Progressão Aritimética

Sequência constitui um conjunto de números dispostos em uma certa ordem, podendo ser finita (se possuir o último elemento) ou infinita (caso não possua o último elemento).

Exemplos:

(2, 4, 6, 8, 10) é uma sequência finita.

(10, 20, 30, 40, 50,...) é uma sequência infinita.

1 - Representação de uma Sequência

Uma sequência é representada por: $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$, em que:

a_1 é o primeiro termo (lê-se a índice 1);

a_2 é o segundo termo (lê-se a índice 2);

a_n é o enésimo termo (lê-se a índice n).

Exemplo:

Na sequência (1, 4, 7, 10), temos:

$a_1 = 1$

$a_2 = 4$

$a_3 = 7$

$a_4 = 10$

2 - Determinação de uma Sequência

Normalmente, as sequências são constituídas a partir de uma regra, denominada LEI DE FORMAÇÃO, que permite calcular qualquer um de seus termos.

Exemplo 1:

Encontre os quatro primeiros termos da sequência dada pelo termo geral $a_n = 2n + 1$, com $n \in IN^*$.

Solução:

Para n = 1, temos $a_1 = 2.\,1 + 1 \Rightarrow a_1 = 3$

Para n = 2, temos $a_2 = 2.\,2 + 1 \Rightarrow a_2 = 5$

Para n = 3, temos $a_3 = 2.\,3 + 1 \Rightarrow a_3 = 7$

Para n = 4, temos $a_4 = 2.\,4 + 1 \Rightarrow a_4 = 9$

Logo, a sequência procurada é: (3, 5, 7, 9).

Exemplo 2:

Considere a sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8,13. Determine seu próximo termo.

Reparando bem na sequência, verificamos que cada termo (a partir do 3º) é a soma dos dois anteriores. Logo, o próximo termo é 13 + 8 = 21.

Observação: essa sequência é chamada *Sequência de Fibonacci* e está relacionada com a reprodução de coelhos. "Um casal de coelhos pode reproduzir-se após dois meses de vida e, a partir daí, produz um novo casal a cada mês. Começando com um único casal de coelhos recém-nascidos, quantos casais existirão ao final de um ano?"

3 - Progressão Aritmética

É uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se o anterior a um número fixo, chamado razão (r).

P. A. = $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$, e $a_{n+1} = a_n + r$

ou podemos dizer ainda que:

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_{n+1} - a_n = r$ (razão).

Observe a seguinte P.A.:

(2, 5, 8, 11, 14,...)

É fácil notar que:

5 = 2 + 3

8 = 5 + 3

11 = 8 + 3

14 = 11 + 3

Nessa sequência, a razão da P.A. é 3.

3.1- Propriedades da Progressão Aritmética

Uma progressão aritmética pode ser:

A) Crescente – quando sua razão for um número maior do que zero ($r > 0$).

Exemplo:

$(7,8,9,10\ldots) \to r = 1 > 0$

B) Decrescente – quando sua razão for um número menor do que zero ($r < 0$).

Exemplo:

$(5, 4, 3, 2\ldots) \to r = -1 < 0$

C) Constante – quando sua razão for igual a zero.

Exemplo:

(3, 3, 3, 3...) $\rightarrow r = 0$

Em uma progressão aritmética, cada termo, a partir do segundo, é média aritmética entre seu antecessor e seu sucessor.

Exemplo:

(2, 4, 6, 8, 10...).

Observe que $4 = \frac{2+6}{2}$, ou seja $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$, $6 = \frac{4+8}{2}$, ou seja $a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}$, e assim por diante.

Em uma progressão aritmética, a soma dos termos equidistantes do centro é sempre um valor constante.

Exemplo:

(2,4,6,8,10,12). Note que: 2 + 12 = 4 + 10 = 6 + 8 = 14.

- **Três números em PA**

Pode-se escrever de duas maneiras: x, x+r, x+2r ou x–r, x, x+r.

3.1.1- Termo geral de uma P.A.

Existe uma fórmula que nos permite calcular qualquer termo de uma P.A., sem precisar escrevê-la completamente. A saber:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r}$$

Nessa fórmula:

a_n é o enésimo termo (termo geral, que se quer encontrar);

a_1 é o primeiro termo;

n é o número de termos (ou a posição que o termo ocupa na PA, no caso do índice n);

r é a razão.

Exemplo:

Encontre o vigésimo termo da P.A. (4, 6, 8, 10,...).

Solução:

Temos $a_1 = 4$, $r = 6 - 4 = 2$ e $n = 20$. Substituindo na fórmula, vem:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_{20} = 4 + (20 - 1) \cdot 2 \Rightarrow a_{20} = 4 + 38 \Rightarrow a_{20} = 42$.

3.2 - Soma dos n Termos de uma Progressão Aritmética

Por meio de alguns cálculos, podemos chegar a uma fórmula que nos permite calcular a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética. A saber:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}}$$

Nessa fórmula:

a_1 é o primeiro termo;

a_n é o enésimo termo;

n é o número de termos;

S_n é a soma dos n termos.

Observação: no lugar de $a_1 + a_n$ pode ser $a_x + a_{n-x+1}$, ou seja, pode ser $a_2 + a_{n-1}$, pela 3ª propriedade da PA.

Exemplo:

Calcule a soma de todos os números naturais, que estão compreendidos entre 1 e 100.

Solução:

Temos: P.A. = (1, 2, 3,..., 98, 99, 100);

$a_1 = 1$;

$r = 2 - 1 = 1$;

$a_n = a_{100} = 1 + (100 - 1)\ 1 = 100$;

n = 100 (cem primeiros termos).

Logo, $S_{100} = \frac{(1+100).100}{2} = 5050$.

QUESTÕES DE PROGRESSÃO ARITIMÉTICA

1. (CEFET/MG-2013) Durante o mesmo período, dois irmãos depositaram, uma vez por semana, em seus respectivos cofrinhos, uma determinada quantia, da seguinte forma: o mais novo depositou, na primeira semana, R$ 1,00, na segunda, R$ 2,00, na terceira, R$ 3,00 e assim, sucessivamente, enquanto que o mais velho colocou R$ 10,00 semanalmente até que ambos atingissem a mesma quantidade de dinheiro. Não havendo retirada em nenhum dos cofrinhos, a quantia que cada irmão obteve ao final desse período, em R$, foi de

A) 19 B) 21 C) 190 D) 210 E) 290

2. (ESPM-2014) Dois irmãos começaram juntos a guardar dinheiro para uma viagem. Um deles guardou R$ 50,00 por mês e o outro começou com R$ 5,00 no primeiro mês, depois R$ 10,00 no segundo mês, R$ 15,00 no terceiro e assim por diante, sempre aumentando R$ 5,00 em relação ao mês anterior. Ao final de um certo número de meses, os dois tinham guardado exatamente a mesma quantia. Esse número de meses corresponde a

A) pouco mais de um ano e meio.
B) pouco menos de um ano e meio.
C) pouco mais de dois anos.
D) pouco menos de um ano.
E) exatamente um ano e dois meses.

3. (UFSM-2014) As doenças cardiovasculares são a principal causa de morte em todo mundo. De acordo com os dados da Organização Mundial da Saúde, 17,3 milhões de pessoas morreram em 2012, vítimas dessas doenças. A estimativa é que, em 2030, esse número seja de 23,6 milhões.

Suponha que a estimativa para 2030 seja atingida e considere (a_n), $n \in \mathbb{N}$, a sequência que representa o número de mortes (em milhões de pessoas) por doenças cardiovasculares no mundo, com n1= correspondendo a 2012, com n = 2 correspondendo a 2013 e assim por diante.

Se n(a) é uma progressão aritmética, então o 8º termo dessa sequência, em milhões de pessoas, é igual a

A) 19,59 B) 19,61 C) 19,75
D) 20,10 E) 20,45

4. (UNICAMP-2008) Considere a sucessão de figuras apresentada a seguir, em que cada figura é formada por um conjunto de palitos de fósforo.

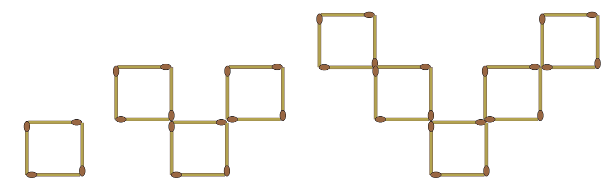

Figura 1 *Figura 2* *Figura 3*

Suponha que essas figuras representam os três primeiros termos de uma sucessão de figuras que seguem a mesma lei de formação. Nesse caso, o número de fósforos necessários para que seja possível exibir todas as primeiras 50 figuras ao mesmo tempo é igual a

A) 200 B) 1.000 C) 2.000
D) 10.000 E) 20.000

5. (ENEM-2010) O trabalho em empresas de festas exige dos profissionais conhecimentos de diferentes áreas. Na semana passada, todos os funcionários de uma dessas empresas estavam envolvidos na tarefa de determinar a quantidade de estrelas que seriam utilizadas na confecção de um painel de Natal.

Um dos funcionários apresentou um esboço das primeiras cinco linhas do painel, que terá, no total, 150 linhas.

☆ ☆☆ ☆☆☆ ☆☆☆☆ ☆☆☆☆☆ . . .
1ª 2ª 3ª 4ª 5ª 150ª

Após avaliar o esboço, cada um dos funcionários esboçou sua resposta:

Funcionário I	aproximadamente 200 estrelas
Funcionário II	aproximadamente 6.000 estrelas
Funcionário III	aproximadamente 12.000 estrelas
Funcionário IV	aproximadamente 22.500 estrelas
Funcionário V	aproximadamente 22.800 estrelas

Qual funcionário apresentou um resultado mais próximo da quantidade de estrelas necessária?

A) I B) II
C) III D) IV
E) V

6. (ENEM/2012) Jogar baralho é uma atividade que estimula o raciocínio. Um jogo tradicional é a Paciência, que utiliza 52 cartas. Inicialmente são formadas sete colunas com as cartas. A primeira coluna tem uma carta, a segunda tem duas cartas, a terceira tem três cartas, a quarta tem quatro cartas, e assim sucessivamente até a sétima coluna, a qual tem sete cartas, e o que sobra forma o monte, que são as cartas não utilizadas nas colunas.

A quantidade de cartas que forma o monte é

A) 21 B) 24 C) 26 D) 28 E) 31

GABARITO

Questões de Progressão Aritimética

1	2	3	4	5	6
C	A	C	D	C	B