a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (aq)^2 + (aq^2)^2 = a^2(1 + q^2 + q^4) = 1/8\,(1 + 4 + 16) = 21/8$.

Questão 22. Num triângulo acutângulo ABC, o lado oposto ao ângulo Â mede 5cm. Sabendo que

$\hat{A}$ = arccos 3/5 e $\hat{C} = \text{arcsen}\,\frac{2}{\sqrt{5}}$, então a área do triângulo ABC é igual a

a) 5/2cm² b) 12cm² c) 15cm²

d) $2\sqrt{5}$ cm² e) 25/2cm²

Resolução

Alternativa E

Temos que

$$\cos\hat{A} = \frac{3}{5}, \text{sen}\,\hat{A} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5},$$

$$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos\hat{C} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ e,}$$

$$\text{portanto, sen}\,\hat{B} = \text{sen}(\pi - (\hat{A} + \hat{C})) =$$

$$\text{sen}(\hat{A} + \hat{C}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Pela lei dos senos,

$$\frac{AB}{\text{sen}\,\hat{C}} = \frac{BC}{\text{sen}\,\hat{A}} \Leftrightarrow \frac{AB}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{5}{\frac{4}{5}} \Leftrightarrow AB = \frac{25}{2\sqrt{5}} \text{ cm}$$

A área do triângulo ABC é igual a:

$$\frac{AB.BC.\text{sen}\,\hat{B}}{2} = \frac{\frac{25}{2\sqrt{5}}.5.\frac{2}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{25}{2} \text{cm}^2$$

Questão 23. Considere a circunferência inscrita num triângulo isósceles com base de 6cm e altura de 4cm. Seja t a reta tangente a esta circunferência e paralela à base do triângulo. O segmento de t compreendido entre os lados do triângulo mede

a) 1cm b) 1,5cm c) 2cm

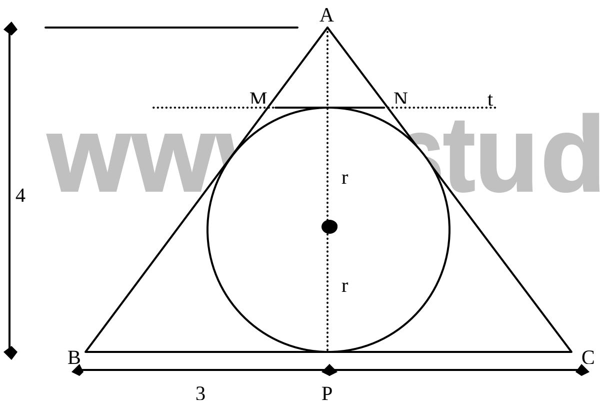
d) 2,5cm e) 3cm

Resolução

Alternativa B

No desenho temos AB= AC e BC = 6.

Sendo P o ponto médio de BC, temos BP = 3.
Como o triângulo é isósceles, então a altura é AP = 4, e por Pitágoras, temos AB = AC = 5.



Logo o raio da circunferência inscrita é

$$r = \frac{\text{área } \Delta ABC}{\text{semiperímetro} \Delta ABC} = \frac{\frac{6.4}{2}}{\frac{6+5+5}{2}} = \frac{3}{2}.$$

A reta t determina o triângulo AMN semelhante ao triângulo ABC, pois MN // BC. A altura do triângulo AMN, relativa à base MN, é 4 - 2r = 4 - 3 = 1.

Portanto $\frac{MN}{1} = \frac{6}{4} \Leftrightarrow MN = 1{,}5\text{cm}$

Questão 24. Considere uma pirâmide regular com altura de $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}\text{cm}$. Aplique a esta pirâmide dois cortes planos e paralelos à base de tal maneira que a nova pirâmide e os dois troncos obtidos tenham, os três, o mesmo volume. A altura do tronco cuja base é a base da pirâmide original é igual a

a) $2\left(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6}\right)\text{cm}$
b) $2\left(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{2}\right)\text{cm}$
c) $2\left(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{3}\right)\text{cm}$
d) $2\left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right)\text{cm}$
e) $2\left(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}\right)\text{cm}$

Resolução
Alternativa D
Sendo V o volume da pirâmide original, o volume do tronco cuja base é a base da pirâmide original é V/3 e o da pirâmide que se obtém retirando-se esse tronco da pirâmide original é V - V/3 = 2V/3. A partir da semelhança das duas pirâmides, sendo h a altura pedida, temos:

$$\left(\frac{\frac{6}{\sqrt[3]{9}} - h}{\frac{6}{\sqrt[3]{9}}}\right) = \frac{\frac{2V}{3}}{V} \Leftrightarrow \frac{\frac{6}{\sqrt[3]{9}} - h}{\frac{6}{\sqrt[3]{9}}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow h = 2(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})\text{cm}$$

Questão 25. Para x no intervalo $[0, \pi/2]$, o conjunto de todas as soluções de inequação

$\text{sen}(2x) - \text{sen}(3x + \pi/2) > 0$

é o intervalo definido por

a) $\pi/10 < x < \pi/2$
b) $\pi/12 < x < \pi/4$
c) $\pi/6 < x < \pi/3$
d) $\pi/4 < x < \pi/2$
e) $\pi/4 < x < \pi/3$

Resolução
Alternativa A
Para x no intervalo [0,p/2], sen(2x) - sen(3x + p/2) > 0 Û

$$\Leftrightarrow 2\,\text{sen}\left(\frac{-x - \frac{\pi}{2}}{2}\right).\cos\left(\frac{5x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\,\text{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) < 0(*)$$

Como p/4 £ x/2 + p/4 £ p/2 e p/4 £ 5x/2 + p/4 £ 3p/2, então sen(x/2 + p/4) > 0 e (*) Û p/2 < 5x/2 + p/4 < 3p/2 Û p/4 < 5x/2 < 5x/4 Û p/10 < x < p/2.