

# MECÂNICA

PARA VESTIBULANDOS  
IME - ITA



Volume 1

Cinemática - Leis de Newton

Renato Brito

Renato Brito Bastos Neto

# Mecânica para Vestibulandos IME ITA

Cinemática  
Leis de Newton

Volume 1

Editora Vestseller  
FORTALEZA - CE  
2007

É proibida a reprodução parcial ou total por quaisquer meios sem autorização prévia do autor. Os transgressores serão punidos nos termos da lei. Denuncie o plágio, cópias ilegais, pirataria pela internet, sites para download pirata, comunidades piratas na internet anonimamente através do correio eletrônico do autor :

**[mecanicaimeita@vestseller.com.br](mailto:mecanicaimeita@vestseller.com.br)**

Todos os direitos desta edição reservados a:  
© 2007 Renato Brito Bastos Neto

ISBN: 978-85-60653-00-3

Editor responsável: Renato Brito Bastos Neto  
Editoração: Renato Brito Bastos Neto  
Capa: Cleiton Maciel

Esta obra pode ser adquirida diretamente na  
EDITORA VESTSELLER  
através de sua página eletrônica [www.vestseller.com.br](http://www.vestseller.com.br)

FICHA CATALOGRÁFICA: Preparada por  
Ruth Helena Linhares Leite e Luiza Helena de Jesus Barbosa.

B327m Bastos Neto, Renato Brito

Mecânica para vestibulandos IME ITA / Renato Brito Bastos Neto. -  
Fortaleza: Vestseller, 2007. 310p. ; v.1.

ISBN - 978-85-60653-00-3

I. Mecânica II. Física (segundo grau) III. Dinâmica IV. Título

CDD 531



É proibida a reprodução parcial ou total por quaisquer meios sem autorização prévia do autor. os transgressores serão punidos com base no artigo 7º, da lei 9.610/98. Denuncie o plágio ou cópias ilegais anonimamente através do correio eletrônico do autor :

**[mecanicaimeita@vestseller.com.br](mailto:mecanicaimeita@vestseller.com.br)**

Todo o conteúdo dessa obra encontra-se registrado  
na Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro.



# Sumário

- Prefácio
- Apresentação
- Sobre o autor
- Carta ao pirata
- Como usar este livro
- Agradecimentos
- Dedicatória
- Para fazer uso das questões deste livro

## 01 – Cinemática Geral

Cinemática Geral.....	01
-----------------------	----

## 02 – Dinâmica Retilínea no Referencial Inercial

2.1 – O Domínio de Validade das Leis de Newton .....	19
2.2 – Introdução ao Referencial Inercial .....	20
2.3 – O Referencial do Planeta Terra .....	23
2.4 – O Formato da Trajetória e o Par de Eixos-padrão .....	29
Problemas de Aplicação .....	37
Problemas que Envolvem Atrito .....	48

## 03 – Dinâmica do movimento Curvilíneo no Referencial Inercial

3.1 – Dinâmica do Movimento Curvilíneo .....	53
3.2 – As Componentes Tangencial e Centrípeta da Aceleração .....	56
3.3 – Força em Trajetória Curvilínea .....	59
3.4 – Estudo do Movimento de um Pêndulo Simples .....	61
3.5 – Dinâmica do MCU Plano Horizontal .....	63
Problemas de Aplicação .....	68

## 04 – Dinâmica Retilínea no Referencial *Não inercial*

4.1 – Revendo o Referencial Inercial – Generalizações .....	73
4.2 – O Referencial Não inercial .....	76
4.3 – O Princípio da Equivalência de Einstein .....	80
4.4 – Elevador Acelerado para Cima .....	82
4.5 – Elevador Acelerado para Baixo .....	83
4.6 – Vagão Acelerado Horizontalmente .....	84
4.7 – Forças de Interação e Forças de Inércia .....	89
Propriedade dos Equilíbrios de Corpos Rígidos .....	130
Problemas de Aplicação .....	137

<b>05 – Dinâmica Curvilínea no Referencial Não inercial</b>	
5.1 – Introdução .....	138
5.2 – A Força Centrífuga .....	139
Problemas de Aplicação .....	165
<b>06 – Parábola de segurança – Tópico Especial 1</b>	
6.1 – Introdução à Parábola de segurança .....	169
6.2 – Entendendo a Parábola de segurança .....	169
6.3 – Determinando a Equação da Parábola de segurança .....	171
6.4 – Atingindo um alvo usando velocidade mínima de disparo ...	176
6.5 – Otimizando o Ângulo de Disparo .....	179
6.6 – Generalizando as Equações do Movimento Parabólico por Considerações de Simetria.....	182
6.7 – Generalizando o Alcance Máximo .....	186
<b>07 – Vínculos Geométricos – Tópico Especial 2</b>	
7.1 – Introdução aos Vínculos Geométricos .....	188
7.2 – Caso 1: Fios Inextensíveis, Polias Fixas .....	189
7.3 – Caso 2: Fios Inextensíveis, Uma Polia Móvel .....	191
7.4 – Caso 3: Fios Inextensíveis, Duas Polias Móveis .....	195
7.5 – Caso 4: Fio Inextensível, Variante com Duas Polias Fixas ....	196
7.6 – Caso 5: Corpos Rígidos Deslizando – Caso Simples .....	197
7.7 – Caso 6: Corpos Rígidos Deslizando – Caso Avançado .....	198
<b>08 – Respostas e Soluções</b>	
Respostas e Soluções .....	200
<b>09 – Referências Bibliográficas</b>	
Referências bibliográficas .....	298
<b>10 – Bibliografia</b>	
Bibliografia.....	301
<b>11 – Referências na internet</b>	
Referências na internet.....	302

# Prefácio

Acredito que, ao se escrever um livro, pensa-se muito, aprende-se mais, aperfeiçoam-se métodos de exposição e coordenam-se melhor as idéias. O resultado se faz sentir nas próprias aulas, extraordinariamente facilitadas pelo livro texto e, como conseqüência, o melhor aprendizado e aproveitamento dos alunos e dos colegas professores.

O livro é uma revolução, pois imaginem a influência sobre o espírito, a alma, o coração de quem lê, adquirindo e armazenando idéias das idéias alheias.

O livro de Mecânica do Professor Renato Brito é o nosso anseio e a nossa recompensa pelo esforço por ele feito. Que maravilha absorver a experiência tantos anos em preparação de vestibulandos do ITA e do IME, toda catalogada em teoria leve e bem elaborada, com a participação especial da aluna Claudete, além de exercícios fantásticos propostos e muitos resolvidos detalhadamente com o rigor que a Física requer.

Nós, professores dedicados ao ensinamento da Física, bem como os futuros alunos do ITA e do IME, que apreciamos uma Mecânica tratada de forma correta, com excelentes exercícios, temos em mãos uma obra única.

Finalmente, plagiando o filósofo e poeta Alexander Pope, poderíamos dizer :

*“Deus fez Newton, que criou a Mecânica - o grande sustentáculo teórico da Física - e fez Renato para divulgá-la através desta obra maravilhosa.”*

Marcos Haroldo Dantas Norões (\*)

(\*) Professor e Físico formado pela Universidade Federal do Ceará, o professor Marcos Haroldo é pioneiro na preparação do estudantes de Fortaleza que vão prestar vestibulares para o IME e para o ITA. Ele foi professor do autor em 1990 e 1991, na turma preparatória do Colégio Geo Studio, sendo seu atual colega de magistério tanto na turma ITA do Colégio Militar de Fortaleza, quanto nas turmas preparatórias para medicina e odontologia do Curso Simétrico. Os notáveis resultados obtidos pelos vestibulandos cearenses nos exames do IME e do ITA, desde 1989 até os dias de hoje (com média de 25 aprovados por ano no ITA), devem-se, em grande parte, ao trabalho de alto padrão de qualidade desenvolvido pelo prof. Marcos Haroldo nas mais diversas escolas cearenses onde leciona, com destaque para os resultados diretos e indiretos atingidos pelo Colégio Militar de Fortaleza.



# Apresentação

Escrevi este livro motivado pela carência de material didático sobre essa temática num nível adequado aos vestibulandos IME ITA.

Ele é o primeiro volume de uma coleção em três volumes intitulada *Mecânica para Vestibulandos IME ITA*, estruturada da seguinte forma:

- volume 1 – Cinemática geral e Leis de Newton;
- volume 2 – Energia, Sistemas de partículas, Dinâmica do centro de massa;
- Volume 3 – Estática, Hidrostática, Gravitação e MHS.

O capítulo 1 traz uma seleção especial de problemas de Cinemática, desde os clássicos presentes nas provas de Física IME ITA, até os criativos problemas dos livros da editora russa Mir, incluindo um pequeno número de problemas originais de minha autoria. Decidi não escrever uma teoria para esse capítulo por achar mais eficiente, para o estudante, o estudo direto das respectivas soluções, detalhadas ao final do livro. O capítulo 6 está vinculado ao capítulo 1 dessa obra e trata-se de um apêndice sobre Parábola de Segurança, onde descrevo e demonstro todas as fantásticas propriedades dessa ferramenta, muito útil na resolução de problemas de máximo e mínimo envolvendo lançamento de projéteis.

Nos capítulos 2 e 3, faço uma análise teórica bastante crítica e detalhada do conceito de Referencial Inercial, discutindo em situações práticas o domínio de validade das leis de Newton do movimento. Em seguida, compartilho com o leitor as minhas estratégias pessoais de resolução de problemas de dinâmica retilínea e curvilínea no *Referencial Inercial*, através de uma sequência de exemplos resolvidos. Uma lista de problemas propostos correlatos é fornecida ao final do capítulo, com suas respostas/resoluções apresentadas ao final do livro. O capítulo 7 é um apêndice a esses capítulos 2 e 3 e trata sobre os Vínculos Geométricos. Nele, mostro ao leitor como inter-relacionar as velocidades e acelerações de corpos conectados entre si por cordas, polias etc. em função da geometria envolvida nas mais variadas situações físicas.

Os capítulos 4 e 5 são dedicados ao estudo do referencial não-inercial. Na parte teórica, faço uma rica explanação sobre os conceitos de referencial não-inercial e forças fictícias, incluindo a análise prática de vários problemas em cada um dos referenciais inercial e não-inercial. Uma lista de problemas propostos correlatos é fornecida ao final desse capítulo, com suas respostas/resoluções contempladas ao final da obra.

Além dos 30 exemplos resolvidos ao longo do seu texto teórico, o livro contém um total de 150 problemas propostos para o estudante, sendo que cerca de 95 deles estão integralmente resolvidos ao final do livro (capítulo 8), muitas vezes com duas soluções distintas para um mesmo problema.

Ao longo de todo o livro, busco usar uma linguagem simples e irreverente, utilizando-me da personagem Claudete, a fim de tornar a sua leitura leve e prazerosa, amenizando o alto nível técnico praticado.

Optei por concentrar as respostas e resoluções dos problemas propostos no final do livro, acreditando que essa forma de organizar o conteúdo torne a sua leitura mais clara.

Os problemas marcados com o símbolo  (*resolução liberada*) têm a sua resolução completa detalhada no final do livro. Eles servem como base, isto é, como modelo para as questões que os sucedem. Estas, por sua vez, estão marcadas com o símbolo  (*resolução indisponível*), indicando que apenas as suas respostas são fornecidas ao final do livro, por se tratarem de questões de treinamento (correlatas) baseadas em modelos resolvidos.

Espero que a presente obra contribua para dar, ao leitor, uma compreensão mais sólida e aprofundada dos princípios da Dinâmica.

Para que eu possa aprimorar o seu conteúdo paulatinamente, o envio de críticas e sugestões, bem como de eventuais falhas que o leitor venha a encontrar, é bem-vindo, pelo email:

**[mecanicameita@vestseller.com.br](mailto:mecanicameita@vestseller.com.br)**

Renato Brito Bastos Neto  
Fortaleza, fevereiro de 2007

# Sobre o autor

O professor Renato Brito é cearense e atua no segmento IME ITA desde 1990, quando iniciou a sua preparação para o ITA (Instituto Tecnológico de Aeronáutica) nas turmas especiais do Colégio Geo Studio, em Fortaleza.

Foi aprovado no exame vestibular ITA 93, graduando-se engenheiro eletrônico em dezembro de 1997. A partir do segundo ano da faculdade, colaborou na preparação de vestibulandos IME ITA em um cursinho de São José dos Campos então recém fundado, o Poliedro, onde lecionou Física durante seis anos, retornando à sua cidade natal em janeiro de 1999. Desde então, atua em Fortaleza, tanto na preparação de vestibulandos IME ITA, quanto na preparação de vestibulandos de Medicina e Odontologia - segmento muito concorrido nos exames das universidades brasileiras.



Tomou contato com os livros da renomeada editora Mir – Moscou, pela primeira vez, aos dezesseis anos de idade, ao adquirir os livros *Problemas Seleccionados de Física Elementar* (Saraeva) e *Problemas de Matematica Elementares* (V.Lidski e Otros) na Livraria Arte e Ciência orientado pelo amigo prof. Majela Guedes. Desde então, passou a integrar a família dos inúmeros docentes e estudantes dos quatro continentes aficcionados pelos livros daquela editora russa.

A Mir - Moscou, embora ainda esteja ativa até os dias de hoje, restringiu sua produção ao mercado russo desde 1990, com a desintegração da união soviética, quando passou a editar e publicar livros apenas no idioma local.

Inconformado com a carência de publicações de ensino médio em ciências exatas voltadas para os vestibulandos IME ITA, fundou a editora VestSeller em 2005, visando a resgatar, na medida do possível, a qualidade dos livros nesse segmento, fechando contratos com editoras e autores na Índia, na Rússia e no Brasil.

A editora VestSeller é uma empresa do segmento pontocom, atuando em todo Brasil pela internet, através do seu sítio [www.vestseller.com.br](http://www.vestseller.com.br). Patrocina iniciativas filantrópicas, como o site [www.rumoaoita.com](http://www.rumoaoita.com), além de manter o Fórum Brasileiro dos vestibulandos do IME e do ITA no sítio [www.fisicaju.com.br/forum](http://www.fisicaju.com.br/forum).

# Carta ao Pirata

Em tempos modernos, é prudente o autor dedicar algumas palavras ao seu pior algoz e parasita: o pirata do século XXI.

Ele se julga muito esperto, superior a todos e acima da lei, duplicando e disseminando o produto do seu roubo através de fotocópias ou por meios eletrônicos, através de programas consagrados pelos usuários da internet.

Prezado Pirata,

Sei que você não faz a menor idéia do que foi o trabalho para produzir todo esse material de qualidade e ainda é incapaz de dimensionar quantos longos dias e noites solitárias me dediquei à escrita desse livro.

Entendo que seja muito cômodo encontrar o livro na internet pronto para ser salvo na memória do computador, reproduzido e distribuído de forma ilegal e, portanto, criminosa.

Quisera que você, por um infortúnio ou ironia do destino, passasse à posição de vítima como autor de alguma obra, e se deparasse, diariamente, com seus livros, músicas ou textos, disponíveis na internet, eletronicamente profanados, reduzidos a uma mera sequência de bits que solertemente trafegam pela rede.

Quisera, um dia, você vir o fruto do teu trabalho reduzido a farrapo digital. Ai sim, experimentaria do mesmo amargo que coloca em minha boca e vestiria o nariz vermelho de palhaço que contemplo diariamente, ao mirar o espelho.

Seja autor um dia e experimente a ira e o inconformismo que você desperta na alma desse que aqui vos fala em nome de toda a classe de autores. Só assim, sentindo na própria pele, seria possível adquirir uma consciência crítica e ética suficientes para estancar essa hemorragia social.

Pense duas vezes, antes de usurpar este meu filho querido. Se o fizer, te caçarei implacavelmente em todas as esquinas, você nunca mais terá paz até a Polícia Federal de qualquer país chegar até você. Se eu consigo fechar contratos com russos, indianos e outros povos do outro lado do mundo, então sou capaz de achar até mesmo uma agulha num palheiro. Prepare-se para a indenização, pois serei implacável e não lhe pouparei da minha ira.

Fortaleza, 09 de fevereiro de 2007

*Prof. Renato Brito*

# Como usar este livro

Para que o leitor tire máximo proveito da presente obra, darei, a seguir, algumas instruções que serão muito úteis.

Antes de mais nada, afirmo que não é necessário o conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral para uma perfeita assimilação do conteúdo deste livro. Toda a Matemática aqui praticada é de ensino médio.

Acredito que o nível das questões marcadas com ♣ (*resolução liberada*), ao longo de todo o livro, dê pouca margem para que o leitor com pouca experiência em Mecânica consiga resolvê-las sem consultar suas respectivas soluções ao final do livro (capítulo 8 de soluções), salvo raras exceções. Desta forma, acredito que seja mais estimulante e eficaz estudar diretamente suas soluções, tão logo seja compreendido o seu enunciado, deixando para avaliar o seu aprendizado com as questões que as sucedem, marcadas com ♠ (*resolução indisponível*).

O conteúdo do capítulo 1 de Cinemática Geral é independente dos demais capítulos da obra, podendo ser estudado oportunamente quando melhor convier ao leitor. Ainda assim, a compreensão das questões de número 49 a 55 do capítulo 1 requerem a leitura prévia do capítulo 6 (apêndice) sobre Parábola de Segurança. Portanto, durante o estudo do capítulo 1, o leitor deverá dar uma pequena pausa e, temporariamente, desviar para o capítulo 6, ao final do qual, retornará ao capítulo 1 para finalizar o seu estudo.

Os capítulos 2, 3, 4 e 5 formam um bloco coeso de conteúdo preparado de tal forma que a plena assimilação de cada um é pré-requisito para compreensão do seguinte. A violação da ordem desses capítulos, durante o estudo desse livro, comprometerá o aprendizado do leitor, podendo mesmo impossibilitá-lo.

A compreensão das questões de número 66 em diante requer a leitura prévia do capítulo 7 (apêndice) sobre Vínculos Geométricos. Portanto, durante o estudo do capítulo 2, o leitor deverá dar uma pequena pausa e, temporariamente, desviar para o capítulo 7, ao final do qual, retornará ao capítulo 2 para finalizar o seu estudo. O capítulo 7 tem um conteúdo muito rico e raro, sendo vital para a assimilação da maior parte deste livro.

Acredito que, seguindo essas instruções, mesmo um estudante com pouca experiência em Mecânica assimilará todo o conteúdo desta obra com sucesso, obtendo, em geral, um grande salto de conhecimento num espaço de tempo relativamente curto comparado. Imaginem quanto tempo o autor, particularmente, levou para aprender todo esse conteúdo e sedimentá-lo, maturá-lo, conteúdo esse espalhado em inúmeros livros, muitos deles estrangeiros. Este livro é um presente para todos os estudantes e professores brasileiros.

# Agradecimentos

Deus, pelo dom da vida e pela saúde;

Meu irmão Remo pelo apoio diário;

Meus amigos professor Daniel Leite, professor Vianey (UFC) e Wilson GG pela revisão dos originais, além das inúmeras críticas e sugestões;

Professor Marcos Haroldo por ter me iniciado na estrada da Física.

## Dedicatória

Este livro é dedicado a todos aqueles que **não** são movidos pela sedução do dinheiro e poder mas sim, por uma causa nobre, por um ideal.

Somente os idealistas podem mudar o mundo.

# Para fazer uso das questões desse livro

Nós professores levamos a vida a pesquisar boas questões para nossas provas e listas de exercícios, aprimorando, gradativamente, nossos próprios conhecimentos nessa busca incessante.

Ainda assim, para que esse processo ocorra de forma mutuamente justa e ética para os leitores e autores, é necessário que a fonte de cada questão, em nossos materiais, provas ou notas de aula, seja devidamente citada em local visível.

Acredito que, muitas vezes, os colegas professores não citem a fonte das suas questões por achar que esse fato não tem relevância, ou por não saber como fazê-lo devidamente. Entretanto, eles rapidamente descobrem a relevância deste procedimento, ao se tornarem autores.

Para saber a forma padrão de fazer referência aos autores/livros das questões constantes da presente obra, em suas provas ou listas de exercícios, consulte as referências bibliográficas no capítulo 10. Sugere-se que a referência seja feita logo após o enunciado da questão.

Para citar uma questão do livro do Kósel (Mir/VestSeller), por exemplo:

## **Questão 32 –** (kósel)

---

Um avião voa horizontalmente a uma velocidade  $V$ . Um observador ouve o barulho do avião  $T$  segundos após o aparelho ter passado sobre a sua cabeça. Se a velocidade do som no ar vale  $C$ , o prof. Renato Brito pede que você determine a que altura  $H$  voava a aeronave.

(Kósel, Stanislaw. *Problemas de Física Dirigidos por S. Kósel*. Moscou, Mir, 1977.)

Caso prefira, faça uma lista de referências bibliográficas ao final do material, de forma que você possa associar o enunciado de cada questão a uma das referências que constam da sua lista. Esta foi a forma adotada neste livro.

Um material com referências bibliográficas explícitas torna-se mais rico e valorizado, além de respeitar o trabalho daqueles que, efetivamente, viabilizaram aquele conteúdo.

Por fim, ratifico a importância de cada um fazer a sua parte, adquirindo consciência e semeando valores mais nobres em seus respectivos alunos, filhos, amigos. Com educação e cultura, gradativamente, desenvolveremos uma postura mais ética e responsável nos jovens brasileiros, trazendo benefício a toda sociedade.



# 1 CINEMÁTICA GERAL

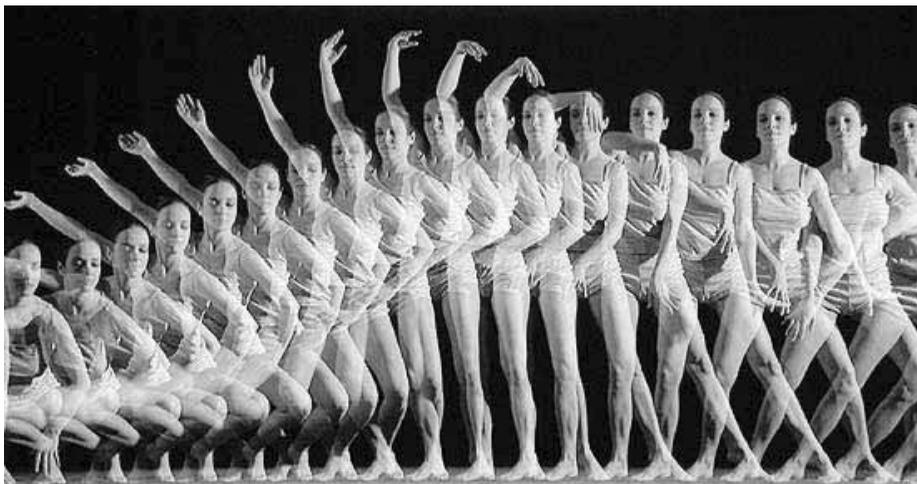
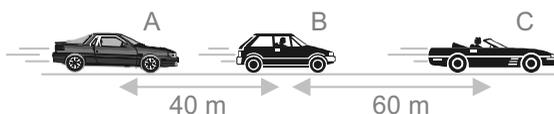


Foto por Andrew Davidhazy

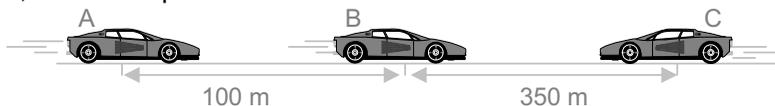
## Questão 01 - 🎧 (Renato Brito)

O esquema representa o instante inicial ( $t = 0\text{s}$ ) da perseguição entre três veículos A, B e C, que se deslocam com velocidades  $50\text{ m/s}$ ,  $20\text{ m/s}$  e  $60\text{ m/s}$ , respectivamente. Determine após quanto tempo o veículo A se encontrará exatamente entre os veículos B e C, a meia distância deles.



## Questão 02 - 🎧 (Renato Brito)

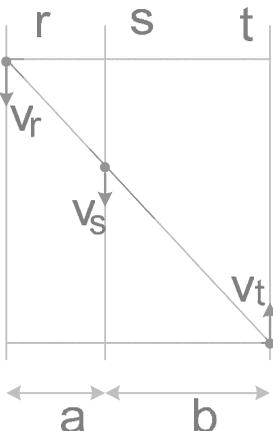
No esquema a seguir, os móveis A, B e C deslocam-se com velocidades respectivamente  $20\text{ m/s}$ ,  $40\text{ m/s}$  e  $50\text{ m/s}$ , respectivamente, numa mesma rodovia, de mão-dupla:



A partir desse instante, quantos metros o móvel C deverá percorrer, para que se posicione exatamente entre os móveis A e B, a meia distância deles ?

**Questão 03** – 🧠 (Renato Brito)

Duas partículas  $r$  e  $t$  partem simultaneamente das posições mostradas na Figura abaixo, em movimentos retilíneos e uniformes, com velocidades respectivamente iguais a  $v_r$  e  $v_t$ . Uma terceira partícula  $s$ , que se encontrava inicialmente alinhada às demais, deve mover-se de tal forma a permanecer alinhada às partículas  $r$  e  $t$ , durante todo o movimento. Determine a velocidade  $v_s$  com que a partícula  $s$  deverá mover-se, em função de  $v_r$ ,  $v_s$ ,  $a$  e  $b$ .

**Questão 04** – 🧠 (Renato Brito)

Num jockey club, a corrida de cavalos é realizada numa pista composta por 10 raias paralelas, retilíneas e equidistantes. Ao ser dada a largada, os cavalos das raias 1 e 6 disparam com velocidades  $V_1 = 6$  m/s e  $V_6 = 11$  m/s, respectivamente:



Com que velocidade  $V_3$  deve se deslocar o cavalo da raia 3 para que os três cavalos permaneçam alinhados durante toda a prova ?

**Questão 05** – 🧠 - (Tore Nils Johnson)

A e B são duas estações de uma estrada de ferro de linha dupla. Num dado instante, passa pela estação A um trem  $T_1$  que se dirige para B com velocidade de 54 km/h. Decorrido um certo intervalo de tempo, outro trem  $T_2$ , que move-se a 72 km/h, passa por A rumo à estação B. O intervalo de tempo que separa as passagens de  $T_1$  e  $T_2$  pela estação A é tal que ambos passariam simultaneamente pela estação B. Acontece, entretanto, que após ter percorrido  $2/3$  da distância que separa as duas estações, o trem  $T_1$  reduz sua velocidade à metade e em consequência é ultrapassado por  $T_2$  num ponto situado 10 km antes da estação B. Determinar a distância entre as duas estações.

**Questão 06** - 🎧 - (Saraeva adaptada)

(ITA 88 - adaptada) Três turistas, que possuem uma única bicicleta, movem-se ao longo de uma avenida reta, desejando ir do hotel ao centro turístico *no menor espaço de tempo* (o tempo é contado até que o último turista chegue ao centro). A bicicleta consegue transportar apenas duas pessoas de cada vez, a uma velocidade de 20 km/h e, por isso, o terceiro turista precisa começar o deslocamento a pé. O ciclista leva o segundo turista até um determinado ponto do caminho, de onde este continua a andar a pé, a uma velocidade de 4 km/h, enquanto o ciclista regressa para transportar o terceiro. Se a distância do hotel ao centro turístico é de 8 km, determine:

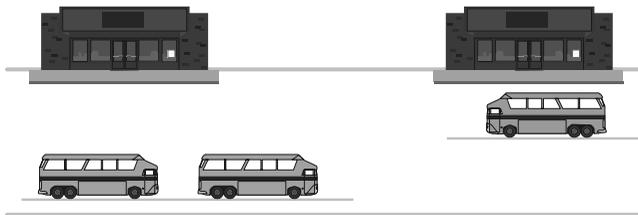
- em quanto tempo conseguirão chegar ao centro turístico ?
- o segundo turista deverá ser transportado de bicicleta até faltar quantos km para chegar ao centro turístico ?

**Questão 07** - 🎧 (Saraeva)

Um empresário trabalha num banco que fica nos arredores da cidade. Diariamente, ao chegar à última estação ferroviária, um carro do banco transporta-o para o local de trabalho através de uma avenida reta (de mão dupla) que liga o banco à estação ferroviária. Certa vez, o empresário chegou à estação 1h antes do habitual e, sem esperar o carro, seguiu a pé rumo ao local de trabalho, fazendo o percurso habitual do carro. No caminho, encontrou-se com o veículo e chegou ao banco 20 min antes do horário de costume. Quanto tempo caminhou o empresário antes de se encontrar com o carro ?

**Questão 08** - 🎧

Numa linha dupla que une duas estações A e B, movimentam-se bondes em ambos os sentidos, com velocidades escalares constantes e iguais em valor absoluto, de forma que, de 15 min em 15 min, em cada estação, dois bondes se cruzam. Um observador passa por uma das estações e presencia o cruzamento de dois bondes; em seguida, segue com movimento uniforme uma trajetória paralela aos trilhos e chega à outra estação no instante em que dois outros bondes se cruzam. Incluindo os quatro bondes vistos nas estações, pelo observador passaram 22 bondes em todo o percurso AB, sendo que sete movimentando-se no mesmo sentido e 15 no sentido contrário ao observador.



Pede-se determinar:

- quanto tempo cada bonde gasta para ir de A a B.
- quanto tempo o observador gasta para ir de A a B.

### Questão 09 - 🔒 (Renato Brito)

Um guarda caminha todos os dias ao longo de uma linha de bondes até uma estação ferroviária, retornando ao entardecer. No seu percurso de ida, percebeu ser ultrapassado pelos bondes que trafegam pela linha a cada seis segundos. Chegando à estação, o guarda sentou para almoçar e notou que os bondes passavam pela estação a cada  $T$  segundos. Já ao entardecer, caminhando no percurso de volta com a mesma velocidade usual, o guarda percebeu que agora os bondes passavam por ele a cada três segundos. Admitindo que os bondes trafeguem pela linha sempre com a mesma velocidade escalar o tempo inteiro, determine  $T$ :

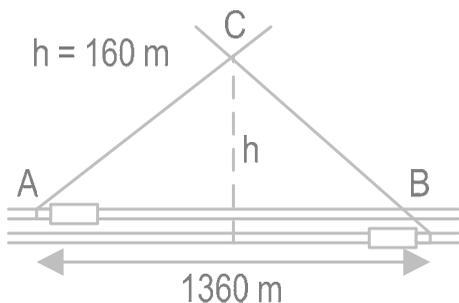
- a) 3,5 s      b) 4 s      c) 4,5 s      d) 5 s      e) 5,5 s

### Questão 10 – 🔒 - (Challenging Problems)

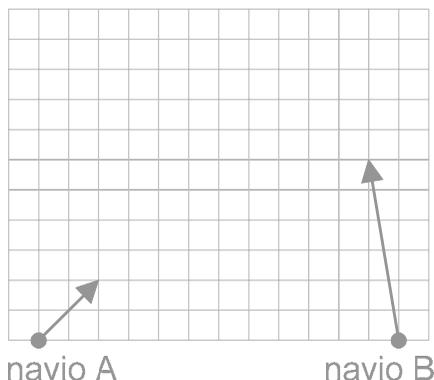
Uma coluna de soldados de 600 m de comprimento marcha ao longo de uma estrada com uma velocidade constante de 4,5 km/h. Na mesma direção da coluna, mas em sentido oposto, aproxima-se um oficial superior caminhando a uma velocidade constante de 3,0 km/h. Quando ele passa ao lado de cada soldado, ordena que estes se movam no sentido oposto. Cada soldado instantaneamente (tão logo recebe a sua ordem) inverte o sentido da sua marcha e continua com a mesma velocidade, mas no sentido oposto. Após algum tempo, toda a coluna está move-sendo no sentido contrário. Determine o novo comprimento da coluna de soldados.

### Questão 11 - 🌐 - (Kósel adaptada)

(ITA-91) A Figura representa a vista aérea de um trecho retilíneo de ferrovia. Duas locomotivas a vapor, A e B, deslocam-se em sentidos opostos com velocidades constantes de 50,4 km/h e 72 km/h, respectivamente. Uma vez que AC corresponde ao rastro da fumaça do trem A, BC ao rastro da fumaça de B e que  $AC = BC$ , determine a velocidade do vento. Despreze a distância entre os trilhos de A e B.



questão 11



questão 13

**Questão 12** – ♀ (Saraeva)

Um barco a motor, que ia subindo um rio, encontrou uma balsa que se movia no sentido da correnteza. Após uma hora do encontro, o motor do barco parou. O conserto do motor durou 30 min e durante esse tempo o barco moveu-se livremente no sentido da corrente. Depois do conserto, o barco começou a mover-se na direção da corrente, seguindo rio abaixo com a mesma velocidade relativa à água e encontrou a balsa a uma distância de 7,5 km em relação ao primeiro encontro. Determine a velocidade da correnteza.

- a) 5 km/h    b) 4 km/h    c) 3 km/h    d) 2 km/h    e) 6 km/h

**Questão 13** – ♀ (Renato Brito)

A Figura mostra, em escala, a velocidade vetorial de dois navios A e B, que move-se em com velocidade constante num oceano de águas paradas. Pede-se determinar qual a menor distância entre os navios durante essa travessia, em km. Cada célula quadrada tem lado 10 km

**Questão 14** – ♂

No instante  $t = 0$ s, uma canoa e uma lancha passam, respectivamente, pelos pontos A e B da água de um lago, movendo-se com velocidades constantes  $V_C$  e  $V_L$  conforme mostra a Figura. Determine qual será a mínima distância entre a canoa e a lancha e após quanto tempo elas estarão em tal situação.

Dados:  $\alpha = \beta = 60^\circ$ ,  $V_C = 40$  km/h,  $V_L = 80$  km/h,  $\overline{AB} = 20$  km



questão 14



questão 15

**Questão 15** – 🔒

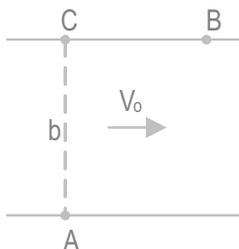
Um torpedo é lançado do ponto A no instante em que o navio inimigo se encontra no ponto B e navega com velocidade  $V_B = 50$  km/h, numa direção que forma ângulo  $\beta = 30^\circ$  com a direção  $\overline{AB}$ . Sabendo que a velocidade do torpedo é  $V_A = 100$  km/h, determine o ângulo  $\alpha$  com o qual ele deve ser lançado para atingir o alvo.

**Questão 16** – 🔒

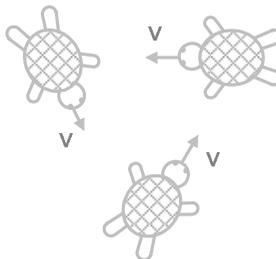
Quando um trem viaja sobre trilhos retilíneos retilínea, de leste para oeste, a 80 km/h, um passageiro no interior do trem sente o vento soprando do norte. Quando o trem passa a se mover a 20 km/h, o passageiro no interior do trem sente o vento soprando proveniente do nordeste, numa direção que forma  $45^\circ$  com o eixo leste-oeste. O prof. Renato Brito pede que você determine a velocidade do vento.

**Questão 17** – 🔒 (Saraeva)

Um homem em uma lancha deve sair do ponto A e chegar ao ponto B, que se encontra na margem oposta do rio. A distância BC é igual a  $a$ . A largura do rio AC é igual a  $b$ . Com que velocidade mínima  $u$ , relativa à água, deve mover-se a lancha para chegar ao ponto B? A velocidade da correnteza é  $v_0$ .



questão 17



questão 18

**Questão 18** - 🔒 (Saraeva)

**Crazy Turtles** - Três tartarugas encontram-se nos vértices de um triângulo equilátero de lado  $L$ . Simultaneamente, elas começam a se movimentar com uma velocidade  $V$ , sendo que a primeira se dirige em direção à segunda, a segunda em direção à terceira e a terceira, em direção à primeira.

- Após quanto tempo as tartarugas vão se encontrar?
- Qual a distância percorrida por uma tartaruga qualquer nesse episódio?

**Questão 19** – 🔒 (Saraeva)

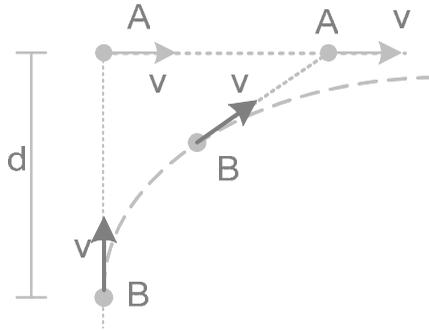
Quatro tartarugas encontram-se nos cantos de um quadrado de lado  $a$ . Simultaneamente, elas começam a se movimentar com uma velocidade constante em grandeza  $v$ , sendo que a primeira se dirige em direção à segunda, a segunda em direção à terceira, a terceira em direção à quarta e a quarta em direção à primeira.

- Após quanto tempo as tartarugas vão se encontrar?

b) Qual a distância percorrida por uma tartaruga qualquer nesse episódio ?

**Questão 20** - 🗣️ (Saraeva adaptada)

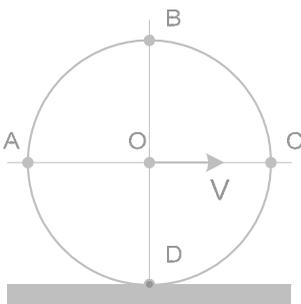
Da margem retilínea do porto do Pecém, partem duas lanchas A e B, que se encontravam a uma distância inicial  $d = 6 \text{ km}$  uma da outra. A lancha A se move numa trajetória perpendicular à margem, ao passo que a lancha B, desde o instante inicial, tomou um caminho constantemente dirigido à lancha A, tendo em cada momento a mesma velocidade da lancha A.



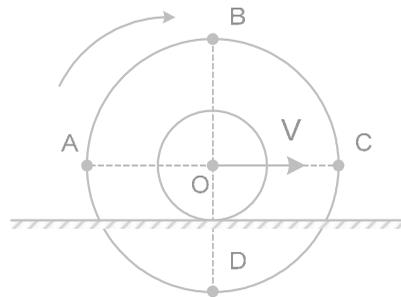
Mantendo-se no encaço da primeira lancha durante muito tempo, a segunda lancha acabará em movimento retilíneo, acompanhando o movimento da primeira lancha, a uma certa distância atrás dela. Determinar essa distância.

**Questão 21** - 🗣️

Uma roda de raio  $R$  rola sem escorregar sobre um plano horizontal, com o seu centro move-sendo a uma velocidade  $V$  em relação ao solo (veja Figura). Determine a velocidade dos pontos A, B, C e D em relação ao solo.



questão 21



questão 22

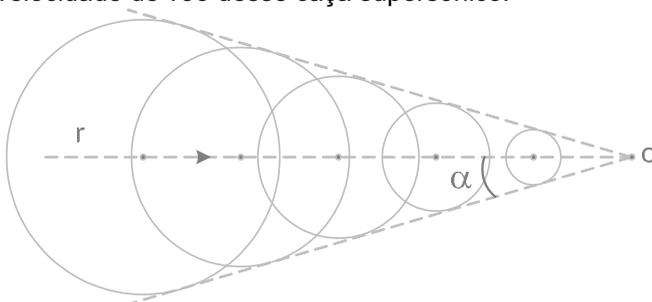
**Questão 22** - 🗣️

Uma roda de raio  $R$  rola sem escorregar sobre um plano horizontal, com o seu centro  $O$  movendo-se a uma velocidade  $V$  em relação ao solo (veja Figura). O contato com o solo é feito por meio de um volante de raio  $r < R$ . Determine a velocidade dos pontos A, B, C e D.

respectivamente, localizadas nos vértices desse triângulo. As formigas movem-se num plano horizontal. O prof. Renato Brito conta que, num certo instante, a velocidade  $V$  da formiga A aponta na direção AB, ao passo que a velocidade da formiga C aponta na direção BC, como mostra a Figura. Determine as velocidades das formigas B e C, no referido instante, em função de  $V$ .

### Questão 31 – 🎧

A Figura ilustra as frentes de onda esféricas emitidas por um caça supersônico da FAB, que se movimenta para a direita, ao longo da reta  $r$ , com velocidade horizontal constante. Sendo  $340 \text{ m/s}$  a velocidade de propagação do som nas condições da experiência e,  $\alpha = 30^\circ$ , o prof. Renato Brito pede que você determine a velocidade de vôo desse caça supersônico.

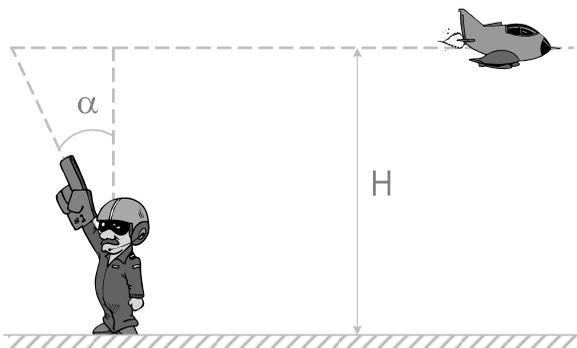


### Questão 32 – 🎧 (kósel)

Um avião voa horizontalmente a uma velocidade  $V$ . Um observador ouve o barulho do avião  $T$  segundos após o aparelho ter passado sobre a sua cabeça. Se a velocidade do som no ar vale  $C$ , o prof. Renato Brito pede que você determine a que altura  $H$  voava a aeronave.

### Questão 33 – 🎧 (Renato Brito)

Um piloto da AFA participava de um treinamento em solo, quando um caça supersônico, voando em movimento uniforme em trajetória horizontal, passou exatamente sobre a sua cabeça. O ruído emitido pelo avião, entretanto, só foi ouvido pelo observador seis segundos após a passagem do avião sobre a sua cabeça.



Tão logo percebeu o ruído, o observador apontou para a direção de onde julgava estar vindo o ruído da aeronave, direção essa que fazia um ângulo  $\alpha = 37^\circ$  com a vertical. O prof. Renato Brito pede que você determine:

- a) a velocidade do caça supersônico;  
b) a altura  $H$  em que o avião se encontrava.

Dado: Velocidade do som no ar = 330 m/s,  $\sin 37^\circ = 0,6$ ,  $\cos 37^\circ = 0,8$ .

### Questão 34 – 🎧 (kósel)

Um avião voa horizontalmente a uma altura  $h$  sobre a superfície da Terra, a uma velocidade supersônica. O ruído da turbina da aeronave só é ouvido por um observador na Terra depois de decorrido um tempo  $T$  da passagem do jato sobre a sua cabeça. Determine a velocidade do avião  $V$ , em função da velocidade do som  $v_s$ ,  $h$  e  $T$ .

### Questão 35 – 🚂

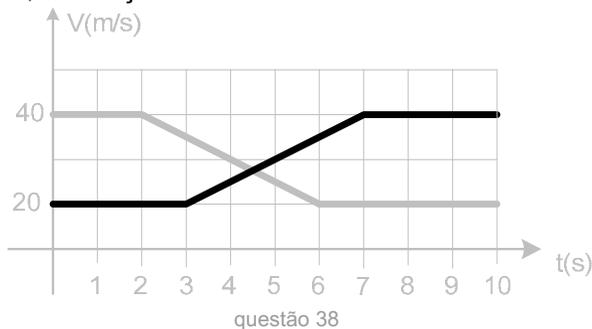
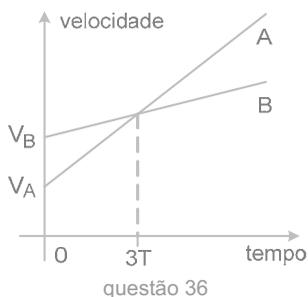
Um trem deve partir de uma estação A e parar na estação B, distante 4000 m de A. A aceleração e a desaceleração podem ser, no máximo, de  $5,0 \text{ m/s}^2$  e a maior velocidade que o trem atinge é 20 m/s. Determine o tempo mínimo para o trem completar o percurso de A a B, em segundos.

### Questão 36 – 🎧 (Renato Brito)

No instante inicial ( $t = 0$ ), dois móveis A e B passam por um mesmo ponto movendo-se sobre uma mesma trajetória retilínea, de acordo com o gráfico. Assim, o prof. Renato Brito pede para você determinar o instante em que os móveis voltarão a se encontrar novamente.

### Questão 37 – 🎧 (Renato Brito)

Quando o sinal vermelho passa a verde, um Porsche, que vem de trás, cruza o semáforo e prossegue seu movimento com velocidade constante. No mesmo instante, um Mondeo, que se encontrava parado no sinal, parte acelerando uniformemente, movendo-se ao encalço do Porsche. Sua aceleração é tal que a distância que o separa do Porsche, ao atingir a metade da velocidade deste, vale  $3d$ . O prof. Renato Brito pede que você determine a distância total percorrida pelo Mondeo até cruzar o Porsche, em função de  $d$ .



**Questão 48** - 🎧

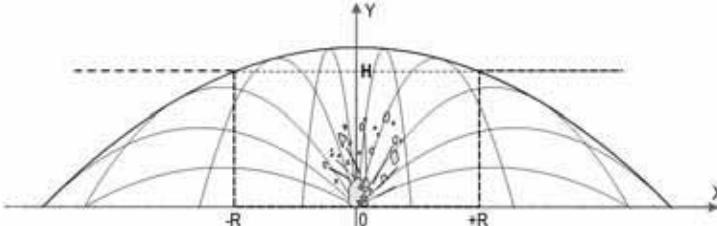
Uma bola é arremessada em movimento oblíquo no ar. Em certo instante, a velocidade da bola possui um ângulo de  $60^\circ$  com a horizontal, em movimento ascendente. Quatro segundos depois, o ângulo é de  $30^\circ$ , em movimento descendente. Determine a distância percorrida pela bola na vertical durante este tempo. Dado:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



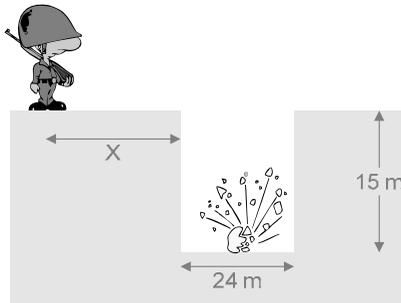
Para não entrar numa fria, não passe desse ponto sem antes ler o Tópico Especial 1 sobre Parábola de Segurança no Capítulo 6.

**Questão 49** - 🎧 (parábola de segurança - Saraeva)

As provas do detonador de uma granada efetuam-se no centro do fundo de um poço cilíndrico de profundidade  $H$ . Os estilhaços da granada, produzidos pela explosão e cujas velocidades não ultrapassam  $v_0$ , não devem cair na superfície da Terra. Qual deverá ser o diâmetro mínimo  $D$  do poço ?

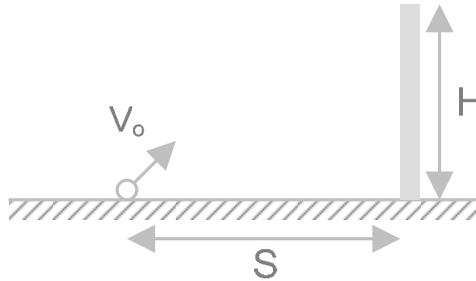
**Questão 50** - 🎧 (parábola de segurança – Renato Brito – Saraeva adaptada)

A Figura mostra um poço onde estão ocorrendo os testes da incrível granada KJU-P52, inicialmente posicionada no centro da base do poço. Após a explosão, seus fragmentos atingem uma velocidade de  $72 \text{ km/h}$  e espalham-se em todas as direções. Pedese determinar a menor distância  $X$  para a qual o inspetor de testes ainda está livre de ser atingido por qualquer fragmento. Considere que a granada esteja no centro da base do poço. Adote  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



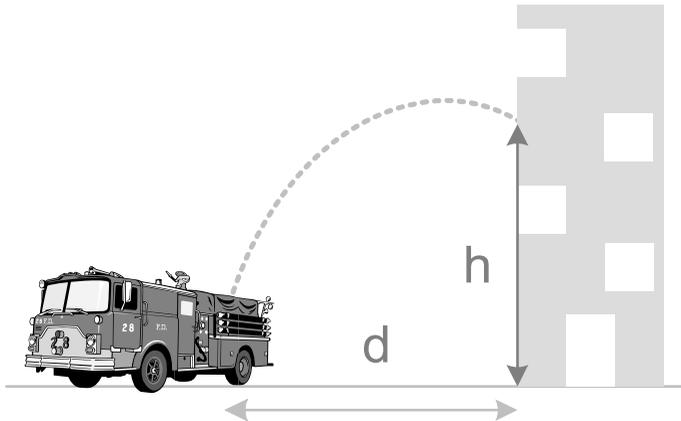
**Questão 51** - 🔒 (parábola de segurança – Renato Brito - Saraeva adaptada)

A Figura mostra uma bola a uma distância  $S = 6 \text{ m}$  de um muro de altura  $H = 3,2 \text{ m}$ . Determine a mínima velocidade  $V_0$  com que se deve arremessar a bola para que ela caia do outro lado do muro. Considere a gravidade local  $g = 10 \text{ m/s}^2$



**Questão 52** - 🔒 (parábola de segurança – Renato Brito )

A Figura mostra uma mangueira do corpo de bombeiros localizada a uma distância  $d = 20 \text{ m}$  de um prédio de  $40 \text{ m}$  de altura em chamas. A água expelida pela mangueira chega a  $72 \text{ km/h}$ . Pede-se determinar a altura  $h$  da janela mais elevada possível de ser atingida pela água dessa mangueira ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )



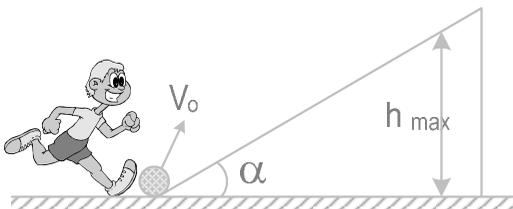
**Questão 53** - 🔒 (parábola de segurança – Saraeva )

Sob qual ângulo com a horizontal é necessário lançar uma pedra, da extremidade de um penhasco vertical de  $20 \text{ m}$  de altura, a fim de que ela caia a uma distância maior possível do paredão? A velocidade inicial da pedra é  $v_0 = 14 \text{ m/s}$ . ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**Questão 54** - 🎯 (parábola de segurança - Renato Brito)

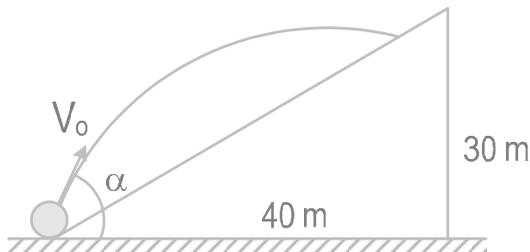
O jogador Roberto Carlos consegue disparar chutes com velocidade máxima  $v_0 = 30 \text{ m/s}$ . Se a bola está no pé de uma rampa inclinada  $\alpha = 30^\circ$  com a horizontal (veja Figura), numa região onde  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , o prof. Renato Brito pede para você determinar:

- a inclinação  $\theta$  do chute, em relação à horizontal, para que a bola atinja alcance máximo ao longo da rampa;
- a altura máxima  $H_{\text{máx}}$  que essa bola é capaz de atingir ao longo da rampa.

**Questão 55** - 🎯 (parábola de segurança - Renato Brito)

Um lançador dispara projéteis com velocidade  $v_0 = 20 \text{ m/s}$  ao longo de uma colina inclinada, cujas dimensões são mostradas na Figura abaixo. Sendo  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , o prof. Renato Brito pede que você determine:

- a altura máxima  $H_{\text{máx}}$  que esse projétil é capaz de atingir ao longo da colina;
- o ângulo  $\alpha$  de disparo do projétil com a horizontal nas condições do item a.



## 2 DINÂMICA RETILÍNEA NO REFERENCIAL INERCIAL



### 2.1 O DOMÍNIO DE VALIDADE DAS LEIS DE NEWTON

---

As leis de Newton são o pilar de sustentação da Mecânica. Elas descrevem o movimento dos corpos, tanto no céu como na Terra, descrevem as órbitas dos planetas, prevêm a existência de novos planetas e explicam o fenômeno das marés. Ainda assim, por mais brilhantes que sejam as três leis de Newton, é preciso cautela ao interpretá-las e aplicá-las.

A 1ª lei de Newton estabelece que todo corpo *livre da ação de forças* permanecerá em seu estado de repouso permanente ( $v = 0$ ) ou de movimento retilíneo e uniforme, até que alguma força atue sobre ele e altere seu estado de *equilíbrio*.

Esse repouso ao qual a lei da inércia se refere, entretanto, é em relação a quem? Afinal, sabemos que um móvel pode estar em repouso num referencial, mas em movimento em outro referencial. Você já havia pensado sobre isso?

A segunda lei de Newton, por sua vez, estabelece que a força resultante  $F_R$ , agindo sobre um corpo de massa  $m$ , proporciona a ele uma aceleração  $a$  tal que:

$$a = \frac{F_R}{m}$$

Sabemos, porém, que um móvel pode estar acelerado num referencial, mas estar não acelerado em outro referencial. A expressão da segunda lei de Newton fornece a aceleração do móvel em qual referencial? Você já havia pensado sobre isso?

Em geral, os livros-textos de Física não deixam bem claro para o estudante o fato de que as leis de Newton têm sua validade restrita ao chamado referencial inercial, cujo conceito é bastante sutil, requerendo atenção e concentração especiais por parte do leitor para assimilá-lo de forma eficaz.

Nesse capítulo, investigaremos o conceito de referencial inercial e faremos uma análise comparada entre os referenciais inerciais e não inerciais, buscando esclarecer de que maneira as leis de Newton falham nestes últimos.

No capítulo 4, aprenderemos o Princípio da Equivalência de Einstein, que nos ajudará a aplicar as leis de Newton com sucesso, mesmo nos referenciais não inerciais.

## 2.2 INTRODUÇÃO AO REFERENCIAL INERCIAL

Um referencial ou sistema de referência pode ser formalmente definido como um sistema de coordenadas cartesianas em relação ao qual são tomadas as medidas de posição XYZ, velocidade e aceleração de um móvel. Deixando de lado o formalismo matemático, podemos simplificar, considerando como referencial um simples observador que avaliará a cinemática e a dinâmica do móvel, medindo as grandezas físicas relevantes para o estudo do fenômeno em questão.

Por definição, um referencial é dito inercial quando nele se verifica a lei da inércia e, por extensão, a segunda lei de Newton.

Para verificar se um dado referencial é inercial, alguns testes experimentais diretos podem ser realizados em primeira aproximação.

Por exemplo, a Figura 1 mostra dois sistemas de coordenadas cartesianas: o sistema XYZ, fixo ao solo, e o sistema X'Y'Z', fixo a um vagão, que pode mover-se sobre trilhos retos e horizontais. O vagão, assim como a bola que se encontra sobre o seu piso, está inicialmente em repouso em relação à Terra (referencial XYZ). Sobre a bola agem apenas as forças peso  $P$  e normal  $N$ , visto que os atritos são desprezíveis. Qual será o comportamento da bola, no referencial da Terra, quando o vagão partir do repouso com aceleração  $a$  constante na direção horizontal X?

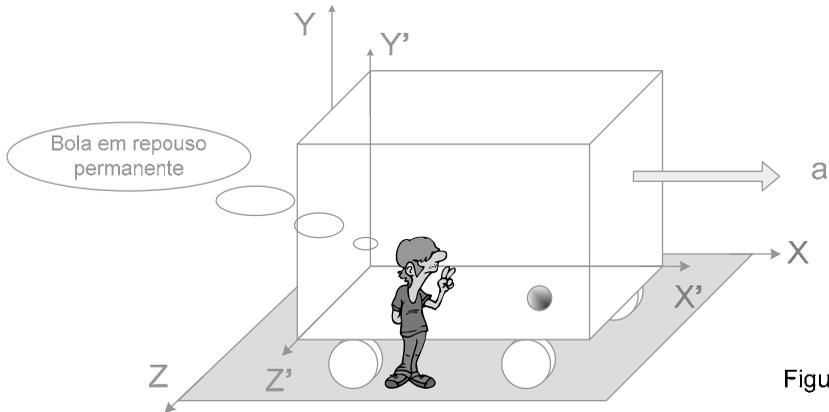


Figura 1

Ora, para o referencial da Terra (Figura 1), o vagão irá move-se acelerado para a direita, mas a bola permanecerá em repouso, isto é, suas coordenadas  $XYZ$  permanecerão inalteradas com o passar do tempo. Isso está de acordo com a lei na inércia. Afinal, se nenhuma força horizontal está agindo sobre a bola, ela deve permanecer indefinidamente em repouso nesse referencial. Dessa forma, dizemos que o referencial  $XYZ$  (referencial da Terra) é inercial, visto que a lei da inércia é verificada nesse referencial.

Por outro lado, qual será o comportamento da bola, no referencial do vagão, quando este partir do repouso com aceleração  $a$  constante na direção horizontal  $X$  ?

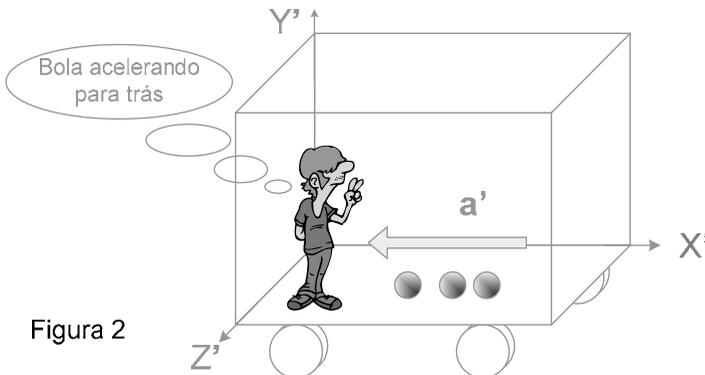


Figura 2

Ora, para o observador no referencial do vagão (Figura 2), a bola partirá do repouso e se moverá com aceleração  $a' = a$  no sentido oposto ao do eixo  $X$ . Em outras palavras, a coordenada  $X'$  da bola irá diminuir aceleradamente, com o passar do tempo, no referencial  $X'Y'Z'$ .

Esse comportamento notavelmente *viola a Lei da Inércia*. Afinal, se nenhuma força (de interação) horizontal age sobre a bola, no referencial do vagão, como pode ela sair do repouso e passar a move-se aceleradamente para trás ? Esse comportamento mostra que esse vagão acelerado em relação à Terra (bem

como o observador em seu interior) não se trata de um referencial inercial. Dizemos que ele é um referencial *não inercial*.

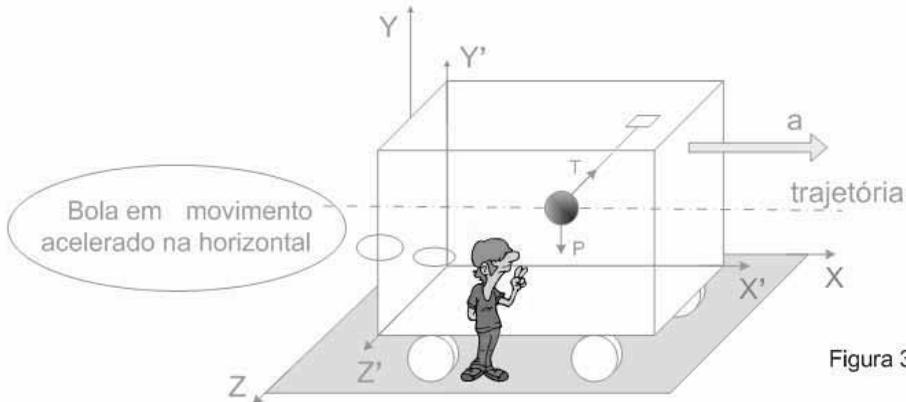


Figura 3

Outro teste simples pode facilmente confirmar o caráter não inercial do referencial do vagão: pendure um pêndulo simples ao teto desse vagão, enquanto este move-se com aceleração constante  $a$  no referencial  $XYZ$  da Terra (Figura 3). Ajuste convenientemente a inclinação do fio do pêndulo, de forma que ele não oscile, durante o movimento acelerado do vagão em trajetória retilínea horizontal.

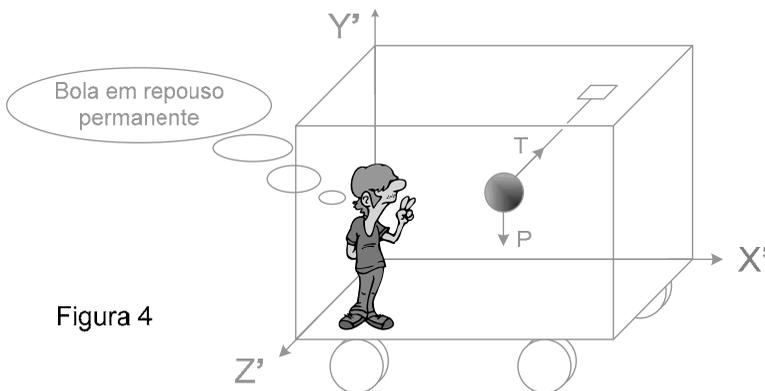


Figura 4

Qual será o comportamento da bola, no referencial da Terra, quando o vagão partir do repouso com aceleração  $a$  constante na direção horizontal  $X$ ?

Ora, no referencial da Terra (Figura 3), a bola estará move-sendo para a direita, numa trajetória retilínea horizontal, compartilhando da mesma aceleração  $a$  do vagão nesse referencial. O observador da Figura 3 entende perfeitamente a dinâmica desse movimento da bola, com base nas forças que agem sobre ela:

- a bola move-se em trajetória retilínea horizontal, o que implica uma ausência de aceleração vertical, isto é, um equilíbrio de forças verticais. Assim, a componente vertical  $T_Y$  da tração deverá cancelar o peso:  $T_Y \uparrow = P \downarrow$ .

- a aceleração horizontal “ $\rightarrow a$ ” da bola é proporcionada pela componente horizontal  $T_x \rightarrow$  da tração. A segunda lei de Newton permite escrever:  $F_R = T_x = m \cdot a$ .

Por outro lado, qual será o comportamento da bola no referencial do vagão, quando este partir do repouso com aceleração  $a$  constante em relação à Terra na direção horizontal  $X$  ?

Ora, para o observador no referencial do vagão (Figura 4), a bola, assim como o vagão, se encontra em repouso permanente  $v' = 0$ ,  $a' = 0$  (usaremos o símbolo linha “ ’ ” para designar grandezas medidas no referencial acelerado). Em outras palavras, as coordenadas  $X'Y'Z'$  da bola não mudam com o passar do tempo nesse referencial.

De acordo com a segunda lei de Newton ( $F_R = m \cdot a'$ ), todavia, para que a bola do pêndulo esteja em equilíbrio ( $a' = 0$ ), é necessário que a força resultante agindo sobre a bola seja nula, condição essa que não está sendo satisfeita, visto que a tração  $T$  e o peso  $P$  não possuem a mesma direção e sentidos opostos a fim de se cancelarem.

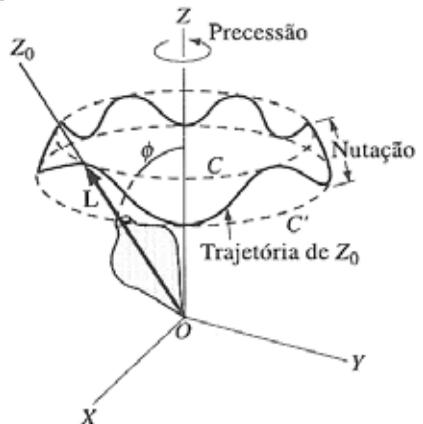
Assim, vemos que, embora a força resultante agindo sobre a bola não seja nula ( $F_R \neq 0$ ), a aceleração  $a'$  da bola é nula no referencial do vagão, violando a segunda lei de Newton  $F_R = m \cdot a'$ . Desta forma, verificamos, mais uma vez, que o referencial do “vagão acelerado” não é inercial, visto que as leis de Newton não são satisfeitas nele. Dizemos que ele é um referencial *não inercial*.

**Propriedade 1:** as leis de Newton só são válidas em referenciais inerciais.

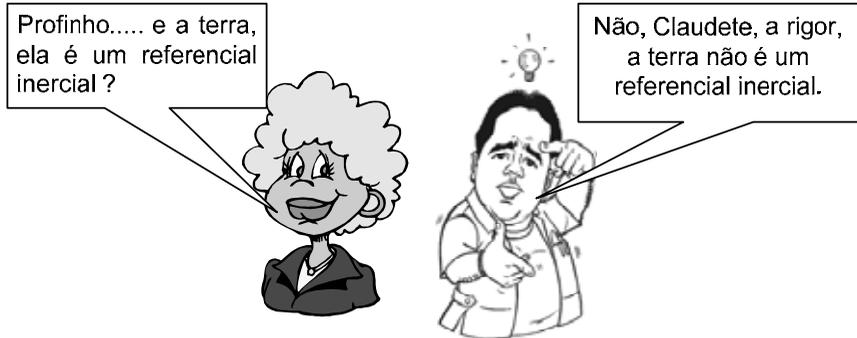
### 2.3 O REFERENCIAL DO PLANETA TERRA

A Terra move-se como um pião através do espaço sideral, executando uma série de movimentos simultâneos:

- 1) **translação** ao redor do Sol, com período de aproximadamente 365 dias;
- 2) **rotação** em torno do seu próprio eixo, com período aproximado de 24h;
- 3) **precessão** – o próprio eixo  $Z_0$  da Terra executa uma rotação em torno do eixo  $Z$ , com período aproximado de 27.725 anos;
- 4) **nutação** – o ângulo  $\phi$  formado entre os eixos  $Z_0$  e  $Z$  oscila com amplitude de  $9,2^\circ$  de arco e período de oscilação de 19 anos.



Em meio a todos esses movimentos executados pelo nosso planeta em seu movimento pelo espaço sideral, lembramo-nos de que nossos laboratórios terrestres encontram-se todos fixos à superfície da Terra, o que, automaticamente, suscita a seguinte pergunta:



A rigor, a Terra não é um referencial inercial. Esse fato decorre, principalmente, do movimento de rotação que ela executa em torno do seu eixo. Um dos experimentos mais simples e mais admiráveis que comprovam a rotação da Terra em torno do seu eixo foi realizado publicamente por Leon Foucault, em 1851, sob a grande cúpula do Pantheon em Paris (Figura 5).

Foucault suspendeu uma esfera de 28 kg (Figura 6), através de um fio de 70 m de comprimento, ao teto do Pantheon. A maneira pela qual a extremidade superior do fio foi presa permitia ao pêndulo oscilar livremente em qualquer direção com um período de 17 segundos aproximadamente .



**Figura 5** - Cúpula do Pantheon em Paris

Em torno do ponto, no solo, diretamente abaixo do ponto de suspensão do pêndulo, foi construída uma pequena elevação circular de aproximadamente 3m de raio (Figura 6). Nessa elevação, foi colocado um pouco de areia, de modo que uma ponta metálica que saía da esfera do pêndulo, para baixo, varria a areia a cada oscilação (veja trajetórias na Figura 11).



**Figura 6** - vista interna do Pantheon em Paris

Após sucessivas oscilações, tornou-se claro que o plano vertical do movimento do pêndulo estava girando no sentido dos ponteiros do relógio, quando visto de cima. Em um intervalo de 1h, o plano de oscilação desse pêndulo do Pantheon girava mais de 11 graus, completando uma volta em aproximadamente 32 h.

Por que motivo, então, o plano de oscilação do pêndulo gira para um observador localizado sobre a Terra? Será que o plano de oscilação do pêndulo de Foucault também gira no referencial das estrelas distantes (referencial inercial padrão)?

Seja um pêndulo semelhante ao de Foucault suspenso no pólo norte terrestre. Para um observador fixo às estrelas distantes, o plano de oscilação desse pêndulo permanece fixo nesse referencial; entretanto, o fato de a Terra girar em torno do seu eixo no sentido anti-horário fará o plano das oscilações do pêndulo de Foucault girar no sentido horário (Figura 11), para um observador localizado sobre o hemisfério norte da Terra (sequência de Figuras 7, 8, 9 e 10), perfazendo uma rotação completa a cada 24 horas, no caso específico de um pêndulo localizado exatamente nos pólos.

Pode-se mostrar que esse período  $T$  de rotação do plano de oscilação do pêndulo varia com a latitude  $\varphi$  da cidade onde o pêndulo esteja localizado, segundo a expressão abaixo:

$$T = \frac{24 \text{ h}}{\sin \varphi}$$

Assim, para uma latitude  $\varphi = 0^\circ$  (equador), esse período é infinito, isto é, um pêndulo de Foucault localizado na linha do equador oscila num plano fixo. Para uma latitude  $\varphi = 90^\circ$  (pêndulo localizado nos pólos), o plano de oscilação do pêndulo gira com o mesmo período de rotação da Terra (24h).

Como justificar essa rotação do plano de oscilação do pêndulo pela análise das forças que agem nele?



Figura 7



Figura 8



Figura 9

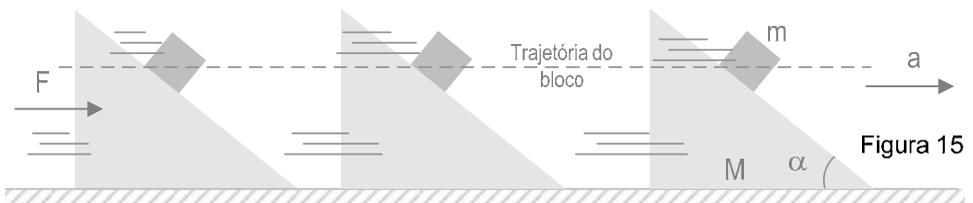


Figura 10

**Figuras 7, 8, 9 e 10-** Para uma observadora que se encontra no referencial das estrelas distantes, a oscilação do pêndulo simples ocorre num plano vertical fixo. Para um observador que se encontra fixo à superfície da Terra em rotação horária em torno do seu eixo, entretanto, o plano de oscilação vertical desse pêndulo não permanece fixo, mas gira no sentido anti-horário.

Esse par de eixos descrito será denominado “Par de eixos-padrão”. Na maioria das resoluções, adotaremos o par de eixos-padrão, fazendo uso de eixos alternativos apenas quando a simplificação algébrica obtida nesse caso for vantajosa (o que raramente acontece).

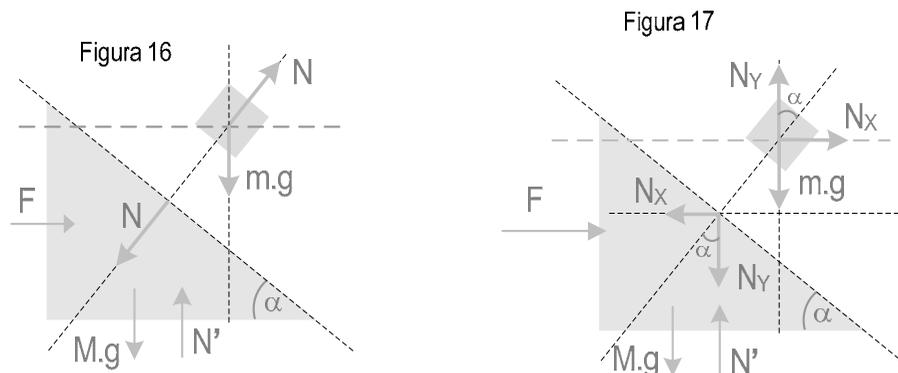
**Exemplo Resolvido 1:** a Figura mostra um prisma de massa  $M$  que move-se sobre um plano horizontal. Um pequeno bloco de massa  $m$  se encontra apoiado sobre a superfície inclinada do prisma. Se a gravidade local vale  $g$ , o prof. Renato Brito pede que você determine com qual força  $F$  horizontal e constante se deve empurrar esse prisma, de forma que o conjunto se mova sem que o bloquinho escorregue em relação ao prisma. Todos os atritos são desprezados.



### Solução

A Figura 16 mostra o diagrama das forças que agem no prisma e no bloco. A questão-chave, para o estudante de Física, é “qual das forças que agem no bloquinho deve ser decomposta,  $N$  ou  $m.g$  ?” Será que tanto faz ?

A resposta é que devemos fazer uso do chamado Par de Eixos-padrão (mostrado na Figura 14), a fim de que o nosso equacionamento do problema seja mais objetivo, reduzindo o trabalho algébrico. A seguir, analisaremos a Dinâmica do movimento da caixa, com base no formato da sua trajetória descrita no referencial da Terra.



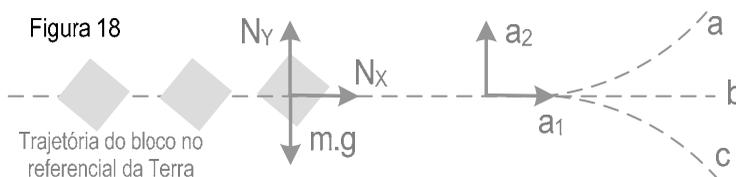
Segundo o enunciado, bloco e prisma descreverão trajetórias retilíneas compartilhando das mesmas acelerações  $\rightarrow a$  no referencial da Terra, como mostra a Figura 15. A trajetória do bloco no referencial da Terra define o eixo 1 a ser adotado, o chamado eixo tangencial. Conforme expresso anteriormente, em movimentos retilíneos, o eixo 1 sempre coincide com a trajetória do corpo em

relação à Terra (referencial inercial), portanto será horizontal nessa questão. O eixo 2 (centrípeto ou normal) é perpendicular ao eixo 1, portanto será vertical nessa questão.

Assim, adotando esse par de eixos-padrão, decomponemos apenas as forças que não estiverem sobre nenhum desses dois eixos, como mostra a Figura 17.

O formato da trajetória seguido pelo bloco, no referencial inercial (Terra), é uma reta horizontal (Figura 18b) que não se curva nem para cima (Figura 18a) nem para baixo (Figura 18c), sugerindo que o bloco não possui aceleração na direção 2 ( $a_2 = 0$ ), isto é, que o bloco encontra-se em equilíbrio ( $F_R = 0$ ) na direção do eixo 2, o que permite escrever:

$$\text{Equilíbrio na direção 2: } N_Y = m \cdot g \Rightarrow N \cdot \cos \alpha = m \cdot g \quad (\text{eq1})$$



Na direção 1, bloco e prisma compartilham de uma mesma aceleração  $a_1 = a$  no referencial da Terra. O diagrama de forças da Figura 18 mostra que essa aceleração horizontal do bloquinho decorre da força  $N_X$ . A segunda lei de Newton permite escrever:

$$F_R = m \cdot a \Rightarrow N_X = m \cdot a \Rightarrow N \cdot \sin \alpha = m \cdot a \quad (\text{eq2})$$

O prisma compartilha dessa mesma aceleração horizontal  $a$ , portanto, observando as forças horizontais que agem no prisma, na Figura 17, vem:

$$F_R = M \cdot a \Rightarrow (F - N_X) = M \cdot a \Rightarrow (F - N \cdot \sin \alpha) = M \cdot a \quad (\text{eq3})$$

Dividindo as equações eq1 e eq2 membro a membro, vem:  $a = g \cdot \text{Tg} \alpha$ . Essa é a aceleração horizontal que os corpos devem compartilhar (no referencial da Terra) a fim de que o bloco se mova em equilíbrio vertical. Agora, com qual força  $F$  devemos empurrar o prisma para que ambos compartilhem dessa aceleração?

Somando as equações eq2 e eq3, membro a membro, vem:

$$F = (M + m) \cdot a \quad (\text{eq 4a})$$

A relação eq4 nos lembra que ambos os corpos compartilham da mesma aceleração horizontal  $a$  no referencial da Terra (como mostra a Figura 15) e, portanto, podem ser tratados como se fossem corpo único de massa " $M + m$ " movendo-se com aceleração  $a = g \cdot \text{Tg} \alpha$ . Em linhas gerais, só é possível considerar um sistema de  $N$  corpos como se fosse corpo único, a fim de aplicar a segunda lei de Newton, quando todos os corpos do sistema compartilharem de

uma mesma aceleração  $a$  (que será a aceleração do centro de massa do sistema). Assim, da relação eq 4a, vem:

$$F = (M + m).a \quad \Rightarrow \quad F = (M + m).g.Tg\alpha \quad (\text{eq 4b})$$

Profinho, eu queria decompor o peso do bloco, em vez da normal  $N$ . Daria certo também ?



Daria, mas não seria tão vantajoso quanto se você usasse o par de eixos-padrão



A Figura 19 mostra o diagrama das forças agindo no bloco, fazendo uso de um sistema de eixos cartesianos alternativo, como sugeriu a Claudete. Nesse caso, relacionar a aceleração horizontal ( $\rightarrow a$ ) do bloco com a força resultante horizontal que causou essa aceleração, torna-se uma missão complicada, visto que as forças que agem no bloco ( $N$ ,  $p.\text{sen}\alpha$  e  $p.\text{cos}\alpha$ ) não se encontram direcionadas ao longo do mesmo sistema de eixos coordenados que contém a aceleração, como mostra a Figura 19.

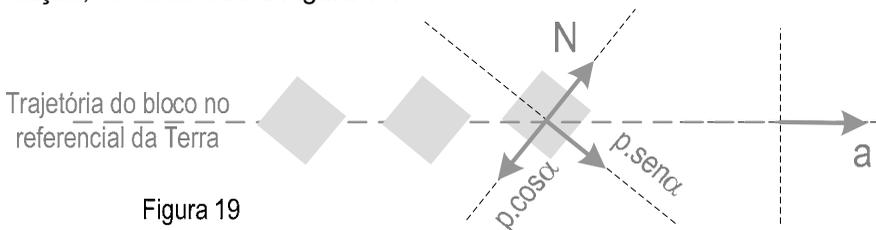
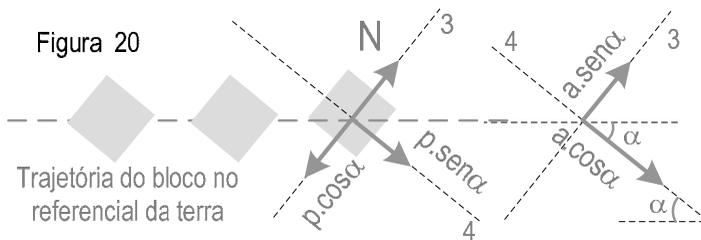


Figura 19

Dizemos que o diagrama de forças não está “casado” com o diagrama cinemático do bloco (o par de eixos das forças não coincide com o par de eixos da aceleração), o que dificulta o equacionamento da segunda lei de Newton.

Para melhor compreender, note que o diagrama de forças (padrão) utilizado na Figura 18 ficou automaticamente “casado” ao diagrama cinemático (forças e acelerações estão direcionadas sobre o mesmo par de eixos), permitindo que facilmente se chegasse às relações eq1 e eq2, levando-se em conta o formato da trajetória descrita pelo bloco, bem como a segunda lei de Newton. Essa simplicidade, em geral, é obtida quando se faz uso do par de eixos-padrão.

Para resolver o problema usando o diagrama de forças da Figura 19 (resolução que deve ser evitada), decomponemos a aceleração  $a$  no mesmo sistema de eixos das forças  $N$ ,  $p.\text{sen}\alpha$  e  $p.\text{cos}\alpha$ , escrevendo a segunda lei de Newton para cada direção, como mostra a Figura 20:



Direção 3:  $F_R = m.a \Rightarrow (N - m.g.\cos\alpha) = m.a.\sen\alpha$  (eq5).

Direção 4:  $F_R = m.a \Rightarrow (m.g.\sen\alpha) = m.a.\cos\alpha$  (eq6).

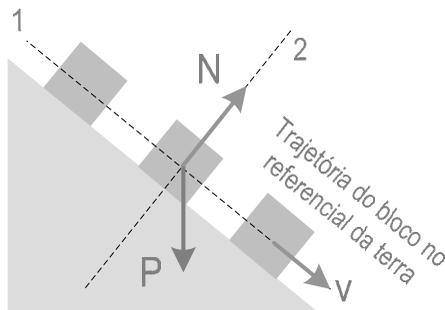


Figura 21

As relações eq5 e eq6 (determinadas a partir da análise das forças no sistema de eixos alternativos) são perfeitamente compatíveis com as relações eq1 e eq2 (determinadas a partir da análise das forças no sistema de eixos-padrão) e levam ao mesmo resultado encontrado inicialmente, requerendo, entretanto, maior processamento algébrico, o que deve ser evitado.

Profinho, mas por que tem questões de plano inclinado em que a gente decompõe é o peso P, em vez da normal?



Ora, basta perceber que há uma diferença entre o formato da trajetória de cada uma dessas questões.



Nas questões mais comuns de planos inclinados, o bloquinho move-se ao longo da rampa (Figura 21), descrevendo uma trajetória retilínea na direção da rampa (no referencial da Terra), indicando que devemos tomar um sistema de referência-padrão com o eixo 1 paralelo à rampa e o eixo 2 perpendicular à rampa.

Nesse caso, a força que será decomposta (por estar fora dos eixos 1 e 2) será o peso P do bloco, visto que a normal N estará sobre o eixo 1 (Figura 21).

Portanto, em cada situação-problema, devemos sempre identificar o sistema de eixos-padrão a ser usado na resolução, a fim de obter um diagrama de forças casado ao diagrama cinemático, facilitando o equacionamento da segunda lei de Newton.

Portanto, em linhas gerais, ao iniciar a resolução de um problema de Dinâmica, é interessante o estudante sempre atentar para os seguintes passos a serem seguidos:

- 1) separe todos os corpos e coloque todas as forças que agem em cada um deles;
- 2) identifique o formato da trajetória seguida pelo corpo (reta horizontal, reta inclinada, reta vertical etc);
- 3) cada corpo deverá ganhar um par de eixos, sendo o eixo 1 de cada corpo posicionado sobre a sua trajetória retilínea, e o eixo 2 posicionado perpendicularmente ao primeiro eixo; e
- 4) decomponha todas as forças que não caíram sobre o eixo 1 nem sobre o eixo 2 de cada corpo. As demais forças, em geral, não devem ser decompostas.

Profinho, eu pensei em resolver essa questão no referencial do prisma e admitir que o bloquinho está em equilíbrio em relação ao prisma. Daria certo também ?



Lembra o que falamos em nossa discussão sobre referenciais inerciais e referenciais não inerciais ?



Claudete, não podemos resolver esse problema adotando o prisma como referencial e admitindo que o bloco esteja em equilíbrio nesse referencial. Por quê ? A resposta é que, conforme discutimos na página 22 (Figura 4), as leis de Newton **só** relacionam as forças que agem num corpo com as suas respectivas acelerações **no referencial inercial** (a Terra, por simplicidade), não sendo válidas num referencial não inercial (acelerado), como no caso do prisma dessa questão.

Os problemas que resolveremos desse ponto em diante, ao longo dos capítulos 2 e 3, serão todos no referencial inercial, para que o leitor se familiarize com esse referencial.

A partir do capítulo 4, quando tivermos adquirido mais experiência na resolução de problemas de Dinâmica no referencial inercial, aprenderemos a resolvê-los

também no referencial acelerado com auxílio do *Princípio da Equivalência de Einstein*, que eu, professor Renato Brito, explicarei no Capítulo 4.

Bom aprendizado !

**Questão 71** – 📍 (vínculos geométricos - Física Clássica - Calçada)

No sistema representado na Figura, os fios e as polias são ideais e não há atrito entre o bloco A e a superfície de apoio. A aceleração da gravidade tem módulo  $10\text{m/s}^2$  e as massas dos blocos A e B são respectivamente iguais a 2 kg e 12 kg. Calcule os módulos:

- das acelerações dos blocos A e B; e
- da tração no fio ligado ao bloco A.

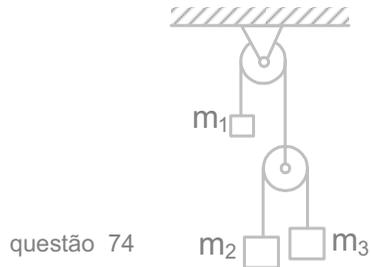
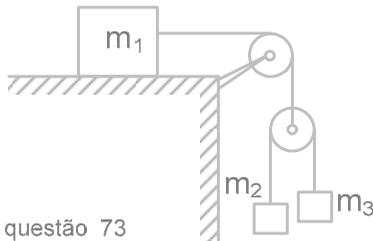
**Questão 72** – 📍 (vínculos geométricos - Física Clássica - Calçada)

Considere o sistema representado na Figura, onde os fios e as polias são ideais. A aceleração da gravidade tem módulo  $10\text{ m/s}^2$  e as massas de A e B são respectivamente iguais a 3 kg e 2 kg. Sendo  $a_A$  e  $a_B$  os módulos das acelerações dos blocos A e B, determine:

- os valores de  $a_A$  e  $a_B$ ;
- o módulo da tração no fio ligado ao bloco A.

**Questão 73** – 📍 (vínculos geométricos – Alonso & Finn)

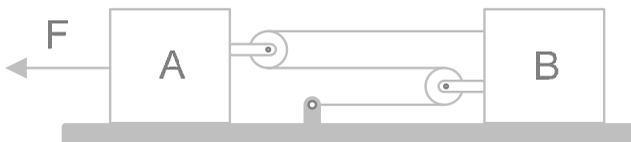
Na Figura, os fios e polias são ideais e as massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  são conhecidas. Se a gravidade local vale  $g$ , pede-se determinar a aceleração de cada caixa.

**Questão 74** – 📍 (vínculos geométricos – Alonso & Finn)

Na Figura, os fios e polias são ideais e as massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  são conhecidas. Se a gravidade local vale  $g$ , pede-se determinar a aceleração de cada caixa.

**Questão 75** – 📍 (vínculos geométricos – Beer & Johnston)

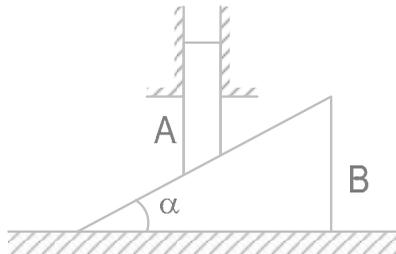
A Figura mostra dois blocos A e B ( $m_A = 2\text{ kg}$ ,  $m_B = 6\text{ kg}$ ), puxados por uma força  $F$  de intensidade  $F = 14\text{ N}$  sobre um solo liso. O prof. Renato Brito pede para você determinar ( $g = 10\text{ m/s}^2$ ):



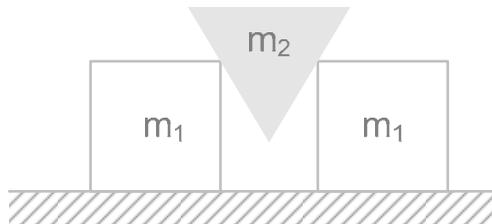
- a aceleração de cada bloco; e
- a tração no cabo.

**Questão 76** – 📌 (vínculos geométricos – Saraeva - Irodov)

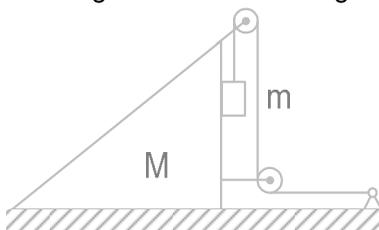
Determine a aceleração da barra  $A$  e da cunha  $B$  na Figura abaixo, sabendo que a razão entre as massas  $m_B$  e  $m_A$  vale  $\eta$ , a gravidade local vale  $g$  e todos os atritos são desprezíveis.

**Questão 77** – 📌 (vínculos geométricos - Challenging Problems)

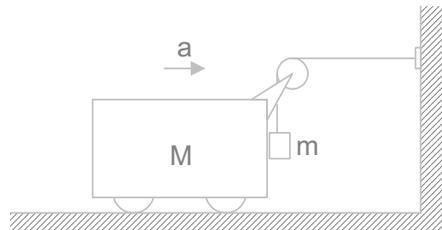
Sejam dois cubos idênticos de mesma massa  $m_1 = 3$  kg e uma cunha de massa  $m_2 = 2$  kg e seção triangular equilátera simetricamente posicionada entre eles. Desprezando-se todos os atritos, pede-se determinar a aceleração vertical adquirida pela cunha, quando o sistema for abandonado a partir do repouso ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ ).

**Questão 78** – 📌 (vínculos geométricos – Irodov adaptada)

Na Figura, todas as polias e fios são ideais, bem como todos os atritos são desprezíveis. Abandonando-se o sistema do repouso, pede-se determinar a aceleração da cunha de massa  $M$  em relação à Terra. A massa do bloco vale  $m$  e a gravidade local vale  $g$ .



questão 78



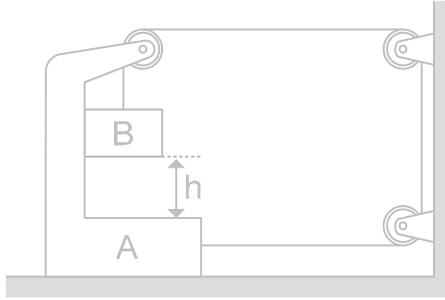
questão 79

**Questão 79** – 📌 (vínculos geométricos - Renato Brito)

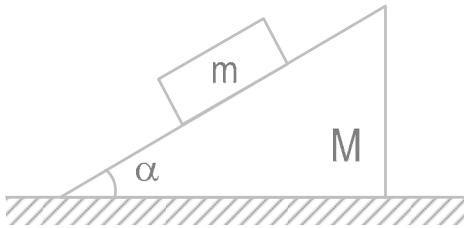
A Figura mostra um bloco de massa  $m$  pendurado verticalmente por um fio ideal e encostado em um carrinho de massa  $M$ , que pode deslizar sem atrito num solo horizontal. O prof. Renato Brito pede para você determinar a aceleração  $a$  adquirida pelo carrinho, quando o sistema é abandonado a partir do repouso.

**Questão 80** – 🌀 (vínculos geométricos) (UFSCar-SP)

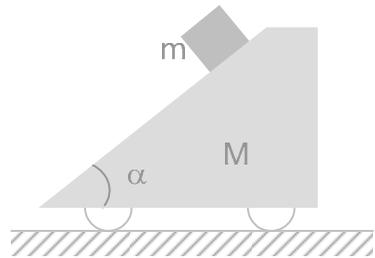
No sistema representado na Figura, não há atritos, o fio é inextensível e tem peso desprezível. No local, a intensidade da aceleração da gravidade vale  $g$ . Ignorando a influência do ar, calcule o intervalo de tempo que o corpo **B** (de massa  $m$ ) leva para atingir a base do corpo **A** (de massa  $M$ ), quando é abandonado de uma altura  $h$  em relação a **A**.

**Questão 81** - 🌀 (Vínculos geométricos - Irodov)

A Figura mostra uma cunha de massa  $M$  parada sobre uma superfície horizontal lisa. Determine a aceleração com que ela se moverá, quando um bloco de massa  $m$  for abandonado sobre a sua superfície inclinada em um ângulo  $\alpha$  com a horizontal. Sabe-se que a gravidade local vale  $g$  e todos os atritos são desprezíveis.



questão 81



questão 82

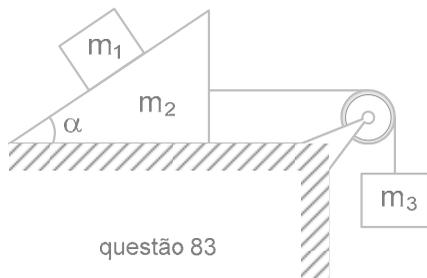
**Questão 82** - 🌀 (vínculos geométricos)

Um bloco de massa  $m$  é abandonado em repouso sobre um carrinho de massa  $M = 2m$ . Se o sistema pode deslizar sem atrito, o prof. Renato Brito pede para você determinar a aceleração  $a$  adquirida pelo carrinho em função da aceleração da gravidade local  $g$ . Dado:  $\alpha = 45^\circ$ .

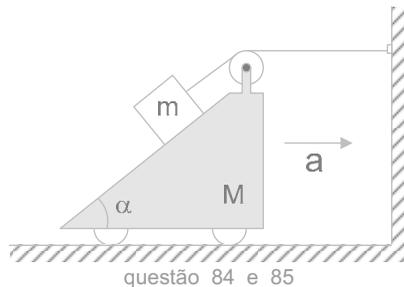
**Questão 83** - 🌀 (Vínculos geométricos - Saraeva)

Na Figura, os blocos de massas  $m_1 = 2 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 6 \text{ kg}$  e  $m_3 = 4 \text{ kg}$  encontram-se inicialmente em repouso. Desprezando eventuais atritos, o prof. Renato Brito pede para você determinar a aceleração adquirida pelos blocos 1, 2 e 3.

Dado:  $g = 10 \text{ m/s}^2$  e  $\alpha = 45^\circ$



questão 83



questão 84 e 85

**Questão 84** - 🧠 (vínculos geométricos - Irodov)

Na Figura, as massas  $m$  da caixa e  $M$  da cunha, assim como o ângulo  $\alpha$  da rampa, são conhecidos. Todos os fios são ideais e os atritos são desprezíveis. Pede-se determinar a aceleração adquirida pela cunha.

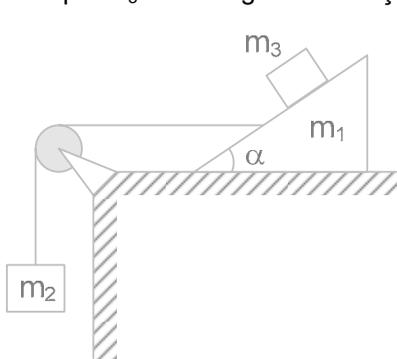
**Questão 85** - 🧠 (vínculos geométricos - Irodov)

Um bloco de massa  $m$ , conectado a uma parede através de um fio ideal, é abandonado em repouso sobre um carrinho de massa  $M = 2m$ . Se o sistema pode deslizar sem atrito, o prof. Renato Brito pede para você determinar a aceleração  $a$  adquirida pelo sistema, em função de  $g$ .

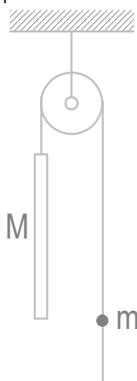
Dado:  $\sin \alpha = 0,6$   $\cos \alpha = 0,8$

**Questão 86** - 🧠 (vínculos geométricos - IME)

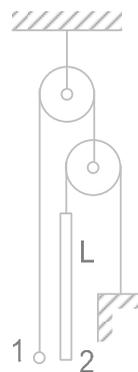
A Figura mostra três blocos, que podem se mover sem atrito. Sendo  $\alpha = 30^\circ$ , determine a relação entre  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  para que os blocos se movam, sem que  $m_3$  escorregue em relação a  $m_1$ .



questão 86



questão 87



questão 88

**Questão 87** - 🧠 (Irodov)

No sistema da Figura, a bolinha tem uma pequena abertura que permite o fio passar através dela com algum atrito. No instante inicial, a bolinha estava posicionada exatamente no mesmo nível horizontal da extremidade inferior da barra. Quando o sistema é abandonado a partir do repouso, os corpos movem-se com aceleração constante.

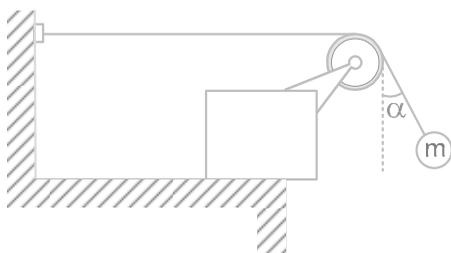
Determine a intensidade da força de atrito cinética trocada entre o fio e a bolinha, sabendo que,  $t$  segundos após o início do movimento, a bolinha atinge o mesmo nível horizontal da extremidade superior da barra. O comprimento da barra vale  $L$ , a gravidade local vale  $g$  e as massas da barra e da bolinha valem, respectivamente,  $M$  e  $m$ , com  $M > m$ .

**Questão 88** – 🧠 (vínculos geométricos - Irodov)

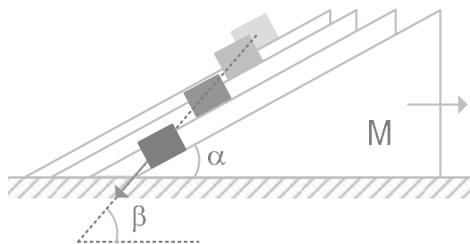
No arranjo mostrado na Figura, a massa da bolinha 1 é  $\eta$  vezes maior ( $\eta < 2$ ) que a da barra 2, cujo comprimento vale  $L$ . As massas dos fios e polias são desprezíveis, bem como os atritos. A bolinha se encontra fixa à extremidade do fio, inicialmente posicionada no mesmo nível horizontal da extremidade inferior da barra. Se o sistema é abandonado do repouso no instante  $t = 0$ , determine o instante em que a bolinha passará pelo mesmo nível horizontal da extremidade superior da barra.

**Questão 89** – 🧠 (vínculos geométricos - Challenging Problems)

Na Figura, após o pêndulo ser abandonado do repouso, sua inclinação  $\alpha$  com a vertical permanece constante. O prof. Renato Brito pede que você determine a massa do bloco e a sua aceleração, em função da massa da bola  $m$ , da gravidade local  $g$  e do ângulo  $\alpha$ . Todos os atritos são desprezíveis; fios e polias são ideais.



questão 89



questão 90

**Questão 90** – 🧠 (Vínculos geométricos - Challenging Problems)

A Figura mostra uma cunha de massa  $M$  e inclinação  $\alpha$  inicialmente parada sobre o solo horizontal liso. Sabendo que, quando um bloco é abandonado sobre a superfície inclinada lisa da rampa, passa a descrever uma trajetória retilínea de inclinação  $\beta$  com a horizontal, pede-se determinar a massa do referido bloco.

**Questão 91** – 🧠 (Renato Brito)

A Figura mostra um sistema formado por dois blocos de massas  $M_1 = 8 \text{ kg}$  e  $M_2 = 8 \text{ kg}$ , conectados entre si por uma corrente de massa  $m = 4 \text{ kg}$ , sendo rebocado por uma força  $F$  constante de intensidade  $30 \text{ N}$ . Sendo  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , o prof. Renato Brito pede para você determinar :

a) a tração em cada extremidade da corrente; e

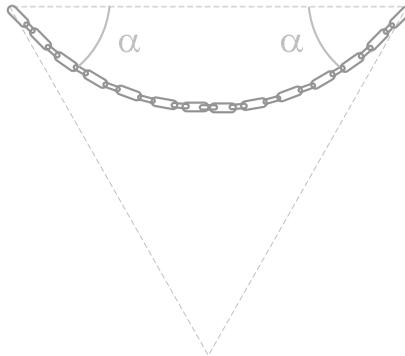
b) a tração no ponto médio dessa corrente, considerando que a mesma se distribui simetricamente em relação à mediatriz de suas extremidades.



**Questão 92** – 🧠 (Challenging Problems)

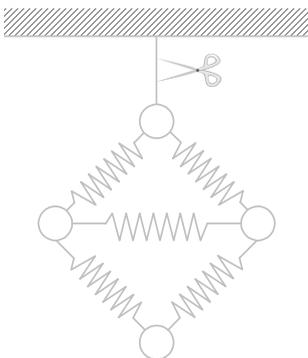
Uma corrente flexível, suspensa num plano vertical, tem suas extremidades formando um ângulo  $\alpha$  com a horizontal. Se a tração em cada extremidade vale  $T$ , o prof. Renato Brito pede que você determine:

- o peso da corda; e
- a tração em seu ponto médio.

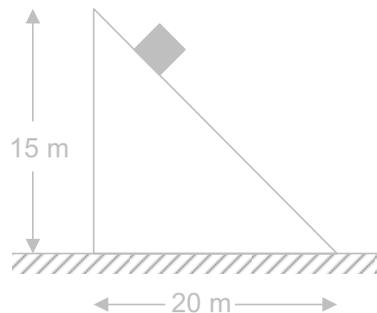


**Questão 93** – 🧠 (Challenging Problems)

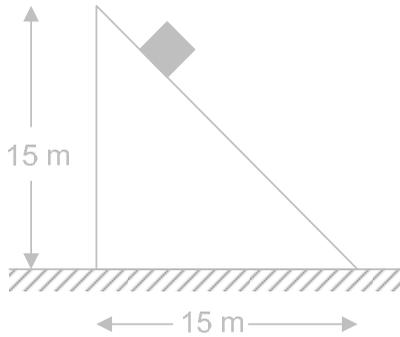
Um sistema composto por quatro bolas iguais, conectadas entre si por cinco molas ideais idênticas, está pendurado ao teto como mostra. O prof. Renato Brito pede que você determine as acelerações de cada bola, logo após o fio ser cortado.



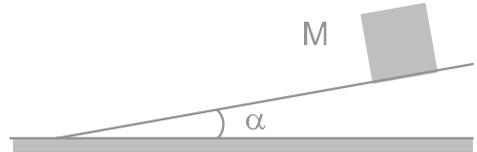
questão 93



questão 94



questão 98

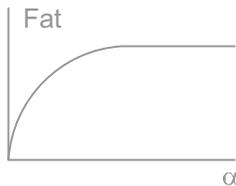


questão 99

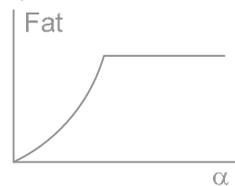
**Questão 99** – (Tópicos da Física)

A Figura mostra uma caixa em repouso sobre uma rampa áspera. Se o ângulo  $\alpha$  que a rampa forma com a horizontal for gradualmente aumentado no intervalo  $(0, 90^\circ)$ , o prof. Renato Brito pede para você determinar qual dos gráficos a seguir melhor descrevem o comportamento da força de atrito que age sobre a caixa, em função do ângulo  $\alpha$ :

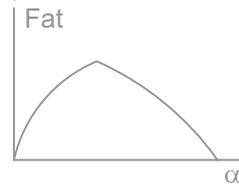
a)



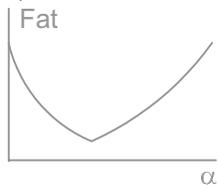
b)



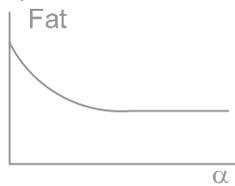
c)



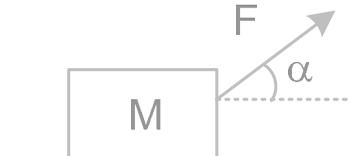
d)



e)


**Questão 100** – (Moysés Nussenzveig, Saraeva, Tore Nils Johnson)

Um caixote de massa  $M$  se encontra apoiado sobre um plano horizontal áspero. O coeficiente de atrito entre o material da caixa e o plano vale  $\mu$ . Se a gravidade local vale  $g$ , o prof. Renato Brito pede que você:



a) mostre que a menor força  $F$  necessária para mover essa caixa vale

$$F = \frac{\mu \cdot M \cdot g}{\cos \alpha + \mu \cdot \text{sen} \alpha}.$$

b) Usando uma trigonometria elementar, mostre que essa expressão para a

força  $F$  pode ser reescrita como  $F = \frac{\mu \cdot M \cdot g}{\sqrt{1 + \mu^2} \cdot \cos(\alpha - \beta)}$ , com  $\text{tg} \beta = \mu$ .

c) Sendo  $\mu$ ,  $M$  e  $g$  constantes,  $\text{tg} \beta$  também é constante e a expressão acima, portanto, é uma função exclusiva  $F(\alpha)$  do ângulo  $\alpha$ . Mostre que, ao se variar o ângulo  $\alpha$  no intervalo  $(0, \pi/2)$ , a força  $F$  mínima para deslocar aquela caixa ocorrerá para  $\alpha = \text{arctg} \mu$ .

d) Mostre que, portanto, a força mínima necessária para deslocar o caixote vale

$$F = \frac{\mu \cdot M \cdot g}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

### Questão 101 –

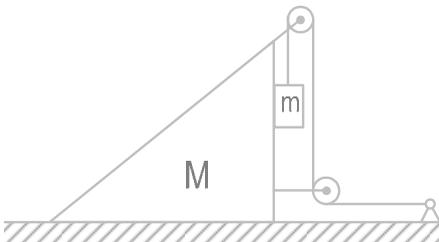
Um caixote de massa  $M = 20 \text{ kg}$  se encontra apoiado sobre um plano horizontal áspero. O coeficiente de atrito entre o caixote e o plano vale  $\mu = 0,75$  e a gravidade local vale  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Se o ângulo  $\alpha$  (veja Figura questão 100) pode ser ajustado convenientemente, o prof. Renato Brito pede para você determinar a menor força  $F$  capaz de mover o caixote ao longo do plano

- a) 90 N      b) 120 N      c) 150 N      d) 180 N      e) 240 N

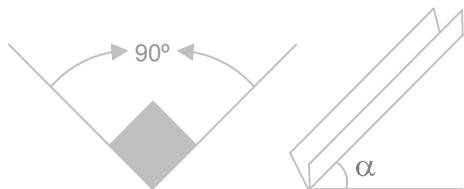
### Questão 102 – (Irodov)

No arranjo da Figura, as massas  $M$  do prisma e  $m$  da caixa são conhecidas e o coeficiente de atrito trocado entre eles vale  $\mu$ . Sabendo que o chão é liso e que a gravidade local vale  $g$ , pede-se determinar:

- a) a aceleração do prisma em relação à Terra; e  
b) a aceleração da caixa em relação à Terra.



questão 102



questão 103

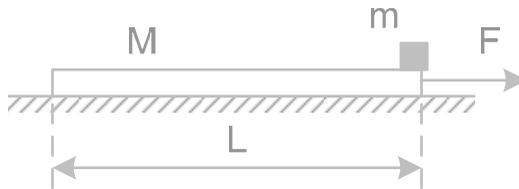
**Questão 103** – 🎧 (Resnick & Halliday)

Observe a Figura. Um bloco de massa  $m$  escorrega ao longo de uma calha retangular cujas abas estão simetricamente dispostas em relação ao plano vertical bissetor, formando entre si  $90^\circ$ , conforme indicado. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a calha vale  $\mu$  e o eixo da calha se encontra inclinado em um ângulo  $\alpha$  com a horizontal. Se a gravidade local vale  $g$ , determine a aceleração de descida do bloco.

**Questão 104** – 🎧 (Saraeva - adaptada)

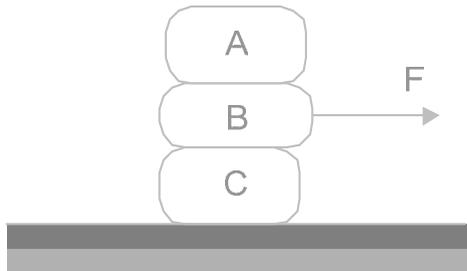
Um bloquinho de massa igual a  $m$  repousa sobre a extremidade de uma prancha de comprimento  $L$  e massa  $M$ , como mostra a Figura abaixo. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre o bloquinho e a prancha valem  $\mu_E$  e  $\mu_C$ . Se a gravidade local vale  $g$ , o prof. Renato Brito pede que você determine:

- qual o maior valor da força horizontal  $F$  com que se pode puxar a prancha, sem que o bloquinho escorregue em relação a ela.
- Supondo que esse limite da força  $F$  tenha sido ultrapassado, quanto tempo levará para o bloquinho cair da extremidade oposta da prancha?

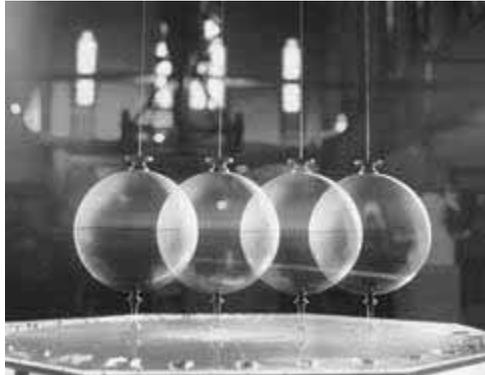
**Questão 105** – 🎧 (Renato Brito)

Três blocos A, B e C, de massas respectivamente  $2M$ ,  $4M$  e  $8M$ , encontram-se empilhados e apoiados em um solo horizontal áspero, num local onde a gravidade vale  $g$ . Sabendo que os coeficientes de atrito entre os pares de blocos valem  $\mu_{AB} = 0,1$ ,  $\mu_{BC} = 0,3$  e  $\mu_{c\text{-chão}} = 0,1$ , a máxima força  $F$  horizontal aplicada ao bloco B, que ainda mantém todos os corpos em repouso entre si e em relação ao chão, vale:

- $1,2.M.g$
- $1,4.M.g$
- $1,6.M.g$
- $1,8.M.g$
- $2,0.M.g$



# 4 DINÂMICA RETILÍNEA NO REFERENCIAL NÃO INERCIAL



## 4.1 REVENDO O REFERENCIAL INERCIAL - GENERALIZAÇÕES

A primeira lei de Newton afirma que *“se um corpo estiver livre da ação de forças, ou ele está parado e assim permanecerá indefinidamente, ou ele está em movimento retilíneo e uniforme e assim permanecerá enquanto perdurar a ausência de forças”*.

A segunda lei de Newton é expressa matematicamente pela equação fundamental da Mecânica Clássica,

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (\text{eq 1})$$

onde  $\Sigma \vec{F}$  é a soma (vetorial) de todas as forças que agem no corpo,  $m$  é a massa do corpo e  $\vec{a}$  é a sua aceleração.

Uma análise superficial dessas leis de Newton mostra que a primeira lei de Newton é um caso particular da segunda lei, visto que, se  $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ , então teremos  $\vec{a} = \vec{0}$ . Em outras palavras, se a força resultante que age no corpo for nula, a sua velocidade será (vetorialmente) constante, conforme estabelecido pela primeira lei.

Assim, sendo a primeira lei de Newton um caso particular da segunda lei, a primeira lei não seria redundante? Por qual motivo, então, Newton teria incluído essa versão refinada da lei da inércia de Galileu como uma das suas três leis fundamentais da Mecânica?

A resposta está na sutileza das entrelinhas – a questão do referencial. A importância da primeira lei de Newton reside no fato de ela definir um sistema de referência fundamental para toda a Mecânica, o *referencial inercial*.

Conforme discutimos no capítulo 2, um sistema de referência é dito *inercial* quando nele se verifica a lei da inércia. Um ônibus que esteja desacelerando, por exemplo, não é um referencial inercial: os passageiros sentados no interior desse ônibus observam que uma caixa, inicialmente em repouso no piso, adquire velocidade por si só e acelera para frente, durante a frenagem do veículo, sem que nenhuma força horizontal tenha agido na caixa para produzir tal aceleração. Nesse exemplo, percebe-se:

- uma clara violação da primeira lei de Newton – lei da inércia: *a caixa estava em repouso e, de repente, adquiriu movimento, naquele referencial, sem que nenhuma força horizontal tivesse atuado para alterar o seu estado de repouso inicial*;
- uma irrefutável violação da segunda lei de Newton: *no referencial do ônibus, a caixa possui aceleração horizontal, sem que haja forças horizontais para produzir tal aceleração*.

Assim, vemos que a primeira lei de Newton tem um papel independente da segunda lei e importante na definição dos sistemas de referência inerciais. Sem esta definição, não se pode escolher um sistema de referência para aplicar a segunda lei de Newton.

Quando a segunda lei de Newton afirma que a aceleração causada pela força resultante é dada por

$$\vec{a} = \frac{\Sigma \vec{F}}{m} \quad (\text{eq 2})$$

essa é a aceleração que o corpo possui em todo e qualquer *referencial inercial*.

**Propriedade 5:** se dois referenciais B e C são inerciais, ou B está parado em relação a C, ou B está em MRU em relação a C. A recíproca não é necessariamente verdadeira, ou seja, o simples fato de dois referenciais estarem parados entre si não os torna referenciais inerciais.

A propriedade 5 afirma que, se houver velocidade relativa  $\vec{V}_{AB}$  entre dois referenciais inerciais A e B quaisquer, ela será necessariamente constante. A propriedade 5 pode ser reescrita conforme a seguir:

**Propriedade 6:** se dois referenciais B e C são inerciais, a aceleração relativa, entre eles, é necessariamente nula  $\vec{a}_{CB} = \vec{a}_{BC} = \vec{0}$ . A recíproca não é

necessariamente verdadeira, ou seja, se dois referenciais tiverem aceleração relativa entre si nula, eles não são necessariamente referenciais inerciais.

A partir das propriedades 5 e 6 anteriores, o que podemos inferir sobre a percepção que dois observadores inerciais B e C têm a respeito do movimento de um terceiro móvel A qualquer ?

- Será que dois referenciais inerciais B e C genéricos concordam com o valor da velocidade de um terceiro móvel A que se mova em relação a eles, ou seja, será que  $\vec{V}_{AC} = \vec{V}_{AB}$  ?

Pela expressão geral da velocidade relativa (vetorial) entre três moveis A, B e C, mostrada abaixo

$$\vec{V}_{AC} = \vec{V}_{AB} + \vec{V}_{BC} \quad (\text{eq 3})$$

vê-se que, em geral, se dois referenciais inerciais B e C apresentarem velocidade relativa  $\vec{V}_{BC}$  entre si (isto é, se B move-se em relação a C, então discordarão da velocidade de um terceiro móvel A (isto é, se  $\vec{V}_{BC} \neq \vec{0}$ , teremos  $\vec{V}_{AC} \neq \vec{V}_{AB}$ ).

Os referenciais inerciais só concordarão com a velocidade do terceiro móvel ( $\vec{V}_{AC} = \vec{V}_{AB}$ ) no caso em que esses referenciais estiverem parados entre si ( $\vec{V}_{BC} = \vec{0}$ ).

- E acerca da aceleração ? Será que dois referenciais inerciais B e C genéricos sempre concordam com o valor da aceleração de um terceiro móvel A, que se mova em relação a eles, ou seja, será que  $\vec{a}_{AC} = \vec{a}_{AB}$  ?

Ora, da propriedade 6 enunciada anteriormente, sabemos que, se B e C são referenciais inerciais, a aceleração relativa entre eles é necessariamente nula  $\vec{a}_{BC} = \vec{0}$ . Assim, pela expressão geral da aceleração relativa (vetorial) entre três moveis A, B e C, mostrada abaixo

$$\vec{a}_{AC} = \vec{a}_{AB} + \vec{a}_{BC}, \quad (\text{eq 4})$$

com  $\vec{a}_{BC} = \vec{0}$ , pode-se enunciar a seguinte propriedade:

**Propriedade 7:** dois referenciais inerciais B e C quaisquer sempre concordam com a aceleração de um terceiro móvel A, isto é,  $\vec{a}_{AC} = \vec{a}_{AB}$ . Em outras palavras, a aceleração de um móvel é sempre a mesma em qualquer referencial inercial, podendo ser calculada pela segunda lei de Newton

$$\vec{a} = \frac{\Sigma \vec{F}}{m}$$

É por esse motivo que se pode afirmar que a aceleração calculada pela segunda lei de Newton é a aceleração do móvel simultaneamente **em todo e qualquer referencial inercial**.

Em linhas gerais, vimos que, embora a *velocidade* de um móvel possa assumir valores diferentes, quando medida por diferentes *referenciais inerciais*, a sua *aceleração* será sempre a mesma, ainda que medida por *distintos referenciais inerciais*. Isto decorre do fato de os *referenciais inerciais* nunca terem aceleração relativa entre si (propriedade 6).

Com efeito, se diferentes *referenciais inerciais* sempre concordam tanto com a massa  $m$  (a massa é invariante) quanto com a aceleração  $\vec{a}$  (propriedade 7) de um móvel, esses fatos nos levam a concluir que :

**Propriedade 8:** todos os *referenciais inerciais* concordam a respeito de todas as forças (*forças de interação*) que agem sobre um móvel, bem como acerca da força resultante agindo sobre ele, dada pela segunda lei de Newton

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Usando a linguagem matemática, dizemos que *as leis de Newton são invariantes* em mudanças de um *referencial inercial* para outro *referencial inercial*. Todos os referenciais inerciais aplicam as leis de Newton da mesma forma, ou, ainda, *todos os referenciais inerciais são equivalentes*.

É importante ressaltar que, até agora, nos ocupamos em descrever várias propriedades dos referenciais inerciais sem, no entanto, nos preocuparmos em fazer uma lista deles. Sabemos que qualquer referencial que esteja parado ou em MRU, em relação a um *referencial inercial*, também será um *referencial inercial*. A questão que surge é: qual é o referencial inercial-padrão ?

À rigor, essa busca do referencial inercial padrão é filosófica, profunda e não ampliará em nada a nossa compreensão do assunto. Objetivamente falando, a maneira prática de verificar se um referencial é ou não é inercial é testar experimentalmente a validade das leis de Newton naquele referencial.

Se, à primeira vista, nenhuma delas for violada, estaremos, em primeira aproximação, diante de um *referencial inercial*. Caso contrário, o referencial é dito *não inercial*. Lembramos que, neste livro, usaremos a aproximação de que a Terra é um *referencial inercial*.

## 4.2 – O REFERENCIAL NÃO INERCIAL

Dado que somos capazes de identificar, em primeira aproximação, um referencial inercial, facilmente reconheceremos um referencial *não inercial*. Afinal, será classificado como *não inercial* todo e qualquer referencial que estiver acelerado em relação a um *referencial inercial*.

**Propriedade 9:** *referencial não inercial* é todo aquele que apresentar aceleração em relação um *referencial inercial*. Por esse motivo, os *referenciais não inerciais* são também conhecidos como os *referenciais acelerados*.

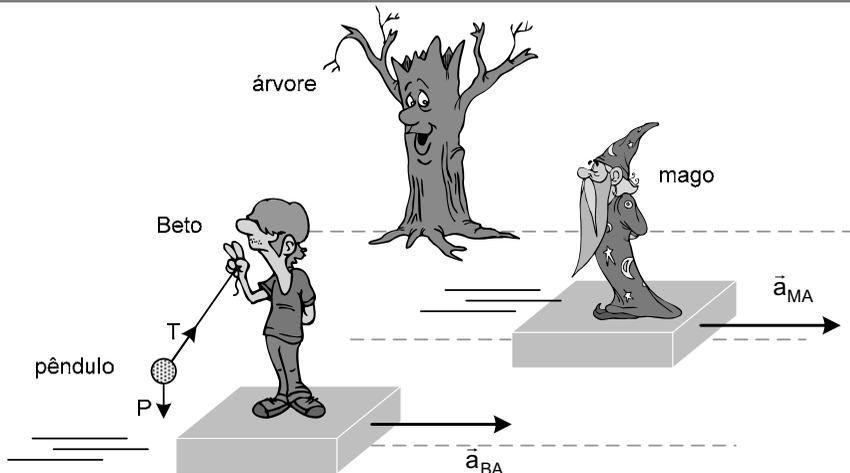
Conforme vimos anteriormente, a aceleração calculada pela segunda lei de Newton é a aceleração do móvel em relação a qualquer referencial inercial; qualquer um mesmo, visto que jamais haverá aceleração relativa entre *referenciais inerciais* (propriedade 6).

Portanto, a aceleração calculada pela segunda lei de Newton (aceleração do móvel no *referencial inercial*) jamais concordará com a aceleração do móvel num referencial não inercial, visto que sempre haverá aceleração relativa entre essas duas classes de referenciais.

Esse raciocínio confirma a tese de que:

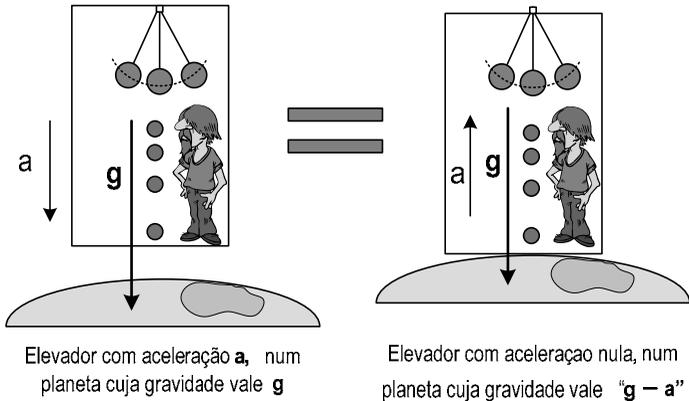
**Propriedade 10:** as leis de Newton, da maneira como foram formuladas, só são válidas nos referenciais inerciais.

**Exemplo resolvido 2 :** a Figura mostra Beto e o Mago move-se com acelerações horizontais respectivamente  $a_{BA} = 7,5 \text{ m/s}^2$  e  $a_{MA} = 2,5 \text{ m/s}^2$  em relação à árvore (referencial inercial). O pêndulo suspenso por Beto permanece em repouso, no referencial do garoto, formando um ângulo  $\alpha = 37^\circ$  com a vertical. Se a gravidade local vale  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , o prof. Renato Brito pede que você determine ( $\sin 37^\circ = 0,6$   $\cos 37^\circ = 0,8$ ):



- a aceleração do pêndulo em relação ao Beto ( $a_{PB}$ );
- a aceleração do pêndulo em relação à árvore ( $a_{PA}$ );

É, novamente, por esse motivo que, quando você está dentro de um elevador nessas circunstâncias, no seu dia-a-dia, tem a sensação de que o seu peso está um pouco menor do que o de costume, visto que a gravidade aparente em seu interior estará valendo  $g' = g - a$ . A expressão “gravidade aparente”, de certa forma, poderia ser também entendido como “gravidade efetiva” ou “gravidade resultante”, na concepção do prof. Renato Brito.



**Figura 52**

Se, mais uma vez, a lâmpada fixa ao teto do elevador se desprender e cair em direção ao piso, sua aceleração de queda livre será visivelmente menor do que a costumeira aceleração  $g$ , evidenciando que, de fato, a gravidade que a puxa para baixo naquele referencial vale  $g' = g - a$ . Assim, se a altura do teto do elevador em relação ao seu piso vale  $H$ , o seu tempo de queda  $T$  é facilmente determinado assim:

$$H = \frac{(g')T^2}{2} = \frac{(g-a)T^2}{2} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2H}{g-a}} \quad (\text{eq-10})$$

Da mesma forma, o período de oscilação do pêndulo, no interior de qualquer dos elevadores da Figura 52, é dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g'}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g-a}} \quad (\text{eq-11})$$

#### 4.6 VAGÃO ACELERADO HORIZONTALMENTE

A Figura 53 mostra um vagão com aceleração  $\vec{a}$  para a direita, num local onde a gravidade vale  $\vec{g}$ . No seu interior, um pêndulo suspenso ao teto se mantém em repouso em relação ao vagão, com uma inclinação permanente  $\alpha$  com a vertical.

Assim, do ponto de vista de um referencial inercial fixo ao solo, a esfera do pêndulo descreve uma trajetória retilínea horizontal, compartilhando da mesma

aceleração  $\vec{a}$  do vagão, graças à componente  $T_x \rightarrow$  da tração que age sobre ela. Assim, esse referencial escreverá a segunda lei de Newton na horizontal:

$$\bullet F_R = m \cdot a \Rightarrow T_x = m \cdot a \Rightarrow T \cdot \text{sen} \alpha = m \cdot a \quad (\text{eq-12})$$

Como a bola não apresenta aceleração vertical, as forças devem se equilibrar mutuamente nessa direção. O referencial inercial escreverá:

$$\bullet \text{Equilíbrio vertical: } T_y = P \Rightarrow T \cdot \text{cos} \alpha = m \cdot g \quad (\text{eq-13})$$

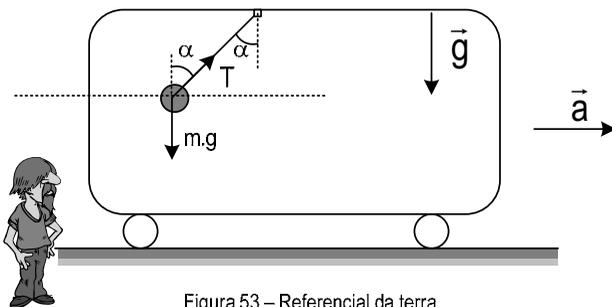


Figura 53 – Referencial da terra

Dessa forma, dividindo as relações eq12 e eq13, membro a membro, o referencial inercial conclui que a aceleração do vagão (e conseqüentemente da bola do pêndulo) se relaciona com o ângulo  $\alpha$  de inclinação do pêndulo segundo a expressão:

$$a = g \cdot \text{tg} \alpha \quad (\text{eq-14})$$

Agora, observemos todo esse cenário a partir do referencial do próprio vagão (Figura 54), referencial este que se encontra acelerado em relação à Terra, constituindo-se, portanto, um referencial não inercial.

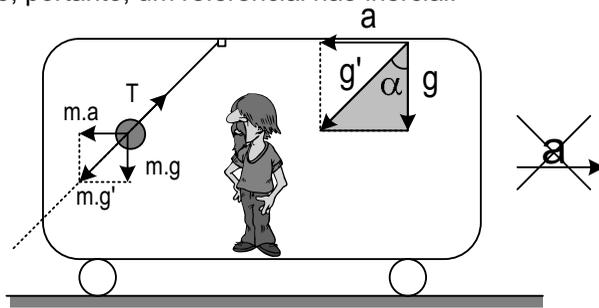


Figura 54 – Referencial do vagão

Para efetuarmos essa mudança de referencial, garantindo ainda a validade das leis de Newton no referencial acelerado, faremos uso do Princípio da Equivalência: a aceleração  $\vec{a} \rightarrow$  (que o vagão possui no referencial da Terra) será substituída (no referencial do vagão) por uma “gravidade adicional”  $\leftarrow \vec{a}$  de mesmo valor, mesma direção e sentido contrário da aceleração  $\vec{a} \rightarrow$  que será

“esquecida”, visto que o vagão não apresenta tal aceleração no referencial do próprio vagão (☺ obviamente....).

Nesse ponto, é importante chamar a atenção do leitor para não usar mais o termo **aceleração** para se referir ao vetor  $\leftarrow a$ , que se encontra dentro do vagão (Figura 54). Nesse referencial, ele designa uma gravidade **a**.

Assim, do ponto de vista de quem se encontra no referencial do vagão (Figura 54), haverá duas gravidades **a** e **g** igualmente legítimas, conforme estabelecido pelo Princípio da Equivalência.

Ora, mas gravidades produzem forças gravitacionais ao atuarem sobre massas, não é verdade? Assim, da mesma forma que a gravidade  $g \downarrow$  (gerada pela massa da Terra) age sobre a massa **m** do pêndulo, produzindo sobre esta a força gravitacional  $m \cdot g \downarrow$ ; a gravidade  $a \leftarrow$  (fruto da mudança do referencial inercial para o não inercial) também agirá sobre a referida massa **m**, produzindo nela a *força gravitacional*  $m \cdot a \leftarrow$  como mostrado na Figura 54.



Nesse referencial acelerado, após fazermos uso do Princípio da Equivalência, adicionando a gravidade  $a \leftarrow$  ao sistema, bem como a respectiva força gravitacional  $m \cdot a \leftarrow$ , as leis de Newton voltam a ser satisfeitas (embora se trate de um referencial não inercial ☺):

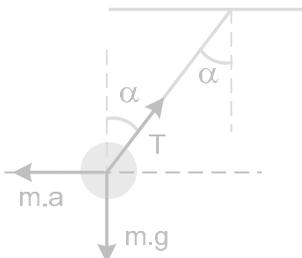


Figura 55

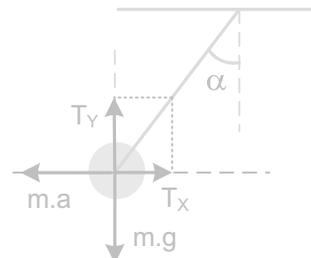


Figura 56

- No referencial do vagão, a bola do pêndulo se encontra em repouso permanente ( $v' = 0$ ,  $a' = 0$ ). Por se tratar de equilíbrio num referencial não inercial, usaremos a denominação **equilíbrio relativo**.

Ordinariamente, utiliza-se o termo “equilíbrio” apenas quando se trata de um equilíbrio em um referencial inercial, reservando a expressão “equilíbrio relativo” para o caso em que o equilíbrio ocorrer em um referencial não inercial. O estudante deve seguir essa convenção ao fazer uso dessas ferramentas na resolução de questões discursivas.

- As forças que agem nessa bola, nesse referencial, são o seu peso  $m.g$ , a tração  $T$  e a força de inércia  $m.a$  (veja Figura 55).
- Na direção horizontal (Figura 56), a força de inércia “ $m.a$ ” equilibra a componente horizontal  $T_x$  da tração:  $T_x = T.\text{sen}\alpha = m.a$  (eq-15)
- Na direção vertical (Figura 56), o peso  $m.g$  da bola equilibra a componente vertical  $T_y$  da tração:  $T_y = T.\text{cos}\alpha = m.g$  (eq-16)

Das relações eq15 e eq16, o observador que se encontra no interior do vagão (Figura 54) concluirá que a inclinação  $\alpha$  do pêndulo se relaciona com as gravidades  $a$  e  $g$  no seu referencial, segundo a expressão:

$$a = g.\text{tg}\alpha \quad (\text{eq-17})$$

Comparando as relações eq12, eq13 e eq14, escritas pelo referencial inercial, com as relações eq15, eq16 e eq17, escritas pelo referencial acelerado, vemos que ambos chegam às mesmas equações e, portanto, aos mesmos resultados, apesar de usarem argumentos e princípios físicos distintos, conforme o referencial de cada um.

Ainda na Figura 54, a segunda forma alternativa do referencial não inercial interpretar o que se passa no interior do vagão é considerar a ação de uma única gravidade resultante  $g'$  que será a soma vetorial das gravidades parciais :

$$\vec{g}' = (\vec{g}) + (\vec{a}) \quad (\text{eq-18})$$

Seu módulo pode ser determinado pelo Teorema de Pitágoras ou calculando o cosseno de  $\alpha$  no triângulo em destaque na Figura 54.

$$g' = \frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{\cos \alpha} = \frac{g}{\cos \alpha} \quad (\text{eq-19})$$

Do ponto de vista do referencial no interior do vagão (Figura 54), a gravidade deixou de ser  $\vec{g}$  e passou a ser  $\vec{g}'$ . As forças que agem na bola do pêndulo, nesse contexto, são a tração  $T$  e o peso da bola  $P' = m.g'$ .

Estando o pêndulo, em equilíbrio *relativo* nesse referencial, as forças  $T$  e  $P'$  que agem na bola (Figura 54) têm o mesmo valor, mesma direção e sentidos contrários de forma a se cancelarem (mutuamente) :

$$T = P \Rightarrow T = m.g'$$

Adicionalmente, essa gravidade resultante  $\vec{g}'$  define uma nova direção vertical e, conseqüentemente uma nova direção horizontal perpendicular a ela nesse referencial, como mostra a Figura 57.

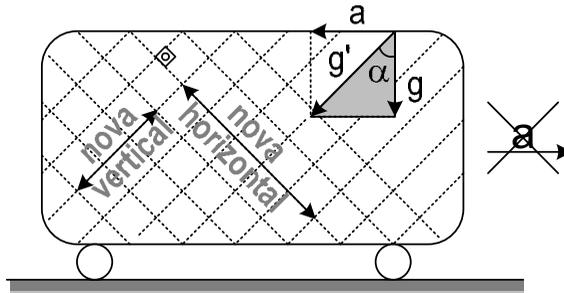


Figura 57 – novas direções horizontal e vertical

Basicamente, o sistema de “coordenadas convencional XoY” sofreu uma rotação de um ângulo  $\alpha$  tal que  $\text{tg}\alpha = a/g$ , conforme o triângulo retângulo em destaque na Figura 57. A nova vertical, definida pela direção da nova gravidade  $\vec{g}'$ , forma um ângulo  $\alpha$  com a vertical original.

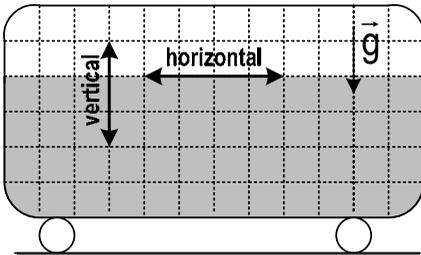


Figura 58 - superfície da água caso o vagão seja um referencial inercial

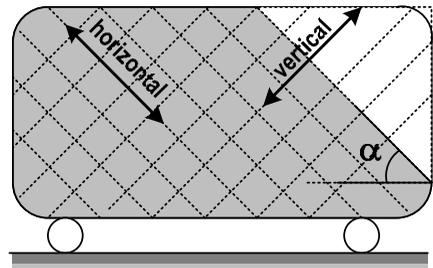


Figura 59 - superfície da água caso o vagão seja um referencial não inercial

A própria natureza adapta-se perfeitamente a essas novas direções vertical (direção de  $\vec{g}'$ ) e horizontal (direção perpendicular a  $\vec{g}'$ ) redefinidas no referencial não inercial. Uma comprovação experimental desse fato é o interessante comportamento da superfície livre de um líquido que preencha o interior de um vagão apoiado sobre trilhos retilíneos:

- caso o vagão esteja parado ou em MRU num referencial inercial, a superfície livre do líquido repousará na horizontal, conforme a lei de Stevin, da Hidrostática (Figura 58);
- caso o vagão esteja move-sendo com aceleração constante  $a \rightarrow$ , ele constituirá um referencial não inercial e a superfície livre do líquido nele contido agora repousará na nova direção horizontal (Figura 59) como se, para o líquido, a gravidade  $\vec{g}' \angle$  que reina nesse referencial não inercial fosse tão natural

quanto a antiga gravidade  $\mathbf{g}$  convencional. Nesse caso, a lei de Stevin, da Hidrostática também, precisará ser adaptada para esse referencial não inercial. Faremos isso no volume 3 dessa coleção, no capítulo de Hidrostática.

A verdade é que, como os líquidos não são *Homo sapiens* nem *muliere sapiens* ☺, para eles, de fato, nada incomum está ocorrendo no referencial acelerado.

Quando um pêndulo simples, fixo ao teto do vagão, é abandonado em repouso nessa nova direção vertical, ele tende a permanecer estacionário.

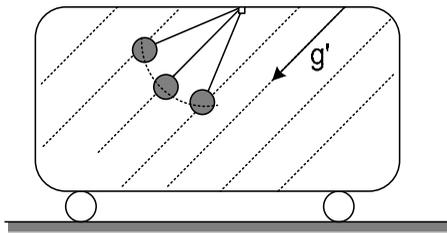


Figura 60 - pêndulo simples oscilando no referencial acelerado

Se, porém, o seu equilíbrio for perturbado, o pêndulo inclinado executará um MHS (Figura 60), oscilando simetricamente em relação à direção da nova gravidade  $\mathbf{g}'$  (como de costume), com período de oscilação dado por :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g'}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{\sqrt{g^2 + a^2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{\frac{g}{\cos\alpha}}} \quad (\text{eq-20})$$

#### 4.7 FORÇAS DE INTERAÇÃO E FORÇAS DE INÉRCIA

Seja um vagão que move-se sobre trilhos retilíneos com aceleração  $\mathbf{a}$  em relação à Terra, constituindo-se, portanto, um referencial não inercial.

No interior desse vagão, vemos dois corpos A e B, abandonados do repouso, em relação ao vagão, conectados entre si mediante fio e polia ideais, sobre uma mesa lisa.

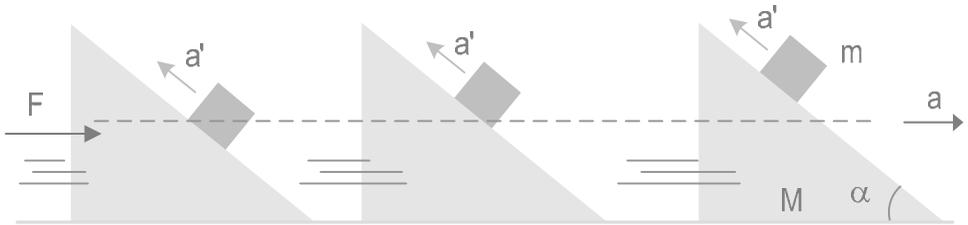
**Exemplo resolvido 3:** dadas as massas dos corpos  $m_A = 8 \text{ kg}$  e  $m_B = 2 \text{ kg}$ , a aceleração do vagão  $a = 3 \text{ m/s}^2$  e a gravidade local  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , o prof. Renato Brito pede que você determine :

- a aceleração adquirida por cada corpo;
- a tração no fio;
- quanto tempo o bloco A leva para percorrer a distância  $d = 80 \text{ cm}$  e encostar na parede traseira do vagão. Admita que o bloquinho parte do repouso em relação ao vagão.

#### 1ª Resolução – no referencial Inercial

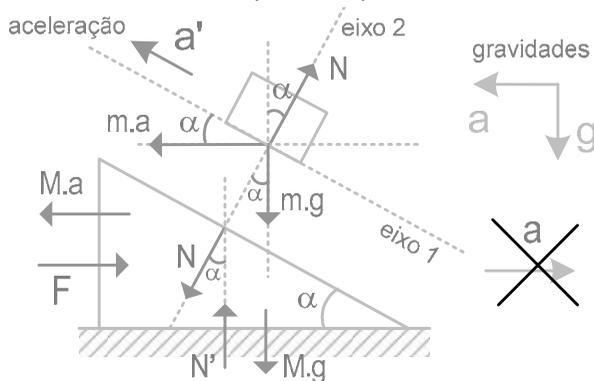
Facilmente identificamos todas as forças que agem em cada um dos corpos A e B do sistema (Figura 62):

**Exemplo Resolvido 6 :** uma caixa de massa  $m$  está apoiada sobre a face inclinada de um prisma triangular que forma um ângulo  $\alpha$  com a horizontal. O prisma tem massa  $M$  e é empurrado por uma força horizontal constante de intensidade  $F > (M+m) \cdot g \cdot \text{tg}\alpha$ . Sabendo que a gravidade local vale  $g$  e admitindo que o sistema parte do repouso, o prof. Renato Brito pede que você determine:  
 a) a aceleração  $a$  com a qual o prisma se moverá em relação à Terra;  
 b) a aceleração  $a'$  com que a caixa subirá a rampa no referencial da rampa.



**Resolução:** de acordo com o resultado obtido no Exemplo Resolvido 1 – página 31 – relação **eq 4b** – deduzimos que, sendo  $F > (M+m) \cdot g \cdot \text{tg}\alpha$ , a caixa acabará acelerando ladeira acima. Por quê? ☺

Seja  $a$  a aceleração que o prisma possui em relação à Terra. Efetuando uma mudança do referencial inercial (Terra) para o referencial acelerado do prisma, abandonamos a aceleração  $\rightarrow a$  e a computamos, no referencial do prisma, na forma de uma gravidade  $\leftarrow a$  (Figura 77) que causará forças gravitacionais fictícias  $m \cdot a \leftarrow$  e  $M \cdot a \leftarrow$  nos corpos de massa  $m$  e  $M$  do sistema, respectivamente, com base no Princípio da Equivalência de Einstein.



**Figura 77** – diagrama de forças no referencial acelerado

A Figura 77 mostra todas as *forças de interação* (reais) agindo no sistema, bem como as *forças de inércia*  $m \cdot a \leftarrow$  e  $M \cdot a \leftarrow$  atuando respectivamente no bloco e no prisma. A tendência de a caixa escorregar ladeira acima é justificada (no referencial não inercial) pela ação da componente  $m \cdot a \cdot \cos\alpha$  da força de inércia  $m \cdot a$ , como pode ser visto na Figura 77.

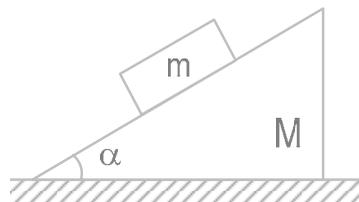
e prisma compartilharão da mesma aceleração  $a = g \cdot \tan \alpha \rightarrow$ , em concordância com os resultados obtidos no Exemplo Resolvido 1 – página 33 – relação eq4b.

**Exemplo resolvido 7 (Irodov):** a Figura mostra uma cunha de massa  $M$  abandonada em repouso sobre uma superfície horizontal lisa. Sabe-se que a gravidade local vale  $g$  e todos os atritos são desprezíveis. Quando um bloco de massa  $m$  for abandonado sobre a sua superfície inclinada em um ângulo  $\alpha$  com a horizontal, o prof. Renato Brito pede que você determine:

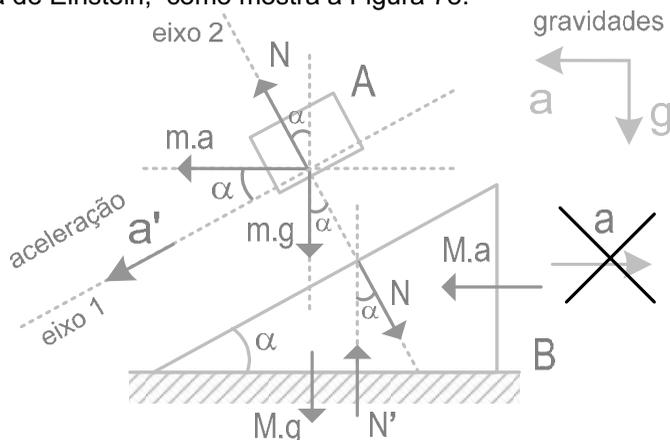
- a aceleração com que a cunha se moverá;
- a aceleração de descida do bloco, em relação à cunha;
- se a cunha tem altura  $H$  e o bloco for abandonado do seu topo, a partir do repouso, quanto tempo ele levará para descer toda a rampa ?

### Resolução

Esse problema foi resolvido anteriormente (questão 81, página 44) no referencial inercial. A seguir, solucionaremos essa questão no referencial da própria cunha que, por se encontrar acelerada em relação à Terra, constitui-se um referencial não inercial.



Efetuada uma mudança do referencial inercial (Terra) para o referencial acelerado da cunha, abandonamos a aceleração que esta possui (em relação à Terra) e a computamos, no seu referencial não inercial, como uma gravidade  $\leftarrow a$  que causará forças gravitacionais fictícias  $m \cdot a \leftarrow$  e  $M \cdot a \leftarrow$  nos corpos de massa  $m$  e  $M$  do sistema, respectivamente, com base no Princípio da Equivalência de Einstein, como mostra a Figura 78.



**Figura 78** – diagrama de forças no referencial acelerado

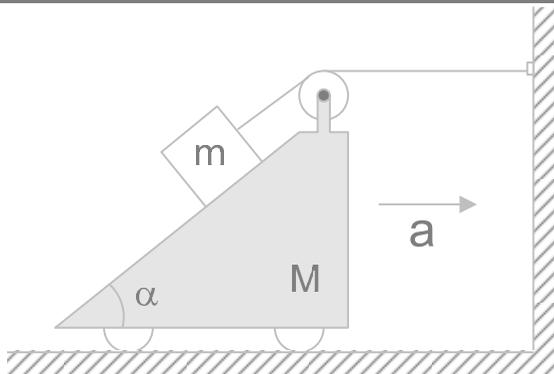
No referencial da própria cunha, logicamente, esta não possui aceleração ou velocidade alguma, visto que ninguém possui velocidade ou aceleração em relação a si mesmo ☺.

Para calcularmos o tempo de descida dessa caixa, ao longo da rampa, faremos uso da equação cinemática do MRUV :

$$D = v_0 \cdot t + (a') \cdot t^2 / 2, \quad \text{com } D = H / \text{sen} \alpha \quad \text{e} \quad a' = \frac{(M+m) \cdot g \cdot \text{sen} \alpha}{(M + m \cdot \text{sen}^2 \alpha)}$$

$$\frac{H}{\text{sen} \alpha} = 0 + \frac{(M+m) \cdot g \cdot \text{sen} \alpha}{(M + m \cdot \text{sen}^2 \alpha)} \cdot \frac{t^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2H \cdot (M + m \cdot \text{sen}^2 \alpha)}{(M+m) \cdot g \cdot \text{sen}^2 \alpha}}$$

**Exemplo Resolvido 8 (Irodov):** na figura, as massas  $m$  da caixa e  $M$  da cunha, assim como o ângulo  $\alpha$  da rampa, são conhecidos. Todos os fios são ideais e os atritos são desprezíveis. Se a gravidade local vale  $g$ , pede-se determinar a aceleração  $a$  adquirida pela cunha.



### Resolução

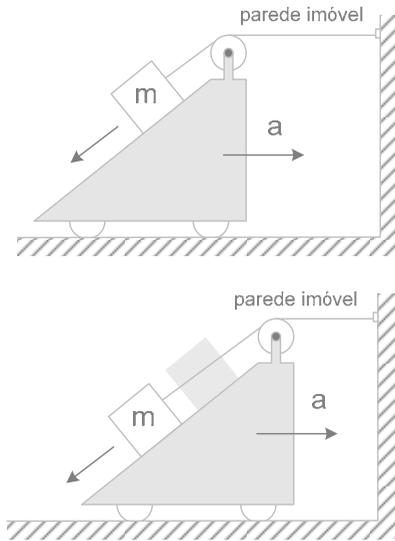
Esse problema foi resolvido anteriormente (questão 84, página 45) no referencial inercial. A seguir, solucionaremos essa questão no referencial da própria cunha que, por se encontrar acelerada em relação à Terra, constitui um referencial não inercial.

Observando toda a movimentação a partir do referencial da Terra ( veja agora a Figura 79), temos que:

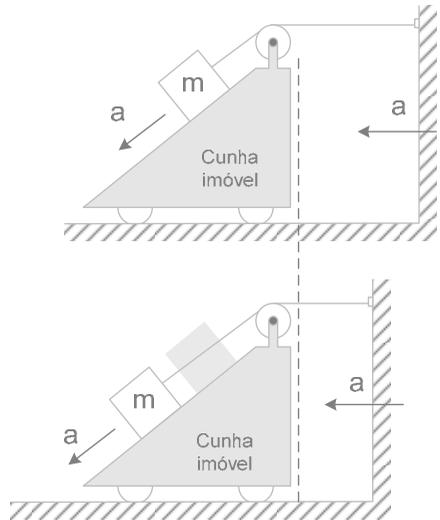
- a parede se encontra fixa nesse referencial;
- a cunha move-se acelerada para a direita com aceleração  $a \rightarrow$ ;
- a caixa, conectada à parede, através do fio ideal, move-se ladeira abaixo ao longo da superfície inclinada da cunha (veja a Figura 79).

Por outro lado, observando toda a movimentação a partir do referencial da própria cunha, (veja agora a Figura 80), vemos que:

- a cunha se encontra fixa nesse referencial;
- a parede é que move-se acelerada para a esquerda com aceleração  $a \leftarrow$ ;
- a caixa, conectada à parede, através do fio ideal, acompanha o movimento da parede e desce a superfície inclinada da cunha (Figura 80).

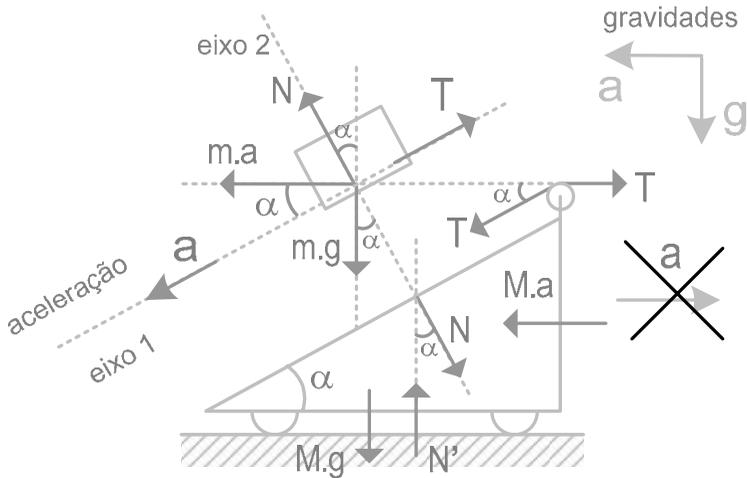


**Figura 79** – Referencial da Terra: a parede permanece fixa enquanto a cunha move-se para a direita



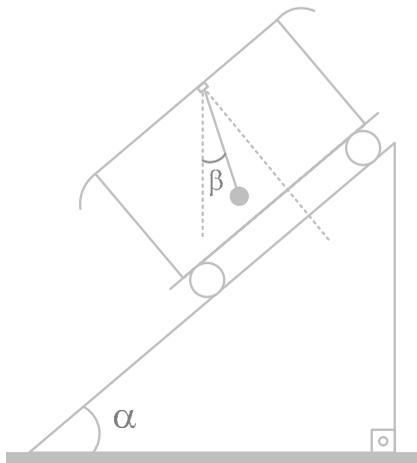
**Figura 80** – Referencial da cunha: a cunha permanece fixa enquanto a parede move-se para a esquerda

A partir desse ponto, nos concentraremos na Figura 80. A resolução do problema será feita a partir da análise do movimento no referencial da cunha (não inercial). Pelo fato de o fio não esticar (vínculo geométrico), a caixa descerá a rampa com a mesma aceleração escalar  $a$  com que a parede move-se para a esquerda no referencial da cunha (Figura 80).



**Figura 81** – diagrama de forças no referencial acelerado, fazendo uso do Princípio da Equivalência

**Exemplo Resolvido 12 (Tore Nils Johnson):** considere agora que o vagão do exemplo resolvido 11 esteja descendo a rampa e que as resistências dissipadoras que agem sobre o vagão correspondem a uma força de atrito com coeficiente  $\mu < \operatorname{tg}\alpha$ . O prof. Renato Brito pede para você calcular o ângulo  $\beta$  que o pêndulo forma com a vertical, durante a descida do vagão.



**Resolução:** de acordo com a 2ª lei de Newton, o sistema de massa total  $M$  descerá a rampa com aceleração  $a$  (no referencial da Terra) dada por :

$$F_R = M.a \Rightarrow (P.\operatorname{sen}\alpha - F_{at}) = M.a$$

$$M.g.\operatorname{sen}\alpha - \mu.N = M.a, \text{ com a reação normal } N \text{ dada por } N = P.\operatorname{cos}\alpha$$

$$M.g.\operatorname{sen}\alpha - \mu.M.g.\operatorname{cos}\alpha = M.a \Rightarrow a = g.\operatorname{sen}\alpha - \mu.g.\operatorname{cos}\alpha \quad (\text{eq 57})$$

No referencial do próprio vagão, entretanto, essa aceleração  $a$  será equivalente a uma gravidade  $a$ , que será adicionada vetorialmente à gravidade local  $g$  para totalizar a gravidade resultante  $g'$  (no referencial do vagão), como mostra a Figura 92.

Da geometria da Figura, temos que:

$$a + c = g.\operatorname{sen}\alpha \Rightarrow a = g.\operatorname{sen}\alpha - c \quad (\text{eq 58})$$

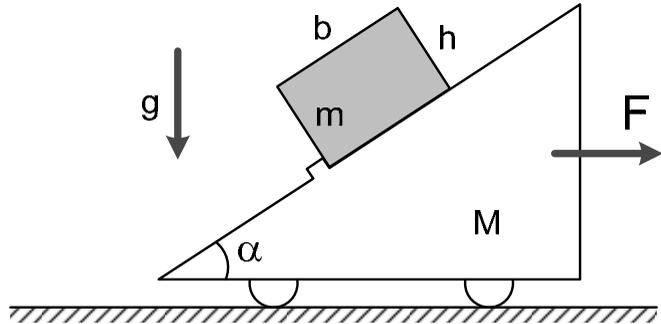
$$\text{Comparando eq57 e eq58, vem: } c = \mu.g.\operatorname{cos}\alpha \quad (\text{eq 59})$$

É sabido que o pêndulo permanece em equilíbrio relativo, sem oscilar, no referencial do vagão, quando posicionado na nova vertical definida pela direção da gravidade resultante  $g'$ , conforme a Figura 92.

Para determinar o ângulo  $\beta$  formado entre a direção de  $g'$  e a direção de  $g$ , lançaremos mão da identidade trigonométrica:

$$\operatorname{Tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta} \quad (\text{eq 60})$$

**Exemplo Resolvido 18:** a figura mostra uma caixa homogênea de massa  $m$ , altura  $h$  e base  $b$ , apoiada sobre uma prisma móvel de massa  $M$  e inclinação  $\alpha$ . Um pequeno batente impede o escorregamento da caixa. Se a gravidade local vale  $g$ , o prof. Renato Brito pede que você determine a maior força  $F$  horizontal com que se pode puxar a rampa sem que a caixa tombe para trás.



### Solução no Referencial Não inercial do Prisma:

Imprimindo ao prisma uma aceleração excessiva (para a direita), a caixa tomba (para a esquerda). A maior aceleração sem tombamento é aquela para a qual a caixa se apóia no carro exclusivamente por sua aresta inferior. A Figura 98 mostra as forças reais e fictícias agindo sobre a caixa, sem dar ênfase à colocação das forças que agem sobre o prisma :

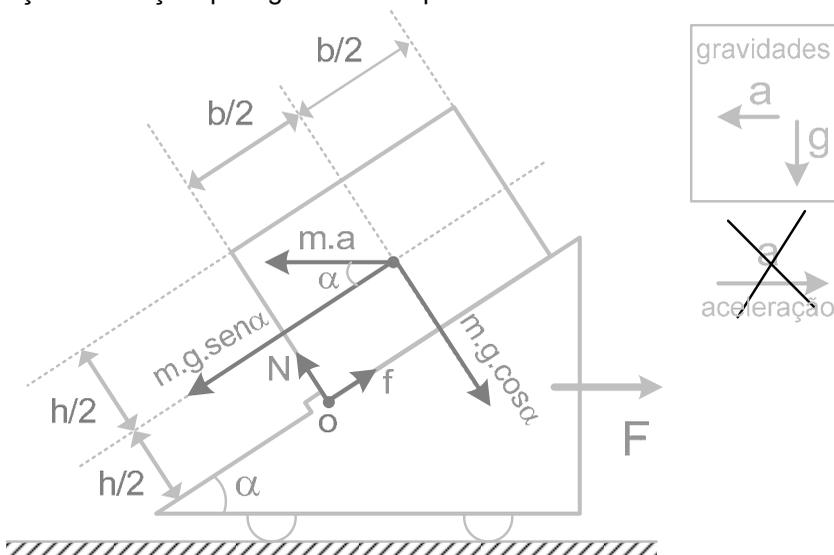
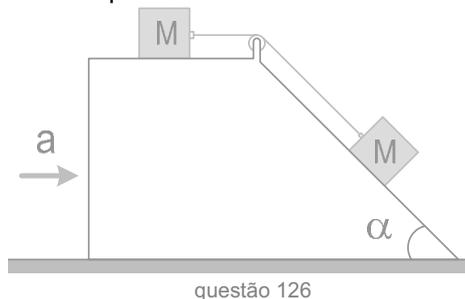
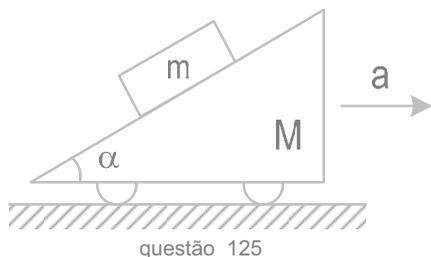


Figura 98 – referencial não inercial - Forças agindo na caixa

**Questão 125** - 🎧 (ITA 2003)

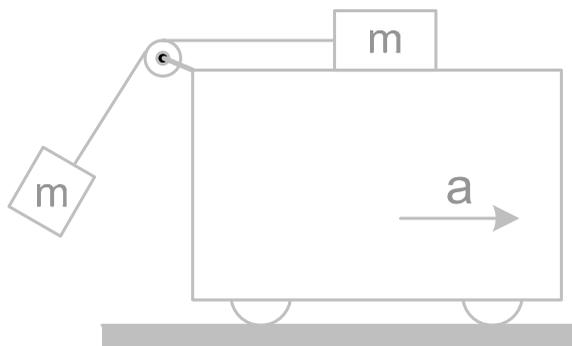
A Figura mostra um carrinho de massa  $M$ , com rampa, inicialmente em repouso sobre uma superfície lisa. Sobre a sua superfície inclinada, repousa uma caixa de massa  $m$ . Se o coeficiente de atrito entre a rampa e a caixa vale  $\mu$ , determine a aceleração máxima com que o carrinho pode se mover para a direita, sem que a caixa escorregue sobre sua superfície inclinada.

**Questão 126** - 🎧 (Renato Brito)

A figura mostra duas caixas *iguais* conectadas entre si por meio de fio e polia ideais. O coeficiente de atrito entre cada bloco e a superfície prismática vale  $\mu = 0,5$  e a gravidade local vale  $g$ . O prof. Renato Brito pede para você determinar a maior aceleração  $a$  com que o sistema pode ser acelerado horizontalmente para a direita, sem que os blocos escorreguem em relação ao prisma. Dado:  $\sin\alpha = 0,6$   $\cos\alpha = 0,8$ .

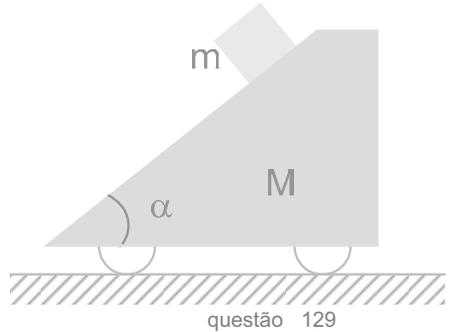
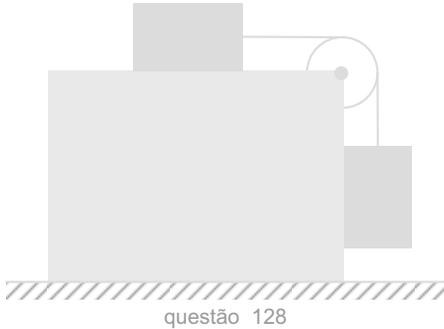
**Questão 127** - 🎧 (Tore Nils Johnson)

A Figura mostra dois blocos de mesma massa  $m$  conectados entre si através de um fio que passa por uma polia, ambos ideais. Se a gravidade local vale  $g$  e o coeficiente de atrito entre o bloco e o carro vale  $\mu > 1$ , o prof. Renato Brito pede para você determinar a maior aceleração  $a$  com que o carro pode se mover, sem que o bloco escorregue em relação a ele.

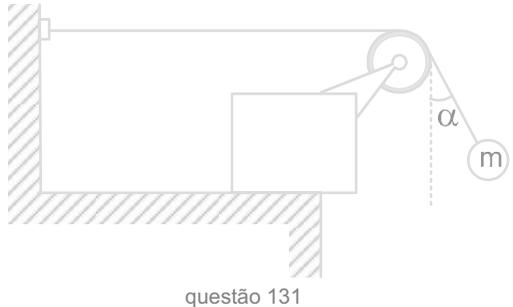
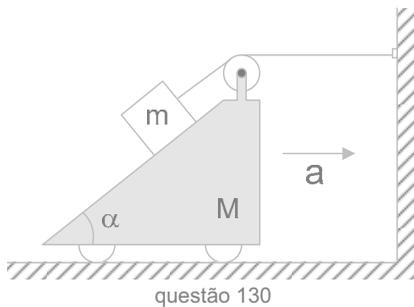


**Questão 128** – 🎧 (Irodov adaptada)

Na Figura, os blocos têm massas iguais e estão inicialmente em repouso (equilíbrio estático) sobre uma mesa que, por sua vez, repousa sobre uma superfície horizontal. Sabendo que o fio e a polia são ideais, a gravidade local vale  $g$  e o coeficiente de atrito entre os blocos e a mesa vale  $\mu$ , determine a maior aceleração com que a mesa deve ser empurrada, de forma que não ocorra escorregamento entre os blocos e a mesa.

**Questão 129** - 🎧 (Irodov)

Um bloco de massa  $m$  é abandonado em repouso sobre um carrinho de massa  $M = 2m$ . Se o sistema pode deslizar sem atrito, o prof. Renato Brito pede para você determinar a aceleração  $a$  adquirida pelo carrinho em função da aceleração da gravidade local  $g$ . Dado:  $\alpha = 45^\circ$

**Questão 130** - 🎧 (Irodov)

Um bloco de massa  $m$ , conectado a uma parede através de um fio ideal, é abandonado em repouso sobre um carrinho de massa  $M = 2m$ . Se o sistema pode deslizar sem atrito, o prof. Renato Brito pede para você determinar a aceleração  $a$  adquirida pelo sistema em função de  $g$ .

Dado:  $\sin \alpha = 0,6$   $\cos \alpha = 0,8$

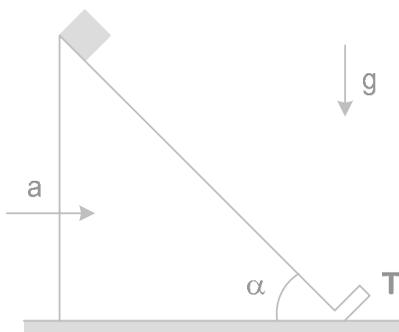
**Questão 131** - 🧠 (Challenging Problems)

Na Figura, após o pêndulo ser abandonado do repouso, sua inclinação  $\alpha = 30^\circ$  com a vertical permanece constante durante o movimento da caixa. Todos os atritos são desprezíveis. Dada a massa da bola  $m = 800 \text{ g}$  e a gravidade local  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , determine a massa  $M$  do bloco, bem como a sua aceleração.

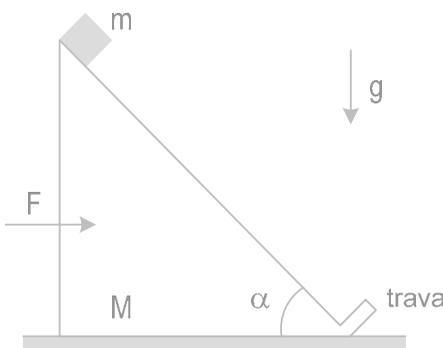
**Questão 132** - 🧠 (Pierre Lucie)

Seja um prisma triangular inicialmente fixo ao solo. A sua superfície inclinada (rampa) é perfeitamente lisa e forma um ângulo  $\alpha$  com a horizontal. Um pequeno bloco, quando abandonado em repouso no topo dessa rampa, desce aceleradamente até encontrar a trava T. O prof. Renato Brito pede para você determinar com que aceleração horizontal  $a$  se deve empurrar esse prisma para a direita, a partir desse instante, a fim de que o tempo que a caixa leve para retornar à sua posição inicial seja o mesmo tempo que ela gastou na descida da rampa. A gravidade local vale  $g$ .

- a)  $g \cdot \operatorname{tg} \alpha$     b)  $2g \cdot \operatorname{tg} \alpha$     c)  $g \cdot \operatorname{cotg} \alpha$     d)  $2g \cdot \operatorname{cotg} \alpha$     e)  $2g \cdot \operatorname{sen} \alpha$



questão 132



questão 133

**Questão 133** - 🧠 (Renato Brito)

Seja um prisma triangular de massa  $M$  e inclinação  $\alpha$  com a horizontal inicialmente em repouso sobre o solo liso. Quando um pequeno bloco de massa  $m$  é abandonado em repouso no topo dessa rampa, desce aceleradamente ladeira abaixo, gastando  $T$  segundos até encontrar a trava. Durante a descida do bloco, é necessária a ação de uma força horizontal e constante de intensidade  $F$  agindo sobre o prisma, a fim de mantê-lo estacionário em relação ao solo.

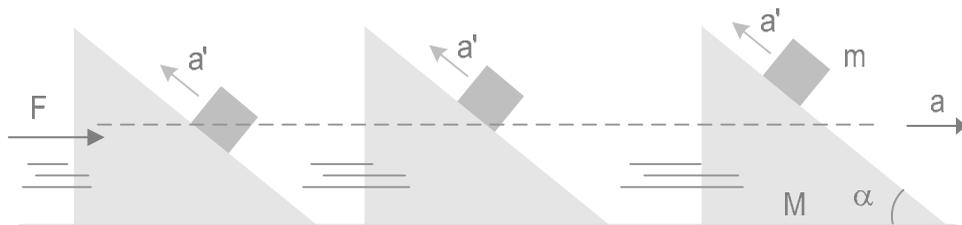
Em seguida, estando o bloco em repouso na extremidade inferior da rampa, a intensidade da força  $F$  é ampliada em  $K$  vezes, levando o bloco a move-se ladeira acima, gastando  $T$  segundos para atingir o topo da rampa novamente.

Determine o valor numérico de  $K$ , para  $\alpha = 45^\circ$  e  $M = 2m$ .

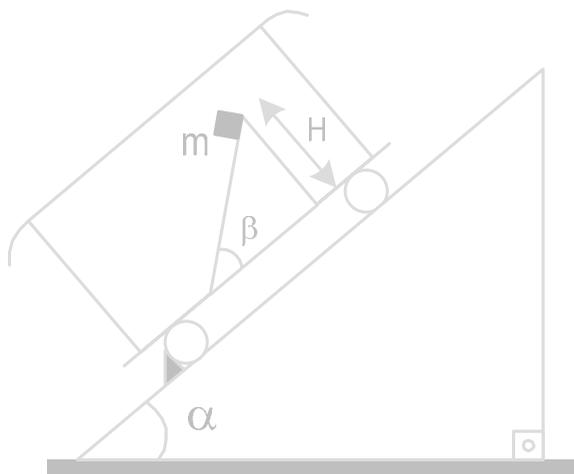
**Questão 134** - 🗣️ (Renato Brito)

Uma caixa de massa  $m$  está apoiada sobre a face inclinada de um prisma triangular que forma um ângulo  $\alpha = 45^\circ$  com a horizontal. O prisma tem massa  $M = 2m$  e é empurrado por uma força horizontal constante de intensidade  $F = 4.m.g$ . Sabendo que a gravidade local vale  $g$  e admitindo que o sistema parte do repouso, o prof. Renato Brito pede que você determine:

- a aceleração  $a$  com a qual o prisma se moverá em relação à Terra;
- a aceleração  $a'$  com a qual a caixa subirá a rampa no referencial da rampa.

**Questão 135** - 🗣️ (Renato Brito)

Observe a Figura a seguir. Os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são conhecidos, assim como a gravidade local  $g$  e a massa  $m$  do bloquinho. Todos os atritos são desprezíveis. Quando a trava das rodas é retirada, o vagão passa a move-se aceleradamente ladeira abaixo.



No seu interior, o bloquinho parte do repouso, do topo da rampa de altura  $H$ , descendo ladeira abaixo. Considerando que a massa do vagão seja muito maior do que a massa do bloquinho, determine o tempo gasto por este para atingir o piso do vagão em função de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $g$  e  $H$ .

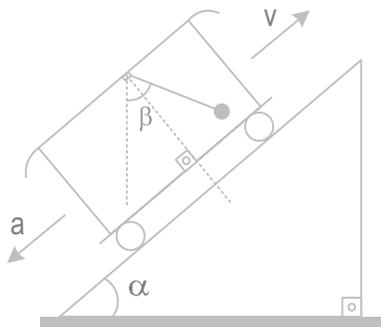
**Questão 136** - 🔒 (Renato Brito)

Considere novamente a Figura da questão anterior. Quando a trava das rodas é retirada, o vagão passa a move-se aceleradamente ladeira abaixo. No seu interior, o atrito entre o bloquinho e a cunha faz com que ele não escorregue em relação à cunha, durante o movimento do vagão. Pede-se determinar:

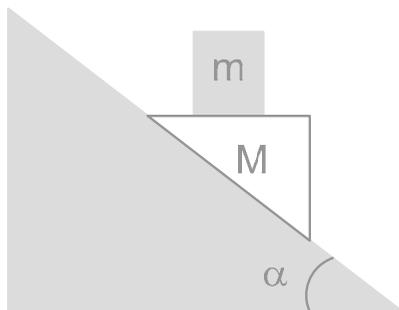
- a força de atrito que age sobre o bloco, durante o movimento do vagão.
- o menor coeficiente de atrito estático necessário para que o bloquinho não escorregue em relação à cunha, durante o movimento acelerado do vagão.

**Questão 137** - 🌀 (Renato Brito)

A Figura mostra um vagão subindo livremente uma rampa fixa de inclinação  $\alpha$  com a horizontal. Fixo ao seu teto se encontra um pêndulo, que permanece estacionário em relação ao vagão, sem oscilar, durante todo o movimento. Sabendo que a gravidade local vale  $g$  e o coeficiente de atrito cinético entre a rampa e o vagão vale  $\mu$ , pede-se determinar a inclinação  $\beta$  ( $\beta > \alpha$ ) do fio com a vertical durante a subida do vagão em movimento retardado.



questão 137



questão 138

**Questão 138** - 🌀 (Renato Brito)

O sistema da figura foi abandonado a partir do repouso. A rampa é perfeitamente lisa e se encontra fixa ao solo. Só há atrito entre a cunha de massa  $M$  e o bloco de massa  $m$  que repousa sobre a superfície horizontal da cunha. Se a gravidade local vale  $g$  e a rampa forma um ângulo  $\alpha$  com a horizontal, o prof. Renato Brito pede que você determine o menor coeficiente de atrito que pode haver na fronteira de contato entre o bloco e a superfície horizontal da cunha a fim de que ambos (bloco e cunha) se movam juntos, sem que o bloco escorregue em relação à cunha durante o movimento descendente do conjunto.

**Questão 139** - 🎧 (Renato Brito)

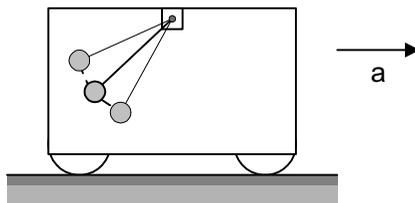
Considere que um pêndulo simples tem um período  $T = 1$  s, quando oscila num campo gravitacional uniforme  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>. Se esse pêndulo for fixado ao teto de um vagão que desce livremente uma rampa lisa, inclinada de um ângulo  $\alpha = 60^\circ$  com a horizontal, oscilará com período:

- a) 1 s
- b)  $\sqrt{2}$  s
- c)  $(\sqrt{2}/2)$  s
- d)  $\sqrt{3}$  s
- e)  $(\sqrt{3}/2)$  s

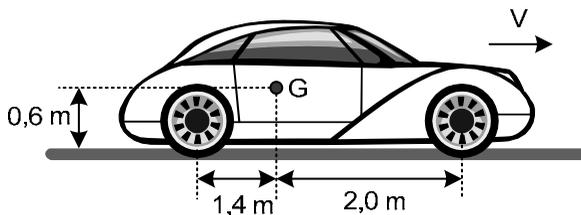
**Questão 140** - 🎧 (Renato Brito)

Num dado planeta onde a gravidade vale  $g$ , um relógio de pêndulo de comprimento  $L = 1$  m funciona pontualmente no interior de um vagão de trem inicialmente em repouso. Quando o prof. Renato Brito aplicou uma aceleração constante ao vagão, o relógio passou a oscilar em torno de uma posição de equilíbrio 36 cm acima da posição de equilíbrio original. O efeito da aceleração, entretanto, fez com que o pêndulo deixasse de operar pontualmente, pois este passou a:

- a) adiantar 15 s a cada minuto;
- b) adiantar 12 s a cada minuto;
- c) adiantar 1 min a cada hora;
- d) adiantar 45 s a cada minuto;
- e) adiantar 24 s a cada hora.

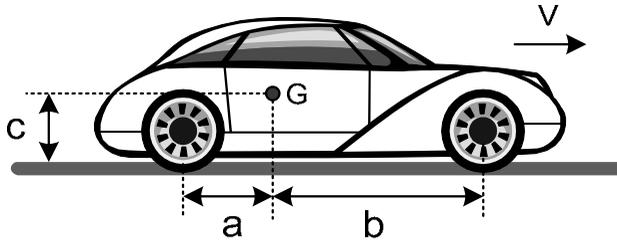
**Questão 141** - 🎧 (ITA 2006)

A Figura mostra um Maserati, um automóvel esportivo de fabricação italiana. O coeficiente de atrito estático entre as rodas do carro e a pavimentação é  $\mu = 0,75$ . A pista é reta e horizontal. Atrito de escorregamento só é considerado na roda motriz; atrito de rolamento é desprezado. Supõe-se que o motor possa desenvolver força de tração de sobra e que o centro de massa do veículo se encontre no ponto G. Considerando  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>, o prof. Renato Brito pede que você determine a maior aceleração do veículo na partida, na hipótese de tração só dianteira.



**Questão 142** - 🎧

A Figura mostra um carro de massa  $m$ , que move-se ao longo de uma pista horizontal cujo coeficiente de atrito estático com as rodas vale  $\mu$ . Atrito de escorregamento só é considerado na roda motriz; atrito de rolamento é desprezado. Supõe-se que o motor possa desenvolver força de tração de sobra. Determinar a maior aceleração do veículo na partida, na hipótese de tração só traseira.



# 5 DINÂMICA CURVILÍNEA NO REFERENCIAL NÃO INERCIAL



## 5.1 INTRODUÇÃO

Nos capítulos 2 e 4, aprendemos que as forças podem ser classificadas em *forças de interação* e *forças de inércia*.

**Forças de Interação** são aquelas que decorrem da interação direta (forças de contato) ou indireta (forças de campo) entre dois corpos, surgindo sempre aos pares, em acordo com a 3ª lei de Newton (Ação e Reação). Usando uma linguagem mais simples, são as forças comuns que usualmente se estuda no Ensino Médio, tais como a força gravitacional (peso, por exemplo), a força elétrica, a força magnética, o atrito, a normal  $N$ , a força elástica, o empuxo etc.

**Forças de Inércia** são forças fictícias. Elas surgem apenas quando efetuamos uma mudança de um referencial inercial para um referencial não inercial com base no Princípio da Equivalência de Einstein. Elas não existem no referencial inercial, só agindo nos referenciais não inerciais (acelerados).

Sempre que efetuamos uma mudança de um referencial inercial para um referencial acelerado em **translação retilínea** com aceleração  $\mathbf{a}$ , a força de inércia " $M \cdot \mathbf{a}$ ", que surge nesse contexto, é chamada de "**força de Einstein**" e esteve presente em todos os exemplos resolvidos e propostos do capítulo 4.

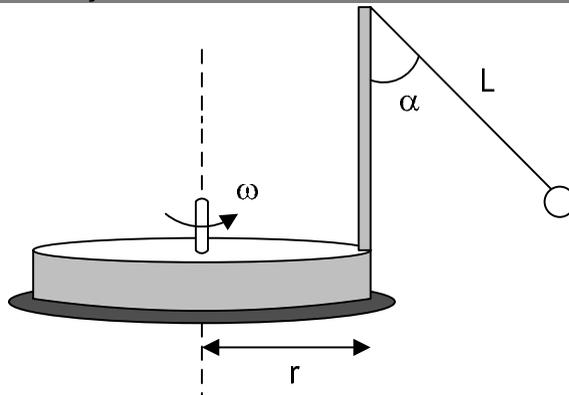
Por outro lado, quando efetuamos uma mudança de um referencial inercial para um referencial não inercial dotado de movimento de rotação uniforme, animado de aceleração exclusivamente centrípeta  $\mathbf{a} = \omega^2 \cdot \mathbf{R}$ , a força de inércia que surge nesse contexto ( $M \cdot \mathbf{a} = M \cdot \omega^2 \cdot \mathbf{R}$ ) é chamada de **força centrífuga** e será discutida no presente capítulo.

Além da força de Einstein e da centrífuga, também podemos citar as forças de **Euler** e **Coriolis**, cuja aplicação prática na resolução de problemas é bastante restrita, fugindo dos objetivos do presente livro de Mecânica.

## 5.2 A FORÇA CENTRÍFUGA

A força centrífuga é uma força de inércia que age apenas em referenciais não inerciais dotados de aceleração centrípeta, isto é, referenciais em rotação. Para uma melhor compreensão, consideremos o exemplo a seguir.

**Exemplo Resolvido 19:** a figura mostra um carrossel de raio  $r = 1,5 \text{ m}$  girando em torno do seu eixo central. Um mastro fixo à sua periferia suporta um pêndulo de comprimento  $L = 10 \text{ m}$  que gira solidário ao carrossel, formando um ângulo  $\alpha$  constante com a vertical, tal que  $\text{sen}\alpha = 0,6$ . ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ ). Determine a velocidade angular  $\omega$  de rotação do sistema.



### 1ª Solução – Análise no Referencial Inercial – Terra

Para um referencial (observador) fixo à Terra (Figura 100), todo o conjunto “carrossel + mastro + pêndulo” está girando com velocidade angular  $\omega$  em torno do eixo de rotação central. A esfera do pêndulo, portanto, está executando um MCU de raio  $R = r + L \cdot \text{sen}\alpha$ , dotada de aceleração centrípeta  $a_{\text{ctp}} = \omega^2 \cdot R$  no referencial da Terra, sob ação exclusiva das forças peso  $P$  e tração  $T$ .

Conforme aprendemos no estudo da Dinâmica de um MCU no plano horizontal (eq8 e eq9 página 65), a dinâmica do movimento desse pêndulo é facilmente equacionada da seguinte forma:

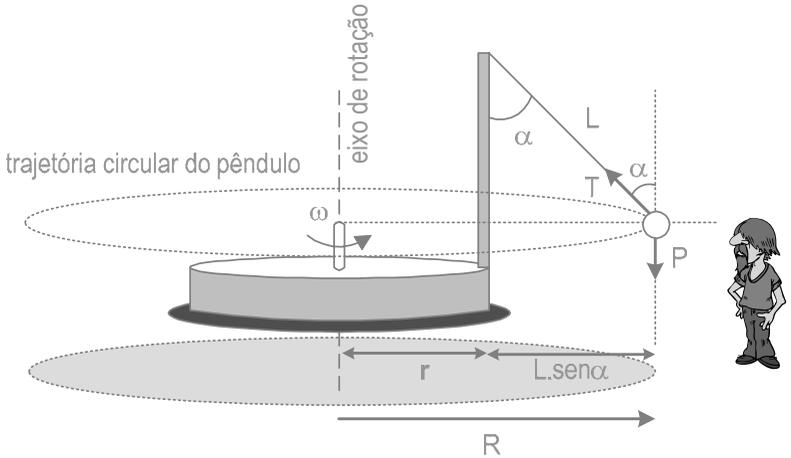
Na vertical (Figura 100), temos o equilíbrio das forças:  $T \cdot \cos\alpha = m \cdot g$  (eq74)

Na direção radial, a aceleração centrípeta é produzida pela componente horizontal  $T_x$  da tração. Pela 2ª lei de Newton na direção radial (ou centrípeta), podemos escrever:

$$FR_{\text{ctp}} = F_{\text{in}} - F_{\text{out}} = m \cdot a_{\text{ctp}}$$

$$(T \cdot \text{sen}\alpha - 0) = m \cdot (\omega^2 R)$$

$$T \cdot \text{sen}\alpha = m \cdot (\omega^2 \cdot R) \quad (\text{eq 75})$$



**Figura 100** – Diagrama das forças que agem no pêndulo, no referencial da Terra.

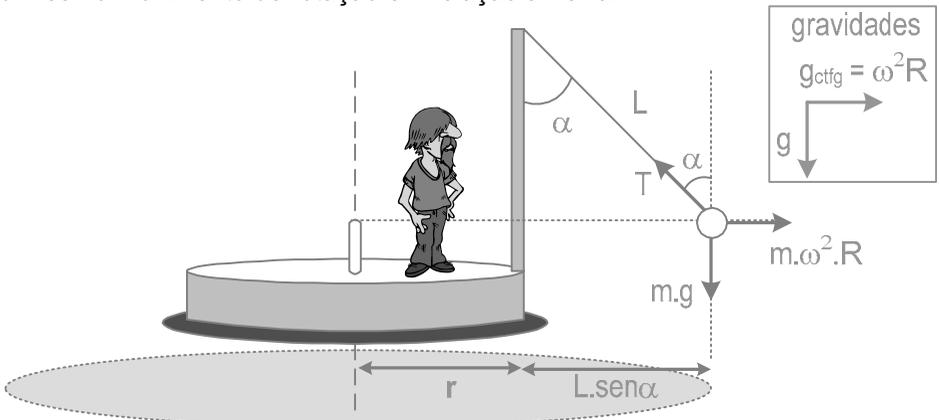
A esfera do pêndulo descreve um movimento circular de raio  $R$  em torno do eixo de rotação, tal que:

$$R = r + L \cdot \sin \alpha = 1,5 + 10 \times 0,6 = 7,5 \text{ m} \Rightarrow \boxed{R = 7,5 \text{ m}}$$

Dividindo a equação eq75 pela eq74, temos que:

$$\frac{T \cdot \sin \alpha}{T \cdot \cos \alpha} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot R}{m \cdot g} \Rightarrow \text{tg} \alpha = \frac{\omega^2 \cdot R}{g} \Rightarrow \frac{0,6}{0,8} = \frac{\omega^2 \cdot 7,5}{10} \Rightarrow \boxed{\omega = 1 \text{ rad/s}}$$

Mas como resolveríamos esse mesmo problema no referencial do próprio carrossel? Ora, seja um observador solidário ao carrossel (Figura 101), isto é, um observador que se encontre sobre o referido carrossel, compartilhando do seu mesmo movimento de rotação em relação à Terra.



**Figura 101** – Diagrama das forças que agem no pêndulo, no referencial do pêndulo

Para tal observador, o carrossel, assim como o pêndulo, se encontra absolutamente imóvel (*afinal, ninguém possui velocidade ou aceleração em relação a si mesmo ☺*), enquanto todo o ambiente ao seu redor é que está girando em relação a ele.

Fazendo uso do princípio da Equivalência de Einstein (estudado no capítulo 4), efetuamos uma mudança do referencial inercial da Terra para o referencial não inercial do próprio carrossel.

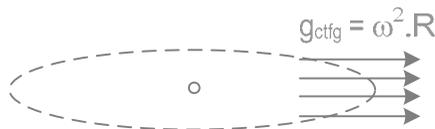
A aceleração centrípeta  $a_{ctp}$  que a esfera do pêndulo possui, no referencial da Terra (Figura 102), equivale, no referencial do carrossel, a uma “*gravidade centrífuga*” de mesmo valor ( $\omega^2.R$ ), mesma direção (radial) e sentido contrário ao da aceleração centrípeta, que será “*abandonada*” (Figura 103).



**Figura 102** – no referencial inercial da Terra, o pêndulo está move-sendo em MCU animado de aceleração centrípeta  $a_{ctp}$ .



**Figura 103** – no referencial não inercial do próprio pêndulo, este não possui nem velocidade nem aceleração. Nesse referencial, essa  $a_{ctp}$  é sentida como uma gravidade centrífuga (que foge do centro).



**Figura 104** – a gravidade centrífuga é radial e aponta para fora da curva em cada ponto, causando uma força gravitacional fictícia, denominada força centrífuga.

A **gravidade centrífuga**  $g_{ctfg}$  é radial e aponta para fora da curva em cada ponto da curva (Figura 104), causando uma força gravitacional fictícia denominada força centrífuga  $F_{ctfg}$ , que só existe no referencial animado de movimento circular, como mostra a Figura 101. Assim, nesse referencial, todos os corpos de massa  $m$  que se encontrem a uma distância  $R$  do eixo de rotação, ficarão sujeitos a uma força radial para fora (centrífuga), de intensidade:

$$F_{ctfg} = m \cdot g_{ctfg} = m \cdot (\omega^2.R) \quad (\text{eq 76})$$

Para o observador não inercial (Figura 101), o pêndulo se encontra em equilíbrio (relativo) estático no referencial do carrossel, o que permite escrever:

$$\text{equilíbrio vertical: } T_y = P \Rightarrow T \cdot \cos \alpha = m \cdot g \quad (\text{eq 77})$$

$$\text{equilíbrio radial: } T_x = F_{ctfg} \Rightarrow T \cdot \sin \alpha = m \cdot \omega^2.R \quad (\text{eq 78})$$

Comparando-se as relações eq74 e eq75, obtidas pelo referencial inercial com as relações eq77 e eq78, obtidas pelo referencial em rotação, vemos que

ambos chegam às mesmas relações matemáticas e, portanto, aos mesmos resultados, embora cada um se apóie em argumentos diferentes.

A tabela abaixo sintetiza a visão de cada referencial sobre a situação física em análise nas Figuras 100 e 101:

Referencial da Terra	Referencial do carrossel
A esfera do pêndulo descreve um MCU no plano horizontal (Figura 100).	O pêndulo se encontra em repouso permanente, sem velocidade nem aceleração ( $V' = 0$ , $a' = 0$ ), portanto, em equilíbrio relativo (Figura 101).
A esfera possui uma $a_{ctp}$ , o que requer a existência de uma força resultante centrípeta $F_{ctp}$ para produzir essa aceleração, de acordo com a 2ª lei de Newton.	o pêndulo possui aceleração resultante nula, portanto, força resultante nula. Não há resultante centrípeta nem tangencial nesse referencial.
Nesse referencial inercial, não existem forças fictícias, tais como a força centrífuga. A componente horizontal da tração exercerá o papel de resultante centrípeta $F_{ctp} = T_x$ , fornecendo ao pêndulo a $a_{ctp}$ necessária para o movimento circular.	além das forças de interação peso $P$ e tração $T$ , existe uma força fictícia denominada centrífuga (radial para fora) $F_{ctfg} = m \cdot \omega^2 \cdot R$ . A resultante dessas três forças deverá ser nula, para justificar o equilíbrio relativo do pêndulo nesse referencial ( $a' = 0$ ).

Note que a presença de *força centrífuga* e de *uma força resultante centrípeta* num mesmo referencial é uma incongruência conceitual. Afinal, enquanto a resultante centrípeta só existe no referencial inercial (Figura 100), a força centrífuga, por sua vez, só existe no referencial não inercial em rotação (Figura 101).

Vale ressaltar também que, por se tratar de uma força de inércia, a *força centrífuga* não decorre da interação de dois corpos e, portanto, não admite uma “força de reação” (propriedade 11, página 105). Portanto, em qualquer situação em que a força centrífuga esteja presente, nenhuma outra força será a “*reação à força centrífuga*”.

Outro aspecto interessante e vantajoso da análise do problema no referencial não inercial é que ela torna mais claros alguns comportamentos do sistema cuja compreensão não é nada intuitiva quando analisada no referencial inercial. Por exemplo, é conhecido o fato de que, quanto maior for a velocidade angular  $\omega$  de rotação do pêndulo cônico, no referencial da Terra, mais ele tende a subir, levando a um aumento do ângulo  $\alpha$ , mostrado nas Figuras 100 e 101.

Embora a justificativa para esse fato seja meio enigmática no referencial da Terra (Figura 100), essa tendência de subida do pêndulo fica absolutamente clara quando o problema é analisado no referencial girante (Figura 101), no qual

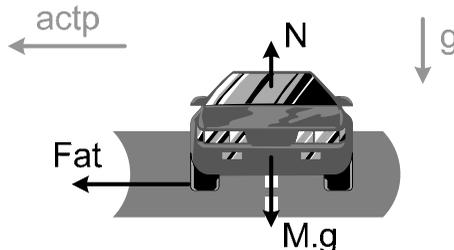
o aumento da velocidade angular  $\omega$  leva ao crescimento da força centrífuga  $m \cdot \omega^2 \cdot R$  e, conseqüentemente, ao crescimento do ângulo  $\alpha$ . Idéias semelhantes podem ser utilizadas em uma nova análise dos problemas de aplicação de números **111** a **115** no referencial não inercial em rotação, fazendo uso do conceito de força centrífuga. Você seria capaz de retornar a esses problemas e analisá-los no referencial acelerado ?

**Exemplo Resolvido 20:** um Mondeo de massa  $M = 1200$  kg se desloca com velocidade escalar constante, fazendo uma curva de raio  $R = 20$  m num solo plano horizontal. Sabendo que o coeficiente de atrito estático e cinético entre os pneus e o solo valem, respectivamente,  $\mu_e = 2,0$  e  $\mu_c = 1,8$  determine:

- qual a maior velocidade com que o carro pode fazer a curva sem derrapar ?
- A força de atrito que age no carro, quando a curva é feita a 36 km/h ?
- A força de atrito que age no carro, se ele atingir uma velocidade de 108 km/h ?

### 1ª Solução – Análise no Referencial Inercial

Faremos a análise, considerando o veículo como puntiforme, desprezando as suas dimensões, a fim de evitar o uso de conceito de *momento de uma força*. Uma análise mais elaborada, incluindo a possibilidade de o carro tombar (capotar) será feita adiante na página 165, exemplo resolvido 25.



**Figura 105** – Diagrama das forças que agem no carro, no referencial inercial

Como estamos analisando esse movimento no referencial inercial (Terra), nenhuma força de inércia (tal como a centrífuga) estará presente. Adiante, analisaremos o problema no referencial não inercial do próprio carro. Assim, no referencial da Terra, agirão sobre o veículo apenas as forças normal  $N$  e peso  $P$  na vertical (Figura 105), bem como uma força de atrito radial, que fornecerá a aceleração centrípeta  $actp$  necessária para esse MCU.

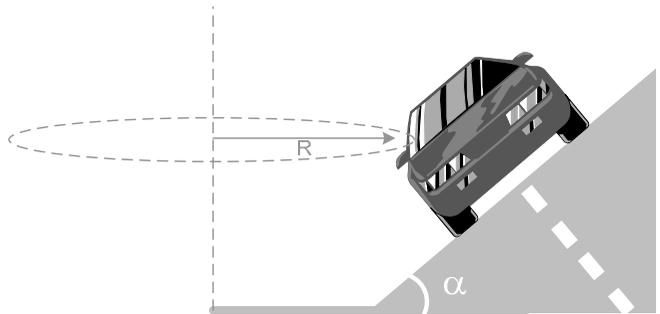
Conforme aprendemos no estudo da Dinâmica de um MCU no plano horizontal (eq8 e eq9, página 70), a dinâmica do movimento desse veículo é facilmente equacionada da seguinte forma:

$$\text{equilíbrio vertical: } N = M \cdot g \quad (\text{eq 79})$$

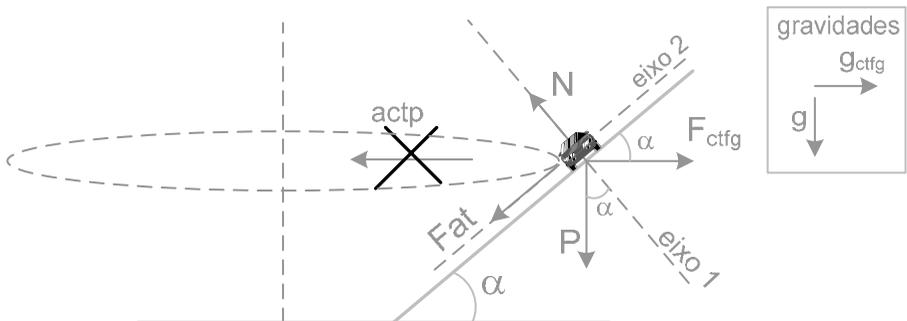
**Exemplo Resolvido 22:** considere o veículo de massa  $m$  percorrendo uma curva inclinada, de ângulo  $\alpha$ , com raio  $R$  constante, a uma velocidade  $v$ . Supondo que o coeficiente de atrito dos pneus com o solo seja  $\mu$ , calcule a máxima velocidade com que este veículo pode percorrer esta curva, sem deslizamento.

### 1ª Solução - No Referencial Não Inercial do Veículo

No referencial não inercial do próprio veículo, não há nem aceleração centrípeta  $a_{ctp}$  nem força resultante centrípeta, visto que o carro se encontra imóvel nesse referencial, em equilíbrio relativo ( $a' = 0$ ,  $v' = 0$ ).



Segundo o Princípio da Equivalência, a aceleração centrípeta que o carro possui, no referencial da Terra, equivale, no referencial do próprio veículo, a uma gravidade centrífuga  $g_{ctfg} = v^2/R$  de mesmo valor, mesma direção (radial) e sentido contrário (radial para fora) que produzirá uma força centrífuga  $F_{ctfg} = m \cdot g_{ctfg}$ . Esta, por sua vez, empurra o carro para fora da curva como mostra a Figura 107.



**Figura 108** – Diagrama das forças que agem no carro, no referencial não inercial do próprio carro

Se a velocidade  $v$  do veículo (em relação à Terra) for suficientemente grande, produzirá uma força centrífuga  $F_{ctfg} = m \cdot v^2/R$  (no referencial não inercial) muito intensa ao ponto de tornar iminente o escorregamento do carro ladeira acima (ao

## 2ª Solução no Referencial Inercial da Terra

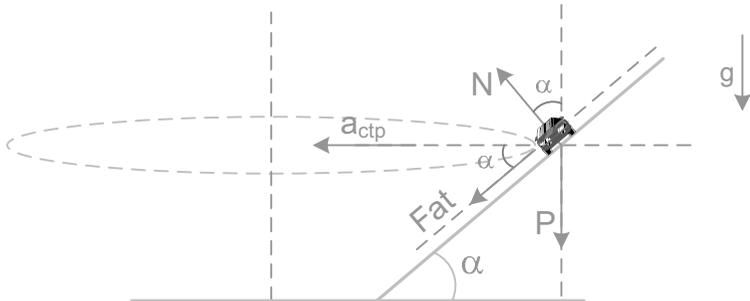


Figura 110 – Diagrama das forças que agem no carro no referencial da Terra.

Ora, Claudete, no referencial da Terra, o movimento descrito por esse veículo trata-se de um MCU no plano horizontal, com a presença de uma aceleração centrípeta  $a_{ctp}$  radial. Nesse caso, precisamos seguir rigorosamente o que foi explicado nas páginas 64 e 65, incluindo o par de eixos descrito na Figura 42 (página 64), bem como as relações eq8 e eq9 da página 65.

Adicionalmente, em se tratando de um referencial inercial, forças fictícias, tais como a centrífuga, não estarão mais presentes, como mostra a Figura 110. Assim, na direção vertical, a caixa não apresenta aceleração alguma, estando, portanto, em equilíbrio nesse eixo, o que nos permite escrever:

$$\text{Equilíbrio vertical: } N \cdot \cos\alpha = \text{Fat} \cdot \sin\alpha + P \quad (\text{eq 98})$$

Na direção radial, pela 2ª lei de Newton, deve haver uma força resultante centrípeta para produzir a aceleração centrípeta  $a_{ctp}$  necessária para o MCU. Assim, na direção radial, escrevemos:

$$FR_{ctp} = (F_{in} - F_{out}) = m \cdot a_{ctp}$$

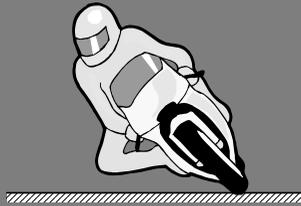
$$(N \cdot \sin\alpha + \text{Fat} \cdot \cos\alpha - 0) = m \cdot \frac{v^2}{R} \quad (\text{eq 99})$$

$$\text{Condição de iminência de escorregar: } \text{Fat} = \mu \cdot N \quad (\text{eq 100})$$

O conjunto de relações eq98, eq99 e eq100 é matematicamente equivalente ao dois conjuntos de relações encontradas pelo referencial não inercial e, portanto, também leva ao mesmo resultado para  $v_{\max}$  expresso pela relação eq94, embora cada referencial faça uso de argumentos físicos distintos para escrever suas próprias equações.

Particularmente, eu, Renato Brito, acredito que a resolução mais prática e objetiva seja a que envolve as relações eq91, eq92 e eq93.

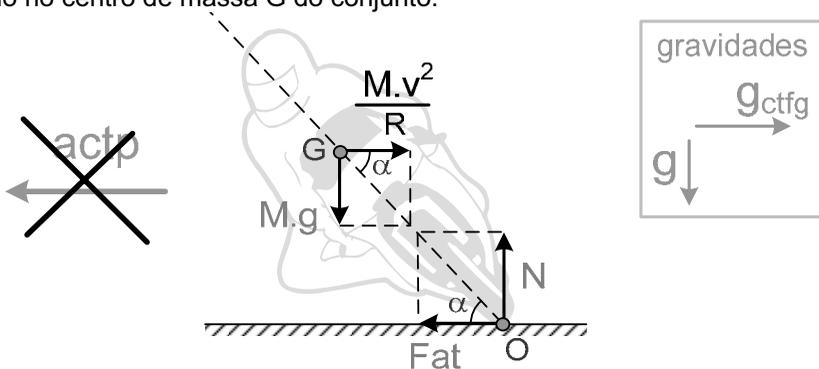
**Exemplo Resolvido 24:** um velocista pilota uma moto de prova com velocidade  $V$  descrevendo uma curva de raio  $R$ , utilizando-se do atrito que existe entre o asfalto e os pneus da moto.



- a) Mostre que, para cada velocidade  $V$  com a qual o piloto descreva a curva, existe única inclinação  $\alpha$  adequada que ele deve manter com a horizontal para garantir o seu “equilíbrio”, dada por  $\text{tg } \alpha = g.R / V^2$ ;
- b) mostre que a máxima velocidade que o piloto pode ter, sem riscos de derrapagem lateral, é dada por  $V_{\text{max}} = \sqrt{\mu.R.g}$ ;
- c) mostre que, durante o traçado da curva com máxima velocidade (iminência de derrapar), a inclinação da moto com o solo, para que o piloto esteja “equilibrado”, é dada pelo ângulo  $\alpha$  tal que  $\text{tg } \alpha = 1/\mu$ .

### Solução no Referencial Não Inercial da Moto

a) As Figuras 113 e 114 mostram o diagrama das forças que agem no conjunto moto+motoqueiro, no referencial não inercial da moto, incluindo a força centrífuga  $F_{\text{ctfg}}$ , radial para fora da curva, juntamente com o peso  $M.g$ , ambos agindo no centro de massa  $G$  do conjunto.

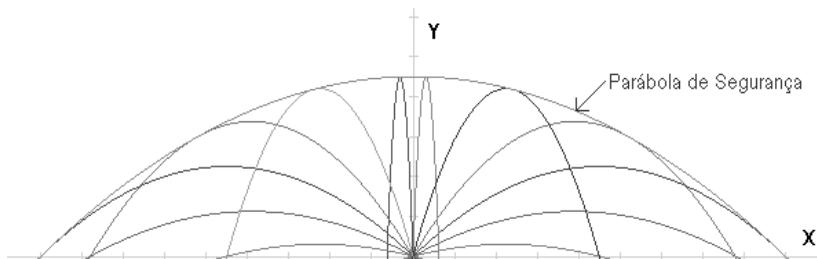


**Figura 113** – Diagrama das forças que agem no conjunto moto+motoqueiro no referencial não inercial em rotação

A Figura 114 já mostra um polígono fechado de quatro forças, o que geometricamente já garante que a resultante delas é nula (equilíbrio das forças no referencial não inercial):

# 6 PARÁBOLA DE SEGURANÇA

## Tópico Especial 1



### 6.1 INTRODUÇÃO À PARÁBOLA DE SEGURANÇA

---

A parábola de segurança (ps) é uma ferramenta poderosa e muito interessante que resolve, de forma simples e elegante, problemas de máximos e mínimos, envolvendo lançamentos de projéteis que, de outra forma, seriam solucionados com um enorme trabalho algébrico, regado a cálculo diferencial.

Ela é citada em listas de exercícios de muitos livros de Mecânica universitários, bem como nos livros da renomeada Editora Mir-Moscou, mas a sua teoria detalhada, envolvendo descrição de todas as suas propriedades, bem como as respectivas demonstrações, é rara.

Assim, visando a divulgar essa ferramenta tão poderosa e tão útil para que seja utilizada por um número cada vez maior de estudantes brasileiros, achei oportuna a publicação desse tema neste livro, descrevendo e demonstrando cada uma das suas propriedades, bem como ilustrando as aplicações práticas dessa ferramenta.

### 6.2 ENTENDENDO A PARÁBOLA DE SEGURANÇA

---

Considere um lançador de projéteis, localizado na origem de um sistema de coordenadas cartesianas XY (Figura 1), disparando projéteis com velocidade inicial  $V_0$  constante, mas sob diferentes ângulos de disparo  $\alpha$  com a horizontal, variando gradativamente no intervalo  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Para cada ângulo  $\alpha$ , a trajetória seguida pelo projétil é uma parábola que parte da origem, atinge uma altura máxima e retorna ao solo horizontal, como mostrado na Figura 1.

O movimento parabólico de um projétil pode ser interpretado como a superposição de dois movimentos ortogonais mais simples: (1) um MRU na horizontal (visto que o projétil move-se na ausência de forças horizontais); (2) e um MRUV na direção vertical sob ação exclusiva da força peso, que fornece a aceleração constante da gravidade  $a = g$ . A cinemática de cada um desses movimentos permite escrever as suas respectivas funções horárias da posição em cada eixo:

$$X = V_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \quad (\text{eq1})$$

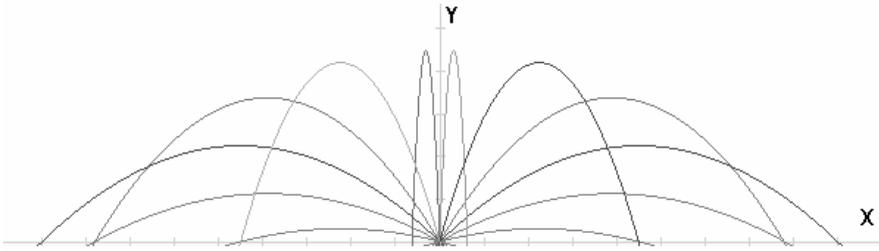
$$Y = V_0 \cdot \text{sen}\alpha \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} \quad (\text{eq2})$$

Para determinar a equação da trajetória parabólica seguida pelo projétil, devemos encontrar uma relação entre as coordenadas  $Y$  e  $X$  independente do parâmetro  $t$  que, para isso, precisa ser eliminado das equações eq1 e eq2 acima. Isolando  $t$  na relação eq1 e substituindo na relação eq2, vem:

$$Y = (\text{tg}\alpha) \cdot X - \frac{g}{2 \cdot V_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot X^2 \quad (\text{eq3})$$

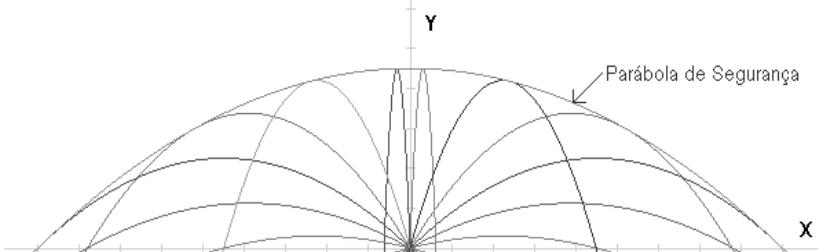
Equação geral da trajetória do projétil

A expressão acima é a equação geral da trajetória descrita por um projétil lançado com velocidade inicial  $V_0$ , formando um ângulo  $\alpha$  com a horizontal, num campo gravitacional uniforme  $g$ .



**Figura 1** – Família de trajetórias parabólicas descritas por projéteis que foram disparados da origem do sistema de coordenadas com velocidade de disparo  $V_0$  constante sob cada um dos seguintes ângulos de disparo  $\alpha$ :  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $85^\circ$ ,  $95^\circ$ ,  $105^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $150^\circ$  e  $165^\circ$ .

Efetuando-se uma sequência de disparos sob ângulos  $\alpha$  progressivamente maiores, variando no intervalo  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ , obteremos uma família de trajetórias parabólicas que têm, em comum, a velocidade de disparo  $V_0$ , sendo, cada uma delas, descrita pela equação eq3.



**Figura 2** - Todas as trajetórias parabólicas de projéteis disparados com mesma velocidade inicial  $V_0$ , mas sob ângulos de disparos variados, tangenciam internamente uma parábola envolvente, denominada parábola de segurança.

Curiosamente, essa família de parábolas, que têm em comum a mesma velocidade de disparo  $V_0$ , tangencia uma parábola envolvente, que é única para cada valor de  $V_0$ , denominada “parábola de segurança”, como mostra a Figura 2.

A expressão “parábola de segurança” advém do fato de que ela define o lugar geométrico dos pontos do plano XY que jamais serão atingidos pelo lançador, ao efetuar disparos com aquela velocidade  $V_0$  característica daquela PS. O conjunto de todos os pontos externos a essa parábola de segurança constituem a chamada “zona de segurança” dessa PS, como mostra a Figura 3.



**Figura 3** - pontos localizados na zona externa à parábola de segurança (PS) não são alcançados por esse lançador, quando dispara projéteis com a velocidade  $V_0$  característica dessa PS.

### 6.3 DETERMINANDO A EQUAÇÃO DA PARÁBOLA DE SEGURANÇA

Seja um lançador, localizado na origem  $(0, 0)$  do plano cartesiano, disparando projéteis com velocidade de módulo  $V_0$  constante, porém, sob ângulos  $\alpha$  variáveis. Inicialmente, desejamos responder à seguinte pergunta:

dado um ponto P qualquer, do plano cartesiano, localizado nas coordenadas  $(X_P, Y_P)$ , com qual ângulo  $\alpha$  o lançador deverá efetuar o disparo a fim de atingir aquele ponto ?

Para determinar o ângulo  $\alpha$ , vamos impor que a trajetória do projétil (dada pela equação eq3) efetivamente passe pelo ponto P. Para isso, fazemos  $X = X_P$  e  $Y = Y_P$  na relação eq3 :

$$Y_P = (\operatorname{tg}\alpha) \cdot X_P - \frac{g}{2.V_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot (X_P)^2, \quad \text{mas} \quad \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha = (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

$$Y_P = (\operatorname{tg}\alpha) \cdot X_P - \frac{g \cdot (X_P)^2}{2.V_0^2} \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha). \quad \text{Isolando a variável } \operatorname{tg}\alpha, \text{ vem:}$$

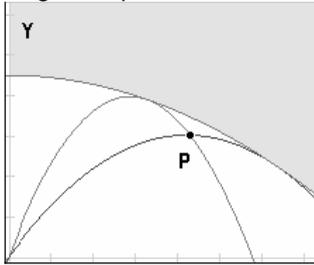
$$\left(\operatorname{tg}\alpha\right)^2 - \left(\frac{2.V_0^2}{g.X_P}\right) \cdot \operatorname{tg}\alpha + \left(1 + \frac{2.V_0^2.Y_P}{g.X_P^2}\right) = 0 \quad \text{(eq4)}$$

Essa equação do 2º grau na variável  $\alpha$  fornecerá os valores do ângulo de disparo  $\alpha$  para os quais o projétil, efetivamente, passa pelo ponto P. Entretanto,

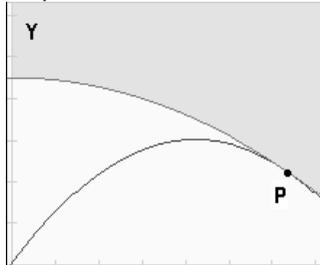
dependendo das coordenadas ( $X_P$ ,  $Y_P$ ) desse ponto, porém, três situações possíveis podem ocorrer:

- Caso 1:  $\Delta > 0$**  nesse caso, a equação eq4 fornecerá dois ângulos  $\alpha$  distintos para os quais o ponto  $X_P, Y_P$  será atingido pelo projétil. Graficamente, o ponto P é interno à parábola de segurança (Figura 4).
- Caso 2:  $\Delta = 0$**  nesse caso, a equação eq4 fornecerá um único ângulo  $\alpha$  de disparo sob o qual o ponto  $X_P, Y_P$  será atingido pelo projétil. Graficamente, o ponto P está sobre parábola de segurança, isto é, P pertence à PS (Figura 5).
- Caso 3:  $\Delta < 0$**  aqui, a equação 4 não possui solução. Em outras palavras, não existe ângulo  $\alpha$  que faça a trajetória do projétil passar pelo ponto  $X_P, Y_P$ . O motivo é que a velocidade do lançador está pequena demais para atingir esse ponto. Para atingi-lo, será necessário aumentar a velocidade de disparo, isto é, trocar a PS original por uma nova PS mais abrangente que contenha esse ponto P. Graficamente,  $\Delta < 0$  significa que o ponto P é externo à parábola de segurança, isto é, se encontra em sua zona de segurança (Figura 6).

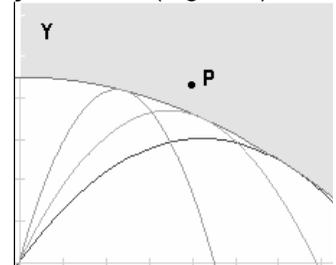
A parábola de segurança é o lugar geométrico (L.G.) dos pontos  $X_P, Y_P$  do plano, os quais são atingidos pelo lançador sob um único ângulo  $\alpha$  de disparo. Em outras palavras, ela é o L.G. dos pontos  $X_P, Y_P$  para os quais a equação do 2º grau eq4 na variável  $\alpha$  só apresenta uma única solução distinta (Figura 5).



**Figura 4** - Caso  $\Delta > 0$ : o ponto P está localizado no interior da parábola de segurança e é atingido para dois ângulos  $\alpha$  de disparos distintos.



**Figura 5** - Caso  $\Delta = 0$ : o ponto P pertence à parábola de segurança e é atingido apenas sob um único ângulo  $\alpha$  de disparo. Ele está no limite, exatamente na fronteira entre os pontos que podem e os que não podem mais ser alcançados pelo lançador.



**Figura 6** - Caso  $\Delta < 0$ : o ponto P está localizado fora da parábola de segurança e não pode ser atingido, independente do ângulo de disparo.

Portanto, para determinar esses pontos  $X_P, Y_P$ , devemos impor a condição  $\Delta = 0$  na equação eq4:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

# 7 VÍNCULOS GEOMÉTRICOS

## Tópico Especial 2



### 7.1 INTRODUÇÃO AOS VÍNCULOS GEOMÉTRICOS

---

Quando dois corpos A e B move-se livremente, seus movimentos ocorrem de forma independente e estão meramente sujeitos às leis da Mecânica. Quando esses corpos se move vinculados entre si, contudo, seus movimentos deixam de ser independentes e a geometria envolvida impõe restrições que devem ser satisfeitas em função do tipo de conexão entre os corpos (fios, polias móveis, polias fixas etc). Essas restrições recebem o nome de *vínculos geométricos*.

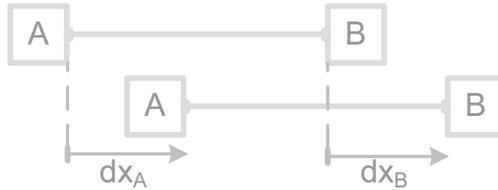
As relações cinemáticas que decorrem exclusivamente desses vínculos geométricos, aliadas às leis da Mecânica, constituirão as ferramentas disponíveis para o estudo analítico dos problemas da Dinâmica.

O uso exclusivo das leis de Newton do movimento, ignorando as relações cinemáticas oriundas dos vínculos geométricos, torna o número de incógnitas maior do que o número de equações disponíveis para a análise do problema, inviabilizando a sua solução.

Nesse tópico especial, o prof. Renato Brito abordará os vínculos geométricos mais comuns em problemas de Mecânica.

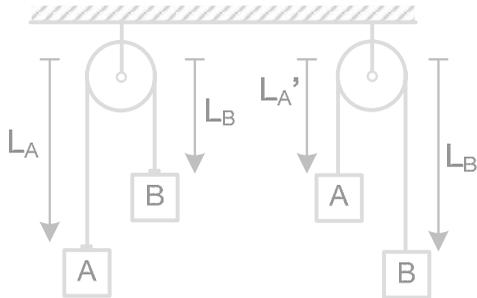
## 7.2 CASO 1: FIOS INEXTENSÍVEIS, POLIAS FIXAS

A Figura 1 mostra duas caixas A e B que move-sem numa mesma direção (movimento unidimensional), conectadas entre si por meio de um fio ideal inextensível. O vínculo geométrico (imposta pelo fato de o fio não esticar) garante que as caixas A e B sempre sofrerão deslocamentos idênticos ( $dx_A = dx_B$ ), tanto pelo fato de as caixas se moverem na mesma direção do fio quanto pelo fato de uma caixa puxar a outra, o que mantém o fio permanentemente tracionado (esticado) durante o movimento.



**Figura 1** – as caixas move-sem na mesma direção do fio, enquanto uma caixa puxa a outra. Como o fio não estica, suas extremidades sempre sofrem deslocamentos idênticos.

Na Figura 1, o vínculo geométrico garante que o movimento de uma das caixas será a cópia fiel do movimento da outra. Elas sofrerão deslocamentos necessariamente iguais, em qualquer intervalo de tempo, e se moverão com velocidades e acelerações idênticas ( $v_A = v_B$ ,  $a_A = a_B$ ) em qualquer instante.



**Figura 2**– as caixas move-sem na mesma direção do fio, enquanto uma caixa puxa a outra. Como a polia é fixa e o fio não estica, suas extremidades sempre sofrerão deslocamentos iguais e opostos.

O mesmo vínculo geométrico da Figura 1 também garante que as caixas da Figura 2, conectadas entre si por meio de um fio inextensível que passa por uma polia fixa, sempre sofrerão deslocamentos idênticos (apesar de opostos) em qualquer intervalo de tempo  $dt$  infinitesimal, de forma que as caixas apresentarão velocidades e acelerações de mesmo módulo em cada instante ( $v_A = v_B$ ,  $a_A = a_B$ ).

## Análise Matemática do vínculo geomérico da Figura 2

A Figura 2 mostra dois instantes sucessivos (  $t$  e  $t + dt$  ) do movimento do sistema.

O vínculo geométrico em questão é o fato de que o comprimento total do fio que conecta as caixas A e B, passando através da polia fixa, permanece inalterado no decorrer do tempo, o que permite escrever:

$$\text{No instante } t: \quad L_A + L_B = K \text{ (constante)} \quad (\text{eq1})$$

$$\text{No instante } t + dt : \quad L_A' + L_B' = K \text{ (constante)} \quad (\text{eq2})$$

Subtraindo as equações, membro a membro, obteremos a relação entre os deslocamentos  $dL_A$  e  $dL_B$  de cada caixa no intervalo de tempo infinitesimal  $dt$ :

$$L_A' - L_A + L_B' - L_B = K - K \quad \Rightarrow \quad dL_A + dL_B = 0 \quad (\text{eq3})$$

A expressão eq3 afirma que as caixas A e B sempre sofrem deslocamentos escalares  $dL$  iguais em módulo, porém de sinais contrários.

O sinal algébrico do deslocamento  $dL_A$  será positivo, caso a caixa A se desloque a favor do eixo  $L_A$  (Figura 2) e, negativo, caso ela se mova no sentido contrário desse eixo. O mesmo é válido para o sinal do deslocamento  $dL_B$  sofrido pela caixa B, ao longo do respectivo eixo  $L_B$  (Figura 2). Considerando que, na Figura 2, a caixa A subiu enquanto B desceu, teremos  $dL_A < 0$  e  $dL_B > 0$ , o que justifica a soma  $dL_A + dL_B$  ser nula conforme a relação eq3.

$$dL_A + dL_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dL_A}{dt} + \frac{dL_B}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_A + v_B = 0 \quad (\text{eq4})$$

A expressão eq4 afirma que as caixas A e B têm velocidades iguais em módulo, em qualquer instante, embora tenhamos  $v_A < 0$  (caixa A move-se contra o eixo  $L_A$ ) e  $v_B > 0$  (caixa B move-se a favor do eixo  $L_B$ ).

$$v_A + v_B = 0 \quad \Rightarrow \quad v_A = -v_B \quad \Rightarrow \quad |v_A| = |v_B| \quad (\text{eq5})$$

Para determinarmos a relação cinemática entre as acelerações instantâneas de A e B, podemos partir da relação eq4 novamente:

$$\text{No instante } t: \quad v_A + v_B = 0 \quad (\text{eq6})$$

$$\text{No instante } t + dt : \quad v_A' + v_B' = 0 \quad (\text{eq7}).$$

Subtraindo as equações, membro a membro, obteremos a relação entre as variações de velocidade de cada caixa no intervalo de tempo infinitesimal  $dt$ :

$$v_A' - v_A + v_B' - v_B = 0$$

$$dv_A + dv_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_A}{dt} + \frac{dv_B}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_A + a_B = 0 \quad (\text{eq8})$$

A expressão eq8 afirma que as caixas A e B têm acelerações iguais em módulo, em qualquer instante, porém sentidos contrários.

$$a_A + a_B = 0 \Rightarrow a_A = -a_B \Rightarrow |a_A| = |a_B| \quad (\text{eq9})$$

Assim, o vínculo geométrico, decorrente do fato de que o comprimento “ $L_A + L_B$ ” do fio permanece constante no tempo, nos levou às seguintes relações cinemáticas para o sistema da Figura 2:

$$dL_A + dL_B = 0 \Rightarrow |dL_A| = |dL_B| \quad (\text{eq 10})$$

$$v_A + v_B = 0 \Rightarrow |v_A| = |v_B| \quad (\text{eq 11})$$

$$a_A + a_B = 0 \Rightarrow |a_A| = |a_B| \quad (\text{eq 12})$$

### 7.3 CASO 2: FIOS INEXTENSÍVEIS, UMA POLIA MÓVEL

Na Figura 3, vemos 2 caixas A e C conectadas entre si por meio de um longo fio inextensível, que passa por uma polia móvel suspensa. Uma terceira caixa B está suspensa por um fio ao eixo dessa polia.

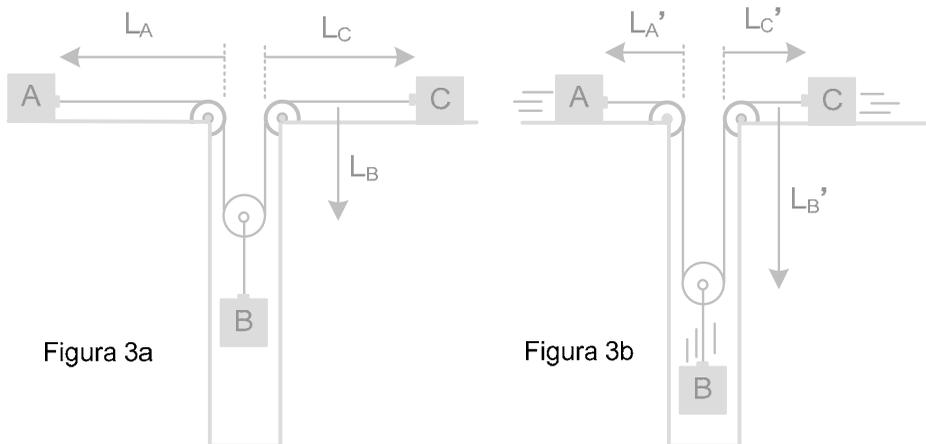


Figura 3a

Figura 3b

Nesse sistema, o vínculo geométrico é o fato de que o comprimento do fio longo que interliga as caixas A e C (Figura 3a) permanece invariável entre quaisquer dois instantes  $t$  e  $t + dt$ . Assim, o prof. Renato Brito pode escrever:

O comprimento do fio no instante  $t$  (Figura 3a) vale:

$$L_A + L_B + L_B + L_C = L_A + 2.L_B + L_C = K = \text{constante} \quad (\text{eq13})$$

O comprimento do fio no instante  $t + dt$  (Figura 3b) vale :

$$L_A' + 2.L_B' + L_C' = K = \text{constante} \quad (\text{eq14})$$

Subtraindo as equações, membro a membro, obteremos a relação entre os deslocamentos escalares de cada caixa no intervalo de tempo infinitesimal  $dt$ :

$$(L_A' - L_A) + 2.(L_B' - L_B) + (L_C' - L_C) = K - K$$

Do vínculo geométrico, vem:

$$L_{\text{inicial}} = L_{\text{final}} \Rightarrow 3.L_B + 2.L_A = 3.(L_B - x_B) + 2.(L_A + x_A) \Rightarrow$$

$$3.x_B = 2.x_A \quad (\text{eq 36})$$

Usando a regra prática de derivação, podemos substituir  $x$  por  $v$  em eq 30:

$$3.v_B = 2.v_A \quad (\text{eq 37})$$

Finalmente, empregando mais uma vez a regra prática de derivação, podemos substituir  $v$  por  $a$  em eq 31:

$$3.a_B = 2.a_A \quad (\text{eq 38})$$

As expressões eq36, eq37 e eq38 relacionam os deslocamentos, as velocidades instantâneas e as acelerações instantâneas das caixas A e B, em qualquer instante do movimento desse sistema, e só podem ser determinadas a partir desses argumentos geométricos.

### 7.6 CASO 5: CORPOS RÍGIDOS DESLIZANDO – CASO SIMPLES

Na Figura 10a, vemos um prisma reto de base triangular isósceles, apoiado sobre dois cubos idênticos. Quando o prisma é abandonado do repouso, ele passa a descer verticalmente, percorrendo uma distância vertical  $y$ , ao mesmo tempo  $dt$ , em que cada cubo percorre uma distância horizontal  $x$ . (Figura 10b)

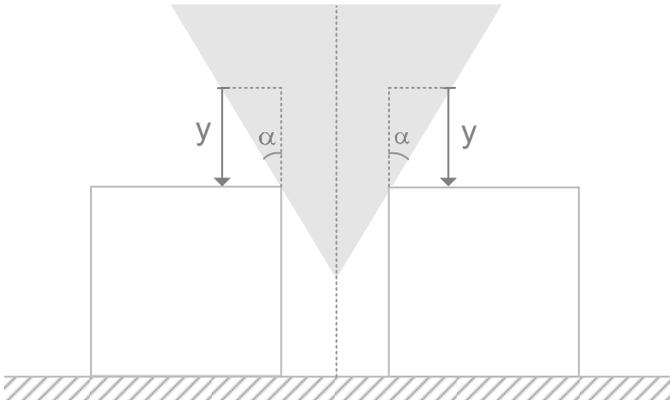


Figura 10a

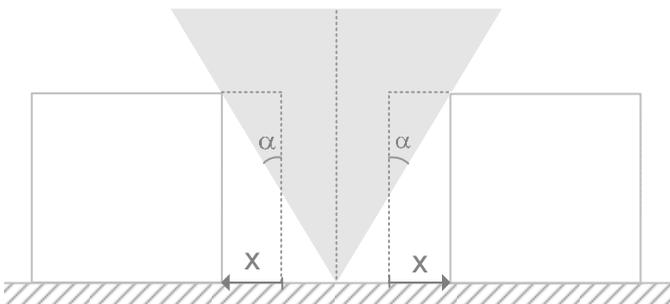


Figura 10b

Da geometria da Figura, é fácil ver que:  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y \cdot \operatorname{tg}\alpha$  (eq39)

Usando a regra prática de derivação, podemos substituir  $x$  por  $V_x$  e  $y$  por  $V_y$  em eq 39, visto que  $\operatorname{tg}\alpha$  é uma constante real:

$$V_x = V_y \cdot \operatorname{tg}\alpha \quad (\text{eq 40})$$

A expressão acima relaciona a velocidade dos cubos ( $V_x$ ) com a velocidade de descida ( $V_y$ ) do prisma, num mesmo instante do movimento.

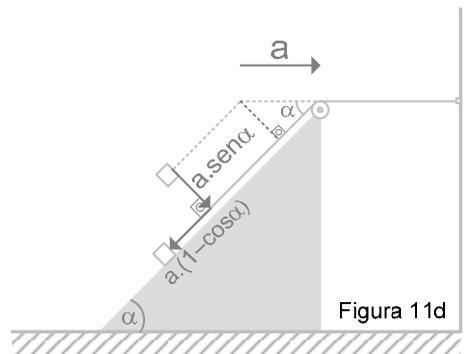
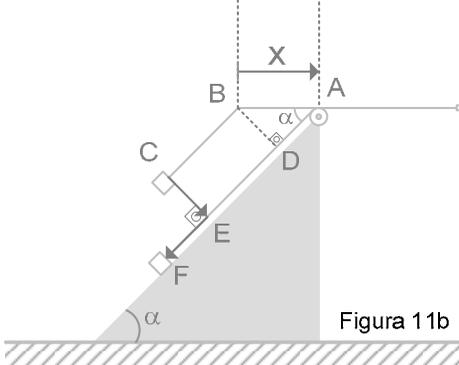
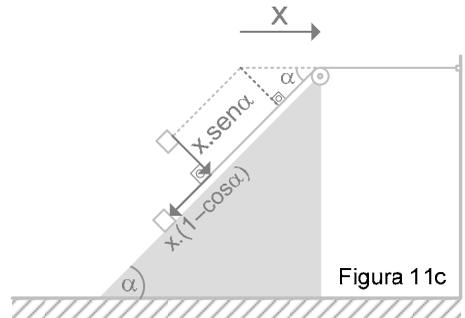
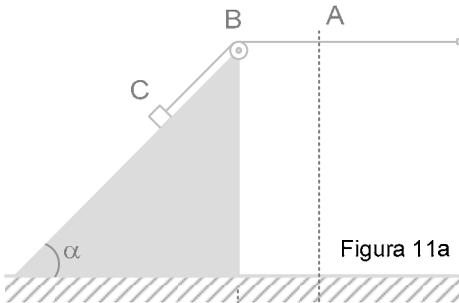
Finalmente, empregando, mais uma vez, a regra prática de derivação, podemos substituir  $V$  por  $a$  em eq 34:

$$a_x = a_y \cdot \operatorname{tg}\alpha \quad (\text{eq 41})$$

A expressão acima relaciona a aceleração dos cubos ( $a_x$ ) com a aceleração de descida ( $a_y$ ) do prisma em qualquer instante do movimento. Mais uma vez, enfatizamos que as expressões eq 39, eq40 e eq41 só podem ser determinadas a partir desses argumentos geométricos.

## 7.7 CASO 6: CORPOS RÍGIDOS DESLIZANDO – CASO AVANÇADO

Considere a situação da Figura 11a, em que uma caixa se encontra apoiada sobre a superfície inclinada de um prisma, que pode se mover ao longo de uma superfície horizontal.



# 8 – Respostas e Soluções



## Questão 1 - solução

Inicialmente, arbitraremos um referencial e determinaremos uma função horária da posição para cada móvel:

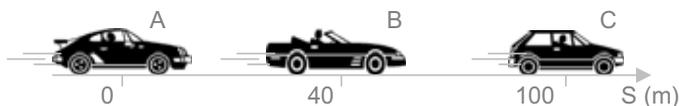


Figura 1

Funções horárias:

$$S_A = 50.t$$
$$S_B = 40 + 20.t$$
$$S_C = 100 + 60.t$$

O instante  $t$  que devemos determinar está esquematizado abaixo:

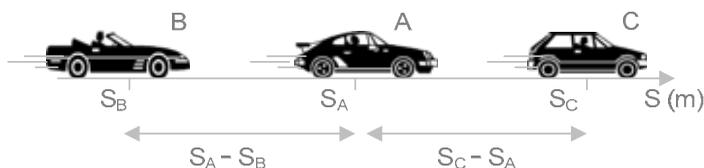


Figura 2

Para que o móvel A esteja a meia distância entre os móveis B e C, matematicamente, vem :

$$S_A - S_B = S_C - S_A \Rightarrow 2.S_A = S_B + S_C \Rightarrow S_A = \frac{S_B + S_C}{2}$$

Substituindo as funções horárias, vem :

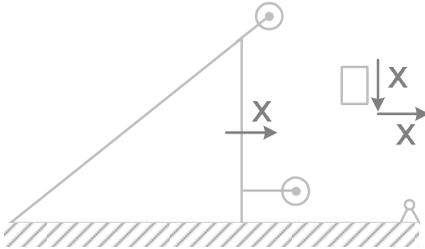
$$50.t = \frac{(40 + 20.t) + (100 + 60.t)}{2} \Rightarrow 50.t = 70 + 40.t \Rightarrow t = 7s$$

Assim, no instante  $t = 7s$ , o móvel A estará exatamente entre os móveis B e C, a meia distância entre eles, conforme esquematizado a seguir:

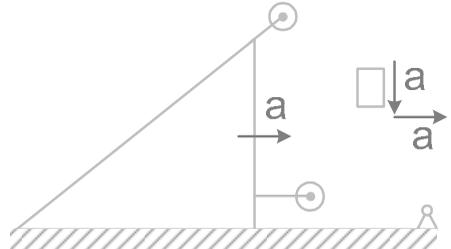
**Questão 77** - resposta:  $5\text{m/s}^2$

**Questão 78 – solução**

O vínculo geométrico, associado ao fato de que o fio não estica, permite concluir que:

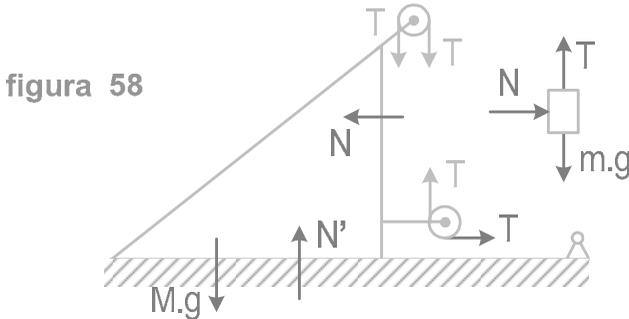


**Figura 56-** sempre que o bloco descer verticalmente uma distância  $x \downarrow$ , todo o conjunto (bloco+ polias + prisma) simultaneamente se moverá essa mesma distância  $x \rightarrow$  para a direita.



**Figura 57-** quando o bloco apresentar uma aceleração  $a \downarrow$  para baixo, todo o conjunto compartilhará essa mesma aceleração (em módulo)  $a \rightarrow$  para a direita.

A conclusão obtida na Figura 57 acima decorre da Regra Prática de Derivação. (leia o Tópico Especial 2, capítulo 7, sobre vínculos geométricos).



Assim, observando tanto as forças que agem no conjunto “prisma+polias” quanto as forças que agem no bloco (Figura 58), com base nas acelerações mostradas na Figura 57, podemos escrever:

**Prisma na horizontal :**  $F_R = M.a \Rightarrow T - N = M.a$  (eq1)

**Bloco na horizontal:**  $F_R = m.a \Rightarrow N = m.a$  (eq2)

**Bloco na vertical :**  $F_R = m.a \Rightarrow m.g - T = m.a$  (eq3)

Somando as relações eq1, eq2 e eq3, membro a membro, vem:

$$m.g = M.a + 2m.a \Rightarrow a = \frac{m.g}{(M + 2m)}$$

**Questão 79** - resposta:  $a = m.g / (M + 2m)$

**Questão 80 – solução**

As Figuras 59 e 60 relacionam os deslocamentos dos corpos A e B. Percebe-se que, quando o corpo A move-se  $x \rightarrow$  para a direita, o cordão inextensível folga  $x$ , tanto no trecho horizontal inferior como no trecho superior, de forma que a sua extremidade conectada à caixa B, inevitavelmente, se deslocará  $2x \downarrow$  para baixo.

Em síntese, sempre que o corpo A se deslocar  $x \rightarrow$  para a direita, o corpo B, além de transladar  $x \rightarrow$  para a direita (acompanhando o corpo A), também se moverá  $2x \downarrow$  para baixo.

Esse raciocínio, aliado à regra prática de derivação (leia o Tópico Especial 2 – Vínculos Geométricos na Mecânica – capítulo 7), nos permite relacionar as acelerações dos móveis entre si como mostra a Figura 61.

A Figura 62 mostra o diagrama de corpo livre de A e B. Da segunda lei de Newton, vem:

$$\text{Corpo A: } F_R = M.a$$

$$T+T-N = M.a \Rightarrow 2T - N = M.a \quad (\text{eq1})$$

Corpo B - Horizontal:

$$F_R = m.a \Rightarrow N = m.a \quad (\text{eq2})$$

Corpo B - vertical:

$$F_R = m.(2a) \Rightarrow P_B - T = m.(2a) \quad (\text{eq3})$$

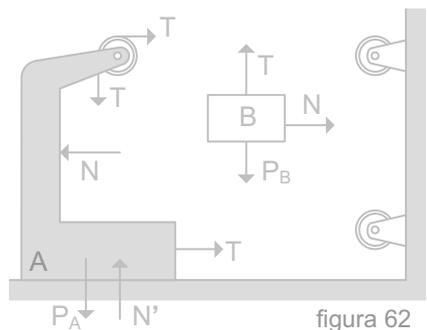
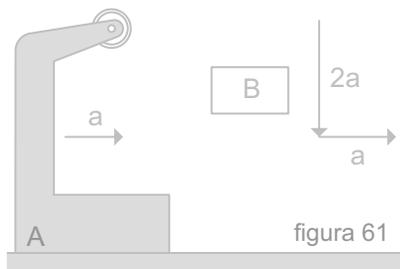
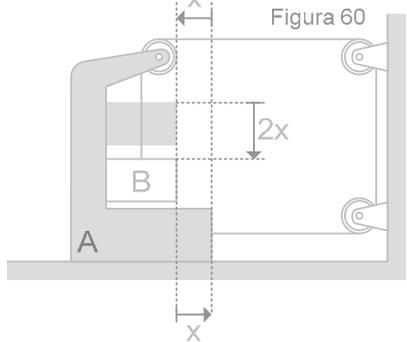
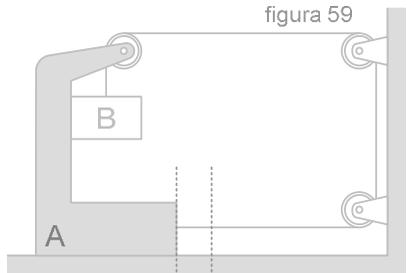
Multiplicando eq3 por 2 e somando membro a membro, com eq1 e eq3, vem:

$$2.P_B = 5.m.a + M.a$$

$$2.m.g = 5.m.a + M.a$$

$$a = \left( \frac{2m}{M+5m} \right).g$$

O corpo B, na vertical, percorrerá uma distância  $h$  em MUV partindo do repouso:



$$h = \frac{a_B \cdot t^2}{2} \Rightarrow h = \frac{(2a) \cdot t^2}{2} = \left( \frac{2m}{M+5m} \right) g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{h \cdot (M+5m)}{2 \cdot m \cdot g}}$$

**Questão 81 – solução**

A Figura 63 mostra o diagrama de forças que agem no bloco (A) e no prisma (B). O vínculo geométrico desse sistema é o fato de que a trajetória descrita pelo bloco A, no referencial do prisma, coincide com a superfície inclinada do prisma, ou seja, é uma reta que forma um ângulo  $\alpha$  com a horizontal.

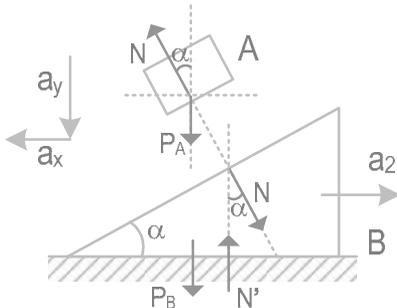


Figura 63

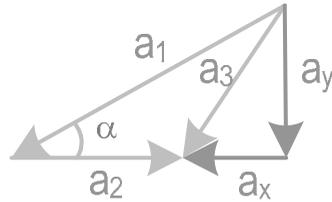


Figura 64

No diagrama vetorial da Figura 64, descrito pela legenda abaixo, tanto está implícito esse vínculo geométrico, quanto a relação vetorial entre as acelerações relativas:

$a_1$  = aceleração do bloco em relação ao prisma

$a_2$  = aceleração do prisma em relação à Terra

$a_3$  = aceleração do bloco em relação à Terra

$a_x$  = componente horizontal de  $a_3$

$a_y$  = componente vertical de  $a_3$

$$\vec{a}_{\text{bloco}/\text{prisma}} + \vec{a}_{\text{prisma}/\text{terra}} = \vec{a}_{\text{bloco}/\text{terra}} \quad \text{ou} \quad \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}_3$$

Conforme nossa discussão sobre referenciais, sabemos que as forças que agem sobre o bloco A estão diretamente relacionadas à sua aceleração  $\vec{a}_3$  em relação à Terra (referencial inercial) pela 2ª lei de Newton ( $\vec{F}_R = m \cdot \vec{a}$ ), constituindo grave erro tentar relacionar tais forças à aceleração  $\vec{a}_1$  do bloco em relação ao prisma, visto que este não é um referencial inercial por estar acelerado em relação à Terra.

Da Figura 64, podemos determinar as componentes de  $a_3$  :

$$a_y = a_1 \cdot \text{sen} \alpha \quad (\text{eq1})$$

$$a_x = a_1 \cdot \text{cos} \alpha - a_2 \quad (\text{eq2})$$

forma de uma gravidade  $\leftarrow \mathbf{a}$  (veja Figura) que causará forças gravitacionais fictícias  $\mathbf{M.a} \leftarrow$  e  $\mathbf{M.a} \leftarrow$  em cada um dos corpos de mesma massa  $\mathbf{M}$  do sistema, respectivamente, com base no Princípio da Equivalência de Einstein.

Caixa 1 – Equilíbrio vertical:  $N_1 = M.g$  (eq1)

Equilíbrio horizontal:  $T + Fat_1 = M.a$  (eq2)

Iminência de escorregar:  $Fat_1 = \mu.N_1$  (eq3)

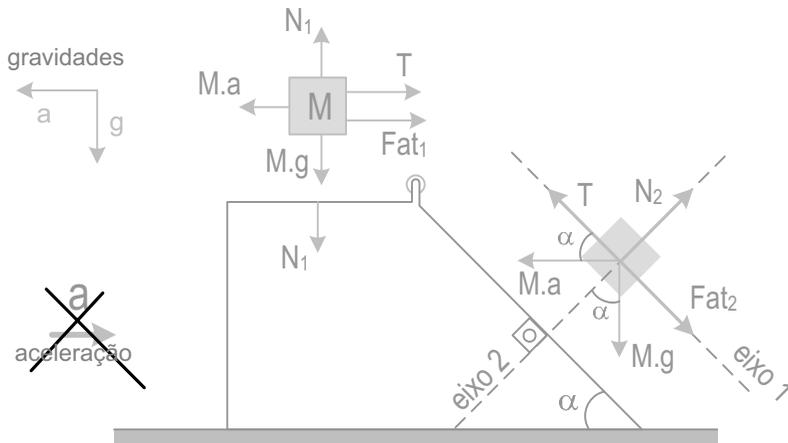
Caixa 2 – Equilíbrio na direção do eixo 2:  $N_2 = M.a.\text{sen}\alpha + M.g.\text{cos}\alpha$

(eq4)

Equilíbrio na direção do eixo 1:  $Fat_2 + M.g.\text{sen}\alpha = T + M.a.\text{cos}\alpha$

(eq5)

Iminência de escorregar:  $Fat_2 = \mu.N_2$  (eq6)



Somando, membro a membro, eq2 e eq5, vem:

$$Fat_1 + Fat_2 + M.g.\text{sen}\alpha = M.a + M.a.\text{cos}\alpha$$

$$\mu.N_1 + \mu.N_2 + M.g.\text{sen}\alpha = M.a + M.a.\text{cos}\alpha$$

$$\mu.M.g + \mu.(M.a.\text{sen}\alpha + M.g.\text{cos}\alpha) + M.g.\text{sen}\alpha = M.a + M.a.\text{cos}\alpha$$

$$\mu.g + \mu.a.\text{sen}\alpha + \mu.g.\text{cos}\alpha + g.\text{sen}\alpha = a + a.\text{cos}\alpha$$

$$\mu.g + \mu.g.\text{cos}\alpha + g.\text{sen}\alpha = a + a.\text{cos}\alpha - \mu.a.\text{sen}\alpha$$

$$\mu.g + \mu.g.\text{cos}\alpha + g.\text{sen}\alpha = a.(1 + \text{cos}\alpha - \mu.\text{sen}\alpha)$$

$$5 + 4 + 6 = a.(1 + 0,8 - 0,3) \Rightarrow a = 10 \text{ m/s}^2 \text{ ou } a = g$$

### Questão 127 – solução

Seja  $\mathbf{a}$  a aceleração que o prisma possui em relação à Terra. Efetuando uma mudança do referencial inercial (Terra) para o referencial acelerado do carro, abandonamos a aceleração  $\rightarrow \mathbf{a}$  e a computamos, no referencial do carro, na forma de uma gravidade  $\leftarrow \mathbf{a}$  (veja Figura) que causará forças gravitacionais fictícias  $\mathbf{m.a} \leftarrow$  e  $\mathbf{m.a} \leftarrow$  em cada um dos corpos de mesma massa  $\mathbf{m}$  do sistema, respectivamente, com base no Princípio da Equivalência de Einstein.

## 9 - Referências Bibliográficas

### \* Alonso e Finn

Alonso, M.S & Finn, E.J. *Física – Um Curso Universitário*. São Paulo, Edgard Blucher, 1972.

### \* Beer & Johnston

Beer, Ferdinand P. & Johnston, E. Russel. *Mecânica vetorial para engenheiros*. São Paulo, McGraw-Hill / Makron books, 1991.

### \* Challenging Problems

Korsunsky, Boris. *Challenging problems for Physics*. Florida – EUA, Saundes College, 1995.

### \* Curso de Física de Berkeley

Kittel, Charles; Knight, Walter. D.; Ruderman, Malvin A. *Curso de Física de Berkeley*. São Paulo, Edgard Blücher, 1970.

### \* Física Clássica - Calçada

Calçada, Caio Sérgio; Sampaio, Jorge Luiz. *Física clássica*. São Paulo, Atual, 1985. v.2 (disponível para venda na Livraria Arte e Ciência - 0xx85 3231 0404)

### \* Irodov

Irodov, Igor Evgenevich. *Problems in General Physics*. Moscou, Mir, 1977. (disponível para venda em [www.vestseller.com.br](http://www.vestseller.com.br))

### \* Kósel

Kósel, Stanislaw. *Problemas de Física Dirigidos por S. Kósel*. Moscou, Mir, 1977. (disponível para venda em [www.vestseller.com.br](http://www.vestseller.com.br))

### \* L. P. Maia

Maia, L. P. *Mecânica*. Rio de Janeiro, Nacionalista, 1964. (geralmente disponível para venda na Livraria Arte e Ciência - 0xx85 3231 0404)

### \* Nussenzveig

Nussenzveig, H. Moysés. *Curso de física básica – 1 mecânica – 2ª edição*. São Paulo, Edgard Blücher, 1981. v.1 e 2

### \* Pierre Lucie

Lucie, Pierre. *Física básica – mecânica 1*. Rio de Janeiro, Campus, 1979. (geralmente disponível para venda na Livraria Arte e Ciência - 0xx85 3231 0404)

**\* Pinsky**

Pinsky, A. A. *Problems in physics*. Moscou, Mir, 1980. (disponível para venda em [www.urss.ru](http://www.urss.ru))

**\* Resnick & Halliday**

Resnick, Robert & Halliday, D. *Física*. São Paulo, Livros Técnicos e Científicos, 1974. v.1 (geralmente disponível para venda na Livraria Arte e Ciência - 0xx85 3231 0404)

**\* Saraeva**

Bukhovtsev, B. B; Krivtchenkov, V.D.; Miakishev, G.Y.; Saraeva, I.M. *Problemas selecionados de física elementar*. Moscou, Mir, 1977. (disponível para venda em [www.vestseller.com.br](http://www.vestseller.com.br))

**\* Shames**

Shames, Irving H. *Dinâmica: mecânica para engenharia*. São Paulo, Prentice Hall, 2003. v.2

**\* Tópicos da Física**

Doca, Ricardo Helou; Biscuola, Gualter José; Boas, Newton Vilas. *Tópicos da Física*. São Paulo, Saraiva, 2001. v.1 (geralmente disponível para venda na Livraria Arte e Ciência - 0xx85 3231 0404)

**\* Tore Nils Johnson**

Folmer-Johnson, Tore Nils Olof. *Física para vestibular*. São Paulo, Nobel, 1965. (geralmente disponível para venda na Livraria Arte e Ciência - 0xx85 3231 0404)

**\* T.O.F**

Gonçalves, Dalton; Bazin, Affonso Celso; Oliveira, Gilberto Seixas; Guimarães, Luiz Alberto; Machado, Luiz Antônio; Justo, Tomás Guisasola. *Testes orientados de Física*. Rio de Janeiro, Ao livro Técnico, 1974. (geralmente disponível para venda na Livraria Arte e Ciência - 0xx85 3231 0404)

***Importante:***

Para fazer referência a este próprio livro, ao fazer uso de questões dele, use a seguinte linha:

Brito, Renato. *Mecânica para vestibulandos IME ITA. Cinemática e Leis de Newton*. Fortaleza, VestSeller, 2007. v.1

## 10 – Bibliografia

A seguir, foram listados os livros que deram base e conhecimentos suficientes para que o presente livro fosse escrito:

### \* Curso de Física de Berkeley

Kittel, Charles; Knight, Walter. D.; Ruderman, Malvin A. *Curso de Física de Berkeley*. São Paulo, Edgard Blücher, 1970.

### \* Física Clássica - Calçada

Calçada, Caio Sérgio; Sampaio, Jorge Luiz. *Física clássica*. São Paulo, Atual, 1985. v.2 (disponível para venda na Livraria Arte e Ciência - 0xx85 3231 0404)

### \* Física Para a Universidade

Wilner, Eduardo; Majorana, Félix Savério; Chohfi, Carlos Armando. *Física para a universidade*. São Paulo, EPU, 1979. v.2.

### \* L. P. Maia

Maia, L. P. *Mecânica*. Rio de Janeiro, Nacionalista, 1964. (geralmente disponível para venda na Livraria Arte e Ciência - 0xx85 3231 0404)

### \* Nussenzveig

Nussenzveig, H. Moysés. *Curso de física básica – 1 mecânica – 2ª edição*. São Paulo, Edgard Blücher, 1981. v.1 e 2

### \* Pierre Lucie

Lucie, Pierre. *Física básica – mecânica 1*. Rio de Janeiro, Campus, 1979. (geralmente disponível para venda na Livraria Arte e Ciência - 0xx85 3231 0404)

### \* Saraeva

Bukhovtsev, B. B; Krivtchenkov, V.D.; Miakishev, G.Y.; Saraeva, I.M. *Problemas selecionados de física elementar*. Moscou, Mir, 1977. (disponível para venda em [www.vestseller.com.br](http://www.vestseller.com.br))

### \* Tópicos da Física

Doca, Ricardo Helou; Biscuola, Gualter José; Boas, Newton Vilas. *Tópicos da Física*. São Paulo, Saraiva, 2001. v.1 (geralmente disponível para venda na Livraria Arte e Ciência - 0xx85 3231 0404)

### \* Tore Nils Johnson

Folmer-Johnson, Tore Nils Olof. *Física para vestibular*. São Paulo, Nobel, 1965. (geralmente disponível para venda na Livraria Arte e Ciência - 0xx85 3231 0404)

## 11 - Referências na internet

Professores e estudantes podem encontrar bons materiais e dicas de estudo para a preparação para os vestibulandos IME ITA nos seguintes sítios na internet:

- **www.rumoaota.com.br** - sítio mantido por alunos Júlio Sousa e seus amigos que estão no ITA, tais como o Caio Guimarães. Contém muito material de apoio para vestibulandos IME ITA;
- **www.sassabetudo.cjb.net** - sítio mantido pelo sassá (Alex), meu ex aluno do Colégio Militar de Fortaleza, atualmente no ITA. Contém um vasto acervo de provas do IME, ITA, AFA, Escola Naval, dos últimos 20 anos;
- **www.etapa.com.br** – sítio do Curso Etapa de São Paulo, com vasto acervo de provas comentadas do IME, ITA, Fuvest, Unicamp, Unesp, Mackenzie, UFSCAR, FEI dentre outros.
- **www.fisicaju.com.br** - sítio pessoal do prof Renato Brito com listas de exercícios para download;
- **www.fisicaju.com.br/forum** - Fórum brasileiro de discussão sobre assuntos IME ITA, tais como livros para estudos, técnicas de estudo, dicas sobre horário de estudo, dúvidas sobre questões etc. Vale a pena acessar. O prof Renato Brito participa ativamente dessa lista;
- **www.vestseller.com.br** - editora brasileira especialista em publicações para vestibulandos IME ITA, tais como os livros da renomada Editora MIR e outros excelentes livros de autores nacionais. Confirmam.

A coleção MECÂNICA PARA VESTIBULANDOS IME ITA apresenta toda a Mecânica com teoria e exercícios em um nível compatível com o dos exames para ingressar em tais escolas militares.

Características da obra:

- Aborda todos os aspectos chaves do conteúdo, em especial, as sutilezas geralmente não contempladas em textos de Mecânica de ensino médio;
- O alto nível praticado é dissimulado numa didática notável, com direito a personagens bem humorados. Uma grande quantidade de ilustrações e exemplos resolvidos esclarecem, passo a passo, todos os pontos críticos do conteúdo, fazendo dessa obra uma ferramenta imprescindível para estudantes autodidatas;
- A maior parte das questões propostas, ao final de cada capítulo, têm sua resolução completa contemplada ao final do livro. Todas as questões correlatas, usadas para treinamento do estudante, são acompanhadas com respostas;
- Este livro não requer conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral.

Essa coleção possui os seguintes volumes :

I - Cinemática e Leis de Newton

II - Trabalho e Energia, Impulso, Dinâmica do centro de massa;

III - Estática, hidrostática e gravitação.

Esse coleção faz parte da série Mir Brasil, da editora VestSeller, composta de livros para as várias divisões da Física de ensino médio, com teoria e exercícios nos moldes da renomada editora Mir, direcionados aos vestibulandos IME ITA.



[www.vestseller.com.br](http://www.vestseller.com.br)

ISBN 978-85-60653-00-3