Exercício 1

(Uepg 2016) Um relógio analógico marca duas horas e trinta minutos. Ao lado deste, um segundo relógio marca um fuso horário diferente: dez horas e trinta minutos. Considerando o menor ângulo formado entre o ponteiro dos minutos e o ponteiro das horas, em cada um dos relógios, assinale o que for correto.

01) O ângulo no primeiro relógio é menor que 120°.
02) O ângulo no segundo relógio é maior que 140°.
04) No primeiro relógio, o ângulo é maior que no segundo.
08) O módulo da diferença entre os ângulos dos dois relógios é 30°.

Exercício 2

(Ufjf-pism 1 2016) Dadas as desigualdades, em $\mathbb{R}$:

I. $3x + 1 < -x + 3 \leq -2x + 5$
II. $\dfrac{4x-1}{x-2} \leq 1$

O menor intervalo que contém todos os valores de x que satisfazem, simultaneamente, às desigualdades I e II é:

a) $\left]\dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{5}\right]$
b) $\left]-2, -\dfrac{3}{2}\right]$
c) $\left]-\infty, \dfrac{3}{5}\right]$
d) $\left[-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right[$
e) $\left[\dfrac{4}{3}, \dfrac{3}{5}\right[$

Exercício 3

(Uepg-pss 3 2019) Sabendo que a divisão do polinômio $P(x)$ por $D(x) = 2x^2 + 6x + 7$ resulta no quociente $Q(x) = x^3 - x^2 - 2x$ e resto nulo, assinale o que for correto.

01) $P(x)$ é divisível por $x - 1$.
02) $P(x)$ é divisível por $x + 2$.
04) $P(x)$ é um polinômio do quinto grau.
08) $P(0) = 0$.

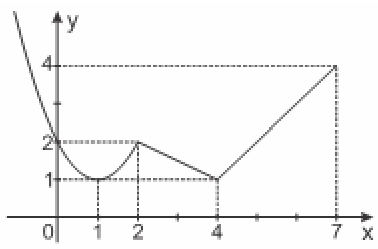
Exercício 4

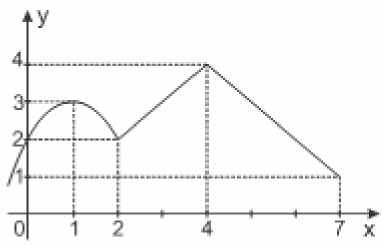
(Uem 2017) Acerca do polinômio $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$, assinale o que for correto.

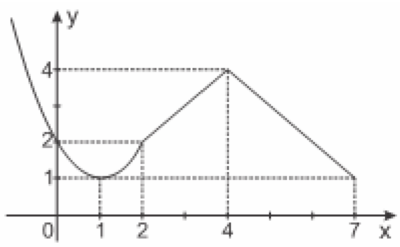
01) Uma das raízes desse polinômio é 1/2.
02) Ele é divisível pelo polinômio x² -x - 2.
04) A soma de suas raízes é 3.
08) Todas as raízes desse polinômio são reais.
16) Ele não pode ser fatorado como produto de três polinômios de grau 1 com coeficientes racionais.

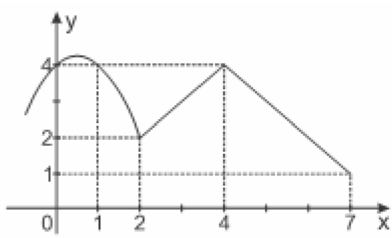
Exercício 5

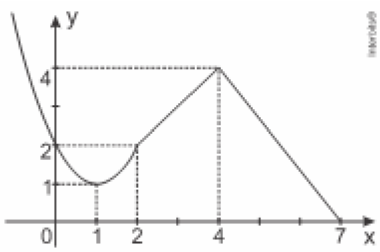
(Espcex (Aman) 2016) O gráfico que melhor representa a função real definida por $\begin{cases} 4 - |x - 4|, \text{ se } 2 < x \leq 7 \\ x^2 - 2x + 2, \text{ se } x \leq 2 \end{cases}$ é

a)


b)


c)


d)


e)


Exercício 6

(Uepg 2018) Numa festa, organizada pelo grupo de assistência social da prefeitura, foram montadas as barracas A, B e C. As três barracas vendiam, pelos mesmos preços, os mesmos tipos de alimentação: cachorro quente, pastel e milho verde. No fim da festa, o balanço feito sobre o consumo nas três barracas mostrou que: em A, foram consumidos 24 cachorros quentes, 36 pastéis e 24 milhos verdes; em B, foram consumidos 33 cachorros quentes, 55 pastéis e 33 milhos verdes; e em C, foram consumidos 20 cachorros quentes, 40 pastéis e 30 milhos verdes. As barracas A, B e C venderam R$ 324,00, R$ 462,00e R$ 350,00, respectivamente.

A partir do que foi exposto, assinale o que for correto.

01) A soma dos preços de cada pastel e de cada cachorro quente é o dobro do preço de cada milho verde.
02) A soma dos preços de cada pastel e cada milho verde é o dobro do preço de cada cachorro quente.
04) O preço de cada milho verde é um número primo.
08) O preço de cada cachorro quente é R$ 4,00.
16) A soma dos preços de cada pastel, cachorro quente e milho verde não é um número inteiro.

Exercício 7
(Uepg 2011) Sobre as matrizes: A = $(a_{ij})_{2x2}$, tal que a_{ij} = i – j, e B = $(b_{ij})_{2x3}$, tal que b_{ij} = i + j, assinale o que for correto.

01) $A.B = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$
02) $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
04) A matriz B^2 não existe.
08) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
16) det(2A) = 4.

Exercício 8
(Espcex (Aman) 2013) Considere as seguintes afirmações:

I. Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então todas as retas de α são perpendiculares ou ortogonais a r;
II. Se a medida da projeção ortogonal de um segmento AB sobre um plano α é a metade da medida do segmento AB, então a reta AB faz com α um ângulo de 60°;
III. Dados dois planos paralelos α e β, se um terceiro plano γ intercepta α e β, as interseções entre esses planos serão retas reversas;
IV. Se α e β são dois planos secantes, todas as retas de α também interceptam β.

Estão corretas as afirmações

a) apenas I e II
b) apenas II e III
c) I, II e III
d) I, II e IV
e) II, III e IV

Exercício 9
(Ime 2017) O sistema de inequações abaixo admite k soluções inteiras.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-14}{x} > 3 \\ x \le 12 \end{cases}$$

Pode-se afirmar que:

$a)0 \le k < 2$
$b)2 \le k < 4$
$c)4 \le k < 6$
$d)6 \le k < 8$
$e)k \ge 8$

Exercício 10
(Ufsc 2016) Em relação às proposições abaixo, é **CORRETO** afirmar que:

01) Se $sen(\frac{x}{2}) = \frac{1}{3}$, então o valor de $(sen\ \ x + \ \ cos\ \ x)$, com x no primeiro quadrante, é $\frac{7+4\sqrt{2}}{9}$.
02) A função $f(x) = cos(\frac{x+\pi}{2})$ é uma função par e tem período 4π.

04) O menor valor assumido pela função $g(x) = 2 + sen(3x)$ é -1.
08) O valor de $sec(-\frac{13\pi}{3})$ é $\frac{1}{2}$.
16) O domínio da função $h(x) = tg(2x + \frac{\pi}{3})$ é o conjunto $D = \{x \in \mathrm{R} \,|\, x \ne \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2},\ \ k \in \mathrm{Z}\}$.

Exercício 11
(Uem-pas 2016) Sobre polinômios de coeficientes reais, assinale o que for correto.

01) O quociente da divisão de $p(x) = x^3 + x^2 - 3x - 27$ por $q(x) = x - 3$ é um polinômio de grau 2.
02) Os polinômios $p(x) = 2x^2 - 4x + 2$ e $q(x) = (x-1)^2$ são idênticos, pois possuem as mesmas raízes.
04) Um polinômio de grau 3 sempre possui três raízes reais.
08) Ao multiplicarmos o polinômio $p(x) = x^3 + x - 1$ por $q(x) = -x^3 - x + 1$, obtemos um polinômio de grau 6.
16) O resto da divisão $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$ por $q(x) = x - 2$ é 15.

Exercício 12
(Uem 2017) Considere as matrizes

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

A partir delas, é **correto** afirmar que:

01) A matriz A é uma matriz invertível.
02) A primeira e a última linhas de $A \cdot B$ são iguais.
04) É possível calcular o determinante da matriz B.
08) O determinante da inversa de A é $-\frac{1}{10}$.
16) $A \cdot B = B \cdot A$.

Exercício 13
(Espcex (Aman) 2020) Considere um tronco de pirâmide quadrangular regular. Sobre esse sólido, é correto afirmar:

a) Se r e s são retas suporte de arestas laterais distintas, então r e s são reversas.
b) Se r é a reta suporte de uma diagonal da base menor e s é a reta suporte de uma aresta lateral, então r e s são reversas.
c) Se r é a reta suporte de um lado da base maior e s é a reta suporte de um lado da base menor, então r e s são paralelas.
d) Se r é a reta suporte de uma diagonal da base maior e s é a reta suporte de um lado da base menor, então r e s são retas reversas.
e) Se r é a reta suporte de uma diagonal da base maior e s é reta suporte da diagonal de uma face, então r e s são reversas.

Exercício 14

(Uepg 2011) Sobre a equação $a^{x+1} = b^{\frac{1}{x}}$ onde a e b são números reais positivos tais que $\log b = 6\log a$, assinale o que for correto.

01) A soma das soluções da equação é – 1.
02) As soluções da equação pertencem ao intervalo [–3, 3].
04) A equação tem duas soluções negativas.
08) O produto das soluções da equação é positivo.
16) Uma das soluções da equação é negativa.

Exercício 15

(Uepg-pss 1 2019) O lucro semanal, em reais, de uma empresa é representado pela função $L(x) = -x^2 + 32x - 31$, onde x é a quantidade semanal vendida. Em relação ao exposto, assinale o que for correto.

01) O lucro semanal é máximo quando a quantidade vendida for maior que *31.*
02) Para um lucro semanal de *R$ 161,00,* a quantidade semanal vendida deve ser de no mínimo *8.*
04) O lucro semanal é nulo quando a quantidade semanal vendida for *1* ou *31.*
08) O lucro máximo semanal é de *R$ 225,00.*

Exercício 16

(Uem-pas 2017) Considerando o sistema linear

$$S: \begin{cases} ax + by = c & I \\ dx + ey = f & II \end{cases}$$

com a, b, c, d, e, f $\in \mathbb{R}$, assinale a(s) alternativa(s) correta(s).

01) Se c = f = 0, então o sistema S não admite solução para quaisquer valores de a, b, d, e.

02) Se $\det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} = 0$, então o sistema S é impossível.

04) Se S for um sistema possível e determinado, então as retas r e s, que representam as equações I e II, respectivamente, interceptam-se num único ponto.
08) Se o sistema S for equivalente ao sistema
$A = \begin{cases} x + y = 2 \\ y = -2 \end{cases},$
então S tem solução única dada pelo par ordenado (4, -2).
16) Se a=d e b=e, então o determinante da matriz dos coeficientes do sistema S é nulo.

Exercício 17

(Uem 2018) Considere o sistema linear nas incógnitas x, y e z dado por meio da seguinte operação com matrizes $AX = B$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} e\ B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

de forma que a, b e c sejam números reais dados e fixos.

Assinale o que for correto.

01) Se a=b=c=0, isto é, se o sistema for homogêneo, então ele será possível e indeterminado.
02) Se a e b forem nulos e distintos de c, então o sistema será impossível.
04) O determinante da matriz A é não nulo.
08) Se a=b=1 e c=0, então a terna (-1, 1, 0) é uma solução do sistema.
16) Se o sistema for homogêneo, então a terna (2, 1, 0) é uma solução do sistema.

Exercício 18

(Esc. Naval 2013) Nas proposições abaixo, coloque V na coluna à esquerda quando a proposição for verdadeira e F quando for falsa.

( ) Se uma reta é perpendicular a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.
( ) Se uma rota é perpendicular a uma reta perpendicular a um plano, então ela é paralela a uma reta do plano.
( ) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas.
( ) Se dois planos são perpendiculares, todo plano paralelo a um deles é perpendicular ao outro
( ) Se três planos são dois a dois perpendiculares , eles têm um único ponto em comum.

Lendo-se a coluna da esquerda, de cima para baixo, encontra-se

a) F – F – V – F – V
b) V – F – V – V – F
c) V – V – F – V – V
d) F – V – V – V – V
e) V – V – V – V – V

Exercício 19

(Uepg 2016) Se $\log_n a = 8$ e $\log_n b = 12$, assinale o que for correto.

01) $\log_a \sqrt[3]{a \cdot b^3} = \frac{11}{12}$.
02) Se $a = 16$, então $b = 64$.
04) $\log_{\sqrt{a}}(b \cdot n^3) = \frac{15}{4}$.
08) Se $n = \frac{1}{2}$, então $a \cdot b = 2^{-20}$.
16) $\log_n(a \cdot b) = 20$.

Exercício 20

(Uem 2018) Sobre matrizes, assinale o que for correto.

01) A matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, com $a_{ij} = 0$ se $i < j$, é uma matriz triangular inferior.

02) Uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ é chamada matriz diagonal se *aij=0*, sempre que *i=j.*

04) Considere uma matriz $A = [a_{ij}]_{3\times 5}$. Ela será a matriz identidade se $\begin{cases} a_{ij} = 1, & i = j \\ a_{ij} = 0, & i \neq j \end{cases}$

08) Ao somarmos uma matriz *3×2* com uma *2×3*, teremos uma matriz *3×3.*

16) Se *A* é uma matriz *m×n*, então a multiplicação da matriz *A* por sua transposta A^t será uma matriz *m×m.*

Exercício 21

(Uepg 2013) Sobre a matriz $A = \begin{pmatrix} cos\ 15° & -sen\ 15° \\ sen\ 15° & cos\ 15° \end{pmatrix}$, assinale o que for correto.

01) $A^2 = \begin{pmatrix} cos\ 30° & -sen\ 30° \\ sen\ 30° & cos\ 30° \end{pmatrix}$

02) $det\ A = 1.$

04) $A + A^t = \begin{pmatrix} cos\ 30° & 0 \\ 2 & cos\ 30° \end{pmatrix}$

08) $det\ (2A) = -\frac{1}{2}$

16) $det\ A^2 = 0$

Exercício 22

(Uepg 2018) Considerando que $A = \begin{bmatrix} log_3\ 3 & log_2\ 4 \\ log_3\ 27 & log_a\ a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & tg\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$, assinale o que for correto.

01) A matriz *A* não tem inversa.

02) A inequação $x[det(A) + det(B)] \leq 18$ tem solução $\{x \in \mathbb{R} | x > -4\}$.

04) $det(B + A^T) = 8$

08) $det(A \cdot B) = -\frac{5}{2}$

16) $det(A + B) = -\frac{3}{2}$

Exercício 23

(Uepg 2017) Considere as expressões $A = sen(\pi + x) \cdot cos(\pi + x)$ e $B = sec(2\pi - x) \cdot cotgx$, sendo x um número real em que as expressões são definidas. Nesse contexto, assinale o que for correto.

01) Se $x = \frac{5\pi}{3}$, então $A \cdot B > 0$

02) Se $x = \frac{\pi}{6}$, então $B^2 = 4.$

04) $A \cdot B = cosx$

08) $B = secx$

16) $A = sen2x$

Exercício 24

(Ime 2020) Um polinômio P(x) de grau maior que 3 quando dividido por x - 2, x - 3 e x - 5 deixa restos 2, 3 e 5, respectivamente. O resto da divisão de P(x) por (x - 2)(x - 3)(x - 5) é:

a) 1
b) x
c) 30
d) x - 1
e) x - 30

Exercício 25

(Uepg 2016) Considerando os planos α e β, e as retas *r* e *s*, assinale o que for correto.

01) Se $\alpha \cap \beta = s$, $r \parallel s$, $r \not\subset \alpha$ e $r \not\subset \beta$, então $r \parallel \alpha$ e $r \parallel \beta$.
02) Se $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = r$, $s \subset \alpha$, $s \perp r$, então $s \perp \beta$.
04) Se $r \subset \beta$ e $s \perp r$, então $s \perp \beta$.
08) Se $\alpha \parallel \beta$, $r \perp \alpha$, então $r \perp \beta$.
16) Se $r \parallel \alpha$ e $r \parallel \beta$, então $\alpha \parallel \beta$.

Exercício 26

(Uem 2014) Com base nos conhecimentos de trigonometria, assinale o que for correto.

01) Para todo x pertencente ao intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$, $senx > cosx$.

02) Não existe solução para a equação $senx = sen\frac{x}{2}$ no intervalo [0,3].

04) Para todo x real, $senx = cos(\frac{\pi}{2} - x)$.

08) Existe $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ satisfazendo a desigualdade $x < senx$.

16) Para todo x real, $-\frac{1}{2} \leq (senx)(cosx) \leq \frac{1}{2}$.

Exercício 27

(Uem 2017) Considere as matrizes

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

De acordo com conhecimentos sobre matrizes e determinantes, é correto afirmar que

01) $det(M \cdot N) = det(N \cdot M)$, onde *M* e *N* são matrizes quadradas de mesma ordem.
02) $detM^t = -detM$, onde *M* é matriz quadrada de ordem ímpar.
04) $det(C) = 4.$
08) a matriz $A \cdot B$ possui três linhas e três colunas.
16) $det(A \cdot B) = 96.$

Exercício 28

(Ufsc 2018) É correto afirmar que:

01) O domínio da função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5-|x-3|}}$ é um intervalo *(a, b)*. A soma de *a* com *b* é *6.*

02) Se $f: [1, +\infty) \to [1, +\infty)$ definida por $f(x) = x^2 - 2x + 2$ admite inversa, então $f^{-1}(5) = 3.$

04) Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & se\ \ x \geq 0 \\ x + 1, & se\ \ x < 0 \end{cases}$, então $(f \circ f)(-1) = 1.$

08) O sistema $\begin{cases} log_2(x + y) = 0 \\ log_3\ 2 + log_3\ y = log_3\ x \end{cases}$ tem infinitas soluções.

16) Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são injetoras, então $gof: A \to C$ pode não ser injetora.

Exercício 29

(Uepg-pss 2 2019) Considerando que

$A = 2cos(4x) + sen(2x) + tg\left(\frac{x}{2}\right) - sec(8x)$, para $x = \frac{\pi}{2}$,

$B = cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) + tg\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ e $C = tg^2 x$, com $senx = \frac{2}{3}$,

assinale o que for correto.

01) $A+B+C$ é um número positivo.

02) A e B são as raízes da equação $2x^2 - 3x - 2 = 0$.

04) A soma dos coeficientes do binômio $(A + 2Bx)^{10}$ é um.

08) A área do retângulo com lados medindo A e C é um número primo.

Exercício 30

(Uepg 2018) Considerando a função real definida por $f(x) = a + b\ sen\ (2bx)$, onde a e b são números reais não nulos, assinale o que for correto.

01) Se $a = 2$ e $b = 1$, $f(x)$ tem período 2π e imagem $[1, 3]$.

02) Se $f(x)$ tem período $\frac{\pi}{3}$ e imagem $[-4,\ 2]$, então $a = -1$ e b pode assumir dois valores.

04) Se $a = 1$ a imagem de $f(x)$ é o intervalo $[-1, 3]$, somente no caso do $b = 2$.

08) Se $b = 2$, $f(x)$tem período $\frac{\pi}{2}$, independente do valor de a.

16) Se $b = 2$, qualquer que seja o valor de a, o gráfico de $f(x)$ sempre intercepta o eixo x.

Exercício 31

(Uem 2016) Considerando as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = -x^2 + 20x - 16$ e $g(x) = -5x + 10$, para todo x real, assinale o que for correto.

01) Para todo $x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 84$

02) $(f + g)(1) = 8$.

04) Os gráficos de f e g não se interceptam.

08) O gráfico da função g é uma parábola com concavidade voltada para cima.

16) A função f não possui inversa e $g^{-1}(x) = -\frac{x}{5} + 2$, para todo x real.

Exercício 32

(Uepg 2016) Considerando $f(x) = 2 + 3sen(2x)$ e $g(x) = 2cos(x) - 2$, assinale o que for correto.

01) A interseção entre as imagens de $f(x)$ e $g(x)$ é o intervalo $[-1,\ 0]$.

02) $f(x) + g(x) = 2cos(x)[1 + 3sen(x)]$.

04) $f(\pi)g(\pi) = \frac{1}{2}$.

08) O período de $f(x)$ é 2π.

16) A união entre as imagens das funções $f(x)$ e $g(x)$ é o intervalo $(-4,\ 5)$.

Exercício 33

(Ufsc 2019) O dólar americano (US$) é moeda bastante usada em transações financeiras internacionais, mas, em decorrência de vários fatores, o seu preço pode variar bastante. Em um dia de forte variação, o preço, em reais, de venda e de compra de um dólar americano comercializado no Brasil foi descrito,

respectivamente, pelas funções $V(t) = 3,8 + 0,4\ sen\ \left(\frac{\pi}{4}t\right)$ e

$C(t) = 3,5 + 0,5\ sen\ \left(\frac{\pi}{4}t\right)$ nas quais t representa o tempo medido,

em horas, sendo que $t \in \mathbb{R}$ e $8 \leq t \leq 17$.

01) Os valores máximo e mínimo do preço do dólar para venda foram de, respectivamente, R$ 3,80 e R$ 0,40.

02) Apenas para t = 13 h, o preço de compra do dólar foi de R$ 3,30.

04) Uma pessoa que comprou US$ 130,00 quando t = 8 h e vendeu essa quantia quando t = 14 h perdeu R$ 13,00. Contudo, se a venda fosse feita quando t = 16 h, obteria um lucro de R$ 39,00.

08) Usando cartão de crédito, uma pessoa comprou um produto em um site americano ao preço de US$ 50,00. Considerando que a cobrança da fatura do cartão de crédito ocorre segundo o preço de compra sempre às 17 h, então o produto custou mais do que R$ 175,00.

16) Para cada t pertencente ao intervalo $\{t \in \mathbb{R};\ \ 12 < t < 16\}$, a diferença entre o preço de venda e o preço de compra foi maior que US$ 0,30.

Exercício 34

(Uem 2013) Sabendo que a, b e c são números inteiros e que o número complexo $2 + i$ é zero (raiz) do polinômio $x^3 + ax^2 + bx + c$, assinale o que for correto.

01) Esse polinômio possui outra raiz complexa, cujo módulo é $\sqrt{5}$.

02) O argumento de $2 + i$ é superior a $\frac{\pi}{4}\ rad$.

04) Todas as raízes reais desse polinômio são inteiras.

08) Se 1 é raiz desse polinômio, então a=c.

16) É possível escolher os inteiros a, b e c, de modo que o polinômio não possua raízes reais.

Exercício 35

(Uepg 2016) Sobre relações e funções, assinale o que for correto.

01) A função $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$ de A em B admite inversa se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -12\}$.

02) $f(x) = ax + c,\ g(x) = ax^2 + bx + c, f(-3) = 0,\ g(0) = 3$ e $g(f(0)) = 24$, então $b = 4$.

04) Se $f(x) = x - 2$ e $g[f(x)] = 2x^2 - 11x + 15$, então $g(1) = 0$.

08) O domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 3x}{2x^2 + 4x - 6}}$ é o conjunto $D = \{x \in \mathbb{R}\ \mid\ x < 0\ ou\ x > 1\}$.

16) Se $R = \{(x, y) \in A \times B \mid\ x + y > 5\}$ é uma relação de $A = \{1, 2, 3\}$ em $B = \{2, 3, 4\}$, então a relação inversa R^{-1} de B em A tem quatro elementos.

Exercício 36

(Uepg 2013 Adaptada) Assinale o que for correto.

01) $cos247° = sen337°$
02) A igualdade abaixo é uma identidade trigonométrica:
$\frac{sen\ a \cdot tg\ a \cdot cossec\ a}{cos\ a \cdot cotg\ a \cdot sec\ a} = tg^2 a$
04) $sen250° + cos20° = 0.$
08) $sen250° < cos330° < tg30°.$
16) $sen\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = cos2x$

Exercício 37
(Uepg 2016) Sobre trigonometria, assinale o que for correto.

01) Se $sec^2 x + 2tgx = 4$ e sendo x um arco do 2º quadrante, então $senx + cosx = \frac{\sqrt{10}}{5}.$
02) $cos\left(\frac{3\pi}{2} + a\right) + sen(\pi + a) = sena.$
04) $1 - 2cos^2 105° = 32.$
08) $\frac{2tg^2\theta}{1 + cos2\theta} = cossec^2\theta.$
16) $2sen280° \cdot cos50° + 2cos280° \cdot sen50° = -1.$

Exercício 38

(Uem 2015) Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$

Com relação aos conceitos de matrizes e determinantes, assinale o que for **correto.**

01) $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ e $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$
02) $AB^t = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$
04) A matriz *A* é invertível e a sua inversa também é invertível.
08) $det(A) = det(B^t).$
16) $[det(A) + det(B)]^2 = det(A^2) + det(\sqrt{2} \cdot AB) + det(B^2).$

Exercício 39
(Uepg 2018) Com relação aos conjuntos abaixo, assinale o que for correto.

$A = \{x \in \mathbb{Z} |\ |x| \leq \sqrt{10}\}$
$B = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - 2x \leq 3\}$
$D = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 + 5x + 4 < 0\}$

01) $A - B = D$
02) $(A \cup B) \cap D = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 + 5x + 6 = 0\}$
04) $D \not\subset A$ e $B \subset A$
08) $B \cap D = \{x \in \mathbb{R} | 2x + 7 = 5\}$
16) O conjunto *D* admite exatamente *16* subconjuntos.

Exercício 40
(Ufba 2011) Considerando-se as funções $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ e $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ definidas por $f(x) = x - 1$ e $g(x) = log(x^2 + 1)$, é correto afirmar:

01) A função f é bijetora, e sua inversa é a função $h : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ definida por $h(x) = x + 1$.
02) O conjunto imagem da função g é o intervalo [0, + ∞ [.
04) A função g é uma função par.
08) Existe um número real x tal que $f(g(x)) = g(f(x))$.
16) O ponto $(0, 0)$ pertence ao gráfico da função g.

Exercício 41
(Fgv 2014) A quantidade de cópias vendidas de cada edição de uma revista jurídica é função linear do número de matérias que abordam julgamentos de casos com ampla repercussão pública. Uma edição com quatro matérias desse tipo vendeu 33 mil exemplares, enquanto que outra contendo sete matérias que abordavam aqueles julgamentos vendeu 57 mil exemplares.
a) Quantos exemplares da revista seriam vendidos, caso fosse publicada uma edição sem matéria alguma que abordasse julgamento de casos com ampla repercussão pública?
b) Represente graficamente, no plano cartesiano, a função da quantidade (Y) de exemplares vendidos por edição, pelo número (X) de matérias que abordem julgamentos de casos com ampla repercussão pública.
c) Suponha que cada exemplar da revista seja vendido a R$ 20,00. Determine qual será o faturamento, por edição, em função do número de matérias que abordem julgamentos de casos com ampla repercussão pública.

Exercício 42
(Ufu 2012) Considere o conjunto numérico U cujos elementos são todos os números naturais de dois algarismos e os subconjuntos A e B de U, satisfazendo:

i) A é formado por todos os elementos tais que para qualquer par de elementos distintos x e y, em A, tem-se que $\mathrm{mdc}(x, y) = 33;$
ii) B é formado por todos os elementos que são divisores de 132.

Nessas condições, faça o que se pede.
a) Determine quais são todos os elementos da interseção $A \cap B$.
b) Numerando cada uma das bolas idênticas de uma urna com um número correspondendo a cada um dos elementos do conjunto $U - (A \cup B)$ e escolhendo-se ao acaso uma delas, determine a probabilidade de a bola escolhida ter numeração ímpar.

Exercício 43
(Uel 2018) Um estudante fez uma pesquisa com um grupo de universitários para obter um panorama a respeito da utilização de três redes sociais. Ao computar as informações fornecidas pelas pessoas entrevistadas, constatou que:

- *55* utilizam *Snapchat*, *Instagram* e Facebook;
- *70* utilizam *Snapchat* e *Facebook*;
- *105* utilizam *Snapchat* e *Instagram*;
- *160* utilizam *Instagram* e *Facebook*;
- *180* utilizam *Snapchat*;
- *225* utilizam *Instagram*;
- *340* utilizam *Facebook*;
- *85* não utilizam qualquer uma das redes sociais da pesquisa.

A partir dessas informações, quantas pessoas foram entrevistadas?
Justifique sua resposta, apresentando os cálculos realizados na resolução desta questão.

Exercício 44

(Ufrj 2011) Se $x = \sqrt{3-\sqrt{8}} - \sqrt{3+\sqrt{8}}$, mostre que x é inteiro e negativo. (Sugestão: calcule x^2.)

Exercício 45

(Ita 2010) Sejam A, B e C conjuntos tais que $C \subset B$, $n(B \backslash C) = 3n(B \cap C) = 6n(A \cap B)$, $n(A \cup B) = 22$ e $(n(C), n(A), n(B))$ e uma progressão geométrica de razão $r > 0$.

a) Determine n(C).
b) Determine n(P(B\C)).

Exercício 46

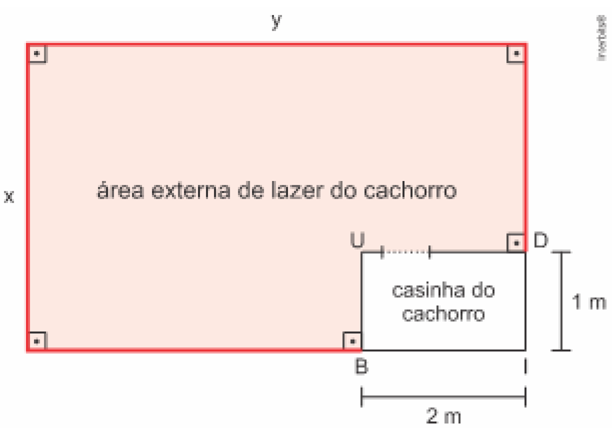
(Ufjf-pism 1 2018) Uma empresa confecciona um certo produto *A.* O custo, em reais, para se produzir uma quantidade *x* desse produto é dado pela seguinte função:

$C(x) = (x^2 - 30x + 1000) \cdot 1000,$ onde *x* é a quantidade produzida do produto *A.*

a) É possível produzir uma certa quantidade deste produto a um custo zero? Justifique.
b) Encontre a quantidade que deverá ser produzida para que o custo seja mínimo.

Exercício 47

(Unesp 2017) A figura representa, em vista superior, a casinha de um cachorro (retângulo *BIDU)* e a área externa de lazer do cachorro, cercada com *35* metros de tela vermelha totalmente esticada.



Calcule a área externa de lazer do cachorro quando *x=6 m.* Determine, algebricamente, as medidas de *x* e *y* que maximizam essa área, mantidos os ângulos retos indicados na figura e as dimensões da casinha.

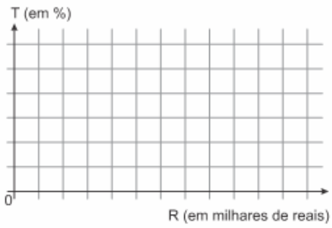
Exercício 48

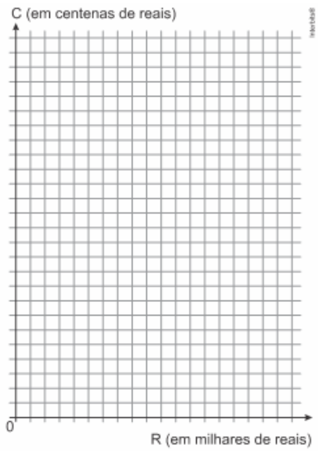
(Unesp 2017) Admita que um imposto sobre a renda mensal bruta fosse cobrado da seguinte forma:

Renda mensal bruta (R)	Taxa de imposto sobre a renda mensal bruta (T)
Até *R$ 2.000,00*	Isento
Acima de *R$ 2.000,00* e até *R$ 5.000,00*	*10%*
Acima de *R$ 5.000,00* e até *R$ 8.000,00*	*15%*
Acima de *R$ 8.000,00*	*25%*

Nos planos cartesianos abaixo:

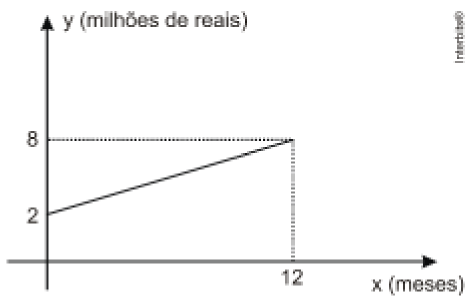
- esboce o gráfico de *T* (em *%)* em função de *R* (em milhares de reais);
- esboce o gráfico do imposto mensal cobrado *C* (em centenas de reais) em função da renda mensal bruta *R* (em milhares de reais) no intervalo de *R* que vai de *R$ 0,00* a *R$ 8.000,00.*





Exercício 49

(Ufjf 2012) Uma construtora, para construir o novo prédio da biblioteca de uma universidade, cobra um valor fixo para iniciar as obras e mais um valor, que aumenta de acordo com o passar dos meses da obra. O gráfico abaixo descreve o custo da obra, em milhões de reais, em função do número de meses utilizados para a construção da obra.

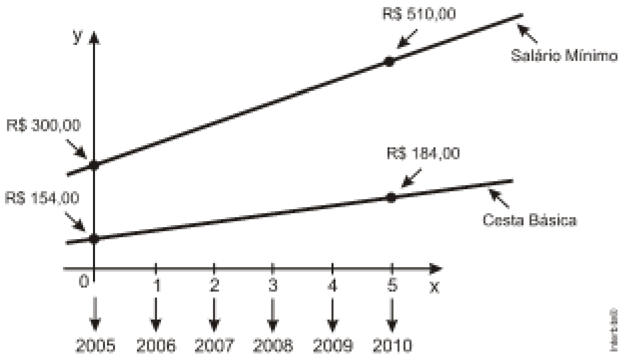


a) Obtenha a lei $y = f(x)$, , para $x \geq 0$, que determina o gráfico.
b) Determine o valor inicial cobrado pela construtora para a construção do prédio da biblioteca.
c) Qual será o custo total da obra, sabendo que a construção demorou 10 meses para ser finalizada?

Exercício 50

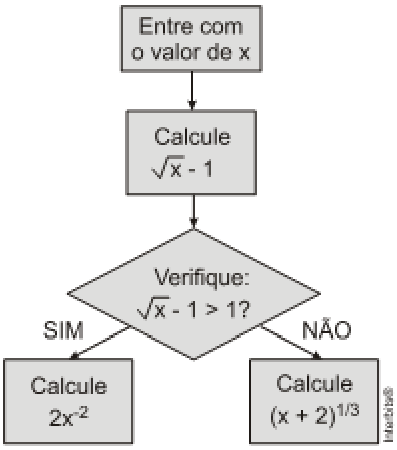
(Fgv 2011) Nos últimos anos, o salário mínimo tem crescido mais rapidamente que o valor da cesta básica, contribuindo para o aumento do poder aquisitivo da população. O gráfico abaixo

ilustra o crescimento do salário mínimo e do valor da cesta básica na região Nordeste, a partir de 2005.
Suponha que, a partir de 2005, as evoluções anuais dos valores do salário mínimo e dos preços da cesta básica, na região Nordeste, possam ser aproximados mediante funções polinomiais do 1º grau, $f(x) = ax + b$, em que x representa o número de anos transcorridos após 2005.
a) Determine as funções que expressam os crescimentos anuais dos valores do salário mínimo e dos preços da cesta básica, na região Nordeste.
b) Em que ano, aproximadamente, um salário mínimo poderá adquirir cerca de três cestas básicas, na região Nordeste? Dê a resposta aproximando o número de anos, após 2005, ao inteiro mais próximo.



Exercício 51

(Ufrj 2011) Considere o programa representado pelo seguinte fluxograma:



a) Determine os valores reais de x para os quais é possível executar esse programa.
b) Aplique o programa para $x = 0$, $x = 4$ e $x = 9$.

Exercício 52

(Ufjf 2011) Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita estritamente crescente quando $f(x_2) > f(x_1)$ sempre que $x_2 > x_1$, com $x_2, x_1 \in \mathbb{R}$.
a) Dê exemplo de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estritamente crescente.
b) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função estritamente crescente. Para $a \in \mathbb{R}$ fixado, considere a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = [f(x) - f(a)](x - a)$. Mostre que $g(a) < g(x)$, para todo $x \neq a$.

Exercício 53

(Ita 2011) Determine todos os valores de $m \in$ Rtais que a equação $(2 - m)x^2 + 2mx + m + 2 = 0$ tenha duas raízes reais distintas e maiores que zero.

Exercício 54

(Pucrj 2012) Seja $f(x) = \dfrac{x+1}{-x+1}$.
a) Calcule $f(2)$.
b) Para quais valores reais de x temos $f(f(x)) = x$?
c) Para quais valores reais de x temos $f(f(f(f(x)))) = 2011$?

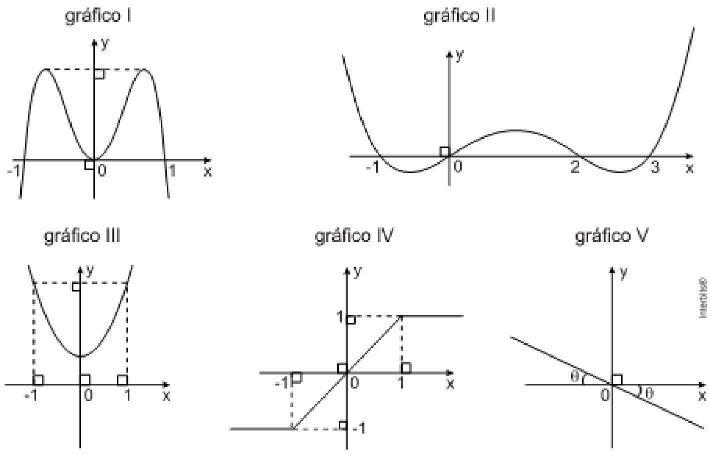
Exercício 55

(Ime 2016) Sejam as funções f_n, para $n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, tais que: $f_0(x) = \dfrac{1}{1-x}$ e $f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x))$, para $n \geq 1$. Calcule $f_{2016}(2016)$.

Exercício 56

(Unifesp 2010) Uma função $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ diz-se par quando $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in \mathrm{R}$, e ímpar quando $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathrm{R}$.

a) Quais, dentre os gráficos exibidos, melhor representam funções pares ou funções ímpares? Justifique sua resposta.



b) Dê dois exemplos de funções, $y = f(x)$ e $y = g(x)$, sendo uma par e outra ímpar, e exiba os seus gráficos.

Exercício 57

(Ita 2006) Seja $f: [0, 1) \to R$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}.$$

Seja $g: \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \to R$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} f\left(x + \frac{1}{2}\right), & -\frac{1}{2} < x < 0 \\ 1 - f\left(x + \frac{1}{2}\right), & 0 \leq x < \frac{1}{2} \end{cases},$$

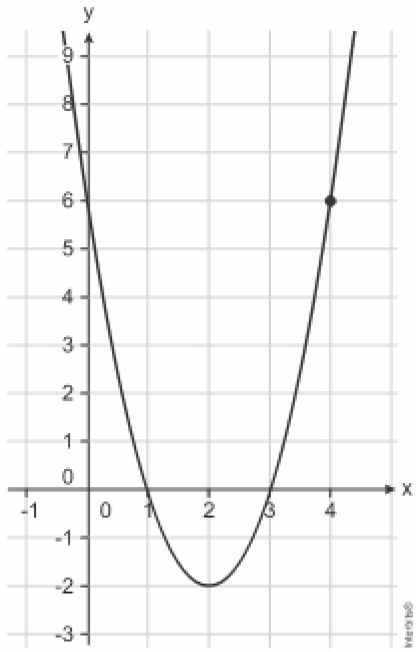
com f definida acima. Justificando a resposta, determine se g é par, ímpar ou nem par nem ímpar.

Exercício 58

(Pucrj 2016) Sejam $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ e $g: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ as funções definidas por $f(x) = |3x - 1|$ e $g(x) = 1 - 3x$.

a) Esboce os gráficos de *f* e *g* no mesmo sistema de coordenadas cartesianas.
b) Para quais valores de *x*, temos $f(x) - g(x) \leq 28$? Justifique sua resposta.
c) Determine a área do triângulo *ABC*, onde
$A = (0,\ f(0)), B = (3,\ g(3))\ e\ C = (3,\ f(3)),$ justificando sua resposta.

Exercício 59
(G1 - cftrj 2017) Seja f uma função real que tem o gráfico ao lado, onde *y=f(x)*. Por exemplo, para *x=4*, *y* assume o valor *6*, como no ponto destacado.



Determine x, de modo que a expressão */y/+5* tenha valor mínimo.

Exercício 60
(Pucrj 2017) Sejam $g_0, g_1 : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ as seguintes funções:

$$g_0(x) = \frac{|x+2| - |x-2|}{2} g_1(x) = \frac{g_0(4x+6) + g_0(4x-6)}{2}$$

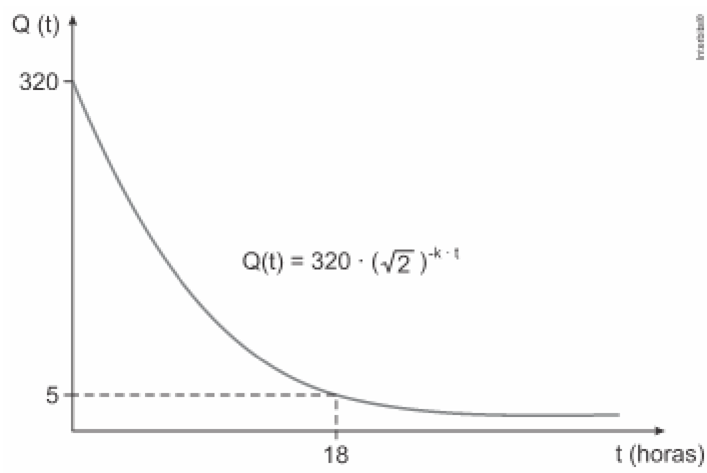
a) Faça o esboço do gráfico de g_0.
b) Faça o esboço do gráfico de g_1.
c) Resolva a inequação $g_1(x) \leq \frac{x}{2}$.

Exercício 61
(Mackenzie 2017- adaptada) O conjunto solução da equação $|\ 3x + 5\ |\ +\ |\ x - 1\ |\ = 2$ é:

Exercício 62
(Fac. Albert Einstein - Medicina 2019) Determinar a massa dos animais é extremamente importante para a administração de medicamentos. Há circunstâncias em que é possível estimar a massa de alguns animais sem o uso de balanças. Por exemplo, é possível determinar a massa aproximada *(m)* de um potro, em *kg*, em função de seu perímetro torácico *(s)*, em *cm*, por meio da fórmula $m = \frac{s - 25}{0,7}$.

Para tratamentos anti-inflamatórios com Meloxican, a dosagem indicada para equinos é de *0, 6 mg*, desse princípio ativo por *kg* de massa corporal. Esse medicamento é comercializado em frascos de *100 mL* contendo *2g* de Meloxican.

a) Considere um potro, de perímetro torácico igual a *1, 16 m*, que será tratado com esse anti-inflamatório. Determine a massa aproximada desse potro, em *kg*, segundo a fórmula, e a dosagem de Meloxican, em *mL*, a ser administrada ao animal.
b) Em um outro potro, a quantidade *Q(t)*, em *mg*, de Meloxican presente no organismo do animal, *t* horas após a aplicação, é descrita pelo gráfico e modelada pela função:



Determine o valor da constante *k* e a quantidade de Meloxican, em *mg*, presente no organismo desse animal 24 horas após a aplicação.

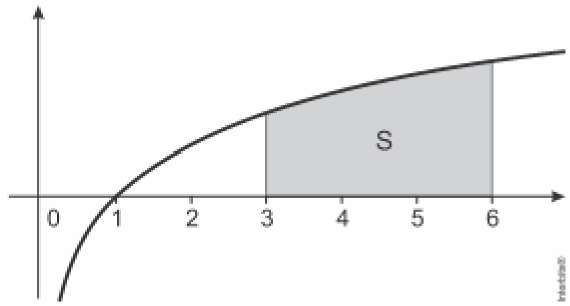
Exercício 63
(Ufu 2018) O setor de controle de qualidade de um frigorífico avalia o funcionamento de algumas de suas câmaras de refrigeração. Um boi foi abatido e parte de seu corpo foi colocado em uma câmara, mantida a uma temperatura constante de -10 °C, para resfriamento. Nela, instalou-se um termômetro para aferir a oscilação na temperatura desse corpo.
Considere que a temperatura do corpo, em graus Celsius, varie com o tempo *t*, em minutos, de acordo com a função
$T(t) = -10 + a \cdot 5^{b \cdot t},$ em que *a* e *b* são constantes reais e *t*, o tempo decorrido após o corpo ser colocado na câmara de refrigeração. Assim, após 80 minutos, foi observado que a temperatura do corpo era de 0 °C e que, após 2 horas e 40 minutos, essa temperatura passou para -8 °C.

Levando-se em consideração essas informações, elabore e execute um plano de resolução de maneira a determinar
a) os valores das constantes reais *a* e *b*.
b) o instante de tempo *t*, em horas, a partir do qual $T(t) \leq -9,6\ \ °C$.

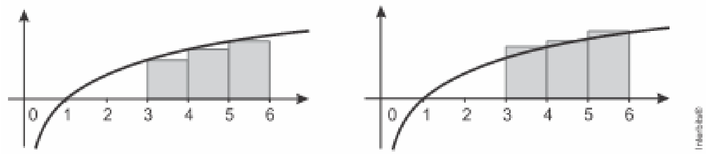
Exercício 64
(Ita 2018) Encontre o conjunto solução $S \subset \mathrm{R}$ da inequação exponencial: $3^{x-2} + \sum_{k=1}^{4} 3^{x+k} \leq \frac{1081}{18}$.

Exercício 65
(Fgvrj 2016) Um aluno precisava estimar a área S da região sob o gráfico da função S (logaritmo decimal de x) entre as abscissas

$x = 3$ e $x = 6$ que se vê na figura a seguir.



Para obter um valor aproximado de S, o aluno pensou na estratégia que as figuras abaixo mostram. Ele calculou a área S_1 dos três retângulos da figura da esquerda, e calculou a área S_2 dos três retângulos da figura da direita.



Ele imaginou que uma boa aproximação para a área que deseja obter é $S = \dfrac{S1 + S2}{2}$.

Dados $log2 = 0,301$ e $log3 = 0,477$, obtenha um valor para S, usando a estratégia descrita acima.

Exercício 66

(Fuvest 2016) Considere as funções f e g definidas por
$f(x) = 2log_2(x - 1)$, se $x \in \mathrm{R}, x > 1$,

$g(x) = log_2\left(1 - \dfrac{x}{4}\right)$, se $x \in \mathrm{R}, x < 4$.

a) Calcule $f\left(\dfrac{3}{2}\right), f(2), f(3), g(-4), g(0)\ e\ g(2)$.
b) Encontre x, $1 < x < 4$, tal que $f(x) = g(x)$.
c) Levando em conta os resultados dos itens a) e b), esboce os gráficos de f e de g no sistema cartesiano abaixo.

Exercício 67

(Ita 2016) Seja f a função definida por $f(x) = log_{x+1}(x^2 - 2x - 8)$.
Determine:
a) O domínio D_f da função f.
b) O conjunto de todos os valores de $x \in Df$ tais que $f(x) = 2$.
c) O conjunto de todos os valores de $x \in Df$ tais que $f(x) > 1$.

Exercício 68

(Unicamp 2015) Considere a função $f(x) = 10^{1+x} + 10^{1-x}$, definida para todo número real x
a) Mostre que $f(log_{10}(2 + \sqrt{3}))$ é um número inteiro.
b) Sabendo que $log_{10}2 \cong 0,3$, encontre os valores de x para os quais $f(x) = 52$.

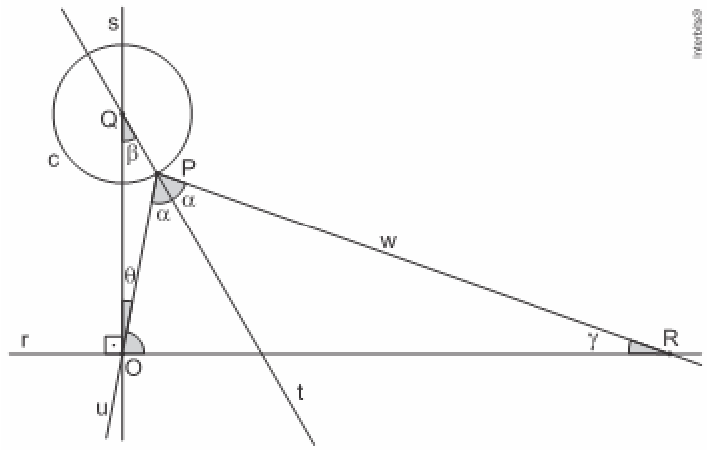
Exercício 69

(IME 2015) Determine os valores reais de x que satisfazem a inequação:

$$\frac{4}{log_3 x^2 - 2} + log_x \frac{1}{9} > 1$$

Exercício 70

(Fuvest 2019)



Conforme se vê na figura, em um plano, encontram-se:
- duas retas perpendiculares r e s e o ponto O de intersecção dessas duas retas;
- um ponto $Q \in s$ tal que a medida de $\overline{OQ}$ é 5;
- uma circunferência c, centrada em Q, de raio 1;
- um ponto $P \in c$ tal que o segmento $\overline{OP}$ intersecta c apenas em P.

Denotam-se $\theta = Q\hat{O}P$ e $\beta = O\hat{Q}P$.

a) Calcule $sen\ \theta$, no caso em que θ assume o máximo valor possível na descrição acima.
b) Calcule $sen\ \theta$ no caso em que $\beta = 60°$

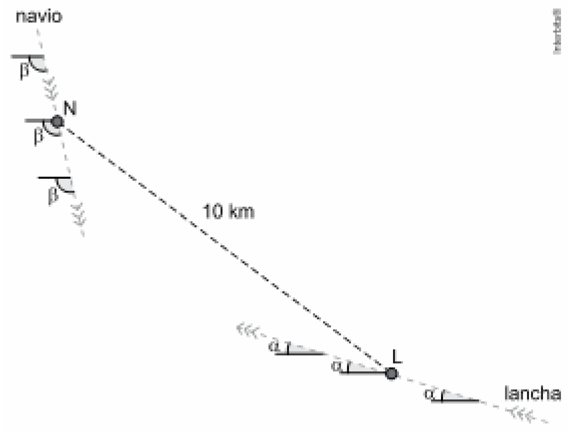
Ainda na figura, encontram-se:
- a reta t contendo Q e P;
- a semirreta u partindo de P e contendo O;
- a semirreta w partindo de P para fora de c de modo que u e w estão em semiplanos distintos relativos a t.

Supõe-se que os ângulos formados por u e t e por w e t sejam iguais a um certo valor α, com $0 \leq \alpha \leq 90°$. Caso w intersecte r (como é o caso da figura), denotam-se R como esse único ponto de intersecção e $\gamma = O\hat{R}P$.

c) Determine a medida de $\overline{OR}$, no caso em que $\alpha = 45°$.

Exercício 71

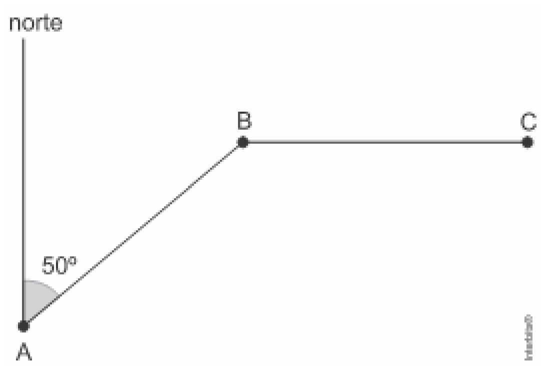
(Unesp 2017) Uma lancha e um navio percorrem rotas lineares no mar plano com velocidades constantes de 80 e 30 km/h, respectivamente. Suas rotas, como mostra a figura, estão definidas por ângulos constantes de medidas iguais a α e β, respectivamente. Quando a lancha está no ponto L e o navio no ponto N, a distância entre eles é de 10 km.



Sendo *P* o ponto em que a lancha colidirá com o navio, demonstre que o ângulo obtuso $L\hat{P}N$ será igual a $\alpha + \beta$. Em seguida, calcule a distância entre *N* e *P*, considerando $cos(\alpha + beta) = -\frac{9}{16}$.

Exercício 72

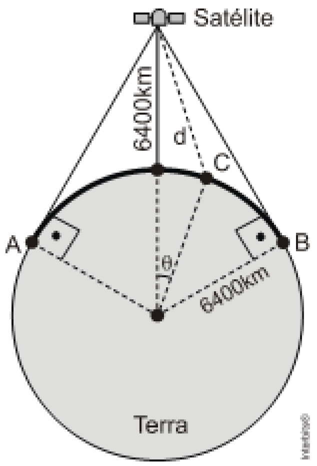
(Fgvrj 2016) A figura abaixo mostra a trajetória de Renato com seu barco.



Renato saiu do ponto A e percorreu 10 km em linha reta, até o ponto B, numa trajetória que faz 50° com a direção norte. No ponto B, virou para o leste e percorreu mais 10 km em linha reta, chegando ao ponto C.
Calcule a distância do ponto A ao ponto C.
Dados: sen 20°=0,342, cos 20°=0,940.

Exercício 73

(Unicamp 2013) Um satélite orbita a 6.400 km da superfície da Terra. A figura abaixo representa uma seção plana que inclui o satélite, o centro da Terra e o arco de circunferência *AB*. Nos pontos desse arco, o sinal do satélite pode ser captado. Responda às questões abaixo, considerando que o raio da Terra também mede 6.400 km.



a) Qual o comprimento do arco *AB* indicado na figura?
b) Suponha que o ponto *C* da figura seja tal que *cos(θ)=3/4.* Determine a distância *d* entre o ponto *C* e o satélite.

Exercício 74

(Uema 2015) Considere as expressões trigonométricas abaixo:

$cos(\alpha + \beta) = cos\alpha cos\beta - sen\alpha sen\beta$ e $sen(\alpha + \beta) = sen\alpha cos\beta + sen\beta cos\alpha.$

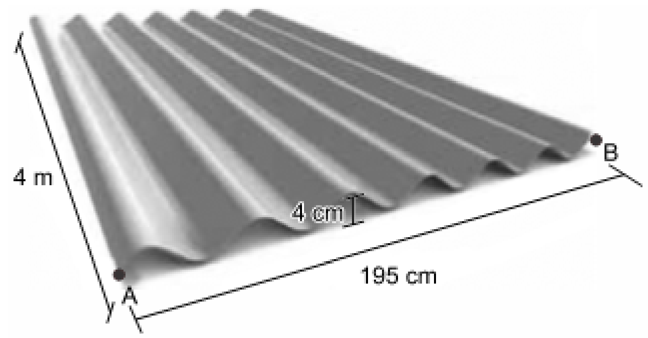
Para calcular o $cos2\alpha$ e o $sen2\alpha,$ basta fazer $\alpha = \beta,$ e, a partir das expressões trigonométricas, obtêm-se:

$cos2\alpha = cos(\alpha + \alpha) = cos^2\alpha - sen^2\alpha e sen2\alpha = sen(\alpha + \alpha) = 2sen\alpha cos\alpha.$

De modo semelhante ao cálculo acima, desenvolva o $cos3\alpha$ e o $sen3\alpha.$

Exercício 75

(Unifesp 2018) Uma chapa retangular metálica, de área igual a $8,132\ m^2,$ passa por uma máquina que a transforma, sem nenhuma perda de material, em uma telha ondulada. A figura mostra a telha em perspectiva.



A curva que liga os pontos *A* e *B,* na borda da telha, é uma senoide.
Considerando um sistema de coordenadas ortogonais com origem em *A,* e de forma que as coordenadas de *B,* em centímetros, sejam (195, 0), a senoide apresentará a seguinte configuração:

a) Calcule o comprimento da senoide indicada no gráfico, do ponto *A* até o ponto *B.*

b) Determine a expressão da função cujo gráfico no sistema de coordenadas é a senoide de *A* até *B*. Determine o domínio, a imagem e o período dessa função.

Exercício 76

(Ita 2010) Considere a equação

$(3 - 2cos^2 x)(1 + tg^2 \frac{x}{2}) - 6tg\frac{x}{2} = 0.$

a) Determine todas as soluções x no intervalo $[0, \pi[$.
b) Para as soluções encontradas em a), determine cotg x.

Exercício 77

(Ufpe 2010) Quantas soluções a equação trigonométrica $senx = \sqrt{(1 - cosx)}$ admite, no intervalo $[0,80\pi)$?

Exercício 78

(Fuvest 2020) É dada a função $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por , $f(x) = sen^4 x + cos^4 x$, para todo $x \in [0, \pi]$.

a) Apresente três valores $x \in [0, \pi]$ para os quais *f(x)=1.*

b) Determine os valores $x \in [0, \pi]$ para os quais $f(x) = \frac{5}{8}$.

c) Determine os valores $x \in [0, \pi]$ para os quais $\frac{1}{2}f(x) + \frac{3}{8}sen\ (2x) \geq \frac{5}{8}$.

Exercício 79

(Ita 2019) Determine todas as soluções da equação

$sen^6 x + cos^6 x = \frac{7}{12}$.

Exercício 80

(Fgv 2017) Uma fábrica decide distribuir os excedentes de três produtos alimentícios *A*, *B* e *C* a dois países da América Central, *P1* e *P2*. As quantidades, em toneladas, são descritas mediante a matriz *Q*:

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 200 & 100 & 150 \\ 100 & 150 & 200 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow P_1 \\ \leftarrow P_2 \end{array}$$

Para o transporte aos países de destino, a fábrica recebeu orçamentos de duas empresas, em reais por toneladas, como indica a matriz *P:*

$$P = \begin{bmatrix} 500 & 300 \\ 400 & 200 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1^a\ empresa \\ \leftarrow 2^a\ empresa \end{array}$$

a) Efetue o produto das duas matrizes, na ordem que for possível. Que elemento da matriz produto indica o custo de transportar o produto *A*, com a segunda empresa, aos dois países?
b) Para transportar os três produtos aos dois países, qual empresa deveria ser escolhida, considerando que as duas apresentam exatamente as mesmas condições técnicas? Por quê?

Exercício 81

(Udesc 2011) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, calcule as matrizes *(C, D, E, F* e *G)* resultantes das seguintes operações:

a) $C = A + B^t$
b) $D = A^2$
c) $E = 2A - B^t$
d) $F = 3A - 2B$
e) $G = A \cdot B$

Obs.: B^t é a matriz transposta da matriz *B*.

Exercício 82

(Uerj 2016) Considere uma matriz *A* com *3* linhas e *1* coluna, na qual foram escritos os valores *1, 2* e *13,* nesta ordem, de cima para baixo.
Considere, também, uma matriz *B* com *1* linha e *3* colunas, na qual foram escritos os valores *1, 2* e *13,* nesta ordem, da esquerda para a direita.

Calcule o determinante da matriz obtida pelo produto de *A*×B.

Exercício 83

(Uel 2019) Uma mãe, com o intuito de organizar os brinquedos dos seus filhos, teve a ideia de colocá-los em caixas coloridas. Ela classificou os brinquedos em três categorias, de acordo com seus tamanhos, sendo elas: brinquedos pequenos, médios e grandes. Para a organização, a mãe utilizou caixas de acrílico amarelas, verdes e azuis, as quais comportam as seguintes quantidades de brinquedos:

- Caixas Amarelas: 2 grandes, 8 médios e 10 pequenos.
- Caixas Verdes: 2 grandes, 20 médios e 16 pequenos.
- Caixas Azuis: 1 grande, 10 médios e 14 pequenos.

Considere que as crianças possuem 12 brinquedos grandes, 72 brinquedos de tamanho médio e 84 pequenos e que foi colocada, em cada caixa, exatamente a quantidade de brinquedos de cada categoria que ela comporta. Quantas caixas de cada cor esta mãe utilizou para acomodar todos os brinquedos de seus filhos?

Apresente os cálculos realizados na resolução da questão.

Exercício 84

(Uftm 2011 Adaptada) Seja o sistema linear nas variáveis x, y e z:

$$\begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + my + z = 0 \end{cases}$$

a) Discuta o sistema acima.
b) Resolva o sistema para m=-1.

Exercício 85

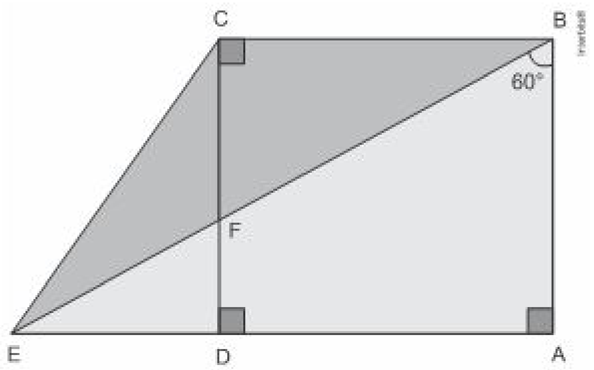
(G1 - cftrj 2016) Na figura abaixo:

- Os pontos B, F e E são colineares;
- Os pontos A, D e E são colineares;

- ABCD é um quadrilátero equiângulo;

- O segmento $\overline{EB}$ é bissetriz do ângulo $C\hat{E}A$;

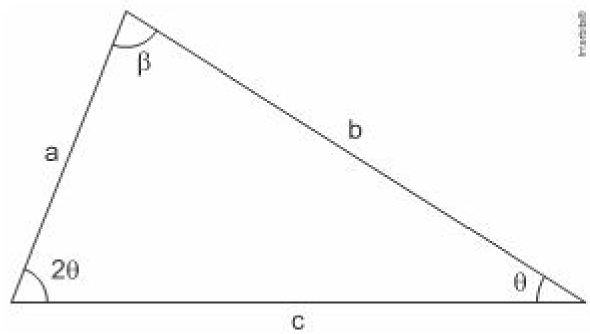
- O ângulo $A\hat{B}E$; mede 60° e o segmento $\overline{BC}$ mede 18 cm.



Com essas informações, calcule a medida da área, em cm^2 do triângulo BCE.

Exercício 86
(Ufsc 2016 Adaptada) Se duas reta paralelas são cortadas por uma reta transversal, formando ângulos alternos externos cujas medidas, em graus, são representadas por $(3x + 4)$ e $(4x - 37)$, encontre a medida da soma desses ângulos.

Exercício 87
(Unicamp 2018) A figura abaixo exibe um triângulo com lados de comprimentos a, b e c e ângulos internos θ, 2θ e β.



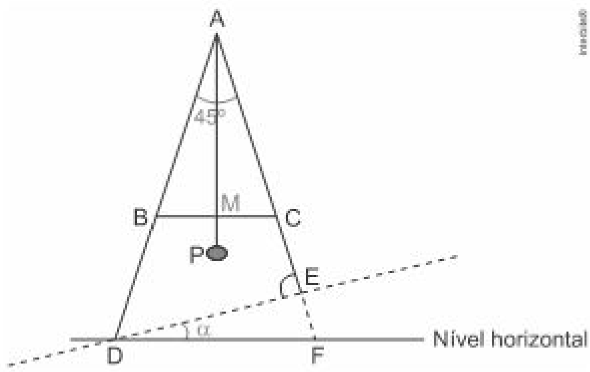
a) Supondo que o triângulo seja isósceles, determine todos os valores possíveis para o ângulo θ.

b) Prove que, se c = 2a, então β = 90°.

Exercício 88
(Uerj 2015) Uma ferramenta utilizada na construção de uma rampa é composta pela seguinte estrutura:

- duas varas de madeira, correspondentes aos segmentos AE e AD, que possuem comprimentos diferentes e formam o ângulo DÂE igual a 45°;
- uma travessa, correspondente ao segmento BC, que une as duas varas e possui uma marca em seu ponto médio M;
- um fio fixado no vértice A e amarrado a uma pedra P na outra extremidade;
- nesse conjunto, os segmentos AB e AC são congruentes.

Observe o esquema que representa essa estrutura:

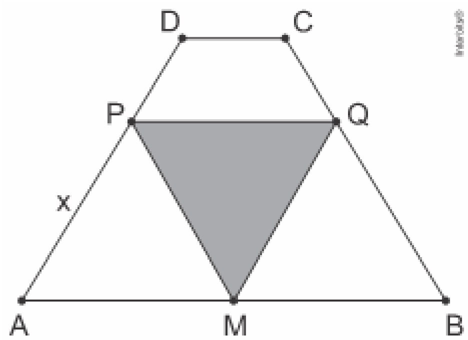


Quando o fio passa pelo ponto M, a travessa BC fica na posição horizontal. Com isso, obtém-se, na reta que liga os pontos D e E, a inclinação α desejada.

Calcule α, supondo que o ângulo AÊD mede 85°.

Exercício 89
(Ita 2013) Em um triângulo de vértices A, B e C, a altura, a bissetriz e a mediana, relativamente ao vértice C, dividem o ângulo $B\hat{C}A$ em quatro ângulos iguais. Se l é a medida do lado oposto ao vértice C, calcule:
a) A medida da mediana em função de l.
b) Os ângulos $C\hat{A}B$, $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$.

Exercício 90
(FGV 2016) A figura abaixo mostra o trapézio isósceles *ABCD* de bases *AB* e *DC,* o segmento variável *PQ* paralelo a *AB* e o ponto *M,* médio de *AB.*

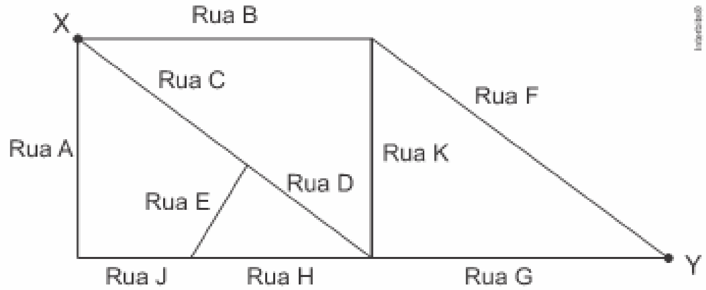


Considere as medidas a seguir:

$AB = 8,\ DC = 2,\ AD = BC = 5$ e $AP = x\ (0 < x \leq 5)$

a) Calcule a área do triângulo *MPQ* quando *x=2.*
b) Determine o valor máximo para a área do triângulo *MPQ.*

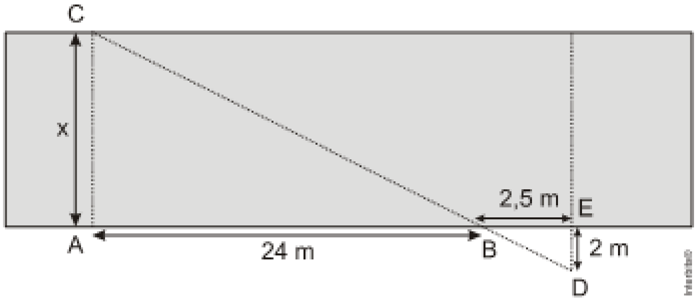
Exercício 91
(UFJF-PISM 1 2018) Um estudante da UFJF usou um site para obter rotas para ir de um ponto *X* até um ponto *Y.* O site forneceu um mapa das ruas como na figura abaixo.



Após analisar o mapa ele percebeu que cada uma das ruas *A, B, K* são lados de um retângulo e as ruas *J* e *H* formam outro lado desse mesmo retângulo. Enquanto cada uma das ruas *B, F* e *G* são lados de um paralelogramo e as ruas *C* e *D* formam outro lado desse mesmo paralelogramo. Além disso, o aluno identificou que a rua E intercepta as ruas *C* e *D* em *90°*, e que na escala usada pelo mapa a rua *G* mede *8* e as ruas *E* e *J* medem *3* cada.

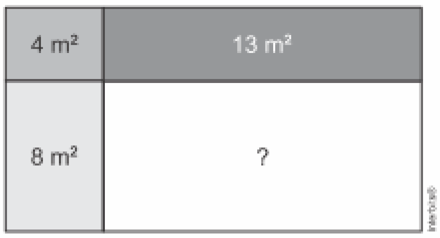
a) Determine o comprimento da rua *C* e da rua *K.*
b) Determine, justificando, o caminho mais curto (ou os caminhos mais curtos) para percorrer o trajeto do ponto *X* até o ponto *Y.*

Exercício 92
(FGV 2014)
a) Para medir a largura x de um rio sem necessidade de cruzá-lo, foram feitas várias medições como mostra a figura abaixo. Calcule a largura x do rio.

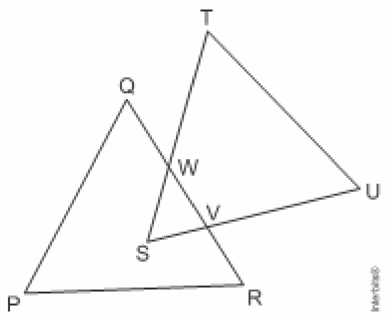


b) Demonstre que a distância do vértice B ao baricentro M de um triângulo é o dobro da distância do ponto E ao baricentro M.

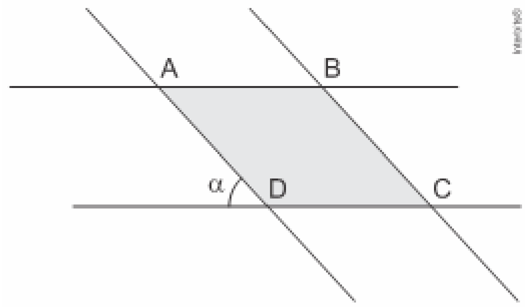
Exercício 93
(FGV 2017) a) Um terreno de forma retangular foi dividido em quatro lotes retangulares. As áreas de três lotes são $4\ m^2, 8\ m^2$ e $13\ m^2$. Qual é a área total do terreno?



b) Na figura ao lado, *PQR* e *STU* são triângulos equiláteros congruentes e *PQ=6 cm.* Qual é o perímetro do polígono *PQWTUVR* se o triângulo *SWV* tem perímetro *9 cm?*

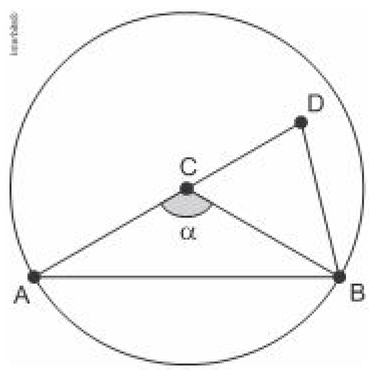


Exercício 94
(UNESP 2019) Na figura, as retas *AB* e *CD* são paralelas, assim como as retas *AD* e *BC*. A distância entre $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ é *3 cm*, mesma distância entre $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.



a) Calcule o perímetro do paralelogramo *ABCD*, formado pelas intersecções das retas, na situação em $\alpha = 60°$.
b) Considere que *S* seja a área do paralelogramo *ABCD* representado na figura. Determine *S* em função de α e determine a área mínima do paralelogramo *ABCD.*

Exercício 95
(Ufpr 2019) Considere o círculo de centro *C* e raio *4 cm* e o triângulo *ABD* representados na figura a seguir.



Sabendo que o ângulo α mede *120°* e que o segmento *AD* passa pelo centro do círculo e mede *7 cm*, calcule:

a) A área do setor circular delimitado pelos segmentos *CA* e *CB.*

b) O tamanho dos lados *AB* e *BD* do triângulo *ABD.*

Exercício 96
(Ita 2018) Uma reta *r* separa um plano π em dois semiplanos π_1 e π_2. Considere pontos *A* e *B* tais que $A \in \pi_1$ e $B \in \pi_2$ de modo que *d(A, r) = 3, d(B, r) = 6* e *d(A, B) = 15.* Uma circunferência contida em π passa pelos pontos *A* e *B* e encontra *r* nos pontos *M* e *N.* Determine a menor distância possível entre os pontos *M* e *N.*

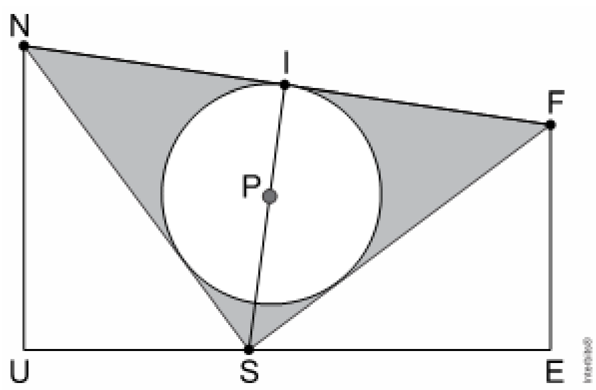
Exercício 97
(Ime 2019) Uma corda *CD* corta o diâmetro *AB* de um círculo de raio *R* no ponto *E.* Sabendo que o ângulo $A\hat{B}C$=*30°* e que

$\overline{EC} = R\sqrt{2}$ calcule a medida do segmento $\overline{ED}$

Exercício 98

(Unifesp 2019) A figura representa um trapézio retângulo *UNFE* de altura $\overline{UE}$ e uma circunferência de centro *P* inscrita no triângulo *SNF*, com *S* pertencente à $\overline{UE}$. Sabe-se que $\overline{SI}$ é perpendicular a $\overline{NF}$, que *I* é o ponto médio de $\overline{NF}$ e que

$\overline{UN} = 8\ cm$, $\overline{EF} = 6\ cm$ e $\overline{ES} = 8\ cm$.



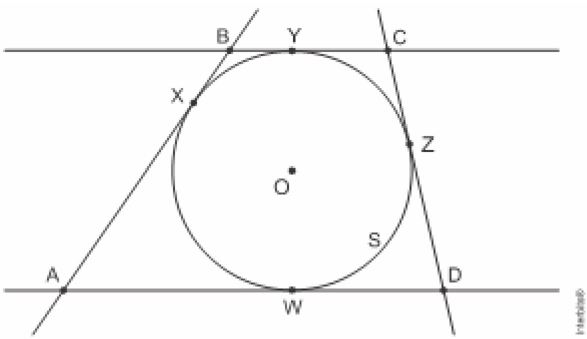
a) Calcule *NS* e a área do trapézio *UNFE.*

b) Calcule a área da região destacada em verde na figura.

Exercício 99

(Fuvest 2020) São dados:

- uma circunferência *S* de centro *O* e raio *5;*
- quatro pontos *X, Y, Z* e *W* em *S* de tal forma que as retas tangentes a *S* nesses pontos formam um trapézio *ABCD,* como na figura;
- $sen(B\hat{A}W) = \frac{3}{5}$ e *CD=15.*



Determine

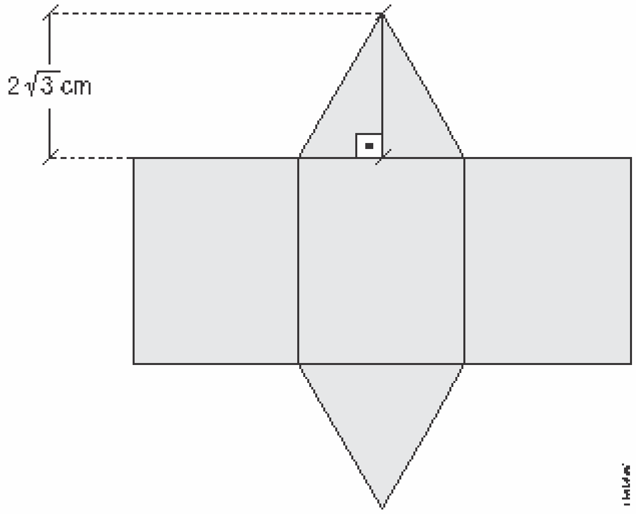
a) a medida de $\overline{AB}$;

b) a medida de $\overline{AW}$ e $\overline{AX}$;

c) a área da região delimitada pelo trapézio $ABCD$.

Exercício 100

(Ufsc 2020) Uma fábrica precisa embalar seus produtos para comercialização. Para tanto, deve construir caixas no formato de prisma regular reto, conforme a planificação apresentada a seguir.

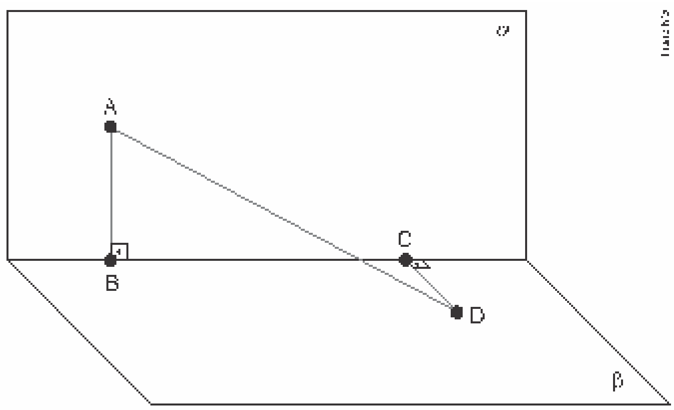


Seja a a medida da aresta da base do prisma. Se a altura do prisma é $a\sqrt{3}$ determine o volume desse prisma, em cm^3.

Exercício 101

(Uerj 2019) No esquema abaixo, estão representados os planos ortogonais α e β sendo A um ponto de α e D um ponto de β. Os pontos B e C pertencem à intersecção desses dois planos, sendo

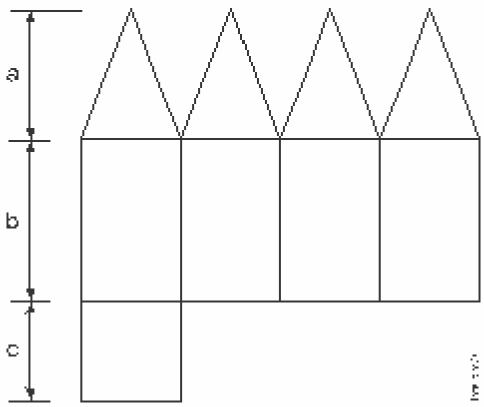
$\overline{BC} = 40cm$. Considere, ainda, $\overline{AB} = 30cm$ e $\overline{CD} = 20cm$ perpendiculares a β e α respectivamente.



Calcule, em centímetros, a distância $\overline{AD}$.

Exercício 102

(Unicamp 2020) A figura abaixo exibe a planificação de um poliedro convexo, com faces triangulares congruentes e faces retangulares, em que são indicados os comprimentos a, b e c.

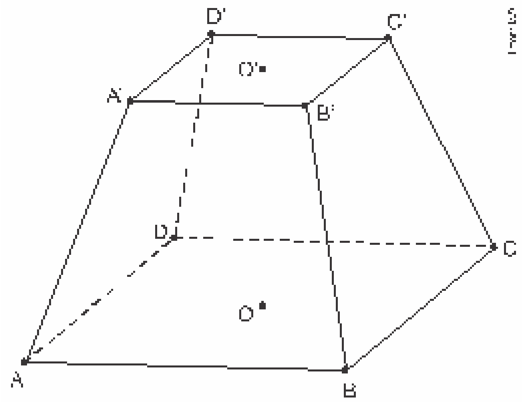


a) Determine o número de vértices e de arestas desse poliedro.

b) Para $a = 13cm$, $b = 16cm$ e $c = 10cm$ calcule o volume desse poliedro.

Exercício 103

(Fgvrj 2016) A figura abaixo mostra um tronco de pirâmide regular formado por dois quadrados ABCD e A'B'C'D' de centros O e O' contidos em planos paralelos e quatro trapézios congruentes. Os quadrados são as bases do tronco e a sua altura é a distância $\overline{OO'} = h$ entre os planos paralelos.



Se S e S' são as áreas das bases de um tronco de pirâmide de altura h o volume desse tronco é dado pela fórmula

$V = \frac{h}{3}(S + S' + \sqrt{SS'})$.

São dadas, em decímetros, as medidas das arestas:

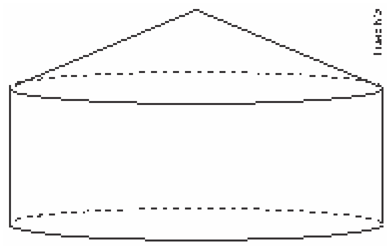
AB = 12, A'B' = 6, AA' = 9.

Calcule o volume desse poliedro em decímetros cúbicos e dê um valor aproximado usando algum dos dados abaixo.

Dados: $\sqrt{2} \cong 1,41$, $\sqrt{3} \cong 1,73$, $\sqrt{5} \cong 2,24$, $\sqrt{7} \cong 2,65$.

Exercício 104

(Ufpr 2018) Um dos maiores silos do mundo para armazenamento de grãos está localizado na cidade de Primavera do Leste, no Mato Grosso. Suponha que esse silo é constituído por um cilindro circular reto com 24m de raio e 22m de altura, no qual está acoplado um cone circular reto com altura de 8m conforme indicado na figura a seguir.



a) Calcule o perímetro, em metros, da base do cilindro. Use $\pi = 3,1$.

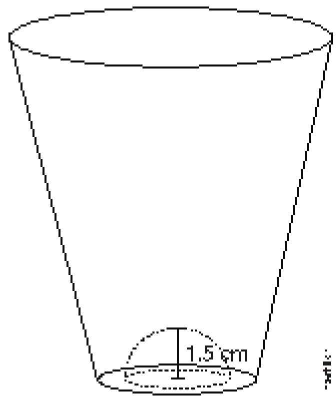
b) Calcule o volume, em metros cúbicos, desse silo. Use $\pi = 3,1$.

Exercício 105

(Ita 2018) Um poliedro convexo tem faces triangulares e quadrangulares. Sabe-se que o número de arestas, o número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão -5. Determine o número de vértices do poliedro.

Exercício 106

(Ufg 2013) Uma fábrica de embalagens resolveu produzir um copo no formato de tronco de cone circular reto, com diâmetros superior e inferior de 6 cm e 4 cm, respectivamente. A parte central do fundo do copo é côncava, em formato de semiesfera, com 1,5 cm de raio, como indica a figura a seguir.

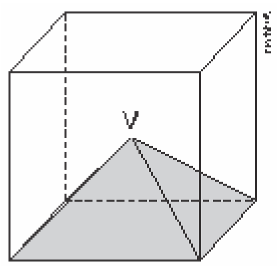


Considerando-se o exposto, desenvolva a expressão que fornece o volume do tronco de cone em função da altura e dos raios das bases e calcule a altura aproximada desse copo para que ele tenha capacidade de 157 mL.

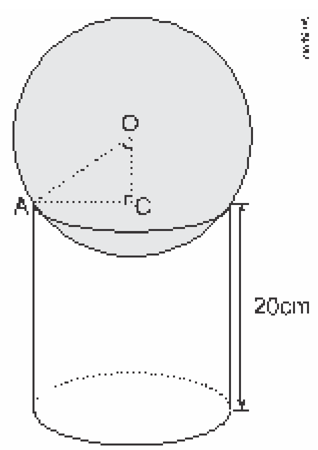
Dados: $\pi \approx 3,14$, $V_{cone} = \frac{\pi R^2 H}{3}$, $V_{esfera} = \frac{4\pi r^3}{3}$.

Exercício 107

(Fgv 2017) a) O volume do cubo da figura é 64 cm^3. O ponto V é o ponto de encontro das diagonais do cubo. Qual é o volume da pirâmide de vértice V?



b) Uma bola de vidro que é uma esfera de centro O se encaixou num copo exatamente como mostra a figura. O raio da bola mede 13 cm e OC = 5 cm. O segmento $\overline{AC}$ é o raio do cilindro. O que tem o maior volume: a bola ou o copo?

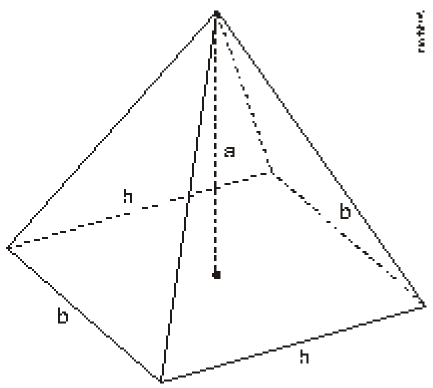


Exercício 108

(Ufg 2014) Deseja-se transportar 12 bolas de boliche esféricas de mesmo raio *R* em uma caixa em forma de paralelepípedo reto retângulo, de modo que as bolas fiquem tangentes entre si, e aquelas situadas na extremidade de uma mesma fileira tangenciem as faces da caixa. Além disso, nenhuma bola tangencia faces opostas da caixa. Lembre-se de que a caixa terá de ser tampada. Sabendo que o volume das bolas ocupa $\frac{\pi}{6}$ do volume da caixa, determine, em função de R, as dimensões da caixa.

Exercício 109

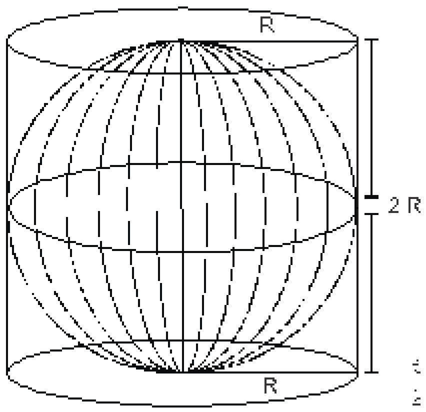
(Unicamp 2014 - Adaptada) Considere a pirâmide reta de base quadrada, ilustrada na figura abaixo, com lado da base b = 6 m e altura a.



Para a = 2 m, determine o raio da esfera circunscrita à pirâmide.

Exercício 110

(Ufrn 2013) Por motivo de segurança, construiu-se um superaquário de vidro, em formato esférico, dentro de um cilindro também de vidro, conforme esquematizado na figura a seguir. A esfera está completamente cheia de água e, caso quebre, toda a água passará para o cilindro.



Desconsidere a pequena diferença entre os raios da esfera e do cilindro e o volume de água deslocado pelos pedaços de vidro da esfera quando quebrada. Supondo que R é igual a 2 m, determine:

a) O volume de água da esfera.

b) A capacidade volumétrica do cilindro.

c) A altura do nível da água no cilindro, caso a esfera quebre.

Exercício 111

(Fgv 2017) a) Determinar a soma dos 20 primeiros termos da sequência (a_1, a_2, ..., a_n, ...) definida por: a_n = 2 + 4n se n é ímpar e a_n = 4 + 6n se n é par.

b) Considere a sequência (1, 10, 11, ..., 19, 100, 101, ..., 199, ...) formada por todos os números naturais que têm 1 como primeiro algarismo no sistema decimal de numeração, tomados em ordem crescente. Se a soma dos seus n primeiros termos é 347, qual é o valor de n e o valor numérico de a_n?

Exercício 112

(Fgvrj 2016) Uma vela, com *25 cm* de altura, é fabricada de tal modo que, ao ser acesa, ela derrete o primeiro centímetro em *30* segundos, o segundo centímetro em *60* segundos, o terceiro centímetro em *90* segundos, e assim sucessivamente, gastando sempre *30* segundos a mais para derreter o próximo centímetro do que gastou para derreter o centímetro anterior.

Calcule o tempo total, em horas, minutos e segundos, necessário para que a vela derreta toda após ser acesa.

Exercício 113

(Ime 2016) Os inteiros $a_1, \ a_2, \ a_3, \ \dots, \ a_{25}$ estão em PA com razão não nula. Os termos $a_1, \ a_2 \ e \ a_{10}$ estão em PG, assim como $a_6, \ a_j \ e \ a_{25}$. . Determine *j.*

Exercício 114

(Ime 2020) Sejam *a* e *b* raízes da equação $x^2 - 4x + M = 0$, *c* e *d* raízes da equação $x^2 - 36x + N = 0$. Sabendo-se que *a, b, c* e *d* formam uma progressão geométrica crescente, determine o valor de *M + N.*

Exercício 115

(Unicamp 2018) Considere a sequência de números reais (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) tal que (a_1, a_2, a_3) é uma progressão geométrica e (a_3, a_4, a_5) é uma progressão aritmética, ambas com a mesma razão *w.*

a) Determine a sequência no caso em que $a_3 = 3$ e $w = 2$.

b) Determine todas as sequências tais que $a_1 = 1$ e $a_5 = 8$.

Exercício 116

(Unesp 2019) Bianca está preparando saquinhos com balas e pirulitos para os convidados da festa de aniversário de sua filha. Cada saquinho irá conter 5 balas e 3 pirulitos, ou 3 balas e 4 pirulitos, já que ambas as combinações resultam no mesmo preço. Para fazer os saquinhos, ela dispõe de 7 sabores diferentes de balas (limão, menta, morango, framboesa, caramelo, canela e tutti-frutti) e 5 sabores diferentes de pirulito (chocolate, morango, uva, cereja e framboesa). Cada bala custou 25 centavos e cada pirulito custou x centavos, independentemente dos sabores.

a) Quantos tipos diferentes de saquinhos Bianca pode fazer se ela não quer que haja balas de um mesmo sabor nem pirulitos de um mesmo sabor em cada saquinho? Qual o preço de cada pirulito?

b) Quantos tipos diferentes de saquinhos Bianca pode fazer se ela não quer que haja sabores repetidos em cada saquinho?

Exercício 117

(Unicamp 2019) A figura abaixo representa um dado na forma de um tetraedro regular com os vértices numerados de 1 a 4. Em um lançamento desse dado, deve ser observado o número estampado no vértice superior.

Considere a soma dos números obtidos em dois lançamentos de um dado tetraédrico. Determine de quantas maneiras essa soma pode resultar em um número primo.

Exercício 118

(Ufes 2010) Três casais devem sentar-se em 8 poltronas de uma fileira de um cinema. Calcule de quantas maneiras eles podem sentar-se nas poltronas:

a) de modo arbitrário, sem restrições;

b) de modo que cada casal fique junto;

c) de modo que todos os homens fiquem à esquerda ou todos os homens fiquem à direita de todas as mulheres.

Exercício 119

(Ufjf-pism 3 2017) Considere no plano cartesiano o seguinte conjunto de 13 pontos:

$A = (-3, 0), (-2, 0), (-1, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (0, -3), (0, -2), (0, -1), (0, 1), (0, 2), (0, 3)$

a) Quantos são os triângulos cujos vértices pertencem ao conjunto A?

b) Quantos são os triângulos com vértices em A e dois de seus vértices sobre o eixo das ordenadas?

Exercício 120

(Fuvest 2011)

a) Quantos são os números inteiros positivos de quatro algarismos, escolhidos sem repetição, entre 1, 3, 5, 6, 8, 9?

b) Dentre os números inteiros positivos de quatro algarismos citados no item a), quantos são divisíveis por 5?

c) Dentre os números inteiros positivos de quatro algarismos citados no item a), quantos são divisíveis por 4?

Exercício 121

(Ufpe 2011) No desenvolvimento binomial de $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^{10}$ quantas parcelas são números inteiros?

Exercício 122

(Ufc 2010) Poupêncio investiu R$ 1.000,00 numa aplicação bancária que rendeu juros compostos de 1% ao mês, por cem meses seguidos. Decorrido esse prazo, ele resgatou integralmente a aplicação. O montante resgatado é suficiente para que Poupêncio compre um computador de R$ 2.490,00 à vista? Explique sua resposta.

Exercício 123

(Ufsc 2018 - Adaptada) É correto afirmar que:

04) O termo independente de x no desenvolvimento de $\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^8$ é 70.

Exercício 124

(Uem 2015 - Adaptada) Numa brincadeira de roda, n crianças são colocadas igualmente espaçadas em torno de um círculo. Assinale o que for **correto**.

Se apenas quatro crianças, Arnaldo, Bernardo, Carlos e Diego, participam da brincadeira, a chance de Arnaldo estar entre Carlos e Diego é de *50%.*

Exercício 125

(FUVEST-SP) Lembrando que $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,.\,(n-p)!}$:

a) Calcule $\binom{6}{4}$.

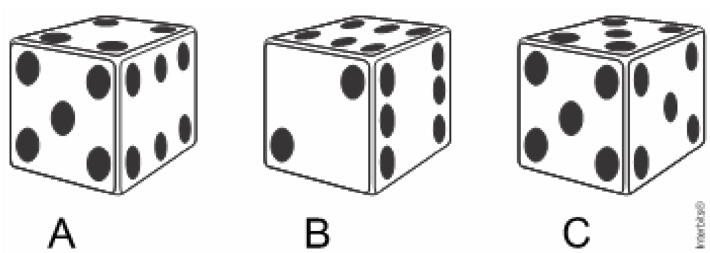
b) Simplifique a fração $\frac{\binom{12}{4}}{\binom{12}{5}}$

c) Determine os inteiros *n* e *p* de modo que:

$$\frac{\binom{n}{p}}{1} = \frac{\binom{n}{p+1}}{2} = \frac{\binom{n}{p+2}}{3}$$

Exercício 126

(Unifesp 2019) A imagem ilustra três dados, A, B e C. O dado A é convencional, o dado B tem duas faces numeradas com 2 e quatro faces numeradas com 6 e o dado C possui as seis faces numeradas com 5. As faces de cada dado são equiprováveis.

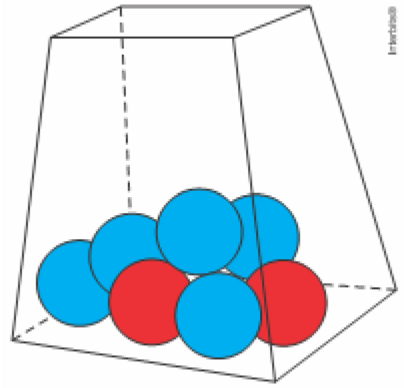


a) Calcule a probabilidade de que a soma dos números obtidos em um lançamento dos três dados seja múltiplo de 3.

b) Considere que dois dos três dados sejam sorteados ao acaso e que, em seguida, os dados sorteados sejam lançados ao acaso. Qual a probabilidade de que a soma dos números obtidos no lançamento seja um múltiplo de três?

Exercício 127

(Uerj 2019) Em uma urna há sete bolinhas, sendo duas delas vermelhas e cinco azuis. Quatro do total de bolinhas serão sorteadas ao acaso.



Calcule a probabilidade de pelo menos uma das bolinhas sorteadas ser vermelha.

Exercício 128

(Fuvest 2018) Em uma competição de vôlei, estão inscritos 5 times. Pelo regulamento, todos os times devem se enfrentar apenas uma vez e, ao final da competição, eles serão classificados pelo número de vitórias. Dois ou mais times com o mesmo número de vitórias terão a mesma classificação. Em cada jogo, os times têm probabilidade $\frac{1}{2}$ de vencer.

a) Explique por que 2 times não podem empatar na classificação com 4 vitórias cada um.
b) Qual é a probabilidade de que o primeiro classificado termine a competição com 4 vitórias?
c) Qual é a probabilidade de que os 5 times terminem empatados na classificação?

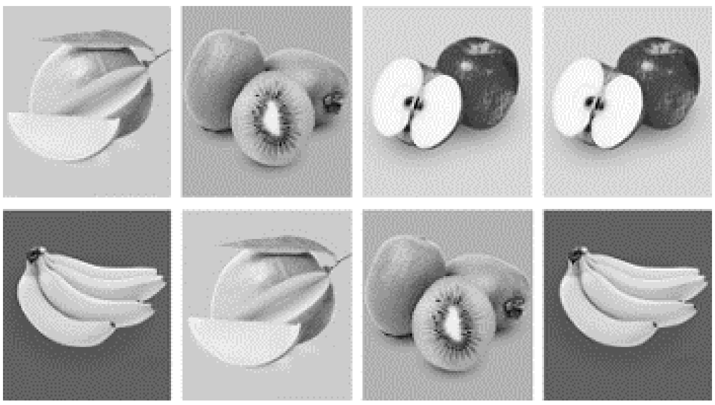
Exercício 129

(Fuvest 2018) Em um torneio de xadrez, há 2n participantes.
a) Na primeira rodada, há n jogos. Calcule, em função de n o número de possibilidades para se fazer o emparceiramento da primeira rodada, sem levar em conta a cor das peças.

b) Suponha que 12 jogadores participem do torneio, dos quais 6 sejam homens e 6 sejam mulheres. Qual é a probabilidade de que, na primeira rodada, só haja confrontos entre jogadores do mesmo sexo?

Exercício 130

(Uerj 2018) Um jogo individual da memória contém oito cartas, sendo duas a duas iguais, conforme ilustrado a seguir.



Observe as etapas do jogo:

1. viram-se as figuras para baixo;
2. embaralham-se as cartas;
3. o jogador desvira duas cartas na primeira jogada.

O jogo continua se ele acertar um par de figuras iguais. Nesse caso, o jogador desvira mais duas cartas, e assim sucessivamente. Ele será vencedor se conseguir desvirar os quatro pares de cartas iguais em quatro jogadas seguidas. Se errar algum par, ele perde o jogo.

Calcule a probabilidade de o jogador perder nesse jogo.

Exercício 131

(Unifesp 2020) A tabela indica o quadro de medalhas dos seis países primeiros colocados nos jogos Pan-Americanos realizados na cidade de Lima, que terminaram em agosto de 2019. Essa edição marcou a conquista do maior número de medalhas pelo Brasil, desde sua primeira participação nos jogos.

Posição	País	Ouro	Prata	Bronze	Total
1	Estados Unidos	120	88	85	293
2	Brasil	55	45	71	171
3	México	37	36	63	136
4	Canadá	35	64	53	152
5	Cuba	33	27	38	98
6	Argentina	32	35	34	101

(www.uol.com.br. Adaptado.)

a) Admita um novo critério para a classificação dos países no quadro de medalhas, em que a medalha de bronze vale 1 ponto, a de prata vale 2 pontos e a de ouro vale 3 pontos, ordenando-se os países pelo total de pontos obtidos com suas medalhas. Por esse novo critério, Argentina, Brasil, Cuba e EUA passam a totalizar 200, 326, 191 e 621 pontos, respectivamente. Calcule a pontuação do México e do Canadá pelo novo critério, e compare a classificação desses seis países no critério atual com o novo critério.

b) Sabe-se que os jogos Pan-Americanos acontecem de quatro em quatro anos e que na edição do Rio de Janeiro, em 2007, o Brasil conquistou 157 medalhas. Considerando-se o total de medalhas conquistadas pelo Brasil nas últimas cinco edições desses jogos que aconteceram no século XXI, a mediana e a moda são, ambas, iguais a 141 e a média é igual a 146,6. Determine a sequência crescente do total de medalhas conquistadas pelo Brasil nessas cinco edições dos jogos e calcule o desvio padrão entre o maior (em Lima) e o menor (em Santo Domingo) número de medalhas conquistadas.

Exercício 132

(Ufpr 2018) Leonardo fez uma pesquisa sobre o preço da jarra de suco de laranja em algumas lanchonetes da região e obteve os seguintes valores:

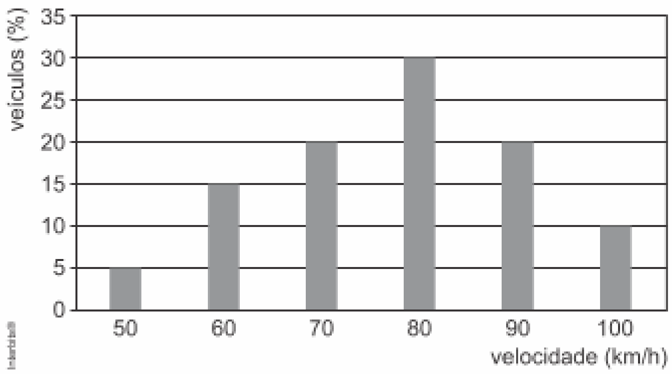
Lanchonete	Preço
A	R$ 10,75
B	R$ 6,00
C	R$ 9,50
D	R$ 11,00
E	R$ 5,25
F	R$ 7,00
G	R$ 10,50
H	R$ 8,00

a) Calcule a média e a mediana dos preços apresentados na tabela.

b) Leonardo decidiu acrescentar duas lanchonetes em sua pesquisa. Ao considerar todos os estabelecimentos, a média de preços passou a ser de R$ 8,45. Sabendo que essas duas novas lanchonetes cobram o mesmo preço pela jarra de suco, calcule esse valor.

Exercício 133

(Uerj 2016) Técnicos do órgão de trânsito recomendaram velocidade máxima de 80 km/h no trecho de uma rodovia onde ocorrem muitos acidentes. Para saber se os motoristas estavam cumprindo as recomendações, foi instalado um radar móvel no local. O aparelho registrou os seguintes resultados percentuais relativos às velocidades dos veículos ao longo de trinta dias, conforme o gráfico abaixo:



Determine a média de velocidade, em km/h, dos veículos que trafegaram no local nesse período.

Exercício 134

(Fgv 2016) A lei de Benford, também chamada de "lei do primeiro dígito", sugere que, em vários conjuntos de dados numéricos, a ocorrência dos algarismos de 1 a 9 no início dos números (da esquerda para a direita em cada número) do conjunto de dados não é igualmente provável. A lei se verifica em diversos conjuntos de dados reais como, por exemplo, o conjunto das populações dos diversos municípios de um país, o conjunto dos dados numéricos contidos nas contas de energia elétrica da população de um município, o conjunto dos comprimentos dos rios de um país etc.

Quando a lei de Benford se aplica aos dados analisados, a probabilidade P(n) de que o algarismo n seja o primeiro algarismo em um dado numérico qualquer do conjunto de dados será $P(n) = log(\frac{n+1}{n})$.

Por exemplo, se a lei se aplica, a probabilidade de que o algarismo 1 (n=1) seja o primeiro (da esquerda para a direita) em um número sorteado ao acaso do conjunto de dados é igual a log2, ou seja, aproximadamente 30% já que $log2 \cong 0,30$.

Admita que os dados numéricos indicados na tabela 1 tenham sido retirados da declaração de imposto de renda de um contribuinte. Também admita que a Receita Federal tenha a expectativa de que tais dados obedeçam, ainda que aproximadamente, à lei de Benford.

Tabela 1

1.526	2.341	5.122	242	1.444	788	4.029	333	426	1.9
2.589	503	1.276	5.477	229	579	1.987	719	1.236	2.8
456	886	1.424	470	113	342	345	433	192	3

a) Complete a tabela na página de resolução e resposta, registrando a frequência do primeiro dígito (da esquerda para a direita) dos dados da tabela 1 para os casos em que n=2 e n=3. Registre também a frequência relativa desses algarismos (ver exemplo para o caso em que n=1).

n	1	2	3	4
Frequência de n	9			
Frequência relativa de n	$\frac{9}{30} = \frac{3}{10}$			

b) Admita que uma declaração de imposto de renda vai para a "malha fina" (análise mais detalhada da Receita Federal) se a diferença, em módulo, entre a frequência relativa do primeiro dígito, em porcentagem, e a probabilidade dada pelo modelo da lei de Benford, também em porcentagem, seja maior do que quatro pontos percentuais para algum n. Argumente, com dados numéricos, se a declaração analisada na tabela 1 deverá ou não ir para a "malha fina".

Adote nos cálculos log2=0,30 e log3=0,48.

Exercício 135

(Fgv 2016) A tabela mostra a série de um indicador econômico de um país, em bilhões de US$ nos 12 meses de 2013.

Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
21	24	20	23	22	22	18	17	16	17	16	18

a) Calcule a média, a(s) moda(s), a mediana e a maior taxa mensal de crescimento (em porcentagem) dessa série.

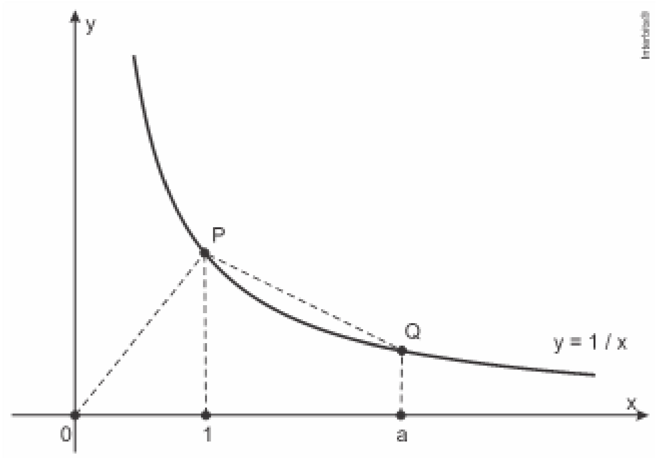
b) Sabe-se que, em janeiro de 2014, esse indicador econômico atingiu um valor positivo para o qual a nova série (de janeiro de 2013 até janeiro de 2014) passou a ter mediana de 18 bilhões de US$ e um número inteiro de bilhões de US$ como média mensal. Calcule o desvio médio (DM) dessa nova série.

Dado:

Desvio Médio = $\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$, sendo $\bar{x}$ a média aritmética.

Exercício 136

(Unicamp 2016) A figura abaixo exibe o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$ definida para todo número real x > 0. Os pontos P e Q têm abscissas x = 1 e x = a, respectivamente, onde *a* é um número real e a > 1.



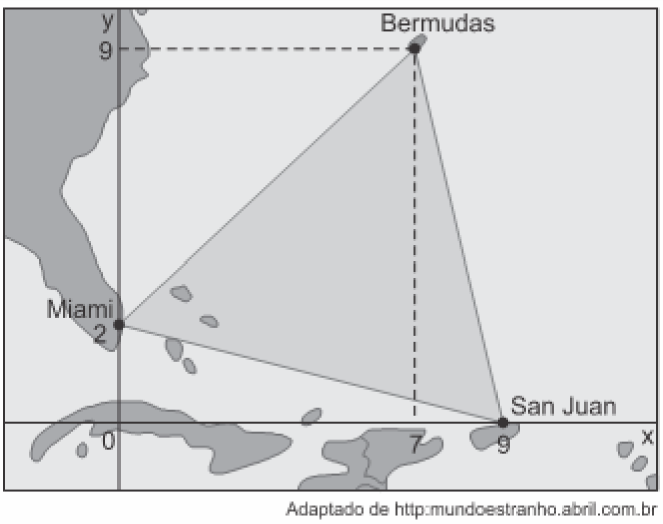
a) Considere o quadrilátero T com vértices em (0, 0), P, Q, e (a, 0). Para a = 2, verifique que a área de T é igual ao quadrado da distância de P a Q.

b) Seja *r* a reta que passa pela origem *e* é ortogonal à reta que passa por P e Q. Determine o valor de *a* para o qual o ponto de intersecção da reta *r* com o gráfico da função *f* tem ordenada $y = \frac{a}{2}$.

Exercício 137

(Uerj 2016) Na região conhecida como Triângulo das Bermudas, localizada no oceano Atlântico, é possível formar um triângulo com um vértice sobre a cidade porto-riquenha de San Juan, outro sobre a cidade estadunidense de Miami e o terceiro sobre as ilhas Bermudas.

A figura abaixo mostra um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, com os vértices do triângulo devidamente representados. A escala utilizada 1 : 17.000.000 é e cada unidade nos eixos cartesianos equivale ao comprimento de 1 cm.

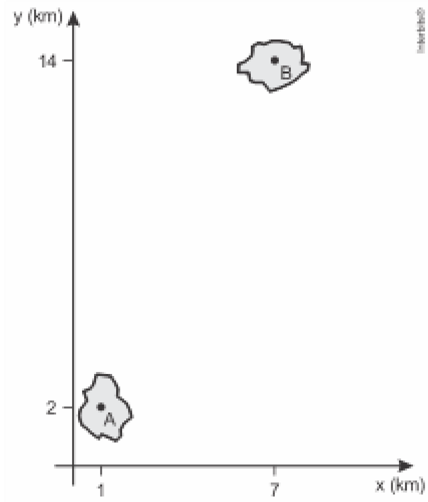


Adaptado de http:mundoestranho.abril.com.br

Calcule, em Km^2, a área do Triângulo das Bermudas, conforme a representação plana da figura.

Exercício 138

(Uerj 2015) Uma ferrovia foi planejada para conter um trecho retilíneo cujos pontos são equidistantes dos centros A e B de dois municípios. Em seu projeto de construção, utilizou-se o plano cartesiano, com coordenadas em quilômetros, em que A = (1, 2) e B = (7, 14). Observe o gráfico:



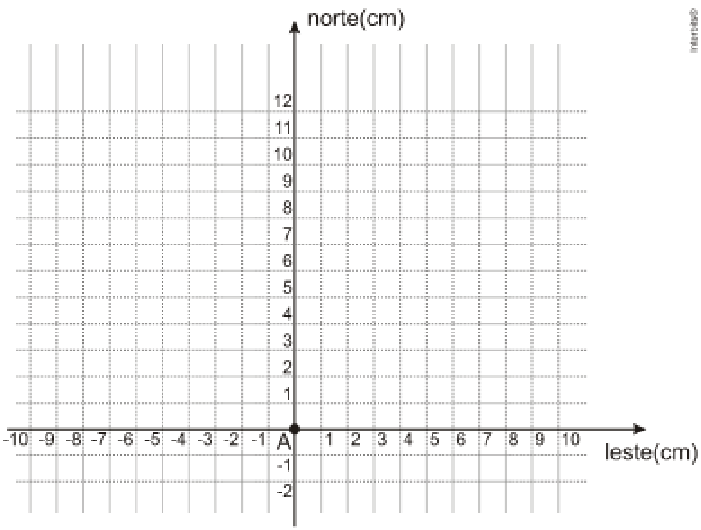
Determine, utilizando esse sistema referencial, a equação da reta suporte desse trecho retilíneo da ferrovia.

Exercício 139

(Ufg 2014) Um caçador de tesouros encontrou um mapa que indicava a localização exata de um tesouro com as seguintes instruções:

"Partindo da pedra grande e seguindo 750 passos na direção norte, 500 passos na direção leste e 625 passos na direção nordeste, um tesouro será encontrado."

Para localizar o tesouro, ele utilizou um plano cartesiano, representado pela figura a seguir. Neste plano a escala utilizada foi de 1 : 100, as medidas são dadas em centímetros e o ponto A representa a pedra grande indicada nas instruções.



Considerando que um passo mede 80 cm encontre as coordenadas, no plano cartesiano, do ponto onde se encontra o tesouro e calcule a distância percorrida, em metros, pelo caçador de tesouros para encontrá-lo.

Exercício 140

(Unesp 2014) Chegou às mãos do Capitão Jack Sparrow, do Pérola Negra, o mapa da localização de um grande tesouro enterrado em uma ilha do Caribe.

Ao aportar na ilha, Jack, examinando o mapa, descobriu que P1 e P2 se referem a duas pedras distantes 10 m em linha reta uma da outra, que o ponto A se refere a uma árvore já não mais existente no local e que:

(a) ele deve determinar um ponto M1 girando o segmento P1A em um ângulo de 90° no sentido anti-horário, a partir de P1;
(b) ele deve determinar um ponto M2 girando o segmento P2A em um ângulo de 90° no sentido horário, a partir de P2;
(c) o tesouro está enterrado no ponto médio do segmento M1M2.

Jack, como excelente navegador, conhecia alguns conceitos matemáticos. Pensou por alguns instantes e introduziu um sistema de coordenadas retangulares com origem em P1 e com o eixo das abscissas passando por P2. Fez algumas marcações e encontrou o tesouro.

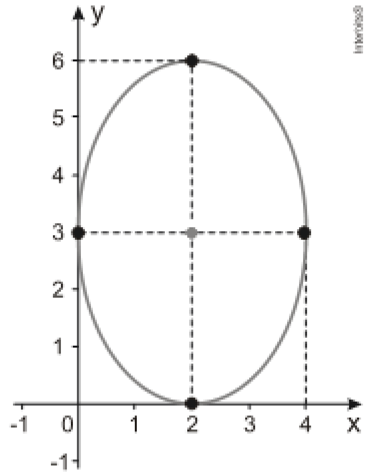
A partir do plano cartesiano definido por Jack Sparrow, determine as coordenadas do ponto de localização do tesouro e marque no sistema de eixos inserido no campo de Resolução e Resposta o ponto P2 e o ponto do local do tesouro.

Exercício 141

(Ita 2019) Seja F o foco da parábola de equação $(y-5)^2 = 4(x-7)$ e sejam A e B os focos da elipse de equação $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{8} = 1$. Determine o lugar geométrico formado pelos pontos P do plano tais que a área do triângulo ABP seja numericamente igual ao dobro da distância de P a F.

Exercício 142

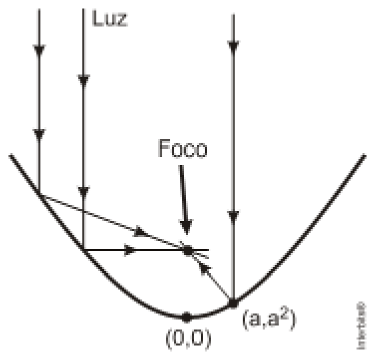
(Unesp 2014) A figura mostra um plano cartesiano no qual foi traçada uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados.



Valendo-se das informações contidas nesta representação, determine a equação reduzida da elipse.

Exercício 143

(Ufpr 2011) Alguns telescópios usam espelhos parabólicos, pois essa forma geométrica reflete a luz que entra para um único ponto, chamado foco. O gráfico de y = x^2, por exemplo, tem a forma de uma parábola. A luz que vem verticalmente, de cima para baixo (paralelamente ao eixo y), encontra a parábola e é refletida segundo a lei de que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Essa lei implica que os raios de luz verticais, encontrando a parábola no ponto (a,a^2), serão refletidos na direção da reta $4ay + (1-4a^2)x = a$.



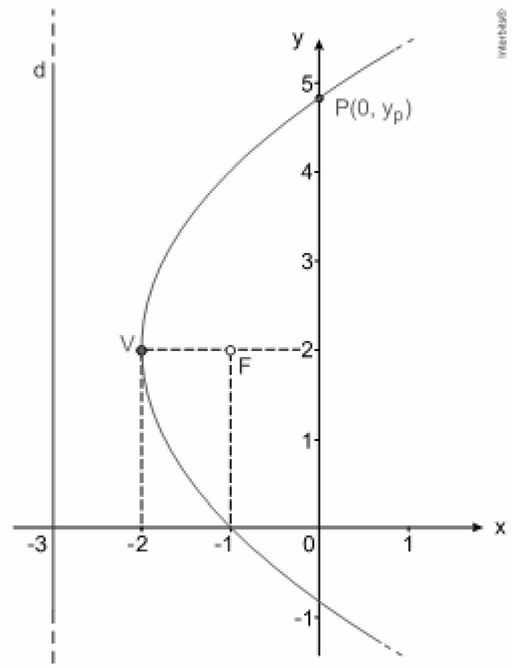
Sendo assim, calcule o ponto em que os raios de luz verticais refletidos em (1,1) e (2,4) se encontrarão.

Exercício 144

(Ufrj 2004) Determine o comprimento do segmento cujas extremidades são os pontos de interseção da reta y = x + 1 com a parábola y = x^2.

Exercício 145

(Unesp 2016) Em um plano cartesiano ortogonal são dadas uma reta d de equação x = -3 e um ponto F de coordenadas (-1, 2). Nesse plano, o conjunto dos pontos que estão à mesma distância do ponto F e da reta d forma uma parábola. Na figura, estão nomeados dois pontos dessa parábola: o vértice V de coordenadas (-2, 2) e o ponto P de coordenadas (0, y_p).

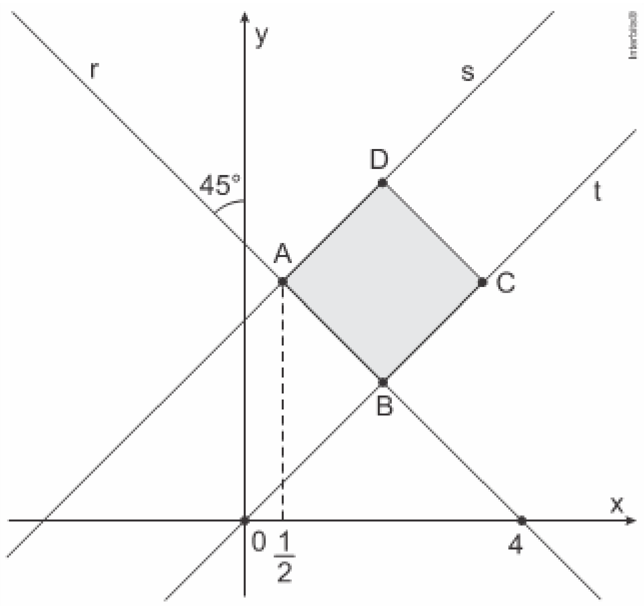


Determine as coordenadas de dois pontos quaisquer dessa parábola que sejam diferentes de V e de P. Em seguida, calcule y_p.

Exercício 146
(Unicamp 2019) No plano cartesiano, considere a reta r de equação 2x + y = 1 e os pontos de coordenadas A = (1, 4) e B = (3, 2).

a) Encontre as coordenadas do ponto de intersecção entre a reta r e a reta que passa pelos pontos A e B.
b) Determine a equação da circunferência na qual um dos diâmetros é o segmento $\overline{AB}$

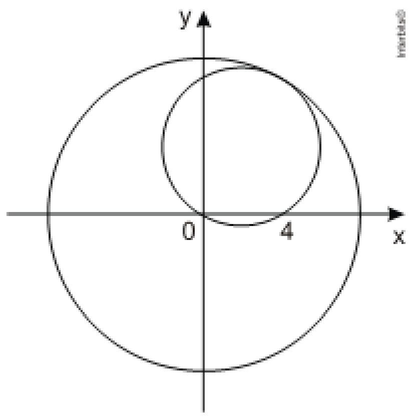
Exercício 147
(Ufjf-pism 3 2019) O quadrado localizado no 1º quadrante, tem o lado $\overline{AB}$ sobre a reta r, $\overline{AD}$ sobre a reta s e $\overline{BC}$ sobre a reta t, conforme ilustrado na figura abaixo:



Determine as coordenadas do vértice D desse quadrado.

Exercício 148
(Ita 2018) No plano cartesiano são dadas as circunferências $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ e $C_2 : (x - 4)^2 + y^2 = 4$.Determine o centro e o raio de uma circunferência C tangente simultaneamente a C_1 e C_2, passando pelo ponto $A(3, \sqrt{3})$.

Exercício 149
(Ufpe 2013) Uma circunferência tem centro no primeiro quadrante, passa pelos pontos com coordenadas (0, 0) e (4, 0) e é tangente, internamente, à circunferência com equação $x^2 + y^2 = 64$. Abaixo, estão ilustradas as duas circunferências.



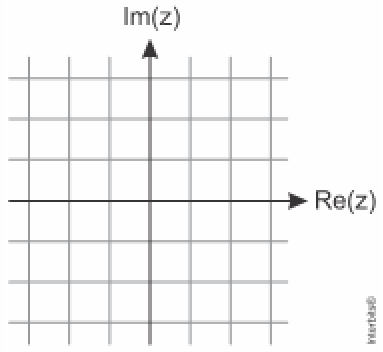
Indique o inteiro mais próximo da soma das coordenadas do ponto de interseção das duas circunferências.

Exercício 150
(Ufjf 2012) No plano cartesiano, considere os pontos A(-1, 2) e B(3, 4).

a) Encontre a equação da reta **r** que passa por **A** e forma com o eixo das abscissas um ângulo de 135º, medido do eixo para a reta no sentido anti-horário.
b) Seja **s** a reta que passa por **B** e é perpendicular à reta **r**. Encontre as coordenadas do ponto **P** , determinado pela intersecção das retas **r** e **s**.
c) Determine a equação da circunferência que possui centro no ponto Q(2,1) e tangencia as retas **r** e **s**.

Exercício 151
(Fuvest 2020) Resolva os três itens abaixo:

a) Considere o conjunto formado pelos números complexos z que cumprem a condição $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$. Cada elemento desse conjunto será objeto da transformação que leva um número complexo em seu conjugado. Represente no plano complexo (ou plano de Argand-Gauss) abaixo, o conjunto resultante após essa transformação.



b) Determine o lugar geométrico dos pontos z do plano complexo tais que $z \neq -1$ e para os quais $\frac{z-1}{z+1}$ é um número imaginário puro.

c) Determine as partes reais de todos os números complexos z tais que as representações de z, i e 1 no plano complexo sejam vértices de um triângulo equilátero.

Exercício 152
(Ime 2019) Seja Z um número complexo tal que possui argumento igual a $\frac{3\pi}{4}$; e $\log_3(2Z + 2\bar{Z} + 1) = 2$.Determine o número complexo Z.

Exercício 153
(Ufpr 2019) Considere o número complexo $z = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$.

a) Calcule o módulo de z e escreva a forma polar de z.

b) Calcule o valor da expressão $z^{27} + z^{24} + 1$.
(Sugestão: use a fórmula de *De Moivre*)

Exercício 154
(Fuvest 2015) Resolva os três itens abaixo.
a) Calcule $cos\frac{3\pi}{8}$ e $sen\frac{3\pi}{8}$

b) Dado o número complexo $z = \sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$, encontre o menor inteiro $n > 0$ para o qual z^n seja real.

c) Encontre um polinômio de coeficientes inteiros que possua z como raiz e que não possua raiz real.

Exercício 155
(Ufpr 2014) Considere o número complexo

$z_0 = 4i + \frac{13}{2+3i}$.

a) Determine a parte real e a parte imaginária de z_0.

b) Determine a e b, de modo que z_0. seja solução da equação $z^2 + az + b = 0$.

Exercício 156
(Uel 2018) Considere a equação polinomial a seguir.
$2x^3 - 15x^2 + 34x - 24 = 0$
Sabe-se que cada uma das raízes dessa equação corresponde a uma das medidas, em, cm do comprimento, da largura e da altura de um paralelepípedo retângulo. Com base nessa informação, determine a área total e o volume desse paralelepípedo.
Justifique sua resposta, apresentando os cálculos realizados na resolução desta questão.

Exercício 157
(Unicamp 2014) O polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ tem três raízes: r, –r e s.

a) Determine os valores de r e s.
b) Calcule p(z) para z = 1+i, onde i é a unidade imaginária.

Exercício 158
(Ufjf-pism 3 2017) O resto da divisão de um polinômio p(x) por um polinômio q(x) é o polinômio
$r(x) = x^5 - 7x^4 - 8x^3 + 56x^2 + 15x - 105$.
Sabendo que 7 é raiz de p(x) e de q(x), determine todas as raízes de r(x)

Exercício 159
(Ufjf-pism 3 2019) Observe as divisões entre polinômios apresentadas a seguir:

$$\begin{array}{l|l} p(x) & 4x-3 \\ \hline 2 & q_1(x) \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} (x^3-2) \times p(x) & 4x-3 \\ \hline r & q_2(x) \end{array}$$

Calcule o resto r da segunda divisão.

Exercício 160
(Ufu 2017) Considere os polinômios $p(x) = x^3 + 2a + b$ e $h(x) = x^4 + a - 2b$, em que a e b são constantes reais e x é uma variável real. Determine os valores de a e b para os quais esses polinômios sejam divisíveis por $x - 4$.

Exercício 161
(Ufjf-pism 3 2016) Sabendo que o polinômio $p(x) = ax^3 + bx + 2$ é divisível por $(x+1)^2$, determine a e b.

GABARITO

Exercício 1

01) O ângulo no primeiro relógio é menor que 120°.
08) O módulo da diferença entre os ângulos dos dois relógios é 30°.

Exercício 2

$d)\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$

Exercício 3

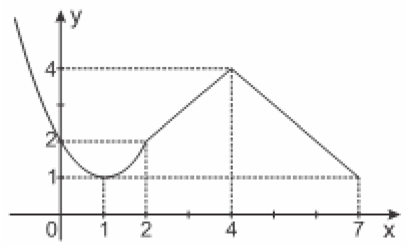
04) $P(x)$ é um polinômio do quinto grau.
08) $P(0) = 0$.

Exercício 4

01) Uma das raízes desse polinômio é 1/2.
02) Ele é divisível pelo polinômio $x^2 - x - 2$.
08) Todas as raízes desse polinômio são reais.

Exercício 5

c)



Exercício 6

02) A soma dos preços de cada pastel e cada milho verde é o dobro do preço de cada cachorro quente.
04) O preço de cada milho verde é um número primo.
08) O preço de cada cachorro quente é R$ 4,00.

Exercício 7

01) $A.B = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$
02) $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
04) A matriz B^2 não existe.
08) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
16) det(2A) = 4.

Exercício 8

a) apenas I e II

Exercício 9

$d)6 \le k < 8$

Exercício 10

01) Se $sen(\frac{x}{2}) = \frac{1}{3}$, então o valor de $(sen\ \ x + \ \ cos\ \ x)$, com x no primeiro quadrante, é $\frac{7+4\sqrt{2}}{9}$.

Exercício 11

01) O quociente da divisão de $p(x) = x^3 + x^2 - 3x - 27$ por $q(x) = x - 3$ é um polinômio de grau 2.
08) Ao multiplicarmos o polinômio $p(x) = x^3 + x - 1$ por $q(x) = -x^3 - x + 1$, obtemos um polinômio de grau 6.
16) O resto da divisão $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$ por $q(x) = x - 2$ é 15.

Exercício 12

01) A matriz *A* é uma matriz invertível.
02) A primeira e a última linhas de $A \cdot B$ são iguais.

Exercício 13

d) Se r é a reta suporte de uma diagonal da base maior e s é a reta suporte de um lado da base menor, então r e s são retas reversas.

Exercício 14

01) A soma das soluções da equação é – 1.
02) As soluções da equação pertencem ao intervalo [–3, 3].
16) Uma das soluções da equação é negativa.

Exercício 15

02) Para um lucro semanal de *R$ 161,00,* a quantidade semanal vendida deve ser de no mínimo *8.*
04) O lucro semanal é nulo quando a quantidade semanal vendida for *1* ou *31.*
08) O lucro máximo semanal é de *R$ 225,00.*

Exercício 16

04) Se S for um sistema possível e determinado, então as retas r e s, que representam as equações I e II, respectivamente, interceptam-se num único ponto.
08) Se o sistema S for equivalente ao sistema

$A = \begin{cases} x + y = 2 \\ y = -2 \end{cases},$

então S tem solução única dada pelo par ordenado (4, -2).
16) Se a=d e b=e, então o determinante da matriz dos coeficientes do sistema S é nulo.

Exercício 17

01) Se a=b=c=0, isto é, se o sistema for homogêneo, então ele será possível e indeterminado.
02) Se a e b forem nulos e distintos de c, então o sistema será impossível.

Exercício 18

d) F – V – V – V – V

Exercício 19

01) $log_a \sqrt[3]{a \cdot b^3} = \frac{11}{12}$.
02) Se $a = 16$, então $b = 64$.
04) $log_{\sqrt{a}}(b \cdot n^3) = \frac{15}{4}$.
08) Se $n = \frac{1}{2}$, então $a \cdot b = 2^{-20}$.
16) $log_n(a \cdot b) = 20$.

Exercício 20

01) A matriz $A=[a_{ij}]_{n\times n}$, com $a_{ij}=0$ se $i<j$, é uma matriz triangular inferior.
16) Se *A* é uma matriz *m×n*, então a multiplicação da matriz *A* por sua transposta A^t será uma matriz *m×m*.

Exercício 21

01) $A^2=\begin{pmatrix} cos\ \ 30° & -sen\ \ 30° \\ sen\ \ 30° & cos\ \ 30° \end{pmatrix}$
02) $det\ \ A=1.$

Exercício 22

08) $det(A\cdot B)=-\frac{5}{2}$
16) $det(A+B)=-\frac{3}{2}$

Exercício 23

01) Se $x=\frac{5\pi}{3}$, então $A\cdot B>0$
02) Se $x=\frac{\pi}{6}$, então $B^2=4.$
04) $A\cdot B=cosx$

Exercício 24

b) x

Exercício 25

01) Se $\alpha\cap\beta=s$, $r\parallel s$, $r\not\subset\alpha$ e $r\not\subset\beta$, então $r\parallel\alpha$ e $r\parallel\beta$.
02) Se $\alpha\perp\beta$, $\alpha\cap\beta=r$, $s\subset\alpha$, $s\perp r$, então $s\perp\beta$.
08) Se $\alpha\parallel\beta$, $r\perp\alpha$, então $r\perp\beta$.

Exercício 26

04) Para todo x real, $senx=cos(\frac{\pi}{2}-x)$.
16) Para todo x real, $-\frac{1}{2}\leq(senx)(cosx)\leq\frac{1}{2}$.

Exercício 27

01) $det(M\cdot N)=det(N\cdot M)$, onde *M* e *N* são matrizes quadradas de mesma ordem.
16) $det(A\cdot B)=96.$

Exercício 28

01) O domínio da função $f(x)=\frac{1}{\sqrt{5-|x-3|}}$ é um intervalo *(a, b)*. A soma de *a* com *b* é *6*.
02) Se $f:[1,\ \ +\infty)\to[1,\ \ +\infty)$ definida por $f(x)=x^2-2x+2$ admite inversa, então $f^{-1}(5)=3.$
04) Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função definida por $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & se\ \ x\geq 0 \\ x+1, & se\ \ x<0 \end{cases}$, então $(f\circ f)(-1)=1.$

Exercício 29

01) *A+B+C* é um número positivo.
02) *A* e *B* são as raízes da equação $2x^2-3x-2=0.$
04) A soma dos coeficientes do binômio $(A+2Bx)^{10}$ é um.

Exercício 30

02) Se $f(x)$ tem período $\frac{\pi}{3}$ e imagem $[-4,\ \ 2]$, então $a=-1$ e b pode assumir dois valores.
08) Se $b=2$, $f(x)$tem período $\frac{\pi}{2}$, independente do valor de a.

Exercício 31

01) Para todo $x\in\mathrm{R}$, $f(x)\leq 84$
02) $(f+g)(1)=8.$
16) A função *f* não possui inversa e $g^{-1}(x)=-\frac{x}{5}+2,$ para todo *x* real.

Exercício 32

01) A interseção entre as imagens de $f(x)$ e $g(x)$ é o intervalo $[-1,\ \ 0]$.
02) $f(x)+g(x)=2cos(x)[1+3sen(x)].$

Exercício 33

04) Uma pessoa que comprou US$ 130,00 quando t = 8 h e vendeu essa quantia quando t = 14 h perdeu R$ 13,00. Contudo, se a venda fosse feita quando t = 16 h, obteria um lucro de R$ 39,00.
08) Usando cartão de crédito, uma pessoa comprou um produto em um site americano ao preço de US$ 50,00. Considerando que a cobrança da fatura do cartão de crédito ocorre segundo o preço de compra sempre às 17 h, então o produto custou mais do que R$ 175,00.
16) Para cada t pertencente ao intervalo $\{t\in\mathrm{R};\ \ 12<t<16\}$, a diferença entre o preço de venda e o preço de compra foi maior que US$ 0,30.

Exercício 34

01) Esse polinômio possui outra raiz complexa, cujo módulo é $\sqrt{5}$.
04) Todas as raízes reais desse polinômio são inteiras.
08) Se 1 é raiz desse polinômio, então a=c.

Exercício 35

02) $f(x)=ax+c,\ \ g(x)=ax^2+bx+c, f(-3)=0,\ \ g(0)=3$ e $g(f(0))=24$, então $b=4.$
04) Se $f(x)=x-2$ e $g[f(x)]=2x^2-11x+15$, então $g(1)=0.$

Exercício 36

01) $cos247°=sen337°$
02) A igualdade abaixo é uma identidade trigonométrica:
$\frac{sen\ a\cdot tg\ a\cdot cossec\ a}{cos\ a\cdot cotg\ a\cdot sec\ a}=tg^2a$
04) $sen250°+cos20°=0.$
16) $sen\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=cos2x$

Exercício 37

01) Se $sec^2x+2tgx=4$ e sendo x um arco do 2° quadrante, então $senx+cosx=\frac{\sqrt{10}}{5}$.
04) $1-2cos^2105°=32.$

16) $2sen280° \cdot cos50° + 2cos280° \cdot sen50° = -1.$

Exercício 38

02) $AB^t = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$

04) A matriz *A* é invertível e a sua inversa também é invertível.

16) $[det(A) + det(B)]^2 = det(A^2) + det(\sqrt{2} \cdot AB) + det(B^2).$

Exercício 39

01) $A - B = D$

02) $(A \cup B) \cap D = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 + 5x + 6 = 0\}$

Exercício 40

01) A função f é bijetora, e sua inversa é a função $h: R \to R$ definida por $h(x) = x + 1$.
02) O conjunto imagem da função g é o intervalo $[0, +\infty[$.
04) A função g é uma função par.
16) O ponto $(0, 0)$ pertence ao gráfico da função g.

Exercício 41

Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função afim definida por $f(x) = ax + b$, em que $f(x)$ é o número de cópias vendidas e x é o número de matérias que abordam julgamentos de casos com ampla repercussão pública.

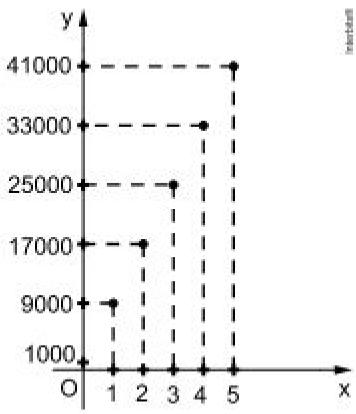
Sabendo que o gráfico de f passa pelos pontos $(4, 33000)$ e $(7, 57000)$, tem-se que

$$a = \frac{57000 - 33000}{7 - 4} = 8000.$$

Logo,

$$33000 = 8000 \cdot 4 + b \Leftrightarrow b = 1000.$$

a) O valor inicial da função f, definida acima, é igual a *1000.*
$1000.$
b) O gráfico pedido é



c) Seja $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função definida por $g(x) = 20 \cdot f(x)$, em que $g(x)$ é o faturamento por adição e $f(x)$ é o número de cópias vendidas, conforme definido em (a).
Portanto, segue-se que

$$g(x) = 20 \cdot (8000x + 1000) = 160000x + 20000.$$

Exercício 42

a) Sabendo que *U={10, 11, 12, ..., 99}*, temos que *A={33, 66, 99}*.

Além disso, como $132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$, vem $B = \{11, 12, 22, 33, 44, 66\}$.

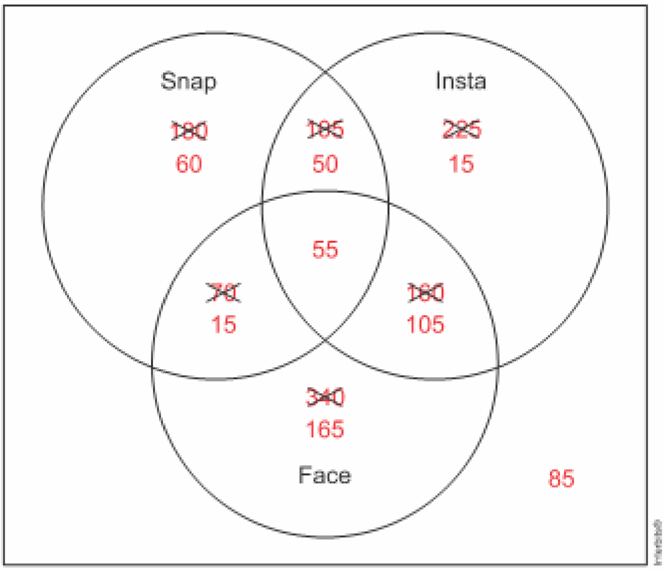
Portanto, $A \cap B = \{33, 66\}$.

b) Do item (a), segue que $A \cup B = \{11, 12, 22, 33, 44, 66, 99\}$. Daí, como U possui 45 números ímpares e $A \cup B$ possui 3 números ímpares, segue que $U - (A \cup B)$ possui $45 - 3 = 42$ números ímpares.

Portanto, como $U - (A \cup B)$ possui $90 - 7 = 83$ elementos, segue que a probabilidade pedida é dada por $\frac{42}{83}$.

Exercício 43

Fazendo um diagrama de Venn:



Assim:
60+50+55+15+15+105+165+85=550

Exercício 44

É fácil ver que $\sqrt{3-\sqrt{8}} < \sqrt{3+\sqrt{8}}$. Logo, $x = \sqrt{3-\sqrt{8}} - \sqrt{3+\sqrt{8}} < 0$.

$$\begin{aligned} x^2 &= (\sqrt{3-\sqrt{8}} - \sqrt{3+\sqrt{8}})^2 \\ &= 3 - \sqrt{8} - 2\sqrt{(3-\sqrt{8})(3+\sqrt{8})} + 3 + \sqrt{8} \\ &= 6 - 2\sqrt{9-8} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2.$$

Por conseguinte, x = - 2, que é um número inteiro e negativo.

Exercício 45

a) n(C) = x e n(B) = 4x

6.n(A∩B) = 3x ⇔ n(A∩B) = $\frac{x}{2}$

n(A ∪ B) = n(A) + n(B) – n(A∩B)

22 = n(A) + 4x – x/2

22 - $\frac{7x}{2}$ =n(A)

Considerando a progressão geométrica, temos:

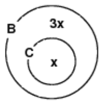
$n(A)^2 = n(B).\, n(C) \Leftrightarrow \left(22 - \frac{7x}{2}\right)^2 = 4x.x \Leftrightarrow \frac{33x^2}{4} - 154x + 484 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ou x = 44/3(não convém)

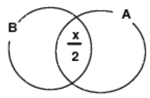
logo n(C)= 4

b) n(B) = 4.4 = 16 n(C) = 4

n(B\C) = 16 – 4 = 12

n(P(B\C)) = 2^{12} = 4096





Exercício 46

a) Queremos calcular *x* de tal sorte que *C(x)=0.* Logo, temos

$$(x^2 - 30x + 1000) \cdot 1000 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 30x + 1000 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - 15)^2 = -775.$$

Portanto, como $(x - 15)^2 \geq 0$ para todo *x* inteiro não negativo, a equação não possui solução e, assim, não é possível produzir nenhuma quantidade do produto a custo zero.

b) Reescrevendo a lei da função *C,* encontramos
$C(x) = 1000 \cdot (x - 15)^2 + 775000.$

Em consequência, como $(x - 15)^2 \geq 0$ para todo *x* inteiro não negativo, segue que o custo é mínimo quando *x=15.*

Exercício 47

a) Calculando:

$$x + y + (y - 2) + (x - 1) = 35 \Rightarrow x + y = 19 \Rightarrow 6 + y = 19 \Rightarrow y = 13$$
$$S_{externa} = 6 \cdot 13 - (2 \cdot 1) \Rightarrow S_{externa} = 76\ m^2$$

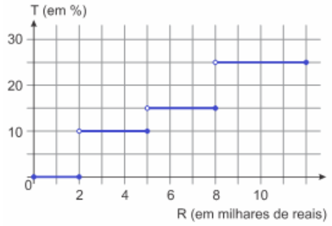
b) Calculando:

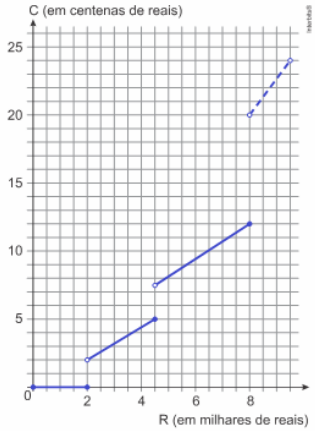
$$S(x) = x \cdot y - (2 \cdot 1)$$
$$x + y = 19 \Rightarrow y = 19 - x$$
$$S(x) = x \cdot (19 - x) - 2 = -x^2 + 19x - 2$$
$$x_{máx} = \frac{19}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow x_{máx} = 9{,}5 \Rightarrow y = 9{,}5$$

Exercício 48

Calculando:

$$C(R) = \begin{cases} 0, & se\ \ 0 \leq R \leq 2 \\ 0{,}10R, & se\ \ 2 < R \leq 5 \\ 0{,}15R, & se\ \ 5 < R \leq 8 \\ 0{,}25R, & se\ \ R > 8 \end{cases}$$





Exercício 49

a) Como o gráfico de f é uma reta, segue que $f(x) = ax + b.$ Logo, sabendo que b é a ordenada do ponto de interseção do gráfico de f com o eixo $y,$ temos que $b = 2.$ Além disso, como o gráfico passa pelo ponto $(12,\ 8),$ segue que a taxa de variação de f é tal que $8 = a \cdot 12 + 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$

Portanto, $f(x) = \frac{1}{2}x + 2,$ com $x \geq 0.$

b) De (a), temos que o valor inicial, cobrado pela construtora para a construção do prédio da biblioteca, é igual a *2*^{2} milhões.

c) Se a construção demorou *10*^{10} meses para ser finalizada, então o custo total da obra foi de *f(10)=12·10+2=7*

$f(10) = \frac{1}{2} \cdot 10 + 2 = 7$ milhões de reais.

Exercício 50

a) Seja $S: \mathbb{R} \to \mathbb{R},$ definida por ,$S(x) = ax + b,$ com $S(x)$ sendo o salário mínimo x anos após 2005. Logo,

$$a = \frac{510 - 300}{5 - 0} = 42 \text{ e } b = S(0) = 300.$$

Portanto,

$$S(x) = 42x + 300.$$

Seja $C: \mathbb{R} \to \mathbb{R},$ definida por $C(x) = a'x + b',$ com $C(x)$ sendo o valor da cesta básica x anos após 2005. Assim,

$$a' = \frac{184 - 154}{5 - 0} = 6 \text{ e } b' = C(0) = 154.$$

Por conseguinte,

$$C(x) = 6x + 154.$$

b) Queremos calcular o menor inteiro x para o qual $S(x) \geq 3 \cdot C(x).$

$$42x + 300 \geq 3 \cdot (6x + 154) \Rightarrow 8x \geq 54 \Rightarrow x \geq 6{,}75.$$

Portanto, o menor inteiro x para o qual $S(x) \geq 3 \cdot C(x)$ é *7* e, assim, em 2012 um salário mínimo poderá adquirir três cestas básicas.

Exercício 51

a) Sejam $f,$ g e $h,$ respectivamente, as funções definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} - 1, g(x) = 2x^{-2} = \frac{2}{x^2} \text{ e } h(x) = (x + 2)^{\frac{1}{3}}.$$

Temos que o domínio de

f é $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$;
g é $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$;
h é $\mathbb{R}$.

Assim, apesar do domínio da função g não admitir $x = 0$, o teste $\sqrt{x} - 1 > 1$ não é satisfeito para este valor de x (g será aplicada apenas para $x > 4$).

Portanto, o programa descrito pelo fluxograma é executável apenas para $x \geq 0$.

b)

x	0	4	9
$\sqrt{x} - 1$	$\sqrt{0} - 1 = -1$	$\sqrt{4} - 1 = 1$	$\sqrt{9} - 1 = 2$
$\sqrt{x} - 1 > 1$?	Não	Não	Sim
Função	$(x+2)^{\frac{1}{3}}$	$(x+2)^{\frac{1}{3}}$	$\frac{2}{x^2}$
Saída	$(0+2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$	$(4+2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{6}$	$\frac{2}{9^2} = \frac{2}{81}$

Exercício 52

a) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + 1$, é estritamente crescente.

b) Como $g(a) = [f(a) - f(a)](a - a) = 0$, queremos mostrar que $g(x) > 0$ para todo $x \neq a$.

Sabendo que f é estritamente crescente, temos que:
i) se $x < a$, então $f(x) - f(a) < 0$ e $x - a < 0$;
ii) se $x > a$, então $f(x) - f(a) > 0$ e $x - a > 0$.

Portanto, de (i) e (ii) segue o resultado pedido.

Exercício 53

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ (2-m).f(x) > 0 \\ x_V = \dfrac{-2m}{2.(2-m)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8.(m^2 - 2) > 0 \\ 4 - m^2 > 0 \\ \dfrac{m}{m-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \sqrt{2} \text{ ou } m < -\sqrt{2} \\ -2 < m < 2 \\ m < 0 \text{ ou } m > 2 \end{cases}$$

Resolvendo, temos $-2 < m < -\sqrt{2}$.

Exercício 54

a) $f(2) = \dfrac{2+1}{-2+1} = -3$.

b) $f(f(x)) = \dfrac{\dfrac{x+1}{-x+1} + 1}{-\dfrac{x+1}{-x+1} + 1} = \dfrac{\dfrac{2}{-x+1}}{\dfrac{-2x}{-x+1}} = -\dfrac{1}{x}$

Fazendo: $-\dfrac{1}{x} = x \Rightarrow x^2 = -1$

Logo, não existe um valor de x tal que $x^2 = -1$.

c) $f(f(x)) = -\dfrac{1}{x}$

$f(f(f(f(x)))) = f(f(\dfrac{-1}{x})) = \dfrac{-1}{\dfrac{-1}{x}} = x$

Logo, $x = 2011$.

Exercício 55

Para encontrar a relação entre as funções, pode-se escrever:

$$f_1(x) = f_0(f_0(x)) = f_0\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} \Rightarrow f_1(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$f_2(x) = f_0(f_1(x)) = f_0\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1 - \dfrac{x-1}{x}} \Rightarrow f_2(x) = x$$

$$f_3(x) = f_0(f_2(x)) = f_0(x) \Rightarrow f_3(x) = \frac{1}{1-x}$$

Daí pode-se concluir que:

$f_{3n}(x) = f_0(x) = \dfrac{1}{1-x} f_{3n+1}(x) = f_1(x) = \dfrac{x-1}{x} f_{3n+2}(x) = f_2(x) = x$

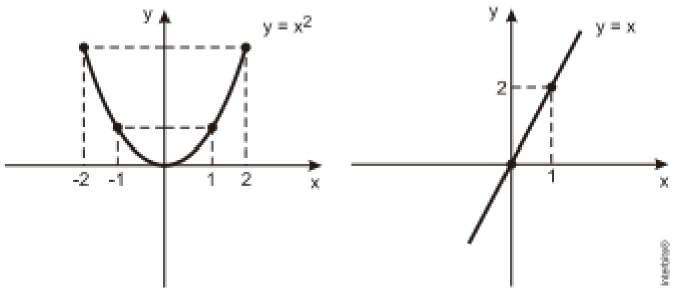
Assim, como 2016 é múltiplo de 3, tem-se:

$$f_{2016}(2016) = \frac{1}{1-2016} \Rightarrow f_{2016}(2016) = -\frac{1}{2015}$$

Exercício 56

a) As funções pares são I e III, pois $f(-a) = f(a)$ para qualquer a real. As funções ímpares são IV e V, pois $f(-a) = -f(a)$ para qualquer a.

b) função $y = x^2$ é par e a função $y = x$ é ímpar.



Exercício 57

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

$$f\left(x + \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 2x + 1, & -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Temos que:

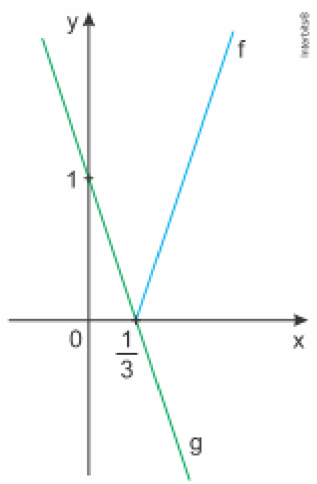
$$g(x) = \begin{cases} f\left(x + \frac{1}{2}\right), & se \quad -\frac{1}{2} < x < 0 \\ 1 - f\left(x + \frac{1}{2}\right), & se \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & se \quad -\frac{1}{2} < x < 0 \\ -2x + 1, & se \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Como $g(x) = g(-x)$, $\forall x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, então g é par.

Exercício 58

a) Desde que $f(x)=\begin{cases}3x-1, \text{ se } x\geq \frac{1}{3}\\ -3x+1, \text{ se } x<\frac{1}{3}\end{cases}$, temos $f(x)=g(x)$ para $x<\frac{1}{3}$. Assim, os gráficos de *f* e de *g* são dados pela figura abaixo.



b) De (a), sabemos que $f(x)-g(x)\leq 28$ para todo *x* real menor do $\frac{1}{3}$. Ademais, para $x\geq\frac{1}{3}$, temos

$3x-1-(1-3x)\leq 28 \Leftrightarrow 6x\leq 30 \Leftrightarrow x\leq 5.$

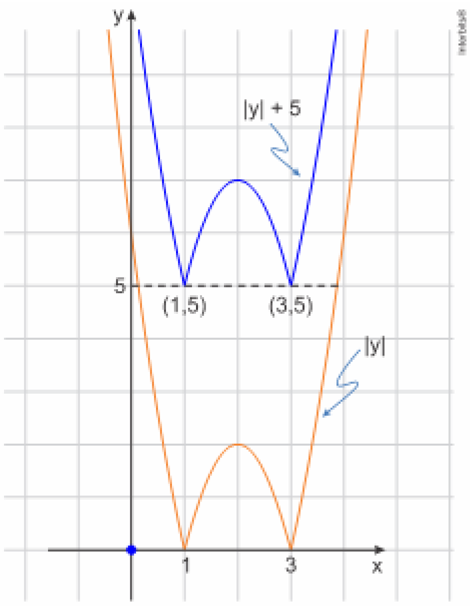
Portanto, a resposta é $x\in \mathbb{R}\,|\,x\leq 5$.

c) Sendo *f(0)=1, g(3)=-8* e *f(3)=8,* temos

$$(ABC)=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}0 & 3 & 3 & 0\\ 1 & -8 & 8 & 1\end{matrix}\right\|$$
$$=\frac{1}{2}|24+3-3+24|$$
$$=24 \text{ u.a.}$$

Exercício 59

Aplicando a definição de módulo no gráfico da função *y=f(x)* e fazendo uma translação vertical de *5* unidades, temos o seguinte gráfico.



O valor mínimo que a função *|y|+5* assume é *5*, já que o menor valor para o modulo de *y* é zero. Portanto, os valores de *x* para os quais a função *|y|+5* assume valor mínimo são *x=1* ou *x=3*.

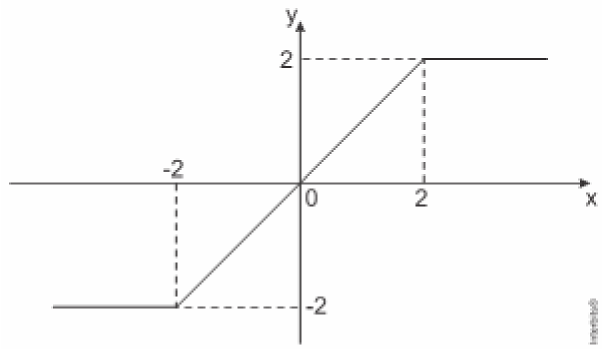
Exercício 60

a) De $g_0(x)=\frac{|x+2|-|x-2|}{2}$,

-2 2

$\lvert x+2\rvert$	-x - 2	x + 2	x + 2
$\lvert x-2\rvert$	-x + 2	-x + 2	x - 2
$\lvert x+2\rvert - \lvert x-2\rvert$	-4	2x	4
$g_0(x)$	-2	x	2

$$g_0(x)=\begin{cases}-2 \text{ se } x\leq -2\\ x \text{ se } -2\leq x\leq 2\\ 2 \text{ se } x\geq 2\end{cases}$$



b) De $g_0(x)=\frac{|x+2|-|x-2|}{2}$

$g_0(4x+6)=\frac{|4x+6+2|-|4x+6-2|}{2}$

$g_0(4x+6)=\frac{|4x+8|-|4x+4|}{2}$

$g_0(4x+6)=\frac{4|x+2|-4|x+1|}{2}$

$g_0(4x+6)=2|x+2|-2|x+1|$

De $g_0(x)=\frac{|x+2|-|x-2|}{2}$,

$g_0(4x-6)=\frac{|4x-6+2|-|4x-6-2|}{2}$ $g_0(4x-6)=\frac{|4x-4|-|4x-8|}{2}$ g_0

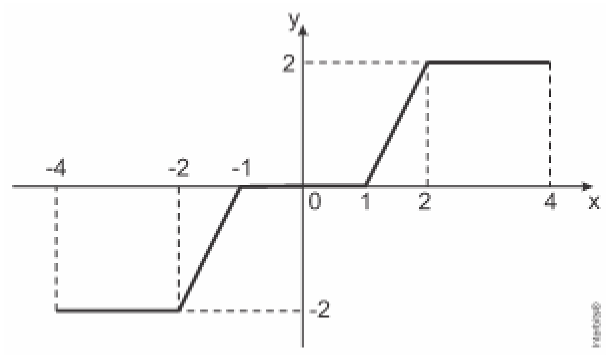
Assim,

$g_1(x)=\frac{g_0(4x+6)+g_0(4x-6)}{2}$ $g_1(x)=\frac{2|x+2|-2|x+1|+2|x-1|-2}{2}$

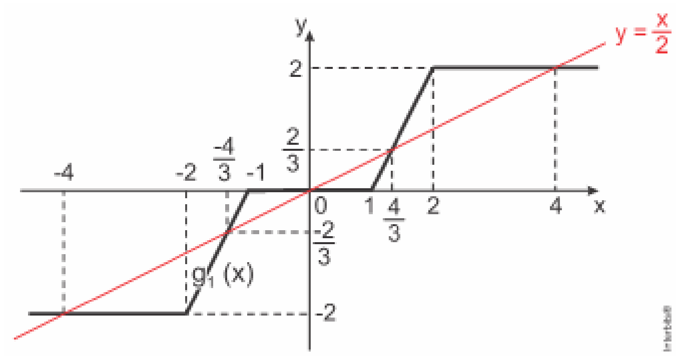
-2 -1 1 2

$\lvert x+2\rvert$	-x - 2	x + 2	x + 2	x + 2	x + 2
$\lvert x+1\rvert$	-x - 1	-x - 1	x + 1	x + 1	x + 1
$\lvert x-1\rvert$	-x + 1	-x + 1	-x + 1	x - 1	x - 1
$\lvert x-2\rvert$	-x + 2	-x + 2	-x + 2	-x + 2	x - 2
$g_1(x)$	-2	2x + 2	0	2x - 2	2

$$g_1(x) = \begin{cases} -2 \ se \ x \le -2 \\ 2x + 2 \ se \ -2 \le x \le -1 \\ 0 \ se \ -1 \le x \le 1 \\ 2x - 2 \ se \ 1 \le x \le 2 \\ 2 \ se \ x \ge 2 \end{cases}$$



c) Teremos:



Do gráfico, $g_1(x) \le \frac{x}{2}$,

$-4 \le x \le -\frac{4}{3} \ ou \ 0 \le x \le \frac{4}{3} \ ou \ x \ge 4$

Portanto,

$S = \left\{x \in \mathbb{R}: -4 \le x \le -\frac{4}{3} \ \ ou \ 0 \le x \le \frac{4}{3} \ \ ou \ \ x \ge 4\right\}$

Exercício 61

De $|3x + 5| + |x - 1|$,

	$-\frac{5}{3}$	1	
|3x + 5|	-3x - 5	3x + 5	3x + 5
|x - 1|	-x + 1	-x + 1	x - 1
|3x + 5| + |x - 1|	4x - 4	2x + 6	4x + 4

Assim, de $|3x + 5| + |x - 1| = 2, \ p - 4x - 4 = 2$, com $x \le -\frac{5}{3}$ ou

$2x + 6 = 2$ com $-\frac{5}{3} \le x \le 1$ e $4x + 4 = 2$, com $x \ge 1$.

De $-4x - 4 = 2$, com $x \le -\frac{5}{3}, x = -\frac{3}{2} > -\frac{5}{3}$, ou seja,

$x = -\frac{3}{2}$ não é raiz da equação.

De $2x + 6 = 2$, *com* $-\frac{5}{3} \le x \le 1, \ x = -2 < -\frac{5}{3}$, *ou seja*, $x = -2$ *não é raiz da equação.*

De $4x + 4 = 2$, *com* $x \ge 1, \ x = -1 < 1$, *ou seja*, $x = -1$ *não é raiz da equa*

Assim, a equação $|3x + 5| + |x - 1| = 2$ não admite raízes.

Exercício 62

a) Calculando a massa do potro, obtemos:

$m = \frac{116 - 25}{0,7} \Rightarrow m = 130kg$

Calculando, agora, a dosagem de Meloxican em mL.

0,6·130=78 mg

100 mL 2 g

x mL 0,078 g

x=3,9 mL

b) Sabemos que, pelo gráfico, que *Q(18)=5,* portanto:

$5 = 320 \cdot \sqrt{2}^{18 \cdot (-k)} 5 = 320 \cdot 2^{-9k} \frac{5}{320} = 2^{-9k} \frac{1}{64} = 2^{-9k} 2^{-6} = 2^{-9}$

Podemos agora, com o valor de *k,* determinar *Q(24):*

$Q(24) = 320 \cdot \sqrt{2}^{24 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} Q(24) = 320 \cdot \sqrt{2}^{-16} Q(24) = 320 \cdot 2^{-8} Q(2$

Exercício 63

a) Calculando:

$T(t) = -10 + a \cdot 5^{b \cdot t}$

$T(80) = -10 + a \cdot 5^{80b} = 0 \Rightarrow a \cdot 5^{80b} = 10$

$T(160) = -10 + a \cdot 5^{160b} = -8 \Rightarrow a \cdot 5^{160b} = 2$

$\frac{a \cdot 5^{160b}}{a \cdot 5^{80b}} = \frac{2}{10} \Rightarrow \frac{5^{80b} \cdot 5^{80b}}{5^{80b}} = 5^{-1} \Rightarrow 5^{80b} = 5^{-1} \Rightarrow 80b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{80}$

$a \cdot 5^{80b} = 10 \Rightarrow a \cdot 5^{-1} = 10 \Rightarrow a \cdot \frac{1}{5} = 10 \Rightarrow a = 50$

b) Calculando:

$T(t) = -10 + 50 \cdot 5^{\frac{-t}{80}}$

$-10 + 50 \cdot 5^{\frac{-t}{80}} \le -9{,}6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 50 \cdot 5^{\frac{-t}{80}} \le 0{,}4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5^{\frac{-t}{80}} \le \frac{1}{125} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5^{\frac{-t}{80}} \le 5^{-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-t}{80} \le -3 \Rightarrow t \ge 240 \ \ min \ \ ou \ 4 \ horas$

Exercício 64

$3^{x-2} + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4} \le \frac{1081}{18}$

$\frac{3^x}{9} + 3^x \cdot 3 + 3^x \cdot 9 + 3^x \cdot 27 + 3^x \cdot 81 \le \frac{1081}{18}$

$\frac{1081}{9} \cdot 3^x \le \frac{1081}{18}$

$3^x \le \frac{1}{2}$

$\log_3 3^x \le \log_3 \frac{1}{2}$

$x \le \log_3 \frac{1}{2}$

Resposta:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \leq \log_3 \frac{1}{2} \right\}$$

Exercício 65

$$S = \frac{S_1 + S_2}{2}$$
$$S = \frac{(log\ 3 + log\ 4 + log\ 5) + (log\ 4 + log\ 5 + log\ 6)}{2}$$
$$S = \frac{log(3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6)}{2}$$
$$S = \frac{log(7200)}{2}$$
$$S = \frac{log\ 72 + log\ 100}{2}$$
$$S = \frac{log(3^2 \cdot 2^3) + 2}{2}$$
$$S = \frac{2 \cdot log\ 3 + 3 \cdot log\ 2 + 2}{2}$$
$$S = \frac{2 \cdot 0{,}477 + 3 \cdot 0{,}301 + 2}{2}$$
$$S = 1{,}9285$$

Exercício 66

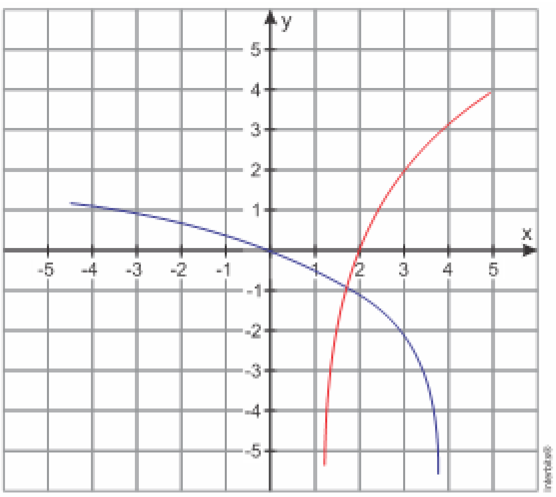
a) Realizando os cálculos:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\,log_2\left(\frac{3}{2} - 1\right) = 2\,log_2\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot -1 \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = -2$$
$$f(2) = 2\,log_2(2 - 1) = 2\,log_2(1) = 2 \cdot 0 \Rightarrow f(2) = 0$$
$$f(3) = 2\,log_2(3 - 1) = 2\,log_2(2) = 2 \cdot 1 \Rightarrow f(3) = 2$$
$$g(-4) = log_2\left(1 - \frac{(-4)}{4}\right) = log_2(2) \Rightarrow g(-4) = 1$$
$$g(0) = log_2\left(1 - \frac{0}{4}\right) = log_2(1) \Rightarrow g(0) = 0$$
$$g(2) = log_2\left(1 - \frac{2}{4}\right) = log_2\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow g(2) = -1$$

b) Realizando os cálculos:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2\log_2(x-1) = \log_2\left(1 - \frac{x}{4}\right) \Rightarrow \log_2(x-1)^2 = \log_2\left(1 - \frac{x}{4}\right) \Rightarrow (x-1)^2 = 1 - \frac{x}{4}$$
$$x^2 - 2x + 1 = 1 - \frac{x}{4} \Rightarrow x^2 - 2x + \frac{x}{4} = 0$$
$$x^2 - \frac{7}{4}x = 0 \Rightarrow x \cdot \left(x - \frac{7}{4}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{não convém pois } 1 < x < 4) \\ x = \frac{7}{4} \end{cases}$$

c) Na figura a seguir estão esboçados os gráficos, com $g(x)$ em azul e $f(x)$ em vermelho.



Exercício 67

a) Condições para a existência do logaritmo:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 8 > 0 \Rightarrow x < -2 \text{ ou } x > 4 \\ x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ x + 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \end{cases}$$

Portanto, o domínio da função será D=]4, +∞[.

b)

$$f(x) = 2 \Rightarrow log_{x+1}(x^2 - 2x - 8) = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = (x+1)^2 \Rightarrow -4x = 9 \Rightarrow x = -2{,}25$$

Como -2,25<4, o conjunto pedido é o conjunto vazio. Ou seja S = f.

c) Teremos:

$$log_{x+1}(x^2 - 2x - 8) > 1 \Rightarrow log_{x+1}(x^2 - 2x - 8) > log_{x+1}(x+1) \Rightarrow x^2 - 2x - 8 > x + 1 \Rightarrow$$
$$x^2 - 3x - 9 > 0 \Rightarrow x < \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x > \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}$$

Como x>4, concluímos que $x > \frac{3+3\sqrt{5}}{2}$, portanto o conjunto pedido será dado por:

$$S = \left]\frac{3+3\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$$

Exercício 68

a) Com efeito, temos

$$f(x) = 10\left(10^x + \frac{1}{10^x}\right).$$

Logo, sabendo que $a^{log_a b} = b$ com a e b reais positivos e $a \neq 1$, vem

$$\begin{aligned} f(\log_{10}(2+\sqrt{3})) &= 10\left(10^{\log_{10}(2+\sqrt{3})} + \frac{1}{10^{\log_{10}(2+\sqrt{3})}}\right) \\ &= 10\left(2+\sqrt{3} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}\right) \\ &= 10(2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}) \\ &= 40. \end{aligned}$$

Portanto, segue que $f(log_{10}(2 + \sqrt{3})) = 40 \in \mathbb{Z}$.

b) Tem-se que

$$f(x) = 52 \Leftrightarrow 10\left(10^x + \frac{1}{10^x}\right) = 52$$
$$\Leftrightarrow 5 \cdot 10^{2x} - 26 \cdot 10^x + 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow 10^x = \frac{26 \pm 24}{10}$$
$$\Leftrightarrow x = log_{10}5 \text{ ou } x = -log_{10}5.$$

Dado que $log_{10}2 \cong 0,3$, vem

$$log_{10}5 = log_{10}\left(\frac{10}{2}\right) = log_{10}10 - log_{10}2 \cong 1 - 0,3 = 0,7.$$

Portanto, os valores de x para os quais $f(x) = 52$ são $0,7$ e $-0,7$.

Exercício 69

$$\frac{4}{log_3 x^2 - 2} + log_x \frac{1}{9} > 1 \rightarrow \frac{4}{2\,log_3 x - 2} - \frac{2}{log_3 x} > 1$$

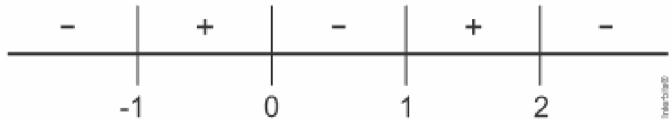
Sendo $log_3 x = z$

$$\frac{4}{2z-2} - \frac{2}{z} > 1 \rightarrow \frac{4}{2 \cdot (z-1)} - \frac{2}{z} > 1 \rightarrow \frac{4z - 4(z-1)}{2 \cdot (z-1) \cdot z} > 1 \rightarrow \frac{4z - 4(z-1) - 2(z-1)z}{2 \cdot (z-1) \cdot z} > 0$$

$$\frac{4z-4z+4-2z^2+2z}{2\cdot(z-1)\cdot z}>0 \to \frac{4-2z^2+2z}{2\cdot(z-1)\cdot z}>0 \to \frac{-z^2+z+2}{(z-1)\cdot z}>0$$

$$\frac{-(z+1)\cdot(z-2)}{(z-1)\cdot z}>0$$

Analisando o sinal da inequação:



Ou seja:

$$-1<z<0 \quad ou \quad 1<z<2$$

Substituindo *z:*

$$-1<\log_3 x<0 \quad ou \quad 1<\log_3 x<2$$

$$\frac{1}{3}<x<1 \quad ou \quad 3<x<9 \quad com \quad x\in\mathbb{R}$$

Exercício 70

a) O ângulo θ é máximo quando $\overline{OP}$ é tangente à circunferência c. Logo, temos $\theta = 90°$ e, portanto, do triângulo retângulo OPQ, vem

$$sen\theta = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} \Leftrightarrow sen\theta = \frac{1}{5}.$$

b) Tomando o triângulo OPQ, pela Lei dos Cossenos, encontramos

$$\overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2+\overline{PQ}^2-2\cdot\overline{OQ}\cdot\overline{PQ}\cdot cos\beta \Leftrightarrow \overline{OP}^2 = 5^2+1^2-2\cdot5\cdot1\cdot\frac12 \Leftrightarrow \overline{OP}^2 =$$

Em consequência, pela Lei dos senos, obtemos

$$\frac{\overline{PQ}}{sen\theta}=\frac{\overline{OP}}{sen\beta}\Leftrightarrow \frac{1}{sen\theta}=\frac{\sqrt{21}}{\frac{\sqrt3}{2}} \Leftrightarrow sen\theta=\frac{\sqrt7}{14}.$$

c) Do triângulo OPQ, pela Lei dos Senos, vem

$$\frac{\overline{PQ}}{sen\theta}=\frac{\overline{OQ}}{sen(180°-\alpha)}\Leftrightarrow\frac{1}{sen\,\theta}=\frac{5}{sen135°}\Leftrightarrow sen\theta = 210.$$

Ademais, pela Lei dos Cossenos, temos

$$\overline{OQ}^2=\overline{PO}^2+\overline{PQ}^2-2\cdot\overline{PO}\cdot\overline{PQ}\cdot cos(180°-\alpha)\Leftrightarrow$$

$$5^2=\overline{PO}^2+1^2-2\cdot\overline{PO}\cdot1\cdot\left(-\frac{\sqrt2}{2}\right)\Leftrightarrow$$

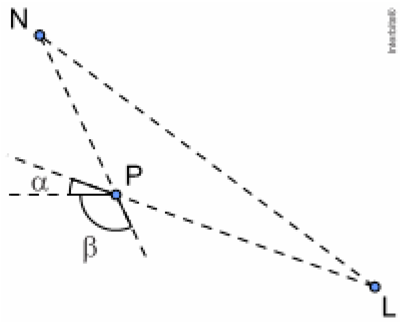
$$\overline{PO}^2+\sqrt2\cdot\overline{PO}-24=0\Rightarrow \overline{PO}=3\sqrt2.$$

Portanto, sendo $\gamma = 90° - P\hat OR = \theta$, do triângulo OPR, segue que

$$sen\gamma=\frac{\overline{PO}}{\overline{OR}}\Leftrightarrow\frac{\sqrt2}{10}=\frac{3\sqrt2}{\overline{OR}}\Leftrightarrow\overline{OR}=30.$$

Exercício 71

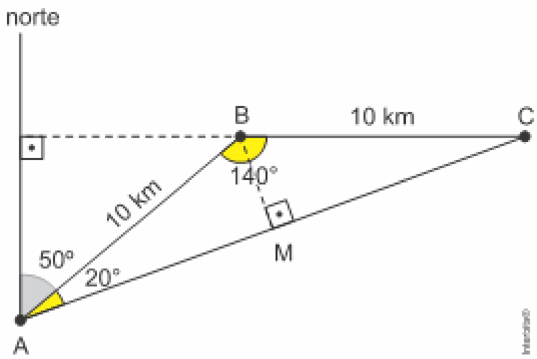
Considere a figura:



Os ângulos $L\hat PM$ e $(\alpha+\beta)$ são opostos pelo vértice e, portanto, são congruentes.
Se t é o tempo, em horas, decorrido até o instante do encontro, então $\overline{NP}=30\cdot t$ e $\overline{LP}=80\cdot t$. Daí, vem $\overline{LP}=\frac{8}{3}\cdot\overline{NP}$.
Finalmente, aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo *LNP,* encontramos

$$\overline{LN}^2=\overline{NP}^2+\overline{LP}^2-2\cdot\overline{NP}\cdot\overline{LP}\cdot cos(\alpha+\beta)\Leftrightarrow 10^2=\overline{NP}^2+\left(\frac83\cdot\overline{NP}\right)^2$$

Exercício 72



$$A\hat BC=50°+90°=140° AB=BC=10km\Rightarrow B\hat AC=B\hat CA=20°$$

Como o triângulo ABC é isósceles concluímos que BM e altura e também mediana.
Considerando o triângulo ABM, temos:

$$cos20°=AM10\Rightarrow AM=10\cdot cos20°$$

Logo,

$$AC=2\cdot AMAC=2\cdot10\cdot cos20°AC=20\cdot0,940AC=18,8\,km$$

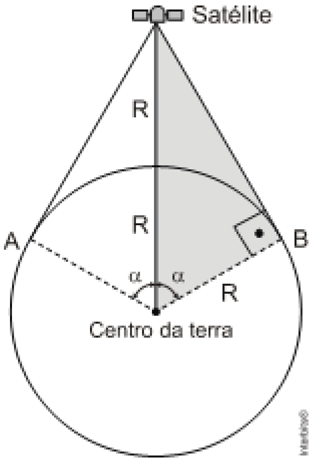
Exercício 73

a) No triângulo assinalado:
R é a medida do raio da terra.

$$cos\alpha=\frac{R}{R+R}=\frac12\Rightarrow\alpha=60°$$

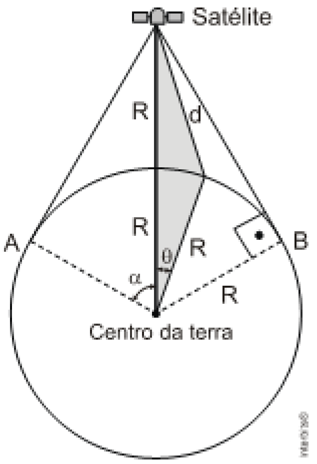
Portanto, o arco AB mede 120° e seu comprimento será dado por:

$$\frac{2\cdot\pi\cdot R}{3}=\frac{2\cdot\pi\cdot6400}{3}=\frac{12800\pi}{3}km.$$



b) Aplicando o teorema dos cossenos no triângulo assinalado, temos:

$d^2 = R^2 + (2R)^2 - 2.R.2R.\,cos\theta d^2 = 5R^2 - 4.R^2.\,(3/4)d = \sqrt{2.R^2}d = R\sqrt{2} = 6400\sqrt{2}\ km$



Exercício 74

Tem-se que

$cos3\alpha = cos(2\alpha + \alpha) = cos2\alpha cos\alpha - sen2\alpha sen\alpha = (cos^2\alpha - sen^2\alpha)cos\alpha - 2sen\alpha cos\alpha sen\alpha cos^3\alpha - sen^2\alpha cos\alpha - 2sen^2\alpha cos\alpha cos^3\alpha - 3sen^2\alpha cos\alpha$

e

$sen3\alpha = sen(2\alpha + \alpha) = sen2\alpha cos\alpha + sen\alpha cos2\alpha = 2sen\alpha cos\alpha cos\alpha + sen\alpha(cos^2\alpha - sen^2\alpha) = 2sen\alpha cos^2\alpha + sen\alpha cos^2\alpha - sen^3\alpha = 3sen\alpha cos^2\alpha - sen^3\alpha$

Exercício 75

a) Se a chapa possui área igual $8,132\ m^2$, então o comprimento da senoide será:

$$\text{Área} = 4x$$
$$8,132 = 4x \Rightarrow x = 2,033m$$

b) Calculando:

$f = 6T = \frac{195}{6}A = 2f(x) = A \cdot sen\ (kx)\frac{195}{6} = \frac{2\pi}{|k|} \Rightarrow k = \frac{4\pi}{65}f(x) = 2 \cdot sen\ (\frac{4\pi x}{65})D(f) = \{x \in R\,|\,0 \le x \le 195\}Im(f) = \{y \in R\,|\,-2 \le y \le 2\}$

Exercício 76

$a)(3 - 2cos2x).\,(1 + tg2(\frac{x}{2})) = 6.tg(\frac{x}{2}) \rightarrow (3 - 2cos2x)\frac{1}{cos^2\frac{x}{2}} = \frac{6.sen(\frac{x}{2})}{cos\ (\frac{x}{2})} \rightarrow (3 - 2cos2x) = 6.sen(\frac{x}{2}).\,cos(\frac{x}{2})$

$3 - 2(1 - sen2x) = 3.senx \rightarrow 2sen^2x - 3.senx + 1 = 0$

$senx = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$senx = ½ \rightarrow x = \frac{\pi}{6}\ ou\ x = \frac{5\pi}{6}\ S = \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\}$

$b)cotg\frac{\pi}{6} = \sqrt{3},\ cotg\frac{\pi}{2} = 0\ e\ cotg\frac{5\pi}{6} = \sqrt{3}$

Exercício 77

Resolvendo para $0 \le x \le 2\pi$:

$senx = \sqrt{1 - cosx} \Leftrightarrow sen^2x = 1 - cosx \Leftrightarrow 1 - cos^2x = 1 - cosx \Leftrightarrow cos^2x$

logo, $cosx = 0\ ou\ cosx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}, x = 0\ ou\ x = 360$

Testando na equação original, percebe-se que os valores que a satisfazem são:

$x = \frac{\pi}{2}, x = 0\ e\ x = 2\pi$

Como estamos interessados no intervalo $[0, 80\pi)$, temos 40 voltas aa serem analisadas.

Temos 40 soluções para $x = \frac{\pi}{2}$ (uma solução por volta).

Temos também 40 soluções para $x = 0$ (uma solução por volta).

Temos 39 soluções para $x = 2\pi$, pois em todas as 39 voltas tal valor é solução. Isso não ocorre na 40ª volta pois 2π nesse caso equivale à 80π e, no exercício, o intervalo de interesse não abrange esse valor ($[0, 80\pi)$).

Logo, o número de soluções é 40 + 40 + 39 = 119.

Exercício 78

Resolução em vídeo.

Exercício 79

$De\ (sen^2x + cos^2x)^3 = 1^3,\ sen^6x + 3(sen^2x)^2 \cdot cos^2x + 3sen^2x \cdot (cos^2x)^2 +$

Exercício 80

a) Calculando:

$$PQ = \begin{bmatrix} 500 & 300 \\ 400 & 200 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 & 100 & 150 \\ 100 & 150 & 200 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 100000 + 30000 & 50000 + 45000 & 75000 + 60000 \\ 80000 + 20000 & 40000 + 30000 & 60000 + 40000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 130000 & 95000 & 135000 \\ 100000 & 70000 & 100000 \end{bmatrix}$$
$$PQ_{21} = C_{P_1} + C_{P_2} = 80000 + 20000 = 100000$$

b) A empresa 2. Calculando:

$$\left.\begin{matrix} Empresa\ 1 \Rightarrow 130000 + 95000 + 135000 = 360000 \\ Empresa\ 2 \Rightarrow 100000 + 70000 + 100000 = 270000 \end{matrix}\right\} \Rightarrow C_{E_2} < C_{E_1}$$

Exercício 81

a) $C = A + B^t = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

b) $D = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}$

c) $E = 2\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

d) $F = 3.\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 15 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

e) $G = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$

Exercício 82

Desde que $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 13 \end{pmatrix}$, temos

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 13 \\ 2 & 4 & 26 \\ 13 & 26 & 169 \end{pmatrix}.$$

Portanto, observando que a matriz *A×B* apresenta filas proporcionais, podemos concluir que *det(A×B)=0.*

Exercício 83

Interpretando o problema temos, considerando x o número de caixas amarelas, y o número de caixas verdes e z o número de caixas azuis, montamos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 12 \\ 8x + 20y + 10z = 72 \\ 10x + 16y + 14z = 84 \end{cases}$$

Representando matricialmente esse sistema temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 8 & 20 & 10 \\ 10 & 16 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 72 \\ 84 \end{pmatrix}$$

Resolvendo por Cramer temos:

$$\Delta p = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 8 & 20 & 10 \\ 10 & 16 & 14 \end{vmatrix} = 144,$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 1 \\ 72 & 20 & 10 \\ 84 & 16 & 14 \end{vmatrix} = 576,$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 12 & 1 \\ 8 & 72 & 10 \\ 10 & 84 & 14 \end{vmatrix} = 144,$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 12 \\ 8 & 20 & 72 \\ 10 & 16 & 84 \end{vmatrix} = 288$$

Assim,
$x = \Delta x / \Delta p = 576/144 = 4 y = \Delta y / \Delta p = 144/144 = 1 z = \Delta z / \Delta p = 288/$

Portanto, a resposta é 4 caixas amarelas, 1 caixa verde e 2 caixas azuis.

Exercício 84

1. Para discutir o sistema, seguiremos os seguintes passos:

Passo 1: Troca da linha 1 e 2:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + mz = 0 \\ 2x + my + z = 0 \end{cases}$$

Passo 2: Eliminar uma variável.

Escolhendo x para eliminar temos:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0.(-1) \\ x + y + mz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -x + y - z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{matrix} \Rightarrow 2y + (m-1)z = 0 \; (1)$$

E

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + my + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0.(-2) \\ 2x + my + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + my + z = 0 \end{cases} \Rightarrow (2+m)y - z = 0 \; (2)$$

De (1) temos:

$$y = \frac{(1-m)z}{2}$$

Substituindo em (2) temos:

$$(2+m)y - z = 0 \Rightarrow \frac{(2+m)(1-m)}{2}z - z = 0 \Rightarrow (2+m)(1-m)z - 2z = 0$$

$$\Rightarrow \left(2 - m - m^2\right)z - 2z = 0 \Rightarrow \left(-m - m^2\right)z = 0 \Rightarrow \left(m^2 + m\right)z = 0$$

$$\Rightarrow z = \frac{0}{m^2 + m}$$

Discutindo o sistema:

Se $m^2 + m \neq 0 \;\Rightarrow$ o sistema será SPD, ou seja, se *m≠0* ou *m≠-1* o sistema será SPD

Se $m^2 + m = 0 \;\Rightarrow$ o sistema será SPI, ou seja, se *m=0* ou *m=-1* o sistema será SPI

O sistema não é impossível, pois para isso precisávamos ter uma fração da forma $\frac{\neq 0}{0}$ e isso não ocorre.

b) Para *m=-1,* temos que a matriz dos coeficientes é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares sobre essa matriz, encontramos:

$L'_2 \leftrightarrow (-1) \cdot L_1 + L_2$
$L'_3 \leftrightarrow (-2) \cdot L_1 + L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \sim$$

$L''_2 \leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot L'_2$

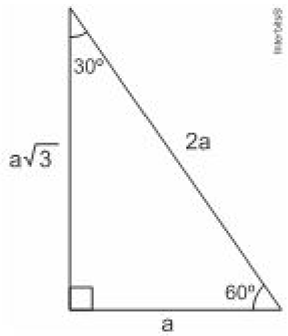
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \sim$$

$L''_3 \leftrightarrow 3 \cdot L''_2 + L'_3$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, o sistema
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ \quad y - z = 0 \end{cases}$$
é equivalente ao sistema dado e seu conjunto solução é
$S = \{(0, \ \alpha, \ \alpha), \ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Exercício 85

Para os triângulos retângulos com ângulos
30°, 60° e 90°, tem-se:



Analisando o triângulo ECB percebe-se que o ângulo em B é igual ao ângulo em E, logo os lados $\overline{BC}$ e $\overline{EC}$ são iguais e medem 18 cm cada.

Analisando o triângulo ECD e a figura acima pode-se escrever:
$2a = 18 \Rightarrow a = 9$

$\overline{CD} = a\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

Logo, a medida da área, em cm^2 do triângulo BCE será:

$$S_\Delta = \frac{18 \cdot 9\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_\Delta = 81\sqrt{3}$$

Exercício 86

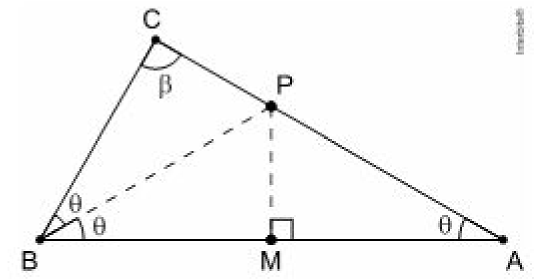
Ângulos alternos externos são iguais, logo, pode-se escrever:
$3x + 4 = 4x - 37 \Rightarrow x = 41$

$$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot 41 + 4 = 127° \\ 4 \cdot 41 - 37 = 127° \end{array}\right\} soma = 254°$$

Exercício 87

a) O triângulo é isósceles se $\beta=\theta$ ou $\beta=2\theta$. Logo, no primeiro caso, temos $4\theta=180°$, o que implica em $\theta=45°$. Já no segundo caso, temos $5\theta=180°$, o que implica em $\theta=36°$.

b) Considere a figura, em que P é o pé da bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$.



Sendo os ângulos $M\hat{B}P$ e $M\hat{A}P$ congruentes, podemos concluir que o triângulo ABP é isósceles de base $\overline{AB}$. Ademais, se M é o ponto médio de $\overline{AB}$, então $m(\overline{BM}) = \frac{2a}{2} = a$ e $\overline{MP} \perp \overline{AB}$. Daí, como $m(\overline{BC}) = a$, $\overline{BP}$ é lado comum e $M\hat{B}P \equiv C\hat{B}P$, segue que os triângulos MBP e CBP são congruentes por LAL.
Portanto, temos $\beta = 90°$.

Exercício 88

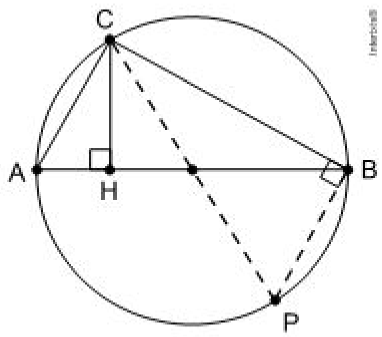
Considerando $\overline{BC} // \overline{DF}$, temos:

$$A\hat{D}E + 45° + 85° = 180° \Rightarrow ADE = 50° A\hat{D}F = \frac{180° - 45°}{2} = 67,5°$$

Portanto, $\alpha = 67,5° - 50° = 17,5° = 17°30'$.

Exercício 89

Considere a figura.

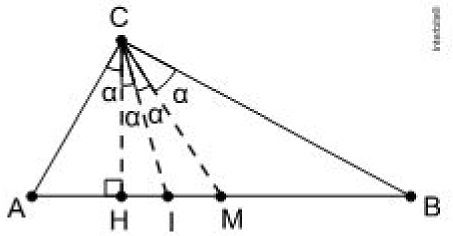


Seja *P* o ponto diametralmente oposto ao ponto *C* e *H* o pé da perpendicular baixada de *C* sobre *AB.* É fácil ver que $A\hat{C}B \equiv B\hat{P}C$ e $A\hat{H}C \equiv C\hat{B}P$ (pois *CP* é diâmetro). Logo, $A\hat{C}H \equiv B\hat{C}P$ e, portanto, o diâmetro *CP* contém a mediana do triângulo *ABC* relativa ao vértice *C* e o circuncentro *O* do triângulo *ABC.* Além disso, como *O* é a interseção da mediana relativa ao vértice *C* e da mediatriz de *AB,* segue que *M=O,* com *M* sendo o ponto médio do lado *AB.* Por conseguinte, o triângulo *ABC* é retângulo em *C.*

a) Como o triângulo *ABC* é retângulo em *C,* temos

$$\overline{CM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{l}{2}..$$

b) Sendo *I* o pé da bissetriz por *C,* considere a figura.



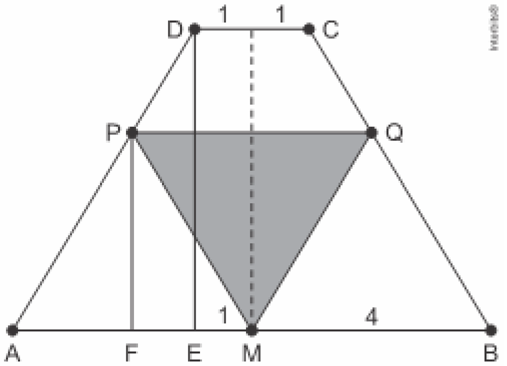
Sejam $A\hat{C}H \equiv H\hat{C}I \equiv I\hat{C}M \equiv M\hat{C}B = \alpha$. Logo, $A\hat{C}B = 4\alpha \Leftrightarrow 90° = 4\alpha \Leftrightarrow \alpha = 22°30'$. Portanto, $B\hat{A}C = 90° - A\hat{C}h = 90° - 22°30'\ 67°30'$.

e

$A\hat{B}C = 90° - B\hat{A}C = 90° - 67°30' = 22°30'$.

Exercício 90

De acordo com o enunciado:



Assim, o triângulo *AED* é retângulo do tipo 3-4-5 e os triângulos *AED* e *AFP* são semelhantes. O segmento *PF* é a altura *h* do triângulo *MPQ.* Assim, tem-se:

$$\frac{x}{AD} = \frac{h}{DE} = \frac{AF}{AE} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{h}{4} = \frac{AF}{3} \Rightarrow \begin{cases} AF = \dfrac{3x}{5} \\ h = \dfrac{4x}{5} \end{cases}$$

a) Calculando:

$$S = \frac{1}{25} \cdot (-12x^2 + 80x) \Rightarrow S = \frac{1}{25} \cdot (-12 \cdot 4 + 80 \cdot 2) = \frac{112}{25} = 4{,}48$$

b) Calculando:

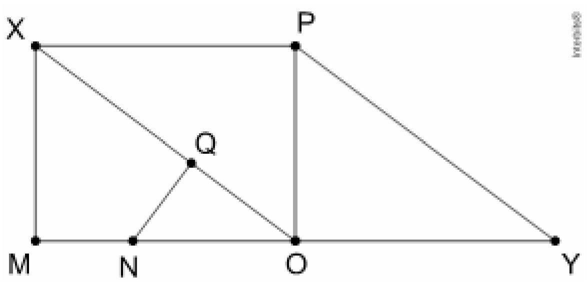
$$S(x) = \frac{1}{25} \cdot (-12x^2 + 80x)$$

$$x_{máx} = \frac{80}{-12 \cdot 2} = \frac{10}{3}$$

$$S\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{1}{25} \cdot \left(-12 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 + 80 \cdot \frac{10}{3}\right) = 4 \cdot \left(\frac{-12}{9} + \frac{8}{3}\right) = \frac{16}{3}$$

Exercício 91

a) Considere a figura.



Se *XPYO* é paralelogramo e *XPOM* é retângulo, então $\overline{XP} = \overline{OY} = \overline{MO} = 8$ e $\overline{XO} = \overline{PY}$. Logo, como $\overline{MN} = \overline{NQ} = 3$, temos $\overline{NO} = 5$ e, portanto, dado que *NOQ* é pitagórico, podemos concluir que $\overline{OQ} = 4$.

Em consequência, sendo os triângulos *QON* e *MOX* semelhantes por AA, vem

$$\frac{\overline{MX}}{\overline{QN}} = \frac{\overline{MO}}{\overline{QO}} \Leftrightarrow \frac{\overline{MX}}{3} = \frac{8}{4}$$
$$\Leftrightarrow \overline{MX} = 6.$$

Ainda pela semelhança, segue de imediato que $\overline{OX} = 10$ e, assim, temos $\overline{QX} = 6$.

Por conseguinte, as ruas *C* e *K* medem *6.*

b) Os caminhos mais curtos são $\overline{XQ} + \overline{QO} + \overline{OY} = 18$ e $\overline{XP} + \overline{PY} = 18$.

Exercício 92

a) Supondo que $C\hat{A}B \equiv B\hat{E}D = 90°$, é fácil ver que os triângulos *ABC* e *EBD* são semelhantes por AA. Desse modo, temos

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{24}{2{,}5}$$
$$\Leftrightarrow x = 19{,}2\ m.$$

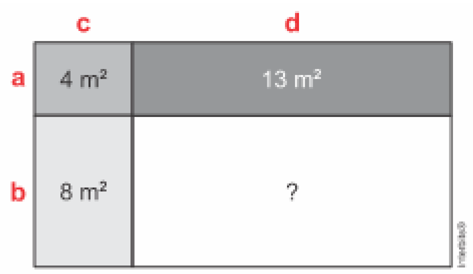
b) Queremos mostrar que $\overline{BM} = 2 \cdot \overline{ME}$.

De fato, sabendo que *D* e *E* são pontos médios de *AB* e *AC,* respectivamente, tem-se que *DE* é base média do triângulo *ABC* e, portanto, $\overline{DE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC}$ e *DE*∥*BC.* Em consequência, os triângulos *DEM* e *BCM* são semelhantes por AA. Daí,

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} \Rightarrow \frac{\overline{BM}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{BC}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{BC}}$$
$$\Leftrightarrow \overline{BM} = 2 \cdot \overline{ME}.$$

Exercício 93

a) Calculando:



$$\begin{cases} ac = 4 \\ bc = 8 \\ ad = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{ac}{bc} = \dfrac{4}{8} \Rightarrow b = 2a \\ \dfrac{ac}{ad} = \dfrac{4}{13} \Rightarrow d = \dfrac{13c}{4} \end{cases}$$

$$bd = 2a \cdot \frac{13c}{4} = \frac{13}{2} ac = \frac{13}{2} \cdot 4 \Rightarrow bd = 26\ m^2$$

$$A = 4 + 8 + 13 + 26 = 51\ m^2$$

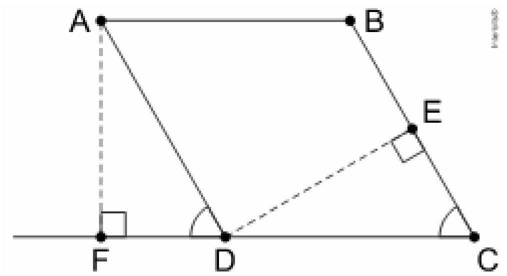
b) Calculando:

$$PQWTUVR = (PQR + STU) - SWV$$

$$PQWTUVR = 3 \cdot 6 + 3 \cdot 69 - 9 = 27\ cm$$

Exercício 94

a) Considere a figura.



Desde que $A\hat{D}F \equiv B\hat{C}D, A\hat{F}D \equiv D\hat{E}C$ e $\overline{AF} = \overline{DE}$, podemos afirmar que *ADF* e *DEC* são congruentes por LAA_o. Logo, vem $\overline{AB} = \overline{AD}$ e, assim, *ABCD* é losango.

A resposta é, portanto, igual a

$$\begin{aligned} 2p_{ABCD} &= 4 \cdot \overline{AD} \\ &= 4 \cdot \frac{\overline{AF}}{\operatorname{sen}\alpha} \\ &= 4 \cdot \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= 8\sqrt{3}\text{ cm}. \end{aligned}$$

b) A área de *ABCD* é dada por

$$\begin{aligned} (ABCD) &= \overline{CD} \cdot \overline{AF} \\ &= \frac{\overline{AF}}{\operatorname{sen}\alpha} \cdot \overline{AF} \\ &= \frac{\overline{AF}^2}{\operatorname{sen}\alpha}. \end{aligned}$$

Logo, sendo $\overline{AF} = 3cm$ e $0° < \alpha \leq 90°$, podemos concluir que a área de ABCD é mínima quando $sen\ \alpha$ é máximo, ou seja, quando $sen\ \alpha = 1.$

A resposta é $9\ cm^2.$

Exercício 95

a) A área do setor é igual a

$$\frac{120°}{360°} \cdot \pi \cdot 4^2 = \frac{16\pi}{3} cm^2.$$

b) Como $\overline{CA} = \overline{CB} = 4cm$, tem-se que o triângulo ABC é isósceles de base AB. Logo, se $\alpha = 120°$, então

$$B\hat{A}C \equiv C\hat{B}A = \frac{180° - 120°}{2} = 30°.$$

Daí, pela Lei dos Senos, vem

$$\frac{\overline{AB}}{sen\ \alpha} = \frac{\overline{AC}}{sen\ A\hat{B}C} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = 4\sqrt{3}cm.$$

Ademais, pela Lei dos Cossenos, no triângulo ABD, encontramos

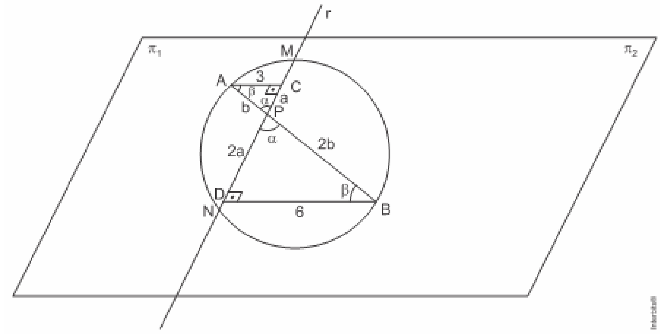
$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot cos\ B\hat{A}D \Leftrightarrow$$

$$\overline{BD}^2 = (4\sqrt{3})^2 + 7^2 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\overline{BD} = \sqrt{13}cm.$$

Exercício 96

Do enunciado, temos a figura:



Na figura, os triângulos *ACP* e *BDP* são semelhantes, pelo caso *AA*.

Como *AB=15,*

3b=15
b=5

Em relação ao ponto *P,*

$$PM \cdot PN = b \cdot 2b$$

$$PM \cdot PN = 2 \cdot 5^2 = 50$$

Sejam $PM = x$ e $PN = y,$

$$x \cdot y = 50 \Rightarrow y = \frac{50}{x}$$

$$MN = MP + PN = x + y$$

$$MN = x + \frac{50}{x}$$

Note que:

$$\left(\sqrt{x} - \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 = x + \frac{50}{x} - 10\sqrt{2}$$

Daí,

$$MN = x + \frac{50}{x} - 10\sqrt{2} + 10\sqrt{2}$$

$$MN = \left(\sqrt{x} - \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 + 10\sqrt{2}$$

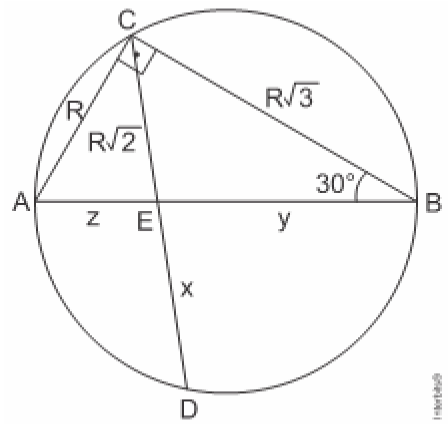
como $\left(\sqrt{x} - \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0,$

$$mínimo(MN) = 10\sqrt{2}$$

Assim, a menor distância entre os pontos *M* e *N* é $10\sqrt{2}.$
Resposta: A menor distância possível entre os pontos *M* e *N* é . $10\sqrt{2}.$

Exercício 97

Do enunciado, tem-se a seguinte figura:



Como $\overline{AB}$ é diâmetro, $A\hat{C}B = 90°.$
No triângulo $ABC,$

$$sen30° = \frac{AC}{2R}$$

$$AC = R$$

No triângulo $ABC,$

$$cos\,30° = \frac{BC}{2R}$$

$$BC = R\sqrt{3}$$

No triângulo $CEB,$

$$(R\sqrt{2})^2 = (R\sqrt{3})^2 + y^2 - 2 \cdot R\sqrt{3} \cdot y \cdot cos\,30°$$

$$2R^2 = 3R^2 + y^2 - 2R\sqrt{3} \cdot y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y^2 - 3Ry - R^2 = 0$$

$$y = \frac{3R \pm \sqrt{(-3R)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-R^2)}}{2}$$

$$y = \frac{3R \pm R\sqrt{5}}{2}$$

$$y < 2R,$$

$$y = \frac{3R - R\sqrt{5}}{2}$$

$$y = \frac{R(3 - \sqrt{5})}{2}$$

$y + z = 2R$ e $y = \frac{R(3 - \sqrt{5})}{2}$

$$\frac{R(3 - \sqrt{5})}{2} + z = 2R$$

$$z = 2R - \frac{R(3 - \sqrt{5})}{2}$$

$$z = \frac{4R - R(3 - \sqrt{5})}{2}$$

$$z = \frac{R(4 - 3 + \sqrt{5})}{2}$$

$$z = \frac{(1 + \sqrt{5})}{2}R$$

Então,

$$x \cdot R\sqrt{2} = y \cdot z$$

$$x \cdot R\sqrt{2} = \frac{R(3 - \sqrt{5})}{2} \cdot \frac{R(1 + \sqrt{5})}{2}$$

$$x = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

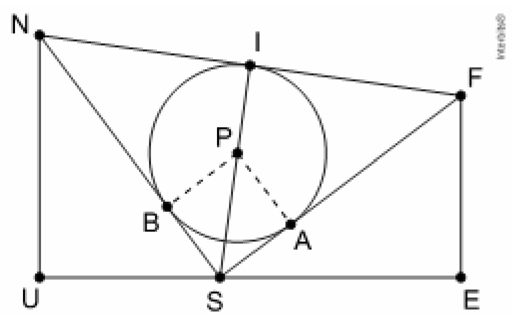
$$x = \frac{R(\sqrt{5} - 1) \cdot \sqrt{2}}{4}$$

$$ED = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{5} - 1)R}{4}$$

Resposta: A medida do segmento $\overline{ED}$ é $\frac{\sqrt{2}.(\sqrt{5}-1)R}{4}$

Exercício 98

a) Se $\overline{EF} = 6cm, \overline{ES} = 8cm$ e $F\hat{E}S = 90°,$ então o triângulo retângulo EFS é semelhante ao triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5. Em consequência, temos $\overline{FS} = 10cm.$
Considere a figura.



Sendo *FI* e *FA* segmentos tangentes à circunferência de centro em *P* e raio *PI*, temos $\overline{FI} = \overline{FA}.$ Além disso, de modo inteiramente análogo, concluímos que $\overline{NI} = \overline{NB}$ e $\overline{SA} = \overline{SB}.$
Adicionalmente, sabendo que *I* é ponto médio de *FN*, podemos afirmar que $\overline{FS} = \overline{NS} = 10cm.$

Como $\overline{UN} = 8cm$ e $N\hat{U}S = 90°$, os triângulos *EFS* e *USN* são congruentes, com $\overline{US} = 6cm$. Daí, segue que a área do trapézio *UNFE* é igual a

$$\frac{(\overline{UN} + \overline{EF})}{2} \cdot (\overline{US} + \overline{ES}) = \frac{8+6}{2} \cdot 14 = 98\ cm^2.$$

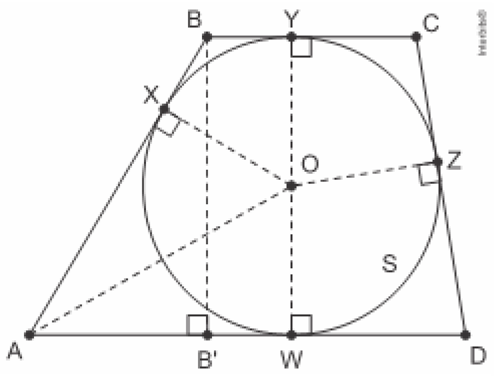
b) Uma vez que $N\hat{S}U + F\hat{S}E = 90°$, temos $A\hat{S}B = 90°$ e, portanto, *APBS* é quadrado. Logo, vem $\overline{FN} = 10\sqrt{2}cm$ e, assim, obtemos $\overline{FI} = 5\sqrt{2}cm$. Ademais, $\overline{PA} = \overline{AS}$ implica em $\overline{FS} - \overline{PA} = \overline{FA} \Leftrightarrow \overline{PA} = 10 - 5\sqrt{2}cm$.

A resposta é dada por

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot \overline{FS} \cdot \overline{NS} - \pi \cdot \overline{PA}^2 &= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 - \pi \cdot (10 - 5\sqrt{2})^2 \\ &= 50(1 - \pi(3 - 2\sqrt{2}))\ cm^2.\end{aligned}$$

Exercício 99

Considere a figura.



a) Sendo $\overline{YW} = \overline{BB'} = 10$, do triângulo ABB', vem

$$\begin{aligned}sen\ B\hat{A}W = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB}} &\Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{10}{\overline{AB}} \\ &\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{50}{3}.\end{aligned}$$

b) Se $sen\ B\hat{A}W = \frac{3}{5}$, então

$$\begin{aligned}cos^2\ B\hat{A}W = 1 - sen^2\ B\hat{A}W \Rightarrow cos\ B\hat{A}W &= \sqrt{1 - \frac{9}{25}} \\ \Rightarrow cos\ B\hat{A}W &= \frac{4}{5}.\end{aligned}$$

Logo, do triângulo ABB', encontramos

$$\begin{aligned}cos\ B\hat{A}W = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} &\Leftrightarrow \frac{4}{5} = \frac{\overline{AB'}}{\frac{50}{3}} \\ &\Leftrightarrow \overline{AB'} = \frac{40}{3}.\end{aligned}$$

Pela propriedade dos segmentos tangentes, temos $\overline{BX} = \overline{BY} = m$ e $\overline{AW} = \overline{AX}$. Ademais, como $BYWB'$ é retângulo, vem $\overline{B'W} = m$. Em consequência, podemos escrever

$$\overline{AX} = \overline{AB} - \overline{BX} \Leftrightarrow \overline{AX} = \frac{50}{3} - m$$

e

$$\overline{AW} = \overline{AB'} + \overline{B'W} \Leftrightarrow \overline{AW} = \frac{40}{3} + m.$$

Donde obtemos

$$\frac{40}{3} + m = \frac{50}{3} - m \Leftrightarrow m = \frac{5}{3}.$$

Por conseguinte, vem

$$\overline{AW} = \overline{AX} = \frac{40}{3} + \frac{5}{3} = 15.$$

c) Como $ABCD$ é circunscritível, pelo Teorema de Pitot, temos

$$\begin{aligned}(ABCD) &= \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{YW} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{95}{3} \cdot 10 \\ &= \frac{475}{3}.\end{aligned}$$

Portanto, segue que a resposta é

$$\begin{aligned}(ABCD) &= \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{YW} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{95}{3} \cdot 10 \\ &= \frac{475}{3}.\end{aligned}$$

Exercício 100

48.

Se o prisma é regular reto, então

$$2\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a = 4cm$$

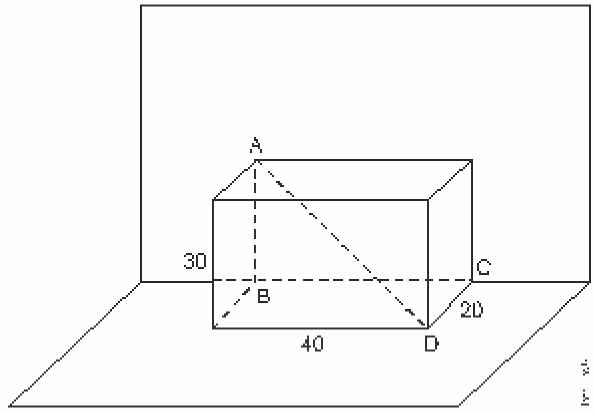
Em consequência, o volume do prisma é dado por

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^2}{4} = \frac{3.4^3}{4} = 48cm^2$$

Exercício 101

$10\sqrt{29}cm.$

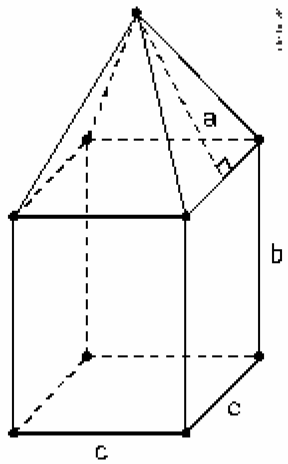
Considerando que $\overline{AD}$ é a diagonal de um paralelepípedo reto retângulo, temos:



$AD = \sqrt{40^2 + 30^2 + 20^2} AD = \sqrt{2900} AD = 10\sqrt{29}$

Exercício 102

Considere a figura.

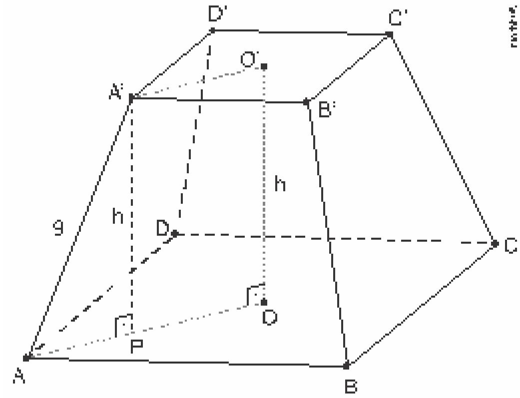


a) Da figura, segue que o poliedro possui 9 vértices e 16 arestas.

b) Seja h a altura da pirâmide. Desde que $\frac{c}{2} = 5cm$ é a medida do apótema da base da mesma e $a = 13cm$ é a medida do apótema da pirâmide, segue de imediato que $h = 12cm$. De fato, trata-se do triângulo retângulo pitagórico de lados 5, 12 e 13.
O volume do poliedro corresponde à soma dos volumes do paralelepípedo e da pirâmide que o constituem. Portanto, a resposta é

$c^2. b + \frac{1}{3}. c^2. h = 10^2.16 + \frac{1}{3}.10^2.12 \qquad = 2000cm^3$

Exercício 103



$A'O' = 3\sqrt{2} AO = 6\sqrt{2} \implies AP = 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

Calculando a altura do tronco de pirâmide, temos:

$h^2 + (3\sqrt{2})^2 = 9^2 h^2 = 63 h = 3\sqrt{7}$

Calculando, agora , o volume do tronco,

$V = \frac{h}{3}(S + S' + \sqrt{SS'})V = \frac{3\sqrt{7}}{3}. (12^2 + 6^2 + \sqrt{6^2 + 12^2})V = \sqrt{7}. (144 + 3$

Exercício 104

a) Calculando:
$Perímetro = 2\pi R = 2.3, 1.24 = 148, 8m$
b) Calculando:

$V_{total} = V_{cilindo} + V_{cone} V_{cilindro} = \pi R^2. h = 3, 1.24^2.22 = 39283, 2V_{co}$

Exercício 105

Sejam n, n - 5 e n - 10 respectivamente, as quantidades de arestas, faces triangulares e quadrangulares.
Então,
$n = \frac{3.(n-5)+4.(n-10)}{2} 2n = 3n - 15 + 4n - 40 n = 11$
Logo, o poliedro possui 11 arestas, 6 faces triangulares e 1 face quadrangular, ou seja, possui 7 faces.
Dessa forma, sendo V o número de vértices do poliedro, temos:
$V - 11 + 7 = 2V = 6$

Resposta: Seis vértices.

Exercício 106

Sabendo que o volume de um tronco de cone de altura h e raios das bases R e r é dado por $\frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$, segue que o volume do copo é dado pela expressão

$\frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2) - \frac{2\pi}{3} r_e^3,$

com r_e sendo o raio da esfera.

Portanto, considerando a aproximação fornecida, a altura pedida é tal que

$\frac{3,14.h}{3}(3^2 + 3.2 + 2^2) - \frac{2.3,14}{3}. (1,5)^3 = 157 \iff \quad \frac{3,1}{3}$

Exercício 107

a) Calculando:

$a^3 = 64 \implies a = 4\ cm h = \frac{a}{2} \implies h = 2\ cm V = \frac{1}{3}.a^2.h = \frac{1}{3}.4^2.2 \implies V = \frac{32}{3}$

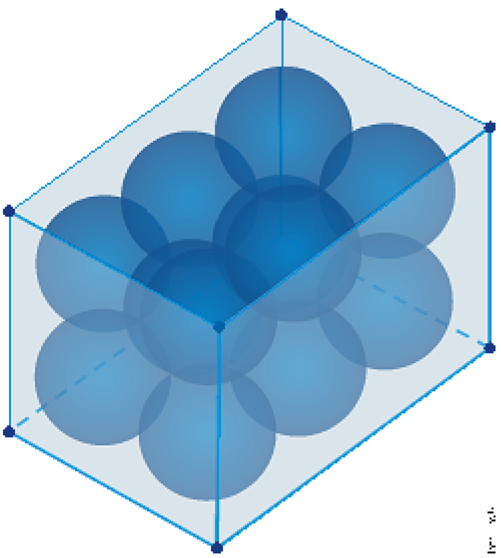
b) A bola.
Calculando:

$\overline{AC} = r =$ raio da base do cilindro $r^2 + 5^2 = 13^2 \implies r = 12$

$$\left. \begin{array}{l} V_{bola} = \frac{4}{3}.\pi.13^3 \approx 2929,33\pi\ cm^3 \\ V_{cilindro} = \pi.12^2.20 = 2880\pi\ cm^3 \end{array} \right) \implies V_{bola} > V_{cilindro}$$

Exercício 108

De acordo com as informações, uma possível configuração das esferas na caixa é a que segue.



Com efeito, sendo 4R, 4R e 6R as dimensões da caixa, temos

$$12.\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi}{6}.4R.4R.6R \implies 16\pi R^3 = 16\pi R^3$$

Portanto, as dimensões da caixa são 4R, 4R e 6R.

Exercício 109

Seja R o raio da esfera.

A área do triângulo VSQ é dada por

$$(VSQ) = \frac{\overline{SQ}.\overline{VO}}{2} = \frac{6\sqrt{2}.2}{2} = 6\sqrt{2}\ m^2.$$

Sabendo que $\overline{OQ} = \frac{\overline{QS}}{2} = 3\sqrt{2}$, pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo VOQ obtemos

$$\overline{VQ}^2 = \overline{VO}^2 + \overline{OQ}^2 \iff \overline{VQ}^2 = 2^2 + (3\sqrt{2})^2 \iff \overline{VQ}^2 = 22\ m^2$$

Portanto, como os pontos V, S e Q pertencem a um círculo máximo da esfera e $\overline{VS} = \overline{VQ}$ tem-se

$$(VSQ) = \frac{\overline{VS}.\overline{VQ}.\overline{QS}}{4R} \iff 6\sqrt{2} = \frac{22.6\sqrt{2}}{4R} \iff R = \frac{11}{2}$$

Exercício 110

a) O volume de água na esfera é dado por

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 2^3 = \frac{32}{3}\pi\ m^3.$$

b) Como o cilindro é equilátero, segue que sua capacidade volumétrica é dada por

$$2\pi R^3 = 2\pi.2^3 = 16\pi\ m^3.$$

c) A altura h do nível da água no cilindro, caso a esfera quebre é tal que

$$\pi.2^2.h = \frac{32}{3}.\pi \iff h = \frac{8}{3}\ m.$$

Exercício 111

a) Calculando:

n ímpar $\Rightarrow a_n = 2 + 4n \Rightarrow (6,\ 14,\ 22, \ldots,\ 78)$ n par $\Rightarrow a_n = 4 + 6n \Rightarrow ($

b) Calculando:

$1 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 100 + 101 = 347 a_{13}$

Exercício 112

Os tempos gastos para que a vela derreta cada *1 cm* formam uma P.A. de primeiro termo *30* e razão *30:*
P.A. (30, 60, 90, 120, 150,...).

Como a vela tem *25 cm,* podemos calcular o tempo gasto para que seja derretido o vigésimo quinto centímetro, através do termo geral da P.A.

$$a_{25} = a_1 + 24 \cdot r a_{25} = 20 + 24 \cdot 30 a_{25} = 750\ segundos.$$

Somando todos os *25* tempos, teremos o tempo total para derreter a vela toda.

$$S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(30 + 750) \cdot 25}{2} = 9750 = 2\ \ horas,\ \ 42\ \ minutos$$

Exercício 113

Considere como sendo r a razão da PA. Como a_1, a_2 e a_{10} estão em PG, pode-se escrever:

$$(a_2)^2 = a_1 \cdot a_{10} \Rightarrow (a_1 + r)^2 = a_1 \cdot (a_1 + 9r) \Rightarrow (a_1)^2 + 2 \cdot a_1 \cdot r + r^2 = ($$
$$r^2 = 9 \cdot a_1 \cdot r - 2 \cdot a_1 \cdot r \Rightarrow r^2 = 7 \cdot a_1 \cdot r \Rightarrow r = 7 \cdot a_1$$

Como a_6, a_j e a_{25} estão em PG, pode-se escrever:

$(a_j)^2 = a_6 \cdot a_{25} \Rightarrow [a_1 + (j-1)\cdot r]^2 = (a_1 + 5r)\cdot(a_1 + 24r) \Rightarrow (7a_1 j - 6a_1)^2 = (a_1 + 5\cdot 7a_1)\cdot(a_1 + 24\cdot 7a_1)(a_1)^2\cdot(7j-6)^2 = (a_1)^2\cdot(1+35)\cdot(1+1$

Exercício 114

Como *a* e *b* são raízes da equação $x^2 - 4x + M = 0$,
$a \cdot b = M$ e $a + b = 4$.

Como *c* e *d* são raízes da equação $x^2 - 36x + N = 0$,
$c \cdot d = N$ e $c + d = 36$.

Sendo *q* a razão da PG,
$a + aq = 4 \qquad (i)\ e\ aq^2 + aq^3 = 36 \qquad (ii)$

Das equações (i) e (ii),
$$\frac{aq^2(1+q)}{a(1+q)} = \frac{36}{4}q^2 = 9$$

Como a PG é crescente, *q = 3.*
Substituindo *q = 3* na equação (i),
$a + 3a = 44a = 4a = 1$

Daí, *b = 3, c = 9* e *d = 27.*

Logo,
M = 3 e *N = 243,* ou seja, *M + N = 246.*

Exercício 115

a) Se *(a_1, a_2, a_3)* é uma progressão geométrica, $a_3 = 3$ e *w = 2,* então
$$(a_1,\ a_2,\ a_3) = (\frac{3}{2^2},\ \frac{3}{2},\ 3) = (\frac{3}{4},\ \frac{3}{2},\ 3).$$

Ademais, se *(a_3, a_4, a_5)* é uma progressão aritmética, então
$(a_3,\ a_4,\ a_5) = (3,\ 3+2,\ 3+2\cdot 2) = (3,\ 5,\ 7).$

Portanto, temos
$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5) = (\frac{3}{4},\ \frac{3}{2},\ 3,\ 5,\ 7).$$

b) Se $a_1 = 1$, então
$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5) = (1,\ w,\ w^2,\ w^2 + w,\ w^2 + 2w).$

Mas $a_5 = 8$ e, portanto, vem
$w^2 + 2w = 8 \Leftrightarrow (w+1)^2 = 9 \qquad \Leftrightarrow w + 1 = \pm 3 \qquad \Leftrightarrow w = -4\ ou\ w = 2.$

Em consequência, temos
$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5) = (1,\ -4,\ 16,\ 12,\ 8)$
ou
$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5) = (1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8).$

Exercício 116

a) Bianca pode escolher 5 balas de $\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!.2!} = 21$ modos e 3 pirulitos de $\binom{5}{3} = 5!3!.2! = 10$ maneiras. Ademais, ela pode escolher 3 balas de $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!.4!} = 35$ modos e 4 pirulitos de $\binom{5}{4} = 5$ maneiras. Portanto, existem $21.10 + 35.5 = 385$ possibilidades de fazer um saquinho.
O preço de cada pirulito é tal que
$5.0,25 + 3x = 3.0,25 + 4x \iff x = R\$0,50.$

b) O número de possibilidades em que são escolhidos uma bala e um pirulito de morango é:
$\binom{6}{4}.\binom{4}{2} + \binom{6}{2}.\binom{4}{3} =$
$= \frac{6!}{4!.2!}.\frac{4!}{2!.2!} + \frac{6!}{2!.4!}.4 =$
$= 15.6 + 15.4 = 150$
De modo inteiramente análogo, o número de possibilidades em que são escolhidos uma bala e um pirulito de framboesa é igual a 150.
O número de possibilidades de escolher ambos os sabores repetidos é
$\binom{5}{3}.\binom{3}{1} + \binom{5}{1}.\binom{3}{2} = 10.3 + 5.3 = 45.$

Portanto, pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, segue que o número de modos de fazer um saquinho com pelo menos um sabor repetido é $150 + 150 - 45 = 255$
Finalmente, como essas possibilidades estão inclusas no resultado encontrado no item (a), podemos concluir que a resposta é $385 - 255 = 130$.

Exercício 117

Do enunciado, temos:

	1	2	3	4
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)

Note que:
$1 + 1 = 21 + 2 = 31 + 4 = 52 + 1 = 32 + 3 = 53 + 2 = 53 + 4 = 74 + 1 = 5$
Assim, há 9 maneiras de a soma resultar em um número primo.

Exercício 118

a) $A_{8,6} = \frac{8!}{(8-6)!} = 20160.$

b) $C_{5,2}.P_3.2.2.2 = 10.6.8 = 480.$

c) Cadeiras que ficarão vazias: $C_{8,2} = 28.$
$28.3!.3!.2 = 2016.$

Exercício 119

a) O número total de triângulos será o número total de combinações possíveis de pontos três a três, menos o número de combinações de pontos colineares. Assim, pode-se escrever:

$$N^o total \implies C_3^{13} = \frac{13!}{3!.10!} = \frac{13.12.11}{3.2} = 286.$$

Pontos colineares sobre o eixo
$y = (0, -3), (0, -2), (0, -1), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 0) \Rightarrow C_3^7.$

Pontos colineares sobre o eixo
$x = (-3, 0), (-2, 0), (-1,), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (0, 0) \Rightarrow C_3^7.$

Ponto colineares $\Rightarrow 2.C_3^7 = 2.\dfrac{7!}{3!.4!} = 2.\dfrac{7.6.5}{3.2} = 70.$

Nº de triângulos $= 286 - 70 = 216.$

b) Todos os pontos do conjunto dado estão sobre um dos eixos do plano cartesiano. Assim, se dois vértices estão sobre o eixo y então o terceiro vértice está necessariamente sobre o eixo x (considerando o conjunto dado). O número total de escolhas de dois pontos sobre o eixo y será:
$C_2^7 = \dfrac{7!}{2!.5!} = \dfrac{7.6}{2} = 21.$
Para o terceiro vértice há 6 possibilidades de escolha (pontos sobre o eixo y. Assim, o número de triângulos possíveis será de 21 . 6 = 126.

Exercício 120

a) Temos que:

6p	5p	4p	3p

Onde p representa a palavra possibilidade. Dessa forma, temos: 6 . 5 . 4 . 3 = 360.

b) Como queremos que o numero seja divisível por 5, temos que o algarismo das unidades tem que ser 5, tendo então:

5p	4p	3p	1p

Como p representa a palavra possibilidade o 1p representa o único número que pode ser colocado naquela casa. Dessa forma, temos: 5 . 4 . 3 . 1 = 60.

c)

4p	3p	1	6	+	4p	3p	3	6	+	4p	3p	5	6	+	4p	3p	6	8	+	4p	3p	9	6

Assim, 4 . 3 . 5 = 60.

Exercício 121

O termo geral do binômio é dado por
$T_{p+1} = \binom{10}{p}.1^{10-p}.\left(\frac{1}{3}\right)^p = \dfrac{10!}{p!.(10-p)!}.\dfrac{1}{3^p}.$

Como $10! = 10.9.8.7.6.5.4.3.2 = 3^4.10.8.7.2.5.4.2,$ segue que a maior potência de 3 que divide 10! é 3^4.

Assim, $p \in 0, 1, 2, 3, 4.$ Desses valores, os únicos que produzem parcelas inteiras são 0 e 2. Portanto, duas parcelas do binômio dado são números inteiros.

Exercício 122

$$1000.(1 + \frac{1}{100})^{100} = 1000.\left(\binom{100}{0}.1^{100}.\left(\frac{1}{100}\right)^0 + \binom{100}{1}.1^{99}.\left(\frac{1}{100}\right)^1 + \binom{100}{2}.1^{98}.\left(\frac{1}{100}\right)^2 + \cdots + \binom{100}{0}.1^{100}.\left(\frac{1}{100}\right)^0\right) =$$

$$1000.(1 + \frac{1}{100})^{100} = 1000.\left(1 + 1 + \frac{99}{200} + \cdots + \binom{100}{0}.1^{100}.\left(\frac{1}{100}\right)^0\right) =$$

$$2495 + 1000.\binom{100}{0}.1^{100}.\left(\frac{1}{100}\right)^0.$$

Logo, o montante resgatado será suficiente para comprar o computador de R$ 2490,00.

Exercício 123

[04] Verdadeira. O termo geral no desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^8$, é:

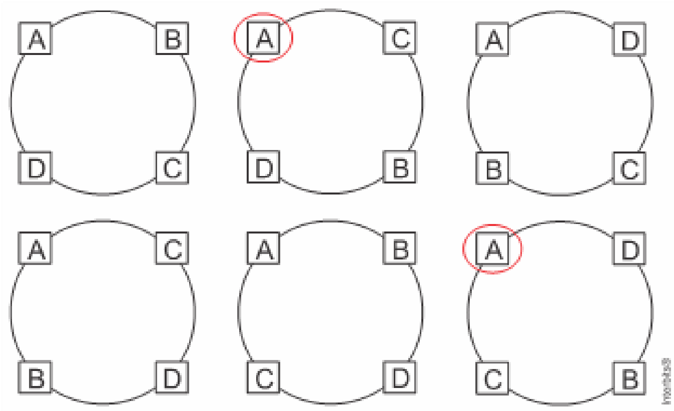
$$\binom{8}{p} \cdot (x^2)^p \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^{8-p}$$
$$\binom{8}{p} \cdot x^{2p} \cdot \frac{1^{8-p}}{(x^2)^{8-p}}$$
$$\binom{8}{p} \cdot x^{2p} \cdot \frac{1}{x^{16-2p}}$$
$$\binom{8}{p} \cdot x^{4p-16}$$

Fazendo $4p - 16 = 0,$
p=4

Logo, o termo independente de $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^8$ é:
$\binom{8}{4} = \dfrac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$

Exercício 124

INCORRETO. Se existem 4 crianças, então há possibilidades de disposição das crianças. Fazendo as possibilidades de disposição, tem-se:



Assim, dentre as 6 possibilidades de disposição possíveis, há apenas duas em que Arnaldo senta-se exatamente entre Carlos e Diego. Ou seja, a chance de Arnaldo estar entre Carlos e Diego é de:
26=13→33,33%

Exercício 125

a) $\binom{6}{4} = \dfrac{6!}{2!.4!} = \dfrac{6.5.4!}{2!.4!} = 15.$

b) $\dfrac{\binom{12}{4}}{\binom{12}{5}} = \dfrac{\frac{12\,!}{8\,!\,.4\,!}}{\frac{12\,!}{7\,!\,.5\,!}} = \dfrac{12\,!}{8\,!\,.4\,!} . \dfrac{7\,!\,.5\,!}{12\,!} = \dfrac{7\,!\,.5.4\,!}{8.7\,!\,.4\,!} = \dfrac{5}{8}.$

c) $\dfrac{\binom{n}{p}}{1} = \dfrac{\binom{n}{p+1}}{2} = \dfrac{\binom{n}{p+2}}{3}$

$$\dfrac{\binom{n}{p}}{1} = \dfrac{\binom{n}{p+1}}{2} = \dfrac{\binom{n}{p+2}}{3} \Rightarrow 2.\dfrac{n\,!}{(n-p)\,!\,.p\,!} = \dfrac{n\,!}{(n-p-1)\,!\,.(p+1)\,!}$$

$$2 = \dfrac{(n-p)\,.(n-p-1)\,!\,.p\,!}{(n-p-1)\,!\,.(p+1)\,.p\,!} \Rightarrow 2p + 2 = n - p \Rightarrow n - 3p = 2 \ (Equação\ I)$$

$$\dfrac{\binom{n}{p+1}}{2} = \dfrac{\binom{n}{p+2}}{3} \Rightarrow 3.\dfrac{n\,!}{(n-p-2)\,!\,.(p+2)\,!} = 2.\dfrac{n\,!}{(n-p-2)\,!\,.(p+2)\,!}$$

$$\dfrac{3.(p+2)\,.(p+1)\,!}{(p+1)\,!} = \dfrac{2.(n-p-1)\,.(n-p-2)\,!}{(n-p-2)\,!}$$

$$3p + 6 = 2n - 2p - 2 \Rightarrow 2n - 5p = 2 \ (Equação\ II)$$

$$\begin{cases} n - 3p = 2 \quad .(-2) \\ 2n - p = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2n + 6p = -4 \\ 2n - 59 = 8 \end{cases} \Rightarrow p = 4$$

Logo, $n - 3.4 = 2 \Rightarrow n = 14$.

Considerando que n=14 e p=4 satisfazem as condições de existência dos números binomiais dados, conclui-se que n=14 e p=4.

Exercício 126

a) O número de resultados possíveis é $6.2.1 + 6.4.1 = 36$, de tal sorte que a soma dos números de cada um desses resultados é um elemento do conjunto {8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17}. Em particular, tem-se que 9 figura duas vezes, 12 figura seis vezes e 15 figura quatro vezes. Portanto, segue que a probabilidade pedida é igual a $\frac{12}{36}$, ou seja, $\frac{1}{3}$.

b) Existem $\binom{3}{2}$ modos de sortear dois dados. Logo, a probabilidade de sortear dois dos três dados é $\frac{1}{3}$.

Se os dados sorteados forem A e B então o número de resultados possíveis é $6.2 + 6.4 = 36$. A soma dos números de cada um dos resultados possíveis é um elemento do conjunto {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}. Além disso, as somas 3 e 6 figuram duas vezes cada uma; e as somas 9 e 12 figuram quatro vezes cada uma.

Em consequência a probabilidade é $\frac{1}{3} . \frac{12}{36}$, isto é, $\frac{1}{9}$.

Se os dados sorteados forem A e C então o número de resultados possíveis é 6. A soma dos números de cada um dos resultados possíveis é um elemento do conjunto {6, 7, 8, 9, 10, 11}. Logo, como os únicos resultados favoráveis são 6 e 9, segue que a probabilidade é $\frac{1}{3} . \frac{2}{6}$, ou seja, $\frac{1}{9}$.

Se os dados sorteados forem B e C então o número de resultados possíveis é 6. A soma dos números de cada um dos resultados possíveis é um elemento do conjunto {7, 11}. Como nenhuma dessas somas é um múltiplo de 3, segue que a probabilidade é $\frac{1}{3} . \frac{0}{6}$, isto é, zero.

A resposta é, portanto, $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$.

Exercício 127

Vamos calcular, inicialmente, a probabilidade de todas as bolas serem azuis: $p = \frac{5}{7} . \frac{4}{6} . \frac{3}{5} . \frac{2}{4} = \frac{1}{7}$

Calculando, agora, a probabilidade de pelo menos uma ser vermelha, temos: $1 - p = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$.

Resposta: $\frac{6}{7}$.

Exercício 128

a) Cada time fará 5 - 1 = 4 jogos e, portanto, se um time possui quatro vitórias não pode haver outro time com o mesmo número de vitórias, já que todos os outros possuem no mínimo uma derrota.

b) Se a probabilidade de vencer um jogo é $\frac{1}{2}$ então a probabilidade de perder é $1 - \frac{1}{2}$. Logo, a probabilidade de que um time qualquer vença quatro jogos é dada por: $\binom{3}{4} . (\frac{1}{2})^4 . (\frac{1}{2})^0 = \frac{1}{16}$.

Ademais, como dois times não podem terminar a competição com quatro vitórias, segue que a resposta é $5.\frac{1}{16} = \frac{5}{16}$.

c) Sejam A, B, C, D e E os times. Desde que o número total de jogos é $\binom{5}{2} = \frac{5\,!}{2\,!\,.3\,!} = 10$, necessariamente haverá 10 vitórias. Logo, cada time deve vencer dois jogos e perder dois jogos.
A probabilidade do time A ter exatamente duas vitórias é dada por $\binom{4}{2} . (\frac{1}{2})^2 . (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{8}$.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que A venceu B e C e perdeu de D e E. Ademais, podemos ainda supor que B venceu C e D venceu E. Desse modo, temos:
1) C perdeu de A e B, assim deve vencer D e E o que ocorre com probabilidade $\frac{1}{2} . \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

2) D venceu A e E e perdeu de C. Portanto, deve perder de B, o que ocorre com probabilidade $\frac{1}{2}$.

3) B venceu C e D e perdeu de A. Logo, deve perder de E, o que ocorre com probabilidade $\frac{1}{2}$.

4) E venceu A e B e perdeu de C e D. Tais possibilidades já foram analisadas.

A resposta é $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{128}$.

Exercício 129

a) Existem $\binom{2n}{2}$ modos de definir o primeiro jogo, $\binom{2n-2}{2}$ maneiras de escolher os jogadores da segunda partida, e assim por diante. Logo, considerando que a ordem dos n emparceiramentos não importa, segue que o resultado é igual a

$$\frac{\binom{2n}{n} \cdot \binom{2n-2}{2} \cdot \cdots \cdot \binom{2}{2}}{n!} = \frac{\frac{(2n)!}{2!\,.\,(2n-2)!} \cdot \frac{(2n-2)!}{2!\,.\,(2n-4)!} \cdot \cdots .1}{n!} = \frac{(2n)!}{2^n . n!}$$

b) De (a), sabemos que o número de casos possíveis é dado por $\frac{12!}{2^6 . 6!}$. Além disso, o número de casos favoráveis é igual a

$$\frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}{3!} \cdot \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}{3!} = \left(\frac{\frac{6!}{2!.4!} \cdot \frac{4!}{2!.2!}}{3!}\right)^2 = 3^2 . 5^2.$$

Em consequência, a resposta é dada por: $\frac{3^2 . 5^2}{\frac{12!}{2^6 . 6!}} = \frac{5}{231}$.

Exercício 130

Calculando:

$P_{perder} = 1 - P_{ganhar}$

$P_{ganhar} = 1 . \left(\frac{1}{7}\right) . 1 . \left(\frac{1}{5}\right) . 1 . \left(\frac{1}{3}\right) . 1 . 1 = \frac{1}{105}$

$P_{perder} = 1 - \frac{1}{105} = \frac{104}{105}$.

Exercício 131

a) Pelo novo método, a pontuação do México será igual a $37.3 + 36.2 + 63 = 346$, enquanto que a do Canadá é $35.3 + 64.2 + 53 = 286$. Em consequência, pelo novo critério, Brasil e México trocariam de posição, assim como Argentina e Cuba. Os demais países permaneceriam na mesma posição.

b) Sabendo que em pelo menos duas edições o Brasil conquistou 141 medalhas, temos

$\frac{x + 141 + 141 + 157 + 171}{5} = 146,6 \Leftrightarrow x = 123$, com x sendo o número de medalhas conquistadas em Santo Domingo.

Portanto, como a média aritmética entre o menor e o maior número de medalhas é igual a $\frac{123 + 171}{2} = 147$, podemos concluir que o desvio padrão entre tais quantidades é

Exercício 132

a) Calculando a média:

Média $= \frac{10,75 + 6 + 9,5 + 11 + 5,25 + 7 + 10,5 + 8}{8} = 8,5.$

Calculando a mediana:

Lanchonete	Preço
E	R$ 5,25
B	R$ 6,00
F	R$ 7,00
H	R$ 8,00
C	R$ 9,50
G	R$ 10,50
A	R$ 10,75
D	R$ 11,00

Os valores intermediários são os das lanchonetes H e C, assim: $Mediana = \frac{8 + 9,5}{2} = 8,75.$

b) Sendo x o preço cobrado por cada uma das lanchonetes adicionadas, pode-se escrever:

$8,45 = \frac{10,75 + 6 + 9,5 + 11 + 5,25 + 7 + 10,5 + 8 + 2x}{10} \Rightarrow 84,5 = 68 + 2x$

Exercício 133

Considere a seguinte tabela.

Velocidade (v_i)	Frequência (f_i)	$v_i \cdot f_i$
50	0,05	2,5
60	0,15	9,0
70	0,20	14,0
80	0,30	24,0
90	0,20	18,0
100	0,10	10,0
		$\bar{v} = \Sigma v_i \cdot f_i = 77,5\ km/h.$

Portanto, os veículos que trafegaram no local durante o período, o fizeram com velocidade média igual a $\bar{v} = \Sigma v_i \cdot f_i = 77,5\ km/h.$

Exercício 134

a) Preenchendo a tabela de acordo com o enunciado temos:

n	1	2	3	4
Frequência de n	9	5	4	5
Frequência				

relativa de n	$\frac{9}{30} = \frac{3}{10}$	$\frac{5}{30} \cong 16,67\%$	$\frac{4}{30} \cong 13,33\%$	$\frac{5}{30} \cong 16,67\%$

b) Calculando pelo modelo da lei de Benford, isto é, $P(n) = log(\frac{n+1}{n})$ temos:

$$P(2) = log(\frac{2+1}{2}) = log(\frac{3}{2}) = log3 - log2 = 0,48 - 0,30 = 0,18 = 18\% \implies |18\% - 16,67\%| < 4\%.$$

$$P(3) = log(\frac{3+1}{3}) = log(\frac{4}{3}) = log4 - log3 = 0,60 - 0,48 = 0,12 = 12\% \implies |12\% - 13,33\%| < 4\%.$$

$$P(4) = log(\frac{4+1}{4}) = log(\frac{5}{4}) = log5 - log4 = 0,70 - 0,60 = 0,1 = 10\% \implies |10\% - 16,67\%| > 4\%.$$

Portanto, deverá ir para a malha fina.

Exercício 135

a) **A média:**

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{12} x_i = \frac{21 + 24 + 20 + 23 + 22 + 22 + 18 + 17 + 16 + 17 + 16 + 18}{12} = \frac{234}{12} = 19,5.$$

A moda:

São os valores: 16, 17, 18 e 22, pois estes valores aparecem duas vezes cada na séria representada acima.

A mediana:

Colocando os números em ordem crescente, temos: (16, 16, 17, 17, 18, 20, 21, 22, 22, 23, 24)

Logo, $M_d = \frac{18+20}{2} = 19.$

Maior taxa mensal de crescimento

Ocorreram aumentos entre:

JAN e FEV $\implies \frac{24+21}{21}.100 \cong 14,28\%.$

MARC e ABR $\implies \frac{23-20}{20}.100 = 15\%.$

Portanto, a maior taxa mensal de crescimento ocorreu entre Março e Abril.

b) **A média:**

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{13} x_i = \frac{21 + 24 + 20 + 23 + 22 + 22 + 18 + 17 + 16 + 17 + 16 + 18 + x}{13} = \frac{234 + x}{13} \implies número\ inteiro.$$

A mediana:

Em ordem crescente, e sabendo que a mediana é 18 temos que em Jan de 2014 o valor é menor ou igual a 18. Portanto, considerando estes fatos, temos que x vale 13, pois dará um número divisível por 13.

Observe: (13, 16, 16, 17, 17, 18, 18, 20, 21, 22, 22, 23, 24) que nos dá mediana 18.

E média mensal:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{13} x_i = \frac{21 + 24 + 20 + 23 + 22 + 22 + 18 + 17 + 16 + 17 + 16 + 18 + 13}{13} = \frac{247}{13} = 19.$$

Cálculo do Desvio Médio = $\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$ sendo $\bar{x}$ a média aritmética.

$$D_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

$$= \frac{|13-19| + 2.|16-19| + 2.|17-19| + 2.|18-19| + |20-19| + |21-19| ...}{13}$$

$$= \frac{6+6+4+2+1+2+6+4+5}{13} = \frac{36}{13}.$$

Exercício 136

a) Se a abscissa do ponto P é igual a 1 então pela função f(x) dada, P terá coordenadas (1, 1). Analogamente, se a = 2, então pela função f(x) dada, Q terá coordenadas $(2, \frac{1}{2})$. Assim, a área do quadrilátero T será:

$$S_T = \frac{1.1}{2} + \frac{1.\frac{1}{2}}{2} + 1.\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{4} \implies S_T = \frac{5}{4}.$$

Calculando o quadrado da distância entre P e Q, tem-se:

$$d_{P,Q} = \sqrt{(1-2)^2 + (1-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} \implies d_{P,Q} = \sqrt{\frac{5}{4}} \implies (d_{P,Q})^2$$

b) Seja I o ponto de intersecção entre a reta r e a função f(x). Se sua coordenada y é igual a $\frac{a}{2}$ então, pela função f(x) sua coordenada x será $\frac{2}{a}$. Ou seja, o ponto I tem coordenadas $(\frac{2}{a}, \frac{a}{2})$.

Considerando como *s* a reta que passa por P e Q tem-se que as coordenadas do ponto P são (1, 1) e do ponto Q são $(a, \frac{1}{a})$.

O coeficiente angular desta reta será: $\alpha = \frac{\frac{1}{a} - 1}{a-1} = -\frac{1}{a}.$

Logo, o coeficiente angular da reta *r* que passa pela origem e é ortogonal à reta que contém P e Q será igual a $\alpha_r = a$ (condição de perpendicularidade).

Assim, a equação da reta *r* pode ser escrita como:

$y - 0 = a.(x - 0) reta\ r \implies y = a.x$

Como o ponto I pertence à reta *r* e tem suas coordenadas $(\frac{2}{a}, \frac{a}{2})$, pode-se escrever: $y = ax \implies \frac{a}{2} = a.\frac{2}{a} \implies a = 4.$

Exercício 137

Se *s* é a área no mapa e *S* é a área real, então

$$\frac{s}{S} = (\frac{1}{17.10^6})^2 \iff S = 289.10^{12}.s\ cm^2 = 28900.s\ km^2.$$

A área no mapa é dada por

$s = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 9 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |81 + 14 - 18| = 38,5\ cm^2.$

Portanto, o resultado pedido é $S = 28900.38,5 = 1.112.650\ km^2$.

Exercício 138

A reta cujos pontos são equidistantes de A e B é exatamente a mediatriz do segmento de extremos A e B. Portanto, devemos encontrar a equação da reta que passa pelo ponto médio de AB e é perpendicular a ele.

Cálculo do ponto médio de AB:
$\left(\frac{1+7}{2}, \frac{2+14}{2}\right) = (4, 8) \iff (x_0, y_0)$

Coeficiente angular da reta que passa por A e B: $\frac{14-2}{7-1} = 2.$

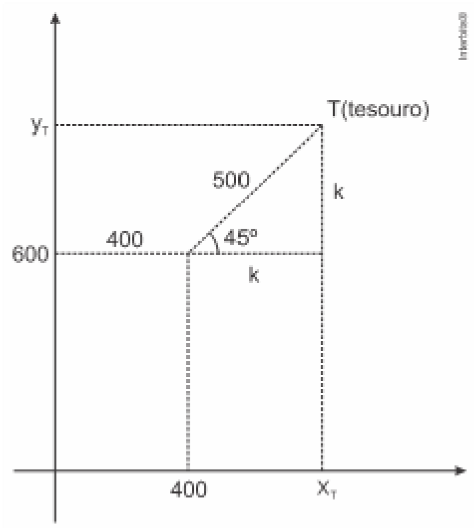
Portanto, o coeficiente angular da mediatriz r é $m_r = -\frac{1}{2}$.

Encontrando, agora, a equação da mediatriz *r*.

$y - 8 = -\frac{1}{2}.(x-4) \implies 2y - 16 = -x + 4 \implies x + 2y - 20 = 0$

Exercício 139

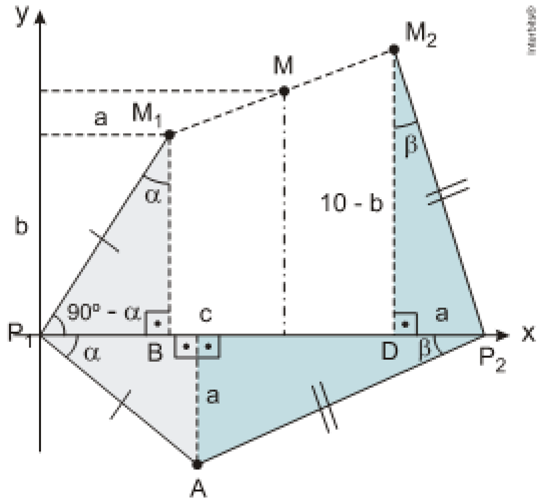
$750.0,8 = 600\ m$, $500.0,8 = 400\ m$ e $625.0,8 = 500\ m$.



$k = 500.cos45º = 500.\frac{\sqrt{2}}{2} = 250.\sqrt{2}.$

Distância percorrida: 600 + 400 + 500 = 1500 m.
Coordenada do ponto T.
$x_T = 400 + 250\sqrt{2} y_T = 600 + 250\sqrt{2}$

Exercício 140



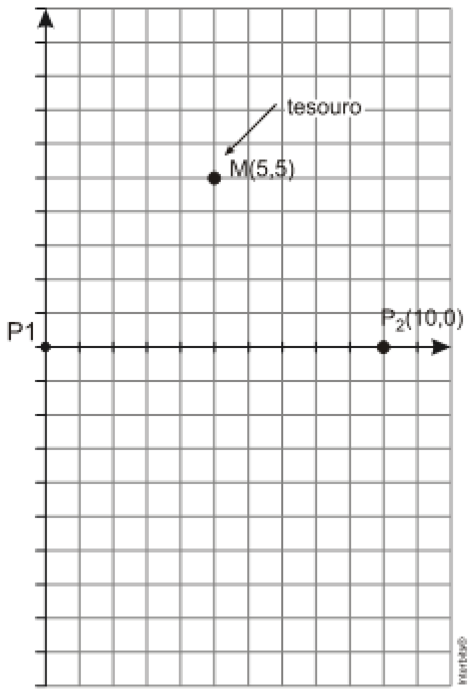
$\Delta P_1BM_1 \equiv \Delta ACP_1(LAA_0) \implies P_1B = AC = a$ e $P_1C = b$

$\Delta ACP_2 \equiv \Delta M_2DP_2(LAA_0) \implies DP_2 = a$ e $M_2D = 10 - b$

Logo, $M_1 = (a, b)$ e $M_2(10 - a, 10 - b)$.

Calculando as coordenadas do ponto M médio do segmento M_1 e M_2, temos: $x_M = \frac{a+10-a}{2} = 5$ e $y_M = \frac{b+10-b}{2} = 5$.

Logo, o ponto médio do segmento de extremos M_1 e M_2 é M(5,5).



Exercício 141

Da equação $(y-5)^2 = 4(x-7)$, V (7, 5) e p = 2, logo F (8, 5).

Da equação $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{8} = 1$, C (4, 2), a = 3 e b = $2\sqrt{2}$, logo,

$3^2 = (2\sqrt{2})^2 + c^2 c = 1.$

Como C (4, 2) e c = 1, A (3, 2) e B (5, 2).

O ponto P possui abscissa x e ordenada y e S é a medida da área do triângulo ABP. Segue que:

$$M = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 2y - 4$$

$$S = \frac{|2y-4|}{2} S = |y-2|$$

$$d_{P,F} = \sqrt{(x-8)^2 + (y-5)^2}$$

Logo,

$$|y-2| = 2.\sqrt{(x-8)^2 + (y-5)^2}(y-2)^2 = 4.\left((x-8) + (y-5)^2\right)(y-2)^2 = 4.(x-8)^2 + 4(y-5)^2 \frac{(x-8)^2}{3} + \frac{(y-6)^2}{4} = 1.$$

Resposta: O lugar geométrico dos pontos formado pelos pontos P do plano tais que a área do triângulo ABP seja numericamente igual ao dobro da distância de P a F é dado pela equação $\frac{(x-8)^2}{3} + \frac{(y-6)^2}{4} = 1$, ou seja, é uma elipse.

Exercício 142

Centro da elipse: C(2,3)
Semieixo paralelo ao eixo x: a = 2
Semieixo paralelo ao eixo y: b = 3
Logo, a equação da elipse será dada por:

$$\frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(y-3)^2}{3^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1.$$

Exercício 143

O raio de luz refletido no ponto (1, 1) tem a direção da reta 4y - 3x = 1. Já o raio refletido no ponto (2, 4) tem a direção da reta 8y - 15x = 2. Desse modo, o ponto procurado é a solução do sistema $\begin{cases} 4y - 3x = 1 \\ 8y - 15x = 2 \end{cases}$

Resolvendo esse sistema, encontramos $x = 0$ e $y = \frac{1}{4}$.
Portanto, o ponto em que os raios de luz verticais refletidos em (1, 1) e (2, 4) se encontrarão é $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

Exercício 144

Determinando os pontos A e B de intersecção, obtemos:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$X_A = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow X_A + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow A = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).$$

$$X_B = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow X_B + 1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow A = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right).$$

$$AB = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} = \sqrt{\sqrt{5}^2 + \sqrt{5}^2} = \sqrt{10}.$$

Exercício 145

Sendo V = (-2, 2) e p = 2, tem-se que a equação da parábola é: $(y-2)^2 = 2.2(x-(-2)) \Leftrightarrow (y-2)^2 = 4.(x+2)$.

Tomando arbitrariamente x = -1, encontramos
$(y-2)^2 = 4.(-1+2) \Leftrightarrow y - 2 = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow y = 0 \; ou \; y = 4.$

Logo, segue que (-1, 0) e (-1, 4) são pontos da parábola.

Desde que $y_p > 0$ temos:
$(y_p - 2)^2 = 4.(0+2) \Rightarrow y_p - 2 = \sqrt{8} \Rightarrow y_p = 2.(1+\sqrt{2})$

Exercício 146

a) Seja s a reta que passa pelos pontos A = (1, 4) e B = (3, 2).
$m_s = \frac{2-4}{3-1} = -1.$

Assim, uma equação da reta s é:
$y - 4 = -1.(x-1) y - 4 = -x + 1 y = -x + 5$

O ponto de intersecção entre as retas r e s pode ser obtido através do sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} y = -x + 5 & (i) \\ y = -2x + 1 & (ii) \end{cases}$$

Das equações (i) e (ii),
$-x + 5 = -2x + 1 x = -4$

Substituindo x = - 4 na equação (i),
$y = -(-4) + 5 = 9$

Assim, as coordenadas do ponto de intersecção entre a reta r e a reta que passa pelos pontos A e B são: x = - 4 e y = 9.

b) Se $\overline{AB}$ é diâmetro da circunferência, seu centro C é dado por:
$C = (x_c, y_c) x_c = \frac{1+3}{2} = 2$

$y_c = \frac{4+2}{2} = 3$
C = (2, 3)

Sendo r a medida do raio da circunferência, temos:
$r = \sqrt{(1-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2}$

Logo, uma equação da circunferência na qual um dos diâmetros é o segmento $\overline{AB}$ é: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2.$

Exercício 147

Equação da reta t: $y - 0 = tg45°.(x-0) \Rightarrow y = x$

Equação da reta r: $y - 0 = tg135°.(x-4) \Rightarrow y = -x + 4$

Coordenadas do ponto A: $y_A = -\frac{1}{2} + 4 = \frac{7}{2} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

Equação da reta s: $y - \frac{7}{2} = tg45°.(x-1) \Rightarrow y = x + 3$

Coordenadas do ponto B

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos: B(2, 2).

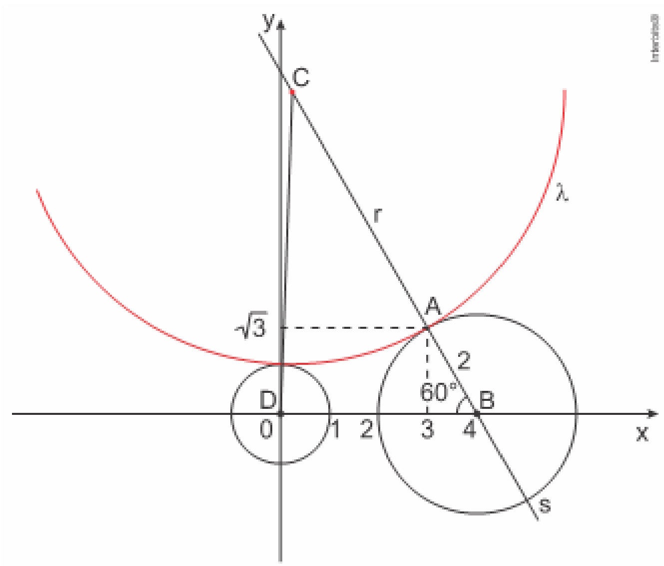
Portanto, $X_D = 2$.

Como D pertence à reta s temos: $y_D = 2 + 3 = 5$

Logo, D(2, 5).

Exercício 148

Do enunciado, sem perda de generalidade, observemos a figura:



A reta s passa pelos pontos $A(3, \sqrt{3})$, $B(4, 0)$ e $C(X_C, Y_C)$, onde C é o centro da circunferência λ.

$$m_s = \frac{\sqrt{3} - 0}{3 - 4} \Rightarrow m_s = -\sqrt{3}$$

$s : y - 0 = -\sqrt{3}.(x - 4)$

$y = -\sqrt{3}.(x - 4)$

Como $C \in s$,
$C = (a, -\sqrt{3}(a - 4))$

De $m_s = -\sqrt{3}$, $C\hat{B}D = 60°$.

No triângulo CBD,

$(r+1)^2 = (r+2)^2 + 4^2 - 2.(r+2).4.\cos 60° r^2 + 2r + 1 = r^2 + 4r + 4 + 16 - 2.(r+2).4.\frac{1}{2} 2r + 1 = 4r + 20 - 4r - 8 2r = 11 r = \frac{11}{2}$

$d_{A,C} = r$

$\sqrt{(a-3)^2 + (-\sqrt{3}.(a-4) - \sqrt{3})^2} = \frac{11}{2}\ (a-3)^2 + (-\sqrt{3}.(a-4+1))^2 =$

De $a - 3 = -\frac{11}{4}$, $a = \frac{1}{4}$.

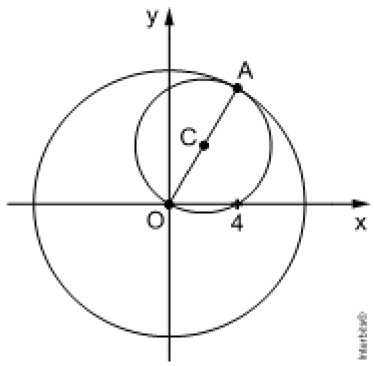
Assim, há duas possibilidades para λ:

λ_1: centro no ponto $\left(\frac{23}{4}, -\frac{7\sqrt{3}}{4}\right)$ e raio igual a $\frac{11}{2}$

λ_2: centro no ponto $\left(\frac{1}{4}, \frac{15\sqrt{3}}{4}\right)$ e raio igual a $\frac{11}{2}$

Exercício 149

Considere a figura.



Sejam C(a, b) o centro e r o raio da circunferência interna.

Pela propriedade da secante, temos $a = \frac{0+4}{2} = 2$. Além disso, como o raio da circunferência centrada em O é $\sqrt{64} = 8$ segue que $r = \frac{8}{2} = 4$. Desse modo, a equação da circunferência de centro em C é $(x-2)^2 + (y-b)^2 = 4^2$. Mas esta circunferência passa pela origem, logo: $(0-2)^2 + (0-b)^2 = 4^2 \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$

A equação da reta que passa pelos pontos O, C e A com A sendo o ponto de interseção das duas circunferências, é $y = \sqrt{3}x$.

Consequentemente, $x^2 + (\sqrt{3}x)^2 = 64 \Rightarrow x = 4$ e, portanto, $A(4, 4\sqrt{4})$.

O resultado pedido é igual a $4 + 4.1,73 \cong 11$.

Exercício 150

a) A reta r tem coeficiente $m_r = tg135° = -1$ e passa pelo ponto A(-1,2), logo sua equação é:
y – 2 = -1(x – (-1))
y – 2 = -x – 1
y = -x + 1

b) o coeficiente angular de s é 1, pois $m_r . m_s = -1$ e ela passa pelo ponto B(3,4).
y – 4 = 1.(x – 3)

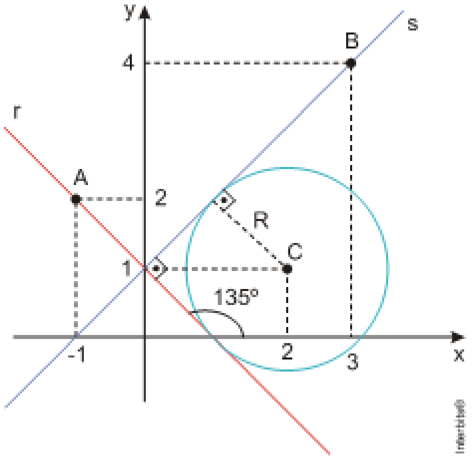
y = x + 1

Resolvendo o sistema com as equações de r e s, teremos o ponto P:

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = \quad x + 1 \end{cases}$$

Logo, P(0,1)

Observe a figura a seguir:



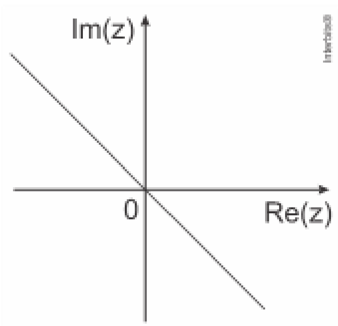
c) Calculando seu raio através da distância do ponto C(2,1) à reta (s) x – y + 1 = 0

$$R = \frac{|2-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Portanto, a equação da circunferência será: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{2}^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$

Exercício 151

a) Seja $z \in \{(x,\ x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Logo, a transformação que leva um número complexo em seu conjugado é $f(z) = \bar{z} = (x,\ -x)$. A representação geométrica do conjunto resultante dessa transformação corresponde à reta $y = -x$.



b) O número complexo $w = \frac{z-1}{z+1}$ é imaginário puro se, e somente se, $\text{Re}(w) = 0$ e $w \neq 0$. Em consequência, vem $z \neq 1$ e, como $w + \bar{w} = 0$, temos

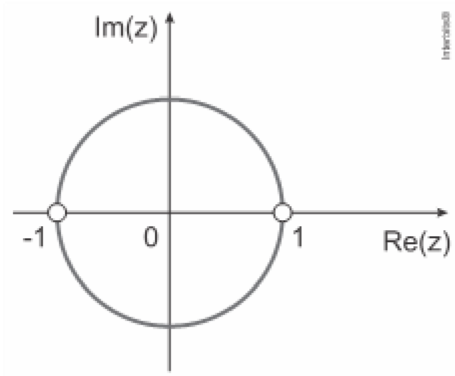
$$\frac{z-1}{z+1} + \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = 0 \Rightarrow (z-1)(\bar{z}+1) + (\bar{z}-1)(z+1) = 0$$

$$\Rightarrow z \cdot \bar{z} = 1$$

$$\Rightarrow |z|^2 = 1$$

$$\Rightarrow |z| = 1.$$

Portanto, o lugar geométrico dos pontos z do plano complexo tais que $|z| = 1, z \neq -1$ e $z \neq 1$, é a circunferência centrada na origem e raio igual a 1, excetuados os pontos $(-1,\ 0)$ e $(1,\ 0)$.



c) Seja $z = (x,\ y)$, com $x,\ y \in \mathbb{R}$. Queremos determinar $\text{Re}(z) = x$.
A medida do lado dos possíveis triângulos equiláteros corresponde à distância entre as imagens dos complexos $i = (0,\ 1)$ e $1 = (1,\ 0)$, isto é, $\sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$.

Logo, deve-se ter

$$\begin{cases} \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{2} \\ \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y + 1 = 2 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y$$

Portanto, segue que $2x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ou $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

Exercício 152

De $\log_3\left(2Z + 2\bar{Z} + 1\right) = 2$

$$2Z + 2\bar{Z} + 1 = 3^2$$

$$2Z + 2\bar{Z} = 8$$

$$Z + \bar{Z} = 4$$

Sendo $Z = x + yi,\ \bar{Z} = x - yi$.
Daí,
$x + yi + x - yi = 4$
$x = 2$

Note que:

$$\left|\frac{2Z}{\overline{Z}\cdot i}\right| = \frac{|2|\cdot|Z|}{\left|\overline{Z}\right|\cdot|i|}$$

$$\left|\frac{2Z}{\overline{Z}\cdot i}\right| = 2$$

Logo,

$$\frac{2Z}{\overline{Z}\cdot i} = 2\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\cdot sen\,\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\frac{2Z}{\overline{Z}\cdot i} = 2\cdot\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{2Z}{\overline{Z}\cdot i} = -\sqrt{2} + i\cdot\sqrt{2}$$

$$2Z = \overline{Z}\cdot i\cdot\left(-\sqrt{2} + i\cdot\sqrt{2}\right)$$

$$2\cdot(2+yi) = (2-yi)\cdot i\cdot\left(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)$$

$$4 + 2yi = (2-yi)\cdot\left(-\sqrt{2}\cdot i + \sqrt{2}\cdot i^2\right)$$

$$4 + 2yi = (2-y\cdot i)\cdot\left(-\sqrt{2}\cdot i - \sqrt{2}\right)$$

$$4 + 2yi = -2\sqrt{2}\cdot i - 2\sqrt{2} + \sqrt{2}y\cdot i^2 + y\sqrt{2}\cdot i$$

$$4 + 2yi = \left(-\sqrt{2}y - 2\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{2}y - 2\sqrt{2}\right)\cdot i$$

Então,

$$\begin{cases} 4 = -\sqrt{2}y - 2\sqrt{2} & (i) \\ 2y = y\sqrt{2} - 2\sqrt{2} & (ii) \end{cases}$$

Das equações (i) e (ii), $\begin{aligned} y &= -2 - 2\sqrt{2} \\ y &= -2\cdot\left(1+\sqrt{2}\right) \end{aligned}$

Portanto, $Z = 2 - 2\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)i$

Resposta: $Z = 2 - 2\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)i$

Exercício 153

a) Tem-se que $|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1.$

Ademais, se θ é o argumento principal de z, então

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \mathrm{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}\mathrm{rad}.$$

A forma polar de z é $z = 1\cdot(\cos\frac{\pi}{6} + i\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{6} + i\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}.$

b) Pela fórmula de De Moivre, tem-se que

$$z^{27} + z^{24} + 1 = \cos\frac{27\pi}{6} + i\mathrm{sen}\frac{27\pi}{6} + \cos\frac{24\pi}{6} + i\mathrm{sen}\frac{24\pi}{6} + 1$$

$$= \cos\frac{\pi}{2} + i\mathrm{sen}\frac{\pi}{2} + \cos 0 + i\mathrm{sen}0 + 1$$

$$= i + 1 + 1$$

$$= 2 + i.$$

Exercício 154

a) $\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(2\cdot\frac{3\pi}{8}\right)$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) - sen^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) - \left(1 - \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) - 1$$

$$\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Calculando agora o valor do $sen\left(\frac{3\pi}{8}\right)$:

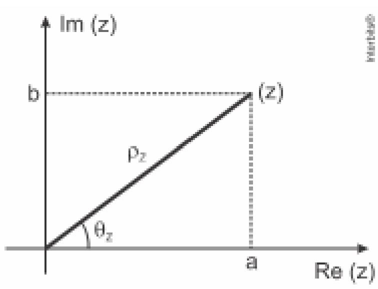
$$sen^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$sen^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2$$

$$sen^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$sen\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

b) Teremos:



$a = \sqrt{2-\sqrt{2}}\ e\ \mathrm{b} = \sqrt{2+\sqrt{2}}\rho_z = \sqrt{a^2+b^2},\ logo, \rho_z = \sqrt{2-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}$

$$tg\theta_z = \frac{b}{a}, logo, tg\theta_z = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}.$$

Do item [A], temos: $\text{tg}\theta_z = tg\frac{3\pi}{8}$ ou $\theta_z = \frac{3\pi}{8}$.

Assim, na forma trigonométrica, temos:

$$z = \rho_z\left(\cos\theta_z + isen\theta_z\right) \Rightarrow z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{8} + isen\frac{3\pi}{8}\right) \Rightarrow z^n = 2^n\left[\cos\left(n\frac{3\pi}{8}\right) + isen\left(n\frac{3\pi}{8}\right)\right].$$

Se z^n é real: $sen\left(n\frac{3\pi}{8}\right) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} n\frac{3\pi}{8} = 0, \text{(não convém, pois n>0)} \\ n\frac{3\pi}{8} = \pi \Rightarrow n = \frac{8}{3}, \text{(não convém, pois n} \in \text{Z)} \\ n\frac{3\pi}{8} = 2\pi \Rightarrow n = \frac{16}{3}, \text{(não convém, pois n} \in \text{Z)} \\ n\frac{3\pi}{8} = 3\pi \Rightarrow n = 8 \end{cases} \Rightarrow n = 8$$

c) Do item [B], concluímos que z^n é real para n = 8 ou n = 16, ou n = 24, etc.
Supondo n = 8, temos:

$$z^n = 2^n\left[\cos\left(\frac{3n\pi}{8}\right) + isen\left(n\frac{3\pi}{8}\right)\right].$$

$$z^8 = 2^8\left[\cos(3\pi) + isen(3\pi)\right] \Rightarrow z^8 = -256.$$

Logo, o polinômio procurado é: $z^8 + 256 = 0$.

Exercício 155

a) Tem-se que

$$\begin{aligned} z_0 &= 4i + \frac{13}{2+3i} \\ &= \frac{1+8i}{2+3i} \\ &= \frac{1+8i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} \\ &= \frac{26}{13} + \frac{13}{13}i \\ &= 2 + i. \end{aligned}$$

Portanto, $\text{Re}(z_0) = 2$ e $\text{Im}(z_0) = 1$.

b) Para que $z = 1 - i$ seja solução da equação $z^2 + az + b = 0$, deve-se ter

$$\begin{aligned} (1-i)^2 + a(1-i) + b = 0 &\Leftrightarrow -2i + a - ai + b = 0 \\ &\Leftrightarrow (a+b) + (-2-a)i = 0 \\ &\Leftrightarrow a = -2 \text{ e } b = 2. \end{aligned}$$

Exercício 156

Pelas Relações de Girard pode-se escrever:

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{34}{2} \Rightarrow S_{\text{paralelepípedo}} = 2 \cdot (x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x$$

Exercício 157

a) Fatorando p(x), obtemos
$p(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18 p(x) = x^2(x-2) - 9(x-2) p(x) = (x-2)(x^2-9).$

Portanto, r=3 e s=2.

b) Se $z = 1 + i$, então $z^2 = (1+i)^2 = 2i$. Logo
$p(z) = (1+i-2)(2i-9) p(z) = 2i^2 - 9i - 2i + 9 p(z) = 7 - 11i.$

Exercício 158

Pelo teorema do resto: $D = d \cdot Q + R$

Sendo h(x) o quociente da divisão de p(x) por q(x), pode-se escrever:

$p(x) = q(x) \cdot h(x) + r(x)$
$p(7) = q(7) \cdot h(7) + r(7) = 0$
$r(x)$ *é divisível por* $(x - 7)$

Dividindo r(x) por (x - 7) tem-se:

$f(x) = x^4 - 8x^2 + 15$
$x^2 = y$
$y^2 - 8y + 15 = 0 \Rightarrow$
$y = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$
ou
$y = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$

Raízes de $r(x) \Rightarrow 7, \ \pm\sqrt{3}, \ \pm\sqrt{5}.$

Exercício 159

De acordo com o teorema do resto, teremos:

Na primeira divisão, podemos escrever que: $p(x) = (4x-3) \cdot q_1(x) + 2$

fazendo $x = \frac{3}{4}$,obtemos:

$$p\left(\frac{3}{4}\right) = \left(4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) - 3\right) \cdot q_1(x) + 2 \Rightarrow p\left(\frac{3}{4}\right) = 2$$

Na segunda divisão, podemos escrever que: $(x^3 - 2) \cdot p(x) = (4x-3) \cdot q_2(x) + r$

fazendo $x = \frac{3}{4}$; obtemos:

$$\left(\left(\frac{3}{4}\right)^3 - 2\right) \cdot p\left(\frac{3}{4}\right) = \left(4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) - 3\right) \cdot q_2 + r \Rightarrow r = \left(\frac{27}{64} - 2\right) \cdot 2 \Rightarrow r =$$

Exercício 160

Para que os polinômios $p(x)$ e $h(x)$ sejam divisíveis por $x - 4$, basta que $p(4) = h(4) = 0$.

Daí,

$p(4) = 4^3 + 2a + b$
$0 = 64 + 2a + b$
$2a + b = -64 \quad (i)$

$h(4) = 4^4 + a - 2b$
$0 = 256 + a - 2b$
$a - 2b = -256 \quad (ii)$

Da equação (i),
$2 \cdot (2a + b) = 2 \cdot (-64)$
$4a + 2b = -128 \quad (iii)$

Somando membro a membro as equações (ii) e (iii):
$a - 2b + 4a + 2b = -256 + (-128)$
$5a = -384$
$a = -\dfrac{384}{5}$

Substituindo $a = -\dfrac{384}{5}$ na equação (i),

$$2 \cdot \left(-\frac{384}{5}\right) + b = -64$$

$$b = -64 + \frac{768}{5}$$

$$b = \frac{448}{5}$$

Portanto, os valores de a e b que tornam $p(x)$ e $h(x)$ divisíveis por $x - 4$ são, respectivamente, $-\dfrac{384}{5}$ e $\dfrac{448}{5}$.

Exercício 161

Se p é divisível por $(x+1)^2$, então $ax^3 + bx + 2 = (x+1)^2(ax - 2a) + (3a + b)x + 2a + 2$.

Portanto, temos $r(x) = (3a + b)x + 2a + 2 = 0$, ou seja, $3a + b = 0$ e $2a + 2 = 0$, implicando em $a = -1$ e $b = 3$.