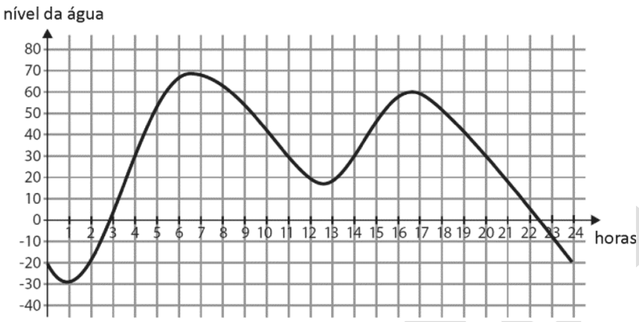
Canguru 2012 – Nível S (3ª série) - Soluções

Problemas de 3 pontos

1. O nível da água do mar numa cidade portuária sobe e desce num certo dia conforme indicado no gráfico. Nesse dia, durante quantas horas o nível da água esteve acima de 30 cm?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 9 (E) 13



1. Resposta: alternativa E
Pelo gráfico, o nível da água está acima de 30 cm entre 4 e 11 horas e entre 14 e 20 horas, num total de 7 + 6 = 13 horas.

2. O número $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ é igual a

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt[6]{4}$ (D) $\sqrt[3]{4}$ (E) 2

2. Resposta: alternativa B
Temos $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{4\cdot 2}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

3. Na tabela com cinco, ao lado, o primeiro número é 2 e último, 12. O produto dos três primeiros é 30, o produto dos três do meio é 90 e o produto dos três últimos é 360. Qual número está no centro da tabela?

2				12

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 10

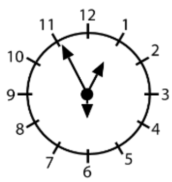
3. Resposta: alternativa C

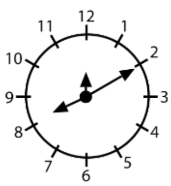
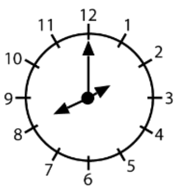
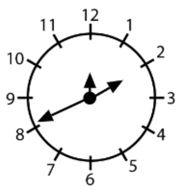
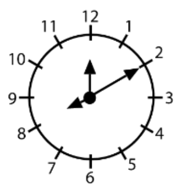
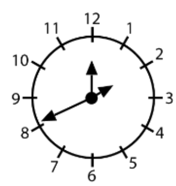
Sejam *x*, *y* e *z* os três números do meio, nessa ordem. Então

$$\begin{vmatrix} 2xy = 30 \\ xyz = 90 \\ 12yz = 360 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} xy = 15 \\ xyz = 90 \\ yz = 30 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} xy\cdot yz = 15\cdot 30 \\ xyz = 90 \end{vmatrix} \Rightarrow y\cdot 90 = 15\cdot 30 \Leftrightarrow y = 5$$

O número do centro da tabela é *y* = 5.

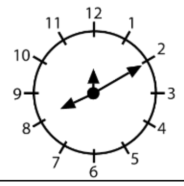
4. Um relógio tem 3 ponteiros, com diferentes comprimentos (para horas, para minutos e para segundos). Não sabemos o que cada ponteiro marca, mas sabemos que o relógio está certo. Às 12h 55min 30s os ponteiros estavam na posição mostrada na figura ao lado. Qual dos desenhos a seguir mostra o relógio às 8h 10min 0s ?



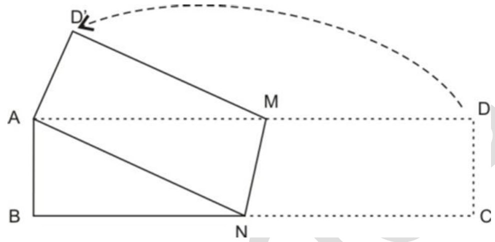
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

4. Resposta: alternativa A

O maior ponteiro marca minutos, o intermediário marca horas e o menor marca segundos. Portanto, a figura correspondente ao horário 8h 10min 0s é a representada ao lado.



5. Uma peça retangular de papel *ABCD* de 4 cm por 16 cm é dobrada ao longo da reta *MN*, de modo que o vértice *C* coincida com o vértice *A*, conforme a figura ao lado. Qual é a área do quadrilátero *ANMD′*?



(A) 28 cm^2 (B) 30 cm^2 (C) 32 cm^2 (D) 48 cm^2 (E)56 cm^2

5. Resposta: alternativa C

A dobra equivale a uma reflexão ao redor da reta *MN*. O trapézio *ANMD´*é a imagem do trapézio *CNMD* por esta reflexão. Do paralelismo das bases do trapézio concluímos que $D'MA \cong ANB$. Como *AB* = *CD* = *AD´*e $ABN \cong AD'M$ (ângulos retos), deduzimos que os triângulos *AD´M* e *ABN* são congruentes, logo *AN* = *AM* = *NC* e *BN* = *D´M* = *MD*. Consequentemente, os trapézios *AMNB* e *CNMD* são congruentes, logo têm áreas iguais à metade da área do retângulo *ABCD*, ou seja, $\frac{4\times 16}{2} = 32$ cm^2. Portanto, a área do quadrilátero *ANMD´* é 32 cm^2.

6. A soma dos algarismos de um número de 9 algarismos é igual a 8. Qual é o produto desses algarismos?

(A) 0 (B) 1 (C) 8 (D) 9 (E) 9!

6. Resposta: alternativa A

Se a soma de 9 números inteiros não negativos é igual a 8, pelo menos um desses números é igual a zero (se nenhum deles for nulo, a sua soma será no mínimo 9). Portanto, o produto desses números é igual a zero.

7. Qual é o maior valor do número inteiro positivo *n* tal que $n^{200} < 5^{300}$?

(A) 5 (B) 6 (C) 8 (D) 11 (E) 12

7. Resposta: alternativa D

Temos $n^{200} < 5^{300} \Leftrightarrow n^{\frac{200}{200}} < 5^{\frac{300}{200}} \Leftrightarrow n < 5^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow n < \sqrt{5^3} = \sqrt{125}$. Como $11^2 = 121$ temos $11 \le \sqrt{125}$, logo *n* = 11.

8. Qual das funções a seguir satisfaz a equação $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$, para todo *x* real não nulo?

(A) $f(x) = \frac{2}{x}$ (B) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ (C) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ (D) $f(x) = \frac{1}{x}$ (E) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

8. Resposta: alternativa D

$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=1$. Escrevendo $y=\frac{1}{x}$ temos $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(y)\cdot f\left(\frac{1}{y}\right)=1$ ou seja, $f(x)=y=\frac{1}{x}$.

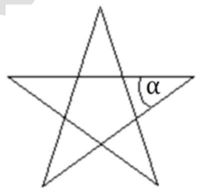
9. O número real *x* satisfaz $x^3 < 64 < x^2$. Qual afirmação a seguir é correta para este *x*?

(A) $0<x<64$ (B) $-8<x<4$ (C) $x>8$ (D) $-4<x<8$ (E) $x<-8$

9. Resposta: alternativa E

$$x^3<64<x^2 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x^3<64 \\ 64<x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x<4 \\ x<-8 \text{ ou } x>8 \end{array}\right. \Leftrightarrow x<-8$$

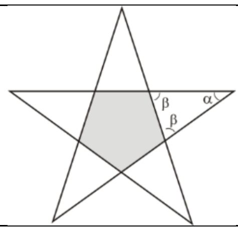
10. Qual é a medida do ângulo α na estrela regular pentagonal representada ao lado?



(A) 24° (B) 30° (C) 36° (D) 45° (E) 72°

10. Resposta: alternativa C

Como a estrela é regular, o pentágono cinza é regular e seus ângulos externos medem $\beta=\frac{360^{\circ}}{5}=72^{\circ}$. Logo, no triângulo indicado, $\alpha=180^{\circ}-72^{\circ}-72^{\circ}=36^{\circ}$.



Problemas de 4 pontos

11. Minha idade é um número de dois dígitos e uma potência de 5, enquanto a idade de meu primo é um número de dois dígitos, mas é uma potência de 2. A soma dos dígitos de nossas idades é um número ímpar. Qual é o produto desses dígitos?

(A) 240 (B) 2010 (C) 60 (D) 50 (E) 300

11. Resposta: alternativa A

A única potência de 5 com dois dígitos é o número $5^2=25$ e as potências de 2 com dois dígitos são os números $2^4=16$, $2^5=32$ e $2^6=64$. Se a soma dos dígitos de nossas idades é um número ímpar então essas idades são 25 e 64. O produto dos dígitos desses números é $2\times5\times6\times4=240$.

12. Uma agência de viagem organizou quatro passeios opcionais pela cidade de Salvador para um grupo de turistas. Cada um dos passeios teve participação de 80%. Qual é a porcentagem mínima de turistas que foram aos quatro passeios?

(A) 80 % (B) 60 % (C) 40 % (D) 20 % (E) 16 %

12. Alternativa D
Se 80% dos turistas fizeram o primeiro passeio e 80% deles fizeram o segundo passeio, alguns turistas fizeram os dois passeios, já que $80\%+80\%=160\%$. No mínimo, $160\%-100\%=60\%$ dos turistas fizeram os dois passeios. Desses, alguns fizeram também o terceiro passeio. Como $60\%+80\%=140\%$, concluímos que 40% dos turistas fizeram os três passeios. Alguns deles fizeram o quarto passeio e como $40\%+80\%=120\%$, concluímos que o percentual mínimo dos turistas que fizeram os quatro passeios é 20%.

13. O conjunto das soluções da inequação $|x|+|x-3|>3$ é:

(A) $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$ (B) $(3,3)$ (C) $(-\infty,-3)$ (D) $(-3,+\infty)$ (E) o conjunto dos números reais

13. Resposta: alternativa A

$$|x|+|x-3|>3 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x\le 0 \text{ e } -x-x+3>3 \\ \text{ou} \\ 0\le x\le 3 \text{ e } x-x+3>3 \\ \text{ou} \\ x\ge 3 \text{ e } x+x-3>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x\le 0 \text{ e } -2x>0 \\ \text{ou} \\ 0\le x\le 3 \text{ e } 0x>0 \\ \text{ou} \\ x\ge 3 \text{ e } 2x>6 \end{array}\right. \Leftrightarrow 2 \left|\begin{array}{l} x\le 0 \text{ e } x<0 \\ \text{ou} \\ 0\le x\le 3 \text{ e } 0x>0 \\ \text{ou} \\ x\ge 3 \text{ e } x>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x<0 \\ \text{ou} \\ x>3 \end{array}\right.$$

O conjunto das soluções da inequação é $(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$.

14. Numa certa escola, as notas das provas variam de 1 (a melhor) para 5. No último teste, os alunos da 3ª série não foram muito bem, pois sua média foi igual a 4. Os rapazes, com média 3,6, foram um pouco melhores do que as moças, com média 4,2. Sobre isso, qual afirmação a seguir é correta?

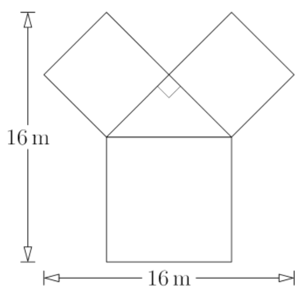
(A) O número de rapazes é o dobro do número de moças.
(B) O número de rapazes é 4 vezes o número de moças.
(C) O número de moças é o dobro do número de rapazes.
(D) O número de moças é 4 vezes o número de rapazes.
(E) O número de rapazes é igual ao número de moças.

14. Resposta: alternativa C
Se x é o número de rapazes e y é o número de moças, então

$$\frac{x\cdot 3{,}6+y\cdot 4{,}2}{x+y}=4 \Leftrightarrow 3{,}6x+4{,}2y=4x+4y \Leftrightarrow 4{,}2y-4y=4x-3{,}6x \Leftrightarrow 0{,}2y=0{,}4x \Leftrightarrow y=2x$$

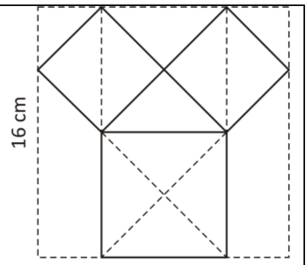
Logo, o número de moças é o dobro do número de rapazes.

15. Na figura, representando uma plantação de rosas, os quadrados iguais e menores são canteiros de rosas brancas, enquanto o quadrado maior é o canteiro das rosas vermelhas. As rosas amarelas são cultivadas no triângulo retângulo. A plantação fica confinada em um quadrado de 16m de lado, conforme indicado na figura. Qual é o total da área cultivada com rosas?



(A) 114 m^2 (B) 130 m^2 (C) 144 m^2 (D) 160 m^2 (E) 186 m^2

15.Resposta: alternativa C



As diagonais dos canteiros quadrados menores são iguais aos lados do canteiro quadrado maior. Portanto, cada um dos quadrados menores tem área igual ao dobro da área do canteiro na forma de triângulo retângulo e o quadrado maior tem quatro vezes a área desse triângulo. Como o lado deste quadrado é metade do lado quadrado que confina os canteiros, então sua área é $8^2 = 64$ cm^2, logo a área do triângulo retângulo é $\frac{64}{4} = 16$ cm^2 e a área de cada um dos quadrados menores é $2 \times 16 = 32$ cm^2. Portanto, a área total de cultivo das rosas é $64 + 16 + 2 \times 32 = 144$ cm^2.

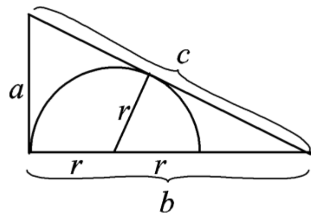
16. Todos os bilhetes da primeira fila para uma sessão de cinema foram vendidos. Os bilhetes dos assentos são numerados consecutivamente, começando com 1. Por erro, dois bilhetes com o mesmo número foram vendidos para esta fila. A soma dos números dos bilhetes vendidos para esta fila é 857. Qual é o número do bilhete que foi vendido duas vezes?

(A) 4 (B) 16 (C) 25 (D) 37 (E) 42

16. Resposta: alternativa D

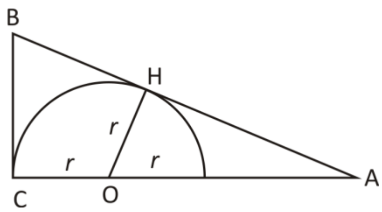
Se os números de 1 a *n* são os números dos assentos, então sua soma é $\frac{n(n+1)}{2}$ e se $x \le n$ é o número do bilhete vendido duas vezes, então $x + \frac{n(n+1)}{2} = 857 \Leftrightarrow n(n+1) = 1714 - 2x$. O maior produto de inteiros consecutivos inferior a 1714 é $40 \cdot 41 = 1640$. Temos $1714 - 2x = 1640 \Leftrightarrow x = 37$. Produtos menores não satisfazem as condições do problema. Por exemplo $39 \cdot 40 = 1560$ resultaria x = 77, absurdo. Logo, o número do bilhete que foi vendido duplamente é 37.

17. Na figura, o triângulo retângulo tem lados *a*, *b* e *c*. Qual é o valor do raio *r* da semicircunferência inscrita no triângulo, como na figura?



(A) $\frac{a(c-a)}{2b}$ (B) $\frac{ab}{a+b+c}$ (C) $\frac{ab}{b+c}$ (D) $\frac{2ab}{a+b+c}$ (E) $\frac{ab}{a+c}$

17. Resposta: alternativa E



Se O é o centro do círculo que contém o semicírculo inscrito e H é o ponto de tangência do mesmo na hipotenusa, então HO = *r* é o seu raio e mais: o triângulo AOH é retângulo em H e semelhante ao triângulo ABC. Assim,

$$\frac{HO}{BC} = \frac{AO}{AB} \Leftrightarrow \frac{r}{a} = \frac{b-r}{c} \Leftrightarrow cr = ab - ar \Leftrightarrow$$

$$ar + cr = ab \Leftrightarrow (a+c)r = ab \Leftrightarrow r = \frac{ab}{a+c}$$

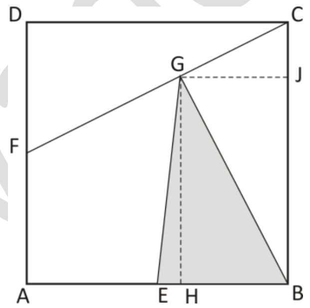
18. Um quadrado ABCD tem lados de comprimento 2. Os pontos E e F são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$, respectivamente e G é um ponto sobre o lado $\overline{CF}$ tal que $3CG = 2GF$. Qual é a área do triângulo BEG?

(A) $\frac{7}{10}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{8}{5}$ (D) $\frac{3}{5}$ (E) $\frac{6}{5}$

18. Resposta: alternativa B

Traçando os segmentos $\overline{GH}$ e $\overline{GJ}$ perpendiculares aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, e sabendo que $3CG = 2GF \Leftrightarrow \frac{FG}{GC} = \frac{3}{2}$, temos, pelo teorema de Tales, que

$$\frac{AH}{HB} = \frac{FG}{GC} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{AH+HB}{HB} = \frac{3+2}{2} \Leftrightarrow \frac{AB}{HB} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow HB = \frac{4}{5}.$$



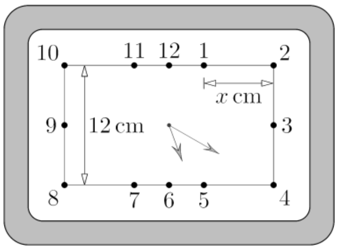
No triângulo retângulo CDF, temos $CD = 2$ e $DF = 1$ e, pelo teorema de Pitágoras, $CF = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$.

Como $\frac{FG}{GC} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{FG+GC}{GC} = \frac{3+2}{2} \Leftrightarrow \frac{FC}{GC} = \frac{5}{2}$, temos $GC = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Utilizando Pitágoras no triângulo CGJ, observando que $HB = GJ$, temos

$CJ = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}$. Assim, $GH = BJ = BC - CJ = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$ e a área do triângulo BEG é igual a $\frac{EB \cdot GH}{2} = \frac{1 \cdot \frac{8}{5}}{2} = \frac{4}{5}$.

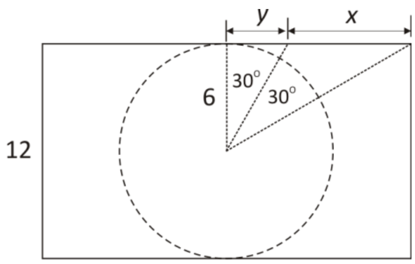
19. O relógio representado ao lado tem a forma retangular, mas os ponteiros giram como num relógio normal. Qual é a distância x no mostrador entre os números 1 e 2, se a distância entre os números 8 e 10 é de 12 cm?



(A) $2\sqrt{3}$ (B) $4\sqrt{3}$ (C) $8\sqrt{3}$ (D) $2+\sqrt{3}$ (E) $12-3\sqrt{3}$

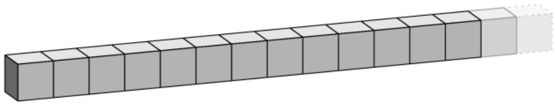
19. Resposta: alternativa B

No desenho, vemos que os pontos correspondentes às posições dos números 12 e 2 e o centro do mostrador formam um triângulo retângulo com um ângulo de 60^{o}, de modo que o cateto oposto a esse ângulo mede $x+y$. Os números 12 e 1 e o centro formam outro triângulo retângulo com um ângulo de 30^{o} e cateto oposto de medida y. Então



$$\left| \begin{array}{l} \frac{y}{6} = \text{tg}\,30^{o} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{x+y}{6} = \text{tg}\,60^{o} = \sqrt{3} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{x}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = 4\sqrt{3} \text{ cm}.$$

20. Um canguru deseja fazer uma barra com dados comuns (faces opostas somam 7 pontos), colando duas faces juntas somente quando têm números iguais de pontos. Sua meta é fazer com que os pontos visíveis da barra tenham soma 2012. Quantos dados ele deverá usar para fabricar a barra?



(A) 70 (B) 71 (C) 142 (D) 143 (E) Esta barra não pode ser feita

20. Resposta: alternativa E

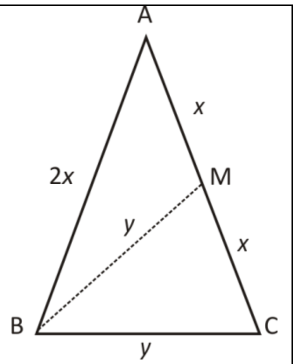
A soma dos pontos das quatro faces laterais em cada dado é 14. O quociente da divisão de 2012 por 14 é 143 e o resto da divisão é 10. Se y é o número de pontos da face vertical do primeiro dado à esquerda, então o número de pontos da face vertical do último dado à direita é $7 - y$, pois o número total de dados é 143, ou seja, um número ímpar. Mas isto é impossível, pois a soma dos pontos dessas duas faces deveria ser 10, resto da divisão. Se aumentarmos o número de dados, a soma dos pontos visíveis será maior do que 2012 e se diminuirmos o número de dados, a soma dos pontos das faces verticais será maior do que 10. Portanto, não é possível construir essa barra.

Problemas de 5 pontos

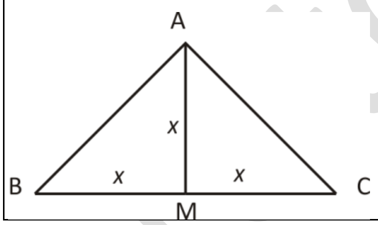
21. Qual é a menor medida de um ângulo em um triângulo isósceles que tem uma mediana que o divide em dois triângulos isósceles?

(A) 15^o (B) $22{,}5^o$ (C) 30^o (D) 36^o (E) 45^o

21. Resposta: alternativa E



No triângulo ABC ao lado $AB = AC = 2x$ e $BC = y$. Seja $\overline{BM}$ a mediana relativa a um dos dois lados iguais. Para que os dois triângulos internos sejam isósceles, deve-se ter y = x, mas isto é impossível, pois no triângulo ABM deve-se ter $x + y > 2x$. Assim, a mediana deve ser relativa à base $\overline{BC}$, de forma que $AM = BM = MC$, como na figura abaixo, na qual os triângulos ABM e ACM são isósceles. Esses dois triângulos são retângulos e isósceles, ou seja, seus ângulos agudos medem 45^O. Portanto, a menor medida de um triângulo nas condições dadas mede 45^O.



22. Aplicamos, a uma dada fração, duas operações distintas: 1) aumentamos seu numerador de 8; 2) aumentamos o seu denominador de 7. Começando com a fração $\frac{7}{8}$, depois de n operações, em alguma ordem, queremos obter uma fração equivalente a ela. Qual é o menor valor não nulo de n?

(A) 56 (B) 81 (C) 109 (D) 113 (E) 2012

22. Resposta: alternativa D
Sendo x o número de vezes em que o numerador deve ser aumentado de 8, então $n - x$ é o número de vezes em que o denominador deve ser aumentado de 7, de forma que a fração obtida seja equivalente à fração inicial $\frac{7}{8}$. Teremos então $\frac{7+8x}{8+7(n-x)}=\frac{7}{8} \Leftrightarrow 56+64x=56+49n-49x \Leftrightarrow 113x=49n \Leftrightarrow n=\frac{113}{49}x$. Como n é inteiro positivo e a fração $\frac{113}{49}$ é irredutível, o menor valor de n ocorre quando x assume seu menor valor, que é 49. Logo, o menor valor de n é 113.

23. Pedrinho desenha no computador a parábola de equação $y=x^2$ e 2012 retas paralelas à reta de equação $y=x$ que interceptam a parábola em dois pontos distintos. Qual é a soma das abscissas desses 4024 pontos de intersecção?

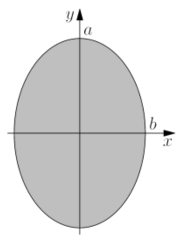
(A) 0 (B) 1 (C) 1006 (D) 2012 (E) impossível calcular

23. Resposta: alternativa D

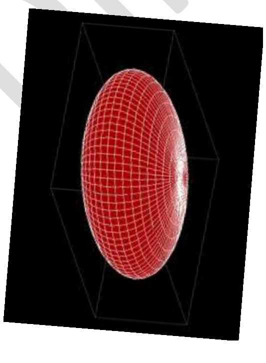
As retas paralelas à reta de equação $y = x$ que interceptam a parábola de equação $y=x^2$ têm equação $y=x+k$, sendo k um número real positivo. As coordenadas dos pontos de intersecção de qualquer uma dessas retas com a parábola são soluções do sistema $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2 \\ x^2=x+k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2 \\ x^2-x-k=0 \end{cases}$

A equação do segundo grau $x^2-x-k=0$ em que $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-k)=1+4k>0$ tem duas soluções reais, que são as abscissas dos pontos de intersecção da reta com a parábola. A soma dessas duas abscissas é $-\frac{-1}{1}=1$. Portanto, cada uma das 2012 retas que interceptam a parábola o fazem em dois pontos cuja soma das abscissas é 1. Assim, a soma de todas as abscissas é 2012.

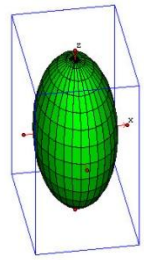
24. Na elipse representada ao lado, temos $a>b$. Ao girar ao redor do eixo das abscissas, a elipse gera um sólido, o elipsoide E_x de volume igual a V_x e ao girar ao redor do eixo das ordenadas, a elipse gera o elipsoide E_y, de volume V_y. Qual das afirmações a seguir é verdadeira?



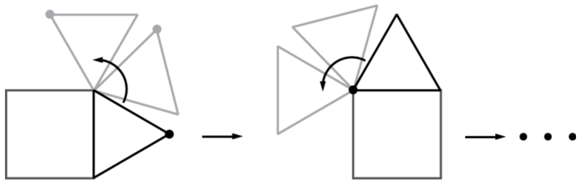
(A) $E_x = E_y$ e $V_x = V_y$ (B) $E_x = E_y$ mas $V_x \neq V_y$ (C) $E_x \neq E_y$ e $V_x > V_y$
(D) $E_x \neq E_y$ e $V_x < V_y$ (E) $E_x \neq E_y$ mas $V_x = V_y$



24. Resposta: alternativa C
Ao girar ao redor do eixo Oy, a elipse gera o elipsoide E_y na forma de um "charuto", como no desenho à direita. Ao girar a mesma elipse ao redor do eixo Ox, forma-se um elipsoide E_x na forma de um "comprimido" contendo o elipsoide E_y. Assim, os dois elipsoides são diferentes e $V_x > V_y$.



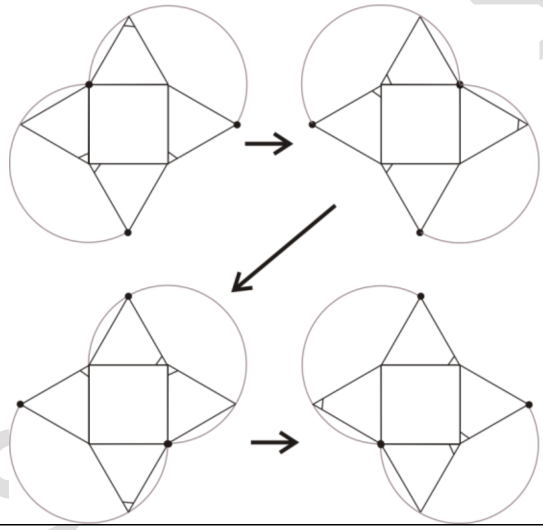
25. Um triângulo equilátero gira ao redor de um quadrado, ambos de lado 1, conforme mostrado na figura. Qual é o comprimento do caminho percorrido pelo ponto destacado, desde o início até que o triângulo e o ponto voltem à posição inicial?



(A) 4π (B) $\frac{28}{3}\pi$ (C) 8π (D) $\frac{14}{3}\pi$ (E) $\frac{21}{2}\pi$

25. Resposta: alternativa B

Inicialmente a partir do vértice superior direito do quadrado, o triângulo gira, no sentido anti-horário, ao redor de um de seus vértices, coincidente com um dos vértices do quadrado, de modo que o ponto destacado percorre um arco de 210° de cada vez, conforme indicado na sequência de figuras ao lado. A primeira sobreposição de triângulo irá ocorrer na 8ª rotação do ponto destacado, que irá percorrer então um caminho de comprimento igual a $8\times\frac{210^{\circ}\times 2\pi\times 1}{360^{\circ}}=\frac{28\pi}{3}$.



26. Quantas permutações (x_1, x_2, x_3, x_4) do conjunto de inteiros {1, 2, 3, 4} têm a propriedade de que a soma $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1$ é divisível por 3?

(A) 8 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) 24

26. Resposta: alternativa D

$$\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)^2=x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}+x_4^{\,2}+2\left(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4\right)\Leftrightarrow$$

Temos $\left(1+2+3+4\right)^2=1^2+2^2+3^2+4^2+2\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1\right)+2\left(x_1x_3+x_2x_4\right)\Leftrightarrow$

$$100=30+2S+2\left(x_1x_3+x_2x_4\right)\Leftrightarrow 35=S+\left(x_1x_3+x_2x_4\right)\Leftrightarrow S=35-\left(x_1x_3+x_2x_4\right)$$

S é divisível por 3 se, e somente se, $35-\left(x_1x_3+x_2x_4\right)$ é divisível por 3. Logo os possíveis valores de $\left(x_1x_3+x_2x_4\right)$ são 11 e 14 já que $\left\{x_1,x_2,x_3,x_4\right\}=\left\{1,2,3,4\right\}$. A igualdade $x_1x_3+x_2x_4=11$ é válida para 8 ocorrências das variáveis (por exemplo, 1.3 + 2.4 = 1.3 + 4.2 = 3.1 + 2.4 = 2. 4 + 1. 3, etc.) o mesmo acontecendo com a soma 14. Portanto, o número de permutações satisfazendo as condições apresentadas é 8 + 8 = 16.

27. Os pontos $P(3;4;1)$, $Q(5;2;9)$ e $R(1;6;5)$ são vértices de um cubo, não necessariamente na mesma face. Qual é o centro do cubo?

(A) A(4;3;5) (B) B(2;5;3) (C) C(3;4;7) (D) D(3;4;5) (E) E(2;3;5)

27. Resposta: alternativa A

No espaço, a distância entre os pontos $A(x_1;y_1;z_1)$ e $B(x_2;y_2;z_2)$ é igual a $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$. Num cubo de lado *x*, as distâncias entre os vértices são iguais a *x* (vértices de uma mesma aresta), a $x\sqrt{2}$ (vértices de uma mesma diagonal de face) ou a $x\sqrt{3}$ (vértices de uma diagonal do cubo, que passa pelo seu centro). No cubo de vértices dados P, Q e R temos $PQ=\sqrt{(5-3)^2+(2-4)^2+(9-1)^2}=\sqrt{72}; PR=\sqrt{(1-3)^2+(6-4)^2+(5-1)^2}=\sqrt{24}$ e

$QR=\sqrt{(1-5)^2+(6-2)^2+(5-9)^2}=\sqrt{48}$

Assim, $PQ=\sqrt{72}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{24}$, $PR=\sqrt{24}$ e $QR=\sqrt{48}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{24}$, ou seja, $\overline{PQ}$ é uma diagonal do cubo e seu ponto médio é o centro do mesmo. Logo, o centro do cubo é o ponto $\left(\frac{3+5}{2};\frac{4+2}{2};\frac{1+9}{2}\right)=(4;3;5)$.

28. Na sequência 1, 1, 0, 1, -1,..., os dois primeiros elementos a_1 e a_2 são iguais a 1. O terceiro elemento é a diferença entre os dois primeiros elementos, isto é, $a_3=a_1-a_2$. O quarto elemento é a soma dos dois elementos precedentes, ou seja, $a_4=a_2+a_3$. Em seguida, $a_5=a_3-a_4$, $a_6=a_4+a_5$ e assim por diante. Qual é a soma dos 100 primeiros elementos desta sequência?

(A) 0 (B) 3 (C) -21 (D) 100 (E) -1

28. Resposta: alternativa B

Temos

$a_1=1$

$a_2=1$

$a_3=[a_1-a_2]=0$

$a_4=a_2+a_3=a_2+a_1-a_2=[a_1]=1$

$a_5=a_3-a_4=a_1-a_2-a_1=[-a_2]=-1$

$a_6=a_4+a_5=[a_1-a_2]=0$

$a_7=a_5-a_6=-a_2-(a_1-a_2)=[-a_1]=-1$

$a_8=a_6+a_7=a_1-a_2-a_1=[-a_2]=-1$

$a_9=a_7-a_8=-a_1-(-a_2)=[a_2-a_1]=0$

$a_{10}=a_8+a_9=-a_2+(a_2-a_1)=[-a_1]=-1$

$a_{11}=a_9-a_{10}=a_2-a_1+a_1=[a_2]=1$

$a_{12}=a_{10}+a_{11}=-a_1+a_2=[a_2-a_1]=0$

$a_{13}=a_{11}-a_{12}=a_2-(a_2-a_1)=\langle a_1\rangle=1$

$a_{14}=a_{12}+a_{13}=a_2-a_1+a_1=\langle a_2\rangle=1$

$\ldots$

A sequência 1, 1, 0, 1, -1,... recomeça a partir do 13º elemento e a soma desses 12 elementos é 0. Dividindo 100 por 12, obtemos quociente 8 e resto 4. Isto significa que a soma dos 100 primeiros elementos da sequência é igual a $8\times0+a_{97}+a_{98}+a_{99}+a_{100}=0+1+1+0+1=3$.

29. Joana escolhe dois números *a* e *b* do conjunto {1, 2, 3,..., 26} tais que o seu produto seja igual à soma dos demais números do conjunto. Qual é o valor de $|a-b|$?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

29. Resposta: alternativa A

A soma dos inteiros de 1 a 26 é igual a $\frac{26\times 27}{2}=351$. Então *a* e *b* são inteiros tais que $351-(a+b)=ab$. Logo, $351=a+b+ab \Leftrightarrow 351+1=a+b+ab+1 \Leftrightarrow (a+1)(b+1)=352=32\cdot 11$. Como $1\le a,b\le 26$, temos $a+1=22$ e $b+1=16 \Leftrightarrow (a=21$ e $b=15)$ ou $(a=15$ e $b=21)$, logo $|a-b|=6$.

30. Todo gato no País das Maravilhas é sábio ou louco. Se um gato sábio estiver em uma sala onde há mais três gatos loucos, então ele também se torna louco. Se um gato louco estiver com outros três gatos sábios numa mesma sala, então ele será declarado louco pelos gatos sábios. Três gatos entraram numa sala vazia e assim que um 4º gato entrou nessa sala, o 1º que tinha entrado, saiu. Assim que o 5º gato entrou, saiu o 2º que tinha entrado, etc. Depois que o 2012º gato entrou, aconteceu pela primeira vez de um gato ser declarado louco. Quais dos dois gatos a seguir poderiam estar loucos logo depois de entrar na sala?

(A) O 1º e o 2011º (B) O 2º e o 2010º (C) O 3º e o 2009º (D) O 4º e o 2012º (E) O 2º e o 2011º

30. Resposta: alternativa B

Vamos representar a entrada dos gatos na sala como uma sequência de letras S (sábio) e L (louco). A sequência possível SLSLSL ... SLSS mostra que o 2º e o 2010º gatos poderiam ter sido gatos loucos na sala.

Para verificar que as demais alternativas não servem, vamos supor que o 2011º gato fosse L. Então os gatos 2012º, 2010º e 2009º teriam que ser sábios (... SSLS) para garantir que ao entrar o 2012º alguém fosse declarado louco. Então o 2008º é L, pois se fosse S, o 2011º seria o primeiro a ser declarado louco. O mesmo ocorre com o 2007º. Mas o 2006º não pode ser L, pois do contrário os seguintes seriam todos loucos (por natureza ou por contaminação). O mesmo se passa com o 2005º. Assim, teríamos a sequência possível SSLLSS ... LLSSLS, que elimina as alternativas A, C, D e E.

Solução alternativa:

De acordo com o enunciado, podemos afirmar que:

- não haverá jamais 3 gatos loucos na mesma sala
- só haverá 3 gatos sábios na sala na última rodada

Assim, as possibilidades iniciais são: SLL, LSL, LLS, SSL, SLS, LSS

Para cada um dessas configurações iniciais existe uma única sequência que satisfaz as duas primeiras condições acima:

1) SLLSSLLSSLL...
2) LSLSLSL...
3) LLSSLLSS...
4) SSLLSSLL...
5) SLSLSLSL...
6) LSSLLSS...

As três letras do final da sequência (ou seja, 2009º , 2010º e 1011º), antes de entrar o último gato, devem ter dois S e um L (assim, quando entrar S, ficam 3 letras S e um L, ou seja, os três gatos sábios

declaram o louco de “louco”)
Esses finais são (olhe para blocos de quatro letras)
1) SLL
2) LSL
3) LLS
4) SSL
5) SLS
6) LSS
Valem somente as sequências 4, 5 e 6:
4) Loucos: 3º e 2011º
5) Loucos: 2º e 2010º
6) Loucos: 1º e 2009º
A alternativa correta é a B (uma das três soluções).