FRENTE C, MSD: aula 02

OPERAÇÕES MATRICIAIS E MATRIZ INVERSA

01. MULTIPLICAÇÃO:

IMPORTANTE!

propriedades: Supondo que as matrizes A, B e C sejam de tipos tais que as operações abaixo possam ser realizadas, valem as seguintes propriedades para a multiplicação de matrizes:

(1) ASSOCIATIVA: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

(2) DISTRIBUTIVA À DIREITA EM RELAÇÃO A ADIÇÃO:

$$C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$$

(3) DISTRIBUTIVA À ESQUERDA EM RELAÇÃO A ADIÇÃO:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

(EX): $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

02. MATRIZ INVERSA:

(EX): Obter a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS

01. (UNICID 2015) Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} c & 13 \\ 6 & c \end{pmatrix}$, sendo a, b e c números inteiros positivos. Sabendo que $A \cdot B = C$, o valor de $a^b + c$ é
a) 19
b) 17
c) 16
d) 18
e) 15

02. (UNICAMP 2018) Sejam a e b números reais tais que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ satisfaz a equação $A^2 = aA + bI$, em que I é a matriz identidade de ordem 2. Logo, o produto ab é igual a
a) -2
b) -1
c) 1
d) 2

03. (UNICAMP 2017) Sendo a um número real, considere a matriz $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Então, A^{2017} é igual a
a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
b) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
d) $\begin{pmatrix} 1 & a^{2017} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

04. (FAMEMA 2021) Dois jogadores, A e B, disputaram a final de um torneio de xadrez em dois jogos. Em cada partida, se ocorresse empate, cada jogador ganharia 1 ponto, caso contrário, o vencedor ganharia 2 pontos e o perdedor perderia 1 ponto. As matrizes que indicaram a pontuação obtida por cada jogador tinham, ambas, a seguinte estrutura:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & \quad B \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1^{\underline{o}}\text{ jogo} \\ 2^{\underline{o}}\text{ jogo} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

No caso do jogador A, sua matriz de pontuação foi:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se a matriz de pontuação do jogador B era igual a matriz resultante da multiplicação matricial $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, então $x + y + z + w$ é igual a

a) -1
b) 0
c) 2
d) 1
e) 3

05. (FAMECA 2020) O ouro é uma das principais matérias-primas para a confecção de joias. No entanto, para que possa ser modelado, é necessário que outros metais sejam adicionados a ele, formando uma liga. Dependendo dos metais e da quantidade adicionada, obtém-se diferentes colorações de ouro. A seguir tem-se a matriz C, que detalha a composição das ligas utilizadas por uma fábrica de joias para obtenção de 5 colorações de ouro (nas colunas constam os percentuais de cada metal e, nas linhas, os percentuais desses metais e a correspondente coloração obtida), e a matriz P, com o preço, em reais, estipulado por essa fábrica, do grama trabalhado de cada metal utilizado.

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} Au & Ag & Cu & Pd & Co \end{array} \\ \begin{bmatrix} 75\% & 12{,}5\% & 12{,}5\% & 0{,}0\% & 0{,}0\% \\ 75\% & 25{,}0\% & 0{,}0\% & 0{,}0\% & 0{,}0\% \\ 75\% & 12{,}5\% & 0{,}0\% & 12{,}5\% & 0{,}0\% \\ 75\% & 2{,}5\% & 22{,}5\% & 0{,}0\% & 0{,}0\% \\ 75\% & 0{,}0\% & 0{,}0\% & 0{,}0\% & 25{,}0\% \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Ouro amarelo} \\ \text{Ouro verde} \\ \text{Ouro branco} \\ \text{Ouro rosa} \\ \text{Ouro negro} \end{array} \qquad P = \begin{array}{c} R\$ \\ \begin{bmatrix} 220{,}00 \\ 4{,}00 \\ 0{,}50 \\ 240{,}00 \\ 1{,}00 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dado que o produto das matrizes C × P determina o preço do grama de ouro de cada coloração, uma joia feita com 4 g de ouro branco terá um custo entre

a) R$ 750,00 e R$ 775,00
b) R$ 775,00 e R$ 800,00
c) R$ 675,00 e R$ 700,00
d) R$ 850,00 e R$ 875,00
e) R$ 650,00 e R$ 675,00

06. (SANTA CASA 2021) Determinada região da Mata Atlântica foi subdividida em quadrados de 1 m² de área. Cada um desses quadrados é chamado de quadrante da região. Contando-se o número de bromélias por quadrante da região, pesquisadores organizaram os dados obtidos em duas matrizes colunas, denotadas por B e Q. A matriz B indica o número de bromélias por quadrante e a matriz Q indica o número de quadrantes com a quantidade de bromélias do campo correspondente na matriz B, por quadrante. Observe as duas matrizes com os dados obtidos e um exemplo explicativo da notação:

$$B=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix} \text{ e } Q=\begin{bmatrix}17\\12\\8\\5\\5\\3\end{bmatrix}$$ Exemplo: 8 quadrantes contêm 2 bromélias cada um.

Uma operação com matrizes e escalar que indicará como resultado a média de bromélias por m² nesse estudo é

a) $50 \cdot B \cdot Q^{-1}$

b) $0{,}3 \cdot B \cdot Q^{t}$

c) $0{,}02 \cdot B^{t} \cdot Q$

d) $0{,}02 \cdot B \cdot Q^{t}$

e) $50 \cdot B^{-1} \cdot Q$

07. (FAMERP 2019) A matriz quadrada $M=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$ representa uma mensagem codificada. A mensagem decodificada é a matriz quadrada $M^{-1}=\begin{bmatrix}x & y\\z & w\end{bmatrix}$, tal que M^{-1} é a inversa da matriz M. Sendo assim, o valor de $x+y+z+w$ é

a) -1

b) 0

c) 1

d) 1/2

e) –1/2