

## Canguru de Matemática Brasil – 2016 – Nível S

### Problemas de 3 pontos

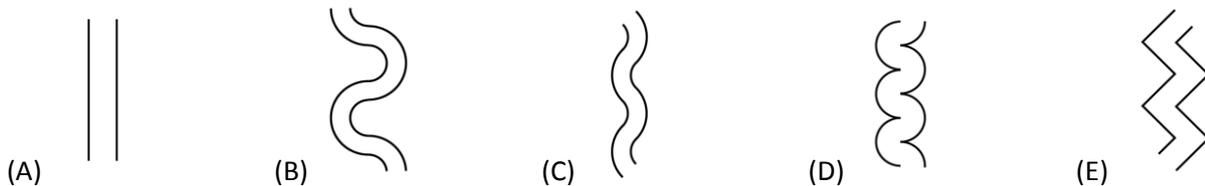
1. A soma das idades de Tom e João é 23, a soma das idades de João e Alex é 24 e a soma das idades de Tom e Alex é 25. Qual é a idade do mais velho dos três?

- (A) 10                      (B) 11                      (C) 12                      (D) 13                      (E) 14

2. A soma  $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$  é igual a

- (A)  $\frac{3}{111}$                       (B)  $\frac{111}{1110}$                       (C)  $\frac{111}{1000}$                       (D)  $\frac{3}{1000}$                       (E)  $\frac{3}{1110}$

3. Maria planeja construir uma ponte sobre um trecho de um rio no qual é indiferente o local da construção, pois o comprimento da ponte mais curta é sempre o mesmo em qualquer ponto desse trecho. Qual das figuras abaixo não pode representar esse trecho do rio?



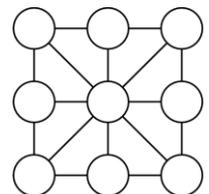
4. Quantos números inteiros são maiores do que  $2015 \times 2017$  e são menores do que  $2016 \times 2016$ ?

- (A) 0                      (B) 1                      (C) 2015                      (D) 2016                      (E) 2017

5. Qual é o menor número de planos necessários para fechar uma região do espaço tridimensional?

- (A) 3                      (B) 4                      (C) 5                      (D) 6                      (E) 7

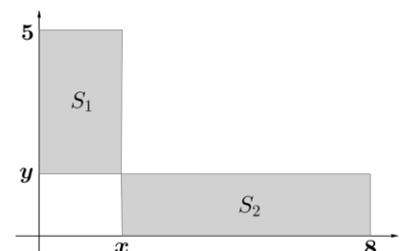
6. Na figura há oito triângulos, menores que os demais, cujos vértices estão em três dos nove círculos. Diana quer escrever um número inteiro em cada um dos nove círculos da figura, de forma que a soma dos números escritos nos vértices de todos esses triângulos menores sejam iguais. No máximo, quantos números diferentes ela poderá usar?



- (A) 1                      (B) 2                      (C) 3                      (D) 5                      (E) 8

7. Os retângulos  $S_1$  e  $S_2$  na figura têm a mesma área. Qual é a razão  $\frac{x}{y}$ ?

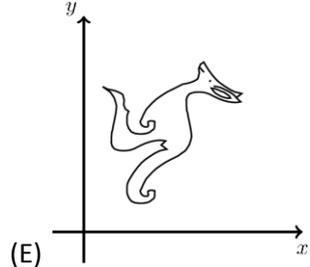
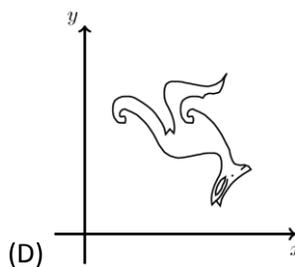
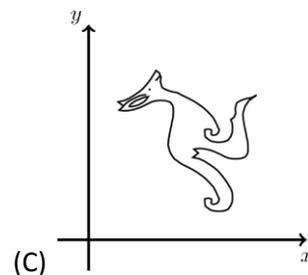
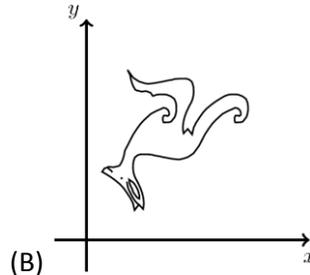
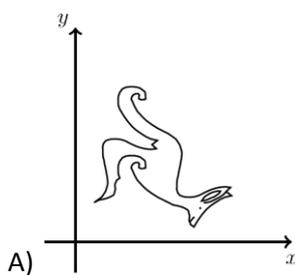
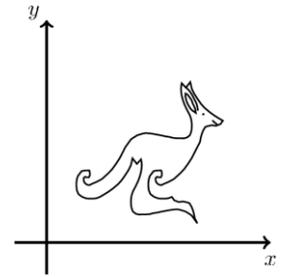
- (A) 1                      (B)  $\frac{3}{2}$                       (C)  $\frac{4}{3}$                       (D)  $\frac{7}{4}$                       (E)  $\frac{8}{5}$



8. Se  $x^2 - 4x + 2 = 0$  qual é o valor de  $x + \frac{2}{x}$ ?

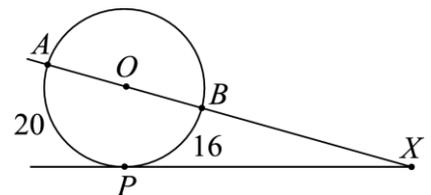
- (A) -4                      (B) -2                      (C) 0                      (D) 2                      (E) 4

9. Um conjunto de pontos no plano cartesiano tem a forma de um canguru, conforme a figura ao lado. Trocando as coordenadas  $x$  e  $y$  de cada ponto desse conjunto, obtém-se outra figura. Qual é essa figura?



10. Os comprimentos dos arcos  $AP$  e  $BP$  na figura são 20 e 16, respectivamente. Qual é a medida do ângulo  $AXP$ ?

- (A)  $10^\circ$       (B)  $15^\circ$       (C)  $18^\circ$       (D)  $24^\circ$       (E)  $30^\circ$

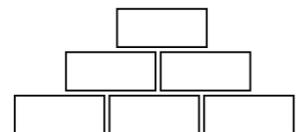


### Problemas de 4 pontos

11. Se  $a, b, c, d$  são inteiros positivos e  $a+2=b-2=c \cdot 2=d \div 2$ , qual dos números  $a, b, c$  ou  $d$  é o maior?

- (A)  $a$       (B)  $b$       (C)  $c$       (D)  $d$       (E) impossível determinar

12. Na pirâmide ao lado, cada número numa caixa é o produto dos números nas duas caixas inferiores vizinhas. Se os números das três caixas inferiores são inteiros positivos maiores do que 1, qual dos números a seguir não pode ser escrito na caixa do topo?



- (A) 56      (B) 84      (C) 90      (D) 105      (E) 220

13. Se  $x_1 = 2$  e  $x_{n+1} = x_n^{x_n}$  para  $n \geq 1$ , qual é o valor de  $x_4$ ?

- (A)  $2^3$       (B)  $2^4$       (C)  $2^{11}$       (D)  $2^{16}$       (E)  $2^{768}$

14. No retângulo  $ABCD$ , o comprimento do lado  $BC$  é metade do comprimento da diagonal  $AC$ . Se  $M$  é um ponto do lado  $CD$  tal que  $AM = MC$ , qual é a medida do ângulo  $C\hat{A}M$ ?

- (A)  $12,5^\circ$       (B)  $15^\circ$       (C)  $27,5^\circ$       (D)  $30^\circ$       (E)  $42,5^\circ$

15. Júlia corta um retângulo de área 2016 em 56 quadrados iguais, cujos lados medem um número inteiro. Para quantos retângulos diferentes, cujos lados medem números inteiros, ela pode fazer isto?

- (A) 0                      (B) 2                      (C) 4                      (D) 6                      (E) 8

16. Na ilha dos Cavaleiros e dos Vigaristas, todo cidadão é Cavaleiro, que sempre diz a verdade, ou então é Vigarista, que sempre mente. Durante sua viagem pela ilha você encontra sete cidadãos ao redor de uma fogueira. Todos eles lhe dizem: "Eu estou sentado entre dois Vigaristas". Quantos Vigaristas há no grupo?

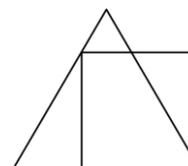
- (A) 3                      (B) 4                      (C) 5                      (D) 6                      (E) 7

17. As equações  $x^2 + ax + b = 0$  e  $x^2 + bx + a = 0$  têm raízes reais. Se a soma dos quadrados das raízes da primeira equação é igual à soma dos quadrados das raízes da segunda equação e  $a \neq b$ , qual é o valor de  $a + b$ ?

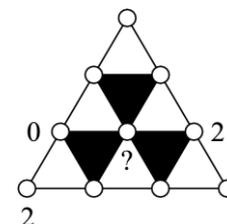
- (A) -4                      (B) -2                      (C) 0                      (D) 2                      (E) 4

18. Na figura ao lado, se o perímetro do quadrado é 4 e o triângulo é equilátero, qual é o perímetro do triângulo?

- (A) 3                      (B) 4                      (C)  $3 + \sqrt{2}$                       (D)  $3 + \sqrt{3}$                       (E)  $4 + \sqrt{3}$



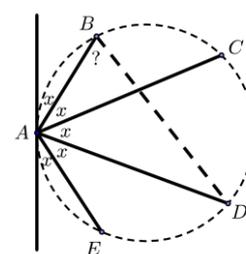
19. Cada um dos 10 vértices de triângulos na figura é numerado de 0, 1 ou 2. Sabe-se que a soma dos números dos vértices de cada triângulo branco é um número divisível por 3, enquanto que a soma dos números dos vértices de cada triângulo preto não é divisível por 3. Alguns vértices já foram numerados na figura. Quais números poderão ser usados para numerar o vértice no centro da figura?



- (A) Somente 0.    (B) Somente 1.    (C) Somente 2.    (D) Somente 0 e 1.    (E) Qualquer um dos três números.

20. Os pontos  $A, B, C, D$  e  $E$  pertencem à circunferência da figura. A reta tangente à circunferência em  $A$  e os segmentos de origem  $A$  e extremidades  $B, C, D$  e  $E$  formam cinco ângulos de mesma medida  $x$ . Qual é a medida do ângulo  $ABD$ ?

- (A)  $66,5^\circ$                       (B)  $72^\circ$                       (C)  $75^\circ$                       (D)  $77,5^\circ$                       (E)  $80^\circ$



**Problemas de 5 pontos**

21. Quantas soluções reais distintas tem a equação  $(x^2 - 4x + 5)^{x^2 + x - 30} = 1$ ?

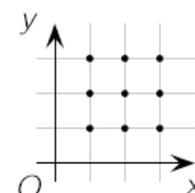
- (A) 1                      (B) 2                      (C) 3                      (D) 4                      (E) infinitas

22. A razão entre o perímetro de um quadrilátero e o comprimento da circunferência inscrita nesse quadrilátero (tangente aos quatro lados do quadrilátero) é 4:3. Qual é a razão entre a área do quadrilátero e a área do círculo inscrito?

- (A)  $4 : \pi$                       (B)  $3\sqrt{2} : \pi$                       (C) 16:9                      (D)  $\pi : 3$                       (E) 4:3

23. Quantas funções quadráticas de variável  $x$  têm seu gráfico passando por pelo menos três dos pontos assinalados no plano  $xOy$  ao lado?

- (A) 6                      (B) 15                      (C) 19                      (D) 22                      (E) 27



24. No triângulo  $ABC$ , retângulo em  $A$ , as bissetrizes dos ângulos agudos intersectam-se no ponto  $P$ . Se a distância do ponto  $P$  à hipotenusa é  $\sqrt{8}$ , qual é a distância do ponto  $P$  ao ponto  $A$ ?

- (A) 3                      (B)  $\sqrt{10}$                       (C)  $\sqrt{12}$                       (D) 4                      (E) 8

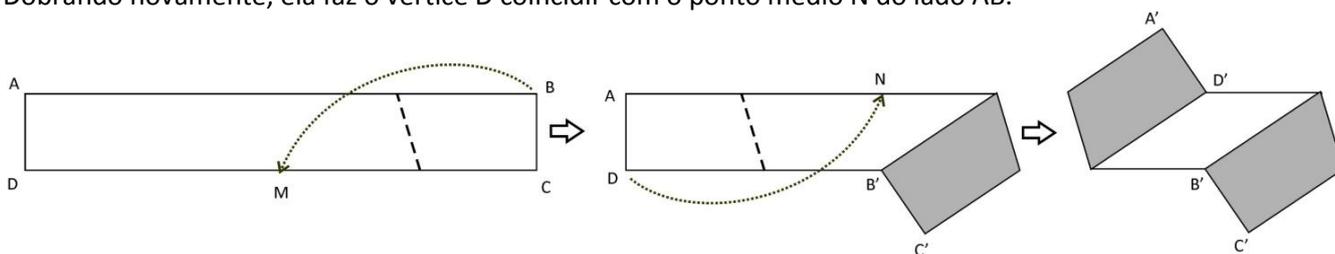
25. Usando cada algarismo de 1 a 9 exatamente uma vez, podemos escrever três números de três algarismos. Qual dos números a seguir não pode ser a soma desses três números?

- (A) 1500                      (B) 1503                      (C) 1512                      (D) 1521                      (E) 1575

26. Um cubo foi decomposto em seis pirâmides ligando-se um ponto do interior do cubo a cada um dos vértices de todas as faces. Os volumes de cinco dessas pirâmides são 2, 5, 10, 11 e 14. Qual é o volume da sexta pirâmide?

- (A) 1                      (B) 4                      (C) 6                      (D) 9                      (E) 12

27. Uma tira retangular  $ABCD$  de papel com 5 cm de largura e 50 cm de comprimento é branca de um lado e cinza do outro. Dobrando a tira, Cristina faz o vértice  $B$  da tira coincidir com o ponto médio  $M$  no lado  $CD$ . Dobrando novamente, ela faz o vértice  $D$  coincidir com o ponto médio  $N$  do lado  $AB$ .



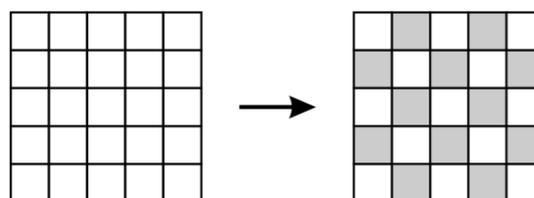
Qual é a área, em  $\text{cm}^2$ , da parte branca visível da tira na figura?

- (A) 50                      (B) 60                      (C) 62,5                      (D) 100                      (E) 125

28. Ana escolheu um número inteiro positivo  $n$  e escreveu a soma de todos os números inteiros de 1 a  $n$ . Um número primo  $p$  divide essa soma, mas não divide nenhum dos números que foram somados. Qual dos números a seguir poderia ser o valor de  $n + p$ ?

- (A) 217                      (B) 221                      (C) 229                      (D) 245                      (E) 269

29. As casas de um tabuleiro  $5 \times 5$  podem ser de cor branca ou cinza. Um movimento produz a mudança de cor de três casas consecutivas quaisquer na mesma linha ou coluna, isto é, as brancas se tornam cinzas e as cinzas se tornam brancas. Partindo do tabuleiro com todas as casas brancas, pelo menos quantos movimentos serão necessários para termos o tabuleiro pintado da forma mostrada na figura à direita?



- (A) Menos de 10.                      (B) 10                      (C) 12                      (D) Mais de 12.                      (E) Impossível fazer isso.

30. O número inteiro positivo  $N$  tem exatamente seis divisores positivos, incluindo 1 e  $N$ . O produto de cinco desses divisores é 648. Qual é o sexto divisor?

- (A) 4                      (B) 8                      (C) 9                      (D) 12                      (E) 24