Capítulo 2

Geometria analítica: ponto e reta

Para pensar

1. Um ponto da superfície da Terra é determinado pela latitude e pela longitude.
2. Três coordenadas: latitude, longitude e altitude.

Exercícios propostos

1. a) $AB = \sqrt{(8-2)^2 + (12-4)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} =$
$= \sqrt{36 + 64} = 10$

b) $AB = \sqrt{(4-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} =$
$= \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

c) $AB = \sqrt{[3-(-2)]^2 + (18-6)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} =$
$= \sqrt{25 + 144} = 13$

d) $AB = \sqrt{[-3-(-1)]^2 + [-8-(-4)]^2} =$
$= \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$

2. O raio da circunferência é igual à distância de $C(0, 3)$ a $P(2, 5)$. Assim, temos que o raio é:
$CP = \sqrt{(2-0)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

3. Como P é um ponto do eixo das abscissas, P é da forma $(x, 0)$. Do enunciado, temos $PA = 10$. Assim:
$\sqrt{(x-2)^2 + (0-6)^2} = 10 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 36 = 100$
$\therefore x^2 - 4x - 60 = 0$
$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-60) = 256$
$\therefore x = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{256}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm 16}{2}$
$\therefore x = 10$ ou $x = -6$
Logo, há duas possibilidades para o ponto P:
$P(10, 0)$ ou $P(-6, 0)$

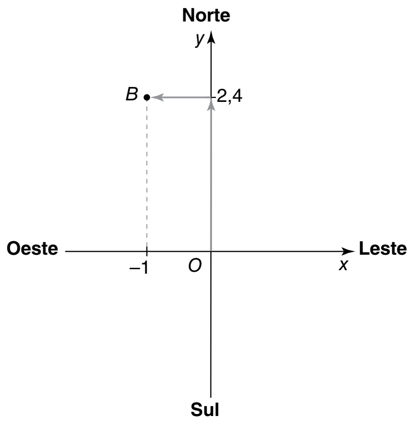
4. Um ponto que pertence à bissetriz dos quadrantes pares tem abscissa e ordenada opostas.
Dessa forma, consideremos $Q(q, -q)$. Do enunciado, temos $QA = 2\sqrt{5}$. Assim:
$\sqrt{(q-2)^2 + [-q-(-8)]^2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow$
$\Rightarrow q^2 - 4q + 4 + q^2 - 16q + 64 = 20$
$\therefore q^2 - 10q + 24 = 0$
$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24 = 4$
$\therefore q = \dfrac{-(-10) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow q = \dfrac{10 \pm 2}{2}$
$\therefore q = 4$ ou $q = 6$
Logo, há duas possibilidades para o ponto Q:
$Q(4, -4)$ ou $Q(6, -6)$

5. Calculando as distâncias AB, AC e BC, temos:
$AB = \sqrt{(m-1)^2 + [4-(-2)]^2} = \sqrt{(m-1)^2 + 36}$
$AC = \sqrt{(0-1)^2 + [6-(-2)]^2} = \sqrt{65}$
$BC = \sqrt{(m-0)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{m^2 + 4}$
Como o triângulo ABC é retângulo em A, temos, pelo teorema de Pitágoras:
$(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\sqrt{(m-1)^2 + 36}\right)^2 + \left(\sqrt{65}\right)^2 = \left(\sqrt{m^2 + 4}\right)^2$
$\therefore (m-1)^2 + 36 + 65 = m^2 + 4 \Rightarrow m = 49$
Alternativa **c**.

6. Indicando o ponto C por $C(a, b)$, temos:
$$\begin{cases} CM = CN \\ CN = CP \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(a-3)^2 + (b-6)^2} = \sqrt{(a-4)^2 + (b-5)^2} \\ \sqrt{(a-4)^2 + (b-5)^2} = \sqrt{(a-10)^2 + (b-5)^2} \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} (a-3)^2 + (b-6)^2 = (a-4)^2 + (b-5)^2 & \text{(I)} \\ (a-4)^2 + (b-5)^2 = (a-10)^2 + (b-5)^2 & \text{(II)} \end{cases}$$
De (II), obtemos:
$(a-4)^2 + (b-5)^2 = (a-10)^2 + (b-5)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (a-4)^2 = (a-10)^2$
$\therefore a - 4 = a - 10$ (impossível)
ou $a - 4 = -a + 10 \Rightarrow a = 7$
Substituindo a por 7 em (I), concluímos:
$(7-3)^2 + (b-6)^2 = (7-4)^2 + (b-5)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 16 + b^2 - 12b + 36 = 9 + b^2 - 10b + 25$
$\therefore b = 9$
Assim, $C(7, 9)$.

Outro modo
Professor, mesmo antes de estudarmos as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta, podemos raciocinar da seguinte maneira:
O ponto C equidista de N e P; logo, C pertence à mediatriz do segmento $\overline{NP}$. Essa mediatriz corta, perpendicularmente, o eixo das abscissas no ponto que equidista de N e P; logo, a abscissa de C é 7. Assim, indicando por b a ordenada de C, temos $C(7, b)$. O ponto C também equidista de M e N; logo:
$CM = CN \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{(7-3)^2 + (b-6)^2} = \sqrt{(7-4)^2 + (b-5)^2}$
$\therefore (7-3)^2 + (b-6)^2 = (7-4)^2 + (b-5)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 16 + b^2 - 12b + 36 = 9 + b^2 - 10b + 25$
$\therefore b = 9$
Concluímos, então, que $C(7, 9)$.

7. a) Representando o ponto B no plano cartesiano, temos:



Logo, $B(-1; 2{,}4)$.

b) A distância d percorrida pelo submarino, em quilômetro, é dada por:
$d = |2{,}4| + |-1| = 3{,}4$

c) Se o submarino tivesse ido em linha reta de O até B, a distância percorrida seria o comprimento do segmento $\overline{OB}$. Calculando essa distância, em quilômetro, temos:
$OB = \sqrt{(-1-0)^2 + (2{,}4-0)^2} = \sqrt{6{,}76} = 2{,}6$

8. a) $PE = \sqrt{[6 - (-6)]^2 + (-12 - 4)^2} = \sqrt{400} = 20$

Como $PE < 23$ km, concluímos que a empresa conseguirá se comunicar com o motoboy.

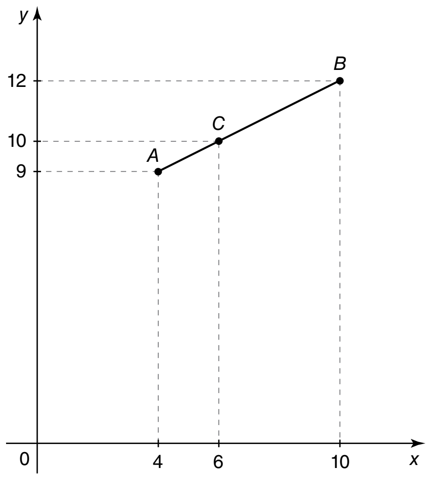
b) $ME = \sqrt{[14 - (-6)]^2 + (16 - 4)^2} = \sqrt{544} \approx 23{,}3$

Como $ME > 23$ km, concluímos que a empresa não conseguirá se comunicar com o motoboy.

c) Devemos ter $GE \leqslant 23$ km, ou seja:

$\sqrt{(x + 6)^2 + (y - 4)^2} \leqslant 23$

9. a)



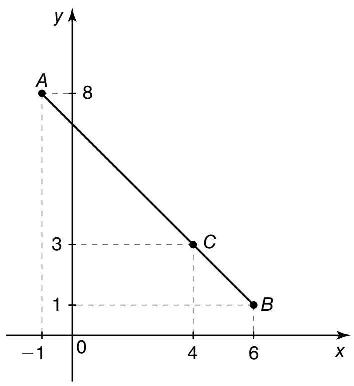
Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{6 - 4}{10 - 6}$$

$$\therefore \frac{AC}{CB} = \frac{1}{2}$$

Logo, o ponto C divide o segmento $\overline{AB}$, de A para B, na razão $\frac{1}{2}$.

b)



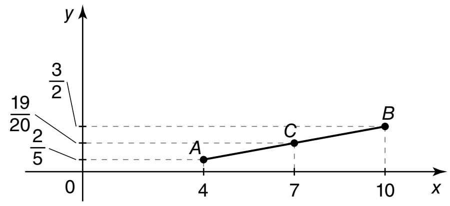
Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{4 - (-1)}{6 - 4}$$

$$\therefore \frac{AC}{CB} = \frac{5}{2}$$

Portanto, o ponto C divide o segmento $\overline{AB}$, de A para B, na razão $\frac{5}{2}$.

c)



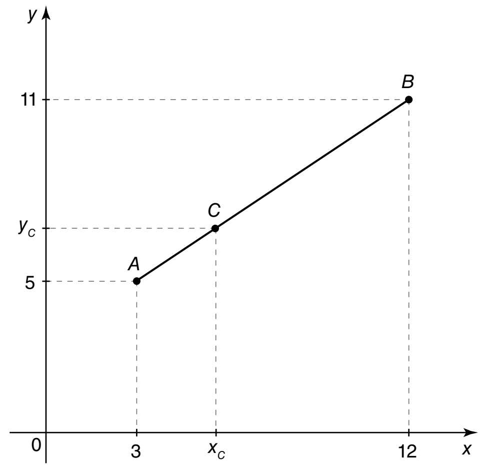
Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{7 - 4}{10 - 7}$$

$$\therefore \frac{AC}{CB} = 1$$

Portanto, o ponto C divide o segmento $\overline{AB}$, de A para B, na razão 1.

10. a)



Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{x_C - 3}{12 - x_C} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x_C - 3}{12 - x_C}$$

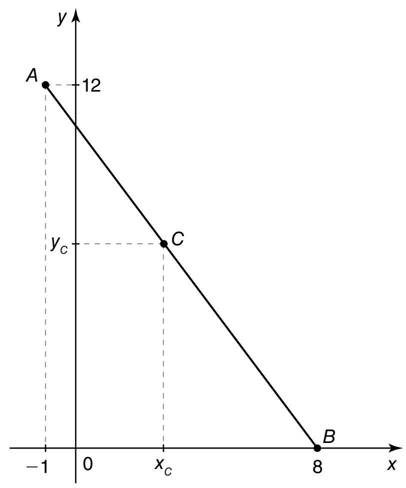
$$\therefore x_C = 6$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{y_C - 5}{11 - y_C} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y_C - 5}{11 - y_C}$$

$$\therefore y_C = 7$$

Portanto, C(6, 7).

b)



Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{x_C - (-1)}{8 - x_C} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{x_C - (-1)}{8 - x_C}$$

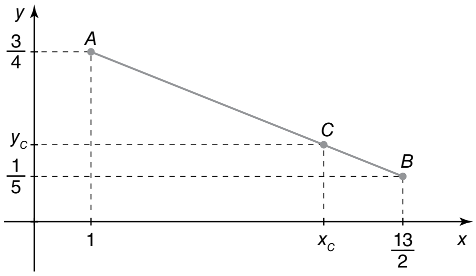
$$\therefore\ x_C = \frac{13}{5}$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{12 - y_C}{y_C - 0} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{12 - y_C}{y_C - 0}$$

$$\therefore\ y_C = \frac{36}{5}$$

Portanto, $C\left(\frac{13}{5}, \frac{36}{5}\right)$.

c)



Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{x_C - 1}{\frac{13}{2} - x_C} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{x_C - 1}{\frac{13 - 2x_C}{2}}$$

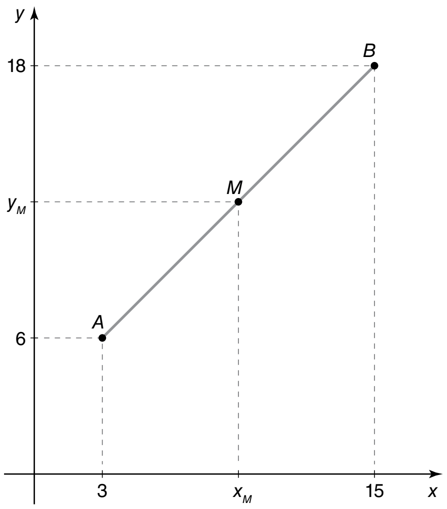
$$\therefore\ x_C = \frac{69}{14}$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\frac{3}{4} - y_C}{y_C - \frac{1}{5}} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{\frac{3 - 4y_C}{4}}{\frac{5y_C - 1}{5}}$$

$$\therefore\ y_C = \frac{5}{14}$$

Portanto, $C\left(\frac{69}{14}, \frac{5}{14}\right)$.

11. a)



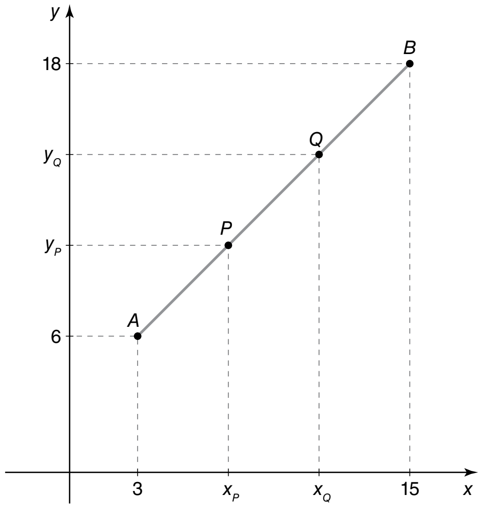
O ponto M divide o segmento $\overline{AB}$, de A para B (ou de B para A), na razão $\frac{1}{1}$. Assim, temos:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{x_M - 3}{15 - x_M} = \frac{1}{1} \Rightarrow x_M = 9 \quad \text{e}$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{y_M - 6}{18 - y_M} = \frac{1}{1} \Rightarrow y_M = 12$$

Logo, M(9, 12).

b)



O ponto P divide o segmento $\overline{AB}$, de A para B, na razão $\frac{1}{2}$. Assim, temos:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{x_P - 3}{15 - x_P} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_P = 7 \quad \text{e}$$

$$\frac{AP}{PB} = \frac{y_P - 6}{18 - y_P} = \frac{1}{2} \Rightarrow y_P = 10$$

Logo, P(7, 10).

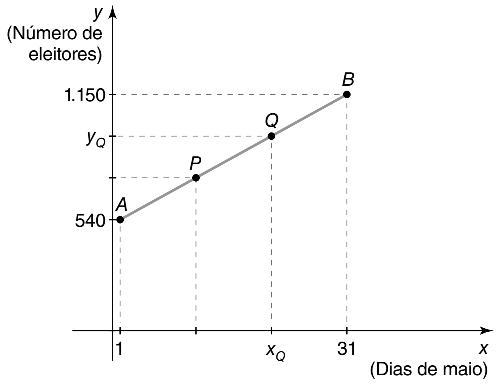
O ponto Q divide o segmento $\overline{AB}$, de A para B, na razão $\frac{2}{1}$. Assim, temos:

$$\frac{AQ}{QB} = \frac{x_Q - 3}{15 - x_Q} = \frac{2}{1} \Rightarrow x_Q = 11 \quad \text{e}$$

$$\frac{AQ}{QB} = \frac{y_Q - 6}{18 - y_Q} = \frac{2}{1} \Rightarrow y_Q = 14$$

Logo, Q(11, 14).

12. Além das pesquisas realizadas nos dias 1º e 31 de maio foram realizadas mais duas, dividindo o mês em intervalos iguais de tempo. Associando aos resultados dessas duas pesquisas os pontos P e Q do segmento $\overline{AB}$, que o dividem em três partes congruentes, com P entre A e Q, temos:



Observamos que a ordenada do ponto Q é, aproximadamente, o número de eleitores dispostos a votar no candidato na 3ª pesquisa. Como o ponto Q divide $\overline{AB}$, de A para B, na razão $\frac{2}{1}$, concluímos:

$$\frac{AQ}{QB} = \frac{y_Q - 540}{1.150 - y_Q} = \frac{2}{1} \Rightarrow y_Q \approx 947$$

Ou seja, aproximadamente 947 eleitores estavam dispostos a votar no candidato na 3ª pesquisa.

13. Sendo $M(x_M, y_M)$ o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ em cada caso, temos:

a) $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_M = \dfrac{5 + 1}{2} \Rightarrow x_M = 3$

$y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_M = \dfrac{9 + 13}{2} \Rightarrow y_M = 11$

$\therefore M(3, 11)$

b) $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_M = \dfrac{2 + (-1)}{2} \Rightarrow x_M = \dfrac{1}{2}$

$y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_M = \dfrac{\frac{3}{2} + 2}{2} \Rightarrow y_M = \dfrac{7}{4}$

$\therefore M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{4}\right)$

c) $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_M = \dfrac{\sqrt{2} + \left(1 - \sqrt{2}\right)}{2} \Rightarrow x_M = \dfrac{1}{2}$

$y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_M = \dfrac{1 + \sqrt{3} + \left(\sqrt{3} - 1\right)}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y_M = \sqrt{3}$

$\therefore M\left(\dfrac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$

14. Seja (x, y) o simétrico de A em relação a Q em cada caso. Temos, então:

- $x_Q = \dfrac{x_A + x}{2} \Rightarrow x = 2x_Q - x_A$
- $y_Q = \dfrac{y_A + y}{2} \Rightarrow y = 2y_Q - y_A$

a) $x = 2 \cdot 5 - 3 \Rightarrow x = 7$

$y = 2 \cdot 9 - 6 \Rightarrow y = 12$

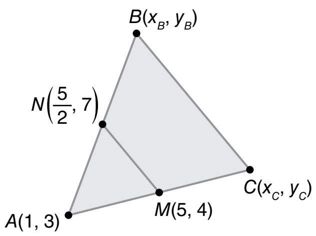
Portanto, o simétrico de A em relação a Q é (7, 12).

b) $x = 2 \cdot 2 - (-3) \Rightarrow x = 7$

$y = 2 \cdot \dfrac{4}{3} - 8 \Rightarrow y = -\dfrac{16}{3}$

Portanto, o simétrico de A em relação a Q é $\left(7, -\dfrac{16}{3}\right)$.

15. Sendo $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, esquematizamos:



Como N é ponto médio de $\overline{AB}$, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{1 + x_B}{2} = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{3 + y_B}{2} = 7 \end{cases} \Rightarrow x_B = 4 \text{ e } y_B = 11$$

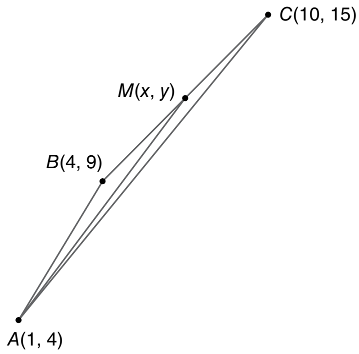
Logo, $B(4, 11)$.

Como M é ponto médio de $\overline{AC}$, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{1 + x_C}{2} = 5 \\ \dfrac{3 + y_C}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow x_C = 9 \text{ e } y_C = 5$$

Logo, $C(9, 5)$.

16.



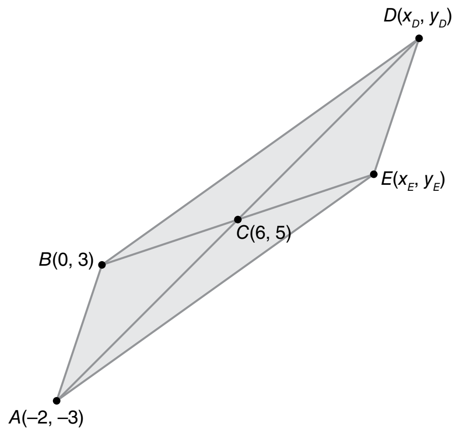
M é ponto médio de $\overline{BC}$; logo, $M(7, 12)$.

O comprimento de mediana $\overline{AM}$ é dado por:

$AM = \sqrt{(7 - 1)^2 + (12 - 4)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$

Alternativa **c**.

17. Sendo $D(x_D, y_D)$ e $E(x_E, y_E)$, esquematizamos:



Como C é ponto médio de $\overline{AD}$, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{-2 + x_D}{2} = 6 \\ \dfrac{-3 + y_D}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow x_D = 14 \text{ e } y_D = 13$$

Logo, $D(14, 13)$.

Como C é ponto médio de $\overline{BE}$, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{0 + x_E}{2} = 6 \\ \dfrac{3 + y_E}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow x_E = 12 \text{ e } y_E = 7$$

Logo, $E(12, 7)$.

18. Como A e C têm a mesma abscissa (2), temos que B e D pertencem à reta paralela ao eixo Ox, que passa por M, ponto médio de $\overline{AC}$. Assim:

$x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow x_M = \dfrac{2 + 2}{2} = 2$

$y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow y_M = \dfrac{5 + 9}{2} = 7$

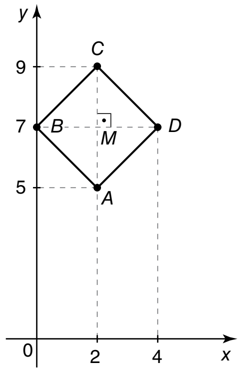
Então, $M(2, 7)$ e, portanto, os pontos C e D têm ordenada 7.

Além disso, temos que M é centro do quadrado e, portanto, $AM = BM = CM = DM$.

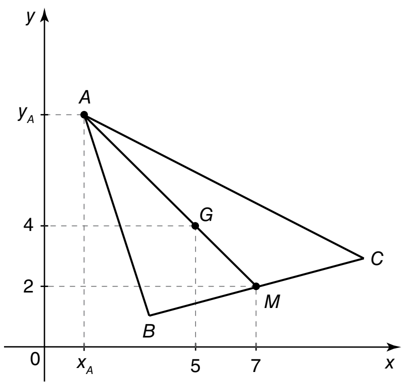
Assim, concluímos:

- $x_M - x_B = y_M - y_C \Rightarrow 2 - x_B = 9 - 7 \therefore x_B = 0$
- $x_D - x_M = y_C - y_M \Rightarrow x_D - 2 = 9 - 7 \therefore x_D = 4$

Logo, temos $B(0, 7)$ e $D(4, 7)$.



19. Como $\overline{AM}$ é mediana e G é baricentro do triângulo, G divide o segmento $\overline{AM}$, de A para M, na razão $\frac{2}{1}$.



Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AG}{GM} = \frac{5 - x_A}{7 - 5} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{5 - x_A}{2}$$

$\therefore\ x_A = 1$

$$\frac{AG}{GM} = \frac{y_A - 4}{4 - 2} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{y_A - 4}{2}$$

$\therefore\ y_A = 8$

Logo, as coordenadas do vértice A são $x_A = 1$ e $y_A = 8$ e, portanto, $A(1, 8)$.

20. a) $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow x_G = \dfrac{1 + 8 + 6}{3} = 5$

$y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow y_G = \dfrac{3 + 1 + 5}{3} = 3$

$\therefore\ G(5, 3)$

b) $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow x_G = \dfrac{\frac{3}{2} + \frac{1}{4} + 2}{3} = \dfrac{5}{4}$

$y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow y_G = \dfrac{4 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6}}{3} = \dfrac{13}{9}$

$\therefore\ G\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{13}{9}\right)$

21. a) Pelo teorema de Pitágoras, obtemos a distância x entre o ponto B e a parede:

$x^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow x = 3$

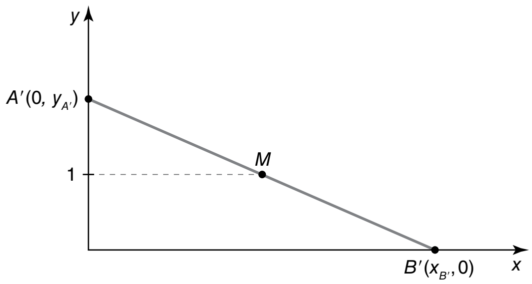
Logo, o ponto B dista 3 m da parede.

Assim, associando o sistema cartesiano descrito no item **a**, os pontos A e B são:

$A(0, 4)$ e $B(3, 0)$.

b) O ponto M é dado por: $M\left(\dfrac{0 + 3}{2}, \dfrac{4 + 0}{2}\right)$, ou seja, $M\left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$. Logo, o ponto M está a $\dfrac{3}{2}$ m de distância da parede e a 2 m de altura em relação ao piso.

c) Esquematizando a situação, temos:



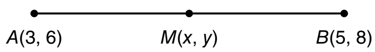
$$\frac{0 + y_{A'}}{2} = 1 \Rightarrow y_{A'} = 2$$

Pelo teorema de Pitágoras, obtemos $x_{B'}$:

$(x_{B'})^2 + 2^2 = 5^2 \Rightarrow x_{B'} = \sqrt{21}$

Assim, os pontos A' e B' são: $A'(0, 2)$ e $B'\left(\sqrt{21}, 0\right)$.

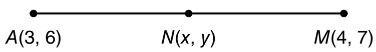
22. a) Após 2 minutos, o astro estava no ponto médio M do segmento $\overline{AB}$.



Então: $\begin{cases} x = \dfrac{5 + 3}{2} = 4 \\ y = \dfrac{8 + 6}{2} = 7 \end{cases} \Rightarrow M(4, 7)$

Logo, o astro estava no ponto $M(4, 7)$.

b) Após 1 minuto, o astro estava no ponto médio N do segmento $\overline{AM}$.



Então: $\begin{cases} x = \dfrac{3 + 4}{2} = \dfrac{7}{2} \\ y = \dfrac{6 + 7}{2} = \dfrac{13}{2} \end{cases} \Rightarrow N\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{13}{2}\right)$.

Logo, o astro estava no ponto $N\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{13}{2}\right)$.

c) Indicando por $C(x_C, y_C)$ a posição do astro 8 minutos após a passagem pelo ponto A, temos que B é o ponto médio de $\overline{AC}$; logo:

$\begin{cases} \dfrac{3 + x_C}{2} = 5 \\ \dfrac{6 + y_C}{2} = 8 \end{cases} \Rightarrow x_C = 7$ e $y_C = 10$

Concluímos, então, que 8 minutos após a passagem pelo ponto A o astro estará no ponto $C(7, 10)$.

23. a) $\alpha = 60°$ e $m = \text{tg } 60° \Rightarrow m = \sqrt{3}$

b) $\alpha = 135°$ e $m = \text{tg } 135° \Rightarrow m = -1$

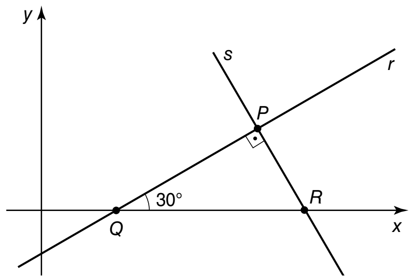
c) Como r é perpendicular ao eixo Ox, temos que $\alpha = 90°$ e não existe o coeficiente angular m.

d) Como a reta é paralela ao eixo x, temos: $\alpha = 0°$ e $m = \text{tg } 0° \Rightarrow m = 0$

24. Como r e s são paralelas, temos que suas inclinações são iguais.

Assim, a inclinação da reta r é 60° e seu coeficiente angular é: $m = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$

25. Sejam os pontos P, Q e R conforme a figura a seguir.



No triângulo PQR, temos:

$m(P\widehat{R}Q) = 180° - 90° - 30° \Rightarrow m(P\widehat{R}Q) = 60°$

Assim, a inclinação da reta s é: 180° − 60° = 120° e, portanto, seu coeficiente angular é:

$m = \text{tg } 120° = -\sqrt{3}$

26. a) $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \dfrac{9 - 6}{4 - 1} \therefore m = 1$

b) $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \dfrac{-5 - 4}{3 - (-6)} \therefore m = -1$

c) $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \dfrac{6 - 6}{10 - 2} \therefore m = 0$

d) Como A e B têm mesma abscissa, o coeficiente angular de $\overleftrightarrow{AB}$ não existe.

27. A reta s passa pelos pontos (6, 0) e (0, 6). Assim, seu coeficiente angular é $m = \dfrac{0 - 6}{6 - 0} \Rightarrow m = -1$ e, portanto, a inclinação da reta s é: $\alpha = 135°$

28. Como a reta r tem 150° de inclinação, temos:

$m = \text{tg } 150° \Rightarrow m = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

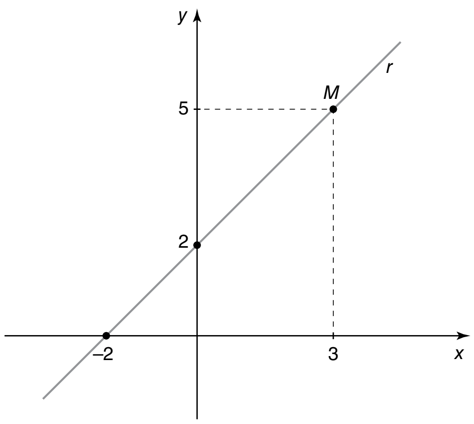
Além disso, tal reta passa pelos pontos (4, 0) e (0, q). Temos, então:

$\dfrac{q - 0}{0 - 4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow q = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

29. a) Sendo (a, 0) e (0, b) os pontos de intersecção da reta r com os eixos Ox e Oy, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{5 - 0}{3 - a} = 1 \\ \dfrac{5 - b}{3 - 0} = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -2 \text{ e } b = 2$$

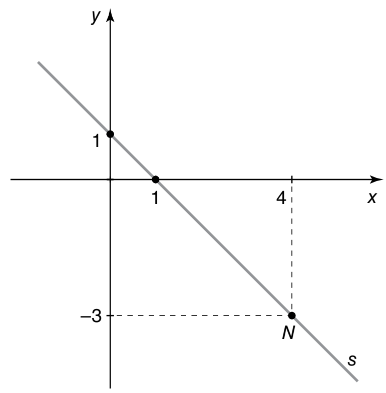
Logo, o gráfico que representa a reta r é:



b) Sendo (c, 0) e (0, d) os pontos de intersecção da reta s com os eixos Ox e Oy, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{0 - (-3)}{c - 4} = -1 \\ \dfrac{d - (-3)}{0 - 4} = -1 \end{cases} \Rightarrow c = 1 \text{ e } d = 1$$

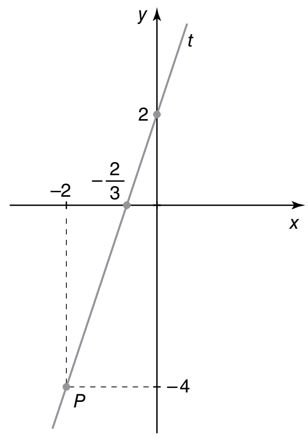
Logo, o gráfico que representa a reta s é:



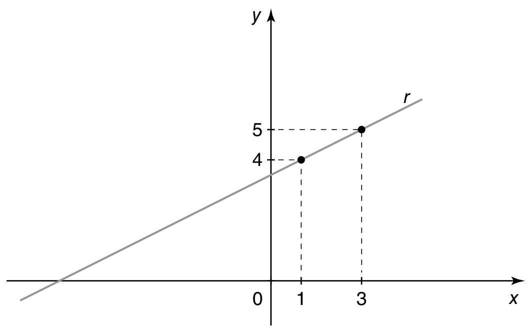
c) Sendo (e, 0) e (0, f) os pontos de intersecção da reta t com os eixos Ox e Oy, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{0 - (-4)}{e - (-2)} = 3 \\ \dfrac{f - (-4)}{0 - (-2)} = 3 \end{cases} \Rightarrow e = -\dfrac{2}{3} \text{ e } f = 2$$

Logo, o gráfico que representa a reta t é:

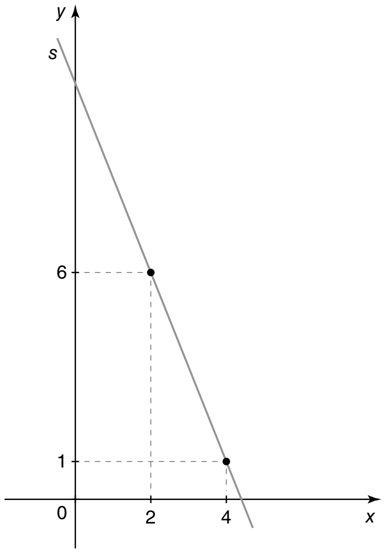


30. a) Resposta possível:



$m_r = \dfrac{5 - 4}{3 - 1} = \dfrac{1}{2}$

b) Resposta possível:



$m_s = \dfrac{6 - 1}{2 - 4} = -\dfrac{5}{2}$

c) Considerando que uma reta r seja o gráfico de uma função crescente, sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ dois pontos distintos de r, com $x_B > x_A$. Por definição de função crescente temos que:
$x_B > x_A \Rightarrow y_B > y_A$, ou, de modo equivalente,
$x_B - x_A > 0 \Rightarrow y_B - y_A > 0$

Logo, $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} > 0$, ou seja, o coeficiente angular da reta r é positivo.

d) Considerando que uma reta s seja o gráfico de uma função decrescente, sejam $C(x_C, y_C)$ e $D(x_D, y_D)$ dois pontos distintos de s, com $x_D > x_C$. Por definição de função crescente temos que:
$x_D > x_C \Rightarrow y_D < y_C$, ou, de modo equivalente,
$x_D - x_C > 0 \Rightarrow y_D - y_C < 0$

Logo, $\dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} < 0$, ou seja, o coeficiente angular da reta s é negativo.

31. a) Se a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é horizontal, então o seu coeficiente angular é 0 (zero); logo:
$\dfrac{k^2 - 8 - (2 + 3k)}{-9 - 12} = 0 \Rightarrow k^2 - 3k - 10 = 0$
$\therefore k = 5$ ou $k = -2$
Como A pertence ao primeiro quadrante, convém apenas $k = 5$.

b) Como os pontos C e D pertencem a uma mesma reta vertical, temos que suas abscissas são iguais, isto é:
$3p + 5 = 4p - 2 \Rightarrow p = 7$
Assim: $C(26, 11)$ e $D(26, 7)$.
Concluímos, então, que $CD = 11 - 7 = 4$.

32. a) $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m_{AB} = \dfrac{9 - 6}{7 - 4} = 1$

$m_{CD} = \dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} \Rightarrow m_{CD} = \dfrac{6 - 2}{5 - 1} = 1$

Como $m_{AB} = m_{CD}$, temos que $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas.

b) $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m_{AB} = \dfrac{4 - (-3)}{1 - 2} = -7$

$m_{CD} = \dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} \Rightarrow m_{CD} = \dfrac{9 - 8}{3 - 5} = -\dfrac{1}{2}$

Como $m_{AB} \neq m_{CD}$, temos que $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são concorrentes.

c) Não existem os coeficientes angulares de $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, pois A e B têm a mesma abscissa, assim como C e D; portanto, as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas.

33. a) $m = \dfrac{50 - 32}{12 - 0} = \dfrac{18}{12} = 1{,}5$

b) Significa que a cada minuto a temperatura aumentou 1,5 °C.

34. a) Os coeficientes angulares m_1 e m_2 das retas que contêm os segmentos do gráfico de 2009 a 2010 e de 2010 a 2011, respectivamente, são dados por:
$m_1 = \dfrac{9 - 7{,}5}{2010 - 2009} = 1{,}5$ e $m_2 = \dfrac{10{,}6 - 9}{2011 - 2010} = 1{,}6$

b) Como $m_2 > m_1$, concluímos que no período de 2010 a 2011 a taxa de variação de investimentos foi maior que a do período de 2009 a 2010.

c) Sendo m o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos (2008; 5,7) e (2013; 14,4), temos:
$m = \dfrac{14{,}4 - 5{,}7}{2013 - 2008} = 1{,}74$

d) O coeficiente angular calculado no item (c) é a taxa média de crescimento de investimentos no programa, em milhões de reais por ano, isto é, no período considerado, os investimentos no programa cresceram, em média, 1,74 milhão de reais por ano.

35. a) Temos:
$m_{AB} = \dfrac{8 - 2}{6 - 4} = 3$ e $m_{BC} = \dfrac{11 - 8}{7 - 6} = 3$
Como $m_{AB} = m_{BC}$, concluímos que A, B e C são colineares.

b) Temos:
$m_{AB} = \dfrac{-5 - (-2)}{0 - \frac{1}{3}} = 9$ e $m_{BC} = \dfrac{-\frac{7}{2} - (-5)}{\frac{1}{2} - 0} = 3$
Como $m_{AB} \neq m_{BC}$, concluímos que A, B e C não são colineares.

c) Temos:
$m_{AB} = \dfrac{1 - 2}{3 - 5} = \dfrac{1}{2}$ e $m_{BC} = \dfrac{2 - 1}{4 - 3} = 1$
Como $m_{AB} \neq m_{BC}$, concluímos que A, B e C não são colineares.

d) Como A, B e C têm ordenadas iguais, eles pertencem a uma mesma reta paralela ao eixo Ox. Portanto, são colineares.

e) Como A, B e C têm ordenadas iguais, eles pertencem a uma mesma reta paralela ao eixo Ox. Portanto, são colineares.

36. Os pontos B e C têm abscissas diferentes; logo, a reta que contém os três pontos não é vertical, portanto tem coeficiente angular. Igualando os coeficientes angulares de $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, obtemos:
$\dfrac{1 - 0}{3 - x} = \dfrac{2 - 1}{-4 - 3} \Rightarrow x = 10$
Alternativa **b**.

37. Se os pontos são vértices de um triângulo, então eles não estão alinhados; logo, os coeficientes angulares das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são diferentes, isto é:

$$\frac{-2-0}{1-k} \neq \frac{2-(-2)}{3-1} \Rightarrow k \neq 2$$

Alternativa **e**.

38. Como os pontos $P(x, y)$, $A(2, 5)$ e $B(4, 9)$ são colineares, temos:

$$m_{PA} = m_{AB} \Rightarrow \frac{5-y}{2-x} = \frac{9-5}{4-2}$$

$\therefore\ y = 2x + 1$

Alternativa **a**.

39. Sendo k o comprimento da coluna, temos que os pontos $(8, k)$, $(0, 40)$ e $(10, 90)$ devem ser colineares; logo:

$$\frac{k-40}{8-0} = \frac{90-40}{10-0} \Rightarrow k = 80$$

Ou seja, o comprimento da coluna é de 80 mm.

40. **a)** Para $P(6, 3)$ e $m = 2$, temos:
$y - 3 = 2(x - 6)$
Logo, uma equação da reta é: $2x - y - 9 = 0$

b) Para $P(4, -5)$ e $m = 1$, temos:
$y - (-5) = 1(x - 4)$
Logo, uma equação da reta é: $x - y - 9 = 0$

c) Para $P\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ e $m = -\frac{5}{6}$, temos:

$$y - \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{6}\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Logo, uma equação da reta é: $5x + 6y - 6 = 0$

41. **a)** Do gráfico, temos $P(7, 3)$ e $m = \text{tg } 45° = 1$. Assim, obtemos:
$y - 3 = 1(x - 7)$
Logo, uma equação da reta é: $y = x - 4$

b) Do gráfico, temos $P(0, 4)$ e $m = \text{tg } 135° = -1$. Assim:
$y - 4 = -1(x - 0)$
Logo, uma equação da reta é: $y = -x + 4$

c) Do gráfico, temos $P(0, -2)$ e

$m = \text{tg }(180° - 30°) = \text{tg } 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Assim:

$$y - (-2) = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 0)$$

Logo, uma equação da reta é: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$

42. **a)** O coeficiente angular da reta que passa por A e B é:

$$m = \frac{11-3}{6-2} = 2$$

Assim, a reta que passa por A e B tem como equação:
$y - 3 = 2(x - 2)$
Logo, uma equação da reta é: $y = 2x - 1$

b) O coeficiente angular da reta que passa por A e B é:

$$m = \frac{-1-5}{2-(-1)} = -2$$

Assim, temos:
$y - (-1) = -2(x - 2)$
Logo, uma equação da reta é: $y = -2x + 3$

c) Como A e B têm ordenadas iguais, temos que tais pontos pertencem à reta de equação $y = 8$, ou ainda $y - 8 = 0$.

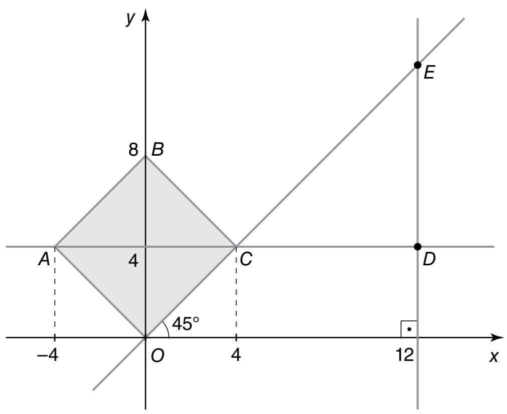
43. No triângulo retângulo limitado por r, s e o eixo Ox, a medida do ângulo interno relativo ao vértice $(6, 0)$ é 45°. Logo, a inclinação da reta r é 135° e, portanto: $m_r = \text{tg } 135° = -1$. Além disso, a reta r passa pelo ponto $(6, 0)$, com o que concluímos que uma equação dessa reta é:
$y - 0 = -1(x - 6)$
Ou seja:
$y = -x + 6$

44. Como P pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, temos que a abscissa e a ordenada de P são iguais; logo, $P(4, 4)$. Como $O(0, 0)$, obtemos o ponto médio M do segmento $\overline{OP}$:

$$M\left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = M(2, 2)$$

Assim, a reta vertical que passa por M tem equação $x = 2$.

45. As diagonais do quadrado são congruentes; logo, $\overline{AC} = 8$, $A(-4, 4)$ e $C(4, 4)$. Como C é ponto médio de $\overline{AD}$, temos $D(12, 4)$. Assim, a reta vertical que passa por D tem equação $x = 12$.
Essas conclusões, juntamente com o fato de as diagonais do quadrado serem bissetrizes dos ângulos internos, nos permitem esquematizar:



Como a reta $\overleftrightarrow{OC}$ é bissetriz dos quadrantes ímpares, deduzimos que as coordenadas do ponto E são iguais; logo, $E(12, 12)$.

46. **a)** Todo ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares possui coordenadas iguais; logo, podemos representar o ponto P por $P(a, a)$. Assim, temos:

$PQ = 10 \Rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (a-3)^2} = 10$

$\therefore\ (a-1)^2 + (a-3)^2 = 100 \Rightarrow a = 9$ ou $a = -5$

Concluímos, então, que há dois pontos satisfazendo as condições enunciadas; são eles: $P(9, 9)$ e $P'(-5, -5)$.

b) Todo ponto da bissetriz dos quadrantes pares possui coordenadas opostas; logo, podemos representar o ponto S por $S(b, -b)$. Assim, temos:

$ST = 5 \Rightarrow \sqrt{(b-0)^2 + [-b-(-1)]^2} = 5$

$\therefore\ b^2 + (1-b)^2 = 25 \Rightarrow b = 4$ ou $b = -3$

Concluímos, então, que há dois pontos satisfazendo as condições enunciadas; são eles: $S(4, -4)$ e $S'(-3, 3)$.

47. Calculando o coeficiente angular da reta que contém o segmento, temos:

$$m = \frac{115 - 97}{700 - 100} = \frac{18}{600} = 0{,}03$$

Considerando o ponto (100, 97), vamos substituir x_0 por 100, y_0 por 97 e m por 0,03 na equação fundamental da reta:

$y - y_0 = m\,(x - x_0) \Rightarrow y - 97 = 0{,}03\,(x - 100)$

$\therefore\ y - 97 = 0{,}03x - 3 \Rightarrow y = 0{,}03x + 94$

Ou seja: $N = 94 + 0{,}03C$

Alternativa **b**.

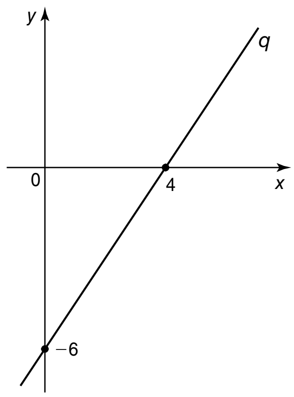
48. a) Para $x = 0$, temos:

$3 \cdot 0 - 2y - 12 = 0 \Rightarrow y = -6$

Para $y = 0$, temos: $3x - 2 \cdot 0 - 12 = 0 \Rightarrow x = 4$

Portanto, a reta passa pelos pontos (0, −6) e (4, 0).

Logo, o gráfico de q é:



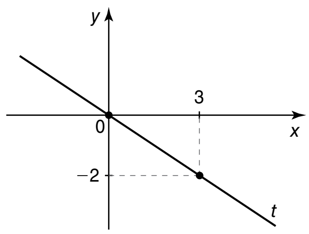
b) Para $x = 0$, temos:

$2 \cdot 0 + 3y = 0 \Rightarrow y = 0$

Para $x = 3$, temos: $2 \cdot 3 + 3y = 0 \Rightarrow y = -2$

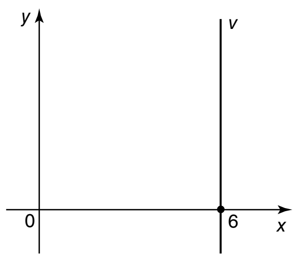
Portanto, a reta passa pelos pontos (0, 0) e (3, −2).

Logo, o gráfico de t é:



c) Temos $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$. Assim, a reta é vertical e passa pelo ponto (6, 0).

Logo, o gráfico de v é:



49. a) Para $x = 0$, temos: $0 + 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3$

Para $y = 0$, temos: $x + 2 \cdot 0 - 6 \Rightarrow x = 6$

Portanto, a reta passa pelos pontos (0, 3) e (6, 0).

Assim, o coeficiente angular de r é:

$$m = \frac{0 - 3}{6 - 0} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

b) Para $x = 0$, temos: $4 \cdot 0 - 3y - 24 = 0 \Rightarrow y = -8$

Para $y = 0$, temos: $4x - 3 \cdot 0 - 24 = 0 \Rightarrow x = 6$

Portanto, a reta passa pelos pontos (0, −8) e (6, 0).

Assim, o coeficiente angular de r é:

$$m = \frac{0 - (-8)}{6 - 0} \Rightarrow m = \frac{4}{3}$$

50. Seja k a abscissa do ponto P. Substituindo x por k na equação da reta r, temos:

$k - y + 1 = 0 \Rightarrow y = k + 1$

Logo, temos $P(k, k + 1)$.

Como a distância PA é 10 unidades, temos:

$\sqrt{(k - 2)^2 + (k + 1 - 5)^2} = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow k^2 - 6k - 40 = 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40) = 196$

$$\therefore\ k = \frac{-(-6) \pm \sqrt{196}}{2 \cdot 1} \Rightarrow k = \frac{6 \pm 14}{2}$$

$\therefore\ k = 10$ ou $k = -4$

Portanto, há duas possibilidades para P: $P(10, 11)$ ou $P(-4, -3)$

51. a) A reta r passa pelos pontos (0, 6) e (2, 0); logo, seu coeficiente angular m é dado por:

$$m = \frac{6 - 0}{0 - 2} = -3$$

Assim, obtemos uma equação de r:

$y - 0 = -3(x - 2) \Rightarrow y = -3x + 6$

Como o ponto N pertence à reta r, temos que esse ponto é da forma: $N(a, -3a + 6)$. A partir desse ponto genérico, determinamos a para que o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{PN}$ seja igual a 11:

$$\frac{-3a + 6 - 8}{a - 4} = 11 \Rightarrow a = 3$$

Concluímos, então, que: $N(3, -3)$

b) No item **a**, obtivemos a seguinte equação da reta r: $y = -3x + 6$. Como o ponto Q pertence à reta r, temos que esse ponto é da forma: $Q(b, -3b + 6)$. A partir desse ponto genérico, determinamos b para que a distância entre P e Q seja igual a $\sqrt{34}$:

$PQ = \sqrt{34} \Rightarrow \sqrt{(b - 4)^2 + (-3b + 6 - 8)^2} = \sqrt{34}$

$\therefore\ (b - 4)^2 + (-3b - 2)^2 = 34 \Rightarrow b = 1$ ou $b = -\frac{7}{5}$

Concluímos, então, que há dois pontos satisfazendo as condições enunciadas; são eles: $Q(1, 3)$ e $Q\left(-\frac{7}{5}, \frac{51}{5}\right)$

52. a) O ponto de intersecção de r com s é a solução do sistema:

$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$ que é equivalente a:

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 4x - 2y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ e } y = 1$$

Logo, o ponto de intersecção das retas é (−1, 1).

b) O ponto de intersecção de r com s é solução do sistema:

$$\begin{cases} 5x + y - 3 = 0 \\ 2x + 3y + 17 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -15x - 3y + 9 = 0 & \text{(I)} \\ 2x + 3y + 17 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Somando as equações (I) e (II), temos:
$-13x + 26 = 0 \Rightarrow x = 2$
E, portanto, de (II):
$2 \cdot 2 + 3y + 17 = 0 \Rightarrow 3y = -21 \Rightarrow y = -7$
Logo, o ponto de intersecção das retas é $(2, -7)$.

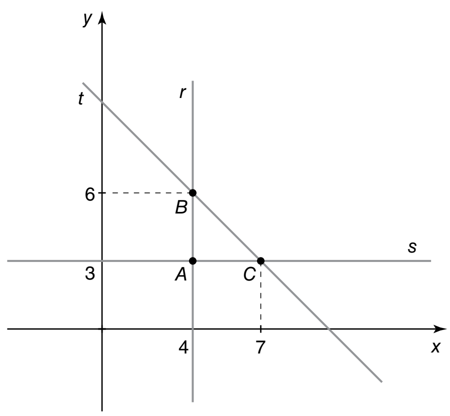
53. A reta r passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(2, -3)$. Portanto, seu coeficiente angular é:
$$m = \frac{-3 - 0}{2 - 0} = -\frac{3}{2}$$
Dessa forma, uma equação de r é:
$$y - 0 = -\frac{3}{2}(x - 0) \Rightarrow 3x + 2y = 0$$
A reta s passa pelos pontos $(-4, 0)$ e $(-6, -4)$. Seu coeficiente angular é, então:
$$m = \frac{-4 - 0}{-6 - (-4)} = 2$$
Dessa forma, uma equação de s é:
$y - 0 = 2[x - (-4)] \Rightarrow 2x - y + 8 = 0$
O ponto de intersecção de r com s é solução do sistema:
$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 2x - y + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{16}{7} \text{ e } y = \frac{24}{7}$$
Logo, o ponto de intersecção das retas é:
$$\left(-\frac{16}{7}, \frac{24}{7}\right)$$

54. **a)** O ponto A de intersecção entre r e s é a solução do sistema:
$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$
Logo, $A(4, 3)$.

O ponto B de intersecção entre r e t é a solução do sistema:
$$\begin{cases} x = 4 \\ x + y - 10 = 0 \end{cases}$$
Logo, $B(4, 6)$.

O ponto C de intersecção entre s e t é a solução do sistema:
$$\begin{cases} y = 3 \\ x + y - 10 = 0 \end{cases}$$
Logo, $C(7, 3)$.

Concluímos, então, que o gráfico pedido é:



b) A área S do triângulo ABC é dada por:
$$S = \frac{(AB) \cdot (AC)}{2} \Rightarrow S = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$$

55. O ponto de intersecção de r com s é solução do sistema:
$$\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ x + 2y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -5 \text{ e } y = 0$$
Logo, o ponto de intersecção das retas é $A(-5, 0)$.
O ponto de intersecção de r com t é solução do sistema:
$$\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ e } y = 4$$
Logo, o ponto de intersecção das retas é $B(3, 4)$.
O ponto de intersecção de s com t é solução do sistema:
$$\begin{cases} x + 2y + 5 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ e } y = -4$$
Logo, o ponto de intersecção das retas é $C(3, -4)$.
Temos, então:
- $AB = \sqrt{(-5 - 3)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$
- $AC = \sqrt{(-5 - 3)^2 + [0 - (-4)]^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$
- $BC = |4 - (-4)| = 8$

O triângulo cujos lados estão contidos nas retas r, s e t tem vértices nos pontos A, B e C.
Assim, o perímetro desse triângulo, dado por $AB + AC + BC$, é:
$8 + 8\sqrt{5} = 8(1 + \sqrt{5})$

56. Verificamos a posição relativa entre as retas de cada um dos itens:

a) Temos: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = -2 \neq 0$
Assim, as retas são concorrentes.

b) Temos: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 = -7 \neq 0$
Assim, as retas são concorrentes.

c) Temos: $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1) - 1 \cdot 6 = -10 \neq 0$
Assim, as retas são concorrentes.

d) Temos: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -2 \neq 0$
Assim, as retas são concorrentes.

e) Temos: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 0$
Assim, as retas não são concorrentes.

Alternativa **e**.

57. Podemos responder aos três itens por meio da discussão do sistema formado pelas equações das retas:
$$\begin{cases} 2x + ky = 3 \\ kx + 2y = 3 \end{cases}$$
As retas serão concorrentes se o sistema for possível e determinado. Para que isso aconteça, o determinante da matriz dos coeficientes do sistema deve ser diferente de zero, isto é:
$$\begin{vmatrix} 2 & k \\ k & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 4 - k^2 \neq 0$$
$\therefore\ k \neq 2$ e $k \neq -2$
Assim, o sistema é possível e determinado se $k \neq 2$ e $k \neq -2$.
Para $k = 2$, ou $k = -2$, o determinante acima é nulo; portanto, o sistema pode ser possível e indeterminado ou impossível. Testando cada um desses valores:

- Para $k = 2$, temos o sistema:
  $\begin{cases} 2x + 2y = 3 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$
  Que é possível e indeterminado.
  Assim, para $k = 2$ as retas são coincidentes.
- Para $k = -2$, temos o sistema:
  $\begin{cases} 2x - 2y = 3 \\ -2x + 2y = 3 \end{cases}$
  Que é impossível.
  Assim, para $k = -2$ as retas são paralelas distintas.

Resumindo, respondemos aos itens:
a) $k \neq 2$ e $k \neq -2$ **b)** $k = -2$ **c)** $k = 2$

58. Indicando por r_A e r_B as retas que contêm, respectivamente, os gráficos A e B, temos:

$$r_A: \begin{cases} (0;\ 75{,}0) \\ m_{r_A} = \dfrac{75{,}8 - 75{,}0}{170 - 0} = \dfrac{8}{1.700} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow y - 75 = \frac{8}{1.700} \cdot (x - 0)$$

Logo, r_A: $y = \dfrac{8x}{1.700} + 75$

$$r_B: \begin{cases} (0;\ 75{,}3) \\ m_{r_B} = \dfrac{75{,}6 - 75{,}3}{170 - 0} = \dfrac{3}{1.700} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow y - 75{,}3 = \frac{3}{1.700} \cdot (x - 0)$$

Logo, r_B: $y = \dfrac{3x}{1.700} + 75{,}3$

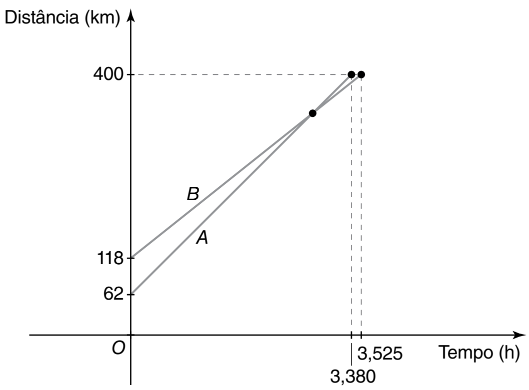
Resolvendo o sistema formado pelas equações de r_A e r_B, temos:

$$\begin{cases} y = \dfrac{8x}{1.700} + 75 \\ y = \dfrac{3x}{1.700} + 75{,}3 \end{cases} \Rightarrow x = 102 \text{ e } y = 75{,}48$$

Portanto, à temperatura de 102 °C os comprimentos das barras se tornaram iguais a 75,48 cm.

59. a) No instante $t = 0$ o automóvel e o ônibus estavam a 62 km e 118 km do início da estrada (km 0). Assim, as distâncias d_A e d_B percorridas por eles são dadas por:
$d_A = 62 + 100t$ e $d_B = 118 + 80t$

b) Observamos que as funções polinomiais $d_A(t)$ e $d_B(t)$ são do primeiro grau; logo, o gráfico de cada uma é um segmento de reta (não é toda a reta porque os valores de t são limitados pelo instante $t = 0$ e pelo instante em que cada veículo chega ao final da estrada). Assim, temos o gráfico:



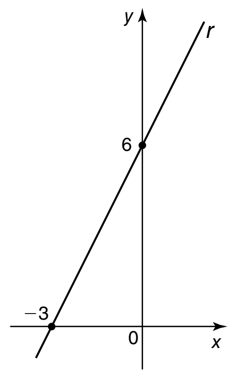
c) Observando os gráficos do item **b**, constatamos que existe um ponto P de intersecção entre eles. Esse ponto é a solução do sistema:

$$\begin{cases} d = 62 + 100t \\ d = 118 + 80t \end{cases} \Rightarrow t = 2{,}8 \text{ e } d = 342$$

Logo, $P(2{,}8;\ 342)$.

d) A abscissa 2,8 indica o tempo em hora, a partir do instante $t = 0$, transcorrido para que o automóvel alcançasse o ônibus. A ordenada 342 indica a distância, em quilômetro, a partir do início da estrada, percorrida pelo automóvel até alcançar o ônibus.

60. a) Para $x = 0$, temos: $y = 2 \cdot 0 + 6 \Rightarrow y = 6$
Para $y = 0$, temos: $0 = 2x + 6 \Rightarrow x = -3$
Portanto, a reta passa pelos pontos $(0, 6)$ e $(-3, 0)$.
Logo, o gráfico de r é:



b) Como a equação reduzida de r é $y = 2x + 6$, seu coeficiente angular é $m = 2$ e seu coeficiente linear é $q = 6$.

c) O coeficiente angular da reta é a tangente do ângulo de inclinação de r.
O coeficiente linear da reta é a ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo das ordenadas.

61. O coeficiente angular da reta r é $m = \text{tg}\ \alpha = 3$, e seu coeficiente linear é $q = -2$. Assim, a equação reduzida de r é: $y = 3x - 2$

62. A inclinação da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é a medida do ângulo $B\widehat{A}C$.
Sendo α essa medida, temos que $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{BC}{AC} = 2$, ou seja, o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é 2.
O ponto de intersecção da reta $\overleftrightarrow{AB}$ com o eixo Oy tem ordenada -4, ou seja, o coeficiente linear de $\overleftrightarrow{AB}$ é -4.
Concluímos, então, que a equação reduzida da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é: $y = 2x - 4$
Sendo β a medida do ângulo $E\widehat{F}D$ temos que $\text{tg}\ \beta = \dfrac{ED}{FD} = 1$; logo, $\text{tg}\ (180° - \beta) = -1$, ou seja, o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{EF}$ é -1. Assim, a equação reduzida dessa reta é da forma $y = -x + q$
Como o ponto $(6, 0)$ pertence a $\overleftrightarrow{EF}$ temos que: $0 = -6 + q$, portanto, $q = 6$.
Concluímos, então, que a equação reduzida da reta $\overleftrightarrow{EF}$ é: $y = -x + 6$

63. a) Temos: $5x + y - 2 = 0 \Rightarrow y = -5x + 2$
Logo, o coeficiente angular de r é $m = -5$, e seu coeficiente linear é $q = 2$.

b) Temos: $6x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = 3x + \frac{1}{2}$
Logo, o coeficiente angular de s é $m = 3$, e seu coeficiente linear é $q = \frac{1}{2}$.

c) Temos: $7x + 4y = 0 \Rightarrow y = -\frac{7}{4}x$
Logo, o coeficiente angular de t é $m = -\frac{7}{4}$, e seu coeficiente linear é $q = 0$.

d) Temos: $\frac{2x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{y}{2} = -\frac{2x}{3} + \frac{1}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{2}$
Logo, o coeficiente angular de u é $m = -\frac{4}{3}$ e seu coeficiente linear é $q = \frac{1}{2}$.

64. Como a equação reduzida da reta que contém a linha representada no gráfico 1 é $S = 2 + \frac{t}{2}$, deduzimos que $\text{tg}\ \alpha = \frac{1}{2}$.
Para obter a equação reduzida da reta que contém a linha representada no gráfico 2, que é da forma $S = (\text{tg}\ 2\alpha)t + 2$, podemos calcular $\text{tg}\ 2\alpha$ a partir do valor da $\text{tg}\ \alpha$ do seguinte modo:

$$\text{tg}\ 2\alpha = \frac{2\ \text{tg}\ \alpha}{1 - \text{tg}^2\ \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}$$

Concluímos, então, que a equação que define o movimento representado pelo gráfico 2 é $S = \frac{4t}{3} + 2$.
Alternativa **c**.

65. Temos:
- $m_r = 5$ e $q_r = 2$
- $m_s = 5$ e $q_s = -4$
- A forma reduzida da equação da reta t é $y = 5x + 2$; logo: $m_t = 5$ e $q_t = 2$
- A forma reduzida da equação da reta u é $y = 5x + \frac{1}{3}$; logo: $m_u = 5$ e $q_u = \frac{1}{3}$
- Não existe m_v.
- Não existe m_z.

Portanto:
a) $m_r = m_s$ e $q_r \neq q_s \Rightarrow r$ e s são paralelas distintas.
b) $m_r = m_t$ e $q_r = q_t \Rightarrow r$ e t são paralelas coincidentes.
c) $m_s = m_u$ e $q_s \neq q_u \Rightarrow s$ e u são paralelas distintas.
d) $\exists\ m_t$ e $\nexists\ m_v \Rightarrow t$ e v são concorrentes.
e) $\exists\ m_u$ e $\nexists\ m_v \Rightarrow u$ e v são concorrentes.
f) $\nexists\ m_v$, $\nexists\ m_z$ e v distinta de $z \Rightarrow v$ e z são paralelas distintas.

66. a) Observamos que nenhuma das retas é vertical, pois, em cada uma, o coeficiente de y é diferente de zero. Assim, elas serão paralelas se seus coeficientes angulares forem iguais, isto é:
$\frac{k-3}{3} = \frac{2k+1}{2} \Rightarrow k = -\frac{9}{4}$

b) Observamos que nenhuma das retas é vertical, pois, em cada uma, o coeficiente de y é diferente de zero. Assim, elas serão concorrentes se seus coeficientes angulares forem diferentes, isto é:
$\frac{1-3p}{2} \neq \frac{2p}{5} \Rightarrow p \neq \frac{5}{19}$

67. Poderíamos responder aos itens a partir da discussão do sistema, por meio do determinante da matriz dos coeficientes, complementado pelo escalonamento. Porém, faremos essa discussão adotando a comparação entre os coeficientes angulares e entre os coeficientes lineares das retas.
Observamos que nenhuma das retas é vertical, pois, em cada uma, o coeficiente de y é diferente de zero. Escrevendo na forma reduzida as equações, obtemos:

$$\begin{cases} y = -\frac{2px}{3} + \frac{k+1}{3} \\ y = \frac{(p+1)x}{2} - \frac{3k}{2} \end{cases}$$

Assim:
a) As retas serão concorrentes se seus coeficientes angulares forem diferentes, isto é:
$-\frac{2p}{3} \neq \frac{p+1}{2} \Rightarrow p \neq -\frac{3}{7}$
Logo, para qualquer valor real de p, com $p \neq -\frac{3}{7}$, e qualquer valor real de k, as retas serão concorrentes.

b) O sistema terá uma única solução; logo, será um sistema possível e determinado.

c) As retas serão paralelas distintas se seus coeficientes angulares forem iguais e seus coeficientes lineares forem diferentes, isto é:
$-\frac{2p}{3} = \frac{p+1}{2}$ e $\frac{k+1}{3} \neq -\frac{3k}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow p = -\frac{3}{7}$ e $k \neq -\frac{2}{11}$
Logo, para $p = -\frac{3}{7}$ e qualquer valor real de k, com $k \neq -\frac{2}{11}$, as retas serão paralelas distintas.

d) O sistema não terá solução; logo, será um sistema impossível.

e) As retas serão paralelas coincidentes se seus coeficientes angulares forem iguais e seus coeficientes lineares forem iguais, isto é:
$-\frac{2p}{3} = \frac{p+1}{2}$ e $\frac{k+1}{3} = -\frac{3k}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow p = -\frac{3}{7}$ e $k = -\frac{2}{11}$
Logo, as retas serão paralelas coincidentes para:
$p = -\frac{3}{7}$ e $k = -\frac{2}{11}$

f) O sistema não terá infinitas soluções; logo, será um sistema possível e indeterminado.

68. O coeficiente angular da reta s é:
$m_s = \text{tg}\ 135° = -1$
Como r é paralela à reta s, devemos ter:
$m_r = m_s = -1$
Além disso, r passa pelo ponto $P(5, 4)$; então:
$(r)\ y - 4 = -1(x - 5)$
Logo, uma equação geral de r é: $x + y - 9 = 0$

69. O coeficiente angular da reta s, que passa pelos pontos $(2, 0)$ e $(0, 4)$, é:
$m_s = \frac{4-0}{0-2} = -2$

Como r é paralela a s, seu coeficiente angular é $m_r = -2$. Além disso, r passa por $P(-3, 1)$; então:
$(r)\ y - 1 = -2[x - (-3)]$
Logo, a equação reduzida de r é: $y = -2x - 5$

70. **a)** A forma reduzida da equação de s é:
$y = -3x + 2$
Então, seu coeficiente angular é $m_s = -3$.
Como r é paralela a s, $m_r = -3$; além disso, r passa pelo ponto $P(2, 5)$. Logo, a equação de r é:
$y - 5 = -3(x - 2)$
Portanto, a equação reduzida de r é:
$y = -3x + 11$

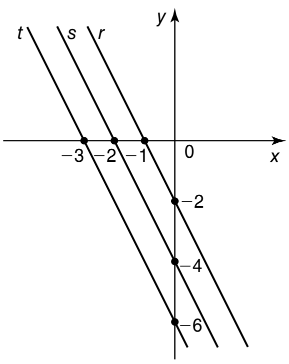
b) O coeficiente angular de s é $m_s = -4$.
Como r é paralela a s, $m_r = -4$; além disso, r passa pelo ponto $P(0, 1)$. Logo, a equação de r é:
$y - 1 = -4(x - 0)$
Portanto, a equação reduzida de r é:
$y = -4x + 1$

c) A forma reduzida da equação de s é: $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$
Então, seu coeficiente angular é $m_s = \frac{2}{3}$.
Como r é paralela a s, $m_r = \frac{2}{3}$; além disso, r passa pelo ponto $P(0, 0)$. Logo, a equação de r é:
$y - 0 = \frac{2}{3}(x - 0)$
Portanto, a equação reduzida de r é: $y = \frac{2x}{3}$

71. O coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é:
$m_{AB} = \frac{7 - 1}{1 - 3} = -3$
Como a reta $\overleftrightarrow{CD}$ é paralela a $\overleftrightarrow{AB}$, temos que $m_{CD} = -3$.
Além disso, essa reta passa por $C(5, 2)$.
Temos, então:
$(\overleftrightarrow{CD})\ y - 2 = -3(x - 5)$
Logo, uma equação geral da reta é: $3x + y - 17 = 0$

72. **a)** Substituindo as coordenadas de P na equação da reta, temos:
$2 \cdot 5 + (-1) + k = 0 \Rightarrow k = -9$

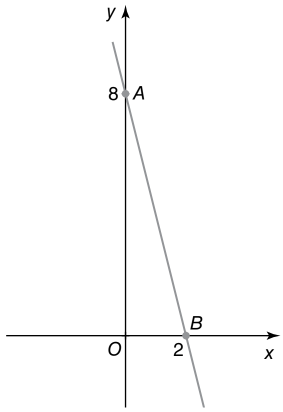
b) As equações das retas são: $(r)\ 2x + y + 2 = 0$, $(s)\ 2x + y + 4 = 0$ e $(t)\ 2x + y + 6 = 0$
Representando essas retas no plano:



Portanto, as retas são paralelas distintas.

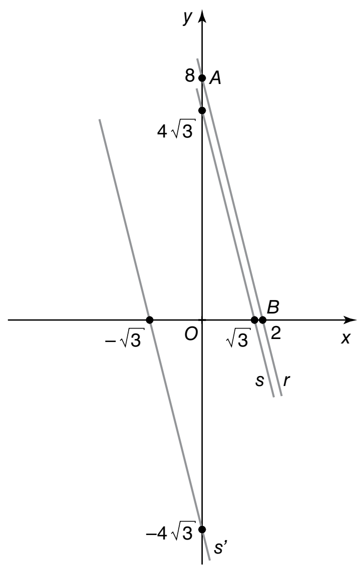
c) A forma reduzida da equação dessas retas é $y = -2x - k$. Assim, os coeficientes angulares de todas elas são iguais a -2.
Logo, por terem o mesmo coeficiente angular, as retas são paralelas.

73. **a)** O gráfico de r é:



Assim, a área S do triângulo ABO é dada por:
$S = \frac{2 \cdot 8}{2} = 8$

b) Como $s \mathbin{/\!/} r$, temos que o coeficiente angular da reta s é o mesmo de r, ou seja, -4. Assim, a equação reduzida de s é da forma $y = -4x + q$. A reta s intercepta os eixos Ox e Oy nos pontos $\left(\frac{q}{4}, 0\right)$ e $(0, q)$, respectivamente. Assim, devemos ter:
$$\frac{\left|\frac{q}{4}\right| \cdot |q|}{2} = 6 \Rightarrow \frac{\left|\frac{q^2}{4}\right|}{2} = 6$$
$$\therefore \frac{\frac{q^2}{4}}{2} = 6 \Rightarrow q = \pm 4\sqrt{3}$$
Concluímos, então, que há duas retas possíveis que satisfazem as condições enunciadas; são elas:
s: $y = -4x + 4\sqrt{3}$ e s': $y = -4x - 4\sqrt{3}$
Observe os gráficos de r, s e s':



74. A altura h_A da planta A, em centímetro, em função do tempo t, em dia, é dada por: $h_A = 4 + at$, em que a constante a é a velocidade de crescimento, em centímetro por dia. A altura h_B da planta B, em centímetro, em função do tempo t, em dia, é dada por $h_B = 6 + bt$, em que a constante b é a velocidade de crescimento, em centímetro por dia.

Assim, temos:

a) F, pois 4 e 6 são os coeficientes lineares das retas.

b) V, conforme a justificativa a seguir.
A diferença $h_B - h_A$ foi constante em qualquer instante do período considerado. Como essa diferença é $2 + (b - a)x$, deduzimos que ela será constante (não dependerá de x) se $b - a = 0$, ou seja, $b = a$. Assim, as retas que contêm os segmentos de reta representados pelo biólogo são paralelas distintas, pois têm o mesmo coeficiente angular e coeficientes lineares diferentes.

c) F, conforme a justificativa do item **b**.

d) V, conforme a justificativa do item **b**.

e) V, pois a velocidade de crescimento das duas plantas, que é o coeficiente angular de ambas, seria $0{,}75 \cdot 24$ mm/dia, ou seja, 1,8 cm/dia.

75. Vamos calcular o coeficiente angular de cada uma das retas:

- A equação reduzida de r é $y = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.
  Logo: $m_r = -\frac{3}{5}$
- $m_s = \frac{5}{3}$
- $m_t = -\frac{5}{3}$
- $\nexists\ m_u$
- A equação reduzida de v é: $y = 1$
  Logo: $m_v = 0$
- A equação reduzida de z é: $y = \frac{1}{5}x - \frac{1}{10}$
  Logo: $m_z = \frac{1}{5}$

Analisando as afirmações, temos:

a) V, pois, como $m_r = -\frac{1}{m_S}$, temos que r e s são perpendiculares.

b) F, pois, como $m_r \neq -\frac{1}{m_t}$, temos que r e t não são perpendiculares.

c) V, pois, como a reta u é horizontal e a reta v é vertical, temos que u e v são perpendiculares.

d) F, pois, como $m_t \neq -\frac{1}{m_z}$, temos que t e z não são perpendiculares.

e) F, pois, como $m_s \neq -\frac{1}{m_z}$, temos que s e z não são perpendiculares.

f) F, pois, como $m_v \neq -\frac{1}{m_z}$, temos que v e z não são perpendiculares.

76. a) A forma reduzida da equação de r é:
$y = -\frac{1}{2}x + 5$
Assim, $m_r = -\frac{1}{2}$.
Como s é a reta perpendicular a r, temos:
$m_r = -\frac{1}{m_s} \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$
$\therefore -\frac{1}{2} \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_s = 2$
E, como s passa por P, concluímos:
(s) $y - 4 = 2(x - 2)$
Logo, uma equação de s é: $y = 2x$

b) A forma reduzida da equação de r é: $y = 3x - 1$
Assim, $m_r = 3$.
Como s é perpendicular a r, temos:
$m_r = -\frac{1}{m_s} \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$
$\therefore 3 \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_s = -\frac{1}{3}$
E, como s passa por P, concluímos:
(s) $y - (-6) = -\frac{1}{3}(x - 5)$
Logo, uma equação de s é: $x + 3y + 13 = 0$

c) A forma reduzida da equação de r é: $y = -\frac{5}{4}x$
Assim, $m_r = -\frac{5}{4}$.
Como s é perpendicular a r, temos:
$m_r = -\frac{1}{m_s} \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$
$\therefore -\frac{5}{4} \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_s = \frac{4}{5}$
E, portanto, como s passa por $P(0, -4)$:
(s) $y - (-4) = \frac{4}{5}(x - 0)$
Logo, uma equação de s é: $4x - 5y - 20 = 0$

d) Como r é vertical, ela não tem coeficiente angular. Assim, uma reta s perpendicular a ela é horizontal e tem coeficiente angular zero. Finalmente, como s passa por $P(2, 5)$, uma equação de s é $y = 5$.

77. A reta r passa pelos pontos (8, 0) e (0, 4). Assim, seu coeficiente angular é: $m_r = \frac{4 - 0}{0 - 8} = -\frac{1}{2}$

Como a reta s é perpendicular a r, temos:

$m_s = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$

Como s passa por P, concluímos:
$y - 6 = 2(x - 2)$
Logo, uma equação da reta s é: $y = 2x + 2$

78. a) O coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é:
$m_{AB} = \frac{3 - 5}{6 - 2} = -\frac{1}{2}$
Como r deve ser perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$, o coeficiente angular de r deve ser tal que:
$m_r = -\frac{1}{m_{AB}}$
$\therefore m_r = 2$
Como r passa por $P(1, 3)$, temos:
(r) $y - 3 = 2(x - 1)$
Logo, uma equação da reta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ passando por P é: $2x - y + 1 = 0$

b) O coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é:
$m_{AB} = \frac{15 - 9}{2 - 1} = 6$
Como r deve ser perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$, o coeficiente angular de r é:
$m_r = -\frac{1}{m_{AB}}$
$\therefore m_r = -\frac{1}{6}$

Como r passa por $P(-2, 6)$, temos:

$(r)\ y - 6 = -\frac{1}{6}[x - (-2)]$

Logo, uma equação da reta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ passando por P é: $x + 6y - 34 = 0$

c) O coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é:

$m_{AB} = \frac{7 - 5}{0 - 3} = -\frac{2}{3}$

Como r deve ser perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$, o coeficiente angular de r é dado por:

$m_r = -\frac{1}{m_{AB}}$

$\therefore\ m_r = \frac{3}{2}$

Como r passa por $P(-4, -2)$, temos:

$(r)\ y - (-2) = \frac{3}{2}[x - (-4)]$

Logo, uma equação da reta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ passando por P é: $3x - 2y + 8 = 0$

d) Como A e B têm abscissas iguais, temos que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é vertical e sua equação é $x = 4$.

Assim, a reta r é horizontal e passa por $P(6, -1)$.

Logo, uma equação da reta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ passando por P é $y = -1$.

79. a) O coeficiente angular m_{DE} da reta $\overleftrightarrow{DE}$ é dado por:

$m_{DE} = \frac{-10 - 2}{8 - (-4)} = -1$

Logo, o coeficiente angular m_r da mediatriz r do segmento $\overline{DE}$ é dado por:

$m_r = -\frac{1}{m_{DE}} = -\frac{1}{(-1)} = 1$

O ponto médio de $\overline{DE}$ é $M(2, -4)$.

Assim, obtemos a equação da mediatriz r:

$y - (-4) = 1 \cdot (x - 2) \Rightarrow x - y - 6 = 0$

b) O centro C da circunferência circunscrita ao triângulo DEF equidista dos três vértices D, E e F; logo, C pertence às mediatrizes dos lados $\overline{DE}$, $\overline{DF}$ e $\overline{FE}$. Bastam duas dessas mediatrizes para determinar o ponto C. No item **a** já obtivemos a equação da mediatriz r do lado $\overline{DE}$. De modo análogo, determinamos a seguinte equação da mediatriz s do lado $\overline{DF}$: $8x + 2y + + 11 = 0$.

A solução do sistema formado pelas equações de r e s é o ponto C, isto é:

$\begin{cases} x - y - 6 = 0 \\ 8x + 2y + 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{10} \text{ e } y = -\frac{59}{10}$

Logo, $C\left(\frac{1}{10}, -\frac{59}{10}\right)$.

80. a) O coeficiente angular de r é: $m_r = \text{tg } 135° = -1$

Assim, o coeficiente angular de s, perpendicular a r passando por $P(0, 4)$, é tal que:

$m_r = -\frac{1}{m_s}$

$\therefore\ m_s = 1$

Temos, então:

$(s)\ y - 4 = 1(x - 0)$

Logo, uma equação de s é: $x - y + 4 = 0$

b) Como r é vertical, o coeficiente angular de s, perpendicular a r passando por $P(7, 4)$, é $m_s = 0$.

Logo, uma equação de s é $y = 4$.

81. a) $r: \begin{cases} Q(-1, 0) \text{ e } Q'(0, -2) \\ m_r = \frac{-2 - 0}{0 + 1} = -2 \end{cases} \Rightarrow y - 0 = -2(x + 1)$

Logo, uma equação da reta r é: $2x + y + 2 = 0$

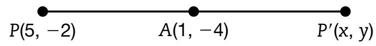
b) $s: \begin{cases} P(5, -2) \\ m_s = -\frac{1}{m_r} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y + 2 = \frac{1}{2}(x - 5)$

Logo, uma equação da reta s é: $x - 2y - 9 = 0$

c) $\begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x - 2y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = -4$

Logo: $A(1, -4)$

d) O ponto A é o ponto médio do segmento $\overline{PP'}$:



Logo: $\begin{cases} \frac{x + 5}{2} = 1 \\ \frac{y - 2}{2} = -4 \end{cases} \Rightarrow x = -3 \text{ e } y = -6$

$\therefore\ P'(-3, -6)$

82. a) O centro do quadrado é o ponto de encontro das diagonais. Como essas diagonais são perpendiculares entre si, vamos obter a equação da reta r que passa por A e é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{BD}$:

$\begin{cases} A(4, 3) \\ m_r = -\frac{1}{m_{BD}} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow r\colon y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 4)$

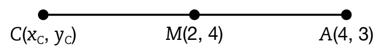
Logo, $r\colon y = -\frac{x}{2} + 5$

O ponto M é dado pela solução do sistema:

$\begin{cases} y = -\frac{x}{2} + 5 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ e } y = 4$

Concluímos, assim, que $M(2, 4)$.

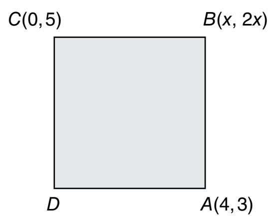
b) Como o ponto comum às diagonais do quadrado é o ponto médio de cada uma delas, temos que o vértice $C(x_C, y_C)$ é o ponto simétrico de $A(4, 3)$ em relação a $M(2, 4)$:



$\begin{cases} \frac{4 + x_C}{2} = 2 \\ \frac{3 + y_C}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow x_C = 0 \text{ e } y_C = 5$

Concluímos, então, que $C(0, 5)$.

c) A equação da reta $\overleftrightarrow{BD}$ é $y = 2x$; logo, todo ponto dessa reta é da forma $(x, 2x)$. Assim, esquematizamos:



Como dois lados consecutivos do quadrado são perpendiculares entre si, temos que o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{CB}$ é o oposto do inverso do coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$; logo:

$$\frac{2x-5}{x-0} = -\frac{1}{\frac{2x-3}{x-4}} \Rightarrow \frac{2x-5}{x} = \frac{4-x}{2x-3}$$

$\therefore\ 5x^2 - 20x + 15 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$\therefore\ x = 3$ ou $x = 1$

Para $x = 3$, temos o vértice do quadrado (3, 6).

Para $x = 1$, temos o vértice do quadrado (1, 2).

Logo, os vértices B e D são (3, 6) e (1, 2), não necessariamente nessa ordem.

83. Temos:

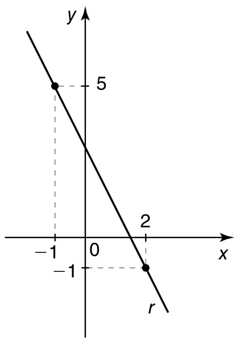
$$\begin{cases} x = 2t - 5 \\ y = 3 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t - 5 & \text{(I)} \\ t = 3 - y & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$x = 2(3 - y) - 5$

Assim, a equação reduzida de r é: $y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

84. Para $t = 0$, temos $x = 2$ e $y = -1$; para $t = 1$, temos $x = -1$ e $y = 5$. Dessa forma, r passa pelos pontos $(2, -1)$ e $(-1, 5)$, e seu gráfico é:



85. Para $t = 0$, obtemos $P_1(0, -2)$, e, para $t = 3$, obtemos o ponto $P_2(6, 7)$. Como a trajetória descrita pelo ponto P está contida em uma reta $(3x - 2y - 4 = 0)$, temos que a distância entre P_1 e P_2 é a distância percorrida pelo ponto $P(x, y)$ para $0 \leqslant t \leqslant 3$, isto é:

$$P_1P_2 = \sqrt{(6-0)^2 + [7-(-2)]^2} = \sqrt{117} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1P_2 = 3\sqrt{13}$$

Alternativa **d**.

86. Isolando S em uma das equações, por exemplo na primeira, obtemos:

$$\begin{cases} S = \dfrac{C - 12.000}{100} & \text{(I)} \\ L = 70S - 12.000 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), concluímos:

$$L = 70\left(\frac{C - 12.000}{100}\right) - 12.000 \Rightarrow L = \frac{7C}{10} - 20.400$$

87. Temos:

- $h = 10 + 0{,}25t \Rightarrow 0{,}25t = h - 10$
  $\therefore\ t = 4h - 40$ (I)
- $m = 3 + 0{,}1t \Rightarrow 0{,}1t = m - 3$
  $\therefore\ t = 10m - 30$ (II)

Igualando (I) e (II), temos:

$4h - 40 = 10m - 30 \Rightarrow 4h - 10m - 10 = 0$

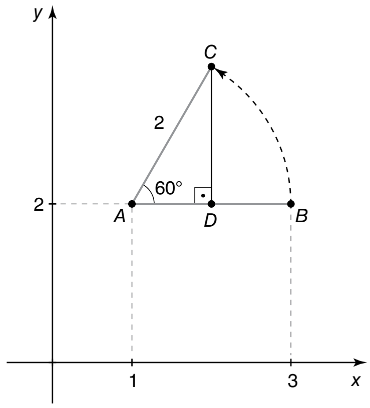
Portanto, uma equação que relaciona apenas a altura h e a massa m da planta é: $4h - 10m - 10 = 0$

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1. Temos que $AC = AB = 2$.

Sendo D a projeção ortogonal de C sobre $\overline{AB}$, esquematizamos:



No triângulo ACD, temos:

$$\begin{cases} \cos 60° = \dfrac{AD}{2} \\ \text{sen } 60° = \dfrac{DC}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} = \dfrac{AD}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{DC}{2} \end{cases}$$

$\therefore\ AD = 1$ e $DC = \sqrt{3}$

Assim, a abscissa de C é $1 + 1 = 2$, e a ordenada é $2 + \sqrt{3}$. Logo, $C(2, 2 + \sqrt{3})$.

Alternativa **a**.

2. **a)** $A(-1, 2)$, $B(2, 6)$ e $C(2, 0)$. Logo:

$AB = \sqrt{[2-(-1)]^2 + (6-2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$AC = \sqrt{[2-(-1)]^2 + (0-2)^2} =$

$= \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

Como os pontos B e C têm mesma abscissa, então:

$BC = |0 - 6| = 6$

Portanto, o perímetro do triângulo ABC é:

$5 + 6 + \sqrt{13} = 11 + \sqrt{13}$

b) Como $5^2 + (\sqrt{13})^2 > 6^2$, ou seja, $25 + 13 > 36$, temos que o triângulo é acutângulo.

3. **a)** $A(0, 0)$, $B(3, 4)$ e $C(15, 8)$. Assim:

$AB = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} =$

$= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$BC = \sqrt{(15-3)^2 + (8-4)^2} =$

$= \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

$AC = \sqrt{(15-0)^2 + (8-0)^2} =$

$= \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$

Logo, o perímetro do triângulo ABC é:

$5 + 4\sqrt{10} + 17 = 22 + 4\sqrt{10} = 2(11 + 2\sqrt{10})$

b) Como $5^2 + (4\sqrt{10})^2 < 17^2$, ou seja, $25 + 160 < 289$, temos que o triângulo é obtusângulo.

4. Seja $O(0, 0)$, $P(3, y_P)$ e $Q(-4, y_Q)$. Do enunciado, temos:

- $OP = 5 \Rightarrow \sqrt{(3-0)^2 + (y_P - 0)^2} = 5$
  $\therefore\ 3^2 + y_P^2 = 5^2 \Rightarrow y_P^2 = 16$
  $\therefore\ y_P = -4$ ou $y_P = 4$
- $OQ = 5 \Rightarrow \sqrt{(-4-0)^2 + (y_Q - 0)^2} = 5$
  $\therefore\ (-4)^2 + y_Q^2 = 5^2 \Rightarrow y_Q^2 = 9$
  $\therefore\ y_Q = -3$ ou $y_Q = 3$

Como P é um ponto do primeiro quadrante e Q é um ponto do segundo quadrante, temos $y_P > 0$ e $y_Q > 0$.
Logo, $P(3, 4)$ e $Q(-4, 3)$.
Temos, então:

$$PQ = \sqrt{(-4-3)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} =$$
$$= \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Portanto, a distância entre P e Q é $5\sqrt{2}$.

5. Como Q é um ponto do eixo das ordenadas, Q é do tipo $(0, y_Q)$.
Do enunciado, temos $QA = 5\sqrt{2}$. Assim:

$$\sqrt{[0-(-5)]^2 + (y_Q - 2)^2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 25 + y_Q^2 - 4y_Q + 4 = 50$$
$$\therefore\ y_Q^2 - 4y_Q - 21 = 0$$
$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21) = 100$$
$$\therefore\ y_Q = \frac{-(-4) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} \Rightarrow y_Q = \frac{4 \pm 10}{2}$$
$$\therefore\ y_Q = -3 \text{ ou } y_Q = 7$$

Logo, há duas possibilidades para o ponto Q:
$Q(0, -3)$ ou $Q(0, 7)$

6. Um ponto que pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares tem abscissa e ordenada iguais. Dessa forma, consideremos $T(t, t)$. Do enunciado, temos $TA = 5$. Assim:

$$\sqrt{[t-(-1)]^2 + (t-6)^2} = 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t^2 + 2t + 1 + t^2 - 12t + 36 = 25$$
$$\therefore\ t^2 - 5t + 6 = 0$$
$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$$
$$\therefore\ t = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow t = \frac{5 \pm 1}{2}$$
$$\therefore\ t = 2 \text{ ou } t = 3$$

Logo, há duas possibilidades para o ponto T:
$T(2, 2)$ ou $T(3, 3)$

7. Temos que:

$$AC = AB \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (0-8)^2} = 10$$
$$\therefore\ x^2 + 64 = 100 \Rightarrow x = \pm 6$$

Pelo gráfico, observamos que x deve ser positivo; logo, $x = 6$.
Concluímos, então, calculando a medida BC do maior lado do triângulo:

$$BC = \sqrt{(0-6)^2 + (18-0)^2} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$$

Alternativa **c**.

8. Temos que:

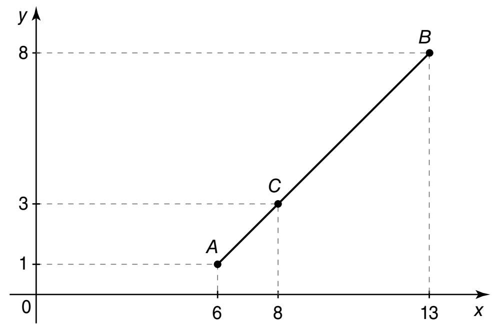
$$\begin{cases} AC = AB \\ BC = AB \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(a-0)^2 + (b-3)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2} \\ \sqrt{(a-4)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2} \end{cases}$$
$$\therefore\ \begin{cases} a^2 + b^2 - 6b - 16 = 0 \\ a^2 + b^2 - 8a - 9 = 0 \end{cases}$$

Subtraindo, membro a membro, essas equações, obtemos:

$$-6b + 8a - 7 = 0 \Rightarrow b = \frac{4a}{3} - \frac{7}{6}$$

Alternativa **b**.

9. a)

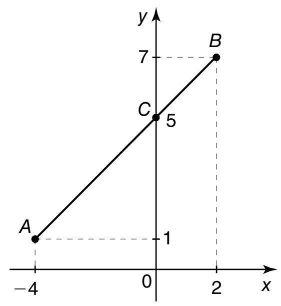


Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{8-6}{13-8}$$
$$\therefore\ \frac{AC}{CB} = \frac{2}{5}$$

Logo, o ponto C divide o segmento $\overline{AB}$, de A para B, na razão $\frac{2}{5}$.

b)

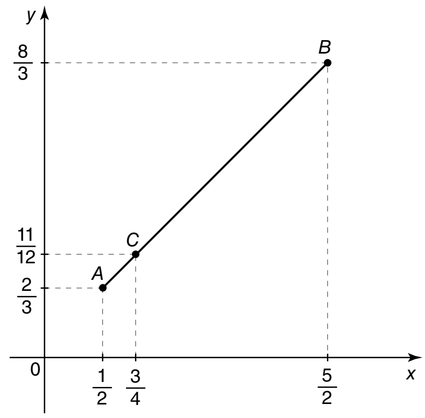


Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{0-(-4)}{2-0}$$
$$\therefore\ \frac{AC}{CB} = 2$$

Logo, o ponto C divide o segmento $\overline{AB}$, de A para B, na razão 2.

c)



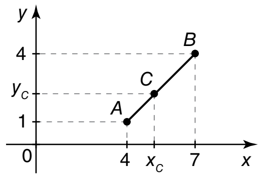
Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{\frac{5}{2} - \frac{3}{4}}$$

$$\therefore \frac{AC}{CB} = \frac{1}{7}$$

Logo, o ponto C divide o segmento $\overline{AB}$, de A para B, na razão $\frac{1}{7}$.

10. a)



Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{x_C - 4}{7 - x_C} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{x_C - 4}{7 - x_C}$$

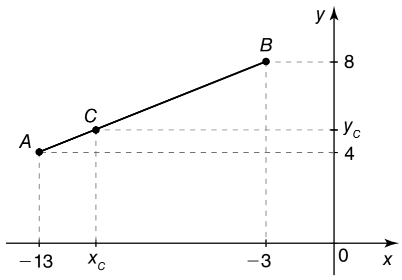
$$\therefore x_C = \frac{37}{7}$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{y_C - 1}{4 - y_C} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{y_C - 1}{4 - y_C}$$

$$\therefore y_C = \frac{16}{7}$$

Logo, $C\left(\frac{37}{7}, \frac{16}{7}\right)$.

b)



Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{x_C - (-13)}{-3 - x_C} \Rightarrow \frac{3}{7} = \frac{x_C + 13}{-3 - x_C}$$

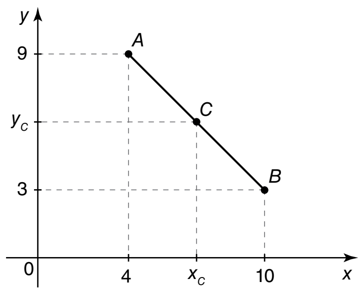
$$\therefore x_C = -10$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{y_C - 4}{8 - y_C} \Rightarrow \frac{3}{7} = \frac{y_C - 4}{8 - y_C}$$

$$\therefore y_C = \frac{26}{5}$$

Logo, $C\left(-10, \frac{26}{5}\right)$.

c)



Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{10 - x_C}{x_C - 4} \Rightarrow 1 = \frac{10 - x_C}{x_C - 4}$$

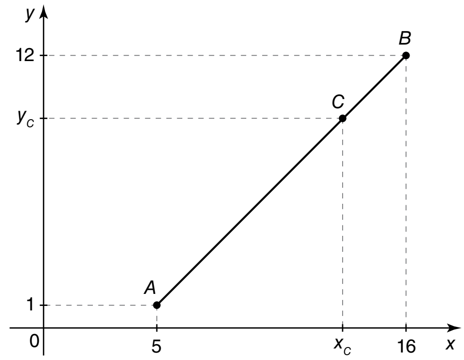
$$\therefore x_C = 7$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{9 - y_C}{y_C - 3} \Rightarrow 1 = \frac{9 - y_C}{y_C - 3}$$

$$\therefore y_C = 6$$

Logo, C(7, 6).

d)



Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{x_C - 5}{16 - x_C} \Rightarrow \frac{8}{3} = \frac{x_C - 5}{16 - x_C}$$

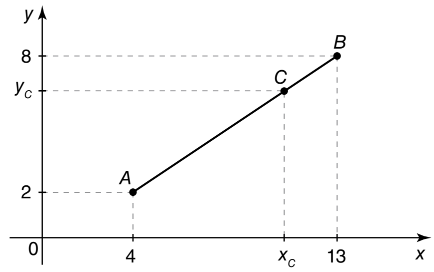
$$\therefore x_C = 13$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{y_C - 1}{12 - y_C} \Rightarrow \frac{8}{3} = \frac{y_C - 1}{12 - y_C}$$

$$\therefore y_C = 9$$

Logo, C(13, 9).

e)



Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{x_C - 4}{13 - x_C} \Rightarrow 2 = \frac{x_C - 4}{13 - x_C}$$

$$\therefore x_C = 10$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{y_C - 2}{8 - y_C} \Rightarrow 2 = \frac{y_C - 2}{8 - y_C}$$

$$\therefore y_C = 6$$

Logo, C(10, 6).

11. Temos:

$$\begin{cases} \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{x_C - 2}{8 - x_C} = 4{,}859375 \\[2ex] \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{y_C - 1}{4 - y_C} = 4{,}859375 \end{cases} \Rightarrow x_C = 6{,}976 \text{ e } y_C = 3{,}488$$

Logo, C(6,976; 3,488).

12. Temos:

$$\begin{cases} \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{2 - 1}{x_C - 2} = \dfrac{1}{3} \\[2ex] \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\frac{17}{4} - 3}{y_C - \frac{17}{4}} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x_C = 5 \text{ e } y_C = 8$$

Logo, C(5, 8).

13. a) $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_M = \dfrac{-6 + 2}{2}$

$\therefore x_M = -2$

$y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_M = \dfrac{4 + (-10)}{2}$

$\therefore y_M = -3$

Logo, $M(-2, -3)$.

b) $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_M = \dfrac{\frac{5}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)}{2}$

$\therefore x_M = \dfrac{3}{8}$

$y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_M = \dfrac{\frac{3}{2} + 2}{2}$

$\therefore y_M = \dfrac{7}{4}$

Logo, $M\left(\dfrac{3}{8}, \dfrac{7}{4}\right)$.

c) $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_M = \dfrac{\sqrt{20} + \sqrt{45}}{2}$

$\therefore x_M = \dfrac{2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_M = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$

$y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_M = \dfrac{3 + 7}{2}$

$\therefore y_M = 5$

Logo, $M\left(\dfrac{5\sqrt{5}}{2}, 5\right)$.

14. Sendo (x, y) o simétrico de A em relação a Q em cada caso, temos:

- $x_Q = \dfrac{x_A + x}{2} \Rightarrow x = 2x_Q - x_A$
- $y_Q = \dfrac{y_A + y}{2} \Rightarrow y = 2y_Q - y_A$

a) $x = 2 \cdot (-3) - 0 \Rightarrow x = -6$

$y = 2 \cdot 1 - (-6) \Rightarrow y = 8$

Portanto, o simétrico de A em relação a Q é $(-6, 8)$.

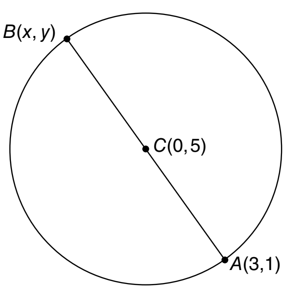
b) $x = 2 \cdot \sqrt{32} - \sqrt{8} \Rightarrow x = 2 \cdot 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$

$\therefore x = 6\sqrt{2}$

$y = 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{8}\right) - \dfrac{3}{4} \Rightarrow y = -1$

Portanto, o simétrico de A em relação a Q é $\left(6\sqrt{2}, -1\right)$.

15.



C é ponto médio de $\overline{AB}$. Logo:

$$\begin{cases} \dfrac{x + 3}{2} = 0 \\ \dfrac{y + 1}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow x = -3 \text{ e } y = 9 \text{ e, portanto, } B(-3, 9)$$

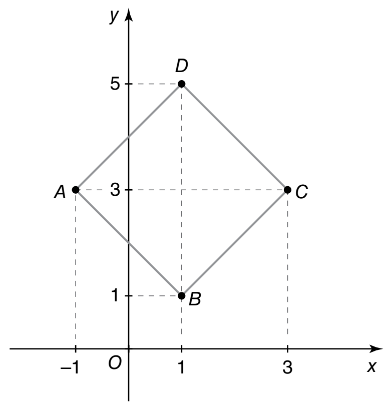
Alternativa **a**.

16. Como $\overline{CP}$ é perpendicular à corda $\overline{AB}$, deduzimos que P é ponto médio de $\overline{AB}$. Assim, indicando o ponto B por $B(x_B, y_B)$, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{2 + x_B}{2} = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{4 + y_B}{2} = \dfrac{15}{2} \end{cases} \Rightarrow x_B = 3 \text{ e } y_B = 11$$

Logo, $B(3, 11)$.

17. Representando o quadrado no plano cartesiano, temos:



Logo, $D(1, 5)$.

Outro modo

A resolução gráfica, aplicada acima, foi facilitada pelo fato de as diagonais serem paralelas aos eixos coordenados. Caso isso não ocorresse, a resolução poderia ser feita como segue.

As diagonais do quadrado se interceptam no ponto médio M de cada uma.

Como M é ponto médio de $\overline{AC}$, temos:

$M\left(\dfrac{-1 + 3}{2}, \dfrac{3 + 3}{2}\right) = M(1,3)$

Como $M(1, 3)$ é ponto médio de $\overline{BD}$, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{1 + x}{2} = 1 \\ \dfrac{1 + y}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = 5$$

Logo, $D(1, 5)$.

Alternativa **a**.

18. Do enunciado, temos que $\overline{MN}$ é uma base média do triângulo ABC e $M \in \overline{AB}$ e $N \in \overline{AC}$. Logo:

- M é ponto médio de $\overline{AB}$; então:

  $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 2a - 6 = \dfrac{x_A + (-1)}{2}$

  $\therefore x_A = 4a - 11$ (I)

  $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow a - 1 = \dfrac{y_A + 0}{2}$

  $\therefore y_A = 2a - 2$ (II)

- N é ponto médio de $\overline{AC}$; então:

  $x_N = \dfrac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow a = \dfrac{x_A + 5}{2}$ (III)

  $y_N = \dfrac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow a - 2 = \dfrac{y_A + (-2)}{2}$

  $\therefore a = \dfrac{y_A + 2}{2}$ (IV)

Substituindo (III) em (I):

$x_A = 4\left(\dfrac{x_A + 5}{2}\right) - 11 \Rightarrow x_A = 1$

Substituindo o valor de x_A em (III):

$a = \dfrac{1 + 5}{2} \Rightarrow a = 3$

Finalmente, substituindo o valor de a em (II):
$y_A = 2 \cdot 3 - 2 \Rightarrow y_A = 4$
Observando que os valores de a e y_A também satisfazem a equação (IV), concluímos: A(1, 4).

19. a) $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow x_G = \dfrac{-1 + 0 + 5}{3}$

$\therefore x_G = \dfrac{4}{3}$

$y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow y_G = \dfrac{6 + (-4) + 8}{3}$

$\therefore y_G = \dfrac{10}{3}$

Logo, o baricentro do triângulo ABC é $G\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$.

b) $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow x_G = \dfrac{\sqrt{27} + \sqrt{3} + \sqrt{12}}{3}$

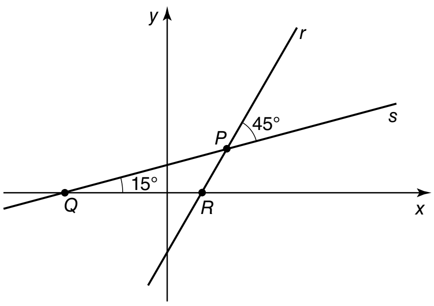
$\therefore x_G = \dfrac{3\sqrt{3} + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x_G = 2\sqrt{3}$

$y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow y_G = \dfrac{-1 + 2 + 0}{3}$

$\therefore y_G = \dfrac{1}{3}$

Portanto, o baricentro do triângulo ABC é $G\left(2\sqrt{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

20 Sejam os pontos P, Q e R conforme a figura a seguir.



No triângulo PQR, temos $m(Q\hat{P}R) = 45°$ e
$m(P\hat{R}Q) = 180° - 45° - 15° \Rightarrow m(P\hat{R}Q) = 120°$
Assim, a inclinação da reta r é:
$180° - 120° = 60°$
e tem coeficiente angular $m = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$.
Alternativa **b**.

21. a) $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \dfrac{5 - 3}{3 - 7}$

$\therefore m = -\dfrac{1}{2}$

b) $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \dfrac{-8 - 2}{2 - 5}$

$\therefore m = \dfrac{10}{3}$

c) $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \dfrac{\frac{2}{5} - 2}{3 - \frac{1}{2}}$

$\therefore m = -\dfrac{16}{25}$

d) $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \dfrac{8 - (5 + \sqrt{3})}{\sqrt{3} - 1}$

$\therefore m = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} - 1}$

$\therefore m = \sqrt{3}$

22. A reta r passa pelos pontos (2, −2) e (4, 0).
Assim, seu coeficiente angular é: $m = \dfrac{-2 - 0}{2 - 4} = 1$
e, portanto, sua inclinação é: $\alpha = 45°$

23. Como a reta r é paralela à reta s, sua inclinação também é de 45°.
Assim, seu coeficiente angular é:
$m = \text{tg } 45° \Rightarrow m = 1$
Além disso, a reta r passa pelo ponto (3, 0).
Calculando o coeficiente angular m da reta que passa por (3, 0) e por (5, 2), da alternativa **d**, temos:
$m = \dfrac{2 - 0}{5 - 3} = 1$
Logo, o ponto (5, 2) pertence à reta r.
Alternativa **d**.

24. $m = \text{tg } 135° \Rightarrow \dfrac{a - (-1)}{1 - 5} = -1$; logo, $a = 3$.

25. a) Temos:

$m_{AB} = \dfrac{-9 - 1}{-1 - 1} = 5$ e $m_{BC} = \dfrac{-4 - (-9)}{0 - (-1)} = 5$

Como $m_{AB} = m_{BC}$, temos que A, B e C são colineares.

b) Temos:

$m_{AB} = \dfrac{1 - \frac{2}{3}}{-\frac{3}{4} - 1} = -\dfrac{4}{21}$ e $m_{BC} = \dfrac{\frac{1}{5} - 1}{0 - \left(-\frac{3}{4}\right)} = -\dfrac{16}{15}$

Como $m_{AB} \neq m_{BC}$, temos que A, B e C não são colineares.

c) Temos:

$m_{AB} = \dfrac{\frac{5}{4} - \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - 2} = \dfrac{1}{2}$ e $m_{BC} = \dfrac{-\frac{1}{4} - \frac{5}{4}}{-5 - \frac{3}{2}} = \dfrac{3}{13}$

Como $m_{AB} \neq m_{BC}$, temos que A, B e C não são colineares.

d) Como A, B e C têm abscissas iguais, eles pertencem à mesma reta perpendicular ao eixo Ox. Portanto, são colineares.

e) Temos:

$m_{AB} = \dfrac{\sqrt{8} - \frac{2}{\sqrt{2}}}{6 - 4} = \dfrac{2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e

$m_{BC} = \dfrac{2\sqrt{2} - \sqrt{8}}{1 - 6} = \dfrac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{-5} = 0$

Como $m_{AB} \neq m_{BC}$, temos que A, B e C não são colineares.

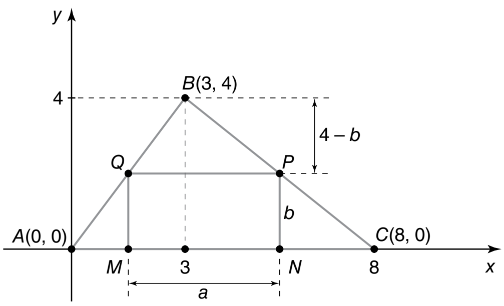
26. Como a reta r passa pelos pontos $R(2, 0)$, $Q(6, -2)$ e $P(0, y)$, temos que os pontos P, Q e R são colineares. Assim:

$$m_{PQ} = m_{QR} \Rightarrow \frac{y - (-2)}{0 - 6} = \frac{-2 - 0}{6 - 2}$$

$\therefore y = 1$

Logo, a reta r intercepta o eixo das ordenadas no ponto $P(0, 1)$.

27. Indicando por a e b as medidas de $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$, respectivamente, esquematizamos:



Da semelhança entre os triângulos BAC e BQP, obtemos:

$$\frac{8}{a} = \frac{4}{4 - b} \Rightarrow a = 8 - 2b$$

Assim, a área S do retângulo, em função de b, pode ser expressa por:

$S = ab \Rightarrow S = (8 - 2b)b$

$\therefore S = -2b^2 + 8b$

A função polinomial do 2º grau S tem valor máximo S_M dado por:

$$S_M = -\frac{(8)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0}{4 \cdot (-2)} = 8$$

Logo, para a área máxima do retângulo, temos:

$$\begin{cases} ab = 8 \\ a = 8 - 2b \end{cases} \Rightarrow a = 4 \text{ e } b = 2$$

Portanto, o ponto P é da forma $P(x_P, 2)$. Como esse ponto é colinear com $B(3, 4)$ e $C(8, 0)$, concluímos:

$$\frac{4 - 0}{3 - 8} = \frac{2 - 0}{x_P - 8} \Rightarrow x_P = \frac{11}{2}$$

Ou seja, $P\left(\frac{11}{2}, 2\right)$.

Alternativa **d**.

28. a) A equação da reta que passa por $P(8, 0)$ e tem coeficiente angular $m = -\frac{1}{3}$ é:

$$y - 0 = -\frac{1}{3}(x - 8)$$

Logo, uma equação da reta é: $x + 3y - 8 = 0$

b) A equação da reta que passa por $P\left(\sqrt{3}, 2\right)$ e tem coeficiente angular $m = -\sqrt{3}$ é:

$$y - 2 = -\sqrt{3}\left(x - \sqrt{3}\right)$$

Logo, uma equação da reta é: $\sqrt{3}x + y - 5 = 0$

c) A equação da reta que passa por $P\left(2 + \sqrt{3}, 0\right)$ e tem coeficiente angular $m = 2 - \sqrt{3}$ é:

$$y - 0 = \left(2 - \sqrt{3}\right) \cdot \left[x - \left(2 + \sqrt{3}\right)\right]$$

Logo, uma equação da reta é:

$$\left(2 - \sqrt{3}\right)x - y - 1 = 0$$

29. a) Do gráfico, temos que a reta u passa por $P(0, 5)$ e que seu coeficiente angular é:

$m = \text{tg } 120° = -\sqrt{3}$

Assim:

$(u)\ y - 5 = -\sqrt{3}\,(x - 0)$

Logo, uma equação da reta u é: $y = -\sqrt{3}x + 5$

b) Do triângulo retângulo limitado pelos eixos coordenados e pela reta v, temos que a inclinação da reta é:

$90° + 30° = 120°$

Além disso, a reta v passa por $P(2, 3)$ e tem coeficiente angular $m = \text{tg } 120° = -\sqrt{3}$. Assim:

$(v)\ y - 3 = -\sqrt{3}\,(x - 2)$

Logo, uma equação da reta v é:

$y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} + 3$

30. a) O coeficiente angular da reta que passa por A e B é:

$$m = \frac{10 - 0}{-5 - (-7)} = 5$$

Assim, temos:

$(\overleftrightarrow{AB})$: $y - 0 = 5\,[x - (-7)]$

Logo, uma equação da reta que passa por A e B é: $y = 5x + 35$

b) O coeficiente angular da reta que passa por A e B é:

$$m = \frac{6 - 5}{4 - 1} = \frac{1}{3}$$

Assim, temos:

$(\overleftrightarrow{AB})$: $y - 6 = \frac{1}{3}(x - 4)$

Logo, uma equação da reta que passa por A e B é:

$$y = \frac{x}{3} + \frac{14}{3}$$

c) O coeficiente angular da reta que passa por A e B é:

$$m = \frac{-1 - 2}{1 - (-3)} = -\frac{3}{4}$$

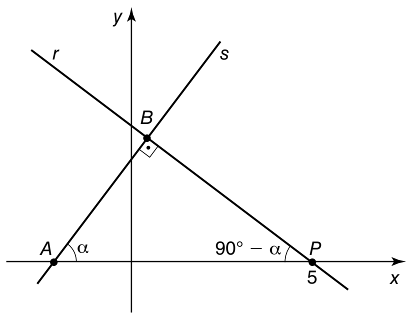
Assim, temos:

$(\overleftrightarrow{AB})$: $y - (-1) = -\frac{3}{4}(x - 1)$

Logo, uma equação da reta que passa pelos pontos A e B é:

$$y = -\frac{3x}{4} - \frac{1}{4}$$

31. Considere os pontos A e B como na figura a seguir.



Temos:

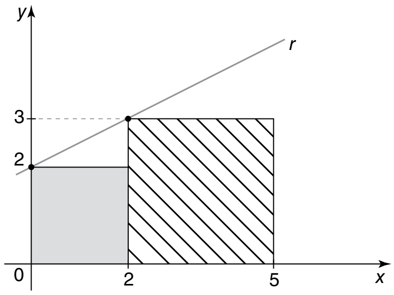
$$\begin{cases} \text{tg}\ \alpha = \dfrac{BP}{AB} = \dfrac{4}{3} \\ \text{tg}\ (90° - \alpha) = \dfrac{AB}{BP} \end{cases} \Rightarrow \text{tg}\ (90° - \alpha) = \dfrac{3}{4}$$

Logo: $m_r = \text{tg}\ [180° - (90° - \alpha)] = -\dfrac{3}{4}$

Como r passa pelo ponto $P(5, 0)$, uma equação de r é:

$$y - 0 = -\frac{3}{4}(x - 5) \Rightarrow y = -\frac{3x}{4} + \frac{15}{4}$$

32. O lado do quadrado cinza mede 2 e o do quadrado hachurado mede 3. Assim, temos:



Logo, a reta r passa pelos pontos (0, 2) e (2, 3):

$$r: \begin{cases} A(0, 2) \\ m_r = \dfrac{3 - 2}{2 - 0} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow r: y - 2 = \frac{1}{2}(x - 0)$$

Concluímos, então, que a equação de r é: $x - 2y = -4$

Alternativa **a**.

33. Para que um ponto pertença à bissetriz dos quadrantes pares suas coordenadas devem ser opostas.

Alternativa **e**.

34. O ponto T que pertence à reta s e tem abscissa a tem a ordenada a, pois s é a bissetriz dos quadrantes ímpares. Assim, temos que $a > 5$ e $b > a$ e, portanto, podemos concluir que a abscissa de Q é positiva e que a ordenada é negativa. Logo, Q pertence ao quarto quadrante.

Alternativa **d**.

35. Como P pertence à bissetriz dos quadrantes pares, ele é da forma $P(a, -a)$, com $a \in \mathbb{R}$.

Além disso, $PA = 2PB$. Dessa forma:

$$\sqrt{(a - 3)^2 + [-a - (-5)]^2} =$$

$$= 2 \cdot \sqrt{(a - 0)^2 + [-a - (-1)]^2} \Rightarrow 3a^2 + 4a - 15 = 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-15) = 196$$

$$\therefore a = \frac{-4 \pm \sqrt{196}}{2 \cdot 3} \Rightarrow a = -3 \text{ ou } a = \frac{5}{3}$$

Portanto, $P(-3, 3)$ ou $P\left(\dfrac{5}{3}, -\dfrac{5}{3}\right)$.

36. Como A pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, ele é da forma $A(a, a)$, com $a \in \mathbb{R}$. Além disso, B pertence à reta horizontal que passa por A; portanto, sua ordenada é a. Além disso, como $AB = 8$, há duas possibilidades para a abscissa de B: $a - 8$ ou $a + 8$. Temos, então, dois casos a considerar:

- **1º caso:** $A(a, a)$, $B(a - 8, a)$ e $P(2, 5)$

  $PA = PB \Rightarrow \sqrt{(a - 2)^2 + (a - 5)^2} =$

  $= \sqrt{(a - 8 - 2)^2 + (a - 5)^2}$

  $\therefore a^2 - 4a + 4 = a^2 - 20a + 100$

  $\therefore 16a = 96 \Rightarrow a = 6$

  Logo, $A(6, 6)$ e $B(-2, 6)$.

- **2º caso:** $A(a, a)$, $B(a + 8, a)$ e $P(2, 5)$

  $PA = PB \Rightarrow \sqrt{(a - 2)^2 + (a - 5)^2}$

  $= \sqrt{(a + 8 - 2)^2 + (a - 5)^2}$

  $\therefore a^2 - 4a + 4 = a^2 + 12a + 36$

  $\therefore 16a = -32 \Rightarrow a = -2$

  Logo, $A(-2, -2)$ e $B(6, -2)$.

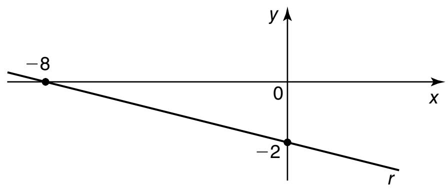
Portanto, $A(6, 6)$ e $B(-2, 6)$ ou $A(-2, -2)$ e $B(6, -2)$.

37. **a)** Para $x = 0$, temos: $0 + 4y + 8 = 0 \Rightarrow y = -2$

Para $y = 0$, temos: $x + 4 \cdot 0 + 8 = 0 \Rightarrow x = -8$

Portanto, a reta passa pelos pontos $(0, -2)$ e $(-8, 0)$.

Logo, o gráfico de r é:

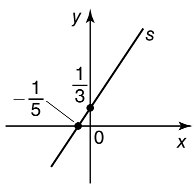


b) Para $x = 0$, temos: $5 \cdot 0 - 3y + 1 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{1}{3}$

Para $y = 0$, temos: $5x - 3 \cdot 0 + 1 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{5}$

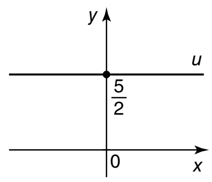
Portanto, a reta passa pelos pontos $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$ e $\left(-\dfrac{1}{5}, 0\right)$.

Logo, o gráfico de s é:



c) Temos: $2y - 5 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{5}{2}$

Assim, a reta é horizontal e passa pelo ponto $\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$. Logo, o gráfico de u é:



38. Para $x = k$, temos: $2k - y - 3 = 0 \Rightarrow y = 2k - 3$

Assim, um ponto de r é $P(k, 2k - 3)$, com k real.

Alternativa **d**.

39. Seja k a abscissa do ponto P. Substituindo na equação da reta r, obtemos:

$3k - y + 2 = 0 \Rightarrow y = 3k + 2$

Logo, temos $P(k, 3k + 2)$.

Como PA = PB, temos:

$\sqrt{(k-1)^2 + (3k+2-1)^2} =$

$= \sqrt{(k-5)^2 + (3k+2-0)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10k^2 + 4k + 2 = 10k^2 + 2k + 29$

$\therefore k = \dfrac{27}{2}$

Logo, $P\left(\dfrac{27}{2}, \dfrac{85}{2}\right)$.

40. O coeficiente angular m da reta r é dado por $m = \dfrac{3-0}{0-(-1)} = 3$. Com esse coeficiente angular e um dos pontos P_1 ou P_2, por exemplo P_1, obtemos a equação da reta r:

$y - 0 = 3[x - (-1)]$, ou seja, $y = 3x + 3$

Portanto, o ponto $M(n, q)$ pode ser representado por $M(n, 3n + 3)$.

Então:

$OM = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \sqrt{(n-0)^2 + (3n+3-0)^2} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\therefore n^2 + 9n^2 + 18n + 9 = \dfrac{9}{10} \Rightarrow n = -\dfrac{9}{10}$

Assim, $M\left(-\dfrac{9}{10}, \dfrac{3}{10}\right)$; portanto, $n = -\dfrac{9}{10}$ e $q = \dfrac{3}{10}$.

Concluímos:

$q - n = \dfrac{3}{10} - \left(-\dfrac{9}{10}\right) = \dfrac{12}{10} = \dfrac{6}{5}$

Alternativa **c**.

41. As coordenadas do ponto de intersecção de r com s formam a solução do sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ 3x + 4y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -10 \text{ e } y = 7$$

Logo, o ponto de intersecção das retas é $(-10, 7)$.

42. **a)** A reta r intercepta o eixo das abscissas no ponto em que a ordenada é $y = 0$. Para $y = 0$, temos:

$3x + 5 \cdot 0 - 30 = 0 \Rightarrow x = 10$

Logo, o ponto de intersecção da reta r com o eixo das abscissas é (10, 0).

b) A reta r intercepta o eixo das ordenadas no ponto em que a abscissa é $x = 0$. Para $x = 0$, temos:

$3 \cdot 0 + 5y - 30 = 0 \Rightarrow y = 6$

Logo, o ponto de intersecção da reta r com o eixo das ordenadas é (0, 6).

43. A reta r passa pelo ponto O(0, 0), e seu coeficiente angular m_r é dado por $m_r = \dfrac{-3-0}{2-0} = -\dfrac{3}{2}$; assim, obtemos a equação de r:

$y - 0 = -\dfrac{3}{2}(x - 0) \Rightarrow y = -\dfrac{3x}{2}$

A reta s passa pelo ponto $(-4, 0)$ e seu coeficiente angular m_s é dado por $m_s = \dfrac{-4-0}{-6-(-4)} = 2$. Assim, obtemos a equação de s:

$y - 0 = 2[x - (-4)] \Rightarrow y = 2x + 8$

O ponto de intersecção de r e s é a solução do sistema:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{3x}{2} \\ y = 2x + 8 \end{cases} \Rightarrow x = -\dfrac{16}{7} \text{ e } y = \dfrac{24}{7}$$

Concluímos, então: $r \cap s = \left\{\left(-\dfrac{16}{7}, \dfrac{24}{7}\right)\right\}$

44. Para $y = 0$, na equação de r, obtemos $x = -\dfrac{1}{3}$; e para $y = 0$, na equação de s, obtemos $x = 2$.

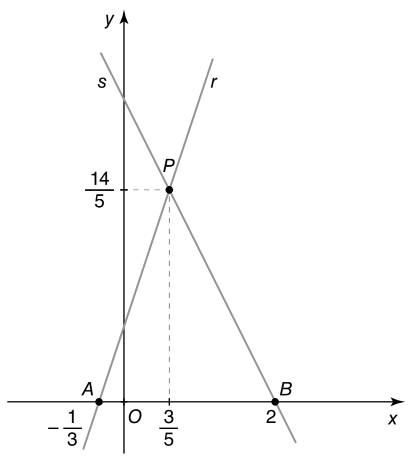
Assim, os pontos de intersecção de r e s com o eixo Ox são $A\left(-\dfrac{1}{3}, 0\right)$ e $B(2, 0)$, respectivamente.

O ponto P de intersecção de r e s é a solução do sistema:

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = -2x + 4 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{3}{5} \text{ e } y = \dfrac{14}{5}$$

Ou seja, $P\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{14}{5}\right)$.

Assim, temos o gráfico:



Logo, área S do triângulo ABP é dada por:

$$S = \dfrac{\left[2 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)\right] \cdot \dfrac{14}{5}}{2} = \dfrac{49}{15}$$

Alternativa **d**.

45. Sejam P o ponto de intersecção das retas r e s, Q o ponto de intersecção das retas r e t e R o ponto de intersecção das retas s e t.

O triângulo limitado pelas retas r, s e t é o triângulo cujos vértices são P, Q e R.

As coordenadas do ponto P são a solução do sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 12 = 0 \\ 2x - y + 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2 \text{ e } y = 7$$

Logo, $P(-2, 7)$.

As coordenadas do ponto Q são a solução do sistema formado pelas equações das retas r e t:

$$\begin{cases} x + 2y - 12 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 6 \text{ e } y = 3$$

Assim, Q(6, 3).

As coordenadas do ponto R são a solução do sistema formado pelas equações das retas s e t:

$$\begin{cases} 2x - y + 11 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -4 \text{ e } y = 3$$

Logo, $R(-4, 3)$.

Temos, então:
$(PQ)^2 = [6 - (-2)]^2 + (3 - 7)^2 = 80$
$(PR)^2 = [-4 - (-2)]^2 + (3 - 7)^2 = 20$
$(QR)^2 = (-4 - 6)^2 + (3 - 3)^2 = 100$
Logo, como $(PQ)^2 + (PR)^2 = (QR)^2$, o triângulo PQR, limitado pelas retas r, s e t, é um triângulo retângulo.

Outro modo
(para depois do estudo de retas perpendiculares)
O coeficiente angular da reta $r \left(-\frac{1}{2}\right)$ é o oposto do inverso do coeficiente angular da reta s (2); logo, $r \perp s$ e, portanto, o triângulo limitado pelas retas r, s e t é retângulo.

46. Como as retas r e s são concorrentes, o determinante da matriz dos coeficientes do sistema linear

$$\begin{cases} x + (k - 2)y = -1 \\ kx + 8y = 3 \end{cases}$$

é diferente de zero, isto é:

$$\begin{vmatrix} 1 & k - 2 \\ k & 8 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 1 \cdot 8 - (k - 2) \cdot k \neq 0$$

$\therefore\ k^2 - 2k - 8 = 0 \Rightarrow k \neq -2 \text{ e } k \neq 4$

Alternativa **a**.

47. O estudo das possíveis posições relativas das retas pode ser feito a partir da discussão do sistema linear a seguir em função do parâmetro real k.

$$\begin{cases} kx + 10y = -5 \\ x + (k - 3)y = -1 \end{cases}$$

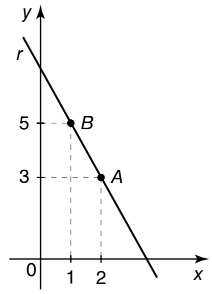
Sendo D o determinante da matriz dos coeficientes desse sistema, temos:

$$D = \begin{vmatrix} k & 10 \\ 1 & k - 3 \end{vmatrix} = k^2 - 3k - 10$$

- O sistema é possível e determinado se, e somente se, $D \neq 0$, isto é:
  $k^2 - 3k - 10 \neq 0 \Rightarrow k \neq 5 \text{ e } k \neq -2$
- Para $k = 5$, temos:
  $$\begin{cases} 5x + 10y = -5 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow x + 2y = -1$$
  Logo, para $k = 5$ o sistema é possível e indeterminado.
- Para $k = -2$, temos:
  $$\begin{cases} -2x + 10y = -5 \\ x - 5y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 10y = -5 \\ 0x + 0y = -7 \end{cases}$$
  Logo, para $k = -2$, o sistema é impossível

Assim, respondemos aos itens:
a) As retas são concorrentes para $k \neq 5$ e $k \neq -2$.
b) As retas são paralelas distintas para $k = -2$.
c) As retas são coincidentes para $k = 5$.

48. **a)** O gráfico de r é:



b) O coeficiente angular de r é: $m = \frac{5 - 3}{1 - 2} = -2$
Assim, a equação reduzida de r é:
$y - 3 = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 7$

c) O coeficiente angular de r é $m = -2$ e seu coeficiente linear é $q = 7$.

49. Como $A \in r$, temos:
$-a - 4 = a(-a - 4) + 6 \Rightarrow a^2 + 3a - 10 = 0$
$\therefore\ a = -5$ ou $a = 2$
Pelo gráfico, observamos que a reta tem inclinação maior que 90°; logo, seu coeficiente angular é negativo. Como a é o coeficiente angular da reta, concluímos que $a = -5$.
Alternativa **a**.

50. **a)** A equação reduzida de r é: $y = \frac{2k + 3}{3}x - \frac{1}{3}$
Para que r e s sejam paralelas, devemos ter $m_r = m_s$, isto é:
$\frac{2k + 3}{3} = \frac{3}{2} \Rightarrow 4k + 6 = 9$
$\therefore\ k = \frac{3}{4}$

b) Temos $q_r = -\frac{1}{3}$ e $q_s = \frac{1}{3}$. Assim, como $m_r = m_s$ e $q_r \neq q_s$, as retas são paralelas distintas.

51. **a)** O coeficiente angular de s é $m_s = 8$. Como r é paralela a s, temos $m_r = 8$; além disso, r passa pelo ponto $P(-3, 1)$. Então:
$(r)\ y - 1 = 8[x - (-3)]$
Logo, a equação reduzida de r é: $y = 8x + 25$

b) A forma reduzida da equação de s é:
$y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$
Então, seu coeficiente angular é $m_s = \frac{4}{3}$. Como r é paralela a s, temos $m_r = \frac{4}{3}$ e r passa pelo ponto $P\left(-\frac{1}{3}, -2\right)$. Então:
$(r)\ y - (-2) = \frac{4}{3}\left[x - \left(-\frac{1}{3}\right)\right]$
Logo, a equação reduzida de r é: $y = \frac{4x}{3} - \frac{14}{9}$

c) O coeficiente angular de s é $m_s = \frac{3}{4}$. Como r é paralela a s, temos $m_r = \frac{3}{4}$ e r passa pelo ponto $P\left(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{2}\right)$. Então:
$(r)\ y - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\left[x - \left(-\frac{2}{5}\right)\right]$
Logo, a equação reduzida de r é: $y = \frac{3x}{4} - \frac{1}{5}$

52. Resolvendo o sistema abaixo, obtemos o ponto P de intersecção das retas representadas por suas equações:

$$\begin{cases} 2x - y = -2 \\ x + y = 11 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ e } y = 8$$

Logo, $P(3, 8)$.

Como $t \,//\, \overleftrightarrow{AB}$, temos que o coeficiente angular m_t da reta t é o mesmo de $\overleftrightarrow{AB}$, isto é:

$$m_t = \frac{-2 - 1}{2 - 1} = -3$$

Com o ponto $P(3, 8)$ e o coeficiente angular $m_t = -3$, obtemos a equação da reta t:

$y - 8 = -3(x - 3) \Rightarrow y = -3x + 17$

Fazendo $x = 0$ na equação da reta t, obtemos $y = 17$; logo, o ponto de intersecção da reta t com o eixo y é $(0, 17)$.

Alternativa **b**.

53. Fazendo $x = 1$ na equação da parábola, obtemos $y = 1^2 - 4 = -3$. Logo, um ponto comum à reta r e à parábola é $P(1, -3)$.

Uma equação de r é da forma $3x - y + k = 0$ para um determinado valor real de k. Como r passa pelo ponto $P(1, -3)$, obtemos o valor de k:

$3 \cdot 1 - (-3) + k = 0 \Rightarrow k = -6$

Concluímos, então, que a equação de r é $3x - y - 6 = 0$.

Alternativa **c**.

54. **a)** A forma reduzida da equação de r é:

$$y = -\frac{4x}{3} + \frac{1}{3}$$

Portanto, seu coeficiente angular é $m = -\frac{4}{3}$.

Assim, sendo q o coeficiente linear de cada uma das retas paralelas a r, a equação do feixe é:

$$y = -\frac{4x}{3} + q, \text{ com } q \in \mathbb{R}$$

b) Vamos encontrar o valor de q substituindo as coordenadas de P na equação do feixe:

$$3 = -\frac{4}{3} \cdot 1 + q \Rightarrow q = \frac{13}{3}$$

Logo, uma equação da reta s que passa por $P(1, 3)$ é: $4x + 3y - 13 = 0$

55. A forma reduzida da equação de (r) $3x + y - 1 = 0$ é $y = -3x + 1$ e a da equação de (s) $(2n - 4)x + y + 2 = 0$ é $y = (4 - 2n)x - 2$. Assim, $m_r = -3$ e $m_s = 4 - 2n$. Para que r e s sejam perpendiculares, devemos ter:

$$m_r = -\frac{1}{m_s} \Rightarrow -3 = -\frac{1}{4 - 2n}$$

$$\therefore n = \frac{11}{6}$$

56. **a)** A forma reduzida da equação de r é:

$y = -2x - 7$

Assim, $m_r = -2$. A reta s é perpendicular a r passando por $P(-1, 2)$. Então:

$$m_s = -\frac{1}{m_r}$$

$$\therefore m_s = \frac{1}{2}$$

E, portanto:

$$(s)\ y - 2 = \frac{1}{2}[x - (-1)]$$

Logo, uma equação de s é: $x - 2y + 5 = 0$

b) A forma reduzida da equação de r é:

$$y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$$

Assim, $m_r = -\frac{2}{5}$. A reta s é perpendicular a r passando por $P(2, 6)$. Então:

$$m_s = -\frac{1}{m_r}$$

$$\therefore m_s = \frac{5}{2}$$

E, portanto:

$$(s)\ y - 6 = \frac{5}{2}(x - 2)$$

Logo, uma equação de s é: $5x - 2y + 2 = 0$

c) A forma reduzida da equação de r é: $y = \frac{3}{4}x$

Assim, $m_r = \frac{3}{4}$. A reta s é perpendicular a r passando por $P(-1, 0)$. Então:

$$m_s = -\frac{1}{m_r}$$

$$\therefore m_s = -\frac{4}{3}$$

E, portanto:

$$(s)\ y - 0 = -\frac{4}{3}[x - (-1)]$$

Logo, uma equação de s é: $4x + 3y + 4 = 0$

d) A forma reduzida da equação de r é: $y = x + 3$

Assim, $m_r = 1$. A reta s é perpendicular a r passando por $P\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$. Então:

$$m_s = -\frac{1}{m_r}$$

$$\therefore m_s = -1$$

E, portanto:

$$(s)\ y - \left(-\frac{1}{2}\right) = -1\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

Logo, uma equação de s é: $6x + 6y + 1 = 0$

57. **a)** O coeficiente angular m_t da reta t é o oposto do inverso do coeficiente angular m_r da reta r, isto é:

$$m_t = -\frac{1}{m_r} \Rightarrow m_t = -\frac{1}{2}$$

Com o ponto $P(-1, 5)$ e o coeficiente angular $m_t = -\frac{1}{2}$, obtemos a equação da reta t:

$$y - 5 = -\frac{1}{2}[x - (-1)] \Rightarrow x + 2y - 9 = 0$$

Fazendo $y = 0$ na equação da reta t, obtemos $x = 9$. Logo, o ponto de intersecção da reta t com o eixo das abscissas é $(9, 0)$.

b) O ponto da reta r localizado mais próximo de P é o ponto Q de intersecção entre t e r, que é a solução do sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + 2y - 9 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{5} \text{ e } y = \frac{21}{5}$$

Logo, $Q\left(\frac{3}{5}, \frac{21}{5}\right)$.

58. O centro C da circunferência circunscrita ao polígono regular equidista dos extremos de qualquer um dos lados do polígono; logo, C pertence às mediatrizes desses lados. Bastam duas dessas mediatrizes para determinar o ponto C.

- Obtendo a equação da mediatriz r do lado $\overline{PQ}$:
O ponto médio M de $\overline{PQ}$ é dado por
$M\left(\frac{0+2}{2}, \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}\right) = M\left(1, \sqrt{3}\right)$.
Como as ordenadas de P e Q são iguais, temos que o segmento $\overline{PQ}$ é horizontal, portanto a mediatriz r desse segmento é vertical. Sendo r vertical e passando pelo ponto $M\left(1, \sqrt{3}\right)$, sua equação é $x = 1$.
- Obtendo a equação da mediatriz s do lado $\overline{QR}$:
O ponto médio N de $\overline{QR}$ é dado por
$N\left(\frac{2+3}{2}, \frac{\sqrt{3}+0}{2}\right) = N\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
O coeficiente angular m_s da mediatriz s de $\overline{QR}$ é o oposto do inverso do coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{QR}$, isto é:
$m_s = -\frac{1}{m_{QR}} \Rightarrow m_s = -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}-0}{2-3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
Com esse coeficiente angular e o ponto $N\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, obtemos a equação de s:
$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{5}{2}\right) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}x}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$
O ponto C é a intersecção entre r e s, que é a solução do sistema:
$\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{\sqrt{3}x}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = 0$
Concluímos, então, que $C(1, 0)$.

59. **a)** O coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é:
$m_{AB} = \frac{8-5}{4-0} = \frac{3}{4}$
Como r é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$, o coeficiente de r é tal que:
$m_r = -\frac{1}{m_{AB}}$
$\therefore m_r = -\frac{4}{3}$
Como r passa por $P(-7, 0)$, temos:
$(r)\ y - 0 = -\frac{4}{3}[x - (-7)]$
Logo, uma equação da reta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ passando por P é: $4x + 3y + 28 = 0$

b) O coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é:
$m_{AB} = \frac{\frac{3}{2} - 0}{0 - \frac{2}{3}} = -\frac{9}{4}$
Como r é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$, o coeficiente de r é tal que:
$m_r = -\frac{1}{m_{AB}}$
$\therefore m_r = \frac{4}{9}$
Como r passa por $P\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$, temos:
$(r)\ y - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{9}\left(x - \frac{1}{3}\right)$
Logo, uma equação da reta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ passando por P é: $24x - 54y - 35 = 0$

c) Como A e B têm ordenadas iguais, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é horizontal e sua equação é $y = 3$. Assim, a reta r é vertical e passa por $P(0, 0)$. Logo, uma equação da reta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ passando por P é $x = 0$.

60. **a)** O coeficiente angular de r é $m_r = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$. Assim, o coeficiente angular de s, perpendicular a r passando por $P\left(3, 3\sqrt{3}\right)$, é tal que:
$m_s = -\frac{1}{m_r}$
$\therefore m_s = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
Temos, então:
$(s)\ y - 3\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 3)$
Logo, uma equação da reta perpendicular a r passando por P é: $\sqrt{3}x + 3y - 12\sqrt{3} = 0$

b) O coeficiente angular de r é $m_r = \text{tg } 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Assim, o coeficiente angular de s, perpendicular a r passando por $P(2, 6)$, é tal que:
$m_s = -\frac{1}{m_r}$
$\therefore m_s = \sqrt{3}$
Temos, então:
$(s)\ y - 6 = \sqrt{3}(x - 2)$
Logo, uma equação da reta perpendicular a r passando por P é: $\sqrt{3}x - y - 2\sqrt{3} + 6 = 0$

61. O coeficiente angular de s é $m_s = \text{tg } \alpha = \frac{3}{5}$. Como r é perpendicular à reta s, seu coeficiente angular é tal que:
$m_r = -\frac{1}{m_s}$
$\therefore m_r = -\frac{5}{3}$
Como r passa por $P(-2, 5)$, temos:
$(r)\ y - 5 = -\frac{5}{3}[x - (-2)]$
Logo, a equação reduzida da reta r é:
$y = -\frac{5x}{3} + \frac{5}{3}$

62. As diagonais do quadrado são perpendiculares entre si; logo, a reta r que contém a diagonal $\overline{BD}$ passa pelo ponto $B(2, -1)$ e é perpendicular à reta s que contém a diagonal $\overline{AC}$. Assim, o coeficiente angular m_r da reta r é o oposto do inverso do coeficiente angular m_s da reta s, isto é:
$m_r = -\frac{1}{m_s} \Rightarrow m_r = -\frac{1}{\frac{1-(-4)}{-1-0}} = \frac{1}{5}$
Com esse coeficiente angular e o ponto $B(2, -1)$, obtemos a equação da reta r:
$y - (-1) = \frac{1}{5}(x - 2) \Rightarrow x - 5y - 7 = 0$
Alternativa **c**.

63. **a)** A projeção ortogonal Q de $P(-1, 4)$ sobre a reta r é a intersecção entre r e a reta s perpendicular a r passando por P.

A forma reduzida da equação de r é:

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Assim, seu coeficiente angular é $m_r = -\frac{1}{2}$.

Como s é perpendicular a r, seu coeficiente angular é tal que:

$m_s = -\frac{1}{m_r}$

$\therefore\ m_s = 2$

Como s passa por $P(-1, 4)$, temos:

$(s)\ y - 4 = 2[x - (-1)]$

Logo, a equação reduzida de s é: $y = 2x + 6$

As coordenadas do ponto, que é a projeção ortogonal de P sobre a reta r, são a solução do sistema:

$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = 2x + 6 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{11}{5} \text{ e } y = \frac{8}{5}$

Concluímos, então, que a projeção de P sobre a reta r é o ponto $\left(-\frac{11}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

b) Como r é vertical de equação $x = 1$, a projeção ortogonal de $P(-1, -3)$ pertence à reta horizontal de equação $y = -3$. Assim, a projeção é o ponto $(1, -3)$.

64. **a)** A projeção ortogonal Q de $P(1, 2)$ sobre a reta r é a intersecção entre a reta s perpendicular a r passando por P. A forma reduzida da equação de r é: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$

Assim, seu coeficiente angular é $m_r = -\frac{1}{2}$.

Como s é perpendicular a r, seu coeficiente angular é tal que:

$m_s = -\frac{1}{m_r}$

$\therefore\ m_s = 2$

Como s passa por $P(1, 2)$, temos:

$(s)\ y - 2 = 2(x - 1)$

Logo, a equação reduzida de s é: $y = 2x$

A projeção ortogonal de P sobre a reta r é solução do sistema:

$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{2} \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ e } y = 6$

Concluímos, então, que $Q(3, 6)$.

O simétrico de P em relação a r é o ponto $P'(x, y)$ tal que P e P′ são distintos, pertencem à reta s e equidistam de r. Dessa forma, Q é o ponto médio do segmento $\overline{PP'}$. Assim, temos:

$\frac{1 + x}{2} = 3 \Rightarrow x = 5$

$\frac{2 + y}{2} = 6 \Rightarrow y = 10$

Logo, o simétrico de P em relação à reta r é o ponto $(5, 10)$.

b) A projeção ortogonal Q de $P(-4, 0)$ sobre a reta r é a intersecção entre r e a reta s perpendicular a r passando por P.

A forma reduzida da equação de r é:

$y = \frac{2}{3}x + \frac{29}{6}$

Assim, seu coeficiente angular é $m_r = \frac{2}{3}$.

Como s é perpendicular a r, seu coeficiente angular é tal que:

$m_s = -\frac{1}{m_r}$

$\therefore\ m_s = -\frac{3}{2}$

Como a reta s passa por $P(-4, 0)$, então:

$(s)\ y - 0 = -\frac{3}{2}[x - (-4)]$

Logo, a equação reduzida de s é: $y = -\frac{3}{2}x - 6$

A projeção ortogonal de P sobre a reta r é solução do sistema:

$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + \frac{29}{6} \\ y = -\frac{3}{2}x - 6 \end{cases} \Rightarrow x = -5 \text{ e } y = \frac{3}{2}$

Concluímos, então, que $Q\left(-5, \frac{3}{2}\right)$.

O simétrico de P em relação a r é o ponto $P'(x, y)$ tal que P e P′ são distintos, pertencem à reta s e equidistam de r. Dessa forma, Q é ponto médio do segmento $\overline{PP'}$. Assim, temos:

$\frac{-4 + x}{2} = -5 \Rightarrow x = -6$

$\frac{0 + y}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow y = 3$

Logo, o simétrico do ponto P em relação à reta r é o ponto $(-6, 3)$.

c) Como r é vertical de equação $x = 9$, a projeção ortogonal Q de $P(2, 5)$ pertence à reta vertical de equação $y = 5$. Assim, $Q(9, 5)$.

O simétrico de P em relação a r é o ponto $P'(x, y)$ tal que P e P′ pertencem à reta $y = 5$ e equidistam de r. Dessa forma, Q é o ponto médio do segmento $\overline{PP'}$. Assim, temos:

$\frac{2 + x}{2} = 9 \Rightarrow x = 16$

$\frac{5 + y}{2} = 5 \Rightarrow y = 5$

Logo, o simétrico de P em relação à reta r é o ponto $(16, 5)$.

d) Como r é horizontal de equação $y = 2$, a projeção ortogonal Q de $P(1, -6)$ pertence à reta vertical de equação $x = 1$. Assim, $Q(1, 2)$.

O simétrico de P em relação a r é o ponto $P'(x, y)$ tal que P e P′ são distintos, pertencem à reta $x = 1$ e equidistam de r. Dessa forma, Q é ponto médio do segmento $\overline{PP'}$. Assim, temos:

$\frac{1 + x}{2} = 1 \Rightarrow x = 1$

$\frac{-6 + y}{2} = 2 \Rightarrow y = 10$

Logo, o simétrico do ponto P em relação à reta r é o ponto $(1, 10)$.

65. a) O ponto de intersecção de uma reta com o eixo das abscissas tem ordenada $y = 0$. Assim, das equações paramétricas de r, temos:

$$0 = 1 - 3t \Rightarrow t = \frac{1}{3}$$

Logo, para $t = \frac{1}{3}$ obtemos as coordenadas do ponto de intersecção de r com o eixo das abscissas.

b) O ponto de intersecção de uma reta com o eixo das ordenadas tem abscissa $x = 0$. Assim, das equações paramétricas de r, temos:

$$0 = 2t + 1 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

Logo, para $t = -\frac{1}{2}$ obtemos as coordenadas do ponto de intersecção de r com o eixo das ordenadas.

c) Substituindo $x = 5$ nas equações paramétricas de r, temos:
$5 = 2t + 1 \Rightarrow t = 2$
Logo, para $t = 2$ obtemos o ponto de abscissa 5 da reta r.

d) Isolando t na primeira equação, temos:

$$\begin{cases} t = \dfrac{x-1}{2} & \text{(I)} \\ y = 1 - 3t & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos a equação reduzida da reta r:

$$y = 1 - 3 \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right) \Rightarrow y = -\frac{3x}{2} + \frac{5}{2}$$

66. $r \begin{cases} x = t + 5 \\ y = 3t - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = x - 5 \\ y = 3t - 1 \end{cases}$

$\therefore\ y = 3(x - 5) - 1 \Rightarrow y = 3x - 16$
e

$s \begin{cases} x = 2k \\ y = 1 - 2k \end{cases} \Rightarrow x + y = 1$

$\therefore\ y = -x + 1$
Portanto, as equações reduzidas das retas r e s são (r) $y = 3x - 16$ e (s) $y = -x + 1$.
As coordenadas do ponto comum às retas r e s são as coordenadas da solução do sistema:

$$\begin{cases} y = 3x - 16 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{17}{4} \text{ e } y = -\frac{13}{4}$$

Logo, o ponto comum às retas r e s é $\left(\frac{17}{4}, -\frac{13}{4}\right)$.

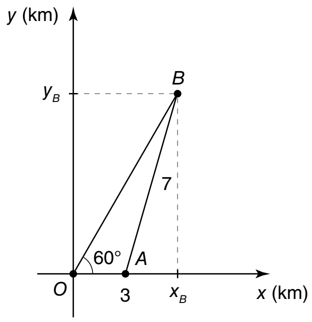
67. Inicialmente, vamos obter a equação reduzida da reta r representada pelo sistema:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = x - 2 \\ y = 3t \end{cases}$$

Substituindo t por $x - 2$ na segunda equação do sistema, obtemos $y = 3(x - 2)$, ou seja, $y = 3x - 6$, que é a equação reduzida da reta r.
Como as retas de equações $y = 3x - 6$ e $6x - 2y - 1 = 0$ têm o mesmo coeficiente angular igual a 3, concluímos que elas são paralelas.
Alternativa **b**.

Exercícios contextualizados

68. a) Do enunciado, temos a seguinte figura:



Assim, $O(0, 0)$ e $A(3, 0)$.
Como $m(A\widehat{O}B) = 60°$, temos:
$\frac{y_B}{x_B} = \text{tg } 60° \Rightarrow y_B = \sqrt{3}\,x_B$
Logo:
$AB = 7 \Rightarrow \sqrt{(x_B - 3)^2 + (y_B - 0)^2} = 7$
$\therefore\ x_B^2 - 6x_B + 9 + \left(\sqrt{3}\,x_B\right)^2 = 49$
$\therefore\ 2x_B^2 - 3x_B - 20 = 0$
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-20) = 169$
$\therefore\ x_B = \frac{-(-3) \pm 13}{2 \cdot 2} \Rightarrow x_B = 4 \text{ ou } x_B = -\frac{5}{2}$
Como B é um ponto do primeiro quadrante, $x_B > 0$; logo, $x_B = 4$. Portanto:
$y_B = 4\sqrt{3}$
Assim, $B\left(4, 4\sqrt{3}\right)$.

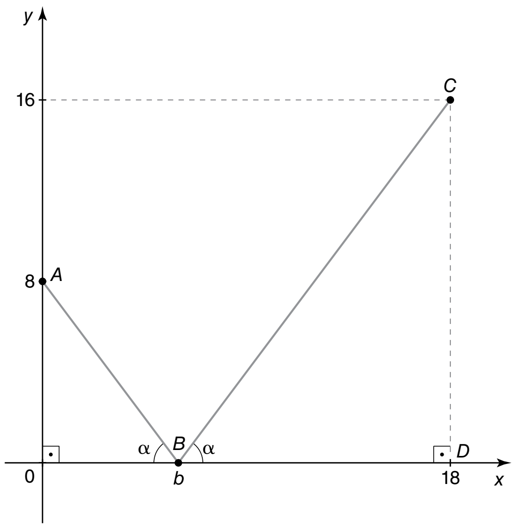
b) O comprimento dessa rua, em quilômetro, é o comprimento do segmento $\overline{BC}$, em que $B\left(4, 4\sqrt{3}\right)$ e $C(4, 3)$.
$BC = \sqrt{(4 - 4)^2 + \left(4\sqrt{3} - 3\right)^2} = 4\sqrt{3} - 3$
Portanto, o comprimento da rua é $\left(4\sqrt{3} - 3\right)$ km, ou seja, aproximadamente 3,93 km.

69. a) Como 40 minutos equivalem a $\frac{2}{3}$ da hora, temos que o ponto $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ indica a chegada das duas pessoas ao local do encontro, exatamente aos 40 minutos.

b) Como 20 minutos equivalem a $\frac{1}{3}$ da hora e 30 minutos equivalem a $\frac{1}{2}$ hora, temos que o ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ indica que B chegou aos 20 minutos e A chegou aos 30 minutos.

70. O ponto T, onde será instalada a torre, equidista de A e B; logo, T pertence à mediatriz do segmento $\overline{AB}$. Essa mediatriz corta, perpendicularmente, o segmento $\overline{AB}$ no ponto que equidista de A e B; logo, a abscissa de T é 50. Assim, indicando por b a ordenada de T, temos $T(50, b)$. O ponto T também equidista de B e C. Logo:
$TB = TC \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{(50 - 70)^2 + (b - 20)^2} = \sqrt{(50 - 60)^2 + (b - 50)^2}$
$\therefore\ 400 + b^2 - 40b + 400 = 100 + b^2 - 100b + 2.500 \Rightarrow$
$\Rightarrow b = 30$
Concluímos, então, que $T(50, 30)$.
Alternativa **e**.

71. **a)** A medida α do ângulo agudo formado pelo raio incidente e o eixo Ox é igual à medida do ângulo agudo formado pelo raio refletido e o eixo Ox, conforme mostra o esquema abaixo, em que b é a abscissa do ponto B.



Pelo caso AA, constatamos que os triângulos OAB e DCB são semelhantes. Dessa semelhança, temos:

$$\frac{16}{8} = \frac{18 - b}{b} \Rightarrow b = 6$$

Concluímos, assim, que $B(6, 0)$.

b) Temos que:

$$AB + BC = \sqrt{(6 - 0)^2 + (0 - 8)^2} +$$

$$+ \sqrt{(18 - 6)^2 + (16 - 0)^2} = \sqrt{100} + \sqrt{400} = 30$$

Logo, a distância percorrida pela luz no trajeto ABC é 30 cm.

72. Vamos resolver esse problema de dois modos.

1º modo

Como a reta passa pelos pontos (5, 12) e (11, −3), seu coeficiente angular é:

$$m = \frac{-3 - 12}{11 - 5} = -\frac{5}{2}$$

Assim, a equação da reta que passa por esses pontos é:

$$y - 12 = -\frac{5}{2}(x - 5)$$

Logo, uma equação do segmento de reta é:

$5x + 2y - 49 = 0$, para $x \in \mathbb{R}$, com $5 \leqslant x \leqslant 11$

a) Para $x = 7$, temos:

$$5 \cdot 7 + 2y - 49 = 0 \Rightarrow y = 7$$

Logo, às 7 h desse dia a temperatura era 7 °C.

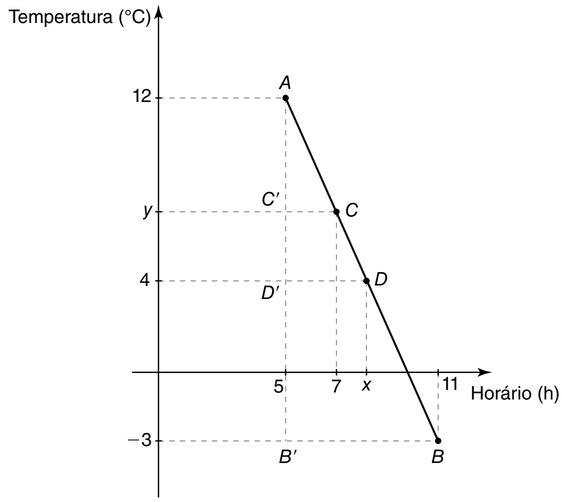
b) Para $y = 4$, temos:

$$5x + 2 \cdot 4 - 49 = 0 \Rightarrow x = \frac{41}{5} = 8{,}2$$

Logo, a temperatura atingiu 4 °C às 8 h 12 min desse dia.

2º modo

Observe a figura:



a) Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AC'}{AB'} = \frac{C'C}{B'B} \Rightarrow \frac{12 - y}{12 - (-3)} = \frac{7 - 5}{11 - 5}$$

$\therefore y = 7$

Logo, às 7 h desse dia a temperatura era 7 °C.

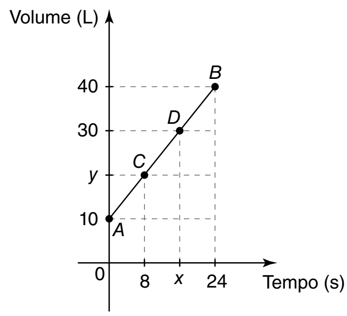
b) Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AD'}{AB'} = \frac{D'D}{B'B} \Rightarrow \frac{12 - 4}{12 - (-3)} = \frac{x - 5}{11 - 5}$$

$\therefore x = \frac{41}{5}$

Logo, a temperatura atingiu 4 °C às $\frac{41}{5}$ h desse dia, ou seja, às 8 h 12 min.

73. **a)** Pelo teorema de Tales, temos:



$$\frac{BC}{BA} = \frac{40 - y}{40 - 10} = \frac{24 - 8}{24 - 0}$$

$\therefore y = 20$

Logo, após 8 segundos o tanque continha 20 L de água.

b) Queremos determinar o tempo x em que o volume de água no tanque é 75% de 40 L, ou seja, 30 L.

Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{BD}{BA} = \frac{40 - 30}{40 - 10} = \frac{24 - x}{24 - 0}$$

$\therefore x = 16$

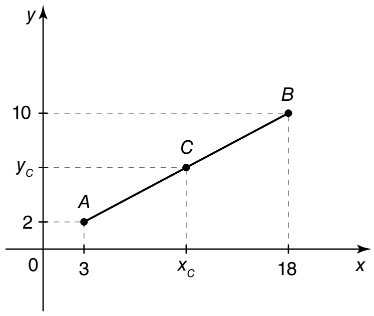
Logo, o tanque atingiu 75% da capacidade total depois de 16 segundos.

74. **a)** A distância entre A e B é dada por:

$AB = \sqrt{(3-18)^2 + (2-10)^2} = \sqrt{225+64} = 17$

Logo, como a velocidade do projétil era constante, essa velocidade era: $\dfrac{17 \text{ km}}{50 \text{ s}} = 0{,}34$ km/s

b) Como a velocidade do projétil era constante, na metade do tempo ele havia percorrido metade da distância de A a B; assim, o ponto C em que o projétil estava após 25 segundos é tal que:



$\dfrac{AC}{CB} = 1$

Portanto, pelo teorema de Tales, temos:

$\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{x_C - 3}{18 - x_C} \Rightarrow 1 = \dfrac{x_C - 3}{18 - x_C}$

$\therefore x_C = \dfrac{21}{2}$

$\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{y_C - 2}{10 - y_C} \Rightarrow 1 = \dfrac{y_C - 2}{10 - y_C}$

$\therefore y_C = 6$

Portanto, 25 segundos após passar por A, o projétil estava no ponto $P\left(\dfrac{21}{2}, 6\right)$.

75. Representando no plano cartesiano os pontos $A(2010, 25)$ e $B(2013, 49)$, esquematizamos:

Assim:

- O ponto $C(2011, x)$ divide $\overline{AB}$, de A para B, na razão $\dfrac{1}{2}$; logo:

  $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{x - 25}{49 - x} = \dfrac{1}{2}$

  $\therefore x = 33$

  Ou seja, a produção x de etanol em 2011 foi de 33 dam^3.

- O ponto $D(2012, y)$ é ponto médio de $\overline{CB}$; logo:

  $y = \dfrac{33 + 49}{2} = 41$

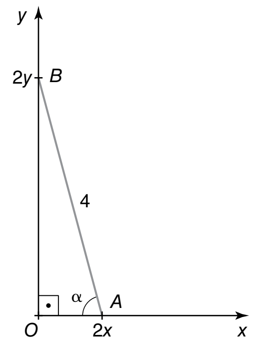
  Ou seja, a produção y de etanol em 2012 foi de 41 dam^3.

- Sendo $E(2014, z)$, o ponto B é ponto médio de $\overline{DE}$; logo:

  $\dfrac{41 + z}{2} = 49 \Rightarrow z = 57$

  Ou seja, a produção z de etanol em 2014 foi de 57 dam^3.

76. **a)** Sejam A e B os pontos de apoio da haste nos eixos Ox e Oy, respectivamente. Como $M(x, y)$ é ponto médio de $\overline{AB}$, temos que $A(2x, 0)$ e $B(0, 2y)$. Assim, esquematizamos:



No triângulo AOB, temos:

$$\begin{cases} \cos \alpha = \dfrac{2x}{4} \\ \operatorname{sen} \alpha = \dfrac{2y}{4} \end{cases} \Rightarrow x = 2 \cos \alpha \text{ e } y = 2 \operatorname{sen} \alpha$$

Assim, o ponto médio M da haste, com coordenadas em função de α, é dado por:

$M(2 \cos \alpha, 2 \operatorname{sen} \alpha)$

b) $2 \operatorname{sen} \alpha - 2 \cos \alpha = \sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (2 \operatorname{sen} \alpha - 2 \cos \alpha)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$

$\therefore 4 \operatorname{sen}^2 \alpha - 8 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 - 4 \operatorname{sen}(2\alpha) = 2$

$\therefore \operatorname{sen}(2\alpha) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ rad ou $2\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$ rad

$\therefore \alpha = \dfrac{\pi}{12}$ rad ou $\alpha = \dfrac{5\pi}{12}$ rad

77. Indicando o vértice C por $C(x_C, y_C)$, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{5 + 13 + x_C}{3} = 6 \\ \dfrac{0 + 0 + y_C}{3} = 4 \end{cases} \Rightarrow x_C = 0 \text{ e } y_C = 12$$

Logo, $C(0, 12)$.

78. **a)** O coeficiente angular m da reta que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(40, 2)$ é dado por:

$m = \dfrac{2 - 0}{40 - 0} = 0{,}05$

b) O coeficiente angular calculado no item **a** representa a taxa de variação do valor a ser pago por minuto. Assim, o coeficiente angular 0,05 representa que em cada minuto o valor a ser pago tem um acréscimo de R$ 0,05.

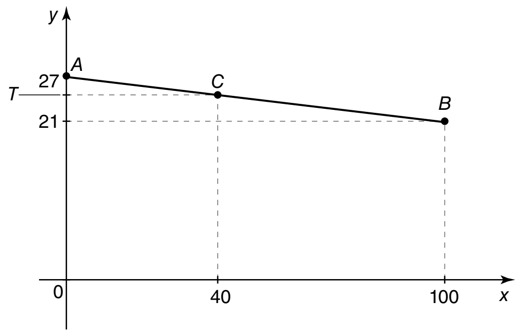
79. Como $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$, temos que o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é o mesmo da reta $\overleftrightarrow{CD}$. Assim, indicando o ponto D por $D(5, q)$, temos:

$\dfrac{2 - 1}{2 - 0} = \dfrac{q - 2}{5 - 4} \Rightarrow q = 2{,}5$

Logo, havia 2.500 pessoas desempregadas após 5 meses do início das observações.

Alternativa **d**.

80. O gráfico a seguir descreve a variação da temperatura y, em grau Celsius, em função da profundidade x, em metro.



Sendo T a temperatura a 40 m de profundidade, temos, pelo teorema de Tales:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{40}{100 - 40}$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{27 - T}{T - 21}$$

Logo:

$$\frac{40}{60} = \frac{27 - T}{T - 21} \Rightarrow T = \frac{123}{5} = 24{,}6$$

Portanto, a temperatura da água a 40 m de profundidade é 24,6 °C.

81. Temos que a taxa de variação da temperatura a cada ano é dada por:

$$\frac{5{,}8\ °C}{100} = 0{,}058\ °C$$

Assim, a equação que relaciona o aumento de temperatura (y) em função dos números de anos (x) é:

$y = 0{,}058x$

a) $y = 0{,}058 \cdot 54 = 3{,}132$

Assim, o percentual de aumento na temperatura será:

$$\frac{3{,}132}{5{,}8} = 0{,}54 \text{ ou } 54\%$$

b) $1{,}7 = 0{,}058x \Rightarrow x \approx 29{,}31$

Logo, um acréscimo de 1,7 °C à temperatura atual acontecerá daqui a aproximadamente 29 anos.

c) Admitindo a hipótese do item **b**, temos que a temperatura variou 1,7 °C em aproximadamente 29 anos. Logo, na primeira década a variação de temperatura foi de, aproximadamente, 0,59 °C.

82. Indicando por $(85, q)$ o ponto correspondente à quantidade q, em mililitro, do medicamento que deve receber uma pessoa de 85 kgf, temos que esse ponto deve ser colinear com os pontos (25, 12) e (65, 40); logo:

$$\frac{q - 12}{85 - 25} = \frac{40 - 12}{65 - 25} \Rightarrow q = 54$$

Assim, a pessoa deve tomar 54 mL do medicamento. Como essa quantidade equivale a 6 doses, concluímos que cada dose contém 9 mL.

Alternativa **b**.

83. Sendo y o número de espécies ameaçadas em 2011, o ponto (2011, y) deve pertencer à reta que passa pelos extremos superiores das barras verticais que formam o gráfico. Assim, os pontos (1983, 239), (2007, 461) e (2011, y) devem ser colineares e, portanto:

$$\frac{461 - 239}{2007 - 1983} = \frac{y - 461}{2011 - 2007} \Rightarrow \frac{222}{24} = \frac{y - 461}{4}$$

$\therefore\ y = 498$

Logo, se foi mantida a tendência de crescimento, em 2011 havia 498 espécies ameaçadas de extinção.

Alternativa **c**.

84. **a)** A reta passa pelos pontos (30, 36) e (39, 45). Assim, seu coeficiente angular é:

$$m = \frac{45 - 36}{39 - 30} = 1$$

Logo, uma equação da reta é:

$y - 36 = 1(x - 30) \Rightarrow y = x + 6$

b) Para o momento em que foi acionado o gatilho, ou seja, $x = 0$, temos:

$y = 0 + 6 \Rightarrow y = 6$

Logo, no instante em que foi acionado o gatilho, havia 6 L de combustível no tanque.

c) Para $x = 65$, temos:

$y = 65 + 6 \Rightarrow y = 71$

Assim, a capacidade do tanque é 71 L.

85. O coeficiente angular m da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é dado por:

$$m = \frac{38 - 23}{15 - 10} = 3$$

Com esse coeficiente angular e o ponto $A(10, 23)$, obtemos a equação de $\overleftrightarrow{AB}$:

$y - 23 = 3(x - 10) \Rightarrow y = 3x - 7$

Alternativa **c**.

86. **a)** O gráfico está contido na reta r, que passa pelos pontos $A(0, 36)$ e $B(40.000, -44)$. Assim, temos:

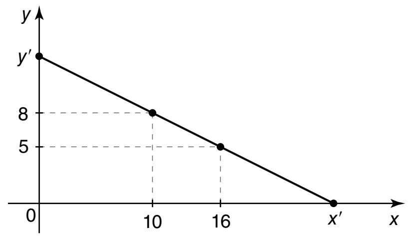
$$r \begin{cases} A\,(0, 36) \\ m = \dfrac{36 - (-44)}{0 - 40.000} = -\dfrac{1}{500} \end{cases}$$

Logo, uma equação da reta r é:

$$y - 36 = -\frac{1}{500}(x - 0) \text{ ou, ainda, } y = -\frac{x}{500} + 36$$

b) Observando que, para $x = 20.000$, se obtém $y = -4$, concluímos que a 20.000 pés de altitude a temperatura é -4 °C.

87. **a)** O gráfico a seguir descreve a massa y, em quilograma, em função do tempo x, em dia, decorrido após a conexão.



O coeficiente angular da reta que contém esse gráfico é:

$$m = \frac{8 - 5}{10 - 16} = -\frac{1}{2}$$

Logo, a equação reduzida da reta é:

$$y - 8 = -\frac{1}{2}(x - 10) \Rightarrow y = -\frac{x}{2} + 13$$

b) Para o momento em que o botijão foi conectado ao fogão, ou seja, $x = 0$, temos:

$$y' = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 13 \Rightarrow y' = 13$$

Portanto, no momento em que o botijão foi conectado ao fogão havia nele 13 kg de gás.

c) Para $y = 0$, temos:

$$0 = -\frac{1}{2}x' + 13 \Rightarrow x' = 26$$

Logo, todo o gás do botijão será consumido em 26 dias.

d) O coeficiente angular da reta é $-\frac{1}{2}$. Isso significa que, por dia, foi consumido 0,5 kg de gás.

88. a) A equação que expressa o custo total mensal em função do número de unidades produzidas é a equação da reta que passa pelos pontos (600, 1.100) e (800, 1.200). Essa equação é:

$$y - 1.100 = \left(\frac{1.200 - 1.100}{800 - 600}\right) \cdot (x - 600)$$

$$\therefore y = \frac{x}{2} + 800$$

b) O custo fixo é R$ 800,00.

c) O coeficiente angular da reta é $\frac{1}{2} = 0{,}5$. Isso significa que o custo é R$ 0,50 por caneta produzida.

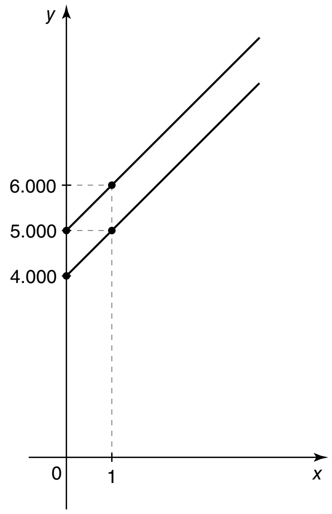
89. a) Para o capital de R$ 5.000,00, temos:

$$y = 5.000 + 0{,}2 \cdot 5.000 \cdot x \Rightarrow y = 5.000 + 1.000x$$

Para o capital de R$ 4.000,00, temos:

$$y = 4.000 + 0{,}25 \cdot 4.000 \cdot x \Rightarrow y = 4.000 + 1.000x$$

b)



c) Os montantes acumulados serão iguais quando:

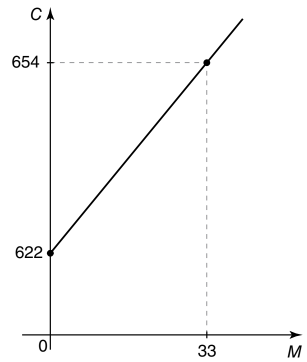
$5.000 + 1.000x = 4.000 + 1.000x \Rightarrow 5.000 = 4.000$ (Absurdo!)

Logo, os montantes nunca serão iguais.

Outro modo

Como os gráficos são semirretas paralelas distintas, concluímos que os montantes nunca serão iguais, pois os gráficos não têm ponto comum.

90. O gráfico a seguir descreve a quantidade C de anos cristãos em função da quantidade M de anos muçulmanos:



O coeficiente angular dessa reta é:

$$m = \frac{654 - 622}{33 - 0} = \frac{32}{33}$$

Logo, a equação reduzida da reta é:

$$C - 622 = \frac{32}{33}(M - 0) \Rightarrow C = \frac{32}{33}M + 622$$

$$\therefore C = M + 622 - \frac{M}{33}$$

Alternativa **a**.

91. Na equação da reta, deduzimos que, para $y = 0$, se obtém $x = -300$ e, para $x = 0$, obtém-se $y = 400$. Logo, $A(-300, 0)$ e $B(0, 400)$.

Assim, a distância AB, em quilômetro, é calculada por:

$$AB = \sqrt{[0 - (-300)]^2 + (400 - 0)^2} = \sqrt{250.000} = 500$$

Alternativa **b**.

92. a) A reta r_A, que contém o gráfico correspondente ao tanque A, passa pelos pontos (0, 110) e (10, 380):

$$r_A: \begin{cases} (0, 110) \\ m_{r_A} = \dfrac{380 - 110}{10 - 0} = 27 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_A: y - 110 = 27(x - 0)$$

Assim, a equação geral da reta r_A é:

$$27x - y + 110 = 0$$

A reta r_B, que contém o gráfico correspondente ao tanque B, passa pelos pontos (0, 120) e (10, 360):

$$r_B: \begin{cases} (0, 120) \\ m_{r_B} = \dfrac{360 - 120}{10 - 0} = 24 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_B: y - 120 = 24(x - 0)$$

Assim, a equação geral da reta r_B é:

$$24x - y + 120 = 0$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações de r_A e r_B, temos:

$$\begin{cases} 27x - y + 110 = 0 \\ 24x - y + 120 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{10}{3} \text{ e } y = 200$$

Concluímos, então, que o tempo decorrido a partir do instante em que foram abertas as torneiras até que os tanques ficaram com o mesmo volume foi $\frac{10}{3}$ min, ou seja, 3 min 20 s. Nesse instante, o volume de cada tanque era 200 L.

b) Para $x = 12$, na equação da reta r_A, temos:
$27 \cdot 12 - y + 110 = 0 \Rightarrow y = 434$
Logo, a capacidade do tanque *A* é 434 L.
Para $x = 15$, na equação da reta r_B, temos:
$24 \cdot 15 - y + 120 = 0 \Rightarrow y = 480$
Portanto, a capacidade do tanque *B* é 480 L.

93 Como a reta que contém *r* passa pelos pontos (0, 50.000) e (100, 60.000), seu coeficiente angular é:

$$m_r = \frac{60.000 - 50.000}{100} = 100$$

Assim, o custo de produção é:
$y - 50.000 = 100(x - 0) \Rightarrow y = 100x + 50.000$

Por outro lado, a reta que contém *s* passa pela origem e por (100, 15.000). Assim, a receita é dada por:

$$y = \frac{15.000}{100}x \Rightarrow y = 150x$$

a) Para que a receita se iguale ao custo de produção, devemos ter:
$100x + 50.000 = 150x \Rightarrow x = 1.000$
Logo, devem ser produzidas e vendidas 1.000 bicicletas.

b) Para se obter lucro, ou seja, a receita ultrapassar o custo de produção, devem ser vendidas mais de 1.000 bicicletas, ou seja, a indústria passará a ter lucro a partir de 1.001 bicicletas fabricadas e vendidas.

94. Entre os pontos apresentados nas alternativas, os únicos que pertencem à reta de equação $y = x + 4$ são $(-3, 1)$, $(0, 4)$ e $(2, 6)$. Calculando a distância de cada um desses pontos ao ponto $P(-5, 5)$, constatamos que o único cuja distância é menor que 5 é o ponto $B(-3, 1)$, pois:

$$PB = \sqrt{[-5 - (-3)]^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{20}$$

Alternativa **b**.

95. **a)** Dois pontos distintos da reta que contém o gráfico são (300, 28) e (600, 26). Assim, o coeficiente angular *m* dessa reta é dado por:

$$m = \frac{26 - 28}{600 - 300} = \frac{-2}{300} = -\frac{1}{150}$$

Com o ponto (300, 28) e o coeficiente angular $-\frac{1}{150}$, obtemos a equação reduzida da reta que contém esse gráfico:

$$T - 28 = -\frac{1}{150} \cdot (h - 300) \Rightarrow T = -\frac{h}{150} + 30$$

b) A temperatura no ponto *P* corresponde à temperatura ao nível do mar. Assim:

$$T = -\frac{0}{150} + 30 = 30$$

Logo, a temperatura no ponto *P* é 30 °C.

c) O coeficiente de *h* indica que a temperatura varia $-\frac{1}{150}$ °C para cada metro que a altitude aumenta.

d) O termo independente de *T* e *h* na equação representa a temperatura no nível do mar.

96. **a)** V, pois os coeficientes angulares *p* e *r* e os coeficientes lineares *q* e *s* são dados por:

$$p = \frac{105 - 100}{1 - 0} = 5,\ r = \frac{104 - 99}{1 - 0} = 5,$$

$q = 100$ e $s = 99$
Logo, $p = r = 5$ e $q = s + 1$.

b) V, pois as distâncias percorridas por *A* e *B* no início do monitoramento são as medidas, em quilômetro, expressas pelos coeficientes lineares *q* e *s*, respectivamente, citados no item **a**.

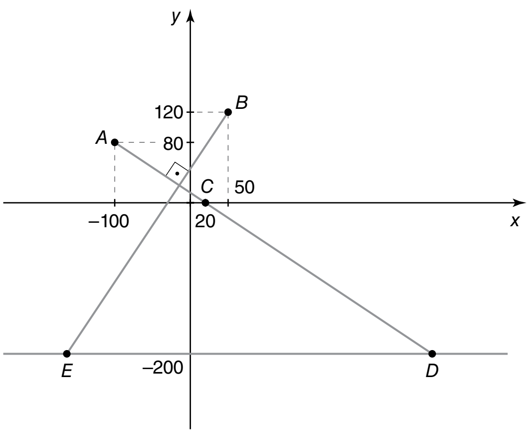
c) F, conforme a justificativa a seguir.
Os coeficientes angulares *p* e *q*, obtidos no item **a**, representam a velocidade dos dois carros, em quilômetro por minuto. Como essas velocidades são iguais, conclui-se que o carro *B* não ultrapassou *A*.
(Outro argumento: Como as retas que contêm os segmentos *a* e *b* são paralelas, a distância entre os carros se manteve constante; logo, o carro *B* não ultrapassou *A*.)

d) V, conforme a justificativa a seguir.
Os coeficientes angulares *p* e *q*, obtidos no item **a**, representam a velocidade dos dois carros, em quilômetro por minuto; logo, a velocidade de cada um deles era de 5 km/min. A diferença entre os coeficientes lineares *q* e *s*, citados no item **a**, é a distância, em quilômetro, que se manteve constante entre os carros; logo, a distância entre eles se manteve em 1 km.
Assim, depois de o carro *A* cruzar a linha de chegada, o carro *B* percorreu mais 1 km à velocidade de 5 km/min; logo, o carro *B* chegou em segundo lugar, 0,2 min, ou seja, 12 s, depois do carro *A*.

e) F, conforme justificativa do item **b**.

f) F, pois a distância *d* entre os carros *A* e *B* se manteve constante em 1 km; logo, o gráfico da função que expressa *d* em função do tempo *t* é um segmento de reta horizontal; portanto, o coeficiente angular da reta que o contém é 0 (zero).

97. Esquematizando essa situação, temos:



- Obtendo o ponto *D*:
O coeficiente angular m_{AC} da reta $\overleftrightarrow{AC}$ é dado por:

$$m_{AC} = \frac{80 - 0}{-100 - 20} = -\frac{2}{3}$$

Com esse coeficiente angular e o ponto $C(20, 0)$, obtemos a equação de $\overleftrightarrow{AC}$:

$$y - 0 = -\frac{2}{3}(x - 20) \Rightarrow y = -\frac{2x}{3} + \frac{40}{3}$$

O ponto D é a solução do sistema:

$$\begin{cases} y = -\frac{2x}{3} + \frac{40}{3} \\ y = -200 \end{cases} \Rightarrow x = 320 \text{ e } y = -200$$

Logo, $D(320, -200)$.

- Obtendo o ponto E:
  O coeficiente angular da reta r, que passa por B e é perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$, é o oposto do inverso do coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AC}$, isto é:

$$m_r = -\frac{1}{m_{AC}} \Rightarrow m_r = \frac{3}{2}$$

Com esse coeficiente angular e o ponto $B(50, 120)$, obtemos a equação de r:

$$y - 120 = \frac{3}{2}(x - 50) \Rightarrow y = \frac{3x}{2} + 45$$

O ponto E é a solução do sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{3x}{2} + 45 \\ y = -200 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{490}{3} \text{ e } y = -200$$

Logo, $E\left(-\frac{490}{3}, -200\right)$.

98. O gráfico (I) passa pelos pontos (0, 1.000) e (10; 1.001,8). Assim, o coeficiente angular da reta que contém esse gráfico é:

$$m = \frac{1.001{,}8 - 1.000}{10 - 0} = 0{,}18$$

Uma equação da reta é:

$$V - 1.000 = 0{,}18(T - 0) \Rightarrow T = \frac{V - 1.000}{0{,}18} \quad \text{(I)}$$

O gráfico (II) passa por (0, 40) e (10, 90). Assim, o coeficiente angular da reta que contém esse gráfico é:

$$m = \frac{90 - 40}{10 - 0} = 5$$

Uma equação da reta é:

$$c - 40 = 5(T - 0) \Rightarrow T = \frac{c - 40}{5} \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), temos:

$$\frac{V - 1.000}{0{,}18} = \frac{c - 40}{5} \Rightarrow 5V - 5.000 = 0{,}18c - 7{,}2$$

$$\therefore V = 0{,}036c + 998{,}56$$

Portanto, uma equação que expressa v em função de c é $V = 0{,}036c + 998{,}56$, para $c \in \mathbb{R}$, com $40 \leqslant c \leqslant 90$.

99. $$\begin{cases} h = 10 - 0{,}2t \\ V = 100 - 8t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 50 - 5h & \text{(I)} \\ t = \frac{100 - V}{8} & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I) e (II), temos:

$$50 - 5h = \frac{100 - V}{8} \Rightarrow 400 - 40h = 100 - V$$

$$\therefore V = 40h - 300$$

100. a) No instante inicial, a partícula A estava na posição correspondente ao ponto (0, 2), e a partícula B, ao ponto (5, 1).

b) Para a partícula A, temos:

$$A: \begin{cases} x = 3t \\ y = t + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{3} & \text{(I)} \\ t = y - 2 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I) e (II), temos:

$$\frac{x}{3} = y - 2 \Rightarrow x - 3y + 6 = 0$$

Logo, a equação cartesiana da partícula A é $x - 3y + 6 = 0$.

Para a partícula B, temos:

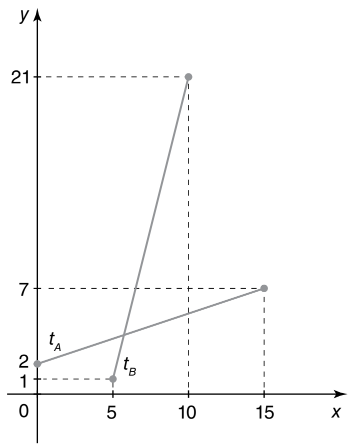
$$B: \begin{cases} x = t + 5 \\ y = 4t + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = x - 5 & \text{(III)} \\ t = \frac{y - 1}{4} & \text{(IV)} \end{cases}$$

De (III) e (IV), temos:

$$x - 5 = \frac{y - 1}{4} \Rightarrow 4x - y - 19 = 0$$

Logo, a equação cartesiana da partícula B é $4x - y - 19 = 0$

c) Representando por t_A e t_B as trajetórias das partículas A e B, respectivamente, temos:



d) Representando por d_A e d_B as distâncias percorridas pelas partículas A e B, respectivamente, temos:

$$d_A = \sqrt{(15 - 0)^2 + (7 - 2)^2} = 5\sqrt{10}$$

$$d_B = \sqrt{(10 - 5)^2 + (21 - 1)^2} = 5\sqrt{17}$$

e) Não, pois passaram pelo ponto comum às trajetórias em instantes diferentes.

101. Temos o sistema de equações paramétricas:

$$\begin{cases} c = 8t \\ d = 80t \end{cases}$$

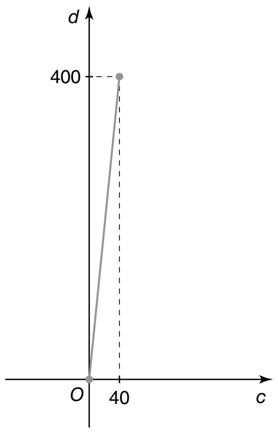
Para $t = 0$, temos $c = 0$ e $d = 0$; logo, o ponto (0, 0) corresponde ao início da viagem.

Para $t = 5$, temos $c = 40$ e $d = 400$; logo, o ponto (40, 400) corresponde ao fim da viagem.

Isolando t na primeira equação, obtemos:

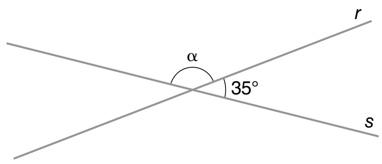
$$\begin{cases} t = \frac{c}{8} & \text{(I)} \\ d = 80t & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), chegamos à equação $d = 10c$, com o que deduzimos que o gráfico dos pontos (c, d) é parte de uma reta. Assim, concluímos:



Pré-requisitos para o capítulo 3

1. Esquematizando essa situação pela figura a seguir, em que α é a medida, em grau, do ângulo obtuso formado por r e s:



Assim, temos que: $\alpha + 35° = 180° \Rightarrow \alpha = 145°$

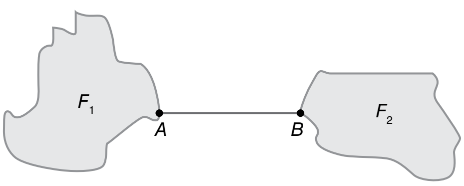
2. Em qualquer triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos que não são adjacentes a ele. Assim, temos que: $\theta = \alpha + \beta$

Alternativa **b**.

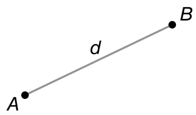
3. $\text{tg}\,(\alpha - \beta) = \dfrac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{tg}\,(\alpha - \beta) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{2}{9}$$

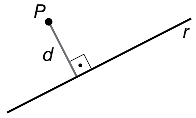
4. a) A distância entre as duas figuras geométricas F_1 e F_2 é a medida do menor segmento de reta que tem um extremo em F_1 e o outro extremo em F_2.



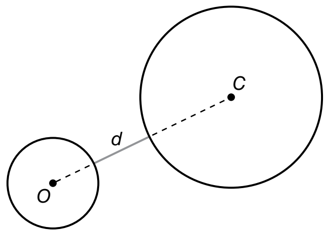
b) I.



II.



III.



Trabalhando em equipe

Matemática sem fronteiras

1. As equações das retas c e r são, respectivamente: $y = 10.000 + 5x$ e $y = 9x$. Assim, o *break-even point*, representado no gráfico pelo ponto B, é a solução do sistema abaixo:

$$\begin{cases} y = 10.000 + 5x \\ y = 9x \end{cases} \Rightarrow x = 2.500 \text{ e } y = 22.500$$

Logo, $B(2.500, 22.500)$.

2. O *break-even point*, obtido no item **a**, informa que, produzindo e vendendo 2.500 canetas, a receita obtida, que é de R$ 22.500,00, é igual ao custo de produção. Assim, o número mínimo de canetas que devem ser produzidas e vendidas para que a indústria tenha lucro é 2.501.

Análise da resolução

COMENTÁRIO: A resolução está errada porque o aluno esqueceu que sen t e cos t assumem valores apenas no intervalo $[-1, 1]$; portanto, o gráfico pedido não pode ser toda a reta r.

Resolução correta:

Adicionando, membro a membro, as equações do sistema:

$$\begin{cases} x = \text{sen}^2\, t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$$

Assim:

$x + y = \text{sen}^2\, t + \cos^2 t \Rightarrow x + y = 1$

Como $0 \leqslant \text{sen}^2\, t \leqslant 1$ e $0 \leqslant \cos^2 t \leqslant 1$, concluímos que o gráfico pedido é o segmento contido na reta $x + y = 1$, com $0 \leqslant x \leqslant 1$ e $0 \leqslant y \leqslant 1$, ou seja: