A CONQUISTA DA MATEMÁTICA

7

JOSÉ RUY GIOVANNI JÚNIOR
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP).
Professor e assessor de Matemática em escolas de Ensino Fundamental e Médio desde 1985.

BENEDICTO CASTRUCCI
(Falecido em 2 de janeiro de 1995)
Bacharel e licenciado em Ciências Matemáticas pela Universidade de São Paulo (USP).
Foi professor de Matemática da Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP) e da Universidade de São Paulo (USP).
Foi professor de Matemática em escolas públicas e particulares de Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Ensino Fundamental – Anos Finais
Componente curricular: Matemática

FTD

4ª edição – São Paulo – 2018

FTD

Diretor editorial	Antonio Luiz da Silva Rios
Diretora editorial adjunta	Silvana Rossi Júlio
Gerente editorial	Roberto Henrique Lopes da Silva
Editor	João Paulo Bortoluci
Editores assistentes	Adriano Rosa Lopes, Carlos Eduardo Bayer Simões Esteves, Diana Santos, Janaina Bezerra Pereira, Juliana Montagner, Luís Felipe Porto Mendes, Marcos Antônio Silva
Assessoria	Cristiane Boneto, Flávia Milão Silva, Francisco Mariani Casadore, Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura, Marcelo Eduardo Pereira, Patricia Furtado
Gerente de produção editorial	Mariana Milani
Coordenador de produção editorial	Marcelo Henrique Ferreira Fontes
Gerente de arte	Ricardo Borges
Coordenadora de arte	Daniela Máximo
Projeto gráfico	Carolina Ferreira, Juliana Carvalho
Projeto de capa	Sergio Cândido
Foto de capa	Natalya Yudina/Shutterstock.com
Supervisora de arte	Isabel Cristina Ferreira Corandin
Editora de arte	Nadir Fernandes Racheti, Dayane Santiago
Diagramação	Débora Jóia, Eduardo Benetorio, Gabriel Basaglia, José Aparecido A. da Silva, Lucas Trevelin
Tratamento de imagens	Ana Isabela Pithan Maraschin, Eziquiel Racheti
Coordenadora de ilustrações e cartografia	Marcia Berne
Ilustrações	Alex Argozino, Alex Silva, Bentinho, Dani Mota, Daniel Almeida, Daniel Bogni, Dayane Raven, Dnepwu, Ilustra Cartoon, Lucas Farauj, Manzi, Marcos Guilherme, Marcos Machado, MW Editora E Ilustrações, Renato Bassani, Wandson Rocha
Cartografia	Allmaps, Renato Bassani, Sonia Vaz
Coordenadora de preparação e revisão	Lilian Semenichin
Supervisora de preparação e revisão	Maria Clara Paes
Revisão	Ana Lucia Horn, Carolina Manley, Cristiane Casseb, Edna Viana, Giselle Mussi de Moura, Miyuki Kishi, Jussara R. Gomes, Kátia Cardoso, Lilian Vismari, Lucila V. Segóvia, Renato A. Colombo Jr., Solange Guerra, Yara Affonso
Supervisora de iconografia e licenciamento de textos	Elaine Bueno
Iconografia	Rosa André
Licenciamento de textos	Carla Marques, Vanessa Trindade
Supervisora de arquivos de segurança	Silvia Regina E. Almeida
Diretor de operações e produção gráfica	Reginaldo Soares Damasceno

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Giovanni Júnior, José Ruy
A conquista da matemática : 7º ano : ensino fundamental : anos finais / José Ruy Giovanni Júnior, Benedicto Castrucci. — 4. ed. — São Paulo : FTD, 2018.

"Componente curricular: Matemática."
ISBN 978-85-96-01915-6 (aluno)
ISBN 978-85-96-01916-3 (professor)

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Castrucci, Benedicto. II. Título.

18-20687 CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino fundamental 372.7
Cibele Maria Dias – Bibliotecária – CRB-8/9427

EDITORA FTD.
Rua Rui Barbosa, 156 – Bela Vista – São Paulo – SP
CEP 01326-010 – Tel. 0800 772 2300
Caixa Postal 65149 – CEP da Caixa Postal 01390-970
www.ftd.com.br
central.relacionamento@ftd.com.br

A - 601.720/19

Em respeito ao meio ambiente, as folhas deste livro foram produzidas com fibras obtidas de árvores de florestas plantadas, com origem certificada.

Impresso no Parque Gráfico da Editora FTD
CNPJ 61.186.490/0016-33
Avenida Antonio Bardella, 300
Guarulhos-SP – CEP 07220-020
Tel. (11) 3545-8600 e Fax (11) 2412-5375

APRESENTAÇÃO

Para que serve a Matemática? Por que aprender todo esse conteúdo de Matemática na escola? Essas são perguntas que um dia provavelmente passaram ou vão passar por sua cabeça.

A Matemática está presente em nossas vidas, desde uma simples contagem em uma brincadeira até nos modernos e complexos computadores. Ela ajuda a decidir se uma compra deve ser paga à vista ou a prazo, a entender o movimento da inflação e dos juros, a medir os índices de pobreza e riqueza de um país, a entender e cuidar do meio ambiente... sem falar nas formas e medidas, com suas aplicações na Arquitetura, na Arte e na Agricultura.

Mas, apesar de estar presente em tantos momentos importantes das nossas vidas, pode parecer, a princípio, que alguns temas da Matemática não têm aplicação imediata, o que pode gerar certo desapontamento em você.

Na verdade, a aplicação da Matemática no cotidiano ocorre como resultado do desenvolvimento e do aprofundamento de certos conceitos nela presentes. Como em todas as áreas de estudo, para entender e fazer Matemática é necessário dedicação e estudo.

Nesta coleção, apresentamos a você as linhas mestras desse processo com uma linguagem simples, mas sem fugir ao rigor que a Matemática exige.

Vivemos hoje em um mundo em constante e rápida transformação, e a Matemática pode nos ajudar a entender essas transformações. Ficar à parte do conhecimento matemático é, hoje, estar à margem das mudanças do mundo. Então, vamos entender e fazer Matemática!

Os autores

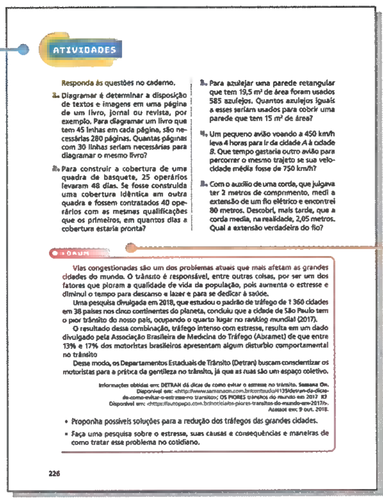
CONHEÇA SEU LIVRO

ABERTURA DE UNIDADE

As páginas de abertura introduzem o trabalho que será desenvolvido em cada Unidade. Nelas, você é convidado a observar textos e/ou imagens e relacioná-los com seus conhecimentos sobre o tema ou com contextos que serão articulados pelas questões.

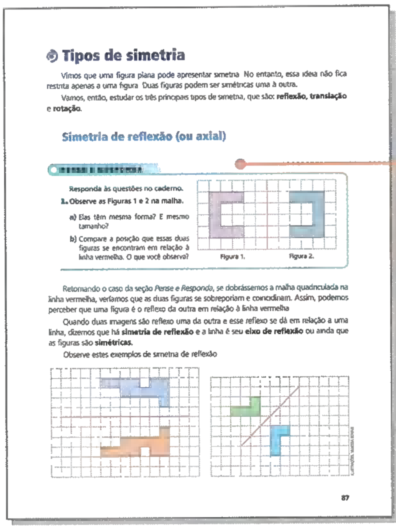
ATIVIDADES

Os exercícios apresentados são variados e visam à prática do conteúdo aprendido. Por vezes você se deparará com exercícios mais desafiadores, inclusive o de elaborar seus próprios exercícios e compartilhá-los com seus colegas.



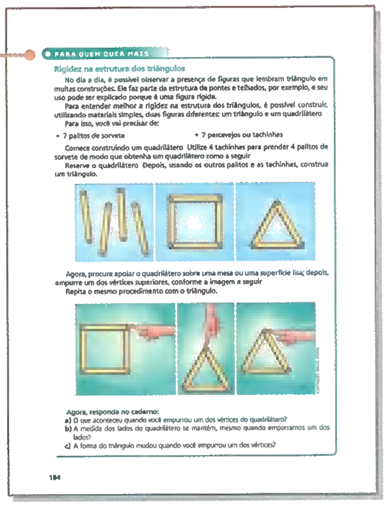
FÓRUM

Traz questões para debate, em que você e os colegas poderão praticar estratégias de argumentação.



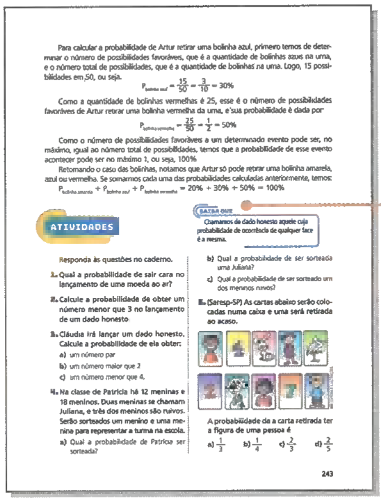
PENSE E RESPONDA

As atividades apresentadas valorizam a construção e a experimentação de suas próprias hipóteses.



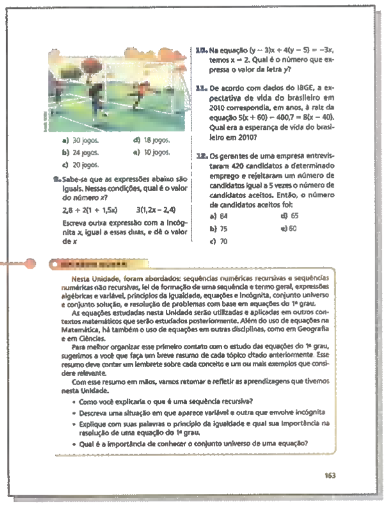
PARA QUEM QUER MAIS

Nesta seção você encontra informações complementares relacionadas ao conteúdo estudado.



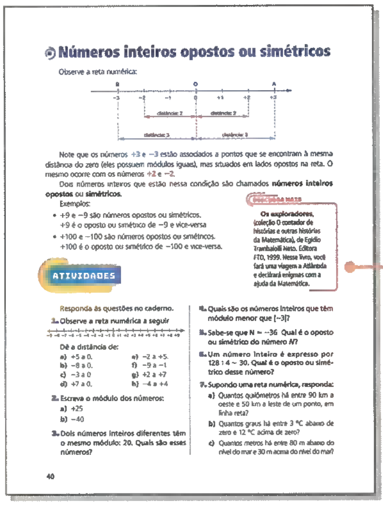
SAIBA QUE...

Traz informações complementares de maneira rápida e acessível.



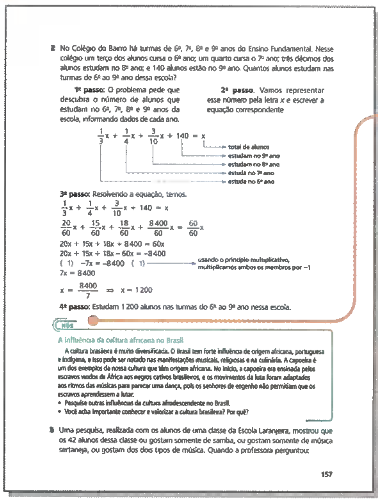
UM NOVO OLHAR

É o momento de você refletir sobre os conhecimentos que adquiriu ao longo da Unidade e analisar sua produção nas propostas de trabalho, ampliando seu comprometimento com a aprendizagem.



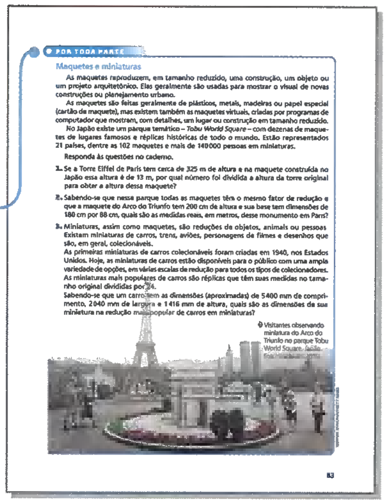
DESCUBRA MAIS

Apresenta indicações de livros e *sites* que propiciam o enriquecimento e aprofundam o conteúdo em questão.



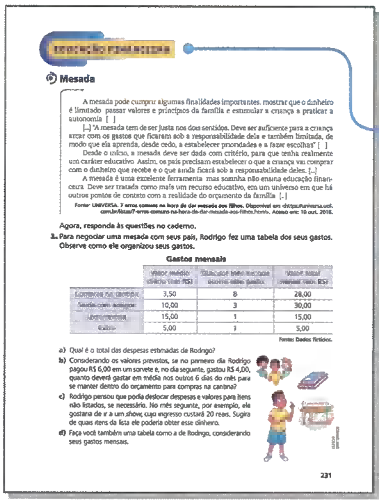
NÓS

Propicia a reflexão sobre valores, que será feita sempre em duplas, trios ou grupos.



POR TODA PARTE

Esta seção apresenta diversas situações que possibilitam ainda mais a conexão da Matemática com diversas áreas do conhecimento.

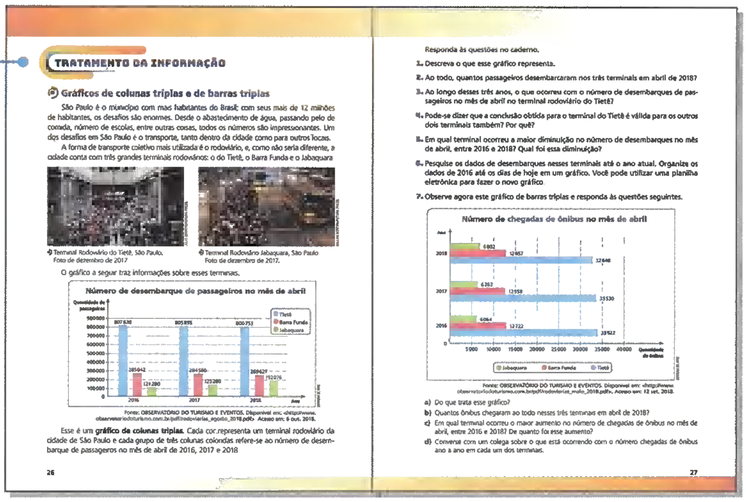


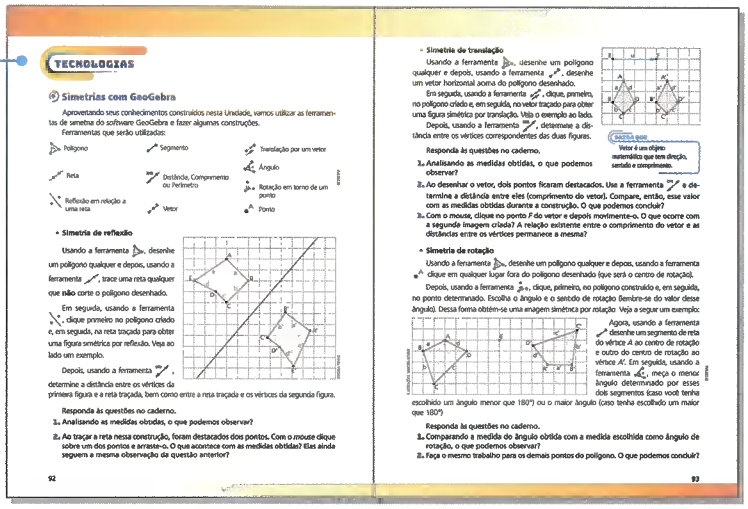
EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Com o objetivo de desenvolver reflexões sobre atitudes, como hábitos conscientes de consumo, a seção trata tópicos como controle de gastos, economia etc.

TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

Esta seção trabalha de forma organizada com propostas de tratamento e organização de dados, probabilidade e estatística.





TECNOLOGIAS

Simetrias com GeoGebra

TECNOLOGIAS

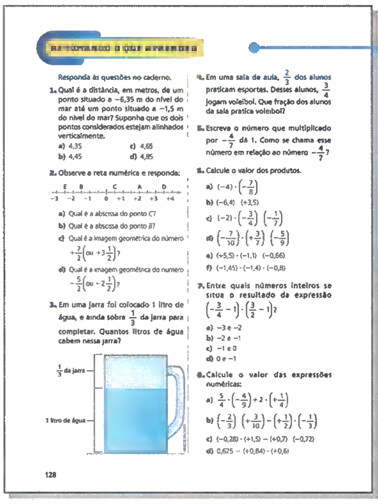
Nesta seção você verá como utilizar ferramentas tecnológicas na resolução de problemas ou questões matemáticas.

ATUALIDADES EM FOCO

Família e vida social

ATUALIDADES EM FOCO

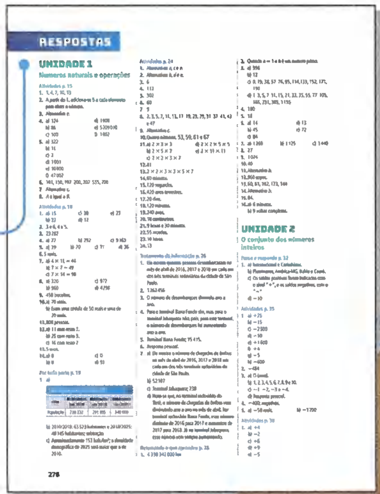
Nesta seção você encontrará o trabalho com temas atuais e de importância social. Será um momento de refletir sobre esses assuntos e de perceber como a Matemática ajuda a entender o mundo em que vivemos.



RETOMANDO O QUE APRENDEU

RETOMANDO O QUE APRENDEU

Esta seção visa sistematizar os temas trabalhados por meio de atividades de todos os conteúdos estudados na Unidade.



RESPOSTAS

RESPOSTAS

No final do livro estão todas as respostas das atividades propostas.

SUMÁRIO

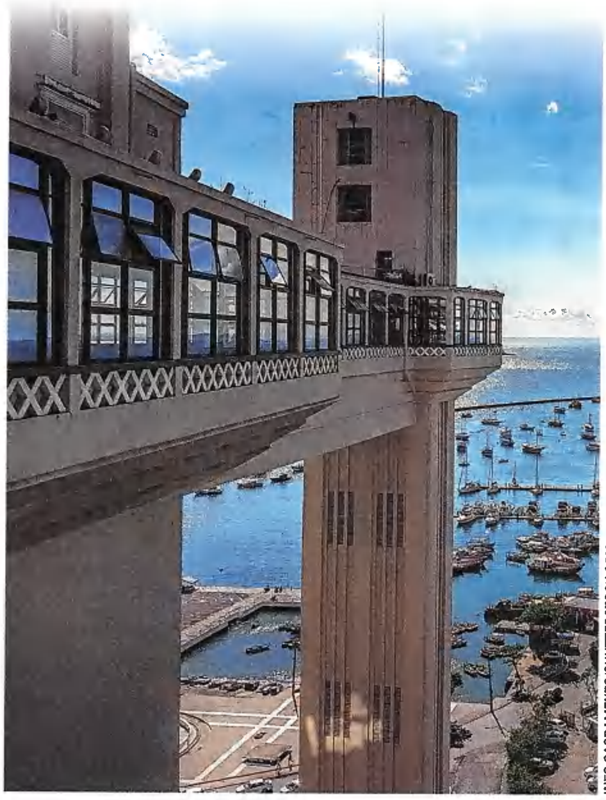
UNIDADE 4
O CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

UNIDADE 5
LINGUAGEM ALGÉBRICA E EQUAÇÕES

AGUSTINA CAMILION/SHUTTERSTOCK.COM

UNIDADE 6
FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS 164

UNIDADE 7
GRANDEZAS PROPORCIONAIS 200



INES SACRAMENTO/SHUTTERSTOCK.COM

STEPHEN POND/GETTY IMAGES

1 NÚMEROS NATURAIS E OPERAÇÕES

A **sequência de Fibonacci** é uma das mais famosas sequências de números naturais. Seu nome é uma homenagem ao matemático italiano Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, que a descreveu pela primeira vez, em 1202, em um estudo sobre a evolução de uma determinada população de coelhos.

Essa sequência é observada na natureza e em diversas áreas do conhecimento. Um exemplo é o famoso retângulo áureo. Veja como construir um e onde ele é observado.

1 Desenhe dois quadrados com medida de lado 1 u.c. e que compartilhem um dos lados.

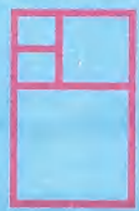
Juntos, eles formarão um retângulo 2 u.c. × 1 u.c.

CELIG/SHUTTERSTOCK.COM

2 Desenhe um quadrado com medida de lado 2 u.c. e que compartilhe um lado com o maior dos lados do retângulo formado no passo anterior.

Juntos, eles formarão um retângulo 3 u.c. × 2 u.c.

3 Desenhe um quadrado com medida de lado 3 u.c. e que compartilhe um lado com o maior dos lados do retângulo formado no passo anterior.

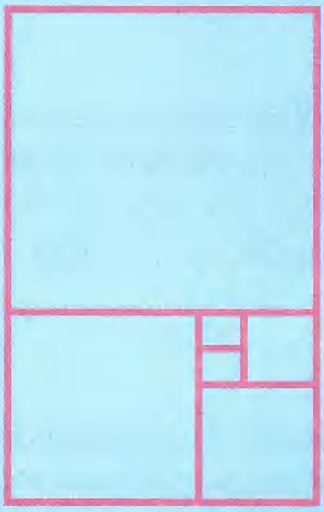


Juntos, eles formarão um retângulo 5 u.c. × 3 u.c.

4 Desenhe um quadrado com medida de lado 5 u.c. e que compartilhe um lado com o maior dos lados do retângulo formado no passo anterior.

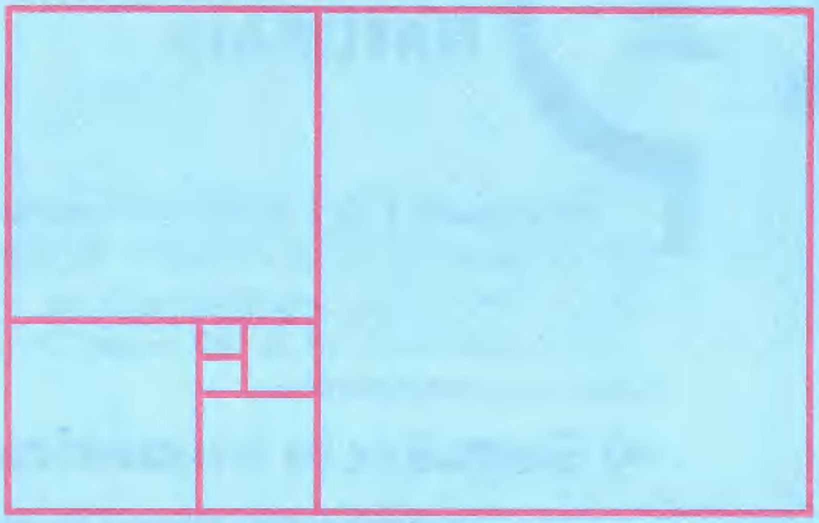
Juntos, eles formarão um retângulo 8 u.c. × 5 u.c.

5 Desenhe um quadrado com medida de lado 8 u.c. e que compartilhe um lado com o maior dos lados do retângulo formado no passo anterior.



Juntos, eles formarão um retângulo 13 u.c. × 8 u.c.

6 Desenhe um quadrado com medida de lado 13 u.c. e que compartilhe um lado com o maior dos lados do retângulo formado no passo anterior.

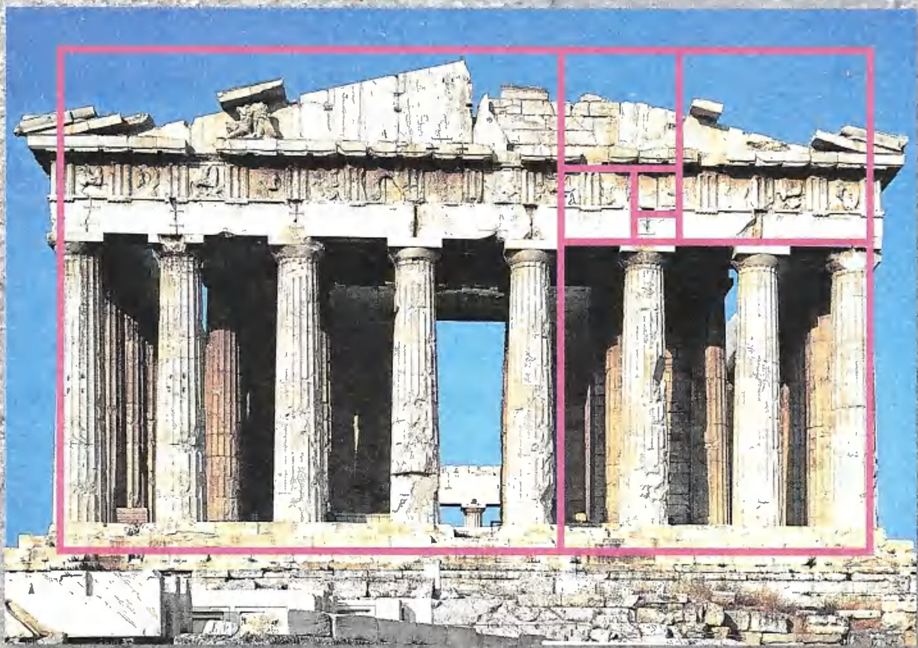


Juntos, eles formarão um retângulo 21 u.c. × 13 u.c.

7 Continue a construção quanto desejar, seguindo a mesma regra.

Observando o comprimento dos lados dos quadrados desenhados, podemos notar que eles seguem a sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... conhecida como sequência de Fibonacci.

Esse retângulo pode ser observado, por exemplo, na fachada do Parthenon, construção grega em Atenas, Grécia.



DEA/G. DAGLI ORTI/DE AGOSTINI/GETTY IMAGES

Fachada do Parthenon, Atenas, Grécia. Foto de 1987.

Agora, pense e responda no caderno:

A sequência de Fibonacci é infinita, iniciada originalmente pelo número 1 (na versão moderna foi incluído o zero como primeiro elemento), e é dada pelos seguintes elementos, conhecidos como números de Fibonacci:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

- Qual é o padrão que essa sequência de Fibonacci segue?
- O número 144 faz parte da sequência de Fibonacci. Qual é o número subsequente ao 144 nessa sequência?

CAPÍTULO 1

OS NÚMEROS NATURAIS

No nosso dia a dia e na Natureza os números são muito úteis, em especial para expressar registros de contagem. Por exemplo, um rebanho pode ter 20, 100 ou 3 000 animais, uma árvore pode ter 4 ou 8 galhos ou, ainda, em uma multidão pode haver mais de 500 pessoas. Os números ligados a uma contagem são os **números naturais**.

Sequência numérica

Todo grupo de números dispostos em uma determinada ordem é uma **sequência numérica**, em que podemos identificar o 1º elemento (ou termo), o 2º elemento etc.

As sequências numéricas podem ou não ter um **padrão** (uma regra) de formação.

Por exemplo, você já deve conhecer a **sequência dos números naturais**: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...**

Ela é uma sequência numérica cujo padrão de formação é "cada número subsequente é obtido adicionando-se 1 unidade ao número anterior".

Uma sequência pode ser finita ou infinita, por exemplo:

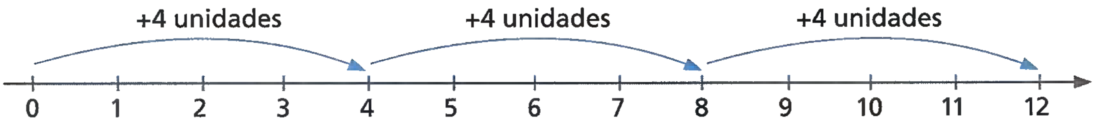
- a sequência dos números naturais pares: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ... (sequência infinita);
- a sequência dos números naturais ímpares de 1 a 10: 1, 3, 5, 7, 9 (sequência finita).

Nessas duas sequências, cada número subsequente é obtido adicionando-se 2 unidades ao número anterior.

Reta numérica

Você também já viu que é possível associar números naturais a pontos de uma reta, nesse caso chamada de **reta numérica**. Nessa reta podemos, por exemplo, localizar o antecessor ou sucessor de um número natural não nulo na sequência dos números naturais.

Ainda usando a reta numérica, podemos construir sequências numéricas. Por exemplo, se quisermos formar uma sequência numérica de números naturais, iniciando do zero e sempre acrescentando 4 unidades, faremos:



A sequência numérica obtida será: 0, 4, 8, 12, ...

Comparação de números naturais

Na sequência de números naturais, podemos comparar dois ou mais números naturais. Para isso, podemos também usar a reta numérica.

Na reta numérica, observamos que, quanto mais à direita fica a representação do número, maior ele é.

Vamos observar e comparar os números 200, 500 e 1 100.

Pela posição na reta, podemos notar que 200 é menor que 500 (200 < 500) e 500 é menor que 1100 (500 < 1100). Logo, podemos escrever esses três números em ordem crescente (do menor para o maior):

200 < 500 < 1 100

Ou na ordem decrescente (do maior para o menor):

1 100 > 500 > 200

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Quais os primeiros 5 elementos da sequência de números naturais formada a partir do 1, sendo que cada número da sequência é formado pelo seu antecedente adicionado de 3 unidades?

2. Escreva no caderno como é formada a sequência a seguir:

1, 6, 11, 16, 21, ...

3. Identifique a seguir qual é a sequência composta pelos sucessores dos 5 primeiros números naturais pares.

a) 0, 1, 2, 3, 4
b) 1, 2, 3, 4, 5
c) 0, 2, 4, 6, 8
d) 3, 5, 7, 9, 13
e) 1, 3, 5, 7, 9

4. Escreva no caderno o sucessor dos números:

a) 123
b) 85
c) 99
d) 999
e) 5 209 009
f) 1 001

5. Encontre de que números são antecessores os números abaixo.

a) 321
b) 10
c) 1
d) 1 000
e) 9 999
f) 47 001

6. Organize, no seu caderno, em ordem crescente os números a seguir.

101 150 700 207 200 197 555

7. Identifique qual das alternativas mostra uma comparação falsa de números naturais.

a) 2 < 5 < 22 < 37 < 101
b) 33 > 14 > 7 > 0
c) 1 < 5 < 6 < 9 < 8 < 11
d) 25 > 15 e 15 < 35
e) 35 < 53 e 81 > 18

DESAFIO

8. *A* é maior que 8 e menor que 10, *B* é o sucessor de um número natural par maior que 6 e *B* também é menor que 10. Comparando os números *A* e *B*, o que se pode concluir?

ATIVIDADES

1. Calcule mentalmente:

a) 7 + 3 + 5
b) 12 + 6 + 4
c) 15 + 5 + 2 + 8
d) 37 − 25
e) 45 − 18

2. José vai jogar dois dados e precisa tirar 9 pontos ao todo para ganhar um jogo. Quais pares de números podem sair no dado para José ganhar?

3. Cristina mora em Brasília e vai viajar até Palmas com um amigo. Para isso, eles vão percorrer 850 km, sem paradas. O hodômetro do carro registra 22 432 km rodados quando eles iniciam a viagem. Quanto o hodômetro vai registrar na chegada à Palmas?

4. Efetue as subtrações no caderno.

a) 207 − 130
b) 909 − 617
c) 11 121 − 1 958

5. Em uma expressão numérica, efetuam-se as adições e subtrações na ordem em que aparecem. Assim, calcule:

a) 14 + 37 − 12
b) 49 − 27 + 48
c) 108 + 91 − 128
d) 123 + 456 − 543

6. Joelma foi ao supermercado e gastou 35 reais em produtos de limpeza, 18 reais em sucos e 42 reais em mantimentos. No caixa, ela pagou suas compras com duas cédulas de 50 reais. Quanto Joelma recebeu de troco?

7. Transforme as adições a seguir em multiplicações e obtenha os resultados.

a) 11 + 11 + 11 + 11
b) 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7
c) 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14

8. Efetue as multiplicações:

a) 4 × 8 × 10
b) 4 × 80 × 3
c) 81 × 12
d) 14 × 307

9. Solange fez 30 bandejas de biscoitos iguais à da imagem a seguir.


MARCOS MACHADO

Quantos biscoitos Solange fez?

10. Carlos foi ao banco pagar sua conta de energia elétrica de 51 reais, e recebeu 19 reais de troco da caixa.

a) Qual foi a quantia que Carlos deu para o caixa?
b) Sabendo que Carlos deu duas cédulas do caixa, quais cédulas eram essas?

11. Um teatro é composto de três setores. O setor A possui 20 fileiras com 15 cadeiras cada uma. Os setores B e C são compostos de 25 fileiras com 10 cadeiras cada. Qual é a lotação (quantidade máxima) de pessoas desse teatro?

12. Efetue as divisões, obtendo quociente natural.

a) 122 : 11
b) 628 : 25
c) 199 : 12

13. Numa pequena granja há 18 galinhas poedeiras, que produzem 90 ovos por semana. Quantos ovos, em média, cada galinha bota a cada semana?

14. Determine o resto de cada divisão, usando uma calculadora para os cálculos.

a) 234 : 18
b) 308 : 22
c) 888 : 24
d) 593 : 100

POR TODA PARTE

Conheça Palmas

A cidade de Palmas, no estado do Tocantins, é a capital mais nova do Brasil. Ela completou 30 anos em 2019.

Palmas foi inaugurada em 20 de maio de 1989 e se localiza na exuberante paisagem do Cerrado, no coração do Brasil. Palmas é a última cidade brasileira planejada do século XX, dotada de um ecossistema de grande beleza cênica que contém parques urbanos, jardins e áreas verdes estrategicamente projetadas.

Localizada a 805 km de Brasília (DF), Palmas conta com uma arquitetura arrojada, com avenidas largas, dotadas de completo trabalho paisagístico e divisão urbanística caracterizada por grandes quadras comerciais e residenciais.

Ela tem sediado grandes eventos internacionais, como a primeira edição dos Jogos Mundiais dos Povos Indígenas (outubro de 2015), que contou com a participação de 1800 atletas de etnias brasileiras e de países como Nova Zelândia, Canadá, Rússia entre outros.

Informações obtidas em: PREFEITURA MUNICIPAL DE PALMAS. **Conheça Palmas.** Disponível em: <http://www.palmas.to.gov.br/conheca_palmas/>. Acesso em: 11 set. 2018.

1. Segundo o IBGE, a população de Palmas em 2010 era de 228332 habitantes; além disso, o IBGE estimou que a população em 2018 seria de 291855 habitantes. Outra projeção populacional para Palmas foi publicada pela UEG (Universidade Estadual de Goiás), indicando que em 2025 Palmas deve atingir 340000 habitantes.

Informações obtidas em: IBGE. **Palmas.** Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/to/palmas/panorama>; RODRIGUES, W. Projeções populacionais a partir de cenários econômicos: o caso de Palmas – TO, 2010 a 2025. **Revista UEG**. Disponível em: <http://www.revista.ueg.br/index.php/economia/article/view/3455/2621>. Acessos em: 12 set. 2018.

Releia o texto e, em duplas, resolvam no caderno os itens a seguir.

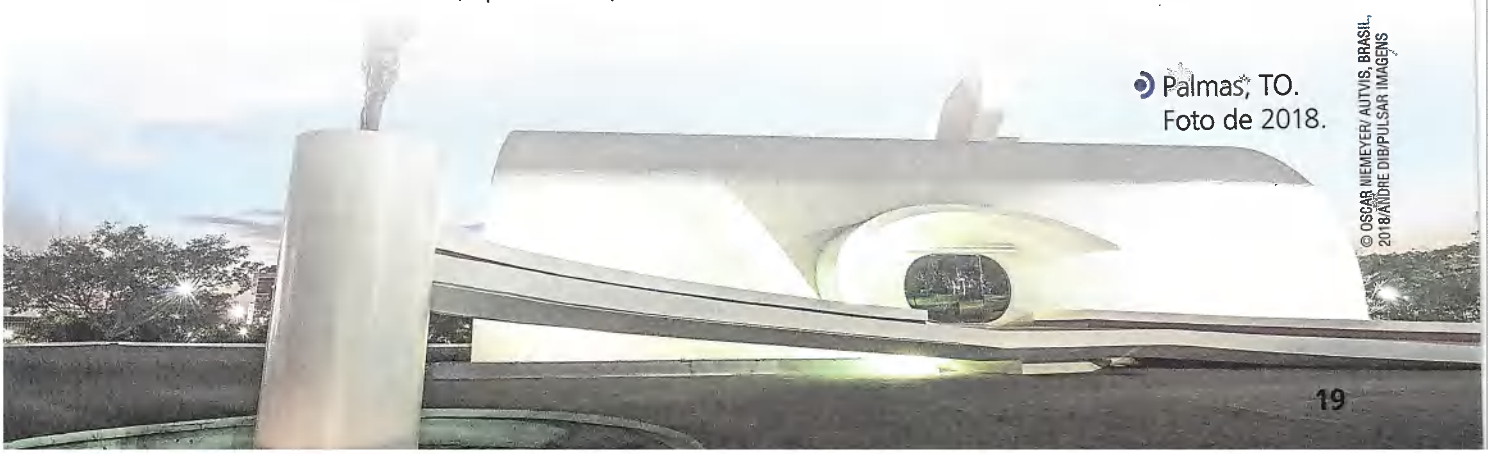
a) Reproduza a tabela e complete-a com os dados do texto.

População da cidade de Palmas (TO)

Ano	Habitantes em 2010	Habitantes em 2018	Habitantes em 2025
População			

b) Calcule o crescimento populacional de 2010 para 2018 (aumento da população em 8 anos), e de 2018 para 2025 (aumento da população em 7 anos). Qual operação matemática foi necessária para calcular esses aumentos?

c) A densidade demográfica de uma região é calculada dividindo-se a população pela área dessa região (em hab./km²). Sabendo que a área do município de Palmas é de aproximadamente 2219 km², calcule a densidade demográfica estimada para 2025 e compare com a densidade de 2010, que é de aproximadamente 103 hab./km².



Palmas, TO. Foto de 2018.

CAPÍTULO 3

DIVISORES E MÚLTIPLOS DE UM NÚMERO NATURAL

Divisores

Vamos relembrar o conceito de divisores observando a seguinte situação.

Taís comprou um pacote com 48 balas e tentou repartir igualmente em saquinhos com 5 balas cada um, mas sobraram 3 balas. Então ela tentou repartir em saquinhos com 6 balas cada e conseguiu montar 8 saquinhos, sem sobras.

Isso foi possível porque a divisão $48 : 6 = 8$ é exata, ou seja, 6 é divisor de 48. Já a divisão $48 : 5 = 9$ não é exata, pois tem resto 3.

Um número natural não nulo *a* é **divisor** de outro número natural *b* quando a divisão de *b* por *a* é exata.

Quando um número *a* é divisor de *b*, dizemos que *b* é **divisível** por *a*.

Múltiplos

Paulo e Rogério colecionam figurinhas. Dessa vez eles estão formando um álbum de carros esportivos. Cada envelope de figurinha que eles compram vem com 3 figurinhas diferentes.

Esta semana Paulo comprou 5 envelopes de figurinhas e Rogério comprou 3 envelopes.

Quantas figurinhas cada um deles comprou? Vamos montar um quadro com a quantidade de figurinhas de acordo com o número de envelopes:

Quantidade de envelopes	Quantidade de figurinhas
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15

Nessa situação, estão envolvidas multiplicações; veja:

- $1 \times 3 = 3$
- $3 \times 3 = 9$
- $5 \times 3 = 15$
- $2 \times 3 = 6$
- $4 \times 3 = 12$

Os números 3, 6, 9, 12 e 15 são exemplos de números múltiplos de 3.

Então, Paulo comprou 15 figurinhas e Rogério, 9.

Um número natural *a* será múltiplo de um número natural *b* diferente de zero, quando *a* for divisível por *b* ou *b* for divisor de *a*.

Números primos

Vamos relembrar o conceito de número primo:

> Um número que possui apenas dois divisores naturais distintos (o número 1 e ele mesmo) é denominado **número primo**.

Os números naturais que possuem mais de dois divisores distintos são chamados **números compostos**.

Assim:

- O número 1 não é primo nem composto.
- Os números 2, 3, 5, 7, 11 e 13 são alguns exemplos de números naturais primos.
- Os números 4, 6, 8, 9 e 10 são alguns exemplos de números naturais compostos.
- O único número primo par é o 2, já que todos os demais números pares são divisíveis por 2.

Decomposição em fatores primos

Vimos que todo número natural maior do que 1 que não é primo é chamado de número composto, pois ele pode ser expresso como uma multiplicação de dois ou mais fatores, em particular uma multiplicação de fatores primos. Observe o número 24, que é um número composto:

$$24 = 2 \times 12 = 2 \times 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

Assim, $2 \times 2 \times 2 \times 3$ é a **forma fatorada completa** do número 24, ou seja, é o número 24 expresso como a multiplicação de fatores primos.

A **decomposição em fatores primos** de um número natural composto nos fornece a forma fatorada completa desse número. Essa técnica consiste em:

Tomar o número composto que se quer decompor. → Dividir esse número por um número primo que seja seu divisor. → Dividir o quociente obtido por um número primo que seja seu divisor. → O quociente obtido é igual a 1?

Sim → Escrever a multiplicação com todos os divisores usados no processo.

Não → Dividir o quociente obtido por um número primo que seja seu divisor.

Veja como decompor os números 72, 116 e 231 em fatores primos:

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

116	2
58	2
29	29
1	

231	3
77	7
11	11
1	

- $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$
- $116 = 2 \times 2 \times 29$
- $231 = 3 \times 7 \times 11$

TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

Gráficos de colunas triplas e de barras triplas

São Paulo é o município com mais habitantes do Brasil; com seus mais de 12 milhões de habitantes, os desafios são enormes. Desde o abastecimento de água, passando pelo de comida, número de escolas, entre outras coisas, todos os números são impressionantes. Um dos desafios em São Paulo é o transporte, tanto dentro da cidade como para outros locais.

A forma de transporte coletivo mais utilizada é o rodoviário, e, como não seria diferente, a cidade conta com três grandes terminais rodoviários: o do Tietê, o Barra Funda e o Jabaquara.

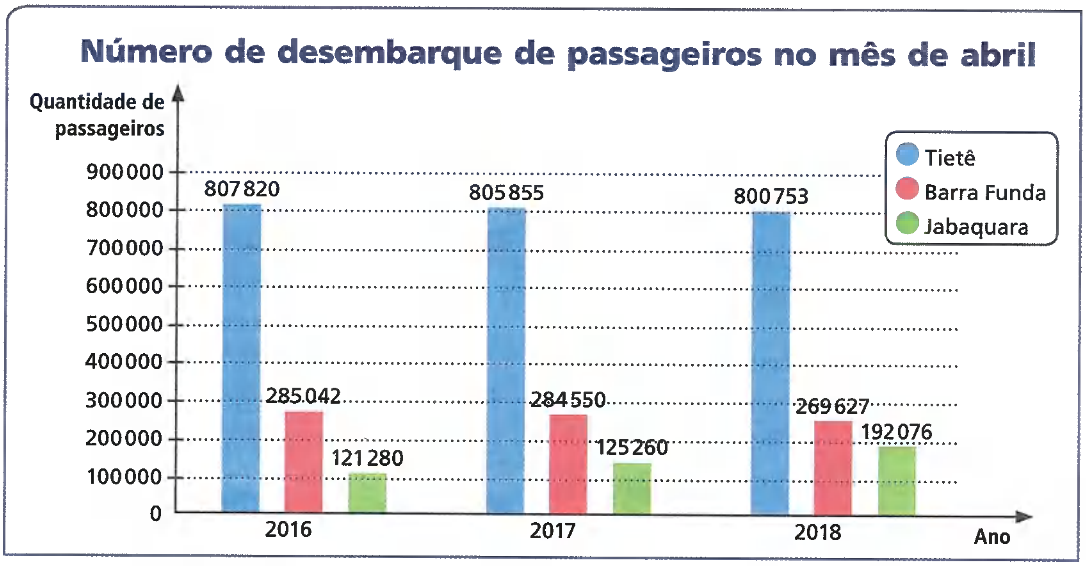
JÚLIO ZERBATTO/FUTURA PRESS

Terminal Rodoviário do Tietê, São Paulo. Foto de dezembro de 2017.

WILLIAN MOREIRA/FUTURA PRESS

Terminal Rodoviário Jabaquara, São Paulo. Foto de dezembro de 2017.

O gráfico a seguir traz informações sobre esses terminais.



EDITORIA DE ARTE

Fonte: OBSERVATÓRIO DO TURISMO E EVENTOS. Disponível em: <http://www.observatoriodoturismo.com.br/pdf/rodoviarias_agosto_2018.pdf>. Acesso em: 6 out. 2018.

Esse é um **gráfico de colunas triplas**. Cada cor representa um terminal rodoviário da cidade de São Paulo e cada grupo de três colunas coloridas refere-se ao número de desembarque de passageiros no mês de abril de 2016, 2017 e 2018.

Responda às questões no caderno.

1. Descreva o que esse gráfico representa.

2. Ao todo, quantos passageiros desembarcaram nos três terminais em abril de 2018?

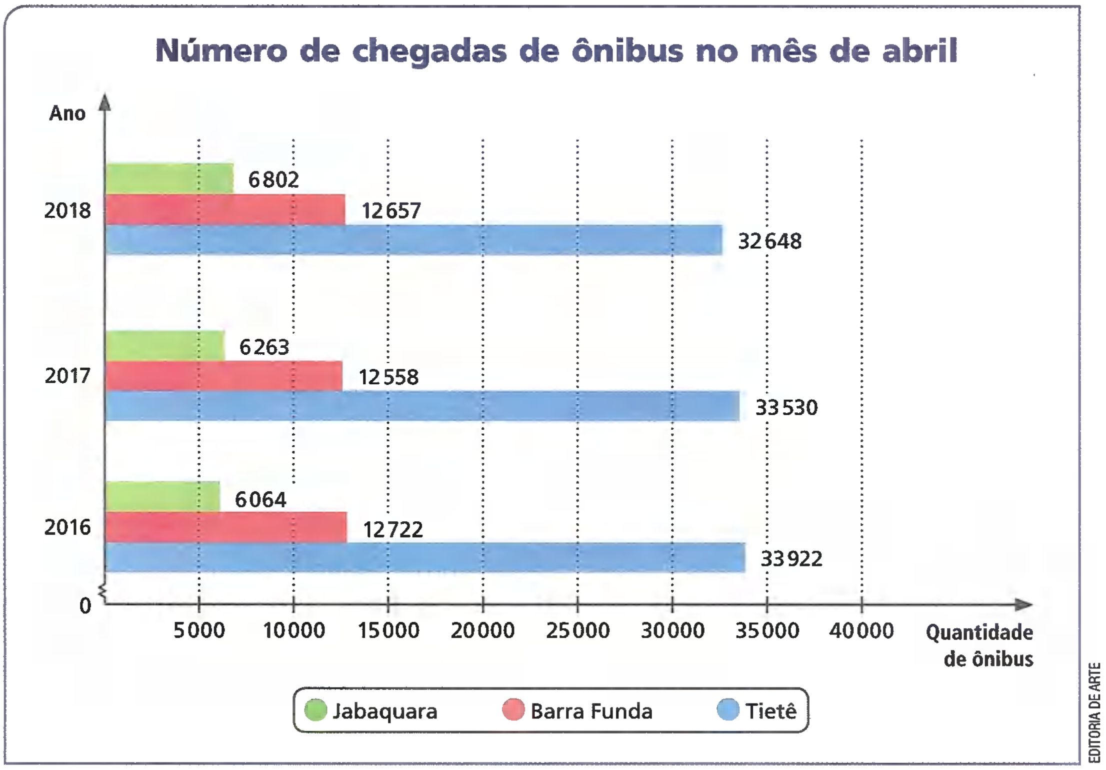
3. Ao longo desses três anos, o que ocorreu com o número de desembarques de passageiros no mês de abril no terminal rodoviário do Tietê?

4. Pode-se dizer que a conclusão obtida para o terminal do Tietê é válida para os outros dois terminais também? Por quê?

5. Em qual terminal ocorreu a maior diminuição no número de desembarques no mês de abril, entre 2016 e 2018? Qual foi essa diminuição?

6. Pesquise os dados de desembarques nesses terminais até o ano atual. Organize os dados de 2016 até os dias de hoje em um gráfico. Você pode utilizar uma planilha eletrônica para fazer o novo gráfico.

7. Observe agora este gráfico de barras triplas e responda às questões seguintes.



Fonte: OBSERVATÓRIO DO TURISMO E EVENTOS. Disponível em: <http://www.observatoriodoturismo.com.br/pdf/rodoviarias_maio_2018.pdf>. Acesso em: 12 set. 2018.

a) Do que trata esse gráfico?

b) Quantos ônibus chegaram ao todo nesses três terminais em abril de 2018?

c) Em qual terminal ocorreu o maior aumento no número de chegadas de ônibus no mês de abril, entre 2016 e 2018? De quanto foi esse aumento?

d) Converse com um colega sobre o que está ocorrendo com o número chegadas de ônibus ano a ano em cada um dos terminais.

RETOMANDO O QUE APRENDEU

Responda às questões no caderno.

1. A distância da Terra até o Sol é cerca de 149 598 000 km; essa distância é chamada de unidade astronômica (UA). Netuno, o último planeta do Sistema Solar, está a uma distância média da Terra de aproximadamente 29 UA. Qual é, aproximadamente, a distância média da Terra a Netuno em quilômetros?

2. Quando o produto de dois números distintos *a* e *b*, com $b > a$, resultará em um número primo?

3. Responda:

a) Qual é o maior múltiplo de 6 com três algarismos?

b) Qual é o menor divisor de 1 728 maior que 9?

c) Quais são os 11 primeiros múltiplos de 19?

d) Quais são os divisores de 1 155?

4. Determine o maior múltiplo comum dos números 4 e 6 menor que 190.

5. Os números 54 e 72 têm divisores comuns. Qual é o maior deles?

6. Determine o m.d.c. dos números:

a) 112 e 70

b) 90 e 225

c) 504 e 588

d) 39, 65 e 91

e) 144, 216 e 288

7. Calcule o m.m.c. dos números:

a) 180 e 84

b) 375 e 225

c) 96, 144 e 240

8. Dados os números *x* e *y* tais que $x = 64 \times n \times 11$, $y = 16 \times n \times 13$ e o m.d.c. $(x, y) = 432$, qual é o fator que se deve colocar no lugar de *n*?

9. São dados os números *a*, *b*, *c*, tais que $a = 2^7$, $b = 2^{10}$ e $c = 2^8$. Qual é o valor do m.m.c. (a, b, c)?

10. Minha avó foi viajar com a turma da Melhor Idade do bairro. Quantos idosos havia na viagem, sabendo que eram menos de 60 e que podemos contá-los de 8 em 8 ou de 10 em 10?

11. (Unicid-SP) Dois ônibus, *A* e *B*, que fazem itinerários diferentes, partem simultaneamente de um mesmo terminal. O ônibus *A* retorna ao terminal a cada 40 minutos e o ônibus *B* retorna a cada 1 hora e 10 minutos. Então, o período de tempo com que os dois ônibus se encontrarão nesse terminal é a cada:

a) 240 minutos.

b) 280 minutos.

c) 310 minutos.

d) 320 minutos.

e) 400 minutos.

12. Uma fábrica de copos precisa embalar para despachar um lote de copos de sua produção. Esse lote é composto por um número de copos que tem três algarismos e é maior que 900. Dois tipos de embalagem conseguem acomodar esse lote completo com todas as caixas cheias: a do tipo *A*, que acomoda 15 copos em cada caixa, e a do tipo *B*, que acomoda 12 copos em cada caixa. Quantos copos foram fabricados nesse lote?

13. Considere a sequência numérica *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, na qual a (valor inicial da sequência) corresponde ao m.m.c. (12, 20), e, a partir de *b*, cada termo da sequência corresponde ao termo antecedente mais 21. Escreva no caderno os números *a*, *b*, *c*, *d*, *e*.

14. (Unir-RO) Uma empresa tem em seu quadro de funcionários gerentes, supervisores e fiscais. Cada um desses cargos é preenchido por meio de eleições entre os funcionários dos vários setores da empresa. Admita que os gerentes sejam eleitos para o mandato de 8 anos, os supervisores para o mandato de 6 anos e os fiscais para o mandato de 4 anos, e que, em 2009, houve eleições simultâneas para todos esses cargos. A partir dessas informações, é correto afirmar:

a) Em 2020, serão realizadas eleições simultâneas para os cargos de gerente e supervisor.

b) Em 2033, serão realizadas eleições simultâneas para todos os cargos.

c) Em 2020, serão realizadas eleições simultâneas para os cargos de gerente e fiscal.

d) Em 2017, serão realizadas eleições simultâneas para os cargos de supervisor e fiscal.

e) Em 2033, será realizada eleição somente para o cargo de gerente.

15. (OBM) A festa de aniversário de André tem menos do que 120 convidados. Para o jantar, ele pode dividir os convidados em mesas completas de 6 pessoas ou em mesas completas de 7 pessoas. Nos dois casos são necessárias mais do que 10 mesas e todos os convidados ficam em alguma mesa. Quantos são os convidados?

16. Três ciclistas percorrem um circuito. Suponha que todos saíram ao mesmo tempo, do mesmo ponto e com o mesmo sentido. O primeiro faz o percurso em 40 s; o segundo, em 36 s; e o terceiro, em 30 s. Com base nessas informações, responda:

a) Depois de quantos minutos os três ciclistas se reencontrarão no ponto de partida, pela primeira vez?

b) Quantas voltas completas terá dado o primeiro ciclista nesse tempo?

UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, retomamos conhecimentos sobre os números naturais e estudamos sequências, como a sequência de Fibonacci, na abertura, as sequências dos múltiplos e dos divisores de um número natural e a sequência dos números primos.

No Tratamento da Informação, vimos os gráficos de barras triplas e de colunas triplas ao analisarmos o movimento em terminais rodoviários.

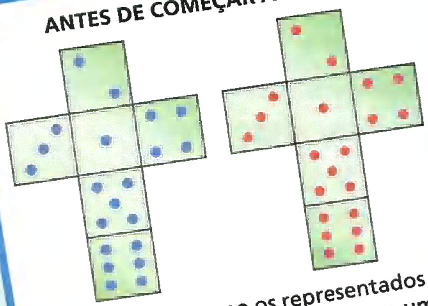
Vamos retomar as aprendizagens da Unidade 1 e refletir sobre elas:

- Conseguiu perceber alguma relação entre múltiplos e divisores? Qual?
- Como você explicaria o que é um número primo para um colega?
- Que estratégias você utilizaria para descobrir o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de dois ou mais números naturais?

2 O CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

Leia as regras do jogo, confeccione os dados e convide um colega para jogar.

ANTES DE COMEÇAR A JOGAR



Construa dados como os representados acima. Confeccione-os, de preferência, em um papel resistente.
As marcações dos pontos podem ser feitas com caneta hidrocor (azul e vermelha). Se houver necessidade, solicite ajuda ao seu professor.

OBJETIVO DO JOGO

Vence a partida o participante que conseguir chegar até a casa **Chegada** ou ficar sozinho no tabuleiro.

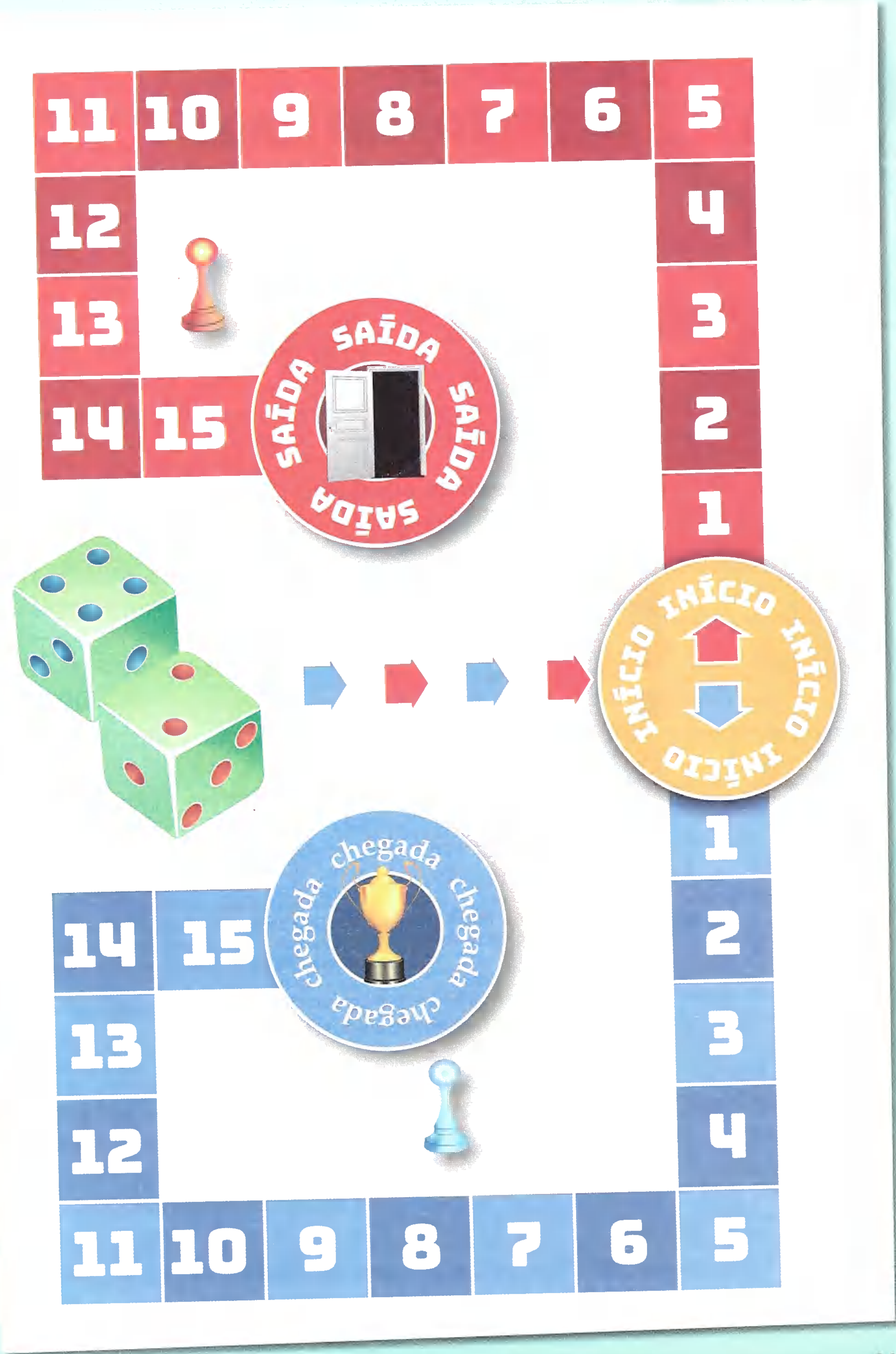
REGRAS

1 - Coloquem seus marcadores na casa **Início**. Os marcadores podem ser moedas, sementes ou pequenos objetos.

2 - Um participante de cada vez lança simultaneamente os dois dados.
Na mesma jogada, o número sorteado no dado com pontos azuis indica o número de casas que o marcador deverá andar no sentido da casa **Chegada**. O número sorteado no dado com pontos vermelhos indica a quantidade de casas que o marcador deverá andar no sentido da casa **Saída** na mesma jogada.

3 - O participante que "sair" do tabuleiro (casa **Saída**) será eliminado. O participante terá que usar o resultado dos dois dados para movimentar o marcador; dessa forma, o jogador só sai do tabuleiro depois de fazer a jogada andando o número de casas correspondente aos dois dados.

- Joguem três partidas e reflitam sobre a seguinte questão: durante o jogo, vocês identificaram algumas operações matemáticas sendo efetuadas? Caso a resposta seja positiva, quais foram essas operações?
- No início do jogo, na primeira jogada, um jogador obteve 5 no dado com pontos vermelhos e 3 no dado com pontos azuis. Ele registrou a pontuação da seguinte maneira: -5 e $+3$. Em que casa o marcador desse jogador deverá ser colocado nessa jogada?
- Para que na próxima rodada o marcador desse jogador caia na casa 3, azul, qual deverá ser a pontuação obtida nos dados?

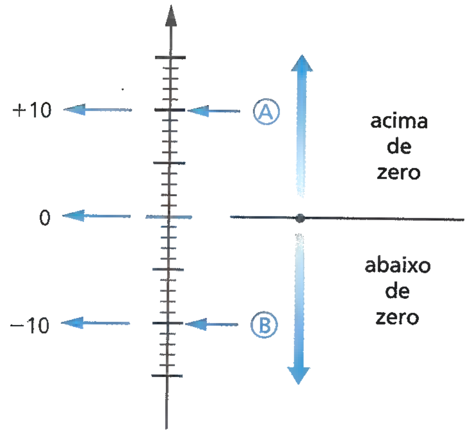

11 10 9 8 7 6 5
12 4
13 3
14 15 2
1
SAÍDA
INÍCIO
1
2
3
4
chegada
14 15
13
12
11 10 9 8 7 6 5

ALEX SILVA

Simbolicamente, eliminamos a confusão antepondo o sinal + (mais) às medidas acima de 0 °C e o sinal − (menos) às medidas abaixo de 0 °C.

Assim:

- ponto $A \rightarrow +10$ °C
- ponto $B \rightarrow -10$ °C



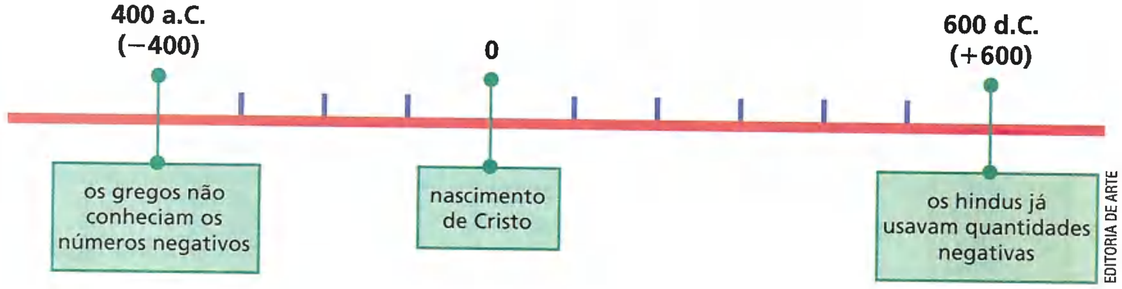
A temperatura de 10 graus acima de zero é indicada por **+10**. Dizemos que +10 é um **número inteiro positivo**.

A temperatura de 10 graus abaixo de zero é indicada por **−10**. Dizemos que −10 é um **número inteiro negativo**.

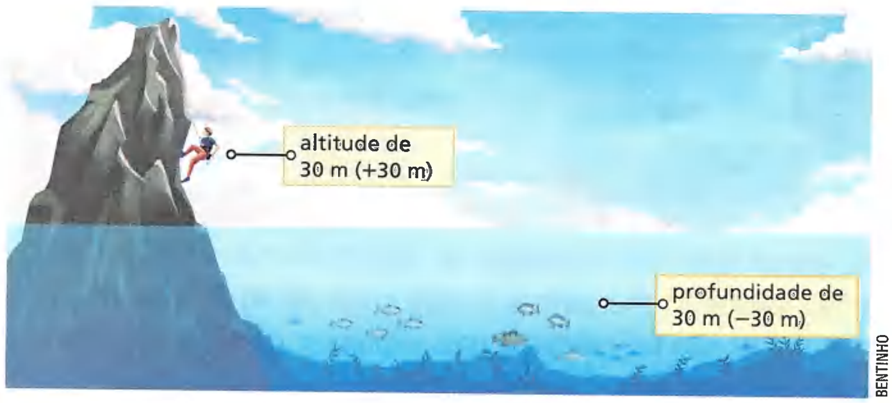
Há situações em que não escrevemos o sinal + ao usarmos números inteiros positivos.

Os números positivos e os números negativos aparecem em muitas situações, como por exemplo:

- Na indicação de um período, antes e depois de uma data determinada...



- Na indicação de altitudes ou profundidades em relação ao nível do mar...



Note que, em todas as situações apresentadas, há um **referencial**, que tomamos como **origem**: a temperatura nula (0 °C) no termômetro, o ano zero na linha do tempo e o nível do mar (0 m) na altitude ou na profundidade.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Em cada caso, escreva o número inteiro (positivo ou negativo) correspondente.

a) uma temperatura de 25 °C acima de zero.

b) um saldo negativo de 15 gols.

c) uma profundidade de 2 500 metros.

d) 10 pontos perdidos por uma equipe em um torneio.

e) um crédito de 1 600 reais.

f) 4 andares acima do térreo.

g) uma temperatura de 5 °C abaixo de zero.

h) um débito de 600 reais na conta bancária.

2. Heródoto, historiador grego, considerado o pai da História, nasceu no ano 484 antes de Cristo. Usando números inteiros (positivos ou negativos), indique o ano em que ele nasceu.


MARKARA/SHUTTERSTOCK.COM

Busto de Heródoto.

3. Cláudio é dentista e seu consultório fica em um prédio com 10 andares de salas comerciais e 4 andares de garagem no subsolo.

Observe o painel do elevador do prédio.

LUCAS FARAUJ

a) Que número indica o andar térreo?

b) Quais botões do painel indicam números de andares acima do térreo?

c) E quais indicam os andares abaixo do térreo (subsolo)?

d) Procure lembrar-se de outras situações em que você pode identificar o uso de números com os sinais + ou −.

4. O Mar Morto, localizado em um vale cercado pela Cisjordânia, Jordânia e por Israel, está cerca de 400 metros abaixo do nível do mar. O nome Mar Morto é por causa da alta concentração de sal em suas águas, cerca de 10 vezes maior que em outros mares, impossibilitando qualquer vida animal ou vegetal.

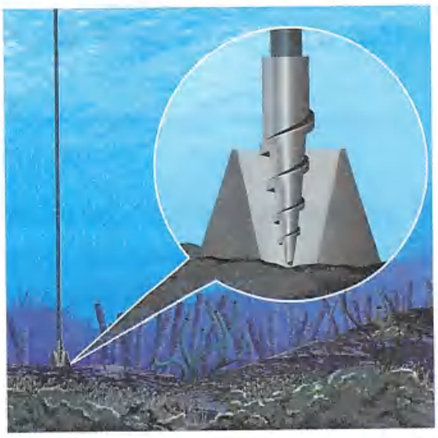
Como você indicaria essa depressão? Usando um número inteiro positivo ou negativo?

5. Registre com números inteiros positivos ou negativos para indicar os valores expressos nas informações:

a) Ana verificou seu extrato bancário.

DANI MOTA

b) Uma empresa que explora o fundo do mar lança uma base-guia a 1 700 metros de profundidade, no formato de funil, por onde as sondas e as brocas passam e perfuram o solo.


BENTINHO

CAPÍTULO 2

O CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

Os números +1, +2, +3, +4, ..., +10, ..., +25, ..., +100, ... são chamados **números inteiros positivos**.

Os números −1, −2, −3, −4, −5, ..., −25, ..., −100, ... são chamados **números inteiros negativos**.

O conjunto formado pelos inteiros positivos, pelos inteiros negativos e pelo zero é chamado **conjunto dos números inteiros** e é representado pela letra $\mathbb{Z}$.

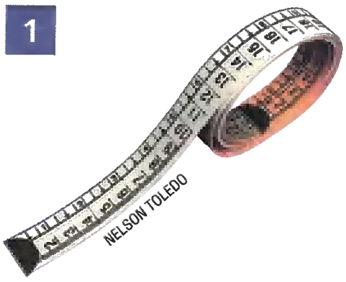
$$\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

O conjunto dos números inteiros não nulos é representado por $\mathbb{Z}^*$.

A reta numérica

Um dos recursos usados para a localização dos números é a **reta numérica**.

1

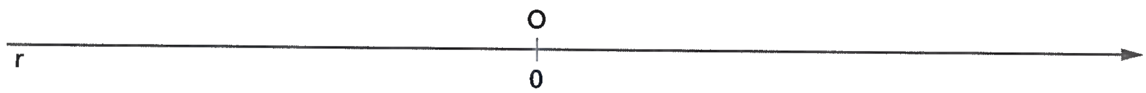


2

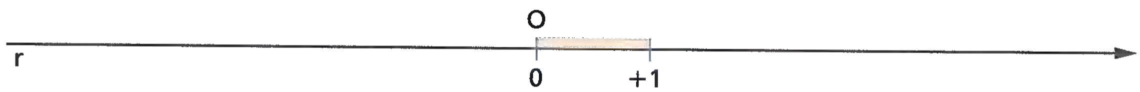
A fita métrica **1** e a trena **2** são exemplos que lembram uma reta numérica.

Vejamos, a seguir, como construir uma reta numérica.

1º passo: Desenhamos uma reta *r* e escolhemos um ponto *O* qualquer da reta, ao qual associamos o número 0 (zero), denominado **origem**.



2º passo: Escolhemos um ponto dessa reta, à direita do ponto *O*, e a esse ponto associamos o número +1. Determinamos, assim, uma **unidade de comprimento** e o **sentido positivo** da reta (*eixo* é uma reta orientada).

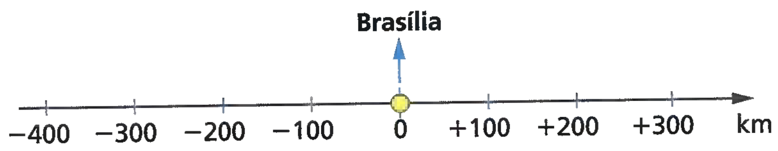


3º passo: Partindo de *O* (associado ao zero), colocamos essa unidade de comprimento repetidas vezes, da esquerda para a direita, ao longo da reta, determinando, assim, a localização dos pontos associados aos números positivos +2, +3, +4, +5, ...

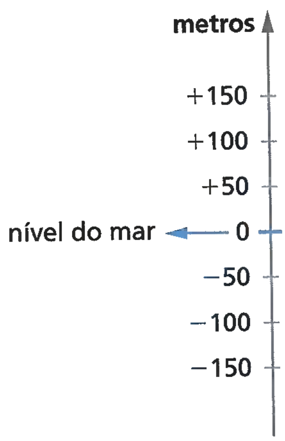
4º passo: Usando a mesma unidade de comprimento, medimos distâncias à esquerda do zero e localizamos o número −1, o número −2, e assim por diante, determinando o **sentido negativo** da reta.

Veja, a seguir, algumas aplicações da reta numérica.

- A reta numérica seguinte indica posições de um avião em relação à cidade de Brasília. O avião voou na rota oeste-leste. Os números positivos são usados para indicar distâncias a leste, e os números negativos, para designar distâncias a oeste de Brasília. Veja:



- A reta numérica ao lado representa altitudes e profundidades em relação ao nível do mar. Os números positivos são usados para indicar as altitudes, e os números negativos, para indicar as profundidades. A reta numérica não precisa, necessariamente, estar na posição horizontal.



Agora observe a reta numérica em que os pontos *A* e *P* estão em destaque:

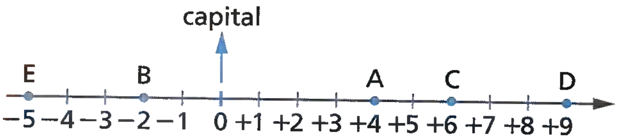
Em uma reta numérica:

- cada ponto destacado é chamado **imagem geométrica** do número inteiro. Assim:
  O ponto **A** é a imagem geométrica do número **+2**.
  O ponto **P** é a imagem geométrica do número **−4**.
- cada número inteiro é chamado **abscissa** do ponto correspondente. Assim:
  O número **+2** é a abscissa do ponto **A**.
  O número **−4** é a abscissa do ponto **P**.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Suponha que a figura seguinte represente uma rodovia ligando várias cidades de um mesmo estado e cada intervalo seja uma unidade para medir distâncias.



Usando um número inteiro e considerando sempre a capital como referencial, dê a posição:

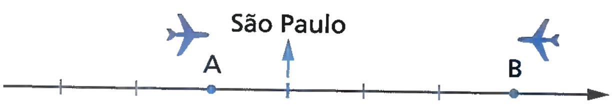
a) da cidade *A*.
b) da cidade *B*.
c) da cidade *C*.
d) da cidade *D*.
e) da cidade *E*.

2. De acordo com a atividade anterior, se cada intervalo corresponde a 100 km, dê a posição das cidades *B* e *C* em relação à capital.

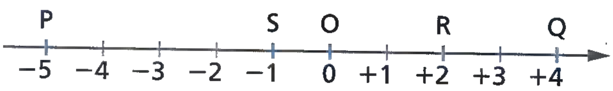
3. Ainda de acordo com a atividade 1 e considerando que cada intervalo corresponde a 100 km, determine a distância entre as cidades:

a) *A* e *C*.
b) *A* e *D*.
c) *B* e *A*.
d) *E* e *B*.
e) *B* e *D*.
f) *E* e *A*.

4. A reta numérica a seguir indica as posições de dois aviões, *A* e *B*, em relação à cidade de São Paulo. Sabendo que cada intervalo corresponde a 50 km, expresse essas posições usando números inteiros positivos ou negativos.



5. Observe a reta numérica.



Responda:

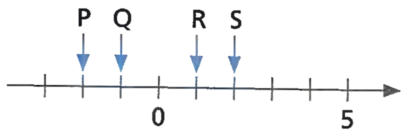
a) Qual a imagem geométrica do número −1?

b) Qual a imagem geométrica do número +4?

6. Usando intervalos de 1 cm, faça o desenho de uma reta numérica e localize os pontos:

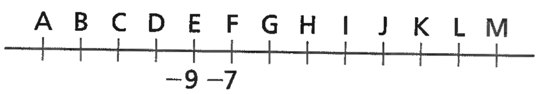
a) *A*, de abscissa +3.
b) *R*, de abscissa −2.
c) *B*, de abscissa −6.
d) *S*, de abscissa +7.

7. (Saresp-SP) Os números −2 e −1 ocupam na reta numérica as posições indicadas respectivamente pelas letras:



a) P, Q **b)** Q, P **c)** R, S **d)** S, R

8. (Prova Brasil) A figura a seguir é uma representação da localização das principais cidades ao longo de uma estrada, onde está indicada por letras a posição dessas cidades e por números as temperaturas registradas em °C.



Com base na figura e mantendo-se a variação de temperatura entre as cidades, o ponto correspondente a 0 °C estará localizado:

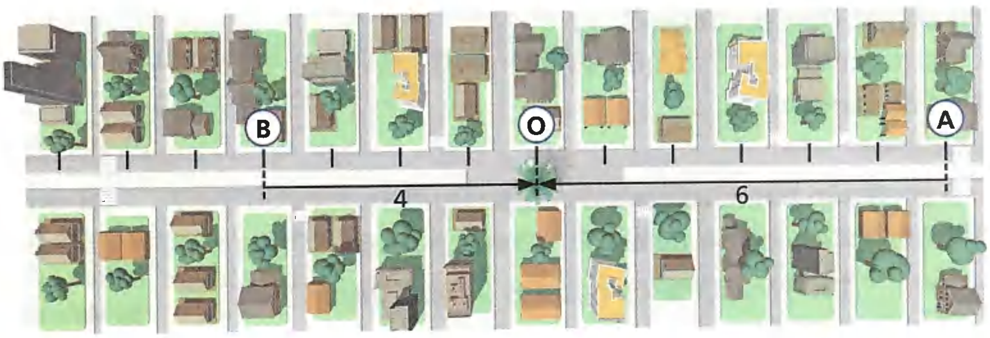
a) sobre o ponto *M*.
b) entre os pontos *L* e *M*.
c) entre os pontos *I* e *J*.
d) sobre o ponto *J*.

CAPÍTULO 3

MÓDULO DE UM NÚMERO INTEIRO

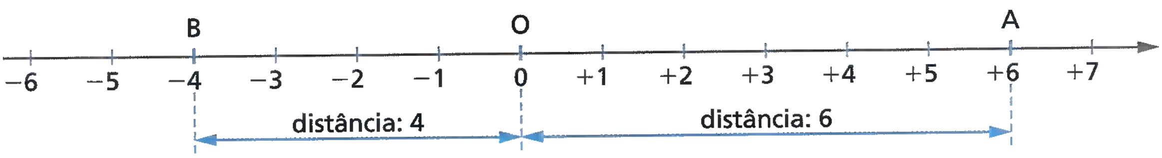
Clodoaldo e João são amigos e moram na mesma avenida. Todos os dias eles se encontram no Clube do Bairro para praticar atividade física.

No esquema a seguir, as marcações destacadas em preto foram feitas à mesma distância uma da outra. O ponto *O* indica a localização do Clube do Bairro, o ponto *A*, a localização da casa de Clodoaldo e o ponto *B*, a da casa de João.



ESTÚDIO AMPLA ARENA

Considere a menor distância entre duas marcas como unidade e o Clube do Bairro como o ponto de origem. Podemos associar os números positivos às marcas à direita de *O* e os números negativos às marcas à esquerda de *O*.



A distância entre a casa de Clodoaldo e o clube é de 4 unidades. Dizemos, então, que a distância do ponto *A* em relação ao ponto *O* é dada pelo número 6.

A distância entre a casa de João e o clube é de 4 unidades. Dizemos, então, que a distância do ponto *B* em relação ao ponto *O* é dada pelo número 4.

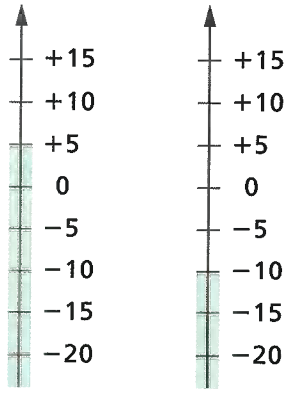
Chama-se **módulo** (ou **valor absoluto**) de um número inteiro a distância ou o afastamento desse número até o zero, na reta numérica. O módulo é representado por: | |.

- O módulo de 0 é 0, e indica-se: $|0| = 0$.
- O módulo de +6 é 6, e indica-se: $|+6| = 6$.
- O módulo de −4 é 4, e indica-se: $|-4| = 4$.

O módulo de qualquer número inteiro, diferente de zero, é sempre positivo.

Considere agora as seguintes afirmações:

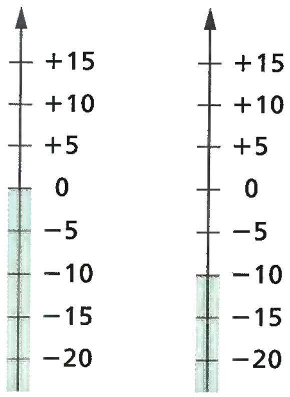
1 Uma temperatura de 5 °C acima de zero é maior que uma temperatura de 10 °C abaixo de zero. Essa afirmação significa comparar os números inteiros +5 e −10:



$$+5 > -10$$
ou
$$-10 < +5$$

Qualquer número inteiro positivo é maior que qualquer número inteiro negativo.

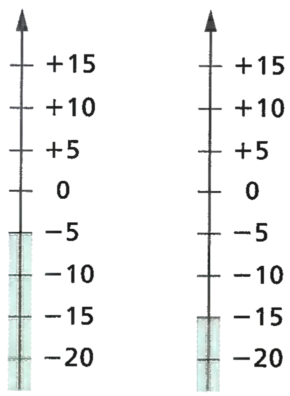
2 Uma temperatura de 0 °C é maior que uma temperatura de 10 °C abaixo de zero. Essa afirmação significa comparar os números inteiros 0 e −10:



$$0 > -10$$
ou
$$-10 < 0$$

Qualquer número inteiro negativo é menor que zero.

3 Uma temperatura de 5 °C abaixo de zero é maior que uma temperatura de 15 °C abaixo de zero. Essa afirmação significa comparar os números inteiros −5 e −15:



$$-5 > -15$$
ou
$$-15 < -5$$

Entre dois números inteiros negativos, o maior é aquele que está a uma distância menor do zero, ou seja, o maior é aquele que tem menor módulo.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Observe os números inteiros *a, b, c, d* assinalados na reta numérica abaixo:

Usando o símbolo > ou <, compare:

a) *a* e 0.
b) *b* e 0.
c) *c* e 0.
d) 0 e *d*.
e) *a* e *b*.
f) *a* e *c*.
g) *d* e *a*.
h) *b* e *c*.
i) *b* e *d*.

2. Usando o símbolo > ou <, compare os pares de números inteiros:

a) 0 e +9.
b) +13 e 0.
c) 0 e −7.
d) −20 e 0.
e) +1 e −10.
f) −25 e +9.
g) +11 e +30.
h) −11 e −30.
i) −20 e +4.
j) +20 e −4.

3. Em um torneio, os times de futebol Alegre e Bonito terminaram empatados na classificação. De acordo com o regulamento, prosseguirá na fase seguinte do torneio a equipe com melhor saldo de gols.

- Alegre: Saldo de gols = −7
- Bonito: Saldo de gols = −5

Qual dos dois times passará para a fase seguinte do torneio?

4. Escreva os números inteiros +1, −160, −500, +7, −100, +12, −300 na ordem decrescente.

5. Observe o quadro.

−21	+47	+54	−96	+62
+75	−81	−63	+28	−35

Identifique:

a) o menor número inteiro positivo.
b) o maior número inteiro negativo.
c) o maior número inteiro.
d) o menor número inteiro.

6. Considerando os números −70, +20, 0, −10, +90, −100, qual é:

a) o maior dos números?
b) o menor dos números?

7. Observe os números inteiros destas fichas:

−30 +16 −11 −17
+12 −14 0

Quais deles podem substituir a letra *x* para que se obtenha:

a) $x > -15$?
b) $x \leqslant 0$?

8. Escreva cada conjunto enumerando seus elementos:

a) o conjunto *A* dos números inteiros maiores que −20.
b) o conjunto *B* dos números inteiros menores que −7.
c) o conjunto *C* dos números inteiros maiores do que ou iguais a −5 e menores que +3.

DESAFIO

9. Considere os elementos de *A* para responder às questões.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -8 < x < +4\}$$

a) Quantos números inteiros positivos há nesse conjunto?
b) Quantos números inteiros não negativos há no conjunto *A*?

POR TODA PARTE

Temperaturas pelo Brasil

Muito já se falou sobre o Brasil ser uma terra de contrastes. Um exemplo disso é a temperatura: no inverno, é possível encontrar temperaturas negativas nos pontos mais altos dos estados do Rio Grande do Sul e Santa Catarina; enquanto no Nordeste, mesmo no inverno, a temperatura pode ultrapassar os 25 °C.

Situada a 1 360 m de altitude, São Joaquim (SC) é uma das cidades mais frias do Brasil. Nessa cidade, o clima é temperado, com baixas temperaturas no inverno, quando os termômetros marcam temperaturas negativas, e altas temperaturas no verão. Em 24 de maio de 2018, atingiu temperatura próxima a −3 °C, contrastando com os 30 °C já alcançados em 6 de fevereiro de 2014. Foto de 2018.

Em 24 de maio de 2018, de acordo com a Central NSC de Meteorologia, a cidade de Urupema (SC), localizada na serra catarinense, atingiu temperatura mínima de cerca de 6,6 °C negativos, superando pela segunda vez no ano a menor temperatura registrada no país até aquele momento. No inverno, as pequenas cachoeiras e vegetação rasteira transformam-se em cristais de gelo. Foto de 2018.

Informações obtidas em: Super Interessante. Disponível em: <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/qual-e-o-recorde-de-frio-no-brasil-e-de-calor/>. G1. Disponível em: <http://g1.globo.com/sc/santa-catarina/noticia/2014/02/alta-temperatura-bate-recorde-em-sao-joaquim-na-serra-catarinense.html>; G1. Disponível em: <https://g1.globo.com/sc/santa-catarina/noticia/com-61c-urupema-volta-a-ter-o-dia-mais-frio-do-pais-em-2018.ghtml>. Acessos em: 17 set. 2018.

De acordo com os textos, responda no caderno.

1. Escreva, em ordem crescente, as temperaturas que aparecem nos textos anteriores.
2. De acordo com o Instituto Nacional de Meteorologia (INMET), a temperatura mais baixa já registrada no Brasil foi de aproximadamente −11 °C, em Xanxerê, Santa Catarina, em 1953. Já de acordo com a Empresa de Pesquisa Agropecuária e Extensão Rural de Santa Catarina (Epagri), a temperatura mais baixa já registrada foi na cidade de Caçador, Santa Catarina, em 1952: −14 °C. Utilizando os sinais < e >, compare os números negativos apresentados no enunciado.

DESCUBRA MAIS

Números negativos (coleção Pra que serve Matemática?), de Imenes; Lellis e Jakubo, Editora Atual, 2009. Esse livro aborda situações cotidianas, como medir a temperatura, entender um saldo bancário, calcular um fuso horário, entre outros, para explorar a noção de número negativo.

CAPÍTULO 5

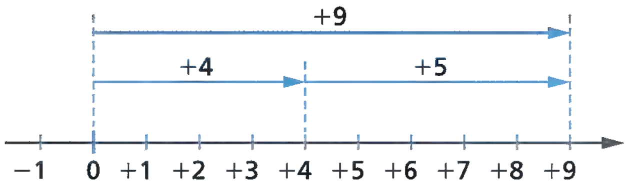
ADIÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Vamos analisar as seguintes situações:

1 Ao disputar um torneio de handebol, a equipe da Escola do Bairro obteve 4 pontos no primeiro turno e 5 pontos no segundo turno. Quantos pontos a equipe obteve ao todo nesse torneio?

Nessa situação, devemos calcular (+4) + (+5), o que pode ser feito mentalmente. Mas vamos primeiro representar esse cálculo na reta numérica:

- A partir do ponto associado ao 0, fazemos um deslocamento de 4 unidades no sentido positivo.
- A partir do ponto associado ao +4, fazemos um novo deslocamento de 5 unidades no sentido positivo.



O deslocamento total foi de 9 unidades no sentido positivo.

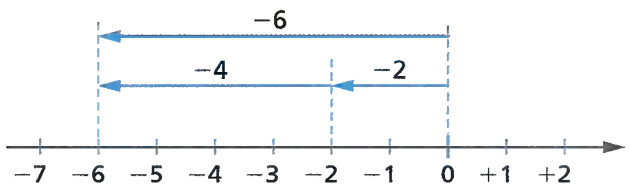
Então: (+4) + (+5) = +9

A equipe obteve ao todo 9 pontos.

2 Nesse mesmo torneio, a equipe da Escola Fundamental perdeu 2 pontos no primeiro turno e 4 pontos no segundo turno. Quantos pontos a equipe perdeu ao todo nesse torneio?

Vamos calcular (−2) + (−4).

- A partir do ponto associado ao 0, fazemos um deslocamento de 2 unidades no sentido negativo.
- A partir do ponto associado ao −2, fazemos um novo deslocamento de 4 unidades no sentido negativo.



O deslocamento total foi de 6 unidades no sentido negativo.

Então: (−2) + (−4) = −6

Essa equipe perdeu ao todo 6 pontos.

Sobre a adição de números inteiros, podemos afirmar que:

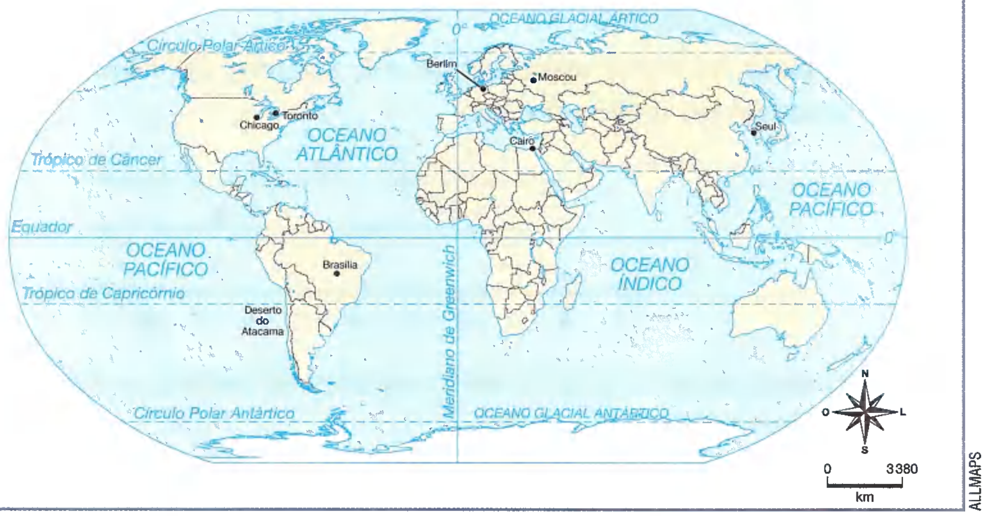
> Quando adicionamos números inteiros com mesmo sinal, a soma é obtida adicionando seus módulos e mantendo o sinal.

PENSE E RESPONDA

Cada vez mais o ser humano se preocupa com as mudanças climáticas que vêm ocorrendo em nosso planeta. Um meio de monitorar essas mudanças é o estudo permanente da temperatura nos diversos pontos da Terra.

As situações seguintes estão relacionadas às temperaturas de algumas cidades, medidas em um mesmo dia.

Planisfério: localização de algumas cidades



Fonte: IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 7. ed. Rio de Janeiro, 2016. p. 32.

Responda às questões no caderno.

1. Em Brasília, capital do Brasil, a temperatura mínima foi de 20 °C. Como a temperatura nesse dia subiu 8 °C, qual foi a temperatura máxima registrada em Brasília nesse dia?

2. Em Toronto, no Canadá, às 6 horas da manhã, os termômetros registravam −1 °C. Ao meio-dia, a temperatura tinha aumentado 6 °C. Qual foi a temperatura ao meio-dia?

3. Já em Chicago, nos Estados Unidos da América, a temperatura medida à meia-noite foi de −8 °C. Ao meio-dia, a temperatura havia subido 7 °C. Qual foi a temperatura medida em Chicago ao meio-dia?

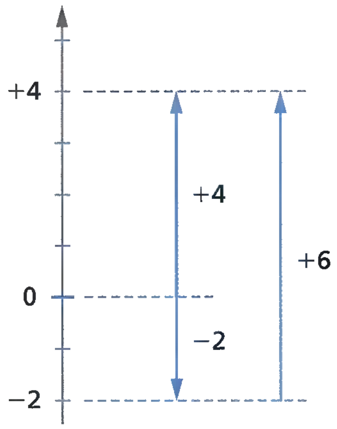
4. No deserto do Atacama, no Chile, deserto mais alto e árido do mundo, ao meio-dia foi registrada a temperatura mais alta do dia. Em menos de 24 horas a temperatura caiu 40 °C, chegando a −2 °C (temperatura mínima). Qual foi a temperatura máxima nesse dia no deserto do Atacama?

Vamos analisar outras situações:

1 Jonas entrou no elevador no andar térreo. Desceu, inicialmente, 2 andares e, em seguida, subiu 6 andares.
Em qual andar o elevador parou?
Vamos calcular (−2) + (+6).

- A partir do ponto associado ao 0, deslocamos 2 unidades no sentido negativo.
- A partir do ponto associado ao −2, deslocamos 6 unidades no sentido positivo.

O deslocamento total foi de 4 unidades no sentido positivo.
Então: (−2) + (+6) = +4
O elevador parou no 4º andar.



2 A turma de um acampamento andou 6 km a oeste, em uma trilha; e voltou 1 km para leste para pegar uma bússola, esquecida em uma área de descanso. Qual é a posição dessa turma em relação ao início da caminhada?
Observe a representação dos 4 pontos cardeais e a reta numérica no eixo oeste/leste.
Vamos calcular (−6) + (+1).

NÓS

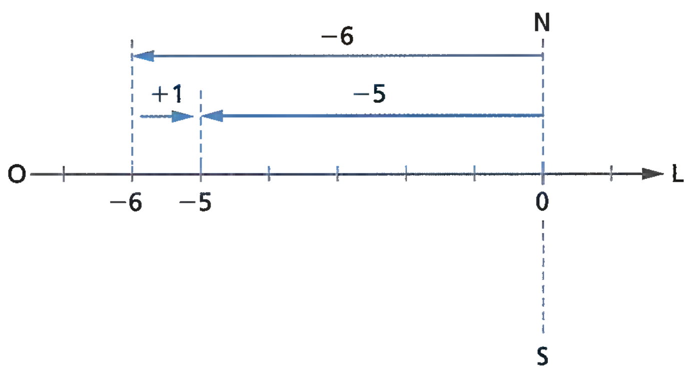
O uso de elevadores

Comuns em edifícios públicos e privados, os elevadores social e de serviço geram muitas dúvidas com relação ao seu uso. A função do elevador de serviço é o transporte de cargas, a fim de evitar danos ao elevador social.

Dessa forma, o elevador social deve ter seu uso livre aos condôminos e funcionários do condomínio que não estejam portando cargas. Já o uso exclusivo do elevador de serviço por banhistas ou pessoas portando animais, por exemplo, pode ser deliberado em assembleia com os condôminos e deve constar no regulamento interno.

Vale lembrar que diversas leis (federais, estaduais e municipais) vetam qualquer forma de discriminação em virtude de raça, sexo, cor, origem, condição social, idade, porte ou presença de deficiência e doença não contagiosa por contato social no acesso aos elevadores.

- Você acha importante haver leis que vetam condutas discriminatórias?
- Pesquise outras leis que atendem ao mesmo propósito do apresentado no texto.



- A partir do ponto associado ao 0, deslocamos 6 unidades no sentido negativo.
- A partir do ponto associado ao −6, deslocamos 1 unidade no sentido positivo.

  O deslocamento total foi de 5 unidades no sentido negativo.

  Então: $(-6) + (+1) = -5$

  A posição da turma era de 5 km a oeste do ponto inicial da caminhada.

  De modo geral:

> Quando adicionamos dois números inteiros de sinais diferentes, a soma é obtida efetuando-se a diferença entre seus módulos e mantendo o sinal do número que está mais distante da origem.

Assim:

- $(-16) + (+20) = +4$
  - **diferença entre os módulos dos números**
  - **sinal positivo, pois +20 está mais distante do 0 do que −16**
- $(-100) + (+42) = -58$
  - **diferença entre os módulos dos números**
  - **sinal negativo, pois −100 está mais distante do 0 do que +42**

Propriedades da adição

1ª propriedade: A soma de dois números inteiros é sempre um número inteiro.

- $(+3) + (+5) = +8$, e $+8 \in \mathbb{Z}$ (dizemos que +8 pertence ao conjunto dos inteiros).
- $(-7) + (-3) = -10$, e $-10 \in \mathbb{Z}$.
- $(+11) + (-8) = +3$, e $+3 \in \mathbb{Z}$.
- $(+7) + (-13) = -6$, e $-6 \in \mathbb{Z}$.

2ª propriedade: A ordem das parcelas em uma adição não altera a soma.

$$\left.\begin{array}{c} (+11) + (-9) = +2 \\ \text{ou} \\ (-9) + (+11) = +2 \end{array}\right] (+11) + (-9) = (-9) + (+11)$$

Essa é a propriedade **comutativa**.

3ª propriedade: Associando-se as parcelas de maneiras diferentes, obtém-se a mesma soma.

- $\underbrace{(-8) + (-2)} + (+7) = (-10) + (+7) = -3$
- $(-8) + \underbrace{(-2) + (+7)} = (-8) + (+5) = -3$

Essa é a propriedade **associativa**.

4ª propriedade: O número 0 é o elemento neutro da adição em $\mathbb{Z}$.

- $(+8) + 0 = 0 + (+8) = +8$
- $(-7) + 0 = 0 + (-7) = -7$

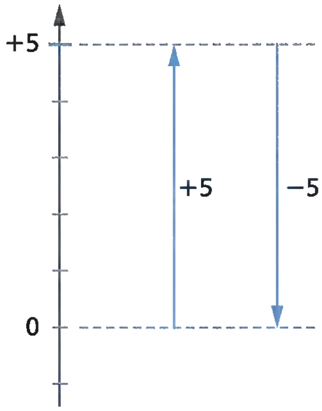
Essa é a propriedade da existência do elemento neutro.

Observação: Além dessas propriedades da adição, que também são válidas para o conjunto $\mathbb{N}$, o conjunto $\mathbb{Z}$ apresenta uma nova propriedade: existência do **elemento oposto**.

- $(-8) + (+8) = 0 \longrightarrow -8$ é o elemento oposto ou simétrico de $+8$ e vice-versa.
- $(+13) + (-13) = 0 \longrightarrow +13$ é o elemento oposto ou simétrico de -13 e vice-versa.

Vamos analisar a seguinte situação:

1 Em um torneio de futebol, uma equipe marcou 5 gols e sofreu 5 gols.
Qual foi o saldo de gols dessa equipe? Vamos calcular $(+5) + (-5)$.
Pelo esquema a seguir, você observa que o deslocamento total foi zero, pois partimos do 0 e voltamos para o 0.
Então: $(+5) + (-5) = 0$
O saldo da equipe foi 0.



A soma de dois números opostos é igual a 0 (zero).

Notação simplificada de uma adição de números inteiros

Os números inteiros positivos são também números naturais. Podemos, por exemplo, escrever $+4$ ou simplesmente 4.

A expressão $(+9) + (+11)$ tem o mesmo significado que $9 + 11$.

Observe também que:

- $(+10) + (-15)$ tem o mesmo significado que $+10 - 15$ ou, simplesmente, $10 - 15$.
- $(-8) + (+10)$ tem o mesmo significado que $-8 + 10$.
- $(-6) + (-15)$ tem o mesmo significado que $-6 - 15$.

A essa forma simplificada de escrever uma sentença com números inteiros aplicamos as mesmas propriedades operatórias já estudadas:

- $+13 - 19 = 13 - 19 = -6$
- $23 - 9 - 18 + 15 = 23 + 15 - 9 - 18 = 38 - 27 = 11$
- $-18 + 35 + 62 - 47 - 31 = 35 + 62 - 18 - 47 - 31 = 97 - 96 = 1$

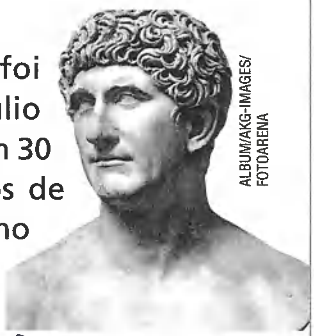
Responda às questões no caderno.

1. O senhor João é vendedor de balões de gás no parque da cidade. No sábado desse fim de semana, por causa da chuva, ele teve um prejuízo de 75 reais. No domingo fez sol, e ele teve um lucro de 125 reais. Esse fim de semana deu lucro ou prejuízo ao Sr. João? De quanto?

2. Os números *a* e *b* são números inteiros opostos ou simétricos. Qual é o valor de a + b?

3. Marco Antônio foi o sucessor de Júlio César e morreu em 30 a.C., com 52 anos de idade. Em que ano Marco Antônio nasceu?

Fonte: EDITORA ABRIL. Almanaque Abril, 2011. São Paulo: Abril, 2010.



ALBUM/AKG-IMAGES/ FOTOARENA

Busto de Marco Antônio.

4. Sabendo que *a* e *b* são números inteiros negativos, é correto afirmar que a + b é um número inteiro positivo?

5. Dê o resultado das seguintes adições:

a) (+27) + (+13) + (−28)
b) (−50) + (−30) + (−12)
c) (+90) + (−75) + (−47)
d) (−11) + (+20) + (+35) + (−27)
e) (+32) + (−68) + (−22) + (+48)
f) (+99) + (−100) + (−100) + (+98) + (−10)
g) (−73) + (−22) + (−45) + (−92) + (+250)

6. Sabendo que a = −82, b = +65, c = +100 e d = −91, calcule o valor de:

a) a + b
b) c + d
c) a + c
d) b + d
e) a + d
f) a + b + c + d

7. Gustavo trabalha como ascensorista. O serviço de manutenção dos elevadores, por problemas técnicos, pediu a Gustavo para anotar o movimento do elevador nos andares em um determinado intervalo de tempo. Veja a seguir como ele anotou o movimento, indicando ↑ para "sobe" e ↓ para "desce".

Use a adição de números inteiros e diga em que andar o elevador parou, por último, em cada caso.

a) térreo ↑3 ↑5 ↓6
b) térreo ↓2 ↓1 ↑4
c) térreo ↓3 ↑5 ↓3 ↑1
d) térreo ↓2 ↑8 ↓5 ↑2

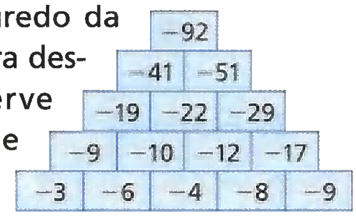
8. Escreva na forma simplificada e calcule o valor de cada adição:

a) (+31) + (−27)
b) (−50) + (+ 45)
c) (−20) + (−11)
d) (+47) + (+ 23)
e) (−21) + (+ 55) + (−29)

9. As expressões a seguir estão escritas na forma simplificada. Calcule o valor de cada uma.

a) 7 + 17
b) −8 − 2
c) −9 + 14
d) −4 − 4
e) 19 − 23
f) −40 − 11
g) 32 + 14
h) −1 + 30
i) 40 − 63
j) 91 − 57

10. Qual é o segredo da pirâmide? Para descobrir, observe o número de um bloco e os números dos blocos que o apoiam.



EDITORIA DE ARTE

11. Calcule o valor de:

a) 7 + 20 − 4

b) −17 + 14 + 3

c) 27 − 16 − 10

d) −25 − 21 − 40

e) 35 + 18 + 62

f) −75 + 70 + 50 − 61

g) 84 − 79 − 81 + 86

h) −64 − 96 − 77 + 200

12. (Prova Brasil) Cíntia conduzia um carrinho de brinquedo por controle remoto em linha reta. Ela anotou em um quadro os metros que o carrinho andava cada vez que ela acionava o controle. Escreveu valores positivos para as idas e negativos para as vindas.

Vez	Metros
Primeira	+17
Segunda	−8
Terceira	+13
Quarta	+4
Quinta	−22
Sexta	+7

Após Cíntia acionar o controle pela sexta vez, a distância entre ela e o carrinho era de:

a) −11 m **b)** 11 m **c)** −27 m **d)** 27 m

13. No dia 1º de agosto o saldo bancário da empresa de Cláudio era R$ 8400,00. No período de 2 a 8 de agosto, o extrato da empresa mostrava a seguinte movimentação:

Data	Movimento	Valor (em reais)
2/8	crédito	10200
4/8	débito	15000
5/8	débito	9500
8/8	crédito	8000

Usando a adição de números inteiros, responda:

a) Qual é o saldo bancário da empresa de Cláudio no dia 8?

b) Com o saldo do dia 8, Cláudio vai pagar o aluguel no valor de 3000 reais. Qual será o saldo da empresa, após esse pagamento?

14. Caio tirou o extrato bancário de sua conta corrente e verificou que havia R$ 1900,00. Ele pagou contas com três cheques: um de R$ 400,00 para o supermercado, outro de R$ 600,00 para a prestação do carro e outro de R$ 1300,00 para o aluguel.

Qual é o valor que Caio deve depositar na conta para, após os descontos, não ficar com saldo negativo?

15. Na figura a seguir, qual é o número inteiro que se deve colocar no lugar da letra *A*? E da *B*? E da *C*?

−7	+	−30	=	A
=				+
−26				+15
+				=
C	=	+41	+	B

EDITORIA DE ARTE

16. Determine o número inteiro que se deve colocar no lugar de *x* para que sejam verdadeiras as igualdades:

a) x + (+10) = +16

b) x + (−2) = −10

c) x + (+20) = 0

d) x + (−9) = +9

e) (−15) + x = −1

17. Sabe-se que, na atmosfera, a temperatura diminui cerca de 1 °C a cada 200 metros de afastamento da superfície terrestre. Quando a temperatura na superfície é +25 °C, qual será a temperatura na atmosfera a uma altura de 11 km?

CAPÍTULO 6

SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Para determinar a variação de temperatura em um local, em um determinado período de tempo, vamos fazer:

(temperatura máxima) menos (temperatura mínima)

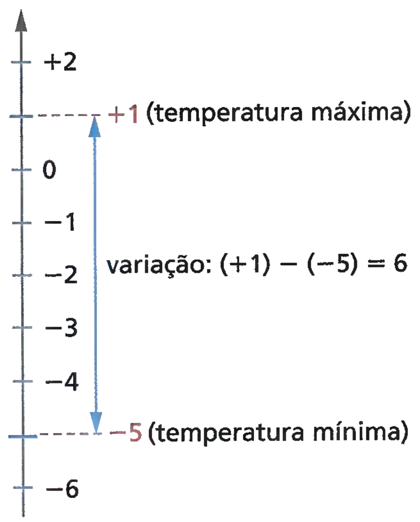
Observe o quadro com a temperatura máxima e a temperatura mínima de três cidades (*A*, *B* e *C*) em um mesmo dia:

Cidade	Temperatura mínima	Temperatura máxima
A	−5	+1
B	+2	+7
C	−6	−2

A partir do quadro, vamos descobrir a variação de temperatura em cada cidade.

- Para a cidade *A*, temos:

Mínima: −5 Máxima: +1



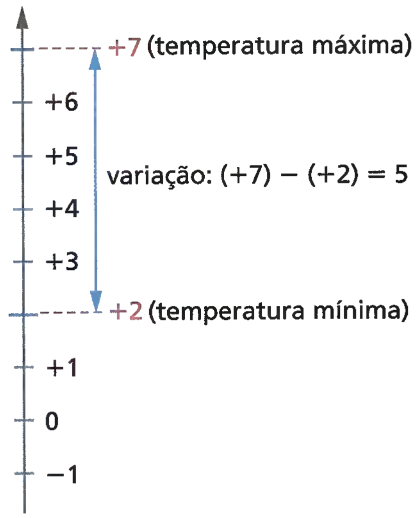
Considerando que (+1) − (−5) = 6 e (+1) + (+5) = 6, podemos escrever que:

$(+1) - (-5) = (+1) + (+5) = 6$

oposto de −5

- Para a cidade *B*, temos:

Mínima: +2 Máxima: +7

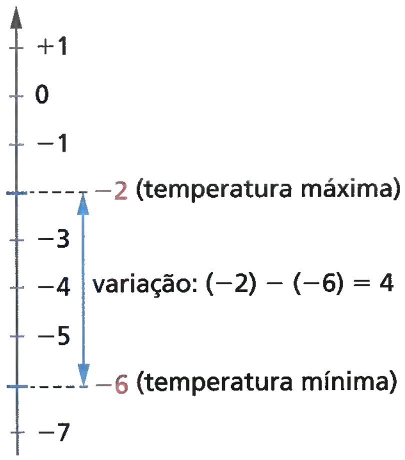


Considerando que (+7) − (+2) = 5 e (+7) + (−2) = 5, podemos escrever:

$(+7) - (+2) = (+7) + (-2) = 5$

oposto de +2

- Para a cidade *C*, temos:
  Máxima: -2 Mínima: -6



Considerando que $(-2) - (-6) = 4$ e $(-2) + (+6) = 4$, podemos escrever:

$$(-2) - (-6) = (-2) + (+6) = 4$$

oposto de -6

Sabemos que, no conjunto $\mathbb{N}$, não é possível efetuar a subtração quando o primeiro número (minuendo) é menor que o segundo número (subtraendo).

$$3 - 10 \text{ não é possível em } \mathbb{N}$$

No conjunto $\mathbb{Z}$ é possível efetuar a subtração, pois a diferença entre dois números inteiros é sempre um número inteiro.

$$3 - 10 = (+3) - (+10) = (+3) + (-10) = -7$$

ou

$$3 - 10 = -7$$

Assim:

- $(+13) - (+2) = (+13) + (-2) = +11$
- $(+7) - (+15) = (+7) + (-15) = -8$

Vejamos outros exemplos de subtrações não possíveis no conjunto dos naturais e possíveis com os números inteiros:

- $40 - 50 = -10$
- $12 - 20 = -8$
- $1 - 100 = -99$

Pelas situações apresentadas, de modo geral:

> Subtrair dois números inteiros é o mesmo que adicionar o primeiro com o oposto do segundo.

Todas as propriedades do conjunto dos números naturais são válidas para o conjunto dos números inteiros.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Calcule o resultado de cada subtração a seguir:

a) 0 − (+25)

b) 0 − (−15)

c) (−11) − (+32)

d) (+40) − (+47)

e) (−1) − (−64)

f) (+72) − (+60)

g) (−9) − (+28)

h) (+40) − (+80)

i) (+31) − (−73)

j) (−105) − (−119)

2. Sabe-se que A = (−11) − (−27) e B = (−27) − (−11). Usando o sinal = ou ≠, compare os números *A* e *B*.

3. No restaurante em que Cláudia trabalha, a temperatura no interior do *freezer* é −9 °C e a temperatura fora do *freezer* é 22 °C. Qual é a diferença entre a temperatura interna e a externa do *freezer*?

4. Observe na figura o instante em que estão alinhados verticalmente um helicóptero, voando a uma altitude de 14 m em relação ao nível do mar (+14 m); e um submarino, que navega a 63 m de profundidade em relação ao nível do mar (−63 m). Qual é a distância entre o helicóptero e o submarino nesse instante?

5. Carmem e Amélia adoram jogar cartas. No jogo de ontem, Carmem fez 310 pontos e Amélia, −130 pontos. Quantos pontos Carmem fez a mais que Amélia?

6. Observe o quadro com as temperaturas mínimas e máximas registradas em algumas cidades, no dia 2 de dezembro.

Cidade	Mínima	Máxima
Nova York	−8	+11
Toronto	−12	−7
Moscou	−7	−2
Montreal	−13	−6
Madri	+7	+17

Qual foi a variação de temperatura nesse dia, em graus Celsius, na cidade de:

a) Nova York?

b) Toronto?

c) Moscou?

d) Montreal?

e) Madri?

7. Pitágoras, grande filósofo e matemático grego, nasceu em −570 (570 a.C.). Foi o fundador da Escola Pitagórica, centro de estudos religiosos, científicos e filosóficos. Várias descobertas matemáticas são atribuídas a Pitágoras, além da famosa demonstração do teorema que leva seu nome. Morreu no ano −496 (496 a.C.).

Informações obtidas em: Matemática Interativa na Internet. Disponível em: <www.matematica.br/historia/pitagoras.html>. Acesso em: 18 set. 2018.

Quantos anos Pitágoras viveu?

8. No Campeonato Brasileiro de Futebol Série A (Brasileirão) de 2018, a equipe do Vitória-BA havia marcado 19 gols e sofrido 27 gols, e a equipe do Santos-SP havia marcado 16 gols e sofrido 18. Qual era o saldo de gols da equipe do:

a) Vitória?

b) Santos?

CAPÍTULO 7

ADIÇÃO ALGÉBRICA

Vamos considerar:

- a adição em $\mathbb{Z}$: $(-7) + (+4) = -3$
- a subtração em $\mathbb{Z}$: $(-7) - (+4) = (-7) + (-4) = -11$

Como toda subtração em $\mathbb{Z}$ pode ser transformada em adição, dizemos que a adição e a subtração de números inteiros podem ser consideradas uma única operação, chamada **adição algébrica**, cujo resultado é denominado **soma algébrica**.

Expressões como estas, a seguir, são consideradas adições algébricas.

$\mathbf{8 - 10}$ $\quad$ $\mathbf{-1 - 11}$ $\quad$ $\mathbf{2 + 7 - 6}$ $\quad$ $\mathbf{-13 + 2 + 6}$ $\quad$ $\mathbf{-8 + 7 + 22 - 20}$

Toda expressão numérica que contém somente as operações de adição, ou subtração, ou ambas, representa uma adição algébrica.

- Vamos calcular a adição algébrica $-17 + 40 + 21 - 16 - 33$.

  $-17 + 40 + 21 - 16 - 33 = 61 - 66 = -5$

  Os exemplos a seguir contêm parênteses precedidos do sinal +. Observe:

- $10 + (-6) = 10 - 6 = 4$
- $-7 + (-5 + 4) = -7 - 5 + 4 = -12 + 4 = -8$

Quando uma adição algébrica contém parênteses precedidos do sinal +, podemos eliminar esses parênteses, bem como o sinal que os precede, escrevendo cada número que está no interior dos parênteses **com o seu próprio sinal**.

Os exemplos a seguir contêm parênteses precedidos do sinal −. Observe:

- $10 - (-6) =$
  $= 10 + (+6) = 10 + 6 = 16$
- $-7 - (-5 + 4) =$
  $-7 + (+5 - 4) = -7 + 5 - 4 =$
  $5 - 11 = -6$

Quando uma adição algébrica contém parênteses precedidos do sinal −, podemos eliminar esses parênteses, bem como o sinal que os precede, escrevendo cada número que está no interior dos parênteses **com o sinal trocado**.

As mesmas regras valem para as adições algébricas em que aparecem colchetes e chaves, além dos parênteses.

Acompanhe:

1 Calcular a soma algébrica $20 + (-9 + 12) - (-15 + 20)$.
Vamos fazer esse cálculo de dois modos diferentes:

1º modo:

mantêm-se os sinais — trocam-se os sinais

$$20 + (-9 + 12) - (-15 + 20) =$$

$= 20 - 9 + 12 + 15 - 20 = \longrightarrow$ eliminamos os parênteses

$$= 47 - 29 = +18$$

2º modo:

$$20 + (-9 + 12) - (-15 + 20) =$$

$= 20 + (+3) \quad - \quad (+5) = \longrightarrow$ efetuamos as operações no interior dos parênteses

$= 20 + 3 - 5 = \longrightarrow$ eliminamos os parênteses

$$= 23 - 5 = +18$$

2 Calcular a soma algébrica $2 - \{-11 + [17 - (-12 + 10) - 3]\}$.
Vamos fazer esse cálculo de dois modos diferentes:

1º modo:

trocam-se os sinais

$$2 - \{-11 + [17 - (-12 + 10) - 3]\} =$$

mantêm-se os sinais

$= 2 - \{-11 + [17 + 12 - 10 - 3]\} = \longrightarrow$ eliminamos os parênteses

trocam-se os sinais

$= 2 - \{-11 + 17 + 12 - 10 - 3\} = \longrightarrow$ eliminamos os colchetes

$= 2 + 11 - 17 - 12 + 10 + 3 = \longrightarrow$ eliminamos as chaves

$$= 26 - 29 = -3$$

2º modo:

$$2 - \{-11 + [17 - (-12 + 10) - 3]\} =$$

$= 2 - \{-11 + [17 - \quad (-2) - 3]\} = \longrightarrow$ efetuamos as operações no interior dos parênteses

$$= 2 - \{-11 + [17 + 2 - 3]\} =$$

$= 2 - \{-11 + \quad [+16]\} = \longrightarrow$ efetuamos as operações no interior dos colchetes

$$= 2 - \{-11 + 16\} =$$

$= 2 - \quad \{+5\} = \longrightarrow$ efetuamos as operações no interior das chaves

$$= 2 - 5 = -3$$

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Escreva cada uma das expressões seguintes, eliminando os parênteses:

a) $-(+9)$
b) $-(-11)$
c) $+(-13)$
d) $+(+21)$
e) $3 - (-2)$
f) $-(-1 + 10)$
g) $7 + (6 - 3)$
h) $1 - (-1 + 5)$
i) $9 + (-4 - 2)$
j) $-(1 + 1 - 4)$

2. Determine o valor de cada soma algébrica:

a) $8 - (-6 + 10)$
b) $-10 + (6 - 4)$
c) $2 + (2 + 5 - 7)$
d) $-5 + (2 - 4) - (7 - 1)$
e) $(-5 + 3) - (5 - 9) + (8 - 1) - 11$

3. Efetue as operações:

a) $-20 + (+43)$
b) $52 - (-11)$
c) $-37 - (-29)$
d) $+33 + (-51)$

4. João adora jogar figurinhas. Em cada rodada desta semana, ele registrou, com um número positivo, quantas figurinhas ganhou e, com um número negativo, quantas perdeu. Domingo, João foi passear e não jogou.

Segunda-feira: $-17 + 43 + 14 + 23 - 45$
Terça-feira: $24 - 7 - 8 - 10 - 4 + 31 - 19$
Quarta-feira: $19 - 21 + 36 - 100 - 35 + 100$
Quinta-feira: $-23 + 24 - 25 + 26 - 27 + 28$
Sexta-feira: $210 + 60 - 126 + 63 - 208 + 117$
Sábado: $-99 + 85 - 121 - 310 + 420 + 115$

Responda:

a) Em qual dia João ganhou mais figurinhas?
b) Em qual dia João ganhou menos figurinhas?
c) Nessa semana, João aumentou ou diminuiu a quantidade de figurinhas que tinha? Quanto?

5. No fim de semana, Armando e Bia foram a casa de amigos jogar cartas. Com mais dois amigos formaram duas duplas: a do Armando (A) e a da Bia (B). Após 4 rodadas os amigos pararam para lanchar. Veja os resultados das primeiras rodadas:

Rodada	Dupla A	Dupla B
1ª	−150	230
2ª	300	−60
3ª	−120	280
4ª	220	−70

a) Quantos pontos fez a dupla de Armando?
b) Quantos pontos fez a dupla de Bia?
c) Qual das duplas estava vencendo o jogo após as 4 rodadas?
d) Por quantos pontos de diferença?

6. Theo mostrou a seguinte cartela para dois amigos:

−32	0	+60	−27
+50	−25	+90	−19
−40	−36	+27	+32

Da cartela, Theo escolheu seis números que os amigos deveriam descobrir. Para cada número escolhido, ele deu uma dica:

- o maior dos números escritos;
- o resultado de $-20 - 7$;
- o menor dos números escritos;
- o resultado de $-25 + 25$;
- o oposto do número -32;
- o resultado de $10 - 35$.

a) Quais foram os números que Theo escolheu?
b) Quais os números que ele não escolheu?

7. No extrato bancário da empresa de Caio há as seguintes movimentações:

	Valor em reais DÉBITO	CRÉDITO
Saldo anterior		7 200
Depósito em dinheiro		2 500
Pagamento da conta de luz	230	
Depósito em cheques		1 600
Cheque compensado	1 100	

Qual será o saldo de Caio, após as operações indicadas no extrato?

8. Elimine os parênteses e os colchetes e calcule o valor de:

a) $35 + [-21 - (-12 + 15)]$

b) $-20 - [21 + (-20 - 16) + 11]$

c) $20 - (16 + 17) - [15 - (18 - 23)]$

d) $-(-30) - [37 + (35 - 31 - 34) - 36]$

9. Obtenha o resultado de:

a) $-300 + 300$

b) $-1 - 1 + 1 - 1$

c) $-25 + 3 + 25$

d) $-2 + 10 + 2 - 10$

10. Lucas está fazendo uma pesquisa escolar sobre variação de temperatura ambiente.

Na internet, ele reuniu informações sobre as temperaturas em uma região muito fria na América do Sul, no período da manhã. Veja as anotações de Lucas:

Horário	8 h	10 h	12 h
Temperatura	−10 °C	−8 °C	−2 °C

AGUSTINA CAMILION/SHUTTERSTOCK.COM

Mochileiro no Parque Nacional Los Glaciares, Argentina. Janeiro de 2015.

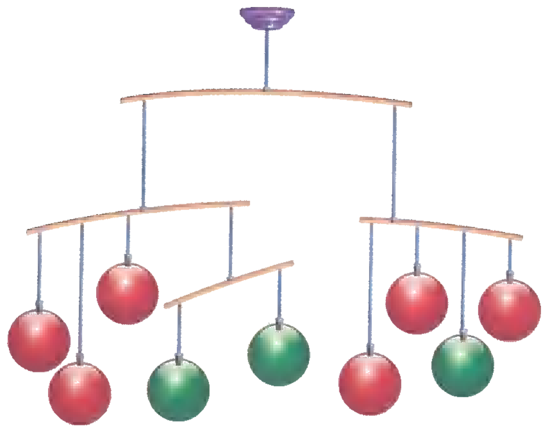
Para fazer um gráfico dessa variação de temperatura, a professora pediu a Lucas que colocasse os dados por hora. Para calcular as temperaturas intermediárias, ele fez a média dos valores vizinhos conhecidos, isto é, a metade da soma desses valores. Qual a média encontrada para a temperatura nos seguintes horários:

a) 9 horas?

b) 11 horas?

DESAFIO

11. O passatempo preferido de Ari é construir delicados móbiles. Veja o último que ele fez:



BENTINHO

Reproduzam o móbile no caderno e coloquem em cada bolinha um número inteiro entre −6 e +7, de modo que a soma dos números da parte esquerda seja igual à soma dos números da parte direita do móbile. Cada número desse intervalo pode ser usado apenas uma vez.

SAIBA QUE

Móbile é uma escultura móvel, feita de material leve, suspensa no espaço por fios, que se equilibra harmoniosamente. Ao mais leve movimento do ar, as pequenas peças respondem, mudando de posição.

CAPÍTULO 8

MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Apesar de a ideia de número negativo ser largamente utilizada desde o século XVII, ela só foi plenamente aceita a partir do século XIX.

A multiplicação com números negativos foi mais difícil de ser aceita e compreendida naquela época. Passou-se um longo tempo para que os matemáticos pudessem dar um resultado para a multiplicação de dois números negativos.

Para multiplicar números inteiros, acompanhe os casos a seguir.

1º caso: Os dois fatores são números inteiros positivos.

Considerando a multiplicação dos números naturais, temos:

- $(+6) \cdot (+4) = 6 \cdot 4 = 24$
  - $+4 = 4$
  - $+6 = 6$
- $(+8) \cdot (+15) = 8 \cdot 15 = 120$
  - $+15 = 15$
  - $+8 = 8$

> A multiplicação de dois números inteiros positivos dá um número inteiro positivo.

2º caso: Um fator é número inteiro positivo e o outro é número inteiro negativo.

- $(+6) \cdot (-4) = 6 \cdot (-4) = (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = -24$

Consideremos, agora, a multiplicação:

- $(-6) \cdot (+4) = -(+6) \cdot (+4) = -(+24) = -24$

Então: $(+6) \cdot (-4) = -24$ e $(-6) \cdot (+4) = -24$

> A multiplicação de um número inteiro positivo por um número inteiro negativo, em qualquer ordem, resulta em um número inteiro negativo.

3º caso: Os dois fatores são números inteiros negativos.

Consideremos o quadro de multiplicação:

×	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2
−6	?	?	?	?	?	?	?

Sabemos que: $(-6) \cdot 0 = 0$ $(-6) \cdot (+1) = -1$ $(-6) \cdot (+2) = -12$

Colocando esses resultados no quadro, temos:

×	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2
−6	?	?	?	?	0	−6	−12

Observando a linha dos resultados, notamos que cada resultado à sua esquerda tem 6 unidades a mais que o resultado anterior. Mantendo esse padrão, preenchemos o restante do quadro:

×	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2
−6	+24	+18	+12	+6	0	−6	−12

A multiplicação de dois números inteiros negativos resulta em um número inteiro positivo.

Observação: Usando o oposto de um número inteiro, podemos chegar ao mesmo resultado. Veja os exemplos:

- $(-6) \cdot (-2) = -(+6) \cdot (-2) = -(-12) = +12$
- $(-6) \cdot (-4) = -(+6) \cdot (-4) = -(-24) = +24$

Para determinar o produto de dois ou mais números inteiros (diferentes de zero), calculamos o produto dos módulos dos fatores e:

- se a quantidade de fatores negativos é par, o produto é um número positivo;
- se a quantidade de fatores negativos é ímpar, o produto é um número negativo.

Exemplos:

- $(+9) \cdot (+2) = +18$ **(nenhum fator negativo)**
- $(-13) \cdot (+6) = -78$ **(um fator negativo)**
- $(-20) \cdot (-2) = +40$ **(dois fatores negativos)**

Agora veja como multiplicar três ou mais números inteiros de dois modos diferentes:

- $(-7) \cdot (+2) \cdot (-5) = (-14) \cdot (-5) = +70$ ou $(-7) \cdot (+2) \cdot (-5) = +(7 \cdot 2 \cdot 5) = +70$
  (2 fatores negativos → produto positivo)

- $(+2) \cdot (-15) \cdot (-3) \cdot (-6) = (-30) \cdot (+18) = -540$ ou $(+2) \cdot (-15) \cdot (-3) \cdot (-6) =$
  $= -(2 \cdot 15 \cdot 3 \cdot 6) = -(90 \cdot 6) =$
  $= -540$
  (3 fatores negativos → produto negativo)

Propriedades da multiplicação

1ª propriedade: O produto de dois números inteiros é sempre um número inteiro.

- $(+7) \cdot (+9) = +63$, e $+63 \in \mathbb{Z}$.
- $0 \cdot (-41) = 0$, e $0 \in \mathbb{Z}$.
- $(-2) \cdot (+16) = -32$, e $-32 \in \mathbb{Z}$.
- $(-7) \cdot (-11) = +77$, e $+77 \in \mathbb{Z}$.

2ª propriedade: A ordem dos fatores não altera o produto.

$$\left.\begin{array}{l}(-9) \cdot (+12) = -108 \\ (+12) \cdot (-9) = -108\end{array}\right] \rightarrow (-9) \cdot (+12) = (+12) \cdot (-9)$$

Essa é a propriedade **comutativa**.

3ª propriedade: Associando-se os fatores de maneiras diferentes, obtém-se o mesmo produto.

$$(-10) \cdot (+8) \cdot (+5) = (-80) \cdot (+5) = -400$$

$$(-10) \cdot (+8) \cdot (+5) = (-10) \cdot (+40) = -400$$

Então:

$[(-10) \cdot (+8)] \cdot (+5) = (-10) \cdot [(+8) \cdot (+5)]$

Essa é a propriedade **associativa**.

4ª propriedade: O número $+1$ é o elemento neutro da multiplicação de números inteiros.

- $(+8) \cdot (+1) = (+1) \cdot (+8) = +8$
- $(-10) \cdot (+1) = (+1) \cdot (-10) = -10$
- $1 \cdot (-400) = (-400) \cdot 1 = -400$
- $(+25) \cdot 1 = 1 \cdot (+25) = +25$

Essa é a propriedade da existência do **elemento neutro**.

5ª propriedade: Para multiplicar um número inteiro por uma soma algébrica, podemos multiplicar cada parcela pelo número e adicionar, a seguir, os resultados obtidos.

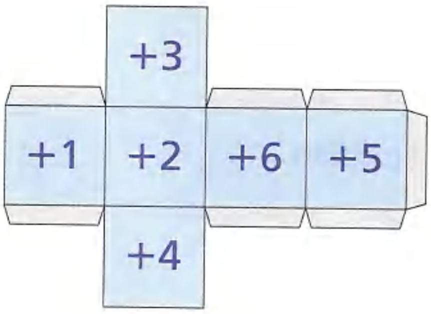
- $(+6) \cdot [(+3) + (-5)] = (+6) \cdot (+3) + (+6) \cdot (-5) = (+18) + (-30) = 18 - 30 = -12$
- $(-9) \cdot (-3 + 7) = (-9) \cdot (-3) + (-9) \cdot (+7) = (+27) + (-63) = +27 - 63 = -36$

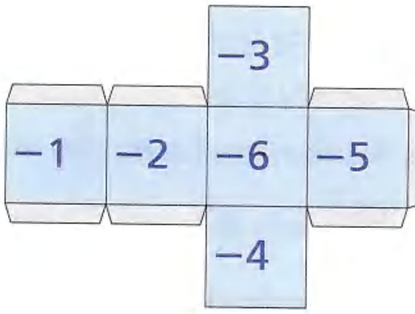
Essa é a propriedade **distributiva** em relação à adição algébrica.

● PARA QUEM QUER MAIS

O jogo dos produtos

Você e dois colegas vão se divertir com o "jogo dos produtos". Primeiro, vocês devem reproduzir duas vezes cada um destes dados e, depois, montá-los.





EDITORIA DE ARTE

Agora, reproduzam os tabuleiros I, II e III em papel quadriculado, sem pintá-los.

Tabuleiro I

×	+1	+2	+3	+4	+5	+6
+1	+1	+2	+3	+4	+5	+6
+2	+2	+4	+6	+8	+10	+12
+3	+3	+6	+9	+12	+15	+18
+4	+4	+8	+12	+16	+20	+24
+5	+5	+10	+15	+20	+25	+30
+6	+6	+12	+18	+24	+30	+36

Tabuleiro II

×	−1	−2	−3	−4	−5	−6
+1	−1	−2	−3	−4	−5	−6
+2	−2	−4	−6	−8	−10	−12
+3	−3	−6	−9	−12	−15	−18
+4	−4	−8	−12	−16	−20	−24
+5	−5	−10	−15	−20	−25	−30
+6	−6	−12	−18	−24	−30	−36

Regras do jogo:

1. Os jogadores tiram par ou ímpar para ver quem primeiro vai escolher o tabuleiro.

2. Os jogadores escolhem uma cor diferente de lápis e dois dados:

- para o tabuleiro I, usem os dados com números positivos.
- para o tabuleiro II, usem um dado com números positivos e outro com números negativos.
- para o tabuleiro III, usem os dados com números negativos.

3. Cada jogador, na sua vez, lança os dados, calcula o produto dos números das faces superiores e pinta o quadriculado do tabuleiro que tem o resultado obtido.

Tabuleiro III

×	−1	−2	−3	−4	−5	−6
−1	+1	+2	+3	+4	+5	+6
−2	+2	+4	+6	+8	+10	+12
−3	+3	+6	+9	+12	+15	+18
−4	+4	+8	+12	+16	+20	+24
−5	+5	+10	+15	+20	+25	+30
−6	+6	+12	+18	+24	+30	+36

4. Ganha o jogo o competidor que conseguir pintar primeiro uma linha, uma coluna ou uma diagonal em algum desses tabuleiros.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Efetue as seguintes multiplicações:

a) $(+7) \cdot (-5)$

b) $(-9) \cdot (-8)$

c) $(+10) \cdot (+3)$

d) $(+9) \cdot (-11)$

e) $(-7) \cdot (+6)$

f) $(+6) \cdot (+11)$

2. Descubra o número inteiro que deve substituir a letra *x*, em cada item, para que a igualdade seja verdadeira:

a) $x \cdot (+6) = -12$

b) $x \cdot (-10) = +50$

c) $(+9) \cdot x = +27$

d) $(-4) \cdot x = -16$

3. Dê o resultado de cada multiplicação:

a) $(-9) \cdot (+12) \cdot (-2)$

b) $(-7) \cdot (-10) \cdot (-5)$

c) $(-7) \cdot (-7) \cdot (-1) \cdot (-5)$

d) $(-20) \cdot (-2) \cdot (+6) \cdot (+4) \cdot (-1)$

4. Calcule de duas maneiras diferentes o valor da expressão:

$$-9 \cdot (-7 + 5)$$

5. Sabe-se que $x = (-10) \cdot [(+9) \cdot (-2)]$ e $y = [(-10) \cdot (+9)] \cdot (-2)$. Usando os sinais $=$ ou $\neq$, compare os números *x* e *y*.

6. Duas peças de um jogo de tabuleiro têm a forma de uma pirâmide de base triangular. As faces dessas peças são numeradas da seguinte maneira:

- Na 1ª peça: 1, −2, −3, 4.
- Na 2ª peça: −7, 8, 9, −10.

Na regra do jogo, a face sorteada é a que fica escondida, virada para baixo. Veja no quadro os resultados que os jogadores alcançaram.

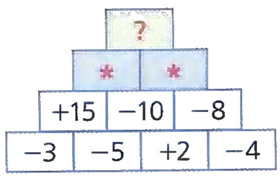
	−7	8	9	−10
1	(1, −7)	(1, 8)	(1, 9)	(1, −10)
−2	(−2, −7)	(−2, 8)	(−2, 9)	(−2, −10)
−3	(−3, −7)	(−3, 8)	(−3, 9)	(−3, −10)
4	(4, −7)	(4, 8)	(4, 9)	(4, −10)

Em quantos quadrinhos desse quadro o produto dos números obtidos é um número inteiro:

a) positivo?

b) negativo?

7. Descubra o segredo da figura e dê o número inteiro que deve estar no quadrinho que se encontra no topo, o qual possui o sinal de ?.



DESAFIO

8. Veja o que Laura e Miguel estão falando e faça o que eles pedem.

CAPÍTULO 9

DIVISÃO EXATA DE NÚMEROS INTEIROS

Na divisão exata de números naturais:

- $40 : 5 = 8$, logo $8 \cdot 5 = 40$
- $36 : 9 = 4$, logo $4 \cdot 9 = 36$

Vamos aplicar esses conhecimentos para estudar a divisão exata de números inteiros, ou seja, aquela em que o quociente também é um número inteiro.

- $(+20) : (-5) = q$, de modo que $q \cdot (-5) = +20$
  Assim: $q = -4$, pois $(-4) \cdot (-5) = +20$
  Logo: $(+20) : (-5) = -4$

- $(-20) : (+5) = q$, de modo que $q \cdot (+5) = -20$
  Assim: $q = -4$, pois $(-4) \cdot (+5) = -20$
  Logo: $(-20) : (+5) = -4$

- $(-20) : (-5) = q$, de modo que $q \cdot (-5) = -20$
  Assim: $q = +4$, pois $(+4) \cdot (-5) = -20$
  Logo: $(-20) : (-5) = +4$

De modo geral:

> Quando efetuamos uma divisão exata entre dois números inteiros não nulos, o quociente será um número inteiro positivo se o dividendo e o divisor tiverem mesmo sinal; caso contrário, o quociente será um número inteiro negativo.

Observações:

1 A divisão exata entre dois números inteiros não nulos nem sempre pode ser realizada no conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros.
Por exemplo: $(+9) : (-2)$ ou $(-20) : (-7)$ não são divisões exatas em $\mathbb{Z}$, pois o quociente não é um número inteiro.

2 Não existe divisão por zero em $\mathbb{Z}$ nem em qualquer outro conjunto numérico.
Vejamos, a seguir, outros exemplos de divisões em $\mathbb{Z}$.

- $(-120) : (-120) = +1$
  (sinais iguais → quociente positivo)
- $(-120) : (+120) = -1$
  (sinais diferentes → quociente negativo)
- $(+200) : (-50) = -4$
  (sinais diferentes → quociente negativo)
- $(-2\,205) : (-3) = +735$
  (sinais iguais → quociente positivo)

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Efetue as seguintes divisões:

a) (−15) : (+5)
b) (+32) : (+4)
c) (−20) : (−20)
d) (+18) : (−2)
e) (−37) : (+37)
f) (−44) : (−2)
g) (−25) : (+5)
h) 0 : (−10)
i) (−75) : (−5)
j) (−96) : (+6)
k) (+84) : (+21)
l) (+39) : (−13)
m) (−144) : (−24)
n) (+200) : (−25)
o) (+125) : (+25)
p) (−294) : (+49)

2. Para organizar o estudo da divisão de números inteiros, Mariana tem de responder a estas perguntas. Responda você também.

a) A divisão exata de um número inteiro positivo por um número inteiro negativo resulta em um número inteiro positivo ou negativo?

b) Qual é o resultado da divisão de zero por um número inteiro negativo?

c) Em uma divisão exata de números inteiros, os dois números possuem o mesmo sinal. Essa divisão tem como resultado um número inteiro positivo ou negativo?

d) Qual é o resultado da divisão de zero por um número inteiro positivo?

3. Sabendo que $x = (-16) : [(-4) : (-4)]$ e $y = [(-16) : (-4)] : (-4)$ e usando os sinais $=$ ou $\neq$, compare os números *x* e *y*.

4. Qual é o valor do número inteiro *N* quando:

a) N : (−5) = −8
b) (−160) : N = +20
c) (−360) : (−12) = N
d) N : (+21) = 0

5. Três das divisões seguintes não apresentam resposta no conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros. Quais são essas divisões?

a) (+9) : (−9)
b) (−2) : (+1)
c) (−3) : (−2)
d) (+11) : (+5)
e) 0 : (+5)
f) (+7) : 14

6. Sabe-se que *x* e *y* são números inteiros $y \neq 0$. Se $\frac{x}{y} = 1$, o que se pode concluir? E se o quociente exato é −1, o que podemos dizer sobre *x* e *y*?

7. Determine cada quociente a seguir.

- −40 : (−20)
- 40 : (−20)
- −40 : 20
- 40 : 20
- −400 : (−2)
- +400 : (+20)
- −400 : (−20)
- 400 : (−20)

8. Observe o quadro seguinte:

+200	:	−8	=	A
−285	:	−5	=	B
−246	:	+6	=	C

De acordo com o quadro, qual o valor de

a) A + B + C?
b) A + B − C?
c) A − B − C?

9. No quadro, há algumas divisões:

(−120) : (−10)		(+96) : (−16)
	(+150) : (+15)	
(−60) : (+12)		(+48) : (+24)
	(−200) : (−50)	
(+80) : (−8)		(−121) : (+11)

Quanto dá a soma dos resultados dessas divisões?

CAPÍTULO 10

POTENCIAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Você já deve ter estudado a potenciação de números naturais:

$$\underset{\text{base}}{a}^{\overset{\text{expoente}}{n}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}, \text{ com } a \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1$$

Agora estudará a potenciação de números inteiros.

PENSE E RESPONDA

Responda às questões no caderno.

1. Calcule:

a) $(+1)^2$	**d)** $(-1)^4$	**g)** $(+1)^3$	**j)** $(-1)^5$
b) $(-1)^2$	**e)** $(+1)^6$	**h)** $(-1)^3$	**k)** $(+1)^7$
c) $(+1)^4$	**f)** $(-1)^6$	**i)** $(+1)^5$	**l)** $(-1)^7$

2. O que você pode notar nos casos em que:

a) o expoente é um número par?

b) o expoente é um número ímpar?

Quando tratamos da potenciação de números inteiros com expoente natural, sendo a base um número inteiro positivo ou negativo, temos dois casos a considerar.

1º caso: O expoente é um número par.

- $(+2)^4 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +16 \rightarrow$ a potência é um número positivo
- $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16 \rightarrow$ a potência é um número positivo

Esse fato se repete sempre que o expoente é um número par.

> Quando o expoente for um **número par**, a potência será sempre um **número inteiro positivo**.

2º caso: O expoente é um número ímpar.

- $(+2)^3 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +8 \rightarrow$ a potência tem o mesmo sinal da base
- $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8 \rightarrow$ a potência tem o mesmo sinal da base

Esse fato se repete sempre que o expoente é um número ímpar.

> Quando o expoente for um **número ímpar**, a potência terá sempre o mesmo **sinal de base**.

É importante observar que:

- Para todo número inteiro *a*, definimos $a^1 = a$.
- Para todo número inteiro *a*, com $a \neq 0$, definimos $a^0 = 1$.

Exemplos:

- $(+9)^1 = +9$
- $0^1 = 0$
- $(-8)^1 = -8$
- $(+9)^0 = 1$
- $10^0 = 1$
- $(-8)^0 = 1$

Propriedades da potenciação em $\mathbb{Z}$

Vejamos, a seguir, as propriedades da potenciação no conjunto $\mathbb{Z}$:

1ª propriedade: Produto de potências de mesma base.

- $(+5)^3 \cdot (+5)^6 = (+5)^{3+6} = (+5)^9$
- $(-2)^4 \cdot (-2)^6 \cdot (-2)^5 = (-2)^{4+6+5} = (-2)^{15}$

2ª propriedade: Quociente de potências de mesma base.

- $(+6)^5 : (+6)^2 = (+6)^{5-2} = (+6)^3$
- $(-10)^8 : (-10)^3 = (-10)^{8-3} = (-10)^5$

3ª propriedade: Potência de uma potência.

- $[(+10)^2]^5 = (+10)^{2 \cdot 5} = (+10)^{10}$
- $[(-8)^3]^2 = (-8)^{3 \cdot 2} = (-8)^6$

4ª propriedade: Potência de um produto ou de um quociente.

- $[(+6) \cdot (-5)]^2 = (+6)^2 \cdot (-5)^2$
- $[(-10) : (+2)]^3 = (-10)^3 : (+2)^3$

Observação:

As expressões $(-2)^2$ e -2^2 são diferentes.

- $(-2)^2$ representa o quadrado do número -2; assim: $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$
- -2^2 representa o oposto do quadrado do número 2; assim: $-2^2 = -(2 \cdot 2) = -4$

Sempre que o expoente é par, temos essa situação.

No entanto, se o expoente é ímpar, vejamos o que ocorre, por exemplo, com $(-2)^3$ e -2^3.

- $(-2)^3$ representa o cubo do número -2; assim: $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$
- -2^3 representa o oposto do cubo do número 2; assim: $-2^3 = -(2 \cdot 2 \cdot 2) = -8$

Embora essas expressões tenham significados diferentes, no caso do expoente ímpar os resultados obtidos são iguais.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Se o número *x* é inteiro negativo, o número x^2 será inteiro positivo ou negativo?

2. Sabe-se que o número *a* é inteiro negativo. O número expresso por a^3 será inteiro positivo ou negativo?

3. Calcule o valor de:

a) $(+8)^2$

b) $(-8)^2$

c) $(+8)^3$

d) $(-8)^3$

e) $(-1)^8$

f) $(-100)^0$

g) $(-100)^1$

h) $(+1)^{101}$

i) $(-1)^{101}$

j) $(+1)^{100}$

k) $(-1)^{100}$

l) $(-10)^6$

4. Aplicando as propriedades com potências de mesma base, reduza cada expressão a uma só potência:

a) $(-8)^5 \cdot (-8) \cdot (-8)^4$

b) $[(+2)^6]^2$

c) $(-10)^9 : (-10)^6$

d) $(+9) \cdot (+9)^{11} \cdot (+9)^8$

e) $(-13)^{20} : (-13)^{14}$

f) $[(+7)^4]^3$

g) $(+10)^5 \cdot (+10) \cdot (+10)^8$

h) $(+20)^7 : (+20)^6$

5. Calcule o valor das expressões numéricas:

a) $(-9)^2$ e $(+5) \cdot (+16)$

b) $(-2)^4$ e $(+16) \cdot (-1)$

c) $(-6)^2$ e $(-7)^2 + 13^0$

d) 5^2, $(-3)^3$ e $(-4)^2$

e) -11^2 e $(-4) \cdot (-5)$

f) $(-6)^2$, $(-2)^2$ e $(-1)^7$

g) $7 \cdot (-2)^2$ e $(-5)^2$

6. Sabe-se que $A = -(-2)^5$ e $B = -(+2)^5$. Nessas condições, qual é o valor de $A - B$?

7. João usou uma máquina de calcular para determinar a potência $(-1\,025)^5$. O número que ele encontrou é um número positivo ou negativo?

8. Se $a = (-1)^{100}$, $b = (+1)^{100}$, $c = (-1)^{101}$ e $d = (+1)^{101}$, calcule o valor de $a + b + c + d$.

9. Um número inteiro *x* é dado pela soma algébrica das potências em cada caso. Faça o que se pede.

a) $(-2)^{10}$, -2^{10} e $(-10)^3$

Determine o valor de *x*.

b) -1^4, $(-2)^0$, $(-10)^1$ e $(+10)^1$

Qual é o número inteiro oposto de *x*?

DESAFIO

10. Rodrigo escreveu uma operação em cada cartão.

$-5 + 9$	$(-2) \cdot (+3)$	$(-1)^8$	$-10 + 1$
$(+20) : (+4)$	$-6 - 6$	$(-6) \cdot (-6)$	$(-6)^2$
$(-6) : (-6)$	$(+7) \cdot (+2)$	$(-2)^5$	$-11 + 4$
$(-4) \cdot (-10)$	$(-1)^3$	$(-10) : (+2)$	$+9 + 6$

Em seguida, colocou todos os cartões em uma caixa.

a) Quantos cartões Rodrigo colocou na caixa?

b) Se ele tirar, ao acaso, um cartão da caixa, qual será a maior chance: sair um cartão cujo resultado da operação é um número inteiro positivo ou um número inteiro negativo?

c) Em quantos cartões do total o resultado da operação é um número inteiro positivo?

CAPÍTULO 11

RAIZ QUADRADA EXATA DE NÚMEROS INTEIROS

Considere a questão a seguir.

Quais os números inteiros cujos quadrados são iguais a 16?

Os números são +4 ou −4, pois: $(+4)^2 = +16$ e $(-4)^2 = +16$.

Raiz quadrada exata de um número inteiro positivo é um número inteiro positivo que, elevado ao quadrado, resulta no número inicial.

- A raiz quadrada de 16 é o número positivo +4. Indica-se: $\sqrt{16} = +4$

Observe que existe o oposto do número $\sqrt{16}$, que é $-\sqrt{16}$.

$-\sqrt{16} = -(+4) = -4$.

No entanto, nem sempre é possível determinar a raiz quadrada em $\mathbb{Z}$. Por exemplo, números como $\sqrt{10}$ e $\sqrt{-36}$ não estão definidos no conjunto dos números inteiros.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Qual é o número inteiro, se existir, que representa a raiz quadrada de:

a) 25?
b) 64?
c) −81?
d) 1?

2. Entre os números $\sqrt{9}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{37}$, $\sqrt{64}$ e $\sqrt{80}$, quais não são números inteiros?

3. Determine o valor de:

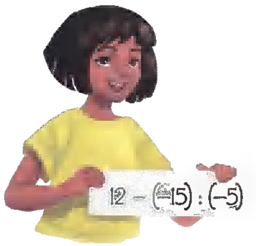
a) $\sqrt{36}$
b) $-\sqrt{64}$
c) $\sqrt{100}$
d) $-\sqrt{49}$
e) $\sqrt{400}$
f) $-\sqrt{900}$
g) $-\sqrt{2\,500}$
h) $\sqrt{144}$

4. Existe algum número inteiro que represente $\sqrt{-25}$? Justifique.

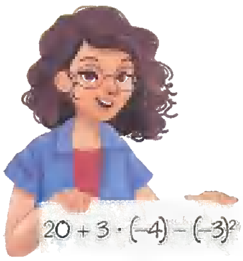
CAPÍTULO

12 EXPRESSÕES NUMÉRICAS

Maria e Sueli participam de uma gincana. Elas devem obter o valor numérico da expressão escrita no cartão que cada uma sorteou. Veja a seguir como elas calcularam.



$$12 - \underbrace{(-15) : (-5)} =$$
$$= 12 - (+3) =$$
$$= 12 - 3 =$$
$$= 9$$



ILUSTRAÇÕES: DAYANE RAVEN

$$20 + 3 \cdot (-4) - (-3)^2 =$$
$$= 20 + \underbrace{3 \cdot (-4)} - (+9) =$$
$$= 20 - 12 - (+9) =$$
$$= 20 - 12 - 9 =$$
$$= 20 - 21 =$$
$$= -1$$

Observe que, nas expressões numéricas com números inteiros, também seguimos a mesma ordem das operações válidas para as expressões com números naturais:

- primeiro resolvemos as raízes quadradas e as potenciações, na ordem em que aparecem;
- em seguida, as divisões e as multiplicações, na ordem em que aparecem;
- por último, a adição algébrica.

Além disso, devemos respeitar a eliminação dos sinais de associação (parênteses, colchetes e chaves).

Seguindo a ordem estabelecida, vamos calcular o valor da expressão numérica:

$$(-5 + 2)^2 : (-9) - [\sqrt{4} \cdot (-4 - 2) - (-1)^3 \cdot (-5 + 8)] =$$
$$= (-3)^2 : (-9) - [\sqrt{4} \cdot (-6) - (-1)^3 \cdot (+3)] = \longrightarrow \text{calculamos o interior dos parênteses}$$
$$= (+9) : (-9) - [2 \cdot (-6) - (-1) \cdot (+3)] = \longrightarrow \text{efetuamos as raízes e as potenciações}$$
$$= (-1) - [(-12) - (-3)] = \longrightarrow \text{efetuamos as divisões e as multiplicações}$$
$$= -1 - [-12 + 3] = \longrightarrow \text{eliminamos os parênteses}$$
$$= -1 - [-9] = \longrightarrow \text{calculamos o interior dos colchetes}$$
$$= -1 + 9 = \longrightarrow \text{eliminamos os colchetes}$$
$$= 8$$

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Calcule o valor das seguintes expressões numéricas:

a) $81 + (-20) \cdot (+4)$
b) $(-4) \cdot (-7) - 30$
c) $-23 - (-6) \cdot (+3)$
d) $(-9) \cdot (+6) - (+2) \cdot (-27)$
e) $19 - (-4) \cdot (+5)$
f) $7 \cdot (-3) - 9 \cdot (-6) + 11 \cdot (-2)$
g) $(+5) \cdot (+11) - 37 - (-2) \cdot (+14)$
h) $18 - 3 \cdot (-7) + 9 \cdot (-4) - 20$

2. Calcule o valor de *N*, quando:

a) $N = 2 \cdot (+7) + 5 \cdot (-2)$
b) $N = (-6) \cdot (-3) +2 \cdot (-6)$
c) $N = 3 \cdot (+8) - 7 \cdot (-7)$
d) $N = 2 \cdot (+10) + 5 \cdot (-2) - 10$
e) $N = 3 \cdot (-1) - 5 \cdot (-1) + 4 \cdot (-1)$
f) $N = 10 - (-1) + (-1) \cdot (+3) - 2 \cdot (+3) + 2$
g) $N = -4 + (-1) - (+5) \cdot (-3) - 4 + 7 \cdot (-2)$
h) $N = 8 \cdot (-5) - (-7) \cdot (+2) - 3 - 4 \cdot$
$\cdot (-1) + 6$

3. (UEL-PR) Considere dois números inteiros, *a* e *b*, consecutivos e positivos. Qual das expressões a seguir corresponde necessariamente a um número par?

a) $a + b$
b) $1 + ab$
c) $2 + a + b$
d) $2a + b$
e) $1 + a + b$

4. Um número inteiro *x* é tal que $x = (+2)^{10} + (-2)^{10} - 2^{10}$. Qual é o valor do número *x*? Qual é a raiz quadrada do número *x*?

5. Um número inteiro *y* é expresso por: $[(-1)^7 \cdot (+2)^3]^2 : (-4)^3$. Qual é o número inteiro oposto do quadrado de *y*?

6. Determine o valor das expressões numéricas a seguir.

a) $31 + (-40) : (+2)$
b) $-10 - 20 : (+4)$
c) $(+30) : (-6) + (-18) : (+3)$
d) $7 : (-7) + 2 \cdot (-6) + 11$
e) $(-36) : (-4) + 3 \cdot (-3)$
f) $35 - 6 \cdot (+6) + (+54) : (-6)$
g) $2 + (-75) : (-5) - 4 \cdot (-1)$
h) $4 \cdot (-20) - (-120) : (+2) + 28 : (-7)$

7. Calcule o valor das expressões numéricas e determine a diferença entre o maior e o menor valor obtido.

a) $(-9)^2 - (+5) \cdot (+16)$
b) $(-2)^4 : (+16) \cdot (-1)^7$
c) $(-6)^2 - (-7)^2 + 13^0$
d) $5^2 - (-3)^3 + (-4)^2$
e) $4 \cdot (-5)^3 + (-20)^2$
f) $11^2 - 4 \cdot (-5)^2 + 10^0$
g) $17 - 3 \cdot (-2)^2 - (-6)^2 \cdot (-1)^7$
h) $7 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2)^3 - 10^2$

8. O número *p* representa o valor da expressão $1 - (-\sqrt{100})$. Qual é o número *p*?

9. Se $x = \sqrt{81} : (4^2 - 5^2)$, qual é o valor de *x*?

10. Calcule o valor de $\sqrt{3600} : \sqrt{25}$

11. Calcule o que se pede.

a) A : B, em que:
$A = (-7 - 4) \cdot (-9 + 2) - (-72 + 13)$
$B = (-5 - 5) + (-9 - 4 + 6)$

b) A − B, em que:
$A = (-9 - 3) : (-1 + 7)$
$B = [10 - (-4 - 3)] \cdot (-2)^3$

c) $(A - B)^2$, em que:
$A = (-50) : (-5 - 5) \cdot (-5)$
$B = [(-8) : (+2) - 7 - (-1)] \cdot 5$

TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

Análise de gráficos com números negativos

Atualmente, muito se fala sobre a importância de ter uma alimentação saudável e equilibrada; ocorrem avanços nas melhorias sanitárias das cidades e, na área da Medicina, há cada vez mais recursos para diagnosticar e prevenir doenças.

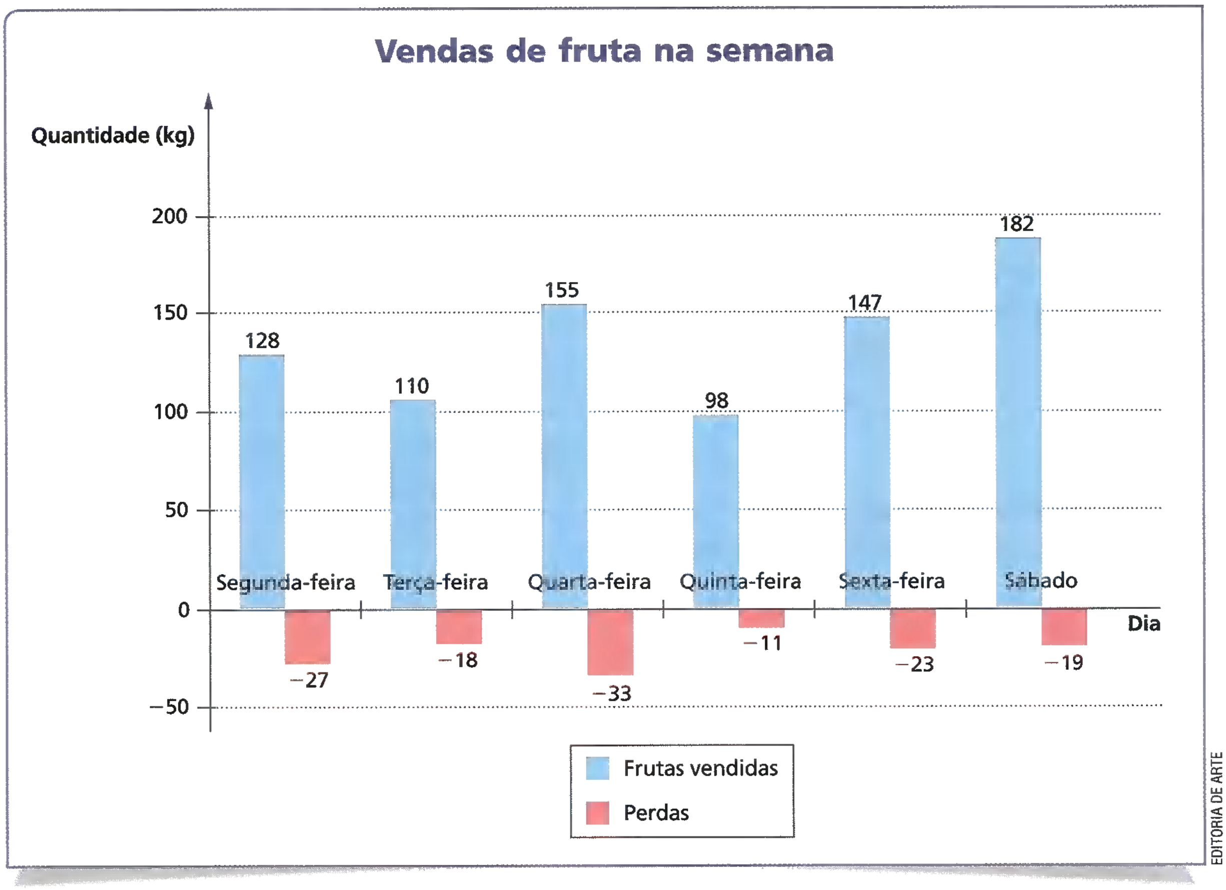
> A alimentação adequada e variada previne as deficiências nutricionais, favorece a saúde e protege contra as doenças infecciosas, por ser rica em nutrientes que podem melhorar a função imunológica. Uma alimentação saudável contribui também para a proteção contra as doenças crônicas não transmissíveis (DCNT), como diabetes, hipertensão arterial, acidente vascular cerebral, doenças cardíacas e alguns tipos de cânceres, que, em conjunto, estão entre as principais causas de morbidade, incapacidade e morte no Brasil e no mundo. Refeições saudáveis são aquelas preparadas com alimentos *in natura* e minimamente processados, com qualidade e quantidade adequada aos ciclos da vida, compondo refeições coloridas e saborosas, que incluem alimentos tanto de origem vegetal quanto animal. [....]
>
> Fonte: BRASIL. Ministério da Saúde. Desmistificando dúvidas sobre alimentação e nutrição. Disponível em: <http://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/desmistificando_duvidas_sobre_alimenta%C3%A7%C3%A3o_nutricao.pdf>. Acesso em: 20 set. 2018.

KOLDUNOV/SHUTTERSTOCK.COM

Pessoa fazendo uma refeição composta de vegetais.

Gustavo é comerciante e proprietário de um sacolão. Devido ao aumento da procura por frutas, verduras e legumes, ele precisou comprar mais mercadoria para atender aos consumidores. No entanto, para minimizar as perdas causadas pelo desperdício, ele faz, semanalmente, um levantamento da quantidade de frutas vendidas e de frutas que perecem na loja.

1. **Observe no gráfico a seguir esse levantamento feito por Gustavo em certa semana.**



Fonte: Dados coletados por Gustavo.

Agora, de acordo com os dados apresentados no gráfico, responda às questões.

a) Em qual dia dessa semana foi desperdiçada a maior quantidade de frutas? Quantos quilogramas de frutas foram desperdiçados nesse dia?

b) Em qual dia dessa semana foi vendida a menor quantidade de frutas? Quantos quilogramas de frutas foram vendidos nesse dia?

c) Quantos quilogramas de frutas pereceram na loja de Gustavo nessa semana?

d) Usando os dados representados nesse gráfico e o que você estudou sobre números negativos, elabore um problema e dê para um colega resolver. Depois, confira a resposta.

2. **Muitos alimentos que são produzidos, principalmente frutas, verduras e legumes, não chegam ao consumidor devido ao desperdício no transporte e na distribuição. Com um colega, pesquise sobre esse assunto e elabore um texto para apresentar as informações que vocês descobrirem. O que poderia ser feito para minimizar esse tipo de desperdício de alimento?**

RETOMANDO O QUE APRENDEU

Responda às questões no caderno.

1. Dados os números inteiros -12, -10, -7, -2, 0, 1, 3, 7, 10, quantos deles são menores que o número inteiro -4?

a) 7
b) 6
c) 5
d) 4
e) 3

2. Calcule a diferença entre os números inteiros (-3) e (-1). O simétrico do número obtido é:

a) -2
b) $+2$
c) -4
d) $+4$
e) -1

3. Um termômetro marcava $+4$ °C pela manhã. À tarde, a temperatura chegou a -2 °C. A temperatura baixou nesse período:

a) 2 °C
b) 8 °C
c) 6 °C
d) 5 °C
e) 4 °C

4. Quando você calcula a soma entre o quadrado do número -1 e o cubo do número -1, você obtém:

a) 0
b) -1
c) $+1$
d) -2
e) $+2$

5. (UEPG-PR) Assinale o que for correto.

01. $(-1) + (+5) = -4$

02. $(-5) - (+5) = 10$

04. $(-3) \cdot (-4) = 12$

08. $(+12) : (-3) = 4$

16. $(-2)^2 = -4$

32. $(-2)^3 = -8$

(A resposta é dada pela soma das alternativas corretas.)

6. Calculando o valor da expressão numérica $(-3)^2 \cdot [-9 + (-3)^3] : (-3)^2$, vamos obter o número:

a) -36
b) $+36$
c) -27
d) $+27$
e) -18

7. Entre as potências $(+3)^5$, $(-7)^2$, -4^2, $(-2)^3$ e $(-1)^{10}$, quantas representam números inteiros negativos?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

8. Quantas sentenças a seguir são verdadeiras?

- $-2^4 = (-2)^4$
- $-2^3 = (-2)^3$
- $-2^0 = (-2)^0$
- $(+2)^6 = (-2)^6$

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

9. Na reunião de condomínio do edifício Vila Nova, o síndico apresentou o saldo das contas do prédio nos primeiros seis meses do ano, conforme o quadro:

SALDO – Edifício Vila Nova

Janeiro	crédito de	R$	2 400,00
Fevereiro	crédito de	R$	850,00
Março	débito de	R$	680,00
Abril	crédito de	R$	450,00
Maio	débito de	R$	1 720,00
Junho	débito de	R$	750,00

Após esses primeiros seis meses, o condomínio ficou com:

a) débito de 550 reais.
b) débito de 530 reais.
c) crédito de 550 reais.
d) crédito de 530 reais.

10. Observe o extrato bancário de Roberto:

Banco Forte Extrato 11/8/2019
Extrato de conta corrente
Agência: 001 Conta: 012345-6
Nome: Roberto Almeida

Data	Histórico	Valor
1/8	Saldo anterior	236,00
4/8	Cheque compensado	−51,00
	Saque cartão	−400,00
	Depósito	+1 320,00
7/8	Cheque compensado	−92,00
	Cheque compensado	−813,00
8/8	Cheque compensado	−45,00
10/8	Cheque compensado	−184,00
	Cheque compensado	−90,00
	Depósito	+352,00
	Saque cartão	−150,00
	Conta de luz	−46,00
	Cheque compensado	−120,00

O saldo final de Roberto no dia 10/8/2019 foi:

a) positivo em 83 reais.
b) negativo em 83 reais.
c) positivo em 120 reais.
d) negativo em 150 reais.

11. São dados os números inteiros: $x = -(-3)^3 - (2^2)^3$ e $y = (-2)^3 - (-3)^2 - (-5)^0 + (-2)^4$. O produto $x \cdot y$ é igual a:

a) +74 **b)** −74 **c)** −37 **d)** +37

12. Considere a expressão: $(-10)^3 - \sqrt{9} \cdot (-10)^2 \cdot (-2)^2$. O número que representa a metade do valor dessa expressão é:

a) −200 **b)** −100 **c)** +100 **d)** −1 100

13. Quando multiplicamos um número *x* pelo quadrado do número (−10), obtemos o número −500. O número *x* é:

a) +5 **c)** −25 **e)** −10
b) −5 **d)** +25

DESAFIO

14. (FMTM-MG) XYZ4 e X4YZ representam dois números inteiros positivos de quatro algarismos. Se X4YZ excede XYZ4 em 288 unidades, então Z − Y é igual a:

a) 23 **c)** 1 **e)** 5
b) 21 **d)** 3

UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, estudamos o conjunto dos números inteiros. Esse assunto, a partir de agora, será abordado e utilizado em quase todos os conceitos matemáticos a serem estudados.

Os tópicos abordados nesta Unidade foram:

- números negativos e suas aplicações, por exemplo, medição e registro climático de temperaturas, saldo bancário etc.;
- estrutura do conjunto dos números inteiros;
- operações com números inteiros e suas propriedades, incluindo a potenciação e a raiz quadrada.

Considerando a importância do conjunto dos números inteiros, sugerimos a você que faça um fichamento dos assuntos abordados nesta Unidade, que poderá conter exemplos dos conceitos estudados e de cada operação, bem como lembretes que você utilizará em seus estudos.

Vamos retomar as aprendizagens da Unidade 2 e refletir sobre elas:

- Que conjunto numérico está contido no conjunto dos números inteiros?
- Como podemos utilizar o conceito de módulo na comparação de números inteiros?
- Você consegue reconhecer, em seu cotidiano, situações em que há a presença de números inteiros?

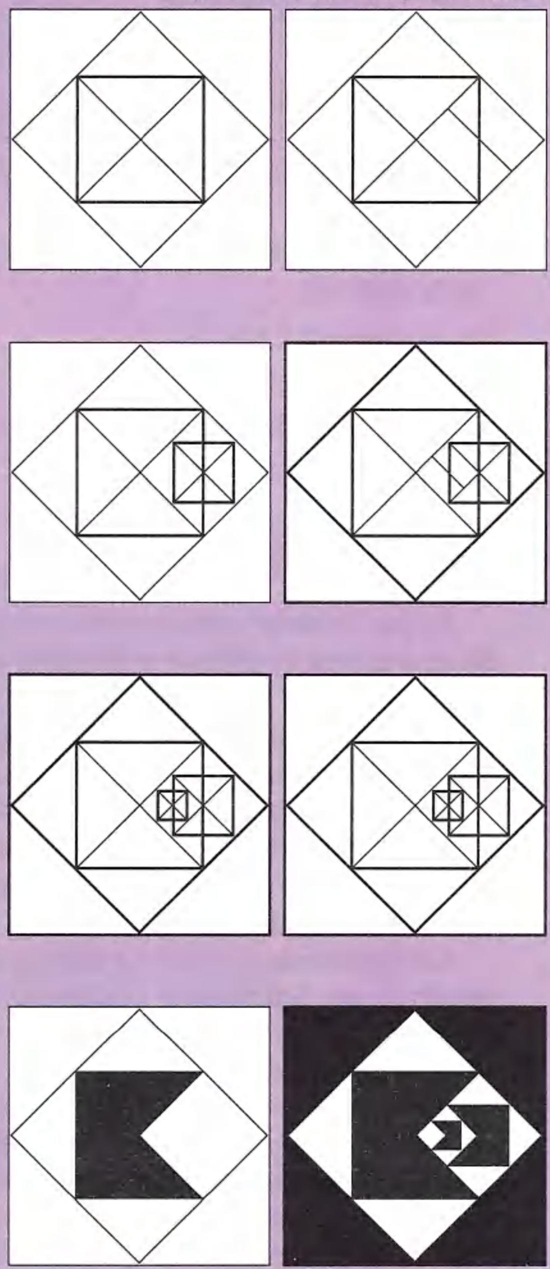
3 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E SIMETRIA

Desde as civilizações antigas, diversos artistas e filósofos buscam, na Matemática, explicações para compreender a beleza e a disposição de imagens. Essa percepção tem como um de seus objetivos criar mais harmonia nas obras.

Na página seguinte, apresentamos uma reprodução da obra **Função diagonal**, de Geraldo de Barros, que explora figuras geométricas e transformações no plano.

KIRSTEN HINTE/SHUTTERSTOCK.COM

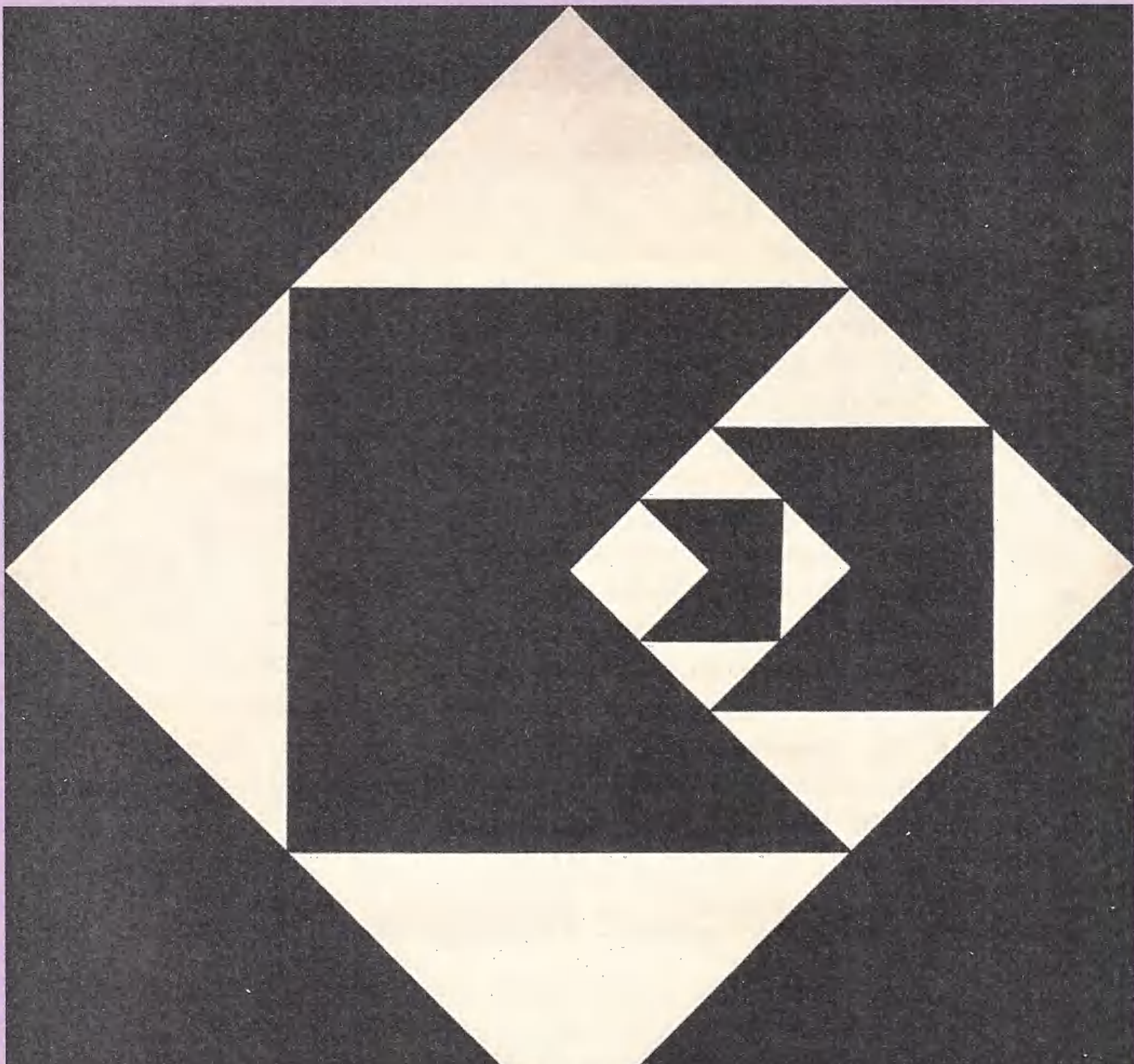
Esquema de construção da obra.



Esquema da obra final.

Agora, observe as figuras e responda no caderno.

- Você reconhece nessas representações figuras geométricas que possuem mesma forma e tamanho, mas estão em outra posição?
- Você identifica figuras que podem ser ampliações ou reduções de outras?
- Você conhece algum outro artista que utiliza figuras geométricas em suas obras?



COLEÇÃO PARTICULAR © LENORA E FABIANA DE BARROS

BARROS, G. de. **Função diagonal**. 1952. Esmalte sintético sobre kelmite, 62,9 cm × 62,9 cm.
Coleção Leonora e Fabiana de Barros.

CAPÍTULO

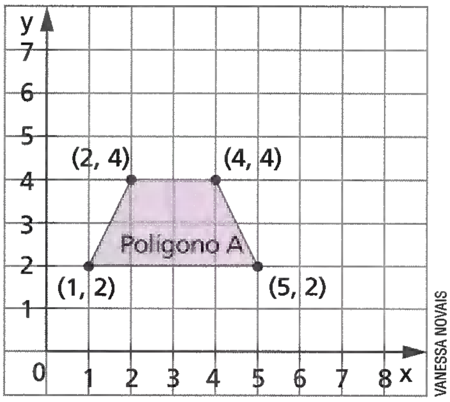
1

TRANSFORMAÇÕES NO PLANO

Polígonos e sistema de coordenadas

Como você já estudou, polígono é a reunião de uma figura plana formada por uma linha fechada simples, composta apenas de segmentos de reta, reunida com a região interna. Todo polígono tem vértices, lados e ângulos internos.

Além disso, vimos que podemos representar um polígono em um sistema de coordenadas, que é composto de duas retas numéricas (eixos) que formam entre si quatro ângulos de 90° (eixos perpendiculares) determinando um plano chamado de plano cartesiano. O par de números (x, y) representa as coordenadas de um ponto do plano cartesiano. Veja a representação de um quadrilátero no plano cartesiano (vamos chamá-lo de **Polígono A**).



Em polígonos, assim como em outras figuras geométricas, podem ser aplicadas **transformações geométricas**. Os polígonos obtidos por essas transformações são imagens do original e podem ter suas medidas dos lados alteradas, assim como sua posição no plano.

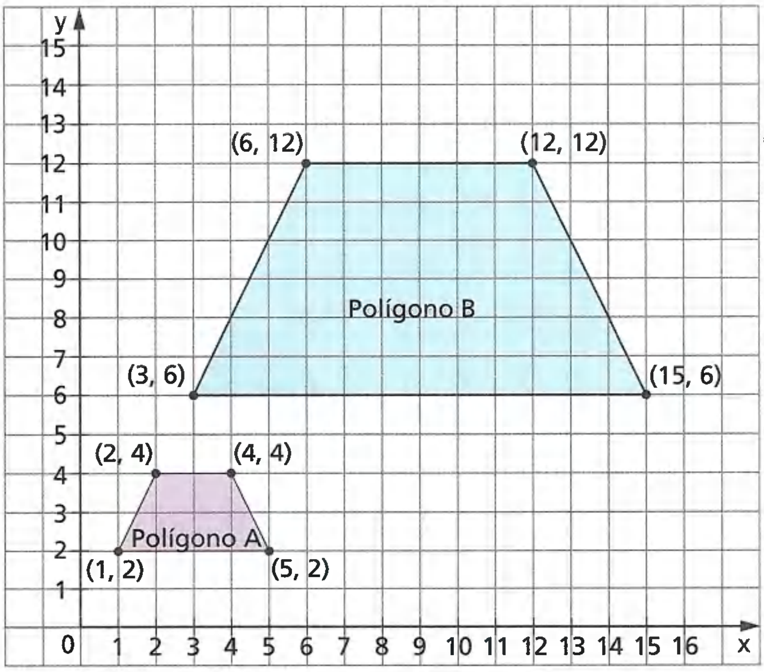
Ampliação e redução

Quando multiplicamos as coordenadas dos pontos de um polígono por um mesmo número não nulo, obtemos um segundo polígono que é uma transformação no plano do primeiro polígono. De maneira prática, podemos efetuar essa multiplicação considerando as coordenadas dos vértices do polígono e traçar os respectivos lados.

Por exemplo, multiplicando por 3 as coordenadas dos vértices do Polígono A, obtemos os pontos (3, 6), (15, 6), (6, 12) e (12, 12). Podemos desenhar um novo quadrilátero (Polígono B) cujos vértices têm essas coordenadas, como mostra a figura a seguir.

O Polígono *B* é a figura obtida pela transformação efetuada no Polígono *A*.

Observe que ele também é um trapézio que tem o mesmo formato do trapézio original; alterou a posição e aumentou o tamanho, sem sofrer deformações. Nessa transformação foi feita uma **ampliação** de fator 3, o que significa que os lados do trapézio obtido medem 3 vezes a medida dos lados correspondentes do trapézio original.

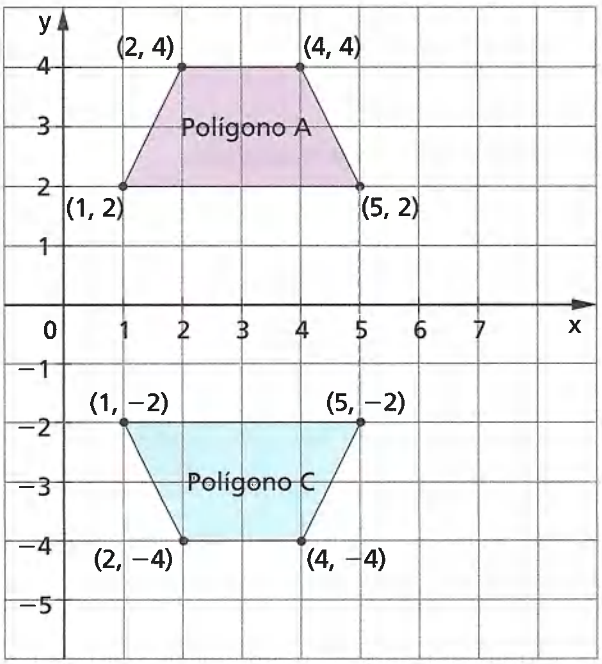


ILUSTRAÇÕES: VANESSA NOVAIS

Note que, se o polígono original fosse o Polígono *B* e o transformado fosse o Polígono *A*, a transformação aplicada seria uma **redução** de fator $\frac{1}{3}$, ou seja, os lados do trapézio original teriam sua medida reduzida à sua terça parte e os valores das coordenadas de seus pontos seriam divididos por 3.

Reflexão

Vamos, agora, observar outra transformação aplicada ao Polígono *A*, de tal forma que obteremos o **Polígono C**.



A transformação mostrada é obtida multiplicando apenas a coordenada do eixo vertical (*y*) de todos os pontos do Polígono *A* por −1. Assim, os vértices do Polígono *C* têm coordenadas (1, −2), (5, −2), (2, −4) e (4, −4).

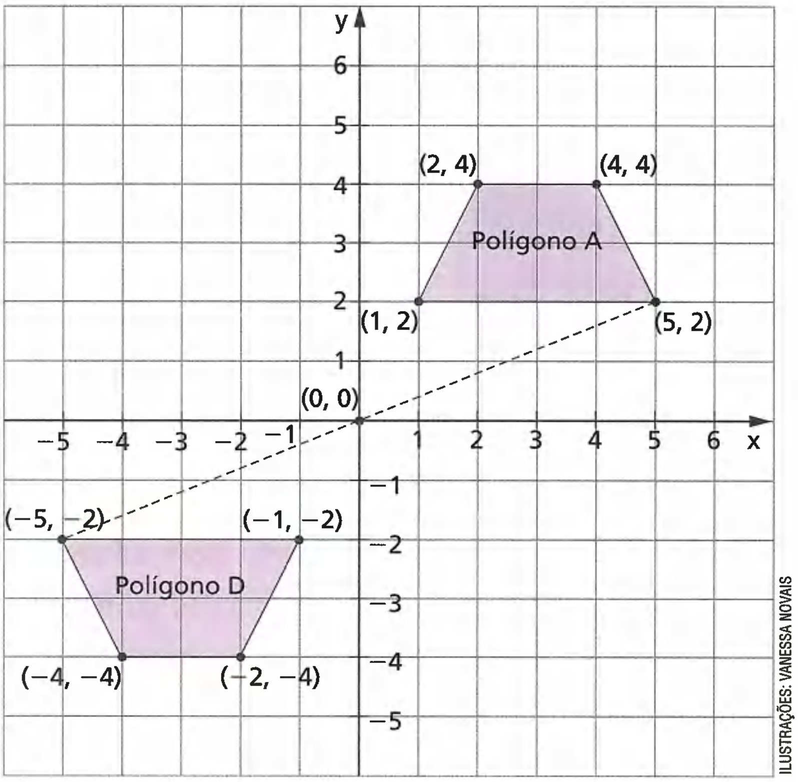
Essa transformação é chamada de **reflexão em relação a uma reta** (no caso, o eixo horizontal *x*) e pode gerar uma figura idêntica à original (mesma forma e tamanho) só que em posição invertida em relação ao eixo *x*.

SAIBA QUE

Cada uma das quatro regiões em que o plano fica dividido é denominada **quadrante**.

O Polígono *A* está no 1º quadrante e o Polígono *C*, no 4º.

Quando multiplicamos as coordenadas dos pontos do polígono *A* por −1, obtemos o Polígono *D*. Considerando as coordenadas do vértice, temos que os vértices do Polígono *D* são os pontos (−1, −2), (−5, −2), (−2, −4) e (−4, −4).



Essa transformação é chamada de **reflexão em relação a um ponto** (no caso, a origem (0, 0) do sistema de coordenadas), e o Polígono *D* tem a mesma forma e tamanho da figura original, ou seja, obteve-se um trapézio idêntico ao original só que em outra posição.

SAIBA QUE

O Polígono *D* está no 3º quadrante.

Ampliação e redução com o uso da malha quadriculada

PENSE E RESPONDA

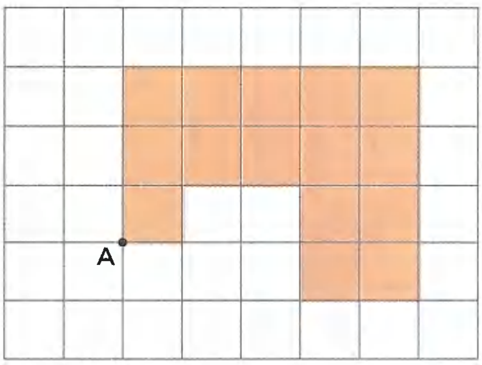
Resolva a questão no caderno.

1. Reproduza o polígono a seguir em uma malha quadriculada e responda.

a) Quantos lados de quadradinho compõem cada lado desse polígono?

b) Nessa mesma malha, desenhe um polígono com a mesma forma do polígono representado ao lado, mas triplicando a quantidade de lados de quadradinho que compõem cada lado do polígono original, e compare as duas figuras.

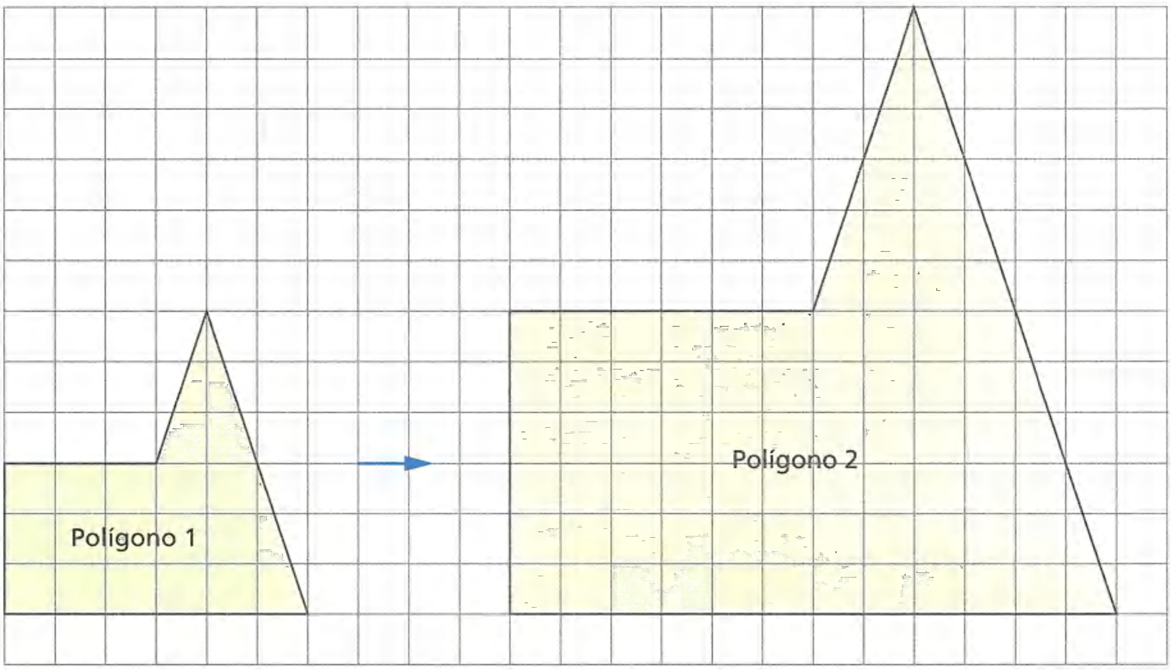
c) Ainda na mesma malha e mantendo a mesma forma, desenhe outro polígono reduzindo à metade a quantidade de lados de quadradinho que compõem cada lado e compare com o polígono original. Compare também os dois polígonos construídos entre si, do menor para o maior.



Podemos realizar ampliação e redução de figuras geométricas planas, como polígonos, também usando malha quadriculada. Dada uma figura desenhada em uma malha quadriculada, para obter sua imagem ampliada ou reduzida, basta multiplicar pelo fator de ampliação a quantidade de lados de quadradinho que compõem cada lado do polígono original.

Considere as situações a seguir.

1 Fazer uma ampliação de fator 2 do Polígono 1, mostrado a seguir, usando a mesma malha. Para isso, vamos dobrar a quantidade de lados de quadradinho que compõem seus lados, obtendo a figura transformada (Polígono 2).



VANESSA NOVAIS

Note que uma ampliação mantém a forma da figura original e aumenta o tamanho sem deformá-la, de acordo com o fator de ampliação.

Da mesma forma, para reduzir um polígono desenhado em uma malha quadriculada, basta multiplicar pelo fator de redução a quantidade de lados de quadradinho que compõem cada lado do polígono original.

Para obter a imagem ampliada de uma figura, o fator de multiplicação deve ser um número maior que 1; já para a redução esse valor deve ser um número menor que 1.

NÓS

Movimento da Arte Concreta no Brasil

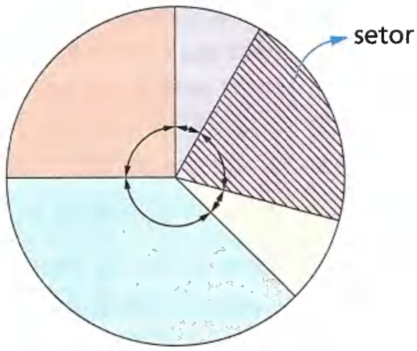
Nas páginas de abertura, você viu a reprodução da obra **Função diagonal**, de Geraldo de Barros. Esse artista transitou entre a pintura, a gravura, a fotografia e o *design* e foi um dos personagens do Movimento da Arte Concreta no Brasil, que teve seu período mais ativo nos anos 1950.

- Faça uma pesquisa sobre as características do Movimento da Arte Concreta no Brasil.

TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

Gráfico de setores

Em um gráfico de setores, o tamanho dos setores (cada uma das partes) indica o valor a que corresponde cada informação. Os setores são determinados por um ângulo cujo vértice está no centro do círculo, sendo, por isso, chamado de ângulo central.



O tamanho dos setores é diretamente proporcional ao percentual correspondente de cada informação, e a soma dos ângulos centrais de todos os setores de um círculo é 360°, assim como a soma dos percentuais representados por cada setor é 100%.

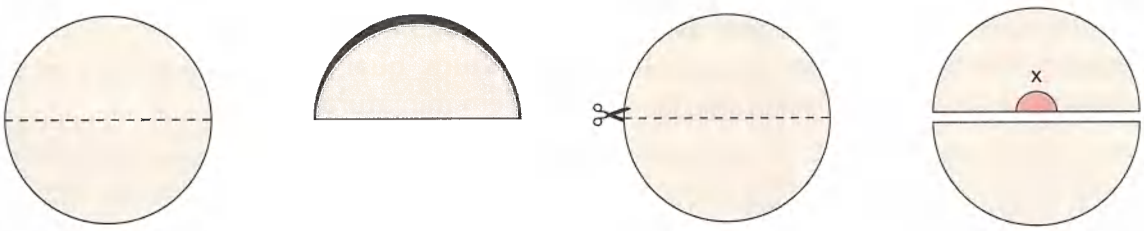
O uso de gráficos de setores é recomendado quando desejamos comparar um dos setores apresentados com o total.

Observe as construções. Depois, responda às questões no caderno.

1. Com o auxílio de dobraduras é possível dividir um círculo em partes iguais.

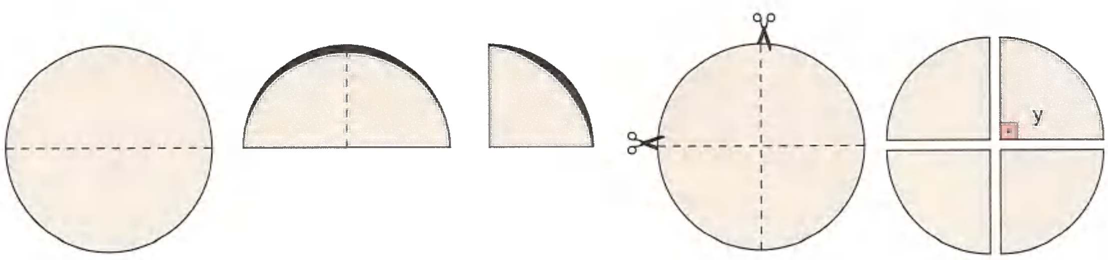
Construção 1

É possível obter 2 partes iguais, com apenas uma dobra.



Construção 2

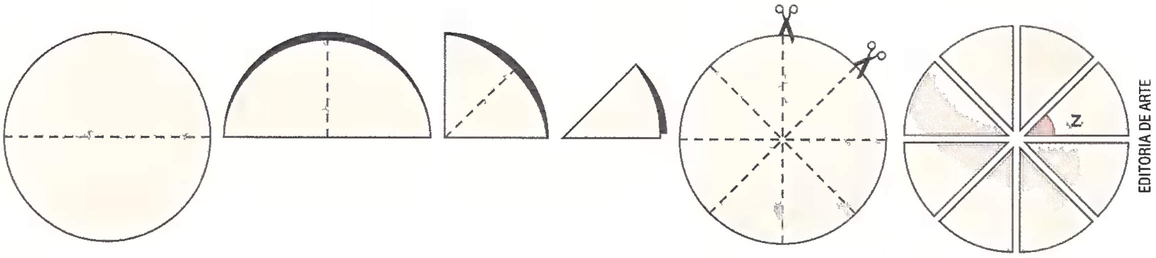
É possível obter 4 partes iguais, com duas dobras.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Construção 3

É possível obter 8 partes iguais, com três dobras.



a) Qual é a medida do ângulo *x*?

b) Cada uma das partes obtidas na construção 1 representa quantos por cento da área do círculo?

c) Qual é a medida do ângulo *y*?

d) Cada uma das partes obtidas na construção 2 representa quantos por cento da área do círculo?

e) Qual é a medida do ângulo *z*?

f) Cada uma das partes obtidas na construção 3 representa quantos por cento da área do círculo?

2. **Construa um círculo e divida-o por meio de dobraduras em um ângulo de 180°, um de 90° e dois de 45°. Assim, você formou 4 setores. Pinte cada um deles de uma cor diferente. Faça uma legenda indicando a cor que corresponde a cada ângulo.**

3. **Observando as construções feitas na questão 1, responda:**

a) Quantas dobras, no mínimo, serão necessárias para dividir um círculo em 16 partes iguais?

b) Que ângulo indica cada uma dessas partes?

c) Cada uma dessas partes representa quantos por cento da área do círculo?

4. **No caderno, faça um quadro como este e o complete.**

Número de partes em que o círculo foi dividido	Medida do ângulo que cada parte representa	Percentual que cada setor representa
2	180°	50%
4		
8		
16		

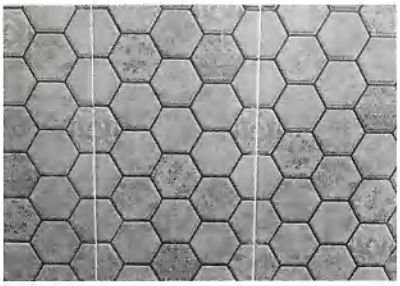
Agora, com base no quadro que você construiu, qual relação você pode observar entre o número de partes em que o círculo foi dividido, as medidas dos ângulos e o percentual que cada uma dessas partes representa?

5. **No caderno, construa um gráfico de setores que traduza a seguinte situação: Joana e suas irmãs ganham por mês uma quantia de seus pais. Joana, que é a mais velha, ganha o dobro de sua irmã Joaquina. As gêmeas Jussara e Júlia, as caçulas, ganham, cada uma, metade da quantia que Joaquina ganha.**

CAPÍTULO 2

SIMETRIA

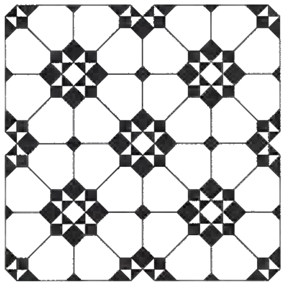
À medida que aprende novos conteúdos, você adquire uma nova visão do espaço ao seu redor e começa a reconhecer alguns dos conceitos estudados em vários ambientes; por exemplo, reconhecer figuras geométricas nas faces dos revestimentos que observa no dia a dia. Você já reparou que o revestimento de algumas calçadas e composições feitas com azulejos formam desenhos que se repetem? Esses são exemplos de **mosaicos**.


YOYE JANTAPOON/SHUTTERSTOCK.COM

Mosaico de textura cinza e preto.


MARCHELLO74/SHUTTERSTOCK.COM

Mosaico do calçadão da praia de Copacabana.


VECTOR GOODI/SHUTTERSTOCK.COM

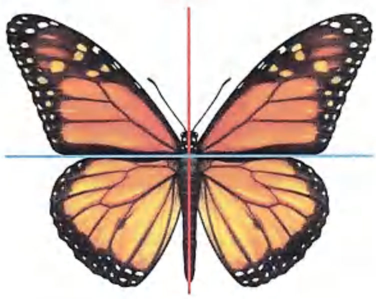
Mosaico vitoriano *vintage*.

A produção de mosaicos, em que um **padrão** (também chamado **motivo**) se repete, envolve diversos conceitos matemáticos ligados a figuras geométricas e **simetria**.

A ideia de simetria

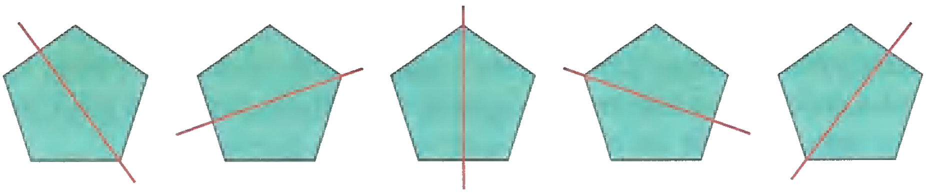
Você pode verificar se uma figura plana apresenta **simetria** traçando uma linha reta que divide a figura em duas partes de modo que dobrando a figura nessa linha, as duas partes se sobreponham e coincidam. Se essa linha reta existir, a figura apresenta simetria e a linha é um **eixo de simetria** da figura.

A simetria tem presença marcante na natureza e o ser humano procura reproduzi-la nos objetos e nas construções arquitetônicas que faz. Veja um exemplo:


LIGHTSPRING/SHUTTERSTOCK.COM

A imagem de uma borboleta nos dá a ideia de simetria. Observe que a reta vertical é um eixo de simetria, enquanto a reta horizontal não é.

Observe que uma figura não apresenta, necessariamente, um único eixo de simetria. Veja que, por exemplo, o pentágono regular possui cinco desses eixos.


VANESSA NOVAIS

Tipos de simetria

Vimos que uma figura plana pode apresentar simetria. No entanto, essa ideia não fica restrita apenas a uma figura. Duas figuras podem ser simétricas uma à outra.

Vamos, então, estudar os três principais tipos de simetria, que são: **reflexão**, **translação** e **rotação**.

Simetria de reflexão (ou axial)

PENSE E RESPONDA

Responda às questões no caderno.

1. Observe as Figuras 1 e 2 na malha.

a) Elas têm mesma forma? E mesmo tamanho?

b) Compare a posição que essas duas figuras se encontram em relação à linha vermelha. O que você observa?

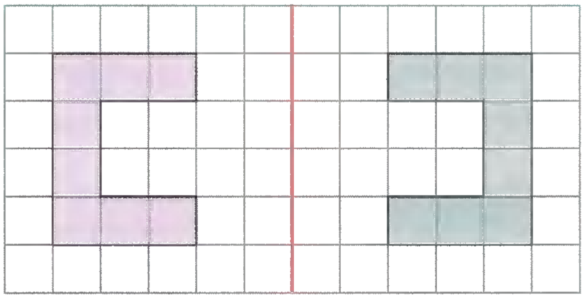
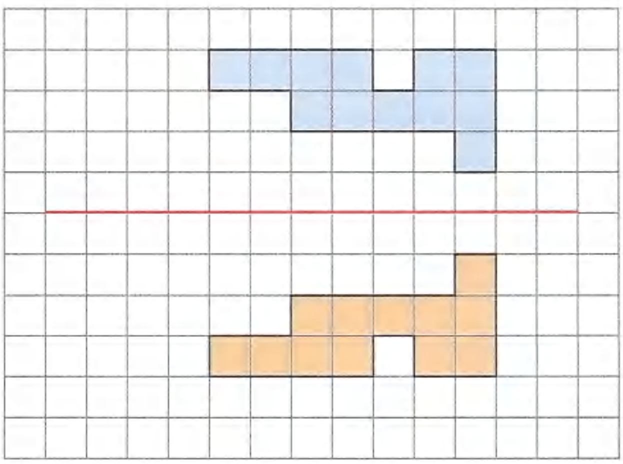


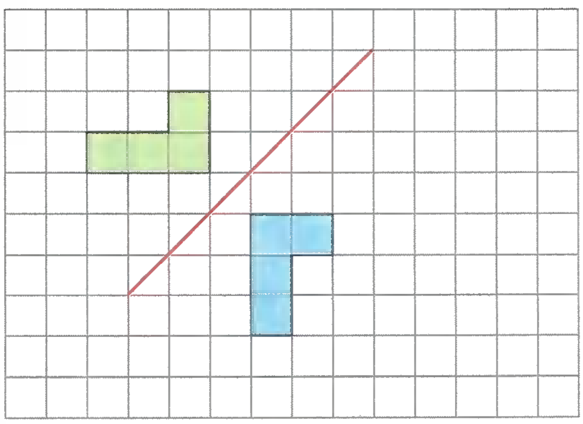
Figura 1. Figura 2.

Retomando o caso da seção *Pense e Responda*, se dobrássemos a malha quadriculada na linha vermelha, veríamos que as duas figuras se sobreporiam e coincidiriam. Assim, podemos perceber que uma figura é o reflexo da outra em relação à linha vermelha.

Quando duas imagens são reflexo uma da outra e esse reflexo se dá em relação a uma linha, dizemos que há **simetria de reflexão** e a linha é seu **eixo de reflexão** ou ainda que as figuras são **simétricas**.

Observe estes exemplos de simetria de reflexão:

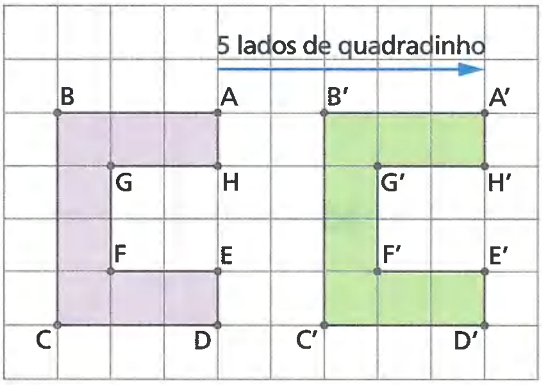




ILUSTRAÇÕES: VANESSA NOVAIS

Simetria de translação

Vamos retomar a Figura 1 e observá-la com a Figura 3, ambas desenhadas na malha quadriculada.



VANESSA NOVAIS

Figura 1. Figura 3.

O ponto *A* da Figura 1 tem, na Figura 3, o ponto *A′* como seu correspondente. Além disso, o ponto *A* está a cinco lados de quadradinho do ponto *A′*.

PENSE E RESPONDA

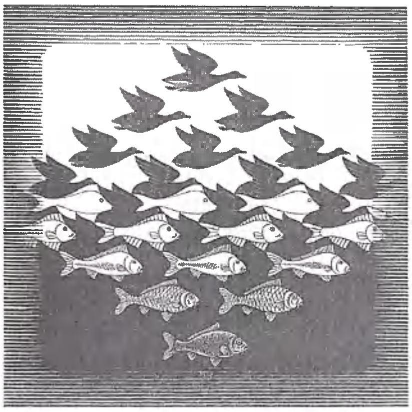
1. **Considerando os demais pontos destacados na Figura 1, a quantos lados de quadradinho de distância eles estão de seus correspondentes na Figura 3?**

Observe que todos os pontos da Figura 1 tem seus correspondentes na Figura 3 em uma mesma direção (horizontal), seguindo um mesmo sentido (da esquerda para a direita) e a uma mesma distância (cinco lados de quadradinho), conservando a forma e o tamanho da figura original.

SAIBA QUE

Transladar é transferir para outro lugar.

Note que as duas imagens podem ser sobrepostas de uma maneira que elas coincidam, no entanto, diferentemente da simetria de reflexão, uma imagem não é reflexo da outra. Nesse caso, dizemos que as duas figuras são **simétricas** e que há entre elas uma **simetria de translação**.



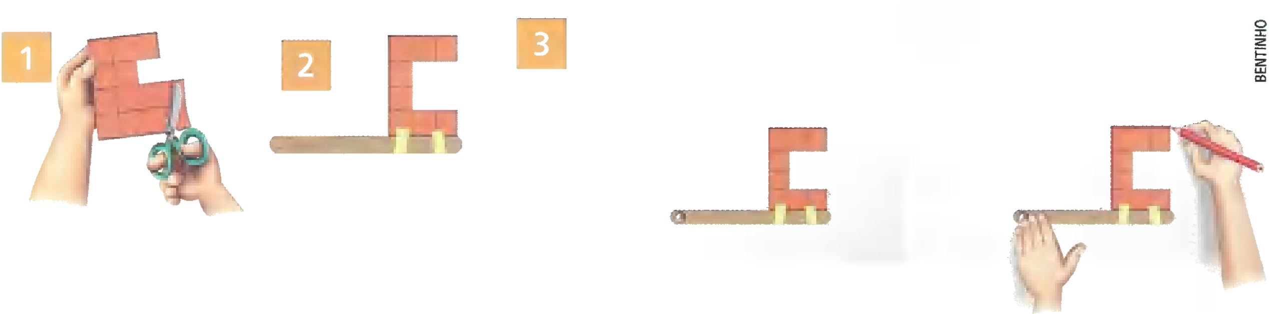
A simetria de translação é uma simetria muito usada em produções artísticas. Ela aparece bastante, em especial, nos trabalhos do arquiteto holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972), famoso artista gráfico.

Escher M. C. **Céu e água**. 1938. Xilogravura em branco e preto em papel pôster, 55 cm × 65 cm.

Simetria de rotação

PENSE E RESPONDA

1. Use lápis, uma folha de papel quadriculada, uma folha de papel sulfite, tesoura, um palito de sorvete, uma tachinha, régua e fita adesiva para realizar esta atividade.



BENTINHO

Desenhe uma figura, recorte-a e fixe-a em um palito de sorvete. Usando uma tachinha, prenda uma extremidade do palito e desenhe o contorno da figura em uma folha.

Gire o palito de sorvete e desenhe novamente o contorno da figura. Retire o palito e trace, a partir do ponto representado pela tachinha dois segmentos de reta: um até um vértice do primeiro desenho e outro até o vértice correspondente no segundo desenho.

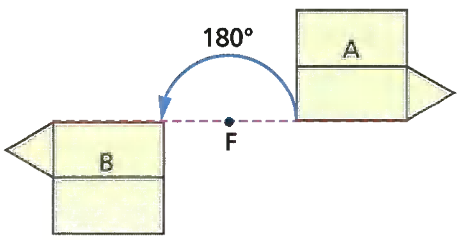
a) Obtenha a medida de comprimento dos dois segmentos de reta traçados e depois compare-os.

b) Faça, para os demais vértices, a mesma análise do item anterior. A qual conclusão podemos chegar?

Note que as duas imagens obtidas podem ser sobrepostas de maneira que elas coincidam, embora não tenhamos simetria de reflexão nem simetria de translação.

Nesse caso, dizemos que as duas figuras são **simétricas** e que há entre elas uma **simetria de rotação**.

O ponto fixo ao redor do qual a figura gira (indicado pela tachinha) é chamado de **centro de rotação** e o giro dado nos dá a ideia do **ângulo de rotação**. Veja a representação a seguir:



VANESSA NOVAIS

A Figura *B* é simétrica à Figura *A* por simetria de rotação, com ângulo de rotação de 180° no sentido anti-horário e centro de rotação no ponto *F*.

SAIBA QUE

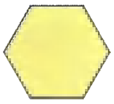
Sentido horário é aquele que segue o sentido dos ponteiros de um relógio; sentido anti-horário é contrário ao sentido dos ponteiros do relógio.

ATIVIDADES

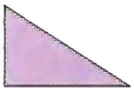
Responda às questões no caderno.

1. Quais das figuras a seguir apresentam simetria?

(A)

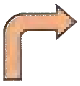


(B)



(C)

(D)

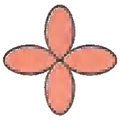


(E)

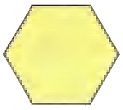
2. Indique quantos eixos de simetria tem cada figura.

a) A

b)



c)

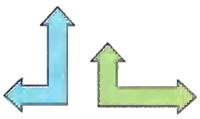


d) 1

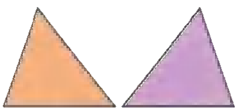
e) H

3. Quais pares de figuras a seguir mostram uma reflexão por um eixo?

I)

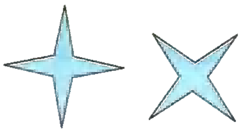


II)



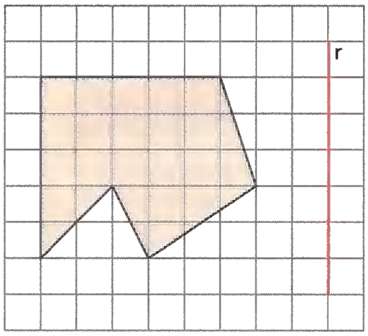
III)

IV)

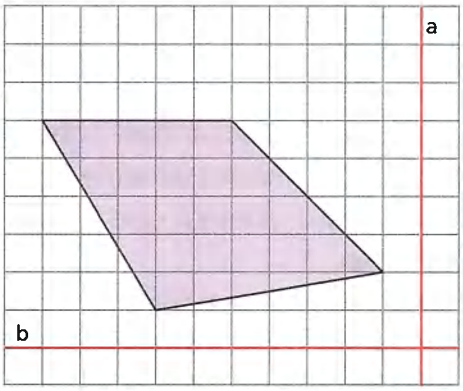


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

4. Reproduza a figura a seguir em um papel quadriculado e desenhe sua imagem refletida em relação à reta *r*.



5. Reproduza em uma malha quadriculada a figura a seguir.



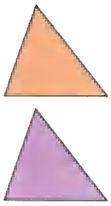
ILUSTRAÇÕES: VANESSA NOVAIS

a) Desenhe, na mesma malha quadriculada, uma figura que seja simétrica à primeira por simetria de reflexão em relação ao eixo *a*.

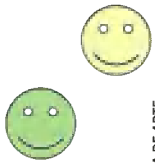
b) Desenhe, na mesma malha quadriculada, uma figura que seja simétrica à primeira por simetria de reflexão em relação ao eixo *b*.

6. Quais dos pares de figuras a seguir apresentam figuras simétricas por simetria de translação?

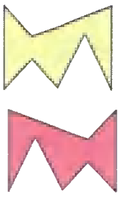
I)



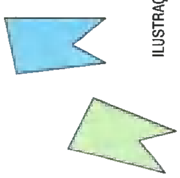
III)



II)

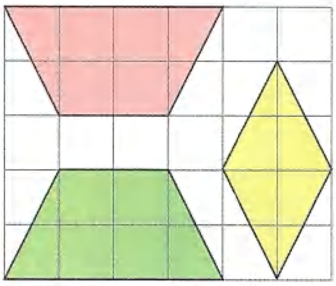


IV)

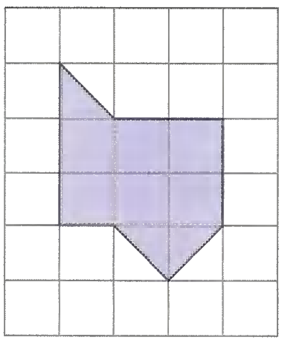


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

7. Em uma malha quadriculada use os motivos (padrões) a seguir e crie um mosaico decorativo.

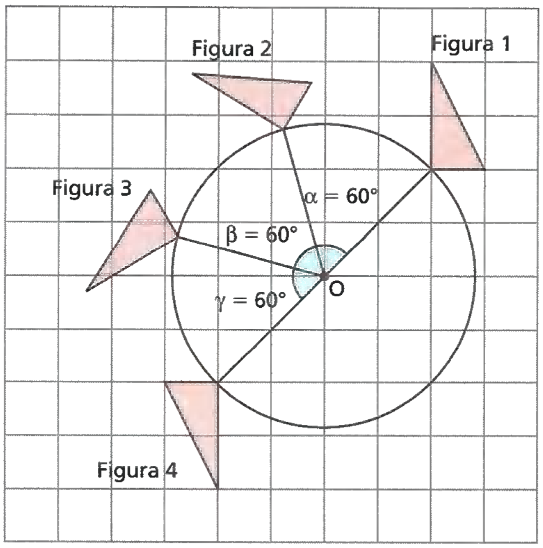


8. Reproduza a figura a seguir em uma malha quadriculada e, na mesma malha, desenhe uma figura que apresente, com a primeira, simetria de translação de tal modo que cada vértice da primeira figura esteja a cinco quadradinhos à direita de seu correspondente na segunda figura.



ILUSTRAÇÕES: VANESSA NOVAIS

9. Observe a figura a seguir que mostra uma circunferência de centro *O* e quatro figuras (1, 2, 3 e 4) simétricas entre si por simetria de rotação.

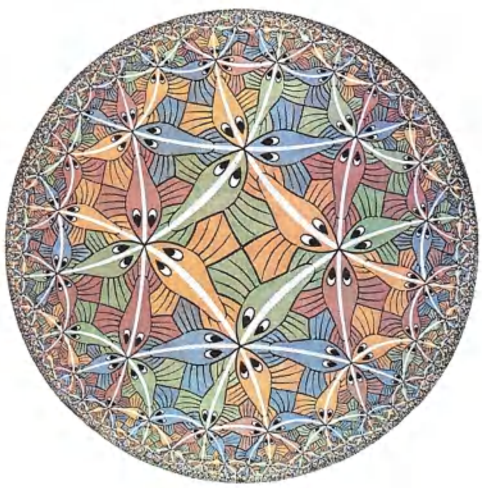


Com base na imagem responda:

a) Qual o ângulo de rotação entre as Figuras 1 e 4?

b) Esse é o mesmo ângulo de rotação entre as figuras 2 e 4? Por quê?

10. A figura a seguir é da xilogravura *Limite circular III* de Escher, feita em 1959. Observe no centro dela os dois peixes laranjas. Sabendo que são simétricos, detalhe a simetria que há entre eles.



ESCHER, M. C. **Limite circular III**. 1959. Segundo estado em amarelo, verde, azul, marrom e preto.

TECNOLOGIAS

Simetrias com GeoGebra

Aproveitando seus conhecimentos construídos nesta Unidade, vamos utilizar as ferramentas de simetria do *software* GeoGebra e fazer algumas construções.

Ferramentas que serão utilizadas:

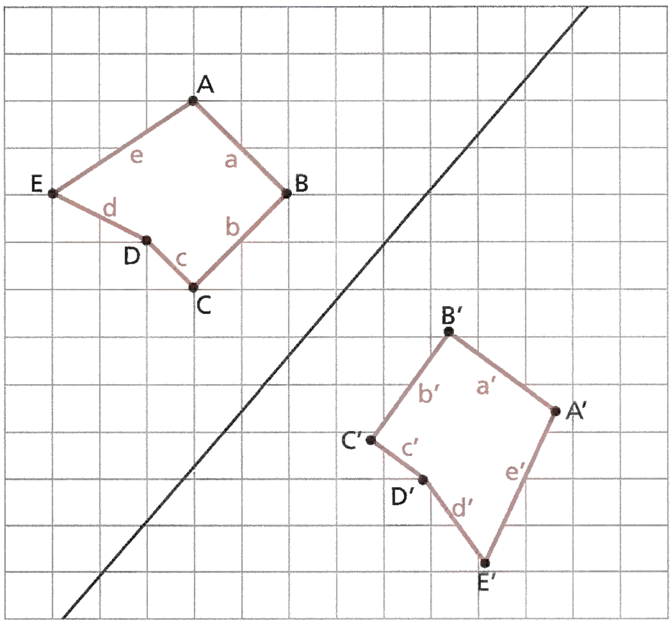
- Polígono
- Segmento
- Translação por um vetor
- Ângulo
- Reta
- Distância, Comprimento ou Perímetro
- Rotação em torno de um ponto
- Reflexão em relação a uma reta
- Vetor
- Ponto

GEOGEBRA

• Simetria de reflexão

Usando a ferramenta , desenhe um polígono qualquer e depois, usando a ferramenta , trace uma reta qualquer que **não** corte o polígono desenhado.

Em seguida, usando a ferramenta , clique primeiro no polígono criado e, em seguida, na reta traçada para obter uma figura simétrica por reflexão. Veja ao lado um exemplo.



VANESSA NOVAIS

Depois, usando a ferramenta , determine a distância entre os vértices da primeira figura e a reta traçada, bem como entre a reta traçada e os vértices da segunda figura.

Responda às questões no caderno.

1. Analisando as medidas obtidas, o que podemos observar?

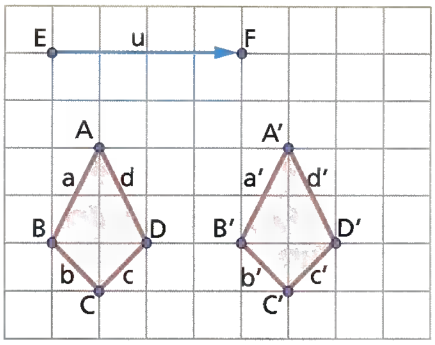
2. Ao traçar a reta nessa construção, foram destacados dois pontos. Com o *mouse* clique sobre um dos pontos e arraste-o. O que acontece com as medidas obtidas? Elas ainda seguem a mesma observação da questão anterior?

- **Simetria de translação**

Usando a ferramenta, desenhe um polígono qualquer e depois, usando a ferramenta, desenhe um vetor horizontal acima do polígono desenhado.

Em seguida, usando a ferramenta, clique, primeiro, no polígono criado e, em seguida, no vetor traçado para obter uma figura simétrica por translação. Veja o exemplo ao lado.

Depois, usando a ferramenta, determine a distância entre os vértices correspondentes das duas figuras.



SAIBA QUE

Vetor é um objeto matemático que tem direção, sentido e comprimento.

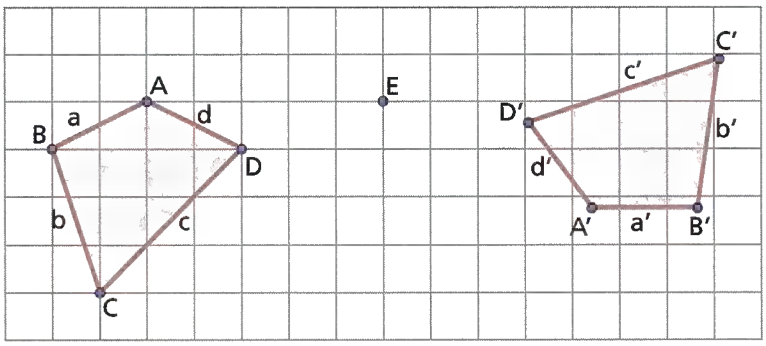
Responda às questões no caderno.

1. **Analisando as medidas obtidas, o que podemos observar?**
2. **Ao desenhar o vetor, dois pontos ficaram destacados. Use a ferramenta e determine a distância entre eles (comprimento do vetor). Compare, então, esse valor com as medidas obtidas durante a construção. O que podemos concluir?**
3. **Com o *mouse*, clique no ponto *F* do vetor e depois movimente-o. O que ocorre com a segunda imagem criada? A relação existente entre o comprimento do vetor e as distâncias entre os vértices permanece a mesma?**

- **Simetria de rotação**

Usando a ferramenta, desenhe um polígono qualquer e depois, usando a ferramenta clique em qualquer lugar fora do polígono desenhado (que será o centro de rotação).

Depois, usando a ferramenta, clique, primeiro, no polígono construído e, em seguida, no ponto determinado. Escolha o ângulo e o sentido de rotação (lembre-se do valor desse ângulo). Dessa forma obtém-se uma imagem simétrica por rotação. Veja a seguir um exemplo:



ILUSTRAÇÕES: VANESSA NOVAIS

Agora, usando a ferramenta desenhe um segmento de reta do vértice *A* ao centro de rotação e outro do centro de rotação ao vértice *A'*. Em seguida, usando a ferramenta, meça o menor ângulo determinado por esses dois segmentos (caso você tenha escolhido um ângulo menor que 180°) ou o maior ângulo (caso tenha escolhido um maior que 180°).

GEOGEBRA

Responda às questões no caderno.

1. **Comparando a medida do ângulo obtida com a medida escolhida como ângulo de rotação, o que podemos observar?**
2. **Faça o mesmo trabalho para os demais pontos do polígono. O que podemos concluir?**

RETOMANDO O QUE APRENDEU

Responda às questões no caderno.

1. Considere os polígonos identificados a seguir.

- Triângulo: as coordenadas dos vértices são: (1, 4), (9, 4) e (9, 1).
- Retângulo: tem um lado sobre o eixo *x* e dois vértices com coordenadas: (1, −3) e (6, −3).

Agora, faça o que se pede:

a) Represente cada polígono em um plano cartesiano.

b) Efetue uma transformação no triângulo de modo que se obtenha outro triângulo de mesmo tamanho na posição oposta em relação ao eixo *x*. Descreva o que foi feito.

c) Efetue a seguinte transformação no retângulo: multiplique por −1 a coordenada do eixo vertical (*y*) de cada vértice e, depois, por 2 todos os valores das coordenadas obtidas.

d) Determine as coordenadas dos polígonos transformados em cada caso.

2. Um quadrado foi representado em um plano cartesiano e seus vértices têm as seguintes coordenadas: (−1, −1), (−1, −5), (−5, −1) e (−5, −5).

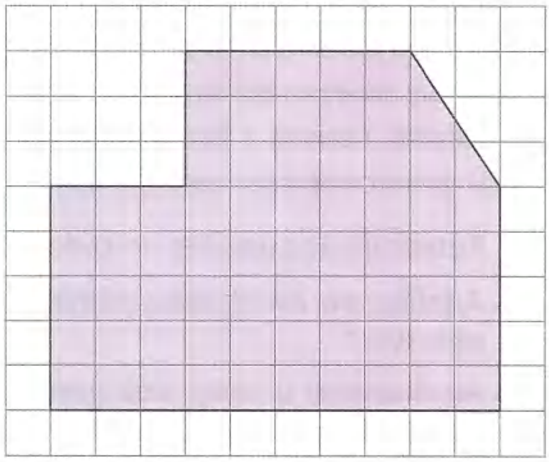
a) Em que quadrante esse quadrado está desenhado?

b) Descreva o que ocorre com esse quadrado quando se multiplicam todas as coordenadas de seus vértices por −2.

c) Descreva o que acontece com esse quadrado quando se multiplicam todas as abscissas de seus pontos por −1. Quais serão as coordenadas dos vértices do quadrado obtido?

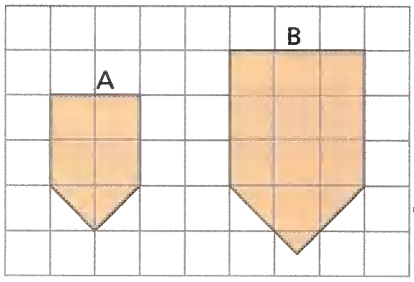
d) Descreva o que acontece com esse quadrado quando se multiplicam todas as ordenadas de seus pontos por −1. Quais serão as coordenadas dos vértices desse quadrado?

3. Considere a figura a seguir.



Escolha um fator de ampliação e desenhe a figura ampliada.

4. Observe as figuras a seguir e identifique a resposta correta.



ILUSTRAÇÕES: VANESSA NOVAIS

As medidas dos lados da figura *A* foram ampliadas quantas vezes para a obtenção da figura *B*?

a) três vezes.

b) duas vezes e meia.

c) duas vezes.

d) uma vez e meia.

5. Uma figura obtida por meio de uma transformação de um polígono representado no 1º quadrante está localizada no 4º quadrante. Além disso, os lados dessa figura têm o dobro das medidas dos lados correspondentes do polígono original. Descreva como essa figura foi obtida.

6. A figura 1 e a figura 2 são simétricas. Identifique a simetria que há entre elas e os valores envolvidos nessa simetria.

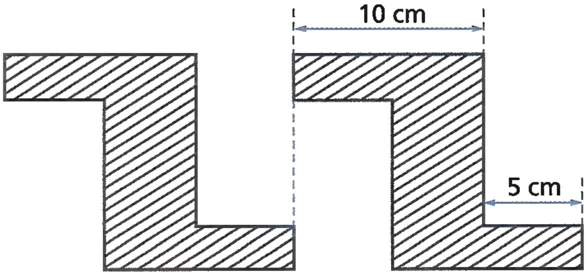


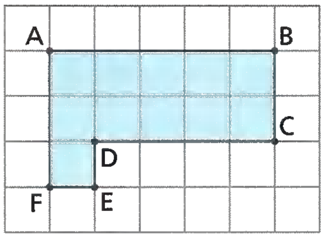
Figura 2 Figura 1

7. O espelho d'água do Taj Mahal pode ser associado à ideia de uma reflexão, uma translação ou uma rotação?


STANISLAV BELOGLAZOV/SHUTTERSTOCK.COM

Entrada principal do Taj Mahal. Foto tirada em 2015.

8. Reproduza a figura a seguir no caderno e faça o que se pede.



ILUSTRAÇÕES: VANESSA NOVAIS

No polígono ABCDEF:

a) Desenhe uma figura simétrica por reflexão em relação à reta que passa pelos vértices *E* e *F*.

b) Desenhe uma figura simétrica por uma translação na direção vertical de cima para baixo com a distância $2 \cdot BC$.

c) Desenhe uma figura simétrica por uma rotação de 180° no sentido anti-horário com centro no ponto *E*.

9. Desenhe uma figura na malha quadriculada e elabore uma atividade sobre transformação no plano e dê a um amigo para resolvê-la. Em seguida, corrija sua atividade.

UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, estudamos as transformações geométricas de figuras planas, em particular de polígonos. Exploramos as transformações de polígonos representados no plano cartesiano conhecendo as coordenadas de seus vértices, ampliação e redução de figuras, com o auxílio de malhas quadriculadas.

Além disso, vimos como uma figura pode apresentar simetria e como figuras podem ser simétricas entre si por reflexão em torno de um eixo, bem como por translação e por rotação em torno de um centro.

Vamos retomar as aprendizagens desta Unidade e refletir sobre elas:

- Conhecendo as coordenadas dos vértices de um polígono, como podemos fazer transformações no plano cartesiano com esse polígono?
- O que é fator de ampliação?
- Você saberia descrever semelhanças e diferenças entre as simetrias de reflexão em torno de um eixo, a de translação e a de rotação em torno de um centro?
- Se uma pessoa desenhar uma figura utilizando o *software* GeoGebra e quisesse fazer uma figura simétrica a ela por rotação, como você a ensinaria a fazer isso?

ATUALIDADES EM FOCO

Educação ambiental – arte e lixo

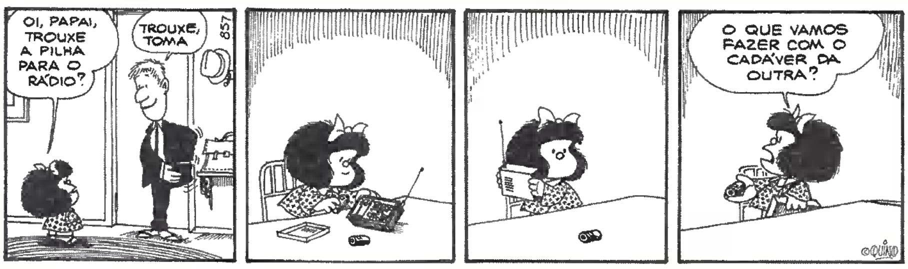
> Entendem-se por educação ambiental os processos por meio dos quais o indivíduo e a coletividade constroem valores sociais, conhecimentos, habilidades, atitudes e competências voltadas para a conservação do meio ambiente, bem de uso comum do povo, essencial à sadia qualidade de vida e sua sustentabilidade.
>
> BRASIL, Ministério do Meio Ambiente. **Política Nacional de Educação Ambiental** – Lei nº 9.795/1999, Art 1º. Disponível em: <http://www.mma.gov.br/educacao-ambiental/politica-de-educacao-ambiental>. Acesso em: 26 out. 2018.

A Educação Ambiental é uma ferramenta de fundamental importância na busca pelo desenvolvimento sustentável, pois proporciona um amplo processo de alfabetização e conscientização ecológica. Conforme definido no Congresso de Belgrado em 1975, a Educação Ambiental é um processo que visa:

> [...] formar uma população mundial consciente e preocupada com o ambiente e com os problemas que lhe dizem respeito, uma população que tenha os conhecimentos, as competências, o estado de espírito, as motivações e o sentido de participação e engajamento que lhe permita trabalhar individualmente e coletivamente para resolver os problemas atuais e impedir que se repitam. [...]
>
> SEARA FILHO, G. Apontamentos de introdução à educação ambiental. **Revista Ambiental**, ano 1, v. 1, p. 42, 1987.

Por ser um tema de grande relevância para toda a sociedade, diversas campanhas são realizadas para conscientizar a população. Diversos segmentos da sociedade reconhecem o problema e buscam expressar em seu trabalho essa preocupação, inclusive por meio da arte.

Leia a tirinha a seguir.



©JOAQUÍN S. LAVADO TEJÓN (QUINO), TODA MAFALDA/FOTOARENA/QUINO

QUINO. **Toda Mafalda**. São Paulo: Martins Fontes, 1991. p. 185.

O artista argentino Joaquín Salvador Lavado Tejón (mais conhecido como Quino) aborda nessa tirinha o problema do descarte das pilhas e baterias de uso doméstico. Essa preocupação do artista vem do fato de que esses dispositivos representam um grande perigo quando descartados incorretamente.

Quando em funcionamento, pilhas e baterias não oferecem riscos, uma vez que o perigo está contido no interior delas. Já, quando são descartadas incorretamente, passam por deformações na cápsula que as envolve (amassam ou estouram) e deixam vazar o líquido tóxico existente no interior da cápsula. Na composição desses dispositivos são encontrados metais pesados, como cádmio, chumbo e mercúrio, e estes materiais são extremamente perigosos à saúde humana. Entre os males provocados pela contaminação com metais pesados estão o câncer e mutações genéticas

Responda às questões no caderno.

1. Você tem algum equipamento no qual são utilizadas pilhas ou baterias? Se sim, o que você faz com as que não são mais utilizadas? Converse com seus colegas sobre o assunto.

2. Faça uma pesquisa de como devem ser descartadas as pilhas, as baterias de celulares e demais componentes eletrônicos. Converse com seus colegas e professor de modo que, juntos, elaborem uma campanha para mobilizar a comunidade escolar e a do bairro onde mora sobre a importância do descarte correto desses componentes.

O Brasil e a arte que vem do lixo

Sendo a produção e descarte de lixo assuntos tão relevantes para a sociedade é de se imaginar que o Brasil e sua arte também estejam engajados com esse assunto.

Artistas como Vicente José de Oliveira Muniz (Vik Muniz), Flávio Rossi e Debora Muszkat são exemplos de artistas brasileiros que utilizam o lixo como matéria-prima para sua arte. Essas obras buscam, além de reutilizar materiais que foram descartados, mostrar a beleza que pode ser gerada por meio do lixo e chamar a atenção para o lixo descartado. Essas obras são tão expressivas que o documentário *Lixo extraordinário* (sobre a obra de Vik Muniz) concorreu ao Oscar de melhor documentário em 2011.

Veja, a seguir, uma obra de Debora Muszkat, feita a partir do lixo.

MUSZKAT, D. **Transparências – 2009.** Instalação definitiva na fábrica SGD, produtora dos frascos de perfume. Mural de 180 m.

3. Você estudou, na Unidade 3, sobre mosaicos, transformações geométricas e simetria. Crie um grupo com seus amigos e, utilizando materiais de descarte, criem uma obra artística e a exponha para a classe. Observem as obras expostas e identifiquem algum mosaico, transformação geométrica, simetria ou figuras simétricas. No caso de figuras simétricas, identifique o tipo da simetria.

4 O CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

ALEX SILVA

Em determinadas situações do dia a dia, usamos números com vírgula para expressar algumas medidas. Dizemos que esses números são escritos na forma decimal e, assim como os números na forma de fração, são chamados números racionais.

Observe na imagem alguns números usados para indicar:

1 Distância entre duas cidades.

2 Massa de uma refeição em um restaurante e o preço cobrado por essa refeição.

3 Altura máxima permitida para tráfego de veículos sob viadutos.

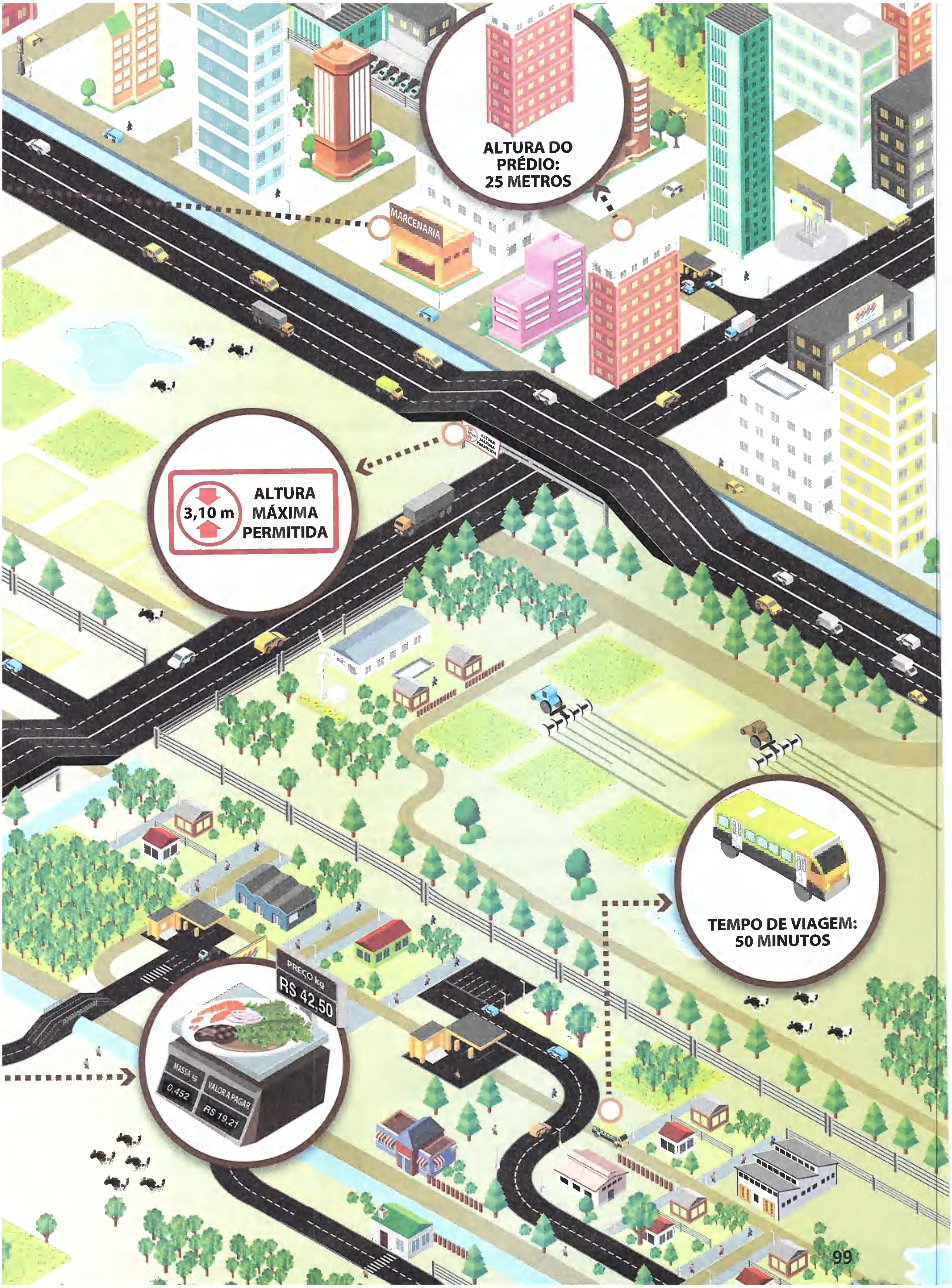
4 Medidas de um móvel.

5 Altura de um prédio.

6 Tempo de viagem entre duas cidades.

Agora, responda no caderno.

- **Você se lembra de alguma situação do dia a dia em que são usados números racionais na forma decimal?**
- **Na imagem, qual é o número usado para indicar o preço da refeição?**
- **Com a ajuda do professor, use uma fita métrica para medir sua altura. Registre essa medida usando um número na forma decimal.**



ALTURA DO PRÉDIO: 25 METROS
MARCENARIA
3,10 m ALTURA MÁXIMA PERMITIDA
TEMPO DE VIAGEM: 50 MINUTOS
PREÇO kg R$ 42,50
MASSA kg 0,452
VALOR A PAGAR R$ 19,21

CAPÍTULO

1 OS NÚMEROS RACIONAIS

Considere as situações a seguir.

1 Em uma cidade, foram registradas, em determinado dia do mês de julho de 2019, a temperatura **mínima** de −6 °C e a temperatura **máxima** de +4 °C. Podemos expressar essas temperaturas da seguinte forma:

- $-6 = (-6) : 1 = -\frac{6}{1}$
- $+4 = (+4) : 1 = +\frac{4}{1}$

O número **−6** é um exemplo de **número racional inteiro negativo**, enquanto o número **+4** é um exemplo de **número racional inteiro positivo**.

2 Em 2017, o Brasil tinha uma frota de aproximadamente 43,4 milhões de veículos (carros comerciais leves, caminhões e ônibus), segundo estudo do Sindipeças. Dessa frota, mais da **metade** $\left(\frac{1}{2}\right)$ se concentrava na região Sudeste, e pouco mais de **um quinto** $\left(\frac{1}{5}\right)$ estava na região Sul.

RODOLFO BUHRER/
LA IMAGEM/FOTOARENA

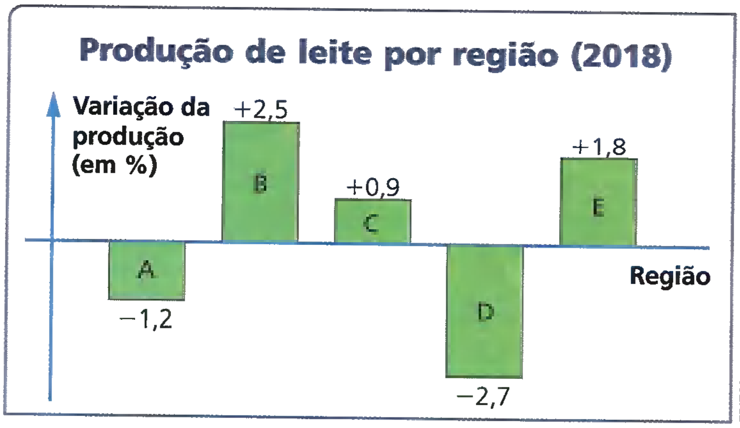
Trânsito no centro de Curitiba (PR). Foto tirada em 2018.

Os números $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{5}$ são exemplos de **números racionais positivos** escritos na forma de fração. Convém lembrar:

- $\frac{1}{2} = 1 : 2$
- $\frac{1}{5} = 1 : 5$

Fonte: SINDIPEÇAS. **Relatório da Frota Circulante 2018**. Disponível em: <https://www.sindipecas.org.br/sindinews/Economia/2018/R_Frota_Circulante_2018.pdf>. Acesso em: 1º out. 2018.

4 O gráfico a seguir mostra a variação, em porcentagem (%), da produção de leite de cinco regiões de um país, em relação ao ano anterior. De acordo com o gráfico, as regiões *B*, *C* e *E* apresentaram crescimento na produção de leite, enquanto as regiões *A* e *D* mostraram queda na produção.



EDITORIA DE ARTE

Fonte: Dados fictícios.

Os números **+2,5**, **+0,9** e **+1,8** são exemplos de **números racionais positivos** escritos na forma decimal.

Os números **−1,2** e **−2,7** são exemplos de **números racionais negativos** escritos na forma decimal.

Esses números também podem ser expressos na forma de fração, como no caso das porcentagens, e indicam o quociente de dois números inteiros:

- $+2{,}5\% = +\frac{2{,}5}{100} = (+2{,}5) : 100 = 0{,}025$
- $-1{,}2\% = -\frac{1{,}2}{100} = (-1{,}2) : 100 = -0{,}012$
- $+1{,}8\% = +\frac{1{,}8}{100} = (+1{,}8) : 100 = 0{,}018$
- $-2{,}7\% = -\frac{2{,}7}{100} = (-2{,}7) : 100 = -0{,}027$

De modo geral, podemos dizer que todo número racional é o resultado de uma divisão de números inteiros, em que o segundo número é diferente de zero, ou seja:

> Todo número racional pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com *a* e *b* inteiros e $b \neq 0$.

Os números racionais positivos, negativos e o zero formam o conjunto numérico denominado **conjunto dos números racionais**. Esse conjunto é representado pela letra $\mathbb{Q}$ (letra inicial da palavra **quociente**).

Módulo ou valor absoluto de um número racional

A exemplo do que vimos no conjunto dos números inteiros, temos:

- O módulo ou valor absoluto de $+\frac{5}{3}$ é $+\frac{5}{3}$ ou, apenas, $\frac{5}{3}$.

  Indica-se: $\left|+\frac{5}{3}\right| = +\frac{5}{3}$ ou $\left|+\frac{5}{3}\right| = \frac{5}{3}$.

- O módulo ou valor absoluto de $-\frac{3}{7}$ é $+\frac{3}{7}$ ou, apenas, $\frac{3}{7}$.

  Indica-se: $\left|-\frac{3}{7}\right| = \frac{3}{7}$ ou $\left|-\frac{3}{7}\right| = \frac{3}{7}$.

- O módulo ou valor absoluto de −2,63 é +2,63 ou, apenas, 2,63.
  Indica-se: $|-2{,}63| = +2{,}63$ ou $|-2{,}63| = 2{,}63$.

Quando dois números racionais de sinais contrários têm o mesmo módulo, são chamados **opostos** ou **simétricos**. Veja alguns exemplos:

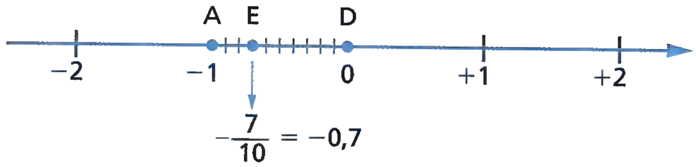
- $+\frac{2}{3}$ e $-\frac{2}{3}$.
- −3,5 e +3,5.
- 15 e −15.
- +0,32 e −0,32.
- +1 e −1.
- $-\frac{7}{43}$ e $+\frac{7}{43}$.

A reta numérica

Já sabemos que os números inteiros podem ser representados em uma **reta numérica**. O mesmo ocorre com os números racionais. Veja os exemplos a seguir.

1 Representar na reta numérica o número racional $-0{,}7$.

Vamos considerar que $-0{,}7 = -\frac{7}{10}$ (forma fracionária). O número $-\frac{7}{10}$ está localizado entre os números inteiros -1 e 0. Então, vamos dividir o segmento AD, que vai de -1 até 0, em 10 partes iguais e considerar 7 dessas partes, a partir do ponto D, para a esquerda.

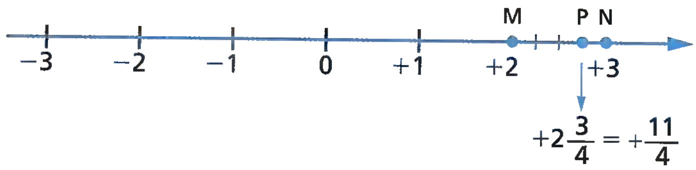


O ponto E é a **imagem geométrica** de $-0{,}7$. O número $-0{,}7$ é a **abscissa** do ponto E.

2 Representar na reta numérica o número racional $+\frac{11}{4}$.

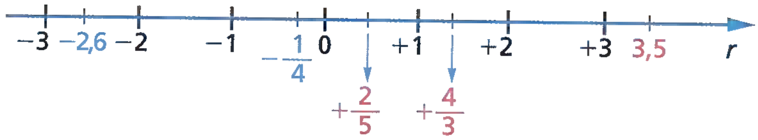
Como $+\frac{11}{4}$ é maior que 1, vamos escrevê-lo na sua forma mista: $+\frac{11}{4} = +\frac{8}{4} + \frac{3}{4} = 2\frac{3}{4}$.

Esse número está localizado entre os números inteiros $+2$ e $+3$. Então, vamos dividir o segmento MN, que vai de $+2$ até $+3$, em 4 partes iguais e considerar 3 dessas partes, a partir do ponto M, para a direita.



O ponto P é a **imagem geométrica** de $+\frac{11}{4}$, e $+\frac{11}{4}$ é a **abscissa** do ponto P.

3 Camila fez vários cartões contendo números racionais e os colocou em ordem crescente para colar no caderno, mas sua irmã embaralhou os cartões. Para organizá-los novamente, Camila construiu uma reta numérica e localizou cada número racional correspondente a um de seus cartões.



Sabemos que, quanto mais à esquerda o número se localiza na reta numérica, menor ele é. Desse modo, podemos identificar os números dos cartões e escrevê-los em ordem crescente:

$$-3 < -2{,}6 < -2 < -1 < -\frac{1}{4} < 0 < +\frac{2}{5} < +1 < +\frac{4}{3} < +2 < +3 < +3{,}5$$

Na relação de Camila, podemos verificar também:

- números racionais inteiros: -3, -2, -1, 0, 2 e 3;
- número racional negativo não inteiro escrito na forma decimal: $-2{,}6$;
- número racional negativo na forma de fração: $-\frac{1}{4}$;
- número racional positivo não inteiro escrito na forma decimal: $+3{,}5$;
- números racionais positivos na forma de fração: $+\frac{2}{5}$ e $+\frac{4}{3}$.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Vítor e Helena partiram de Lages (SC) para um fim de semana de inverno em São Joaquim (SC), que fica a 76 quilômetros de Lages.

Temperatura em Lages

Temperatura em São Joaquim

Em Lages, o termômetro marcava entre 1 °C e 2 °C, ou seja, entre +1 °C e +2 °C. Para sermos mais exatos, o termômetro marcava $\left(1 + \dfrac{4}{10}\right)$ grau Celsius acima de zero, ou seja, +1,4 °C.

Em São Joaquim, o termômetro indica uma temperatura entre 1 °C abaixo de zero e 2 °C abaixo de zero, ou seja, entre −1 °C e −2 °C. Mais exatamente, o termômetro indica $\left(-1 - \dfrac{8}{10}\right)$ grau Celsius abaixo de zero, ou seja, −1,8 °C.

Quais dos números apresentados no texto são racionais:

a) inteiros?

b) escritos na forma fracionária?

c) escritos na forma decimal?

2. Escreva estes números racionais na forma fracionária simplificada.

a) $+\dfrac{3}{18}$ **b)** $-\dfrac{12}{15}$ **c)** $-\dfrac{55}{66}$

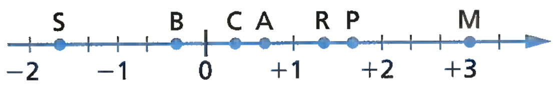
3. Escreva na forma decimal os seguintes números racionais:

a) $-\dfrac{13}{4}$ **b)** $-\dfrac{1}{40}$ **c)** $+\dfrac{3}{20}$

4. Identifique os números a seguir como naturais, inteiros não naturais ou racionais não inteiros:

$$-4;\ +\frac{4}{9};\ -10;\ -0{,}3;\ -\frac{40}{5}$$

5. Identifique os números associados aos pontos destacados na reta numérica a seguir.



6. Represente em uma reta numérica os pontos:

- *A*, de abscissa +0,9.
- *B*, de abscissa $-\dfrac{3}{5}$.
- *C*, de abscissa $+\dfrac{7}{3}$.
- *D*, de abscissa −1,4.
- *R*, de abscissa +3.
- *S*, de abscissa $-\dfrac{9}{4}$.

7. (Saresp-SP) Das comparações a seguir, qual é a verdadeira?

a) $0{,}40 < 0{,}31$

b) $1 < \dfrac{1}{2}$

c) $0{,}4 > \dfrac{4}{10}$

d) $2 > 1{,}9$

CAPÍTULO 2

ADIÇÃO ALGÉBRICA DE NÚMEROS RACIONAIS

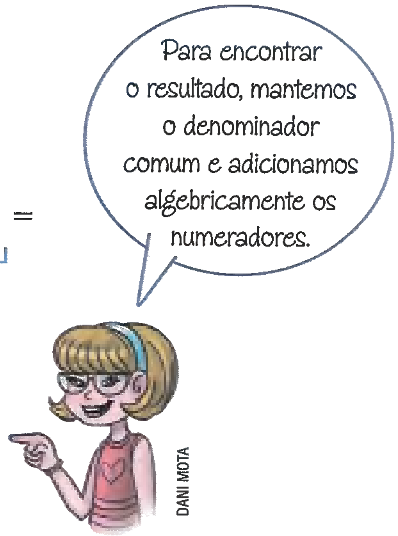
Agora vamos estudar a adição algébrica de dois ou mais números racionais. Acompanhe as situações a seguir.

1 Calcular o valor da adição $-\frac{5}{8} + \frac{3}{10}$.

Determinando o mínimo múltiplo comum (mmc) dos denominadores, temos: mmc (8, 10) = 40.

$$-\frac{5}{8} + \frac{3}{10} = -\frac{25}{40} + \frac{12}{40} =$$

$$= \frac{-25+12}{40} = -\frac{13}{40}$$



2 Eduardo, amigo de Cláudia, está estudando em Oslo, capital da Noruega. Ontem eles conversaram pela internet, e ela soube que a temperatura mínima na cidade de Oslo foi −9,7 °C e a temperatura máxima, −2,5 °C. Qual foi a variação da temperatura ontem, em Oslo?

(temperatura máxima) menos (temperatura mínima)

$(-2{,}5) - (-9{,}7) = -2{,}5 + 9{,}7 = 7{,}2$ °C

Logo, a variação da temperatura foi 7,2 °C.

3 Determinar o valor da expressão $\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) + \left(-1 + \frac{5}{6}\right)$.

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - 1 + \frac{5}{6}$ → **eliminamos os parênteses**

Calculando o mmc dos denominadores, temos: mmc (2, 3, 4, 6) = 12.

$\frac{4}{12} + \frac{6}{12} - \frac{9}{12} - \frac{12}{12} + \frac{10}{12}$ → **dividimos o mmc por cada denominador das frações e multiplicamos pelos numeradores correspondentes**

$\frac{4+6-9-12+10}{12} = -\frac{1}{12}$ → **adicionamos algebricamente os numeradores**

4 Um número decimal corresponde ao valor da expressão $1,6 - (-2,8) + [1,9 - (-5,6 + 8,1)]$. Determine esse número na forma decimal.

$1,6 - (-2,8) + [1,9 - (-5,6 + 8,1)] =$

$= 1,6 + 2,8 + [1,9 + 5,6 - 8,1] =$ → eliminamos os parênteses

$= 1,6 + 2,8 + 1,9 + 5,6 - 8,1$ → eliminamos os colchetes

$= +11,9 - 8,1 = +3,8$

O número racional na forma decimal é $+3,8$.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Efetue os cálculos algébricos a seguir:

a) $-\frac{5}{8} + \frac{5}{6}$

b) $3,75 - 4$

c) $-\frac{1}{12} + \frac{3}{10}$

d) $-0,64 - 0,28$

e) $6,75 + 9,45$

f) $-\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$

g) $11,05 - 13$

h) $-2,91 + 3,07$

2. Qual é o aumento da temperatura quando ela passa de:

a) +16,6 °C para 25,9 °C?

b) −2,5 °C para +3,5 °C?

c) −7,9 °C para +1,3 °C?

3. São dados os números *x* e *y*, tais que $x = -0,85$ e $y = -0,35$. Calcule o valor de:

a) $x + y$

b) $x - y$

c) $1 - x - y$

4. No quadro, temos três números racionais e a letra *A*. Sabendo que *A* representa um número igual à soma algébrica dos outros três, determine seu valor.

+4,75	+7,21
A	−10,92

5. Observe os valores no quadro a seguir, elabore uma adição algébrica com eles e dê para um colega resolver.

$a = -1,75$
$b = +3,6$
$c = -4,21$

6. Calcule o valor das expressões numéricas:

a) $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2}$

b) $1 - 0,47 - 1,9 + 0,63$

c) $-4,7 + 2 - 1,75 + 1,48$

7. Um número racional é expresso por $\frac{3}{5} - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{5}{8}\right)$. Qual é o maior número inteiro menor que esse número?

8. Qual é o menor número inteiro que é maior que o número racional expresso por $2,5 - [0,2 + (-3,7 + 5) - 1,4]$?

9. Copie e substitua o ▨ por um número racional que torne a igualdade verdadeira.

a) $(-0,9) + ▨ = 0$

b) $-\frac{2}{3} + ▨ = 1$

c) $▨ - \left(+\frac{7}{6}\right) = -\frac{4}{6}$

d) $\left(-\frac{15}{6}\right) - \left(+\frac{8}{2}\right) = ▨$

CAPÍTULO 3

MULTIPLICAÇÃO COM NÚMEROS RACIONAIS

Multiplicação de números racionais na forma decimal

Vamos retomar e ampliar o estudo da multiplicação de números racionais na forma decimal.

Em uma multiplicação com números racionais na forma decimal convém lembrar que:

- multiplicamos os números como se fossem números naturais;
- colocamos a vírgula no resultado de modo que a quantidade de casas decimais seja igual à soma do número de casas decimais dos fatores;
- observamos os sinais: se os dois fatores têm mesmo sinal, o produto é positivo; se têm sinais diferentes, o produto é negativo.

Considere as seguintes situações:

1 Qual é o resultado da multiplicação $2 \cdot (-0{,}003)$?

1º modo

$$2 \cdot (-0{,}003) = -0{,}003 + (-0{,}003) = -0{,}003 - 0{,}003 = -0{,}006$$

2º modo

$$\begin{array}{r} 0{,}\,0\ 0\ 3 \\ \times \qquad\ \ 2 \\ \hline 0{,}\,0\ 0\ 6 \end{array}$$

Como os fatores têm sinais diferentes, o produto é um número negativo.

Assim: $2 \cdot (-0{,}003) = -0{,}006$.

2 Determine o resultado da multiplicação $-1{,}8 \cdot (+0{,}74)$.

$$\left.\begin{array}{rl} 0{,}\,7\ 4 & \longrightarrow \text{2 casas decimais} \\ \times \quad 1{,}\,8 & \longrightarrow \text{1 casa decimal} \\ \hline 5\ 9\ 2 & \\ +\,7\ 4\ \ & \\ \hline 1{,}\,3\ 3\ 2 & \longrightarrow \text{3 casas decimais } (2 + 1) \end{array}\right\} -1{,}8 \cdot (+0{,}74) = -1{,}332$$

O resultado da multiplicação $-1{,}8 \cdot (+0{,}74)$ é $-1{,}332$.

Como os fatores têm sinais diferentes, o produto é um número negativo.

Multiplicação de números racionais na forma de fração

PENSE E RESPONDA

Forme dupla com um colega de classe e respondam à questão no caderno.

As amigas estão estudando na casa de Lili. No lanche, Lili partiu 3 maçãs ao meio. Ela comeu uma metade e deu para cada amiga uma das metades que sobrou.

a) Quando partiu as maçãs, quantas metades de maçã Lili obteve?

b) Depois de Lili comer a sua parte, quantas metades de maçã sobraram?

c) Use fração e a forma mista para representar a quantidade de maçã que sobrou.

d) Quanto dá 6 vezes $\frac{1}{2}$? E 5 vezes $\frac{1}{2}$?

e) Quantas amigas de Lili vão ganhar maçã?

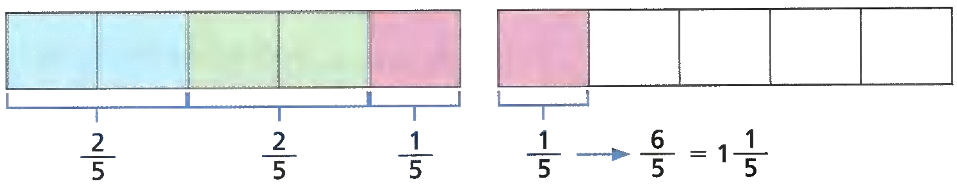
Considere agora as situações a seguir.

1 Gabriela tem uma fita com $\frac{2}{5}$ de metro de comprimento. Para um trabalho escolar, ela precisará de 3 fitas iguais a essa. Quantos metros de fita ela vai usar nesse trabalho?

Para resolver esse problema, podemos fazer $3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$ ou $1\frac{1}{5}$

Então: $3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5} = \frac{6}{5}$

Geometricamente, podemos representar assim:



EDITORIA DE ARTE

Gabriela vai usar $\frac{6}{5}$ de metro ou 1 metro e $\frac{1}{5}$ de metro de fita.

Para multiplicar um número inteiro por um número racional na forma de fração, multiplicamos o número inteiro pelo numerador da fração e conservamos o denominador.

CAPÍTULO 4

DIVISÃO COM NÚMEROS RACIONAIS

Divisão com números racionais na forma decimal

Vamos retomar e ampliar o estudo da divisão com números racionais na forma decimal, com base no que já foi visto anteriormente.

Considere as situações a seguir.

1 Qual é o resultado da divisão $-7 : 0{,}14$?

1º modo

Vamos verificar quantas vezes 0,14 cabe em 7, ou seja, que número multiplicado por 0,14 dá 7?

$10 \cdot 0{,}14 = 1{,}4$; $\quad 20 \cdot 0{,}14 = 2{,}8$; $\quad 40 \cdot 0{,}14 = 5{,}6$; $\quad 50 \cdot 0{,}14 = 7$

Como os números têm sinais diferentes, o quociente é um número negativo.

Assim: $-7 : 0{,}14 = -50$

2º modo

$$\underset{\times 100}{\overset{\times 100}{7 : 0{,}14 = 700 : 14}}$$

$$\begin{array}{ccc|cc}
C & D & U & & \\
7 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ \cline{4-5}
 & 0 & 0 & 5 & 0 \\
 & & 0 & D & U
\end{array}$$

Como os números têm sinais diferentes, o quociente é um número positivo.

O resultado da divisão $-7 : 0{,}14$ é -50.

2 Qual é o resultado da divisão $-9{,}25 : (-3{,}7)$?

$$\underset{\times 10}{\overset{\times 10}{(-9{,}25) : (-3{,}7) = (-92{,}5) : (-37)}} = +2{,}5$$

$$\begin{array}{ccc|c}
D & U & d & \\
9 & 2, & 5 & 37 \\ \cline{4-4}
1 & 8 & 5 & 2{,}5 \\
 & 0 & 0 & U\,d
\end{array}$$

Como os números têm mesmo sinal, o quociente é um número positivo.

O resultado da divisão $-9{,}25 : (-3{,}7)$ é $+2{,}5$.

Divisão com números racionais na forma de fração

PENSE E RESPONDA

Responda às questões no caderno.

1. Antes de efetuar as multiplicações a seguir, faça uma estimativa dos resultados.

$\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{1}$ $\qquad$ $\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\frac{7}{11} \cdot \frac{11}{7}$ $\qquad$ $\frac{13}{10} \cdot \frac{10}{13}$

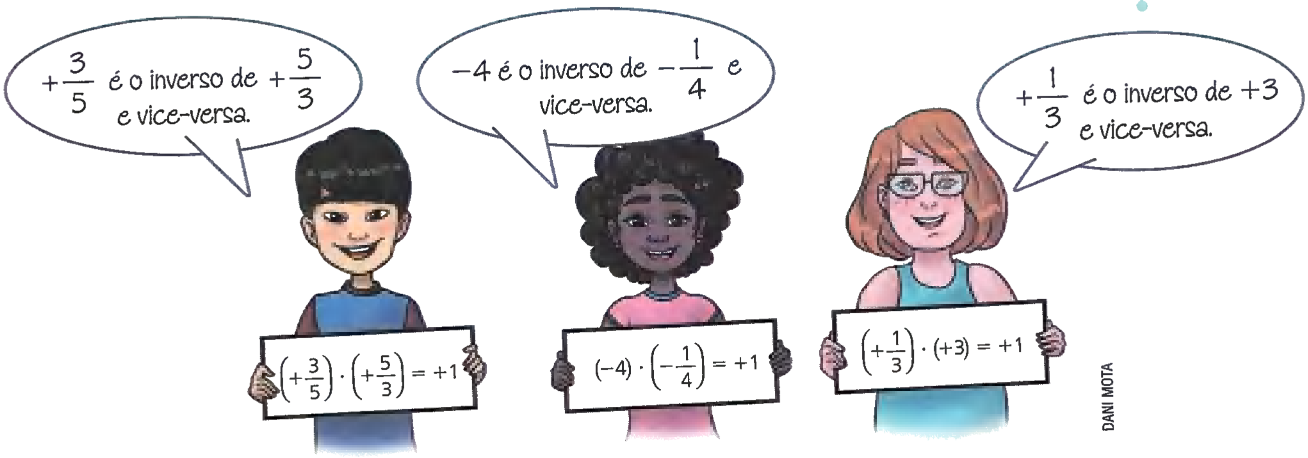
a) Você deve ter obtido o mesmo número como resultado das multiplicações. Que número é esse?

b) O que você pôde observar nas frações que aparecem como fatores em cada multiplicação?

2. Quantas vezes $\frac{1}{2}$ litro cabe em:

a) 1 litro? $\qquad$ **b)** $1\frac{1}{2}$ litro? $\qquad$ **c)** 2 litros?

Quando a multiplicação de duas frações tem 1 como resultado, essas frações são inversas uma da outra.



DANI MOTA

Considere agora as situações a seguir.

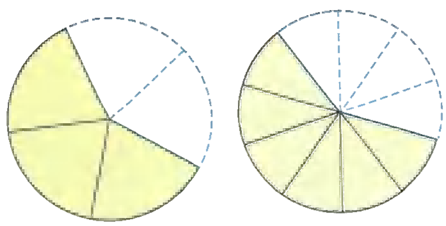
1 Dos $\frac{3}{5}$ que sobraram de uma *pizza*, Joel comeu metade. Que fração da *pizza* Joel comeu?

Resolvendo a situação geometricamente, temos:

A metade dos $\frac{3}{5}$ de *pizza* que Joel comeu corresponde à parte hachurada na figura ao lado, ou seja:

$\frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{10}$.

Então, Joel comeu $\frac{3}{10}$ da *pizza*.


EDITORIA DE ARTE

Observe, agora, que a divisão de $\frac{3}{5}$ por 2 tem o mesmo resultado que a multiplicação de $\frac{3}{5}$ pelo inverso de 2, que é $\frac{1}{2}$.

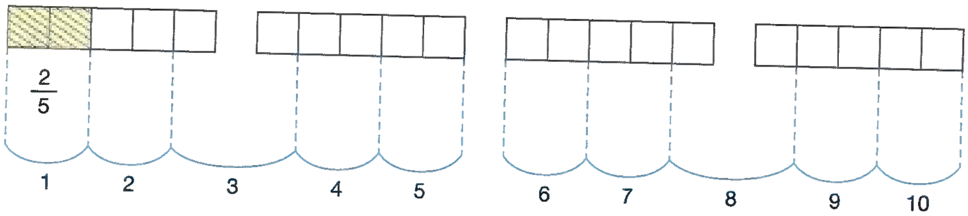
$$\frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{10}$$
$$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$
$$\rightarrow \frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$$

inverso

2 Calculando $\frac{2}{5}$ de pão por pessoa, 4 pães servem quantas pessoas?

Primeiro vamos resolver esse problema geometricamente.

Dividimos cada uma das 4 unidades em 5 partes iguais e contamos quantos $\frac{2}{5}$ são necessários para cobrir as 4 unidades.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$\frac{2}{5}$ cabe 10 vezes em 4, ou seja: $4 : \frac{2}{5} = 10$.

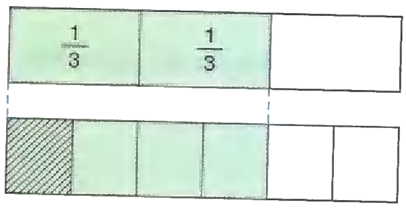
Os 4 pães servem 10 pessoas.

Agora, observe que a divisão de 4 por $\frac{2}{5}$ tem o mesmo resultado que a multiplicação de 4 pelo inverso de $\frac{2}{5}$, que é $\frac{5}{2}$:

$$4 : \frac{2}{5} = 10$$
$$4 \cdot \frac{5}{2} = \frac{20}{2} = 10$$
$$\rightarrow 4 : \frac{2}{5} = 4 \cdot \frac{5}{2}$$

inverso

3 A figura seguinte indica a divisão $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$.



→ A parte da figura colorida de verde representa $\frac{2}{3}$.

→ A parte hachurada da figura representa $\frac{1}{6}$.

Analisando a figura, $\frac{1}{6}$ cabe 4 vezes em $\frac{2}{3}$, ou seja: $\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = 4$.

Nesse caso, vemos que o quociente (4) é maior que o dividendo $\left(\frac{2}{3}\right)$.

Note que a divisão de $\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{6}$ tem o mesmo resultado que a multiplicação de $\frac{2}{3}$ pelo inverso de $\frac{1}{6}$, que é $\frac{6}{1}$:

$$\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = 4$$

$$\frac{2}{\cancel{3}_{1}} \cdot \frac{\cancel{6}^{2}}{1} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \cdot \underbrace{\frac{6}{1}}_{\text{inverso}}$$

> Para dividir uma fração por outra fração, diferente de zero, multiplicamos a primeira pelo inverso da segunda.

Observação:

A divisão entre frações é sempre possível, desde que o divisor seja diferente de zero. Podemos dizer que toda fração representa um quociente do numerador pelo denominador:

- $\frac{2}{5} = 2 : 5$ ou $2 : 5 = \frac{2}{5}$
- $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2} : \frac{3}{5}$ ou $\frac{1}{2} : \frac{3}{5} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}}$

4 Obter o resultado das divisões:

a) $-\frac{2}{5} : \left(+\frac{2}{5}\right)$ **b)** $\left(+\frac{10}{9}\right) : \left(-\frac{5}{3}\right)$

Como os números racionais estão na forma de fração, essas divisões podem ser representadas pela multiplicação do primeiro número pelo inverso do segundo.

a) $-\frac{2}{5} : \left(+\frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{5} \cdot \left(+\frac{5}{2}\right) = -1$

Como os números têm sinais diferentes, o quociente é negativo.

b) $\left(+\frac{10}{9}\right) : \left(-\frac{5}{3}\right) = \left(+\frac{10}{9}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \left(+\frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{9}_{3}}\right) \cdot \left(-\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{5}_{1}}\right) = -\frac{2}{3}$

Como os números têm sinais diferentes, o quociente é negativo.

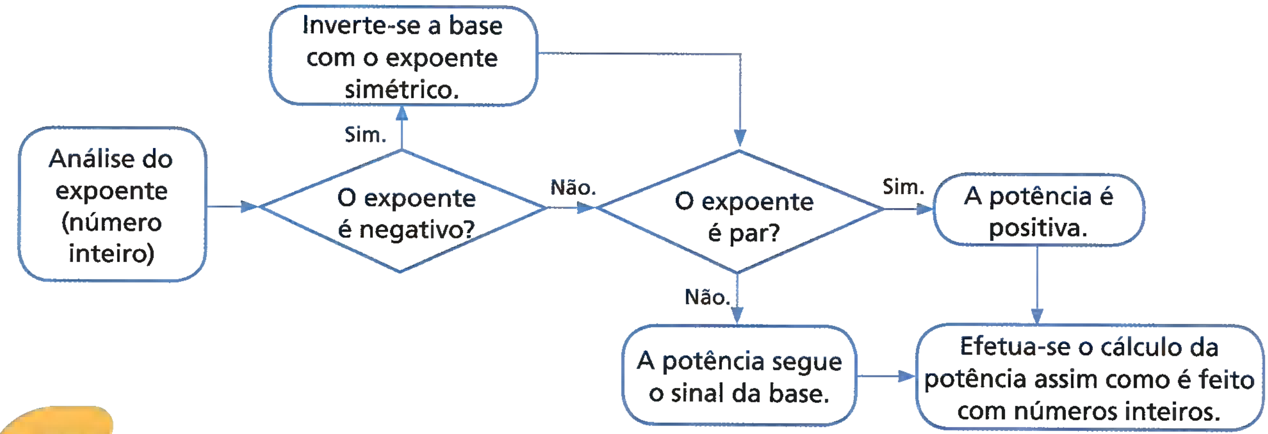
5 Determine o valor da expressão: $(-6) \cdot (+0{,}375) - \left(+\frac{8}{7}\right) : \left(-\frac{2}{7}\right)$.

$(-6) \cdot (+0{,}375) - \left(+\frac{8}{7}\right) : \left(-\frac{2}{7}\right) = (-6) \cdot (+0{,}375) - \left(+\frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{7}_{1}}\right) \cdot \left(-\frac{\cancel{7}^{1}}{\cancel{2}_{1}}\right) =$

$= (-2{,}25) - (-4) = -2{,}25 + 4 = +1{,}75$

O valor da expressão é $+1{,}75$.

Observe como podemos representar o cálculo da potenciação de números racionais com expoente inteiro por meio de um fluxograma:



ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Escreva o valor de:

a) $\left(-\frac{1}{10}\right)^2$

b) $\left(-\frac{5}{12}\right)^0$

c) $(+0,5)^3$

d) $(-3,6)^2$

e) $(+6,4)^2$

f) $(+7,6)^0$

2. Reduza a uma só potência as expressões:

a) $(+2,4)^3 \cdot (+2,4)^6$

b) $\left(+\frac{2}{3}\right)^9 : \left(+\frac{2}{3}\right)^5$

c) $\left[(-1,5)^3\right]^3$

d) $\left(+\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(+\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(+\frac{1}{6}\right)$

3. Calcule o valor das seguintes expressões numéricas:

a) $\left(-\frac{7}{9}\right) : \left(-\frac{7}{6}\right) - \left(-\frac{5}{6}\right)^2$

b) $(-2)^3 - (-0,5)^3$

c) $(-2)^2 - (-0,5)^2$

4. Calcule o valor de A na expressão $A = (+0,8) : (-0,2)^2 + (-2,7) : (-0,3)^2$.

5. Sendo $x = 3^{-1}$, $y = 6^{-1}$ e $z = 9^{-1}$, calcule o valor da expressão $y + z - x$.

6. Calcule o valor de:

a) 3^{-2}

b) $\left(+\frac{2}{7}\right)^{-1}$

c) $(-5)^{-1}$

d) 10^{-5}

e) $\left(-\frac{5}{2}\right)^{-2}$

f) 20^{-2}

7. Escreva na forma de potência com expoente inteiro negativo os seguintes números racionais:

a) 0,001

b) 0,000001

c) 0,01

d) 0,0000001

8. Sabe-se que $a = 2^{-5}$ e $b = 4^{-3}$. Se você dividir o número *a* pelo número *b*, qual será o resultado?

9. Dê o valor de cada potência expresso na forma decimal:

a) 10^{-4}

b) $\left(+\frac{5}{2}\right)^{-2}$

10. Determine o valor das seguintes expressões numéricas:

a) $\left(1 - \frac{2}{3}\right)^{-4}$

b) $\left(\frac{5}{4} - 1\right)^{-3}$

11. Sabendo que $A = 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3}$, determine o valor do número A.

POR TODA PARTE

Esportes: o atletismo

O atletismo é uma competição que envolve várias modalidades:

- Corrida rasa: de 100, 200, 400, 800, 1 500, 5 000 e 10 000 metros;
- Corrida com barreiras: de 110 e 400 metros;
- Corrida com obstáculos: 3 000 metros;
- Revezamento: 4 × 100 e 4 × 400 metros;
- Marcha atlética: 20 000 metros;
- Saltos: altura, distância, triplo e com vara;
- Arremessos/lançamentos: peso, disco, dardo e martelo;
- Prova combinada: decatlo (masculino) e heptatlo (feminino).

Informações obtidas em: <http://www.cbat.org.br/atletismo/categorias_oficiais.asp>. Acesso em: 10 ago. 2018.

LUCIANO BELFORD/FRAMEPHOTO/FOLHAPRESS

O brasileiro Thiago Braz celebra a medalha de ouro no salto com vara nas Olimpíadas de 2016, no Brasil, batendo o recorde olímpico. Foto tirada em 2016.

DEPOSITPHOTOS/GLOW IMAGES

Mirieli Estaili, vice-campeã mundial no salto triplo, subiu ao pódio e recebeu a medalha de prata no Mundial de Atletismo Sub-20 de Tampere, Finlândia, 2018. Foto tirada em 2018.

STEPHEN POND/GETTY IMAGES

A equipe brasileira, formada por Bruno B. da Silva, Giovana R. dos Santos, Jéssica V. Moreira e Alison B. dos Santos, conquistou o ouro no revezamento misto 4 × 400 m no Campeonato Mundial Sub-18 de Atletismo realizado em Nairóbi, Quênia, 2017. Foto tirada em 2017.

1. O Brasil disputou o Campeonato Sul-Americano de Atletismo, no Paraguai, em 2017. Os brasileiros conquistaram 17 medalhas de ouro, 12 de prata e 7 de bronze. A Colômbia classificou-se em segundo lugar, com 9 medalhas de ouro, 12 de prata e 9 de bronze. E em terceiro lugar classificou-se a Argentina, com 6 medalhas de ouro, 3 de prata e 5 de bronze.

Informações obtidas em: <http://www.cbat.org.br/noticias/noticia.asp?news=9337>. Acesso em: 1º out. 2018.

Organize os dados apresentados e construa no caderno um quadro de medalhas, com quatro colunas, semelhante ao quadro a seguir. Depois, escreva a fração correspondente à relação entre a quantidade de medalhas de prata e o total de medalhas que cada país conquistou. Em seguida, escreva a fração que representa a razão entre a quantidade de medalhas de prata e a de medalhas de ouro conquistadas pela Argentina.

Número de medalhas			
Medalha / País	Ouro	Prata	Bronze

CAPÍTULO 6

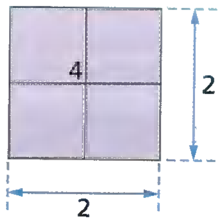
RAIZ QUADRADA EXATA DE NÚMEROS RACIONAIS

Vimos como determinar a raiz quadrada exata de um número inteiro positivo. Agora estudaremos a raiz quadrada exata de um número racional positivo.

A **raiz quadrada exata** de um número racional positivo é o número racional positivo que, elevado ao quadrado, resulta no número inicial.

Veja alguns exemplos a seguir:

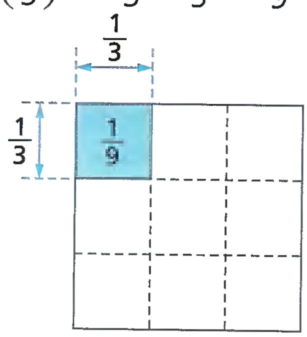
- 2 é a raiz quadrada de 4, pois $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$.
  Indica-se: $\sqrt{4} = 2$.
  Geometricamente, a raiz quadrada de um número é expressa pela medida do lado de um quadrado cuja área corresponde a esse número.



- $\dfrac{1}{3}$ é a raiz quadrada de $\dfrac{1}{9}$, pois $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$.
  Indica-se: $\sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}$.

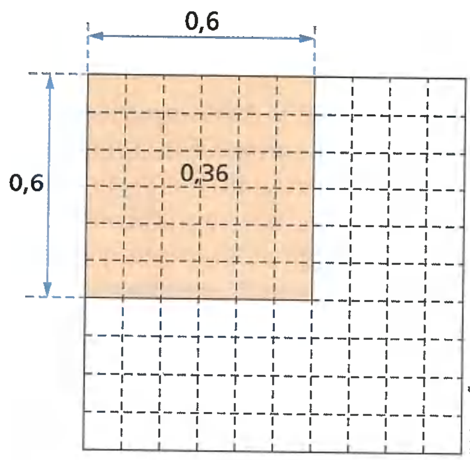
IMAGENS FORA DE PROPORÇÃO.

Geometricamente, temos:



- 0,6 é a raiz quadrada de 0,36, pois $(0,6)^2 = 0,6 \cdot 0,6 = 0,36$.
  Indica-se: $\sqrt{0,36} = 0,6$.

Geometricamente, temos:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Estudaremos, agora, como determinar a raiz quadrada exata de outros números racionais. Vamos analisar alguns exemplos:

1 Para determinar a raiz quadrada do número 1 024, vamos fazer a decomposição em fatores primos de 1 024.

$$\begin{array}{r|l} 1\,024 & 2 \\ 512 & 2 \\ 256 & 2 \\ 128 & 2 \\ 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$1\,024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10}$

Como 2^{10} pode ser escrito na forma $(2^5)^2$ (potência de uma potência), temos:

$1\,024 = 2^{10} = (2^5)^2 = (32)^2 = 32 \cdot 32$

Como $1\,024 = 32 \cdot 32$, temos: $\sqrt{1\,024} = 32$.

2 Determinar a raiz quadrada exata de $\dfrac{81}{121}$.

Vamos fazer a decomposição em fatores primos do numerador e do denominador.

$$\begin{array}{r|l} 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$\frac{81}{121} = \frac{3^4}{11^2} = \frac{(3^2)^2}{(11)^2} = \frac{(9)^2}{(11)^2} = \left(\frac{9}{11}\right)^2 = \frac{9}{11} \cdot \frac{9}{11}$$

Como $\dfrac{81}{121} = \dfrac{9}{11} \cdot \dfrac{9}{11}$, temos: $\sqrt{\dfrac{81}{121}} = \dfrac{9}{11}$.

3 Qual é a raiz quadrada exata de 4,41?

Lembrando que $4{,}41 = \dfrac{441}{100}$, vamos fazer a decomposição em fatores primos do numerador e do denominador.

$$\begin{array}{r|l} 441 & 3 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\frac{441}{100} = \frac{3^2 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{(3 \cdot 7)^2}{(2 \cdot 5)^2} = \frac{(21)^2}{(10)^2} = \left(\frac{21}{10}\right)^2 =$$
$$= (2{,}1)^2 = 2{,}1 \cdot 2{,}1$$

Como $4{,}41 = \dfrac{441}{100} = 2{,}1 \cdot 2{,}1$, temos: $\sqrt{4{,}41} = 2{,}1$.

SAIBA QUE

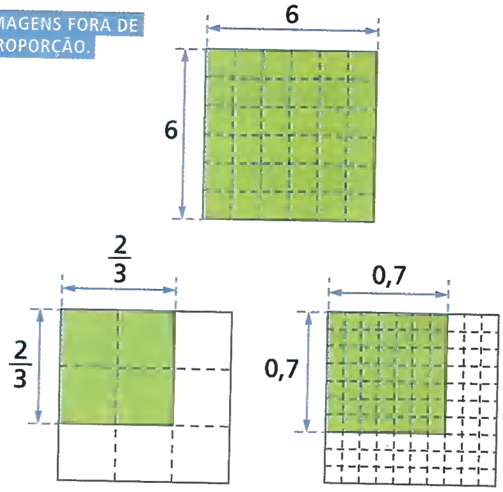
Nem todo número racional positivo tem raiz quadrada exata.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Observe as seguintes figuras:

IMAGENS FORA DE PROPORÇÃO.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Por meio dessas figuras, descubra, geometricamente, o valor de:

a) $\sqrt{36}$ **b)** $\sqrt{0{,}49}$ **c)** $\sqrt{\frac{4}{9}}$

2. Determine a raiz quadrada exata dos números a seguir:

a) 2 304 **d)** 2 500 **g)** 6 561
b) 676 **e)** 3 600 **h)** 5 184
c) 1 764 **f)** 1 089

3. Substitua a letra *x* pelo número racional positivo que verifica cada uma das seguintes igualdades:

a) $x^2 = 100$ **d)** $x^2 = 0{,}0016$
b) $x^2 = 121$ **e)** $x = \sqrt{25}$
c) $x^2 = \frac{1}{16}$ **f)** $x = \sqrt{\frac{36}{49}}$

4. Sabe-se que $a = \sqrt{\frac{121}{196}}$. Qual é o número *a*?

5. Se *x* representa a raiz quadrada do número $\frac{64}{225}$, qual é o valor do número *x*?

6. Calcule o valor das expressões:

a) $\sqrt{\frac{16}{9}}$ **d)** $\sqrt{\frac{1}{4}}$
b) $\sqrt{0{,}25}$ **e)** $\sqrt{\frac{49}{100}}$
c) $\sqrt{\frac{25}{36}}$ **f)** $\sqrt{1{,}96}$

7. Calcule o valor das expressões a seguir.

a) $\sqrt{441} + \sqrt{256} - \sqrt{900}$

b) $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{16}{9}} - \sqrt{\frac{25}{36}}$

8. Qual é a raiz quadrada exata de cada um dos números a seguir?

a) 12,25 **e)** 0,0784
b) 12,96 **f)** 0,1024
c) 30,25 **g)** 0,0729
d) 29,16 **h)** 0,0324

9. Qual destes números é igual a $\sqrt{0{,}0064}$?

a) $\frac{1}{8}$ **c)** $\frac{2}{5}$ **e)** $\frac{2}{25}$
b) $\frac{8}{10}$ **d)** $\frac{1}{80}$

10. Um número é expresso por $a^{10} \cdot b^4$. Qual é a expressão que representa a raiz quadrada desse número?

11. Sabe-se que $x = \sqrt{\frac{1{,}69}{1{,}44}}$ e $y = \sqrt{\frac{0{,}81}{0{,}04}}$. Calcule o valor de $x : y$.

12. Classifique cada uma das afirmações como verdadeira (V) ou falsa (F).

a) A raiz quadrada de um número racional positivo sempre é exata.

b) O oposto do módulo de -5 é a raiz quadrada exata de 25.

c) O número 250 000 tem raiz quadrada exata.

A ciência dos preços

Por Felipe van Deursen
31 out. 2016- Publicado em 28 ago. 2011

[...]

Mas não é só lugar badalado que usa e abusa da psicologia dos preços. O prato feito da esquina também. Muitas vezes ele o induz a escolher exatamente aquilo que quer que você escolha. Pense em um filé com fritas. Pequeno, R$ 15; médio, R$ 20; grande, R$ 22. Se a fome for grande, você tenderá a escolher o maior prato porque proporcionalmente ele é mais barato. O restaurante pode cobrar menos, pois a quantidade de comida no prato não interfere tanto assim no custo (há outras partes envolvidas, como mão de obra, energia elétrica, gás, água etc.). Cobrando menos, o restaurante o leva a pedir logo o maior prato. É o chamado "menu induzidor", que faz parte de um conceito largamente usado para conquistar o consumidor: o preço não linear.

Fonte: VAN DEURSEN, F. A ciência dos preços. **Superinteressante.** <https://super.abril.com.br/%20comportamento/a-ciencia-dos-precos/>. Acesso em: 1º out. 2018.

Para entender melhor o tema dos preços não lineares, resolva as questões a seguir no caderno.

1. **Numa lanchonete, um suco de laranja pequeno (300 mL) é vendido por R$ 3,30 e o suco grande (500 mL), por R$ 4,70. Supondo que os preços são proporcionais às quantidades de líquido no copo, calcule:**

a) Quanto custará cada 100 mL de suco de laranja se for comprado o suco pequeno?

b) Quanto custará cada 100 mL de suco de laranja se for comprado o suco grande?

c) Quanto custaria o suco grande se seu preço fosse calculado proporcionalmente em relação ao volume do suco pequeno?

2. **Você pode verificar que o preço não linear é bastante praticado, mesmo fora das promoções do tipo "leve mais e pague menos". Visite um supermercado e observe alguns produtos, consumidos na sua residência, que são vendidos em embalagens de vários tamanhos. Anote para cada produto os tamanhos de embalagens e os respectivos preços. Veja o exemplo a seguir.**

Produto	Embalagem menor		Embalagem maior		Preço da embalagem maior, caso ela seja proporcional à menor	Diferença entre o preço real e o preço proporcional
	Quantidade	Preço	Quantidade	Preço		

Faça uma análise e compartilhe com os amigos as vantagens de compra que você encontrou.

CAPÍTULO 7

MÉDIA ARITMÉTICA E MÉDIA ARITMÉTICA PONDERADA

Acompanhe as situações a seguir.

1 Em uma competição de ginástica, Clara obteve as notas registradas a seguir:

Modalidade	Salto sobre cavalo	Trave	Solo
Nota	5,0	8,0	5,0

Qual é a média das notas de Clara nessa competição?

Nesse caso, calculamos a média da ginasta adicionando-se as três notas e dividindo-se o resultado por 3, ou seja:

$$\frac{5{,}0 + 8{,}0 + 5{,}0}{3} = \frac{18{,}0}{3} = 6{,}0$$

A média das notas de Clara na competição foi 6,0.

Dizemos que o valor 6,0 é a **média aritmética** dos números 5,0; 8,0 e 5,0.

A **média aritmética** de *n* números representa a soma de todos os números dividida por *n*.

Agora, considere que os juízes atribuíram pesos diferentes a cada nota. Veja o quadro:

Modalidade	Nota	Peso atribuído
Salto sobre cavalo	5,0	3
Trave	8,0	2
Solo	5,0	5

Nesse caso, a média das notas da ginasta será calculada assim:

$$\frac{3 \cdot 5{,}0 + 2 \cdot 8{,}0 + 5 \cdot 5{,}0}{3 + 2 + 5} = \frac{56{,}0}{10} = 5{,}6$$

A média das notas de Clara na competição foi 5,6.

Dizemos que o valor 5,6 é a **média aritmética ponderada** dos números 5,0; 8,0; e 5,0, aos quais atribuímos os pesos 3, 2 e 5, respectivamente.

A **média aritmética ponderada** de um conjunto de valores é calculada pela soma dos produtos desses valores por seus respectivos pesos, dividida pela soma desses pesos.

Com base nos dois casos apresentados, observamos que o cálculo da média depende das regras previamente estabelecidas.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Considere os seguintes números:

−32	−53	−45	25	60

Qual é a média aritmética desses números?

2. Um pediatra anotou as alturas de seis meninas de oito anos, medidas em seu consultório: 125 cm, 127 cm, 130 cm, 123 cm, 131 cm e 126 cm. Qual é a altura média dessas seis meninas, em centímetros?

3. Caio e Lucca foram classificados em um concurso. A tabela mostra os pontos obtidos por eles nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos gerais.

Pontos nas provas

Disciplina \ Estudante	Caio	Lucca
Matemática	14	8
Português	15	16
Conhecimentos gerais	16	18

Fonte: Dados fictícios.

a) Qual é a média de aproveitamento de:

- Caio?
- Lucca?

b) Qual deles apresentou a melhor média de aproveitamento?

4. Em uma lanchonete, a receita para preparar os sucos é: 8 copos de água mineral para 2 copos de groselha. Qual o custo de cada copo de suco, sabendo que cada copo de água mineral custa 50 centavos, e o de groselha custa 85 centavos?

5. Uma equipe de handebol é formada por 12 jogadores. Três desses jogadores têm 20 anos, dois jogadores têm 26 anos, quatro jogadores têm 23 anos, e os demais têm 21 anos, 25 anos e 27 anos. Qual é a idade média aproximada dessa equipe?

6. Uma indústria produziu 1 800 aparelhos de um modelo de telefone por 30 reais a unidade e 1 200 unidades de outro modelo por 27 reais cada um. Qual foi o preço médio desses aparelhos, por unidade?

DESAFIO

7. Ana vai comprar uma máquina de R$ 285,00. Ela tinha R$ 200,00 em um investimento que obedeceu à seguinte regra, no ano de 2018: $S = 200 + 8t$, em que S representava o saldo em função de t, em meses $(0 \leqslant t \leqslant 11)$.

- Supondo que o preço da máquina tenha sido o mesmo durante todo o ano, que $t = 0$ represente janeiro, $t = 1$, fevereiro e assim por diante, em que mês o saldo do investimento alcançou o valor da máquina?

Análise de tabelas e gráficos com números racionais negativos

Leia o texto a seguir.

São Paulo puxa queda na produção industrial em agosto

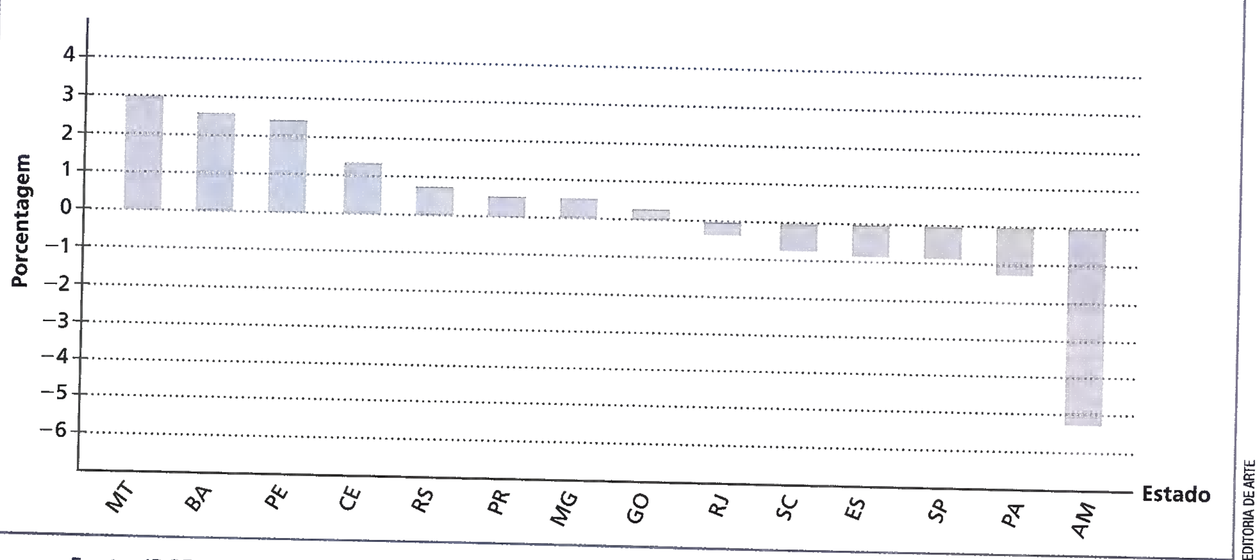
A queda de 0,9% da produção industrial em São Paulo foi a principal influência para a baixa de 0,3% no setor entre julho e agosto deste ano, de acordo com os dados da Pesquisa Industrial Mensal Regional (PIM-PF Regional), divulgada hoje pelo IBGE. [...]

No total, em agosto, nove das quinze áreas pesquisadas tiveram variações positivas na produção industrial: Mato Grosso (3,0%), Bahia (2,7%), Pernambuco (2,6%), Ceará (1,5%), Nordeste (1,5%), Rio Grande do Sul (0,8%), Paraná (0,7%), Minas Gerais (0,5%) e Goiás (0,2%). Por outro lado, caíram Rio de Janeiro (−0,3%), Santa Catarina (−0,7%), São Paulo (−0,9%), Espírito Santo (−0,9%), Pará (−1,1%) e Amazonas (−5,3%). [...]

Fonte: IBGE. São Paulo puxa queda na produção industrial em agosto. **Agência IBGE Notícias**. Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/22767-sao-paulo-puxa-queda-na-producao-industrial-em-agosto>. Acesso em: 26 out. 2018.

Agora observe o gráfico que representa alguns dados desse texto:

Variação na produção industrial de alguns estados brasileiros entre julho e agosto de 2018



Fonte: IBGE. São Paulo puxa queda na produção industrial em agosto. **Agência IBGE Notícias**. Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/22767-sao-paulo-puxa-queda-na-producao-industrial-em-agosto>. Acesso em: 26 out. 2018.

Responda no caderno.

1. Em quais estados pesquisados a produção industrial apresentou variação positiva entre julho e agosto de 2018?
2. Em quais estados pesquisados a produção industrial apresentou variação negativa nesse período?
3. Qual estado pesquisado apresentou maior variação positiva?
4. Qual estado pesquisado apresentou maior variação negativa?
5. Qual foi a diferença, em pontos percentuais, entre a maior variação positiva e a menor variação negativa?
6. Mensalmente o IBGE divulga a **Pesquisa Mensal de Serviços** que produz indicadores que permitem acompanhar o setor de serviços no país, investigando a receita bruta de serviços nas empresas que desempenham como principal atividade um serviço não financeiro, excluídas as áreas de saúde e educação. Considere a tabela a seguir.

Pesquisa Mensal de Serviços
Indicadores do Volume de Serviços, segundo as atividades de divulgação
Agosto 2018 – Variação (%)

Atividades de divulgação	Mensal		
	Jun.	Jul.	Ago.
Serviços prestados às famílias	−4,2	−0,1	5,0
Serviços de informação e comunicação	1,4	0,1	−1,1
Serviços profissionais, administrativos e complementares	−3,5	−2,8	−0,3
Transportes, serviços auxiliares aos transportes e correio	4,4	1,4	4,6
Outros serviços	3,3	1,0	1,3

a) Quais foram os serviços que apresentaram apenas variação positiva nos meses divulgados?
b) Quais foram os serviços que apresentaram apenas variação negativa nos meses divulgados?
c) Escolha ao menos duas atividades de divulgação apresentadas na tabela e elabore um gráfico de múltiplas colunas utilizando os três meses que compõem a pesquisa. Você pode usar cores diferentes para indicar os dados para cada mês. Não se esqueça de elaborar uma legenda.
d) Qual foi a média da variação percentual das atividades divulgadas no mês de agosto?

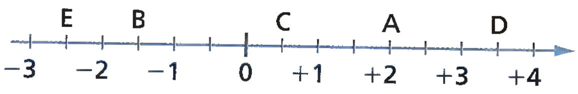
RETOMANDO O QUE APRENDEU

Responda às questões no caderno.

1. Qual é a distância, em metros, de um ponto situado a −6,35 m do nível do mar até um ponto situado a −1,5 m do nível do mar? Suponha que os dois pontos considerados estejam alinhados verticalmente.

a) 4,35
b) 4,45
c) 4,65
d) 4,85

2. Observe a reta numérica e responda:



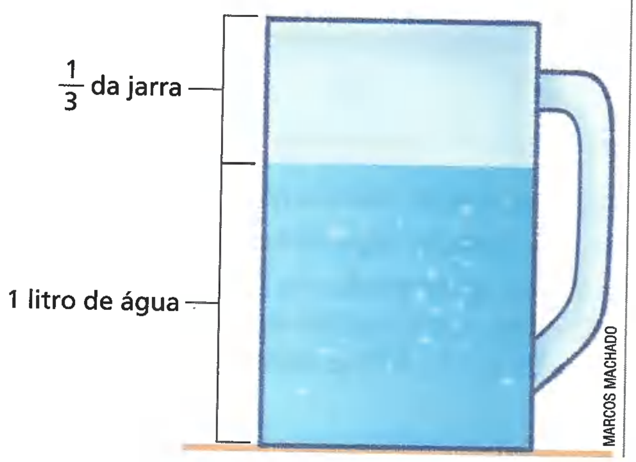
a) Qual é a abscissa do ponto *C*?

b) Qual é a abscissa do ponto *B*?

c) Qual é a imagem geométrica do número $+\frac{7}{2}\left(\text{ou } +3\frac{1}{2}\right)$?

d) Qual é a imagem geométrica do número $-\frac{5}{2}\left(\text{ou } -2\frac{1}{2}\right)$?

3. Em uma jarra foi colocado 1 litro de água, e ainda sobra $\frac{1}{3}$ da jarra para completar. Quantos litros de água cabem nessa jarra?



4. Em uma sala de aula, $\frac{2}{3}$ dos alunos praticam esportes. Desses alunos, $\frac{3}{4}$ jogam voleibol. Que fração dos alunos da sala pratica voleibol?

5. Escreva o número que multiplicado por $-\frac{4}{7}$ dá 1. Como se chama esse número em relação ao número $-\frac{4}{7}$?

6. Calcule o valor dos produtos.

a) $(-4)\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)$

b) $(-6{,}4)\cdot(+3{,}5)$

c) $(-2)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)$

d) $\left(-\frac{7}{10}\right)\cdot\left(+\frac{3}{7}\right)\cdot\left(-\frac{5}{9}\right)$

e) $(+5{,}5)\cdot(-1{,}1)\cdot(-0{,}66)$

f) $(-1{,}45)\cdot(-1{,}4)\cdot(-0{,}8)$

7. Entre quais números inteiros se situa o resultado da expressão $\left(-\frac{3}{4}-1\right)\cdot\left(\frac{3}{2}-1\right)$?

a) −3 e −2.
b) −2 e −1.
c) −1 e 0.
d) 0 e −1.

8. Calcule o valor das expressões numéricas:

a) $\frac{5}{4}\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)+2\cdot\left(+\frac{1}{4}\right)$

b) $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(+\frac{3}{10}\right)-\left(+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$

c) $(-0{,}28)\cdot(+1{,}5)-(+0{,}7)\cdot(-0{,}72)$

d) $0{,}625-(+0{,}84)\cdot(+0{,}6)$

9. Qual é o próximo número desta sequência?

40	10	2,5	?

a) 0,625
b) 0,0625
c) 6,25
d) 62,5
e) 4,25

10. Qual é o número decimal correspondente ao resultado da expressão a seguir?

$$\boxed{0{,}25 + 0{,}19 : (4 - 0{,}8 : 0{,}5 - 0{,}5)}$$

a) 0,2
b) 0,25
c) 0,3
d) 0,32
e) 0,35

11. Quando $x = 6^{-1}$ e $y = 6^{-2}$, quanto vale $x + y$?

a) $+\frac{7}{6}$

b) $-\frac{7}{6}$

c) $+\frac{7}{36}$

d) $-\frac{7}{36}$

e) $+\frac{1}{6}$

12. (Urca-CE) Qual é a oitava parte de $2^{32} \times 3^{16}$?

a) $2^{25} \times 3^{16}$

b) $2^{26} \times 3^{8}$

c) $2^{4} \times 3^{2}$

d) $2^{29} \times 3^{16}$

e) $2^{29} \times 3^{13}$

13. Observe os dados referentes à idade dos alunos da classe de André.

Idade dos alunos

Quantidade de alunos	Idade
3	12
18	13
9	14

Fonte: Dados fictícios.

A média das idades dos alunos dessa classe é:

a) 13 anos.
b) 13,1 anos.
c) 13,2 anos.
d) 13,4 anos.
e) 13,5 anos.

UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, foram abordados: o conjunto dos números racionais, as propriedades inerentes a esse conjunto e as estruturas das operações de adição algébrica, multiplicação e divisão. Além disso, foram exploradas as operações que envolvem potências, raiz quadrada, média aritmética e média ponderada.

Esses conceitos foram estudados por meio da observação, inclusive de suas aplicações no cotidiano, como valores em reais, análise de gráficos e resolução de problemas.

Vamos retomar as aprendizagens da Unidade 4 e refletir sobre elas:

- Explique: Entre dois números racionais sempre há outro número racional.
- Quantos números racionais existem entre os números 0 e 1?
- Que conjuntos numéricos estão contidos no conjunto dos números racionais?
- Em seu cotidiano, em quais situações é possível perceber a presença de números racionais?

5 LINGUAGEM ALGÉBRICA E EQUAÇÕES

Um dos tipos de atendimento nos restaurantes se dá por meio da modalidade comumente denominada *self-service* (sirva-se) ou venda "a quilo". Essa modalidade, consideravelmente recente, que conquistou o reconhecimento dos brasileiros, consiste em um restaurante em que os alimentos estão dispostos de maneira que o cliente se serve com a quantidade que desejar. Para entender como funciona um restaurante de venda "a quilo", observe a cena e responda às questões no caderno.

Em um restaurante de venda a quilo, cada pessoa pode decidir qual alimento e qual quantidade ela quer comer. Isso permite uma alimentação balanceada.

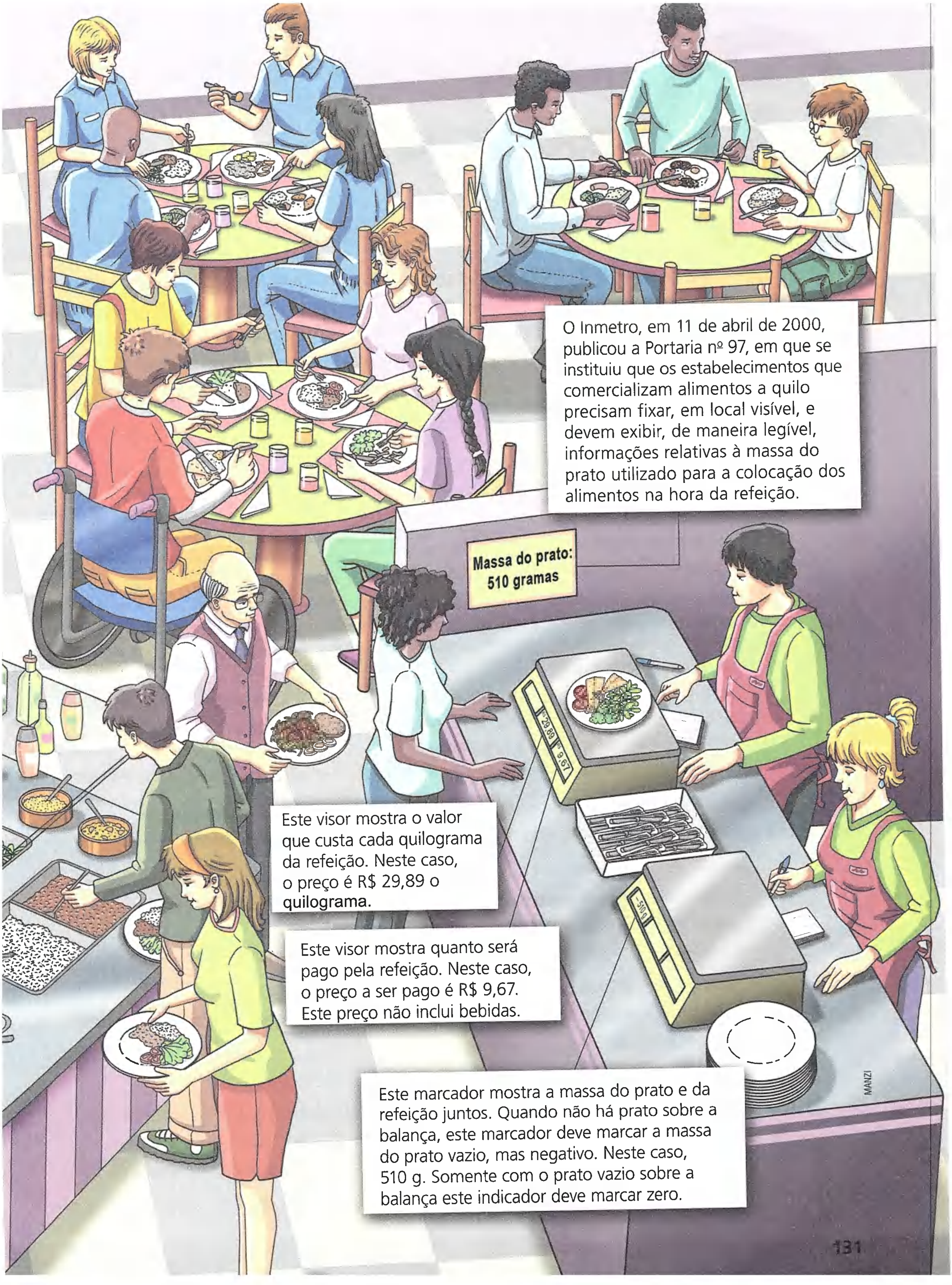
- Como podemos saber a massa somente dos alimentos que colocamos em nossa refeição, sem considerar a massa do prato?
- Considerando que as pessoas que vão a um restaurante não comem a mesma quantidade de comida, é necessário que o valor a ser pago seja representado matematicamente. Você sabe que nome se dá a essa representação?
- Para representar o valor a ser pago pela refeição no restaurante apresentado, como você descreveria essa representação e qual seria o resultado dela?

  Para essa representação, se julgar necessário, use:

  P = massa do prato

  T = massa total

  x = massa da refeição


O Inmetro, em 11 de abril de 2000, publicou a Portaria nº 97, em que se instituiu que os estabelecimentos que comercializam alimentos a quilo precisam fixar, em local visível, e devem exibir, de maneira legível, informações relativas à massa do prato utilizado para a colocação dos alimentos na hora da refeição.
Massa do prato: 510 gramas
29,89
9,67
Este visor mostra o valor que custa cada quilograma da refeição. Neste caso, o preço é R$ 29,89 o **quilograma.**
-510 g
Este visor mostra quanto será pago pela refeição. Neste caso, o preço a ser pago é R$ 9,67. Este preço não inclui bebidas.
MANZI
Este marcador mostra a massa do prato e da refeição juntos. Quando não há prato sobre a balança, este marcador deve marcar a massa do prato vazio, mas negativo. Neste caso, 510 g. Somente com o prato vazio sobre a balança este indicador deve marcar zero.

CAPÍTULO 1

SEQUÊNCIAS

Na Matemática, utilizamos as sequências numéricas (ou de figuras), que são aquelas que apresentam números escritos (ou figuras dispostas) em determinada ordem preestabelecida. Cada elemento que compõe uma sequência é denominado **termo**. A ordem em que o termo aparece é a **posição** dele na sequência.

PENSE E RESPONDA

1. Observe estas sequências:

I) 3; 0,5; −1; 4

II) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...

III) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Com base nessas sequências, responda:

a) Qual sequência apresenta um número finito de elementos?

b) Observe a sequência II: Anote o resultado da divisão de um termo pelo termo que vem imediatamente antes dele. Depois de escolher outros números e repetir o processo, escreva sua conclusão. Que relação podemos fazer entre um termo e o termo que vem imediatamente antes dele?

c) Vimos na Unidade 1 que a sequência III se chama sequência de Fibonacci. A sequência de Fibonacci foi montada sem uma regra definida como a sequência I ou foi montada com uma regra definida, como a sequência II?

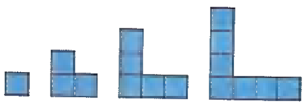
SAIBA QUE

Utilizamos as reticências (...) quando queremos indicar que algo continua indefinidamente, ou seja, quando não tem fim.

Sequências como as sequências II e III são chamadas de **sequências recursivas**, enquanto sequências como a sequência I são chamadas de **sequências não recursivas**.

> Uma sequência é **recursiva** quando cada termo depende do termo anterior ou de termos anteriores (conhecido o termo inicial).

São exemplos de sequências recursivas:

- 4, 16, 256, 65 536 ⟶ o primeiro termo é o número 4 e cada termo seguinte é o termo anterior elevado ao quadrado
-  EDITORIA DE ARTE ⟶ o primeiro termo é um quadradinho e a cada termo adicionam-se dois quadradinhos, um alinhado acima e um alinhado à direita

As duas sequências que vimos como exemplo possuem uma regra que chamamos de **lei de formação** da sequência.

Termo geral de uma sequência recursiva

Uma sequência recursiva é definida por sua lei de formação, pois é essa lei que determinará como os termos da sequência são calculados.

Veja as situações a seguir.

1 Tomando a sequência 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... podemos fazer algumas observações sobre ela: é infinita, é recursiva, o 1º termo dela é 1 e cada termo é igual ao termo anterior multiplicado por 2.

Com base nessas informações, qual o 30º termo dela?

Para responder à pergunta, podemos fazer sucessivas multiplicações até encontrarmos o valor desejado; no entanto, esse seria um processo longo e demorado.

Mas existe outra forma de solucionar essa questão. Usando a lei de formação, podemos encontrar uma fórmula que expresse cada termo, considerando sua posição. Essa fórmula recebe o nome de **termo geral**.

Vamos indicar cada termo de acordo com a sua posição da seguinte maneira: T_1 (1º termo), T_2 (2º termo), T_3 (3º termo), ... T_n (enésimo termo, ou termo geral).

Para essa sequência, note que:

Posição do termo	Valor do termo	Lei de formação
T_1	1	1
T_2	2	1×2
T_3	4	2×2
T_4	8	$4 \times 2 = 2 \times 2 \times 2$
T_5	16	$8 \times 2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$
T_6	32	$16 \times 2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

Podemos perceber que cada termo pode ser escrito como uma potência de base 2, sendo:

$$T_1 = 2^0;\ T_2 = 2^1;\ T_3 = 2^2;\ T_4 = 2^3;\ T_5 = 2^4;\ T_6 = 2^5,\ \ldots$$

Notamos também que:

$$T_1 \overset{-1}{\curvearrowright} = 2^0;\ T_2 \overset{-1}{\curvearrowright} = 2^1;\ T_3 \overset{-1}{\curvearrowright} = 2^2;\ T_4 \overset{-1}{\curvearrowright} = 2^3;\ T_5 \overset{-1}{\curvearrowright} = 2^4;\ T_6 \overset{-1}{\curvearrowright} = 2^5;\ \ldots$$

Logo, o termo geral é dado por: $\mathbf{T_n = 2^{n-1}}$, em que *n* é um número natural não nulo.

Ao substituir o valor de *n* por um número natural não nulo, encontramos o valor do termo de posição *n* correspondente.

No nosso caso queremos o 30º termo, então: $T_{30} = 2^{30-1}$, ou seja, $T_{30} = 2^{29}$.

Usando uma calculadora científica verificamos que $T_{30} = 536\,870\,912$.

CAPÍTULO 3

IGUALDADE

Usamos sentenças para nos comunicar tanto em uma conversa quanto na linguagem escrita. Em Matemática, também usamos sentenças; a maioria delas faz afirmações sobre números. Nas sentenças matemáticas, usamos símbolos no lugar de palavras.

$=$ (igual a)	$\neq$ (diferente de)	$>$ (maior que)
$<$ (menor que)	$\Leftrightarrow$ (equivalente a)	$\Rightarrow$ (implica)

Uma sentença matemática em que o símbolo $=$ é usado representa uma **igualdade**.

DANILLO SOUZA

De modo geral, podemos representar uma igualdade por a = b, em que *a* e *b* são expressões diferentes para um mesmo número. Chamamos isso de **princípio da igualdade**.

Exemplos:

$\underbrace{2 + 5}_{a} = \underbrace{7}_{b}$ $\qquad$ $\underbrace{2^3 - 5}_{a} = \underbrace{3}_{b}$ $\qquad$ $\underbrace{3^2 + 4^2}_{a} = \underbrace{5^2}_{b}$

Em uma igualdade:

- A expressão matemática situada à **esquerda** do símbolo $=$ é denominada **1º membro da igualdade**.
- A expressão matemática situada à **direita** do símbolo $=$ é denominada **2º membro da igualdade**.

Assim:

$\underbrace{2 + 5}_{\text{1º membro}} = \underbrace{7}_{\text{2º membro}}$ $\qquad$ $\underbrace{2^3 - 5}_{\text{1º membro}} = \underbrace{3}_{\text{2º membro}}$ $\qquad$ $\underbrace{3^2 + 4^2}_{\text{1º membro}} = \underbrace{5^2}_{\text{2º membro}}$

Propriedades de uma igualdade

Uma igualdade apresenta três propriedades.

1ª propriedade: $a = a$, para qualquer *a*. Essa é a propriedade **reflexiva**.

- $2 = 2$
- $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

2ª propriedade: $a = b \Leftrightarrow b = a$, para quaisquer *a* e *b*. Essa é a propriedade **simétrica**.

- $2 + 5 = 7 \Leftrightarrow 7 = 2 + 5$
- $2^3 - 5 = 3 \Leftrightarrow 3 = 2^3 - 5$

3ª propriedade: $a = b$ e $b = c \Rightarrow a = c$, para quaisquer *a*, *b* e *c*. Essa é a propriedade **transitiva**.

- $2 + 5 = 7$ e $7 = 8 - 1 \Rightarrow 2 + 5 = 8 - 1$
- $2^3 - 5 = 3$ e $3 = 2 + 2^0 \Rightarrow 2^3 - 5 = 2 + 2^0$

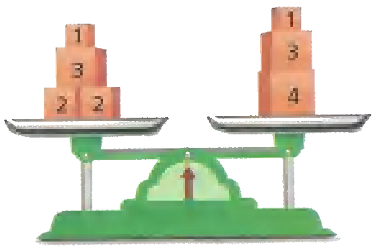
Princípios de equivalência

Os princípios de equivalência serão muito úteis na resolução de equações, assunto que veremos ainda nesta unidade.

Princípio aditivo: adicionando um mesmo número aos dois membros de uma igualdade, obtemos uma nova igualdade, ou seja:

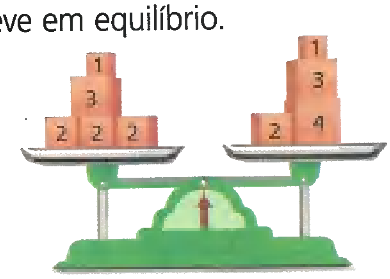
$$a = b \Rightarrow a + c = b + c$$

Vamos observar a balança de dois pratos a seguir para compreendermos melhor o princípio aditivo ao pensarmos na ideia de equilíbrio da balança. Note que a balança a seguir está equilibrada.



$$\underbrace{2 + 2 + 1 + 3}_{8} = \underbrace{4 + 1 + 3}_{8}$$

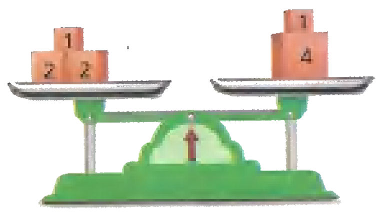
Aqui adicionamos **2** aos dois pratos da primeira balança. Note que ela se manteve em equilíbrio.



Então devemos adicionar 2 aos dois membros da igualdade original para mantermos a sentença verdadeira:

$$\underbrace{(2 + 2 + 1 + 3) + 2}_{10} = \underbrace{(4 + 1 + 3) + 2}_{10}$$

Aqui retiramos **3** dos dois pratos da primeira balança. A balança continuou em equilíbrio.



ILUSTRAÇÕES: LUCAS FARAUJ

Então devemos subtrair 3 dos dois membros da igualdade original para mantermos a sentença verdadeira:

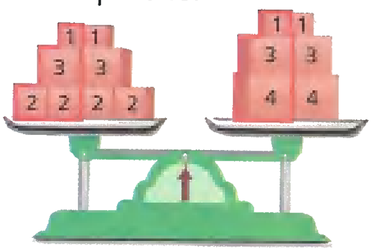
$$\underbrace{(2 + 2 + 1 + 3) - 3}_{5} = \underbrace{(4 + 1 + 3) - 3}_{5}$$

Princípio multiplicativo: multiplicando os dois membros de uma igualdade por um mesmo número, obtemos uma nova igualdade, ou seja:

$$a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$$

Vamos observar novamente a balança, a fim de compreendermos melhor o princípio multiplicativo.

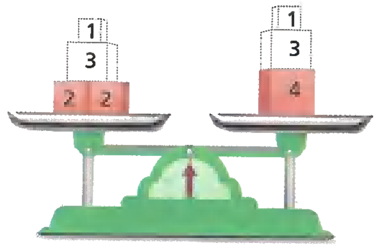
Aqui multiplicamos por 2 a massa em cada prato da primeira balança e ela continua em equilíbrio.



Então devemos multiplicar por 2 os dois membros da igualdade original para mantermos a sentença verdadeira.

$$\underbrace{(2 + 2 + 1 + 3) \cdot 2}_{16} = \underbrace{(4 + 1 + 3) \cdot 2}_{16}$$

Aqui vamos dividir por 2 a massa em cada prato da primeira balança. A balança continua em equilíbrio.



ILUSTRAÇÕES: LUCAS FARAUJ

Então devemos dividir por 2 os dois membros da igualdade original para mantermos a sentença verdadeira.

$$\underbrace{(2 + 2 + 1 + 3) : 2}_{4} = \underbrace{(4 + 1 + 3) : 2}_{4}$$

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Identifique o 1º e 2º membros em cada igualdade:

a) $6^2 - 5 = 31$ **b)** $3^3 + 3^2 = 2^5 + 2^2$

2. Na hora de escrever a sentença $-8 = x + 3$ apliquei uma propriedade da igualdade e escrevi: $x + 3 = -8$

Eu acertei? Em caso afirmativo, qual a propriedade que usei?

3. Considere as igualdades $x = y$ e $y = -10$.

a) Qual é o valor de *x*?

b) Que propriedade você usou para responder o item anterior?

4. Com base nas igualdades $x = 3y$ e $3y = a - b$, escreva uma nova igualdade.

5. Na igualdade $x - 10 = 2$, eu adicionei 10 ao 1º membro. Como devo escrever o 2º membro para que continue existindo uma igualdade?

6. Se você multiplicar o 1º membro da igualdade $3x = 27$ por $\frac{1}{3}$, como deverá ser escrito o 2º membro para que se obtenha uma nova igualdade?

7. Adicione o número (-6) aos dois membros da igualdade $x + 6 = 1$ e descubra o valor de *x*.

8. Multiplique cada membro da igualdade $4x = 28$ pelo número $\frac{1}{4}$. Em seguida, descubra o valor de *x* na nova igualdade obtida.

CAPÍTULO 4

EQUAÇÕES

PENSE E RESPONDA

Responda às questões no caderno.

1. Hoje Fernando tem 10 anos. Qual será a idade de Fernando nesse mesmo mês e dia daqui a:

a) 10 anos? **b)** 25 anos? **c)** *x* anos?

2. Quando Carlos subiu na balança, o visor mostrou 46 kg. Quantos quilogramas ele terá se:

a) ganhar 10 kg?

b) perder 5 kg?

c) ganhar *x* kg?

d) perder *y* kg?

DANILLO SOUZA

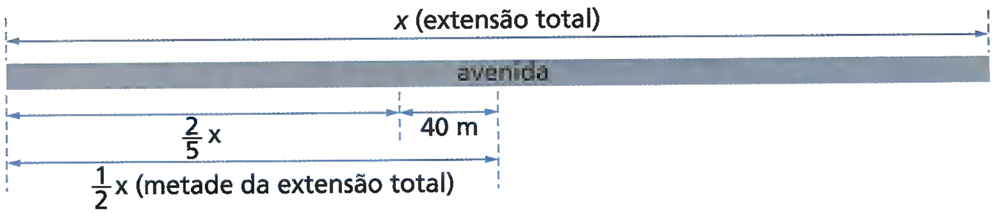
Conhecendo as equações

Em uma situação, quando precisamos encontrar o valor de um ou mais números desconhecidos, transformamos o texto que apresenta o problema em uma sentença escrita na linguagem matemática, usando letras e símbolos.

Imagine resolver situações usando palavras e desenhos. Parece bastante complicado, não é? Mas durante muito tempo era assim que as situações com números desconhecidos eram resolvidas. O uso de letras para representar os números desconhecidos facilitou a resolução de problemas e trouxe enormes progressos para a Matemática.

Quer ver? Acompanhe as situações a seguir.

1 Passeando com seus netos, Helena percorreu $\frac{2}{5}$ do comprimento total de uma avenida. Se andasse mais 40 metros, teria percorrido a metade da extensão total da avenida. Por meio de qual sentença matemática poderíamos obter, em metros, a extensão total dessa avenida? Primeiro precisamos encontrar um número que represente, em metros, a extensão total da avenida. Vamos indicar esse número pela letra *x* e fazer um esquema da situação:



Observando o esquema, fica mais fácil escrever a sentença matemática:

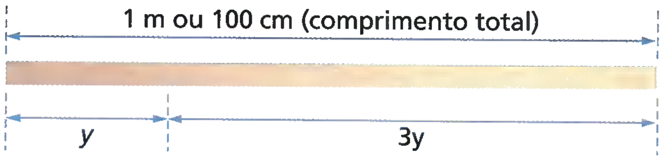
$$\underbrace{\frac{2}{5}x}_{\frac{2}{5}\text{ da extensão total}} + \underbrace{40}_{40\text{ m}} = \underbrace{\frac{1}{2}x}_{\text{metade da extensão total}}$$

Note que formamos uma sentença matemática representada por uma igualdade, em que usamos a letra *x* para nos referir a um número desconhecido dessa sentença.

2 Um carpinteiro serra uma tábua de 1 m (ou 100 cm) em dois pedaços. Um dos pedaços tem um comprimento igual ao triplo do comprimento do outro. Que sentença matemática poderíamos escrever para calcular o comprimento de cada pedaço?

Devemos encontrar dois números que representem, em centímetros, os comprimentos dos pedaços em que a tábua foi serrada. Como um dos comprimentos é o triplo do outro (**triplo** significa três vezes), podemos indicar o comprimento do menor pedaço pela letra *y* e o comprimento do maior pedaço por 3y.

Fazendo um esquema dessa situação, temos:



Observando o esquema, escrevemos a sentença matemática:

$$\underbrace{y}_{\text{comprimento do pedaço menor}} + \underbrace{3y}_{\text{comprimento do pedaço maior}} = \underbrace{100}_{\text{comprimento total}}$$

Usamos a letra *y* para compor os números desconhecidos nessa sentença representada por uma igualdade.

As sentenças matemáticas que escrevemos nas duas situações são chamadas equações.

> Toda sentença matemática expressa por uma igualdade, na qual haja um ou mais símbolos que representem números desconhecidos dessa sentença, é denominada **equação**.
>
> Cada símbolo que representa um número desconhecido chama-se **incógnita**.

Assim:

- A sentença matemática $x - y = 20$ é uma equação com duas incógnitas representadas pelas letras *x* e *y*.
- Como toda equação é uma igualdade, temos:

$$\underbrace{\frac{2}{5}x + 40}_{1^{\underline{o}}\text{ membro}} = \underbrace{\frac{1}{2}x}_{2^{\underline{o}}\text{ membro}} \qquad \underbrace{y + 3y}_{1^{\underline{o}}\text{ membro}} = \underbrace{100}_{2^{\underline{o}}\text{ membro}}$$

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Explique por que as igualdades matemáticas abaixo não são equações.

$3^2 + 1 = 2 + 2^3$ $\qquad$ $2^5 + 2^3 = 2^2 \cdot 10$

2. Quais sentenças matemáticas a seguir representam equações?

$x + 5 = 12$ $\qquad$ $x + 10 > 10$

$x - 10 \neq 0$ $\qquad$ $x - 5 = 2$

$x = -10$ $\qquad$ $10x = 1$

3. Veja as equações que Helena escreveu:

$3x - 1 = 2x + 1$

$2x - y = 10 - y$

Quantas incógnitas há:

a) na 1ª equação? $\qquad$ **b)** na 2ª equação?

4. Escreva as sentenças a seguir usando a linguagem simbólica matemática.

a) O dobro de um número x é igual a 20.

b) Um número z aumentado de 82 é igual a 150.

c) Se subtrairmos um número x de 100, obteremos 36.

d) A metade de um número x é igual a 25.

5. Escreva a equação correspondente a cada sentença:

a) Ao triplo de um número t adicionamos 40 e obtemos 61.

b) Subtraindo 20 do dobro de um número y, obtemos 160.

c) A metade de um número x aumentada do próprio número x é igual a 96.

d) O quíntuplo de um número x é igual ao triplo do número x, aumentado de 62.

6. Daqui a 5 anos Karina terá 37 anos. Usando a letra x, escreva uma equação que permita calcular a idade que Karina tem hoje.

7. A diferença entre a idade de Mariana e a de Gabriela é de 2 anos. Se Gabriela hoje está com 23 anos e é a mais nova das duas, use a letra x, e escreva uma equação para calcular a idade de Mariana.

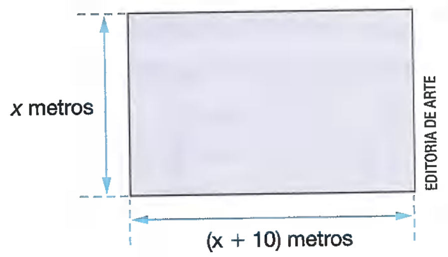
8. (Prova Brasil/Saeb) Uma prefeitura aplicou R$ 850 mil na construção de três creches e um parque infantil. O custo de cada creche foi de R$ 250 mil. A expressão que representa o custo do parque, em mil reais, é:

a) $x + 850 = 250$ $\qquad$ **c)** $850 = x + 250$

b) $x - 850 = 750$ $\qquad$ **d)** $850 = x + 750$

9. Duas caixas são colocadas em uma balança que marca 68 quilogramas. A massa da caixa maior é igual ao triplo da caixa menor. Usando a letra x, represente esse fato com uma equação.

10. Em um terreno retangular, o comprimento tem 10 metros a mais que a largura. Se representarmos pela letra x o número de metros da largura, o comprimento será representado por $x + 10$.



Sabendo que o perímetro desse terreno é 80 metros, escreva uma equação que nos permita calcular o comprimento e a largura do terreno.

CAPÍTULO 5

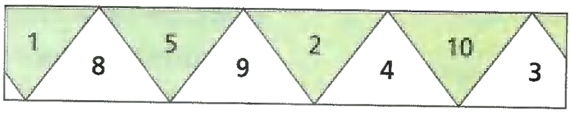
CONJUNTO UNIVERSO E SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO

PENSE E RESPONDA

O programa "A escola na TV" organiza gincanas semanais entre estudantes. Em um dos programas foram apresentadas as questões a seguir. Observe as opções, o tempo máximo para resposta e a pontuação correspondente a cada acerto e participe da gincana resolvendo as questões no caderno.

1. Qual é o número cujo triplo mais 6 dá 21?

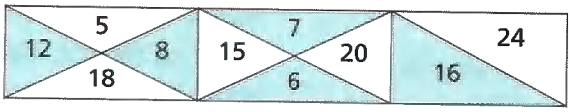
- Quadro de opções de resposta:



- Tempo para resposta: 30 segundos.
- Pontuação: 10 pontos.

2. A metade de um número mais o seu dobro dá 20. Qual é esse número?

- Quadro de opções de resposta:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

- Tempo para resposta: 1 minuto.
- Pontuação: 20 pontos.

3. Quantos pontos você conseguiu fazer nessa gincana?

Vamos considerar as seguintes situações:

1 Qual dos elementos do conjunto A = {0, 1, 2, 3, 4, 5} podemos colocar no lugar da letra *x* para tornar verdadeira a igualdade $x + 2 = 6$?

Fazendo a substituição, temos:

$x + 2 = 6 \longrightarrow (\mathbf{0}) + 2 = 6$ (F)
$x + 2 = 6 \longrightarrow (\mathbf{1}) + 2 = 6$ (F)
$x + 2 = 6 \longrightarrow (\mathbf{2}) + 2 = 6$ (F)
$x + 2 = 6 \longrightarrow (\mathbf{3}) + 2 = 6$ (F)
$x + 2 = 6 \longrightarrow (\mathbf{4}) + 2 = 6$ (V)
$x + 2 = 6 \longrightarrow (\mathbf{5}) + 2 = 6$ (F)

Vemos que o elemento é o número 4; os demais não tornam verdadeira a sentença, ou seja, o 4 é o elemento que satisfaz a equação dada.

- O conjunto A = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, formado por todos os elementos que a incógnita *x* pode assumir, é denominado **conjunto universo** da equação.
- O número 4 é a **solução** ou a **raiz** da equação.

2 Qual é o número natural que podemos colocar no lugar da letra *x* para tornar verdadeira a igualdade $3x = 15$?

Considerando os números naturais (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...), vemos que o número natural procurado é 5, pois, fazendo a substituição, temos:

$$\boxed{3x = 15}$$

$$3 \cdot 5 = 15$$

Os demais números naturais não tornam verdadeira a sentença, ou seja, não satisfazem a equação. Assim:

- O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, que representa os valores que a incógnita *x* pode assumir, é denominado **conjunto universo** da equação.
- O número 5 chama-se **solução** ou **raiz** da equação.

3 Qual é o número inteiro que podemos colocar no lugar da letra *y* para tornar verdadeira a sentença dada pela igualdade $y + 1 = -5$?

Fazendo a substituição, vemos que o número inteiro procurado é -6, pois:

$$\boxed{y + 1 = -5}$$

$$-6 + 1 = -5$$

Pelas situações apresentadas, verifica-se que, dada uma equação, devemos estabelecer inicialmente um conjunto numérico formado por todos os valores pelos quais a incógnita pode ser substituída. Esse conjunto é chamado **conjunto universo** da equação e é representado pela letra **U**.

Por exemplo:

Se $U = \mathbb{Q}$, a incógnita pode assumir o valor de qualquer número racional.

O conjunto *S* formado pelos elementos de *U* que satisfazem a equação dada chama-se **conjunto solução** da equação. Assim:

- na situação 1: $S = \{4\}$
- na situação 2: $S = \{5\}$
- na situação 3: $S = \{-6\}$

Uma equação pode não ter solução ou raiz em determinado conjunto universo. Acompanhe mais esta situação:

4 Qual é o conjunto solução da equação $x - \frac{1}{2} = 0$, sendo $U = \mathbb{Z}$?

Equação: $x - \frac{1}{2} = 0$

Conjunto universo: $\mathbb{Z}$

Como nenhum número inteiro satisfaz a equação dada, dizemos que a equação não tem solução ou raiz no conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$).

Como verificar se um número dado é raiz de uma equação

Podemos verificar se um número dado é raiz ou não de uma equação, procedendo do seguinte modo:

- substituímos a incógnita pelo número dado;
- calculamos, separadamente, o valor numérico de cada membro da igualdade obtida.

Se o valor numérico do 1º membro for igual ao valor numérico do 2º membro, o número dado será raiz ou solução da equação; se os valores numéricos forem diferentes, o número dado não será raiz ou solução da equação. Veja como resolvemos as questões a seguir:

1 Verificar se o número -6 é raiz da equação $3x - 5 = 5x + 7$.

1º membro: $3x - 5$	2º membro: $5x + 7$
$3 \cdot (-6) - 5 = -18 - 5 = -23$	$5 \cdot (-6) + 7 = -30 + 7 = -23$

Como os valores numéricos dos dois membros são iguais, dizemos que -6 é raiz da equação $3x - 5 = 5x + 7$.

2 Verificar se o número 2 é raiz da equação $y^2 - 5y = 3y + 6$.

1º membro: $y^2 - 5y$	2º membro: $3y + 6$
$(2)^2 - 5 \cdot (2) = 4 - 10 = -6$	$3 \cdot (2) + 6 = 6 + 6 = 12$

Como os valores numéricos dos dois membros são diferentes, dizemos que 2 não é raiz da equação $y^2 - 5y = 3y + 6$.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Escreva a raiz ou solução das seguintes equações:

a) $x - 7 = 0, U = \mathbb{N}$

b) $x + 9 = 0, U = \mathbb{Z}$

c) $x - \frac{3}{8} = 0, U = \mathbb{Q}$

d) $x + 1 = 0, U = \mathbb{N}$

e) $x - 10 = 3, U = \mathbb{Q}$

2. Verifique se o número:

a) 5 é raiz da equação $4x - 7 = x + 8$.

b) 10 é raiz da equação $7x + 30 = 10x$.

c) -6 é raiz da equação $3x - 1 = 11 + 2x$.

d) -2 é raiz da equação $y^2 - 8 = 2y$.

3. São dados os números $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$.

Qual deles é a raiz da equação $2x - \frac{1}{2} = 3x - \frac{2}{3}$?

4. A raiz da equação $\frac{x + 3}{2} + \frac{x - 3}{2} = 6$ é o número racional inteiro 7. Essa afirmação é verdadeira?

5. Quais destes números são raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$?

0 1 2 3 4

POR TODA PARTE

Crescimento populacional

Você sabia que a estimativa do crescimento populacional pode ser utilizada como uma das referências para calcular indicadores demográficos, sociais e econômicos?

Observe os dados a seguir sobre duas cidades, Boa Vista e Goiânia. A cidade de Boa Vista, no estado de Roraima, é a capital mais distante de Brasília, e a capital mais próxima é Goiânia, no estado de Goiás.

Boa Vista é uma cidade plana, que impressiona por seu traçado moderno e por sua arborização. Quem a observar do alto perceberá suas avenidas largas que convergem para o centro, lembrando Paris. Esse projeto foi idealizado pelo arquiteto Alexandre Dernusson, nos anos 1930. A cidade é a única capital brasileira situada no Hemisfério Norte; em Boa Vista há a diferença de uma hora a menos em relação ao horário oficial brasileiro.

Informações obtidas em: PREFEITURA DE BOA VISTA. <www.boavista.rr.gov.br/turismo/a_cidade.php>. Acesso em: 2 set. 2018.

Goiânia já figurou por duas vezes entre as cidades brasileiras com melhor Índice de Qualidade de Vida (IQV). Localizada no Planalto Central, fica a 209 km de Brasília. Urbanização privilegiada, ruas limpas e bem estruturadas, riqueza em serviços e abundância em área verde são alguns dos fatores que levaram as boas condições de vida da cidade ao primeiro reconhecimento público, em 2005, por meio de pesquisa da Fundação Getulio Vargas.

Informações obtidas em: PREFEITURA DE GOIÂNIA. <www.goiania.go.gov.br/site/index.html>. Acesso em: 2 set. 2018.

Crescimento populacional

Ano \ Cidade	Boa Vista	Goiânia
1991	144 249	922 222
1996	162 828	996 797
2000	200 568	
2007	249 853	1 244 645
2010	284 313	1 302 001

Fonte: IBGE. <www.ibge.gov.br/cidadesat/painel/painel.php?codmun=520870#>. Acesso em: 2 set. 2018.

Os dados da tabela mostram como a população das duas cidades cresceu de 1991 a 2010.

1. Releia os textos e, em duplas, resolvam no caderno os itens abaixo:

a) Encontre uma equação que permita relacionar as distâncias de Boa Vista e Goiânia a Brasília, sabendo que Boa Vista fica 4 066 km mais distante de Brasília do que Goiânia.

b) Elabore uma equação para descobrir qual era aproximadamente a população de Goiânia em 2000, sabendo que o crescimento de sua população entre 1996 e 2000 foi de aproximadamente 96 210 habitantes.

c) Pesquise as populações atuais dessas duas cidades e verifique de quanto foi o crescimento (ou retração) populacional de 2010 para o ano da pesquisa.

CAPÍTULO 6

EQUAÇÕES EQUIVALENTES

A primeira referência a equações de que se tem notícia consta no papiro de Rhind, um dos documentos egípcios mais antigos que tratam da Matemática.

Os egípcios não utilizavam a notação algébrica atual, e os métodos de solução de uma equação eram complexos e cansativos.

Os gregos resolviam equações usando a Geometria.

Na obra **Os elementos**, de Euclides de Alexandria, encontramos soluções geométricas de equações.

Foram os árabes que, cultivando a matemática dos gregos, promoveram um acentuado progresso na resolução de equações. No estudo dos árabes, destaca-se o trabalho de al-Khwarizmi (século IX), que resolveu e discutiu equações de vários tipos.

SAIBA QUE

Euclides de Alexandria viveu por volta de 300 a.C. e participou da Escola de Alexandria. Escreveu vários tratados sobre ótica, astronomia, música e mecânica. Euclides é mais conhecido por ter sistematizado o conhecimento em Geometria.

Como reconhecer equações equivalentes

Um número pode ser representado de diferentes modos. Por exemplo, podemos representar o número 9 de diversas maneiras:

$\mathbf{3^2} \qquad \mathbf{2^3 + 1} \qquad \mathbf{5^2 - 4^2} \qquad \mathbf{18 : 2} \qquad \mathbf{6 + 3} \qquad \mathbf{10 - 1}$

A maneira mais simples de todas é, sem dúvida, **9**.

Fato semelhante ocorre com as equações. Veja a seguir.

- Observe as equações, sendo $U = \mathbb{Q}$:

$x + 3 = 10 \longrightarrow$ raiz ou solução: 7

$x = 10 - 3 \longrightarrow$ raiz ou solução: 7

$x = 7 \longrightarrow$ raiz ou solução: 7

As equações $x + 3 = 10$, $x = 10 - 3$ e $x = 7$ são chamadas **equações equivalentes**, porque apresentam a mesma raiz ou solução em um mesmo conjunto universo. O modo mais simples de representar essas equações é $x = 7$.

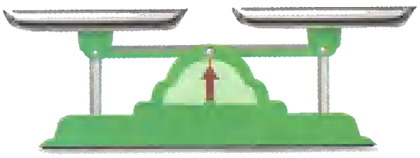
Em um mesmo conjunto universo, duas ou mais equações que apresentam a mesma raiz ou solução são denominadas **equações equivalentes**.

Escrever uma equação equivalente a uma equação dada

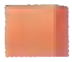
Podemos escrever uma equação equivalente a uma equação dada por meio de algumas transformações baseadas nos **princípios de equivalência** de uma igualdade:

- se $a = b$, então $a + c = b + c$ (princípio aditivo);
- se $a = b$, então $a \cdot c = b \cdot c$ (princípio multiplicativo).

Vamos ilustrar os princípios de equivalência nas equações, utilizando figuras:



Balança em equilíbrio.

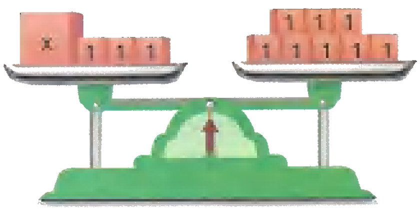


Equivale a *x* quilogramas.

Equivale a 1 quilograma.

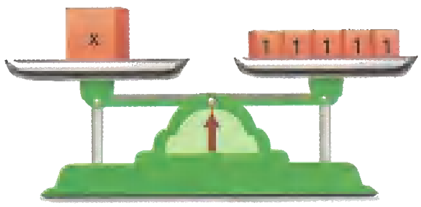
1 Vamos obter uma equação equivalente à equação $\mathbf{x + 3 = 8}$ e escrevê-la de modo mais simples.

Supondo que *x*, 3 e 8 sejam as massas colocadas nos pratos de uma balança em equilíbrio, temos:



$x + 3 = 8$

Se retirarmos três unidades da quantidade inicial de cada prato da balança, ela permanecerá em equilíbrio e teremos:



ILUSTRAÇÕES: LUCAS FARAUJ

$x = 5 \longrightarrow S = \{5\}$

Veja o que fizemos:

$x + 3 = 8$ ⟶ equação dada, para a qual $S = \{5\}$

$x + 3 + (-3) = 8 + (-3)$ ⟶ adicionamos (-3) aos dois membros da equação

$x + 3 - 3 = 8 - 3$ ⟶ anulamos números opostos que estão no mesmo membro

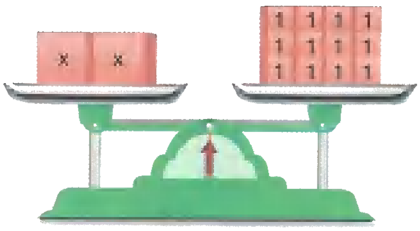
$x = 5$ ⟶ equação mais simples equivalente à equação dada, pois $S = \{5\}$

As equações $x + 3 = 8$ e $x = 5$ são equivalentes, pois ambas apresentam a mesma solução, o número 5.

Observe que, para obter a equação $x = 5$, equivalente à equação dada, adicionamos um mesmo número aos dois membros da equação $x + 3 = 8$ (**princípio aditivo** da igualdade).

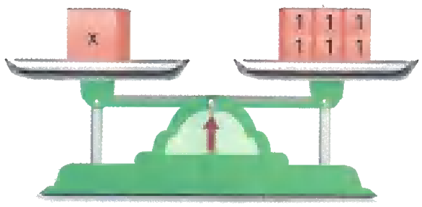
2 Vamos obter uma equação equivalente à equação $2x = 12$ e escrevê-la de modo mais simples.

Supondo que $2x$ e 12 sejam as massas colocadas em pratos de uma balança em equilíbrio, temos:



$2x = 12$

Se deixarmos a metade das massas da quantidade inicial em cada prato, o que significa multiplicar a quantidade inicial por $\frac{1}{2}$, a balança permanecerá em equilíbrio:



$x = 6 \longrightarrow S = \{6\}$

ILUSTRAÇÕES: LUCAS FARAUJ

Veja o que fizemos:

$2x = 12 \longrightarrow$ equação dada, para a qual $S = \{6\}$

$\frac{1}{2} \cdot (2x) = \frac{1}{2} \cdot (12) \longrightarrow$ multiplicamos os dois membros da equação por $\frac{1}{2}$

$x = 6 \longrightarrow$ equação elementar equivalente à equação dada, pois $S = \{6\}$

As equações $2x = 12$ e $x = 6$ são equivalentes, pois apresentam a mesma solução o número 6.

Observe que, para obter a equação $x = 6$, equivalente à equação dada, multiplicamos os dois membros da equação $2x = 12$ por um mesmo número (**princípio multiplicativo** da igualdade).

3 Vamos obter uma equação equivalente à equação $\frac{x}{4} = \frac{1}{6}$ e escrevê-la de modo mais simples.

- Aplicando o princípio multiplicativo, multiplicamos os dois membros por 4, obtendo uma equação equivalente.

$$\frac{x}{4} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x}{\cancel{4}} \cdot (\cancel{4}) = \frac{1}{6} \cdot (4) \Rightarrow x = \frac{4}{6}$$

- Depois, utilizamos a simplificação de frações:

$$x = \frac{4}{6} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

As equações $\frac{x}{4} = \frac{1}{6}$ e $x = \frac{2}{3}$ são equivalentes, pois apresentam a mesma solução, o número $\frac{2}{3}$, e $x = \frac{2}{3}$ é uma forma mais simples de escrever a equação $\frac{x}{4} = \frac{1}{6}$.

4 Vamos obter uma equação equivalente à equação $5x + 1 = 21$, escrita em uma forma mais simples.

- Aplicando o princípio aditivo, adicionamos -1 aos dois membros da equação e teremos uma equação equivalente:

$$5x + 1 = 21 \Rightarrow 5x + 1 - 1 = 21 - 1 \Rightarrow 5x = 20$$

- Aplicando o princípio multiplicativo, multiplicamos os dois membros da equação por $\frac{1}{5}$ e teremos uma equação equivalente:

$$5x = 20 \Rightarrow 5x \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = 20 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow 1x = 4 \Rightarrow x = 4$$

As equações $5x + 1 = 21$ e $x = 4$ são equivalentes, pois apresentam a mesma solução (o número 4), e $x = 4$ é uma forma mais simples de escrever a equação $5x + 1 = 21$.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Considerando os pares de equações em cada item, verifique se são ou não equivalentes no universo $\mathbb{Q}$:

a) $x + 4 = 7$ e $x = 7 - 4$.
b) $x + 2 = 9$ e $x = 7$.
c) $x - 5 = 0$ e $x = -5$.
d) $2x = 18$ e $x = 9$.
e) $5x = -15$ e $x = 3$.
f) $x - 1 = -3$ e $x = -2$.

2. Usando os princípios de equivalência, escreva, na forma mais simples possível, uma equação equivalente a cada uma das equações a seguir no universo $\mathbb{Q}$.

a) $x + 2 = 5$
b) $x - 11 = 0$
c) $4x = -8$
d) $x - 2 = -1$
e) $6x = 6$
f) $3x = 7$
g) $5x + 1 = 16$
h) $\frac{x}{4} = \frac{3}{10}$

3. Forme, com as equações a seguir, todos os possíveis pares de equações equivalentes.

a) $2x - 7 = 9$
b) $x = 8$
c) $x + 1 = \frac{3}{4}$
d) $x = 9$
e) $x = -\frac{1}{4}$
f) $4x + 1 = 37$

4. Sônia abriu uma conta poupança com R$ 120,00 e, alguns dias depois, precisou sacar x reais desse valor. Sabendo que após o saque o saldo da poupança é R$ 80,00, escreva uma equação que descreva essa situação.

5. Quais das equações a seguir são equivalentes à equação que você escreveu na atividade anterior?

a) $240 - 2x = 160$
b) $120 = 80 - x$
c) $-x = 80 + 120$
d) $x = 40$

DESCUBRA MAIS

Equação: o idioma da Álgebra (coleção Contando a história da Matemática), de Oscar Guelli. Editora Ática, 1999.

Com esse livro, você conhecerá a história da transformação da Álgebra, vendo como ela se desenvolveu em várias épocas e culturas. Afinal, não há melhor maneira de se resolver problemas matemáticos do que usando a Álgebra.

CAPÍTULO 7

EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM UMA INCÓGNITA

Estas equações com uma incógnita são exemplos de equações do 1º grau.

$$x - 6 = 0 \qquad 3x - 12 = 0$$

$$3t + 5 = 0 \qquad -2y - 10 = 0$$

Toda equação que pode ser reduzida à forma $\mathbf{ax + b = 0}$, em que x representa a incógnita e a e b são números racionais, com $a \neq 0$, é denominada **equação do 1º grau** na incógnita x.

Os números a e b são denominados **coeficientes** da equação.

- $3x - 12 = 0$ ⟶ equação do 1º grau na incógnita x, com coeficientes $a = 3$ e $b = -12$.
- $-2y - 10 = 0$ ⟶ equação do 1º grau na incógnita y, com coeficientes $a = -2$ e $b = -10$.

Há, ainda, equações do 1º grau que, aparentemente, não estão na forma $ax + b = 0$, por exemplo $3(x - 1) = 6$.

Nesses casos, fazendo transformações com base nos princípios de equivalência das igualdades, essas equações podem ser reduzidas à forma $ax + b = 0$.

Resolvendo equações do 1º grau com uma incógnita

Consideremos a equação $\frac{x}{2} + 3 = 2(x - 1)$, no universo $\mathbb{Q}$, cuja incógnita é representada pela letra x (x é um número racional desconhecido).

Essa equação estabelece, em uma linguagem matemática, que, para um certo número racional x, as expressões $\frac{x}{2} + 3$ e $2(x - 1)$ representam o mesmo valor numérico.

Observação: resolver a equação significa obter sua solução no universo dado, caso exista.

Para resolver uma equação do 1º grau com uma incógnita, acompanhe as situações a seguir.

1 Vamos resolver a equação $5x + 1 = 36$, sendo $U = \mathbb{Q}$.

- Aplicando o princípio aditivo, adicionamos (-1) aos dois membros da equação, isolando o termo que contém a incógnita *x* no 1º membro:

$5x + 1 = 36$
$5x + 1 + (-1) = 36 + (-1)$
$5x + 1 - 1 = 36 - 1$
$5x = 35$

- Aplicando o princípio multiplicativo, multiplicamos os dois membros da equação por $\frac{1}{5}$, descobrindo, assim, o valor do número *x*.

$$\cancel{5}x \cdot \left(\frac{1}{\cancel{5}}\right) = \overset{7}{3\cancel{5}} \cdot \left(\frac{1}{\cancel{5}}\right) \Rightarrow x = 7$$

De forma prática:

$$\begin{cases} 5x + 1 = 36 \\ 5x = 36 - 1 \longrightarrow \textbf{pelo princípio aditivo} \\ 5x = 35 \\ x = \dfrac{35}{5} \longrightarrow \textbf{pelo princípio multiplicativo} \\ x = 7 \end{cases}$$

Como $7 \in \mathbb{Q}$, temos que 7 é a raiz ou solução da equação.

2 Agora, vamos resolver a equação $7x = 4x + 5$, sendo $U = \mathbb{Q}$.

- Aplicando o princípio aditivo, adicionamos $(-4x)$ aos dois membros da equação, isolando no 1º membro apenas os termos que contêm *x*:

$7x = 4x + 5$
$7x + (-4x) = 4x + 5 + (-4x)$
$7x - 4x = 4x + 5 - 4x$
$3x = 5$

- Aplicando o princípio multiplicativo, multiplicamos os dois membros da equação por $\frac{1}{3}$, descobrindo, assim, o valor da incógnita *x*.

$$\cancel{3}x \cdot \left(\frac{1}{\cancel{3}}\right) = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

De forma prática:

$$\begin{cases} 7x = 4x + 5 \\ 7x - 4x = 5 \longrightarrow \textbf{pelo princípio aditivo} \\ 3x = 5 \\ x = \dfrac{5}{3} \longrightarrow \textbf{pelo princípio multiplicativo} \end{cases}$$

Como $\frac{5}{3} \in \mathbb{Q}$, o número $\frac{5}{3}$ é a raiz ou solução da equação.

3 Vamos resolver a equação $9x - 7 = 5x + 13$, sendo $U = \mathbb{Q}$.

Para isso, devemos isolar no primeiro membro todos os termos da equação que apresentam a incógnita *x* e, no 2º membro, os termos que não apresentam a incógnita.

- Inicialmente, adicionamos (+7) aos dois membros da equação, de modo que todos os termos que não apresentam a incógnita *x* fiquem no 2º membro da equação:

$9x - 7 + (+7) = 5x + 13 + (+7)$

$9x - 7 + 7 = 5x + 13 + 7$

$9x = 5x + 20$

- Vamos, agora, adicionar (−5x) aos dois membros da equação, isolando no 1º membro todos os termos que apresentam a incógnita *x*:

$9x + (-5x) = 5x + 20 + (-5x)$

$9x - 5x = 5x + 20 - 5x$

$4x = 20$

- Multiplicamos os dois membros da equação por $\frac{1}{4}$ para determinar o valor da incógnita *x*.

$$\cancel{4}x \cdot \left(\frac{1}{\cancel{4}}\right) = \overset{5}{\cancel{20}} \cdot \left(\frac{1}{\cancel{4}}\right) \Rightarrow x = 5$$

De forma prática:

$9x - 7 = 5x + 13$

$9x = 5x + 13 + 7$ ⟶ **pelo princípio aditivo**

$9x = 5x + 20$

$9x - 5x = 20$ ⟶ **pelo princípio aditivo**

$4x = 20$

$x = \frac{20}{4}$ ⟶ **pelo princípio multiplicativo**

$x = 5$

Como $5 \in \mathbb{Q}$, o número 5 é a raiz ou solução da equação.

4 Agora preste atenção ao que Cláudia está falando:

Se representarmos o número procurado pela letra *x*, podemos montar a seguinte equação, de acordo com o que Cláudia apresentou:

$6x = 2x + 180$

Resolvendo a equação, temos:

$6x = 2x + 180$

$6x - 2x = 180$ ⟶ **pelo princípio aditivo**

$4x = 180$

$x = \frac{180}{4}$ ⟶ **pelo princípio multiplicativo**

$x = 45$

Logo, o número procurado é 45.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Calcule a raiz ou solução das seguintes equações, sendo $U = \mathbb{Q}$:

a) $3x + 5 = 8$
b) $10x - 19 = 21$
c) $2x - 7 = -10$
d) $0{,}5x + 2{,}6 = 5{,}1$
e) $5x - 27 = -4x$
f) $9x + 5 = 4x$
g) $60 + 13x = 3x$
h) $4x - 12 = x$
i) $5x + 21 = 10x - 19$
j) $11x + 17 = 10x + 13$
k) $3 + 1{,}6x = 0{,}1x$

2. Ao resolver estas equações, no conjunto $\mathbb{Q}$, Helena verificou que duas delas eram equivalentes.

$\boxed{2x - 6 = 10}$ $\boxed{3x - 5 = 4}$

$\boxed{5x - 7 = 8}$

Quais são essas equações?

3. Um número *x* de países disputou a primeira edição dos Jogos Olímpicos da Era Moderna, realizados em 1896 na cidade de Atenas (capital da Grécia).

Se x representa a raiz da equação $2x + 12 = 110 - 5x$, quantos países disputaram a primeira edição dos Jogos Olímpicos da Era Moderna?


RYKOFF COLLECTION/CORBIS/GETTY IMAGES

Representação do estádio nos Jogos Olímpicos de Atenas, Grécia, em 1896.

4. A Princesa Isabel, filha do imperador Dom Pedro II, oficializou a abolição da escravatura no Brasil em 1888. Ela nasceu em 1846 e viveu *x* anos. Sabendo que essa idade é a raiz da equação $112 + 7x - 262 = 5x$, em que ano a Princesa faleceu?

5. Thaís e Karina estão estudando equações. Karina escreveu estas três afirmações:

- As raízes das equações $7x + 20 = 2(3x + 1)$ e $9x = 20 + 8(x - 1)$ são números opostos ou simétricos.
- A raiz da equação $3(x + 2) - 2(x - 7) = 0$ é um número negativo maior que -10.
- Se a expressão $x - 2(3 - 2x)$ for igual a 0 (zero), o valor de x será $-1{,}2$.

Thaís propôs que, para cada sentença incorreta, Karina lhe daria 10 balas e, para cada sentença correta, ela (Thaís) daria 5 balas. Nesse caso, Thaís ganhou ou perdeu balas? Quantas balas?

6. Dada a equação $3(1{,}4 - x) + 5x = -(x - 4{,}8)$, use-a para montar uma questão e escolha um colega para resolvê-la. Depois, corrija a questão feita por você.

7. Filho de professores, Júlio César nasceu no Rio de Janeiro, no dia 6 de maio de 1895. Foi professor e gostava muito de escrever. Mas foi com o nome de seu personagem mais famoso, Malba Tahan, que Júlio César ficou conhecido nacionalmente. Escreveu vários livros com esse pseudônimo, sendo **O homem que calculava** o mais conhecido, com traduções para o inglês, o alemão, o italiano e o espanhol. Para saber com quantos anos Júlio César morreu, descubra a raiz da equação:

$$7(2x - 50) - 4x = 10 \cdot (51{,}9 - 0{,}1x)$$

8. Determine a raiz das seguintes equações do 1º grau com uma incógnita:

a) $\frac{x}{2} + 1 = \frac{x}{5} + \frac{1}{4}$

b) $\frac{x}{4} + \frac{x}{3} = x - 100$

c) $\frac{2x}{3} + \frac{5x}{6} = \frac{1}{2}$

d) $\frac{x}{5} = 21 - \frac{x}{2}$

e) $\frac{4}{5} + \frac{3x}{4} = \frac{1}{10} + x$

f) $\frac{1}{6} - \frac{x}{2} = -\frac{2x}{3} + \frac{1}{4}$

9. Qual deve ser o valor de *x* nas equações a seguir para que se tenha A = B?

$\boxed{A = \frac{x}{2} + \frac{2}{5}}$ $\boxed{B = 1 - \frac{3x}{4}}$

10. A raiz ou solução da equação $x - \frac{x}{7} = 3$ é um número racional situado entre dois números inteiros. Quais são esses números inteiros?

11. Calcule a raiz ou solução das equações do 1º grau com uma incógnita, sendo $U = \mathbb{Q}$.

a) $x - 4 - \frac{x + 4}{3} = 0$

b) $\frac{4x}{3} - \frac{3}{2} = \frac{x - 3}{3}$

c) $\frac{3 - x}{8} = \frac{x + 1}{4}$

12. Dadas as equações $\frac{x - 1}{6} - \frac{x - 2}{9} = \frac{1}{2}$ e $\frac{2y}{3} + \frac{y - 2}{9} = 8$, qual é o valor da expressão x + y?

13. Qual é o número racional que representa a raiz da equação $\frac{2x - 1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3x + 1}{6} + \frac{x}{3}$?

14. A raiz da equação $2 - x = \frac{2(x + 1)}{3}$ está situada entre dois números inteiros. Quais são esses números?

15. Responda:

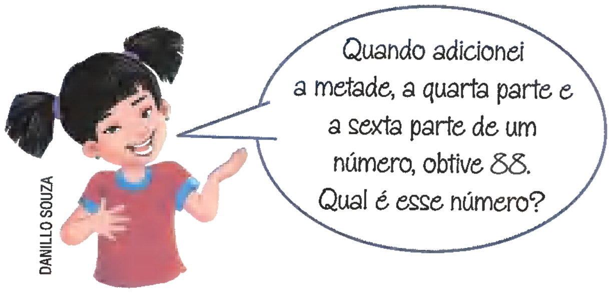
a) Qual é a raiz da equação a seguir?

$$\frac{x - 2}{8} = \frac{x - 4}{3} - 1$$

b) Qual é o número que representa o quadrado da raiz dessa equação?

c) Quais são os divisores naturais do número que expressa a solução dessa equação?

16. Observe a história e responda.



DANILLO SOUZA

DESAFIO

17. (Unesp-SP) Como resultado de uma pesquisa sobre a relação entre o comprimento do pé de uma pessoa, em centímetros, e o número (tamanho) do calçado brasileiro, Carla obteve uma fórmula que dá, em média, o número inteiro *n* (tamanho do calçado) em função do comprimento *c* do pé, em centímetro.

Pela fórmula, tem-se n = [x], em que $x = \frac{5}{4}c + 7$ e [x] indica o menor inteiro maior ou igual a *x*. Por exemplo, se c = 9 cm, então x = 18,25 e n = [18,25] = = 19. Com base nessa fórmula:

a) determine o número do calçado correspondente a um pé cujo comprimento é 22 cm;

b) se o comprimento *c* do pé de uma pessoa é 24 cm, então ela calça 37. Se c > 24 cm, essa pessoa calça 38 ou mais. Determine o maior comprimento possível, em centímetro, que pode ter o pé de uma pessoa que calça 38.

PARA QUEM QUER MAIS

A arte de fazer e desfazer

Que tal construir uma expressão numérica e depois desfazê-la? Para desfazer é fácil: é só usar as operações inversas. Vamos ver como podemos fazer isso!

Construindo e desfazendo uma expressão

Construindo a expressão	
Começo com o número 4.	
Multiplico esse número por 3 →	$3 \cdot 4$
Subtraio 5 do produto →	$(3 \cdot 4) - 5$
Obtenho o número 7.	

Desfazendo a expressão	
Começo com o número 7.	
Adiciono 5 a esse número →	$7 + 5$
Divido a soma por 3 →	$(7 + 5) : 3$
Obtenho o número 4.	

Vamos, agora, construir e resolver uma equação.

Construindo e resolvendo uma equação

Construindo a equação	
Penso em um número *x*.	
Multiplico esse número por 3 →	$3x$
Subtraio 5 do resultado →	$3x - 5$
Obtenho 7 →	$3x - 5 = 7$

Qual é o número x?

Resolvendo a equação	
Começo com o número 7.	
Adiciono 5 a esse número →	$7 + 5$
Divido a soma por 3 →	$(7 + 5) : 3$
Obtenho o número 4.	
Logo, o número pensado é 4.	

Agora, crie uma equação. Depois, troque a sua equação com a de um colega de classe. Você resolve a equação dele, e ele resolve a sua.

CAPÍTULO 8

EQUAÇÕES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Vamos usar o que aprendemos sobre as equações do 1º grau com uma incógnita na resolução de problemas. Observe alguns passos que podemos seguir:

1º passo: Ler com atenção o problema e levantar os dados.
2º passo: Traduzir o enunciado para a linguagem das equações.
3º passo: Resolver a equação estabelecida.
4º passo: Analisar o resultado obtido e dar a resposta conveniente.

Acompanhe a resolução das situações a seguir:

1 Em uma classe, 20% dos alunos treinam capoeira. Sabendo-se que os outros 24 alunos treinam outros esportes, quantos alunos há, ao todo, nessa classe?

1º passo: O problema pede que encontre o total de alunos da classe, informando que 20% treinam capoeira e os demais, 24 alunos, outros esportes.

Lembremos que: $20\% = \dfrac{20}{100} = 0{,}20$.

2º passo: Vamos indicar o total de alunos pela letra *x* e escrever a equação correspondente, usando a incógnita *x* onde for necessário indicar o número desconhecido:

$$0{,}20x + 24 = x$$

- x → **número total de alunos da turma**
- 24 → **número de alunos que treinam outros esportes**
- $0{,}20x$ → **número de alunos que treinam capoeira**

3º passo: Resolvendo a equação, temos:
Podemos também resolver essa equação deixando os termos que têm *x* no segundo membro. Assim, temos:

$$0{,}20x + 24 = x$$
$$24 = x - 0{,}20x$$
$$24 = 0{,}8x$$
$$\frac{24}{0{,}8} = x \Rightarrow 30 = x\text{, ou seja, } x = 30$$

4º passo: Nessa classe, há 30 alunos.
Podemos fazer uma análise do resultado obtido calculando 20% de 30. Veremos que 20% de 30 equivalem a 6 e que $30 - 6 = 24$ (os alunos que praticam outros esportes). Com isso, verificamos que a resposta está correta.

2 No Colégio do Bairro há turmas de 6º, 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental. Nesse colégio um terço dos alunos cursa o 6º ano; um quarto cursa o 7º ano; três décimos dos alunos estudam no 8º ano; e 140 alunos estão no 9º ano. Quantos alunos estudam nas turmas de 6º ao 9º ano dessa escola?

1º passo: O problema pede que descubra o número de alunos que estudam no 6º, 7º, 8º e 9º anos da escola, informando dados de cada ano.

2º passo: Vamos representar esse número pela letra *x* e escrever a equação correspondente.

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{3}{10}x + 140 = x$$

total de alunos
estudam no 9º ano
estudam no 8º ano
estuda no 7º ano
estuda no 6º ano

3º passo: Resolvendo a equação, temos:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{3}{10}x + 140 = x$$

$$\frac{20}{60}x + \frac{15}{60}x + \frac{18}{60}x + \frac{8\,400}{60}x = \frac{60}{60}x$$

$$20x + 15x + 18x + 8\,400 = 60x$$

$$20x + 15x + 18x - 60x = -8\,400$$

$$(-1) \cdot -7x = -8\,400 \cdot (-1)$$ usando o princípio multiplicativo, multiplicamos ambos os membros por -1

$$7x = 8\,400$$

$$x = \frac{8\,400}{7} \Rightarrow x = 1\,200$$

4º passo: Estudam 1 200 alunos nas turmas do 6º ao 9º ano nessa escola.

NÓS

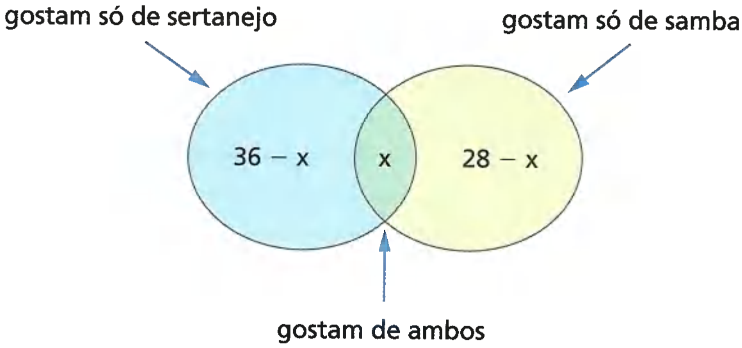
A influência da cultura africana no Brasil

A cultura brasileira é muito diversificada. O Brasil tem forte influência de origem africana, portuguesa e indígena, e isso pode ser notado nas manifestações musicais, religiosas e na culinária. A capoeira é um dos exemplos da nossa cultura que têm origem africana. No início, a capoeira era ensinada pelos escravos vindos da África aos negros cativos brasileiros, e os movimentos da luta foram adaptados aos ritmos das músicas para parecer uma dança, pois os senhores de engenho não permitiam que os escravos aprendessem a lutar.

- Pesquise outras influências da cultura afrodescendente no Brasil.
- Você acha importante conhecer e valorizar a cultura brasileira? Por quê?

3 Uma pesquisa, realizada com os alunos de uma classe da Escola Laranjeira, mostrou que os 42 alunos dessa classe ou gostam somente de samba, ou gostam somente de música sertaneja, ou gostam dos dois tipos de música. Quando a professora perguntou:

— Quem gosta de música sertaneja?
36 alunos levantaram a mão.
E quando a professora perguntou:
— Quem gosta de samba?
28 alunos levantaram a mão.
Nessa turma, quantos alunos gostam tanto de música sertaneja quanto de samba?
Para resolver esse problema, podemos montar um diagrama.



EDITORIA DE ARTE

1º passo: No diagrama, a parte em verde (x) representa o número de alunos que gostam, ao mesmo tempo, dos dois tipos de música.

A parte em azul ($36 - x$) representa o número de alunos que gostam de música sertaneja, mas não gostam de samba.

A parte em amarelo ($28 - x$) representa o número de alunos que gostam de samba, mas não gostam de música sertaneja.

2º passo: A soma desses números é o total de alunos da sala. Assim, montamos a equação:

$$\underbrace{(36 - x)}_{\text{gostam apenas de música sertaneja}} + \underbrace{x}_{\text{gostam dos dois tipos de música}} + \underbrace{(28 - x)}_{\text{gostam apenas de samba}} = \underbrace{42}_{\text{total de alunos}}$$

3º passo: Resolvendo a equação, temos:

$$(36 - x) + x + (28 - x) = 42$$
$$36 - \cancel{x} + \cancel{x} + 28 - x = 42$$
$$-x + 64 = 42$$
$$-x = 42 - 64$$
$$(-1) \cdot -x = -22 \cdot (-1)$$
$$x = 22$$

4º passo: Nessa turma há 22 alunos que gostam, ao mesmo tempo, dos dois tipos de música.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Em uma turma de 30 alunos, 6 escrevem apenas com a mão esquerda (são canhotos), e 2 escrevem com as duas mãos (são ambidestros). Quantos alunos escrevem apenas com a mão direita (são destros)?

2. Guilherme e Tiago compraram 200 figurinhas. Dessas, 36 foram rasgadas e não puderam ser aproveitadas. Das figurinhas restantes, Guilherme ficou com 20 a mais que Tiago. Com quantas figurinhas cada um ficou?

3. Os médicos do pronto-socorro de um hospital atenderam 1 400 pessoas no primeiro semestre de 2012. Em janeiro, foram atendidas 180 pessoas e, em junho, 160 pessoas. O número de pessoas atendidas nos outros meses do semestre foi o mesmo em cada mês. Quantas pessoas foram atendidas em cada um desses meses?

4. Uma tábua tem 120 cm de comprimento e deve ser dividida em duas partes, de tal forma que o comprimento da menor seja igual a $\frac{3}{5}$ do comprimento da maior. Qual será, em metros, o comprimento da menor parte?

5. Foi feita uma pesquisa sobre a preferência de leitura de três revistas. Veja o resultado dessa pesquisa:

- a terça parte dos entrevistados liam a revista *A*;
- $\frac{2}{5}$ dos entrevistados liam a revista *B*;
- 832 pessoas liam a revista *C*.

Sabendo que cada pessoa lia apenas uma das revistas, quantas pessoas foram entrevistadas?

6. Em uma eleição com dois candidatos, *A* e *B*, uma pesquisa mostra que 40% dos eleitores votarão no candidato *A* e 35%, no candidato *B*. Se entre os pesquisados ainda há 3 500 indecisos, quantos eleitores participaram dessa pesquisa?

7. Um reservatório estava totalmente cheio de água. Inicialmente, esvaziou-se $\frac{1}{3}$ da capacidade desse reservatório e, depois, foram retirados 400 litros de água. O volume de água que restou no reservatório corresponde a $\frac{3}{5}$ da capacidade do reservatório. Quantos litros de água cabem nesse reservatório?

DESAFIO

8. Essa situação foi adaptada de um problema hindu do século VII.

Uma moça usava um colar de pérolas, que se rompeu. Um sexto das pérolas caiu para a direita, um quinto caiu para a esquerda, um terço a moça conseguiu segurar com a mão direita, um décimo com a mão esquerda, e 6 pérolas continuaram presas no colar. Quantas pérolas tinha esse colar?

9. Esse foi um problema elaborado por Bhaskara, um matemático hindu do século XII.

"A quinta parte de um enxame de abelhas pousou numa flor da *Kadamba*, a terça parte numa flor de *Silinda*. O triplo da diferença desses dois números, ó bela com olhos de gazela, voa sobre a flor da *Krutaja*. A abelha que sobra, atraída pelo perfume dum jasmim e dum *pandanus*, paira desorientada no ar; diz-me, amada, o número de abelhas."

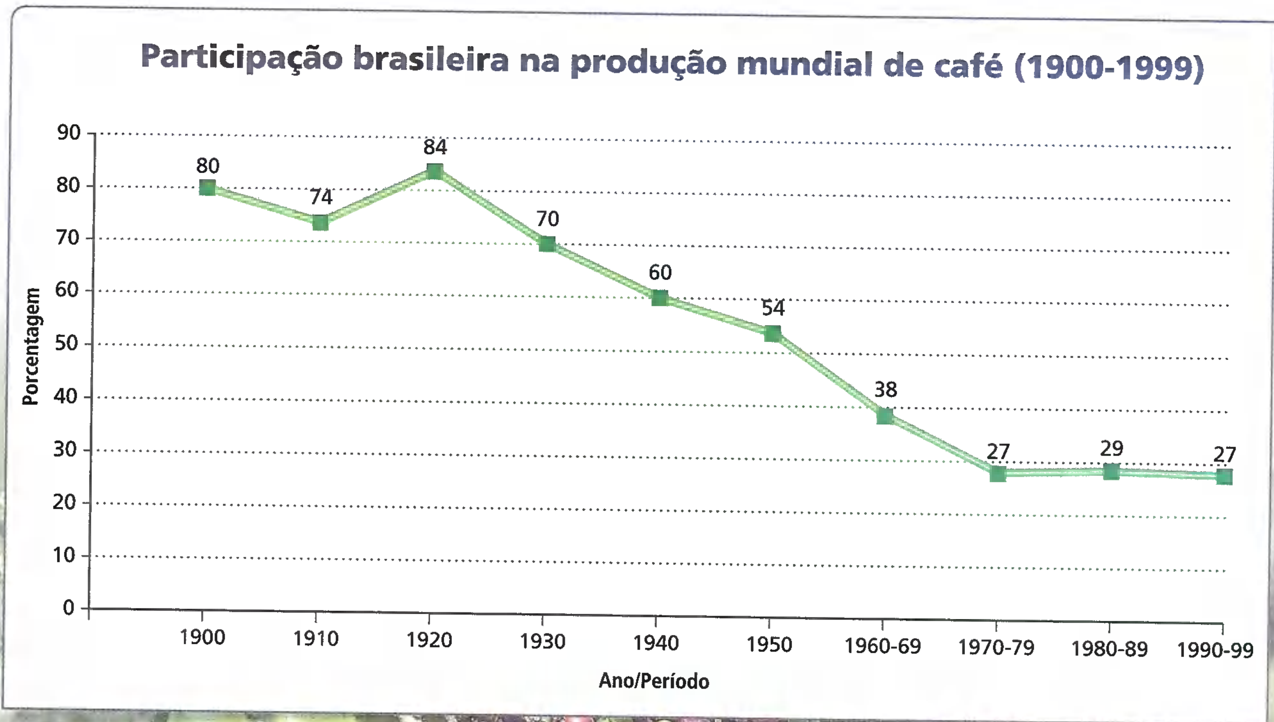
TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

Gráfico de linhas (ou de segmentos)

As primeiras mudas de café chegaram ao Brasil no começo do século XVIII e já no fim desse século, o país começou a exportar o produto, mas em pequenas quantidades. No começo do século XIX, já se exportava cerca de 80 mil arrobas de café por ano.

Durante todo o século XIX, o café foi a maior fonte de riqueza do Brasil. Por esse motivo, o café ficou popularmente conhecido como "ouro verde" ou "ouro negro". No começo do século XX, era responsável por cerca de $\frac{3}{4}$ do valor total das exportações brasileiras. Atualmente, o Brasil é o maior produtor mundial de café.

Observe no gráfico de linhas, a seguir, a participação do Brasil na exportação de café no mercado mundial.



EDITORIA DE ARTE

Fonte: O CAFÉ no Brasil - história, produção e exportação. **Revista Cafeicultura**. Disponível em: <http://revistacafeicultura.com.br/?mat=3640>. Acesso em: 29 out. 2018.

CHICO FERREIRA/PULSAR IMAGENS

1. De acordo com o gráfico da página anterior, responda às questões a seguir.

a) Em qual ano foi verificada a maior participação do Brasil na produção mundial de café?

b) Em qual período a participação brasileira na produção mundial de café ficou abaixo de 50%?

c) De quanto foi a redução, em porcentagem, da participação do Brasil na produção mundial de café do ano de 1950 para o período 1960-69?

d) Forme dupla com um colega e, no caderno, elaborem um texto usando as informações apresentadas no gráfico.

No fim da década de 1920, a produção de café no Brasil cresceu muito, mas no final de 1929, com a quebra da bolsa de Nova York, o preço do café desabou e as exportações caíram.

2. **Veja a seguir a quantidade de café exportado pelo Brasil entre o fim da década de 1920 e o começo da década de 1930.**

Exportação de café pelo Brasil

Ano	1927	1928	1929	1930	1931	1932	1933
Quantidade (em arrobas)	60 milhões	55 milhões	77 milhões	37 milhões	43 milhões	24 milhões	40 milhões
x indica a quantidade de milhões de sacas	$2x = 30$	$4x = 55$	$4x - 7 = 70$	$4x = 37$	$8x = 86$	$x - 2 = 4$	$x = 20 - x$

Fontes: Iapar (Instituto Agronômico do Paraná), ICC (Conselho Internacional do Café) e DNC (Departamento Nacional do Café).

Agora, responda às questões no caderno.

a) A tabela mostra a exportação de café em arrobas (considere 1 arroba = 15 kg), mas normalmente a exportação é indicada em sacas de café (considere 1 saca = 60 kg). Resolva as equações e faça uma nova tabela, indicando o ano e a quantidade de sacas de café exportadas.

b) A partir da tabela que você fez, construa um gráfico de linhas com a exportação de sacas de café de 1927 a 1933.

c) Apesar de todas as crises, desde de 1900 o Brasil sempre foi o maior produtor e exportador de café. Em julho de 2018, o café representou cerca de 2,6 bilhões de dólares nas exportações do Brasil. Sabendo que uma saca de café foi cotada em 154 dólares, quantas sacas de café foram exportadas?

d) As exportações de café pelo Brasil no começo do século XX girava em torno de 2 milhões de dólares. Sabendo que cerca de $\frac{3}{4}$ do valor total das exportações brasileiras correspondia ao café, qual era o valor estimado do total das exportações do Brasil nessa época?

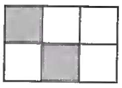
RETOMANDO O QUE APRENDEU

Responda às questões no caderno.

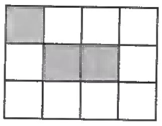
1. (OBM) Esmeralda adora os números triangulares (ou seja, os números 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ...), tanto que mudou de lugar os números 1, 2, 3, ..., 11 do relógio de parede do seu quarto de modo que a soma de cada par de números vizinhos é um número triangular. Ela deixou o 12 no seu lugar original. Que número ocupa o lugar que era do 6 no relógio original?

a) 1 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 10 **e)** 11

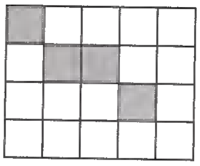
2. (Vunesp) Considere que a regra de formação das figuras seguintes permaneça a mesma. Pode-se afirmar que o número de quadrados brancos da 10ª figura será:



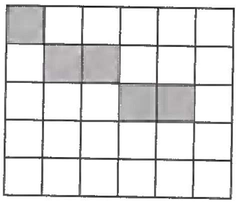
1ª figura



2ª figura



3ª figura



4ª figura

a) 100 **b)** 109 **c)** 112 **d)** 121 **e)** 144

3. São dados três números naturais:

$\boxed{2x}$ $\boxed{x}$ $\boxed{x + 4}$

a) Dê a expressão algébrica que representa a soma desses três números.

b) Se a soma desses três números é 116, qual o produto desses três números?

4. O professor escreveu no quadro de giz esta equação:

$$2(1 - 0{,}4x) + x = 4(0{,}1x - 0{,}4)$$

O valor de x, nessa equação, é igual a:

a) 18 **b)** −18 **c)** 1,8 **d)** −1,8 **e)** 3,6

5. A média aritmética dos números expressos a seguir é 12,5.

$\boxed{(x - 4)}$ $\boxed{x}$ $\boxed{2x}$ $\boxed{2(x + 6)}$

Qual é o número x?

a) 5 **b)** 6 **c)** 7 **d)** 8 **e)** 10

6. Uma tábua com 5,85 metros de comprimento foi dividida em três partes. A primeira delas tem 1,80 m de comprimento, enquanto a segunda tem o dobro do comprimento da terceira. Qual é, em metros, o comprimento da segunda parte da tábua?

a) 1,35 m **b)** 2,70 m **c)** 2,80 m **d)** 3,20 m **e)** 4,05 m

7. Um tanque está completamente cheio de água. Deixando escoar 68 litros de água, o tanque fica ainda com a terça parte de sua capacidade. Qual é a capacidade desse tanque?

a) 100 litros. **b)** 102 litros. **c)** 104 litros. **d)** 106 litros. **e)** 108 litros.

8. Em um torneio de futebol, uma equipe venceu $\frac{3}{5}$ dos jogos que disputou, empatou $\frac{1}{3}$ dos jogos e perdeu apenas 2. Essas informações nos mostram que a equipe venceu:


DANIEL BOGNI

a) 30 jogos.
b) 24 jogos.
c) 20 jogos.
d) 18 jogos.
e) 10 jogos.

9. Sabe-se que as expressões abaixo são iguais. Nessas condições, qual é o valor do número *x*?

$2{,}8 + 2(1 + 1{,}5x)$ $\qquad$ $3(1{,}2x - 2{,}4)$

Escreva outra expressão com a incógnita *x*, igual a essas duas, e dê o valor de *x*.

10. Na equação $(y - 3)x + 4(y - 5) = -3x$, temos $x = 2$. Qual é o número que expressa o valor da letra *y*?

11. De acordo com dados do IBGE, a expectativa de vida do brasileiro em 2010 correspondia, em anos, à raiz da equação $5(x + 60) - 400{,}7 = 8(x - 40)$. Qual era a esperança de vida do brasileiro em 2010?

12. Os gerentes de uma empresa entrevistaram 420 candidatos a determinado emprego e rejeitaram um número de candidatos igual a 5 vezes o número de candidatos aceitos. Então, o número de candidatos aceitos foi:

a) 84
b) 75
c) 70
d) 65
e) 60

UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, foram abordados: sequências numéricas recursivas e sequências numéricas não recursivas, lei de formação de uma sequência e termo geral, expressões algébricas e variável, princípios da igualdade, equações e incógnita, conjunto universo e conjunto solução, e resolução de problemas com base em equações do 1º grau.

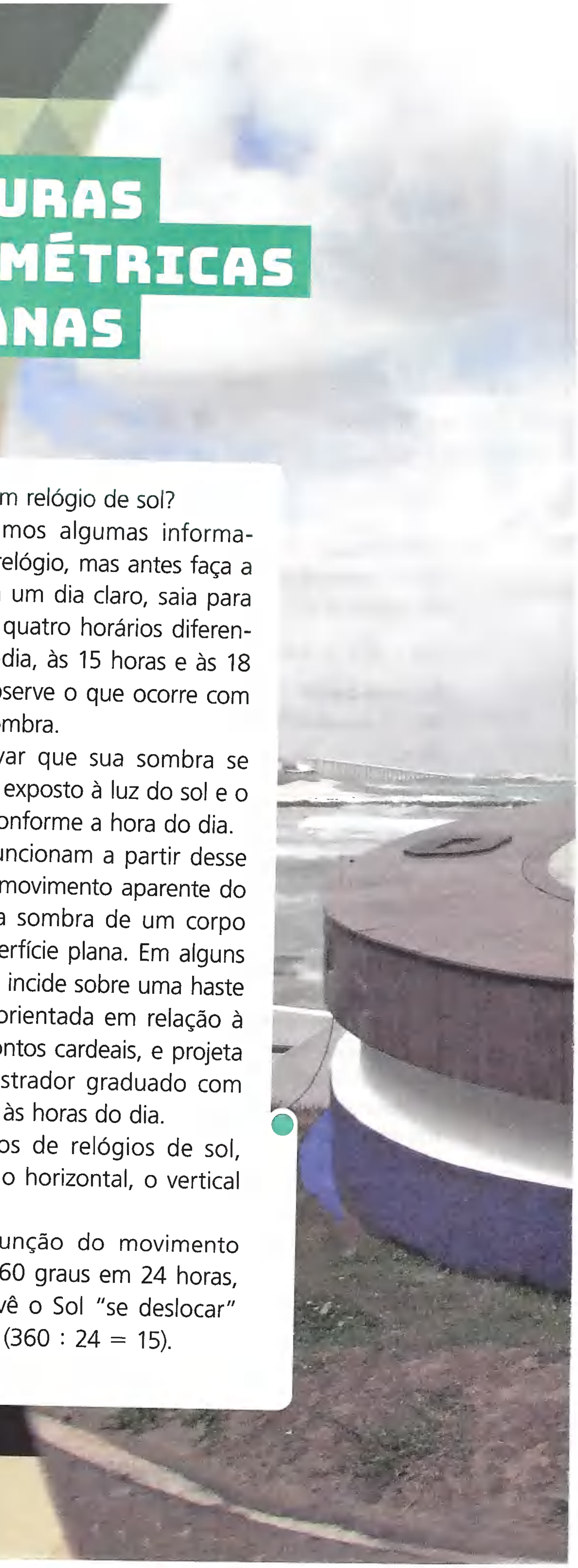
As equações estudadas nesta Unidade serão utilizadas e aplicadas em outros contextos matemáticos que serão estudados posteriormente. Além do uso de equações na Matemática, há também o uso de equações em outras disciplinas, como em Geografia e em Ciências.

Para melhor organizar esse primeiro contato com o estudo das equações do 1º grau, sugerimos a você que faça um breve resumo de cada tópico citado anteriormente. Esse resumo deve conter um lembrete sobre cada conceito e um ou mais exemplos que considere relevante.

Com esse resumo em mãos, vamos retomar e refletir as aprendizagens que tivemos nesta Unidade.

- Como você explicaria o que é uma sequência recursiva?
- Descreva uma situação em que aparece variável e outra que envolve incógnita.
- Explique com suas palavras o princípio da igualdade e qual sua importância na resolução de uma equação do 1º grau.
- Qual é a importância de conhecer o conjunto universo de uma equação?

6 FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS



TASHECHKA/SHUTTERSTOCK.COM

Você já ouviu falar em relógio de sol?

A seguir apresentamos algumas informações sobre esse tipo de relógio, mas antes faça a seguinte experiência: em um dia claro, saia para um local ensolarado em quatro horários diferentes, às 9 horas, ao meio-dia, às 15 horas e às 18 horas, por exemplo, e observe o que ocorre com o comprimento de sua sombra.

Você poderá observar que sua sombra se desloca quando você fica exposto à luz do sol e o comprimento dela varia conforme a hora do dia.

Os relógios de sol funcionam a partir desse princípio; observam-se o movimento aparente do Sol e o deslocamento da sombra de um corpo projetado sobre uma superfície plana. Em alguns relógios de sol, a luz solar incide sobre uma haste (gnômon), devidamente orientada em relação à latitude do lugar e aos pontos cardeais, e projeta uma sombra em um mostrador graduado com números correspondentes às horas do dia.

Existem diversos tipos de relógios de sol, entre eles podemos citar o horizontal, o vertical e o equatorial.

Sabendo que, em função do movimento de rotação, a Terra gira 360 graus em 24 horas, um observador na Terra vê o Sol "se deslocar" 15 graus a cada uma hora (360 : 24 = 15).

Responda às questões no caderno:

a) Existe algum relógio de sol no município onde você mora?

b) No Brasil, o Clube de Astronomia do Rio de Janeiro já catalogou mais de 200 relógios de sol. Pesquise alguns locais onde foram construídos relógios de sol.

c) Um observador na Terra vê o Sol "se deslocar" quantos graus em:

- 2 horas?
- 5 horas?
- 8 horas?
- 12 horas?
- 18 horas?

ISTOCKPHOTO/GETTY IMAGES

Relógio de Sol em Natal, RN. Foto tirada em 2016.

CAPÍTULO 1 ÂNGULOS

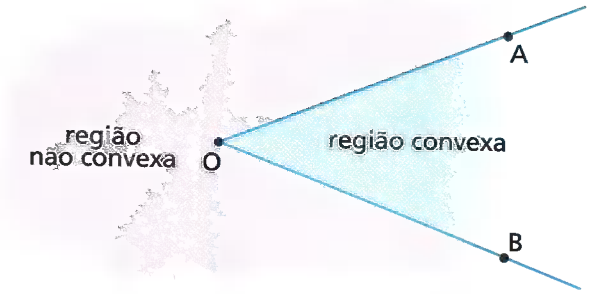
Definição e medida de um ângulo

Nos modelos matemáticos de figuras que sugerem a ideia de ângulo, podemos destacar duas semirretas (**lados** do ângulo) de mesma origem (**vértice** do ângulo) que dividem o plano em duas regiões: uma convexa e outra não convexa.

Essas duas semirretas determinam dois ângulos, um em cada região.

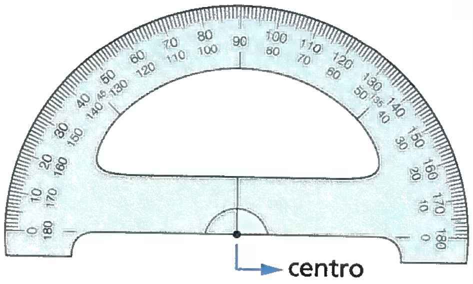
Na figura a seguir, destacamos os seguintes elementos:

- O ponto *O*, origem das semirretas, denominado vértice do ângulo.
- As semirretas OA e OB denominadas lados do ângulo. Para identificar esse ângulo, utilizamos a notação AÔB.

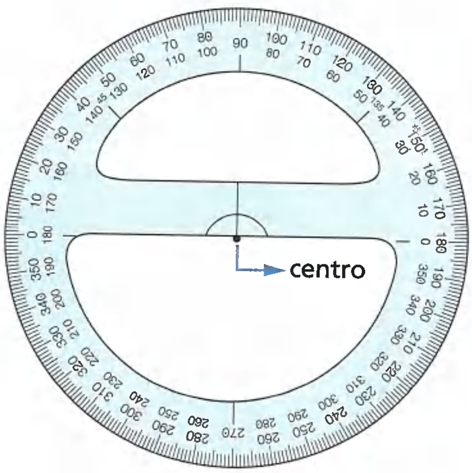


A medida de um ângulo é dada pela medida de sua abertura. A unidade padrão utilizada para essa medição é o **grau**, representado pelo símbolo ° escrito após o número.

Para medir um ângulo, comparamos sua medida à medida de um ângulo de 1° (um grau). Para isso utilizamos um **transferidor**. O transferidor já vem graduado com divisões de 1° em 1°.



Transferidor de 180°.



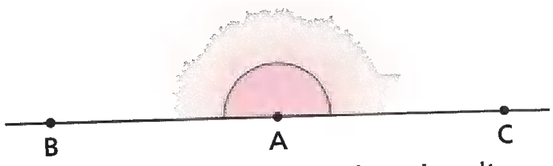
Transferidor de 360°.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Classificação de ângulos

Ângulo raso, ângulo nulo e ângulo de uma volta

Quando duas semirretas são opostas, dizemos que formam um **ângulo raso** ou **de meia-volta**.



BÂC é um ângulo raso ou de meia-volta.

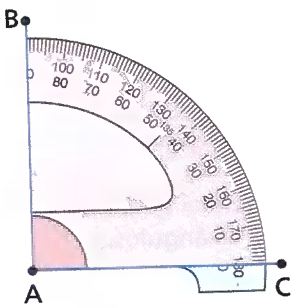
Quando duas semirretas coincidem, obtemos dois ângulos: o **ângulo nulo** e o **ângulo de uma volta**.

Ângulo nulo.

Ângulo de uma volta.

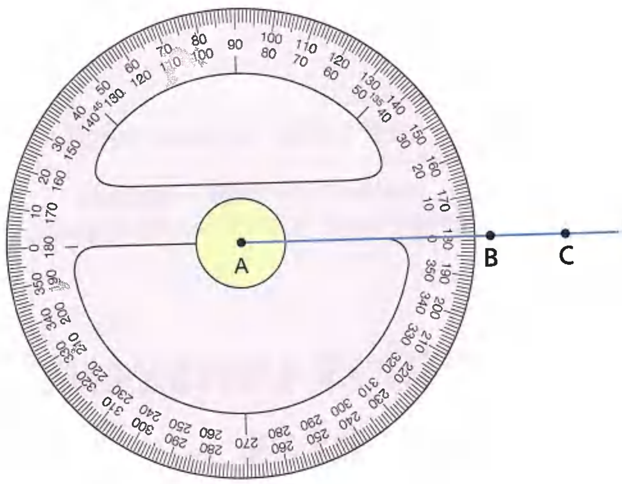
Usando um transferidor, determinamos as medidas dos ângulos, em graus:

- Ângulo de um quarto:



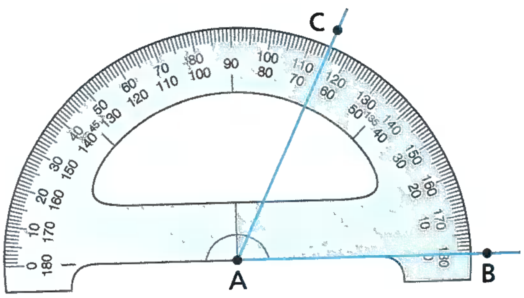
med (BÂC) = 90°

- Ângulo de uma volta:



med (BÂC) = 360°

- Ângulo de 65 graus:

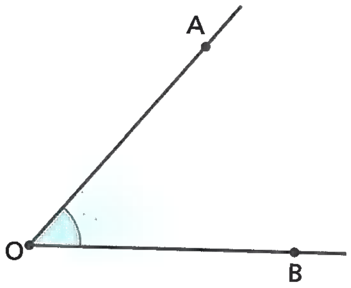


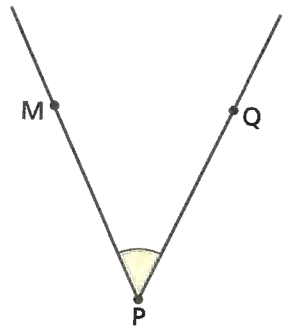
med (BÂC) = 65°

Veja no material audiovisual o vídeo sobre as grandes navegações e o uso de medida de ângulos.

Ângulos congruentes

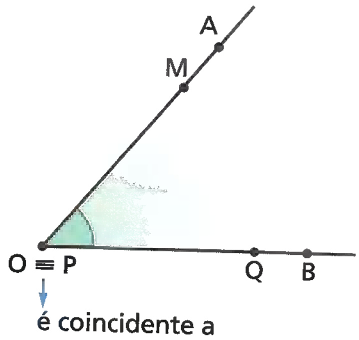
Consideremos os ângulos AOB e MPQ:





Ao sobrepor os ângulos, notamos que os vértices e os lados dos dois ângulos coincidem. Veja na figura ao lado.

Assim, $A\hat{O}B$ e $M\hat{P}Q$ possuem a mesma abertura e, portanto, a mesma medida.



Dois ângulos que têm a mesma medida são chamados **ângulos congruentes**, e utilizamos o símbolo ≅ para relacioná-los.

$$\text{med }(A\hat{O}B) = \text{med }(M\hat{P}Q)$$

Usamos o símbolo = quando comparamos as medidas dos ângulos.

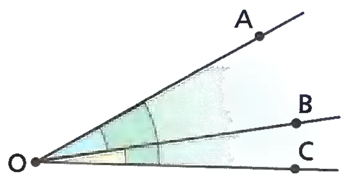
é congruente a

$$A\hat{O}B \cong M\hat{P}Q$$

Usamos o símbolo ≅ quando comparamos os ângulos.

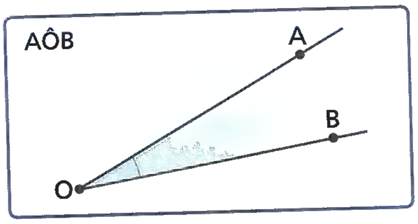
Ângulos consecutivos e ângulos adjacentes

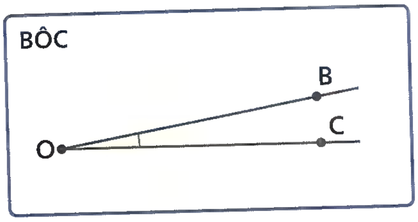
Observe a figura a seguir.

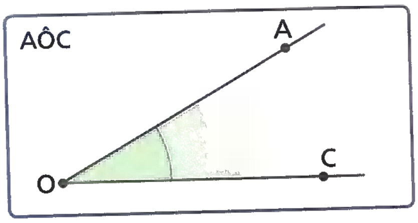


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Vamos, agora, destacar três ângulos desta figura:

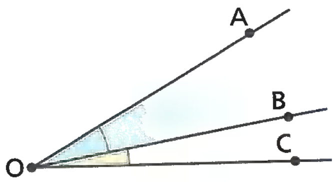






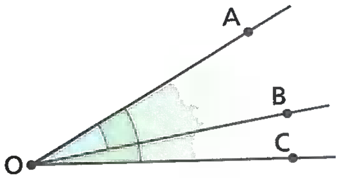
Vamos comparar os ângulos dois a dois:

Comparando AÔB e BÔC:



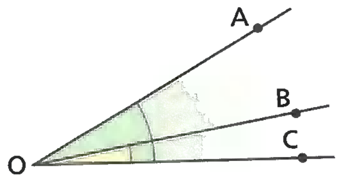
- AÔB e BÔC têm o vértice comum (ponto *O*).
- AÔB e BÔC têm o lado $\overrightarrow{OB}$ comum.

Comparando AÔB e AÔC:



- AÔB e AÔC têm o vértice comum (ponto *O*).
- AÔB e AÔC têm o lado $\overrightarrow{OA}$ comum.

Comparando BÔC e AÔC:



- BÔC e AÔC têm o vértice comum (ponto *O*).
- BÔC e AÔC têm o lado $\overrightarrow{OC}$ comum.

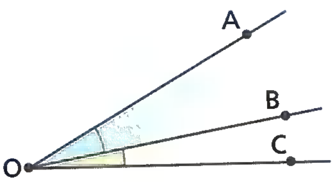
Dizemos que:

Dois ângulos que possuem o mesmo vértice e têm um lado comum são denominados **ângulos consecutivos**.

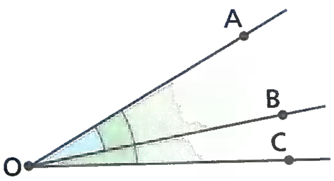
Em nosso exemplo, são ângulos consecutivos:

- AÔB e BÔC
- AÔB e AÔC
- BÔC e AÔC

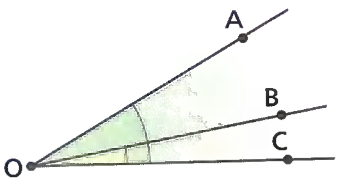
Nesses três casos de ângulos consecutivos, podemos notar que:



AÔB e BÔC **não possuem pontos internos comuns.**



AÔB e AÔC **possuem** pontos internos comuns.



BÔC e AÔC **possuem** pontos internos comuns.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Dizemos que:

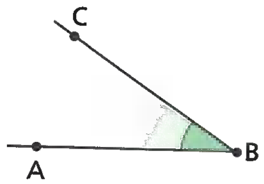
Dois ângulos consecutivos que não possuem pontos internos comuns são denominados ângulos adjacentes.

Então, AÔB e BÔC são **ângulos adjacentes**.

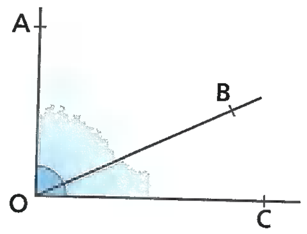
ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

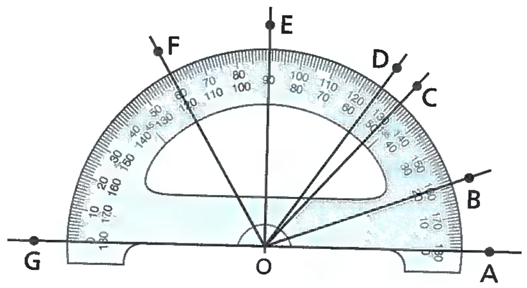
1. Identifique o vértice e os lados do ângulo da figura.



2. Quantos e quais são os ângulos que aparecem nesta figura?



3. Observe a figura do transferidor.



Dê as medidas dos ângulos indicados.

a) med (AÔB)

b) med (AÔC)

c) med (AÔD)

d) med (AÔE)

e) med (AÔF)

f) med (AÔG)

g) med (BÔE)

h) med (EÔF)

4. Qual é a medida, em graus, de um ângulo de:

a) meia-volta?

b) uma volta?

5. Dois ângulos congruentes têm as medidas expressas, em graus, por $(7x + 30)°$ e $(13x - 30)°$, respectivamente. Nessas condições determine o valor de *x*.

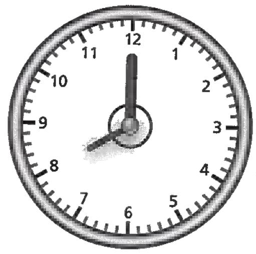
6. (Prova Brasil) Os 2 ângulos formados pelos ponteiros de um relógio às 8 horas medem:

a) 60° e 120°

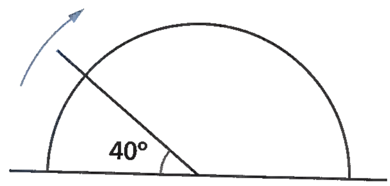
b) 120° e 160°

c) 120° e 240°

d) 140° e 220°



7. (Saresp-SP) O movimento completo do limpador do para-brisa de um carro corresponde a um ângulo raso. Na situação descrita pela figura, admita que o limpador está girando em sentido horário e calcule a medida do ângulo que falta para que ele complete o movimento completo.



a) 50°

b) 120°

c) 140°

d) 160°

8. Quantos graus tem um ângulo que mede:

a) a terça parte da medida do ângulo de meia-volta?

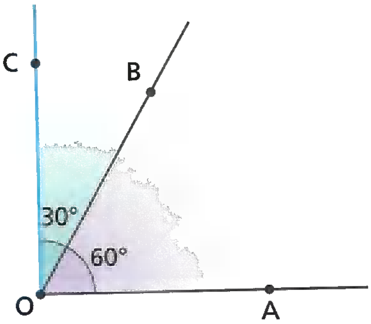
b) $\frac{2}{5}$ da medida do ângulo de uma volta?

9. A medida *x* de um ângulo equivale, em graus, à raiz da equação $\frac{x}{5} + \frac{x - 15°}{4} = 57°$. Descubra o valor de *x*.

10. Se *x* representa a medida, em graus, de um ângulo e é a solução da equação $\frac{2}{3}x + 3(x - 15) = 120$, descubra o valor de *x*.

Ângulos complementares

Observe que na figura os ângulos adjacentes AOB e BOC, juntos, formam um ângulo reto (90°).



med (AÔB) = 60°
med (BÔC) = 30°
med (AÔC) = med (AÔB) + med (BÔC)
90° = 60° + 30°

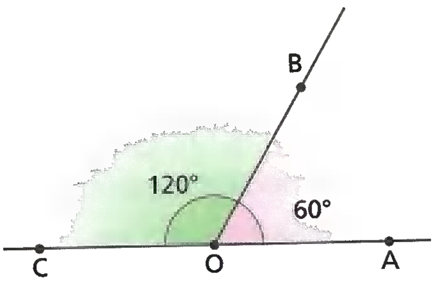
Quando a soma das medidas de dois ângulos é igual a 90°, dizemos que os ângulos são **complementares**.

Assim:

- Os ângulos AOB e BOC da figura são **complementares**.
- O ângulo AOB é o complemento do ângulo BOC, e vice-versa.

Ângulos suplementares

Observe na figura os ângulos AOB e BOC.



med (AÔB) = 60°
med (BÔC) = 120°
med (AÔC) = med (AÔB) + med (BÔC)
180° = 60° + 120°

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Quando a soma das medidas de dois ângulos é igual a 180°, dizemos que os ângulos são **suplementares.**

Assim, na figura apresentada:

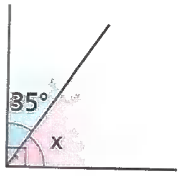
- Os ângulos AOB e BOC são suplementares.
- O ângulo AOB é o suplemento do ângulo BOC, e vice-versa.

ATIVIDADES

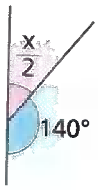
Responda às questões no caderno.

1. Calcule a medida *x* nos seguintes casos:

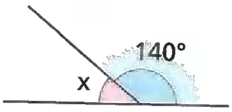
a)



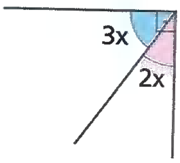
c)



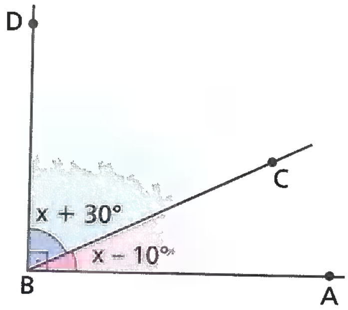
b)



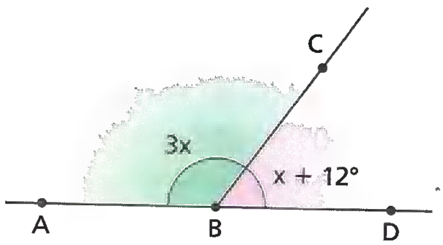
d)



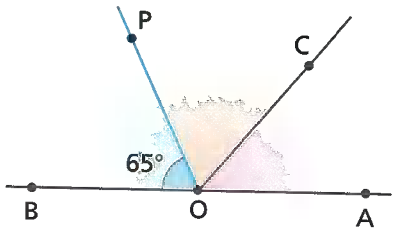
2. Calcule a medida do ângulo CBD na figura:



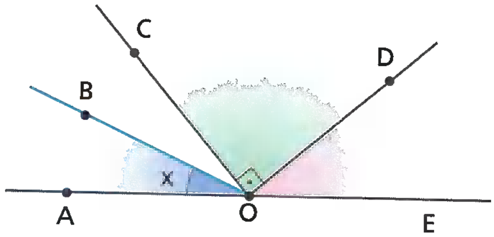
3. Qual é a diferença entre as medidas dos ângulos ABC e CBD da figura a seguir?



4. Na figura, $\overrightarrow{OP}$ é bissetriz de BÔC. Calcule a medida de AÔC.



5. Na figura, $\overrightarrow{OB}$ é a bissetriz de AÔC e med (DÔE) = 40°. Determine a medida de *x*.



6. Determine a medida do:

a) complemento do ângulo de 47°.

b) suplemento do ângulo de 119°.

c) complemento do ângulo de 22°.

d) suplemento do ângulo de 67°.

7. Quanto vale a metade do suplemento de um ângulo de 122°?

8. Qual é o valor do triplo do complemento de um ângulo de 66°?

9. Dois ângulos são suplementares e o maior deles mede 113°. Quanto mede o ângulo menor?

10. A medida de um ângulo é igual à medida do seu complemento. Quanto mede esse ângulo?

11. O dobro da medida de um ângulo é igual à medida de seu complemento. Qual é a medida desse ângulo?

12. Caio descobriu que o triplo da medida do complemento de um ângulo é igual a 111°. Qual é a medida desse ângulo?

13. O quíntuplo da medida do complemento de um ângulo é igual ao dobro da medida do suplemento desse ângulo. Quanto mede esse ângulo?

14. Dois ângulos são suplementares e suas medidas são expressas por $\frac{x}{2} + 25°$ e $2x - 10°$. Qual é o valor de *x*?

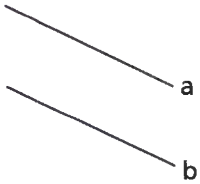
CAPÍTULO

2

RETAS

Retas paralelas e retas concorrentes

Quando duas retas não se cruzam, ou seja, não possuem pontos em comum, são chamadas retas paralelas.



Dizemos que as retas a e b são **retas paralelas**.

Indicamos: a // b.

Ao traçarmos, em um plano, duas retas que possuam um ponto em comum, essas retas formam entre si quatro ângulos. Veja:

> Quando duas retas se cruzam formando entre si quatro ângulos, essas retas são chamadas de **concorrentes**.

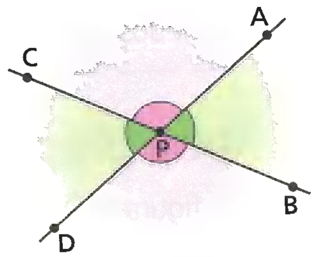
Com a ajuda de um transferidor, medimos os quatro ângulos formados:

$$\text{med}\left(A\hat{P}B\right) = 64°$$

$$\text{med}\left(B\hat{P}D\right) = 116°$$

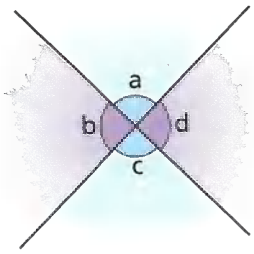
$$\text{med}\left(D\hat{P}C\right) = 64°$$

$$\text{med}\left(C\hat{P}A\right) = 116°$$



Observe que $\text{med}\left(A\hat{P}B\right) = \text{med}\left(D\hat{P}C\right) = 64$ e $\text{med}\left(B\hat{P}C\right) =$
$= \text{med}\left(C\hat{P}A\right) = 116°$.

Traçando duas retas concorrentes, também é possível obter quatro ângulos congruentes, ou seja, de mesma medida. Observe:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

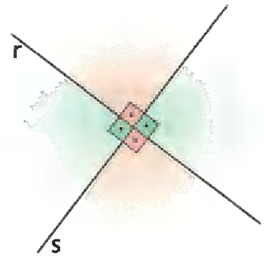
Utilizando o transferidor, vamos medir o ângulo $\hat{a}$ e o ângulo $\hat{d}$. Como a medida do ângulo $\hat{a}$ é igual à medida do ângulo $\hat{d}$, a medida do ângulo $\hat{d}$ é igual à medida do ângulo $\hat{b}$, temos que cada um dos ângulos obtidos mede 90°.

$$a = b = c = d = 90°$$

> Quando duas retas concorrentes formam entre si quatro ângulos retos, dizemos que as retas são **perpendiculares** e utilizamos o símbolo $\perp$ para representar o perpendicularismo entre elas.

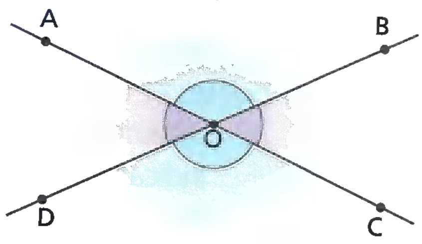
Na figura, *r* e *s* formam entre si quatro ângulos retos. Então, r ⊥ s.

é perpendicular a



Ângulos opostos pelo vértice

Na figura ao lado, estão destacados os ângulos AOB, BOC, COD e DOA. Nela temos:



- $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$ são semirretas opostas.
- $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$ são semirretas opostas.

Portanto, as semirretas OA e OB, que formam os lados de AÔB, são opostas, respectivamente, às semirretas OC e OD, que formam os lados de CÔD.

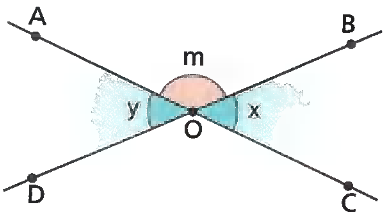
Nesse caso, podemos afirmar também que os lados de AÔB são formados pelos prolongamentos dos lados de CÔD, e vice-versa.

A esses dois ângulos (AOB e COD) damos o nome de **ângulos opostos pelo vértice**. Observando a figura, verificamos que AÔD e BÔC também são opostos pelo vértice.

> Dois ângulos são chamados **opostos pelo vértice** (abreviamos o.p.v.) quando os lados de um forem prolongamentos dos lados do outro, e vice-versa.

Uma propriedade importante dos ângulos o.p.v.

Na figura, AÔD e BÔC são opostos pelo vértice.

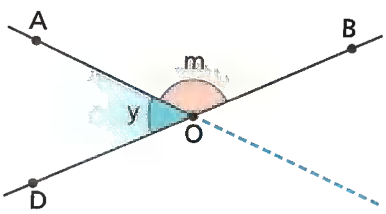


Indicando por:

x = med (BÔC)
y = med (AÔD)
m = med (AÔB)

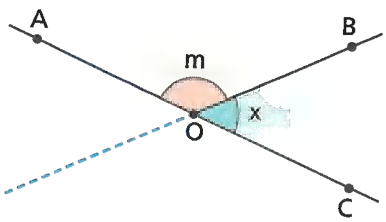
- Como AÔB e AÔD são adjacentes suplementares:

m + y = 180° (1)



- Como AÔB e BÔC são adjacentes suplementares:

m + x = 180° (2)



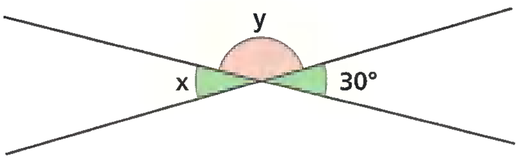
- Comparando 1 e 2, temos:

$$\begin{cases} m + y = 180° \\ m + x = 180° \end{cases} \Rightarrow m + y = m + x \Rightarrow y = x$$

> Dois ângulos opostos pelo vértice são **congruentes**, ou seja, têm a mesma medida.

Vejamos algumas aplicações dessa propriedade:

1 Determinar os valores de x e y na figura seguinte:



$x = 30°$ ⟶ ângulos o.p.v.

$y + 30° = 180°$ ⟶ ângulos adjacentes suplementares

$y = 180° - 30°$

$y = 150°$

2 Dois ângulos opostos pelo vértice têm medidas, em graus, expressas por $x + 50°$ e $2x - 30°$. Qual é o valor de x?

$x + 50° = 2x - 30°$ ⟶ ângulos o.p.v.

$x - 2x = -30° - 50°$

$-x = -80°$

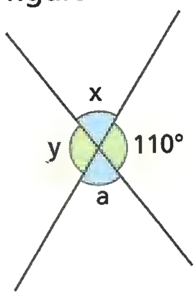
$x = 80°$

ATIVIDADES

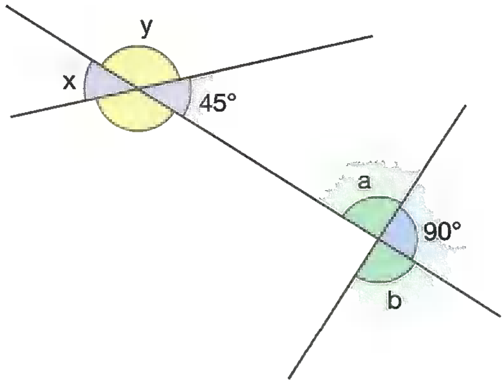
Responda às questões no caderno.

1. Determine os valores de *x* e *y*, *a* e *b* em cada figura:

a)

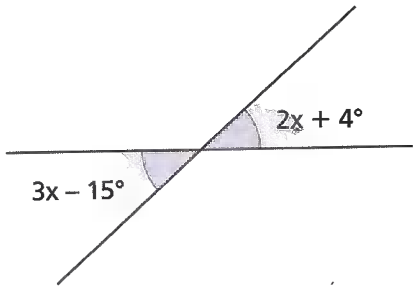


b)

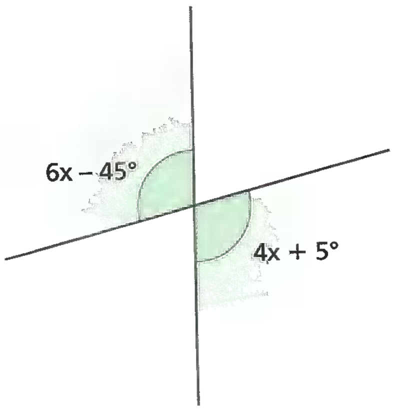


2. Calcule o valor de *x* e a medida dos ângulos a seguir.

a)



b)



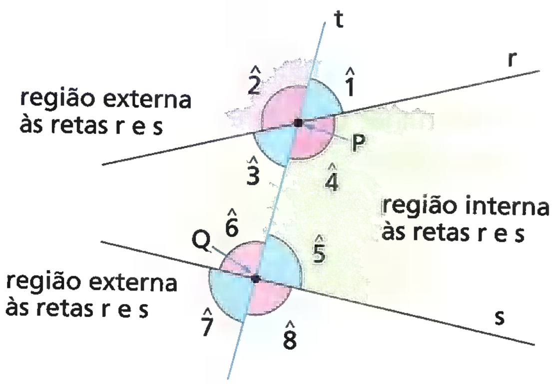
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Retas paralelas cortadas por uma transversal

A figura nos mostra três retas (*t*, *r* e *s*), todas pertencentes a um mesmo plano. A reta *t* corta a reta *r* no ponto *P*, e a reta *s*, no ponto *Q*.

Observe que a reta *t* forma com as retas *r* e *s* oito ângulos, sendo quatro com vértices em *P* e quatro com vértices em *Q*.

Para facilitar a visualização, vamos indicar esses oito ângulos numerando-os. Veja na figura. Assim:



- ângulos com vértices em $P \rightarrow \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ e $\hat{4}$
- ângulos com vértices em $Q \rightarrow \hat{5}, \hat{6}, \hat{7}$ e $\hat{8}$

PENSE E RESPONDA

1. **Observando a figura anterior, indique no caderno:**

a) os quatro ângulos que pertencem à região interna às retas *r* e *s*.

b) os quatro ângulos que pertencem à região externa às retas *r* e *s*.

c) os ângulos que estão do mesmo lado em relação à reta *t*.

d) os pares de ângulos, um na região externa com vértice em *P* e o outro na região interna com vértice em *Q*.

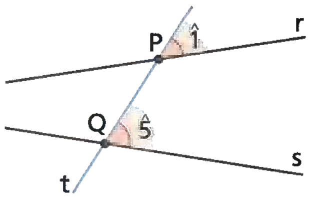
e) os pares de ângulos, um na região interna com vértice em *P* e o outro na região externa com vértice em *Q*.

A reta *t*, concorrente à reta *r* no ponto *P* e concorrente à reta *s* no ponto *Q*, é chamada de reta transversal a *r* e *s*.

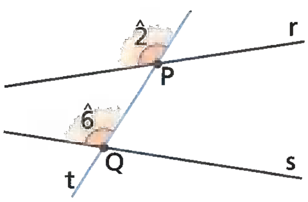
Vamos conhecer algumas relações importantes entre os ângulos formados por essas retas.

Ângulos correspondentes

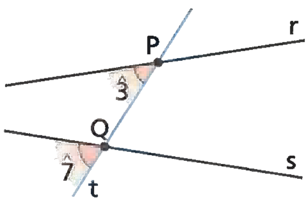
Ângulos correspondentes são pares de ângulos não adjacentes, situados em um mesmo lado da reta transversal *t*, um na região interna e o outro na região externa às retas *r* e *s*.



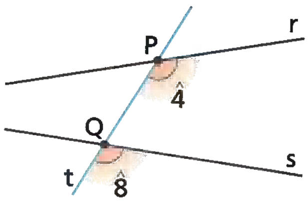
$\hat{1}$ e $\hat{5}$ são correspondentes.



$\hat{2}$ e $\hat{6}$ são correspondentes.



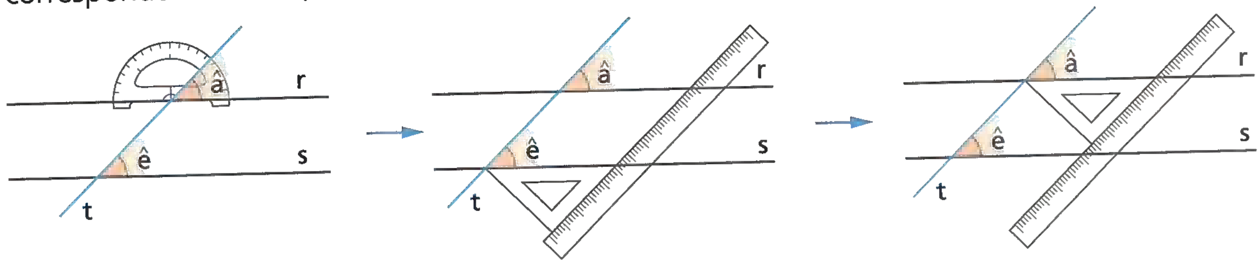
$\hat{3}$ e $\hat{7}$ são correspondentes.



$\hat{4}$ e $\hat{8}$ são correspondentes.

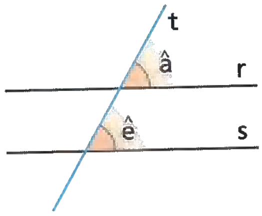
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Podemos verificar de forma prática que, se dois ângulos correspondentes forem congruentes, então as retas *r* e *s* serão paralelas (indica-se: r//s). Para isso, tomemos os ângulos correspondentes â e ê, de mesma medida, e verifiquemos o que ocorre com as retas *r* e *s*.

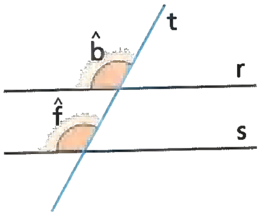


Se a reta transversal corta duas retas determinando ângulos correspondentes congruentes, então essas retas são paralelas (â ≅ ê ⇒ r//s).

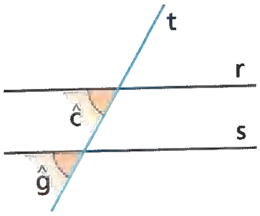
A recíproca também é verdadeira: duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal determinam ângulos **correspondentes congruentes**.



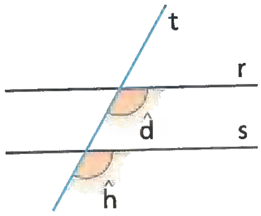
â e ê são correspondentes
r // s ⇒ â ≅ ê



$\hat{b}$ e $\hat{f}$ são correspondentes
r // s ⇒ $\hat{b} \cong \hat{f}$



$\hat{c}$ e $\hat{g}$ são correspondentes
r // s ⇒ $\hat{c} \cong \hat{g}$



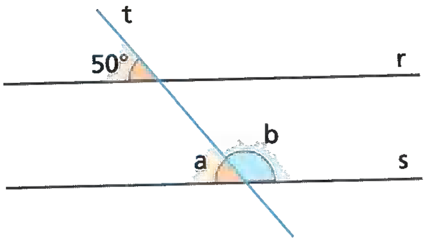
$\hat{d}$ e $\hat{h}$ são correspondentes
r // s ⇒ $\hat{d} \cong \hat{h}$

Usaremos essa propriedade para resolver a situação a seguir.

1 Na figura, temos r // s. Vamos determinar as medidas *a* e *b*.

Como r // s, temos:

a = 50° (ângulos correspondentes)



Como *a* e *b* são suplementares, temos:

a + b = 180°

50° + b = 180°

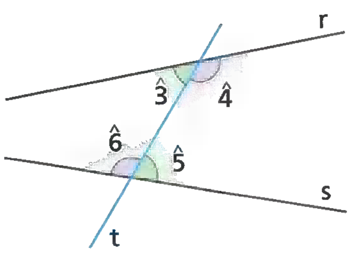
b = 130°

Então, a = 50° e b = 130°.

Ângulos alternos

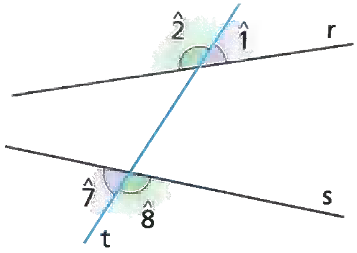
Ângulos alternos são pares de ângulos não adjacentes que estão em lados opostos em relação à reta transversal.

- $\hat{3}$ e $\hat{5}$ estão em lados opostos em relação à reta transversal *t* e na região determinada entre as retas *r* e *s* (região interna).
- $\hat{3}$ e $\hat{5}$ são ângulos **alternos internos**.
- $\hat{4}$ e $\hat{6}$ estão em lados opostos em relação à reta transversal *t* e na região determinada entre as retas *r* e *s*.
  $\hat{4}$ e $\hat{6}$ são ângulos **alternos internos**.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

- $\hat{1}$ e $\hat{7}$ estão em lados opostos em relação à reta transversal *t* e na região externa às retas *r* e *s*.
  $\hat{1}$ e $\hat{7}$ são ângulos **alternos externos**.
- $\hat{2}$ e $\hat{8}$ estão em lados opostos em relação à reta transversal *t* e na região externa às retas *r* e *s*.
  $\hat{2}$ e $\hat{8}$ são ângulos **alternos externos**.



PENSE E RESPONDA

Vamos fazer investigações utilizando o GeoGebra. Depois, responda às questões no caderno.

1. Com a ferramenta *Reta* trace uma reta qualquer e com a ferramenta *Reta Paralela* trace uma reta paralela à primeira. Em seguida, usando novamente a ferramenta *Reta* trace uma reta transversal às duas primeiras.

Por último, com a ferramenta *Ângulo* marque e meça os pares de ângulos alternos internos.

a) Comparando as medidas dos ângulos alternos internos, o que é possível verificar?

b) Faça a mesma investigação para os ângulos alternos externos. O que é possível observar?

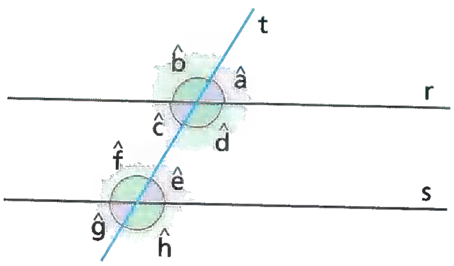
c) Mova a reta transversal de tal forma que os ângulos determinados se alterem. As conclusões anteriormente observadas se mantiveram?

2. Faça o mesmo experimento, mas dessa vez as duas primeiras retas construídas não devem ser paralelas. O que observamos na atividade anterior pode ser verificado nesta?

Em nossa investigação pudemos observar uma propriedade da Geometria:

> Duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal determinam ângulos **alternos congruentes (internos ou externos)**.

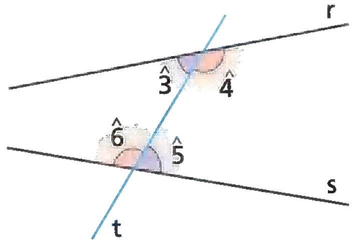
Assim:



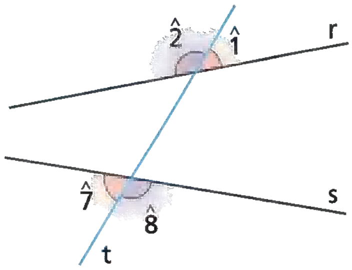
$$r \,/\!/\, s \Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} \hat{c} \cong \hat{e} \\ \hat{d} \cong \hat{f} \end{array}\right] \text{alternos internos} \\ \left.\begin{array}{l} \hat{a} \cong \hat{g} \\ \hat{b} \cong \hat{h} \end{array}\right] \text{alternos externos} \end{cases}$$

Ângulos colaterais

Ângulos colaterais são pares de ângulos não adjacentes localizados no mesmo lado da reta transversal.



- $\hat{3}$ e $\hat{6}$ estão no mesmo lado em relação à reta transversal *t* e na região interna às retas *r* e *s*.
  $\hat{3}$ e $\hat{6}$ são ângulos **colaterais internos**.
- $\hat{4}$ e $\hat{5}$ estão no mesmo lado em relação à reta transversal *t* e na região interna às retas *r* e *s*.
  $\hat{4}$ e $\hat{5}$ são ângulos **colaterais internos**.
- $\hat{1}$ e $\hat{8}$ estão no mesmo lado em relação à reta transversal *t* e na região externa às retas *r* e *s*.
  $\hat{1}$ e $\hat{8}$ são ângulos **colaterais externos**.
- $\hat{2}$ e $\hat{7}$ estão no mesmo lado em relação à reta transversal *t* e na região externa às retas *r* e *s*.
  $\hat{2}$ e $\hat{7}$ são ângulos **colaterais externos**.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

PENSE E RESPONDA

Vamos fazer novas investigações com o uso do GeoGebra. Depois, responda às questões no caderno.

1. **Com a ferramenta *Reta* trace uma reta qualquer e com a ferramenta *Reta Paralela* trace uma reta paralela à primeira. Em seguida, usando novamente a ferramenta *Reta* trace uma reta transversal às duas primeiras.**

Por último, com a ferramenta *Ângulo* marque e meça os pares de ângulos colaterais internos.

a) Obtenha a soma das medidas de um dos pares dos ângulos colaterais internos. Qual o valor obtido? Faça o mesmo para o outro par. O que podemos observar?

b) Faça a mesma investigação para os ângulos colaterais externos. O que é possível observar?

c) Mova a reta transversal de tal forma que os ângulos determinados se alterem. As conclusões anteriormente observadas se mantiveram?

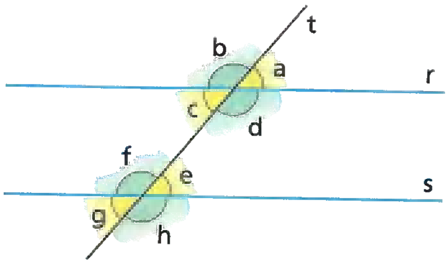
2. **Faça o mesmo experimento, mas dessa vez as duas primeiras retas construídas não devem ser paralelas. O que observamos na atividade anterior pode ser observado nessa?**

FOTOS: GEOGEBRA 2018

Em nossa investigação, pudemos observar outra propriedade da Geometria:

> Duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal determinam **ângulos colaterais (internos ou externos) suplementares**.

Assim:



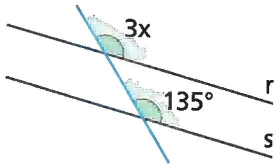
$$r \,/\!/\, s \Rightarrow \begin{cases} c + f = 180° \\ d + e = 180° \end{cases} \text{colaterais internos} \quad \begin{cases} a + h = 180° \\ b + g = 180° \end{cases} \text{colaterais externos}$$

ATIVIDADES

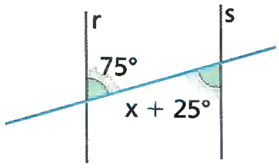
Responda às questões no caderno.

1. Nas figuras a seguir, determine o valor de *x*, sabendo que r // s.

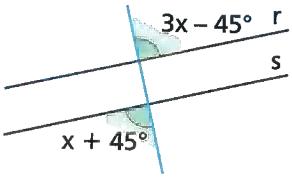
a)



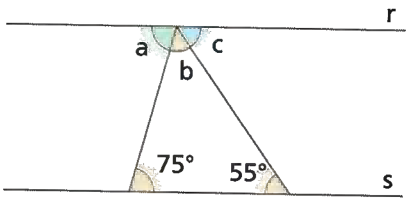
b)



c)

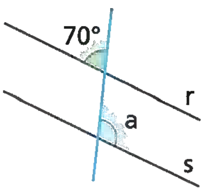


2. Determine o valor de *a*, *b* e *c* na figura, sabendo que r // s.

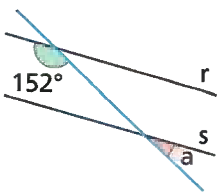


3. Nas figuras a seguir, determine o valor de *a*, sendo r // s.

a)

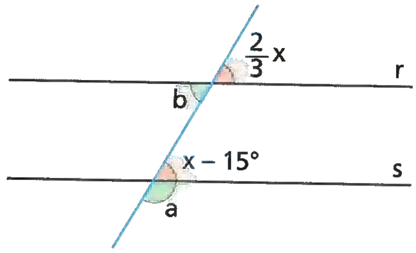


b)

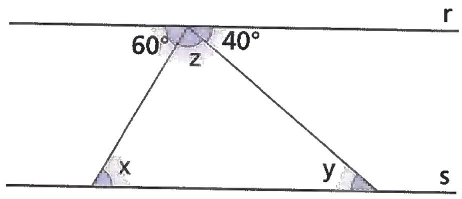


4. Duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal formam dois ângulos correspondentes, representados em graus por 5x + 20° e 2x + 50°. Determine o valor de *x*.

5. Determine os valores de *a* e *b*, na figura, sendo r // s.

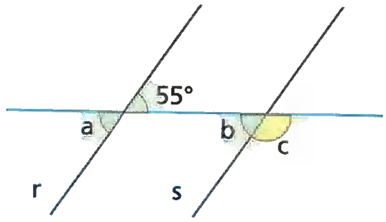


6. Nesta figura, r // s. Calcule o valor de x + y + z.



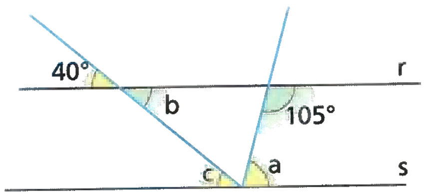
7. Nas figuras a seguir, determine os valores de a, *b* e *c*, sendo r // s.

a)



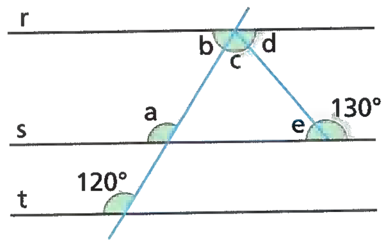
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

b)

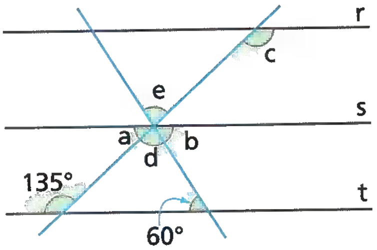


8. Nas figuras a seguir, r // s // t. Determine as medidas desconhecidas indicadas.

a)

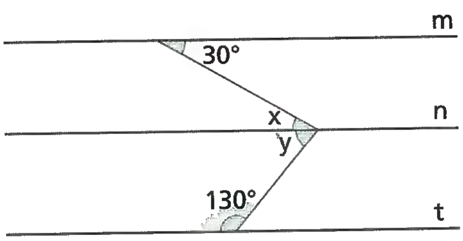


b)

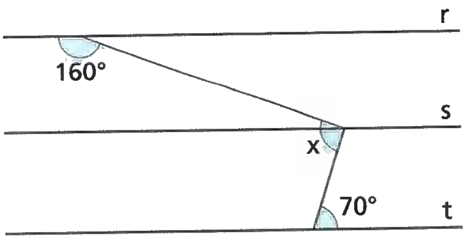


9. Um dos ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal mede 55°. Determine as medidas dos oito ângulos formados entre essas retas paralelas e a reta transversal.

10. Sabendo que m // n // t, determine a medida x + y na figura.

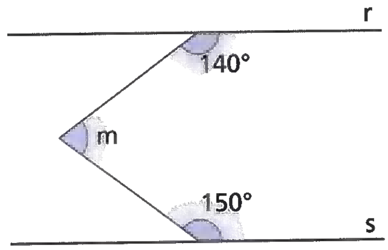


11. Na figura a seguir, r // s // t. Nessas condições, determine a medida *x*.

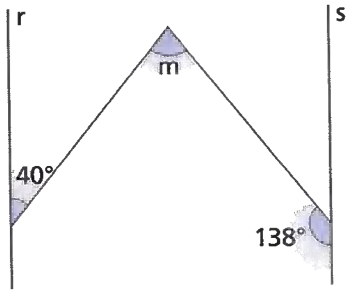


12. Nas duas figuras seguintes, r // s. Determine a medida *m*.

a)

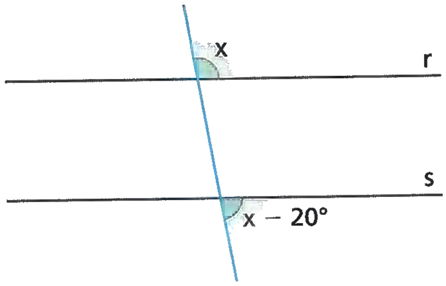


b)

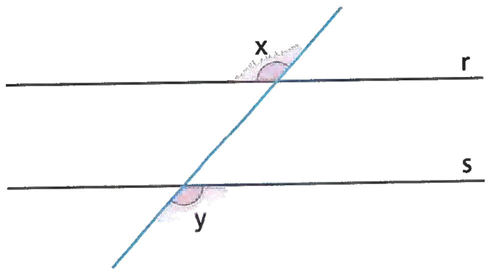


13. Duas retas, *r* e *s*, cortadas por uma reta transversal *t*, formam ângulos alternos internos expressos em graus por 2m + 30° e 3m − 20°. Calcule *m* de modo que as retas *r* e *s* sejam paralelas.

14. Calcule o valor de *x* na figura, sabendo que r // s.



15. Na figura seguinte, a soma das medidas dos ângulos agudos é 192°. Sendo r // s, calcule os valores de *x* e *y*.



CAPÍTULO 3

TRIÂNGULOS

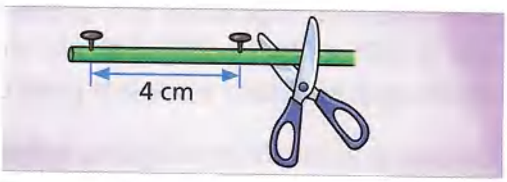
Condição de existência de um triângulo

Veja no material audiovisual o vídeo sobre a construção de triângulos.

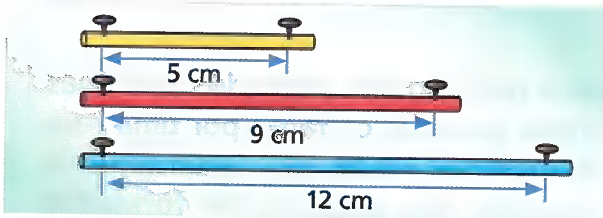
PENSE E RESPONDA

Dadas as medidas de três segmentos, será que é sempre possível construir um triângulo? Para responder a essa pergunta, vamos realizar o experimento a seguir. Você vai precisar de régua, percevejos, placa de isopor, canudos de refresco e tesoura com pontas arredondadas.

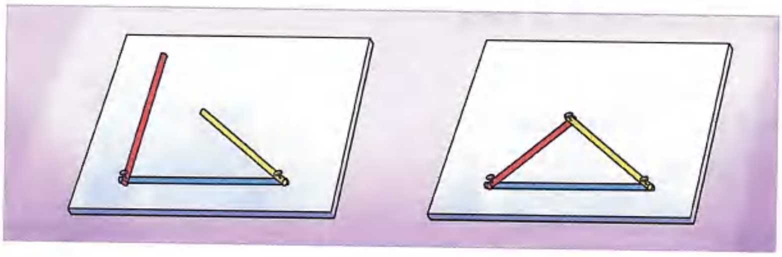
1º passo: Corte um canudo com um pouco a mais de 4 cm.



2º passo: Faça o mesmo com os outros três canudos para as distâncias de 5 cm, 9 cm e 12 cm.



ILUSTRAÇÕES: MARCEL BORGES



3º passo: Com esses canudos, represente um triângulo.

Tente fazer o mesmo com os canudos de:

a) 4 cm, 9 cm e 12 cm (a medida do maior lado é menor do que a soma das medidas dos outros dois lados);

b) 4 cm, 5 cm e 9 cm (a medida do maior lado é igual à soma das medidas dos outros dois lados);

c) 4 cm, 5 cm e 12 cm (a medida do maior lado é maior do que a soma das medidas dos outros dois lados).

Houve casos em que não foi possível formar um triângulo? Quais?

De modo geral temos que:

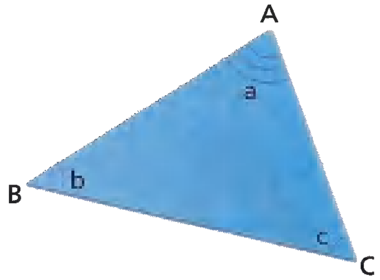
Em qualquer triângulo, a medida de qualquer lado deve ser sempre **menor** que a soma dos outros dois lados.

Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

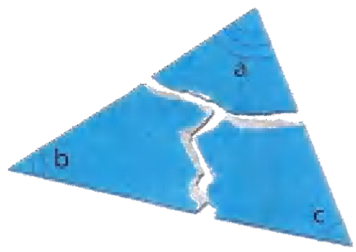
Vamos fazer uma experiência para apresentar uma importante relação entre as medidas dos ângulos internos de um triângulo.

Nessa experiência, consideramos o triângulo ABC, sendo *a*, *b* e *c* as medidas de seus ângulos internos. Siga os passos:

1 Recorte em cartolina um triângulo de qualquer tamanho e indique os ângulos internos, assim:



2 Separe o triângulo em três partes, cada uma contendo um dos ângulos do triângulo.



3 Junte os três ângulos do triângulo, fazendo coincidir seus vértices, como na figura.

FOTOS: DOTTA2

Você pode notar que se formou um ângulo de meia-volta, cuja medida é 180°.

Assim, $a + b + c = 180°$.

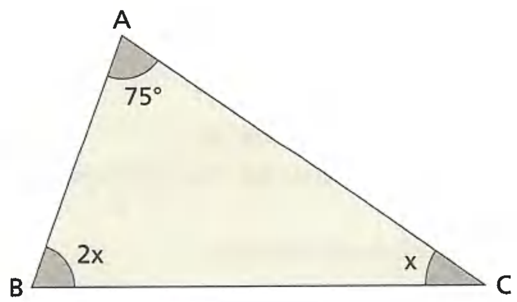
Se você repetir a experiência com outros triângulos, verá que a soma das medidas dos seus ângulos internos será sempre 180°.

> A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

A seguir, veja uma situação em que podemos aplicar essa relação.

1 Calcular a medida *x* indicada na figura.

Como 75°, x e 2x são as medidas dos ângulos internos do ΔABC, temos:



EDITORIA DE ARTE

$$75° + x + 2x = 180°$$
$$3x = 180° - 75°$$
$$3x = 105°$$
$$x = \frac{105°}{3} \Rightarrow x = 35°$$

PARA QUEM QUER MAIS

Rigidez na estrutura dos triângulos

No dia a dia, é possível observar a presença de figuras que lembram triângulo em muitas construções. Ele faz parte da estrutura de pontes e telhados, por exemplo, e seu uso pode ser explicado porque é uma figura rígida.

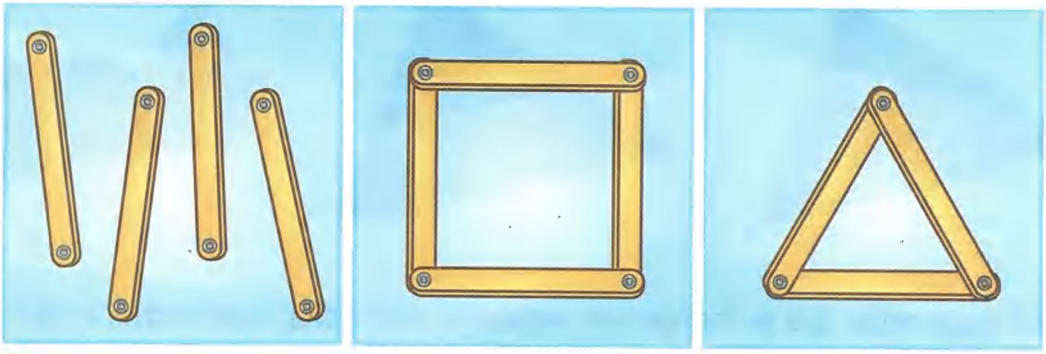
Para entender melhor a rigidez na estrutura dos triângulos, é possível construir, utilizando materiais simples, duas figuras diferentes: um triângulo e um quadrilátero.

Para isso, você vai precisar de:

- 7 palitos de sorvete
- 7 percevejos ou tachinhas

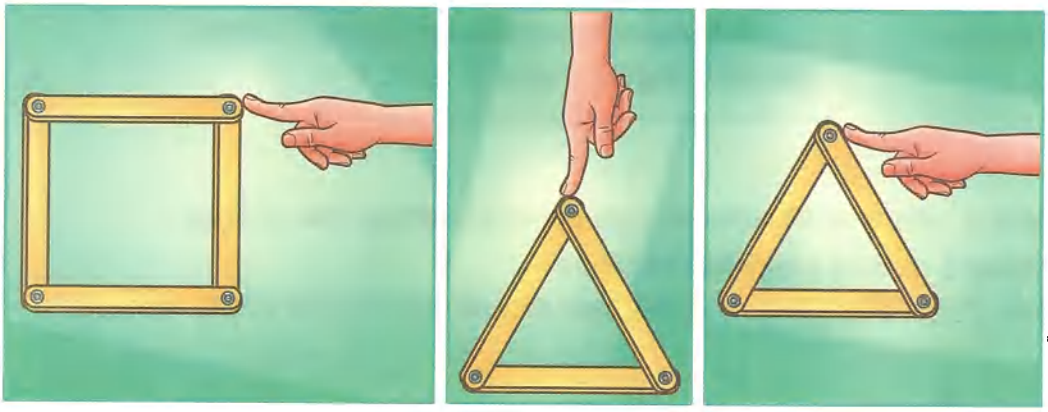
Comece construindo um quadrilátero. Utilize 4 tachinhas para prender 4 palitos de sorvete de modo que obtenha um quadrilátero como a seguir.

Reserve o quadrilátero. Depois, usando os outros palitos e as tachinhas, construa um triângulo.



Agora, procure apoiar o quadrilátero sobre uma mesa ou uma superfície lisa; depois, empurre um dos vértices superiores, conforme a imagem a seguir.

Repita o mesmo procedimento com o triângulo.



ILUSTRAÇÕES: MARCEL BORGES

Agora, responda no caderno:

a) O que aconteceu quando você empurrou um dos vértices do quadrilátero?

b) A medida dos lados do quadrilátero se mantém, mesmo quando empurramos um dos lados?

c) A forma do triângulo mudou quando você empurrou um dos vértices?

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

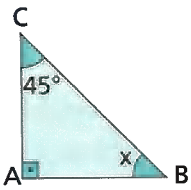
1. Caio pretende construir um triângulo usando três varetas de madeira cujos comprimentos são 130 cm, 92 cm e 51 cm. É possível construir tal triângulo?

2. Em um triângulo, o lado maior tem 35 cm, e um dos dois lados menores mede 21 cm. Qual a medida inteira mínima que o terceiro lado deve ter?

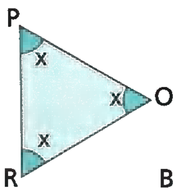
3. Os dois lados menores de um triângulo medem 22 cm e 37 cm. Qual a medida inteira máxima que o maior lado desse triângulo deve ter?

4. Determine o valor de *x* nos triângulos a seguir.

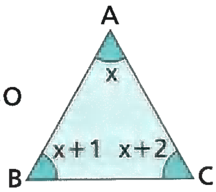
a)



b)



c)



EDITORIA DE ARTE

5. Dois ângulos internos de certo triângulo medem 73° e 59°. Qual é a medida do terceiro ângulo interno desse triângulo?

6. Um triângulo tem dois ângulos internos congruentes. O terceiro ângulo mede 68°. Qual é a medida dos ângulos congruentes?

7. (UECE) Se as medidas, em graus, dos ângulos internos de um triângulo são, respectivamente, $3x$, $x + 15$ e $75 - x$, então esse triângulo é:

a) escaleno.

b) retângulo e não isósceles.

c) retângulo e isósceles.

d) isósceles e não retângulo.

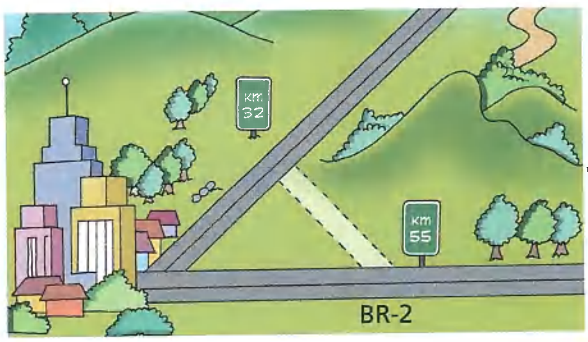
8. (UFAM) Os ângulos de um triângulo medidos em graus são: $3x - 36$; $2x + 10$ e $x + 20$. O maior ângulo mede:

a) 72°
b) 57°
c) 51°
d) 90°
e) 86°

DESAFIO

9. Em uma região plana, deseja-se construir uma estrada para interligar outras duas estradas retilíneas. Duas dessas estradas têm origem na cidade e a que deverá ser construída estará ligando o km 32 da BR-1 com o km 55 da BR-2, como mostra a ilustração seguinte.

Sabendo que essa ligação terá um número inteiro de quilômetros, quais as medidas, mínima e máxima, que ela poderá ter?



MW EDITORA E ILUSTRAÇÕES

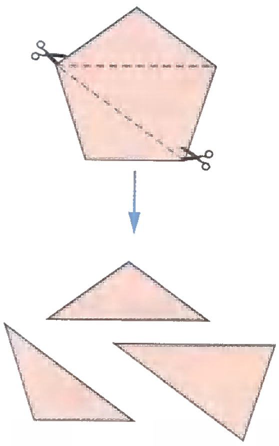
CAPÍTULO 4

POLÍGONOS REGULARES

Veja no material audiovisual o vídeo sobre ângulos internos de triângulos e de polígonos regulares.

Medidas dos ângulos internos de um polígono regular

Sabemos que os polígonos regulares possuem todos os ângulos com a mesma medida. Por conta disso, podemos determinar a medida desses ângulos sem a necessidade de medir com um transferidor. Para isso, primeiramente, determinaremos a soma das medidas dos ângulos internos (S_i) do polígono.

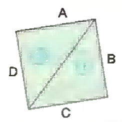
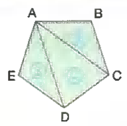
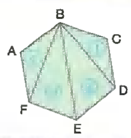
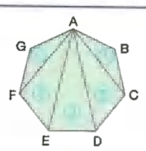


Para determinar essa soma, decompomos o polígono em triângulos, uma vez que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo já é conhecida e igual a 180°. Fazemos isso traçando as diagonais que partem de um único vértice do polígono.

Observe que, traçando duas diagonais, decompomos um pentágono em três triângulos.

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, o valor da soma dos ângulos internos de um pentágono é 540° ($3 \cdot 180°$).

O quadro seguinte vai nos ajudar a ver que esse procedimento pode ser utilizado para os demais polígonos convexos (regulares e não regulares).

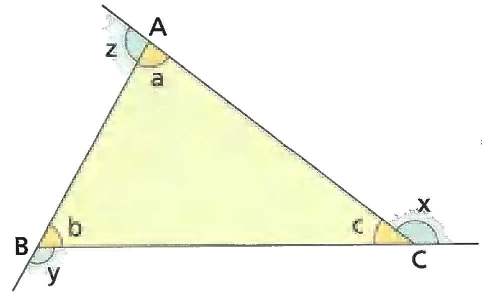
Nome	Polígono	Soma das medidas dos ângulos internos (S_i)
Quadrado		cada triângulo $2 \cdot 180° = 360°$
Pentágono regular		cada triângulo $3 \cdot 180° = 540°$
Hexágono regular		cada triângulo $4 \cdot 180° = 720°$
Heptágono regular		cada triângulo $5 \cdot 180° = 900°$

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Uma vez determinada a soma dos ângulos internos do polígono regular, basta dividi-la pela quantidade de ângulos internos do polígono. Para o caso do pentágono, chamando de x a medida de um ângulo interno, temos:

$$x = \frac{540°}{5} = 108°$$, ou seja, a medida de cada ângulo interno do pentágono regular é 108°.

Ângulos externos

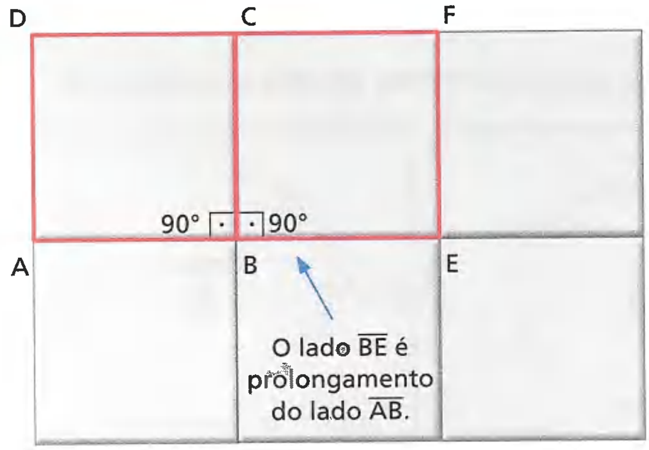


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Os **ângulos externos** são aqueles formados por um lado do polígono e pelo prolongamento de um lado consecutivo a ele. Um ângulo interno e seu ângulo externo correspondente são adjacentes e suplementares. Vamos ver esses ângulos em um triângulo.

- a, b, c são as medidas dos ângulos internos;
- x, y, z são as medidas dos ângulos externos.

Os ângulos a e z são adjacentes suplementares. O mesmo ocorre com os ângulos b e y e com os ângulos c e x.



Podemos observar essa relação entre os ângulos na prática, ao vermos um ladrilhamento como o seguinte.

O lado $\overline{BE}$ é prolongamento do lado $\overline{AB}$, ou seja, o ângulo CBE é um ângulo externo do quadrado ABCD. No entanto, o ângulo CBE é também um ângulo interno do quadrado BEFC, ou seja, sua medida é 90°.

Como o ângulo ABC é ângulo interno do quadrado ABCD e sua medida é igual a 90°, os ângulos ABC e CBE são suplementares.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Em um polígono regular de n lados, ao traçar as diagonais que partem de um único vértice, obtemos $(n - 2)$ triângulos. Se em um polígono obtivemos 6 triângulos, responda:

a) Qual é e quantos lados tem esse polígono?

b) Qual é a medida de seu ângulo interno e externo?

2. Qual o polígono regular cuja soma das medidas dos ângulos internos é 1 620°?

3. Como se chama o polígono regular cuja medida do ângulo interno é 150°?

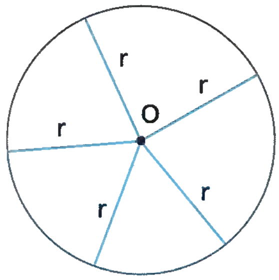
CAPÍTULO 5

CIRCUNFERÊNCIA

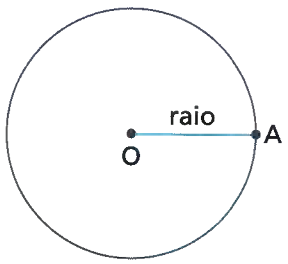
Circunferência é a figura geométrica formada por todos os pontos de um plano que têm a mesma distância de um ponto fixo desse plano.

Esse ponto fixo é chamado **centro da circunferência** (ponto *O*).

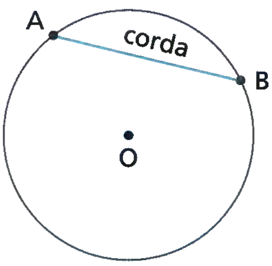
A distância constante é o comprimento do raio, indicado por *r*.



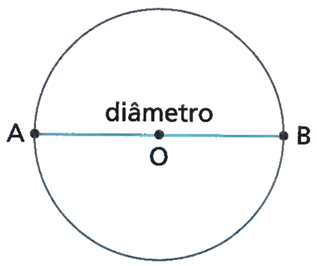
Observe, nas figuras seguintes, alguns elementos de uma circunferência:



Qualquer segmento que une o centro a um ponto da circunferência chama-se **raio**.



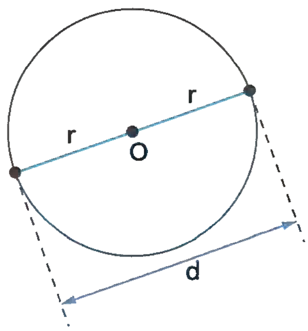
Qualquer segmento que une dois pontos distintos da circunferência chama-se **corda**.



A corda que passa pelo centro da circunferência chama-se **diâmetro**. O diâmetro é a maior corda da circunferência.

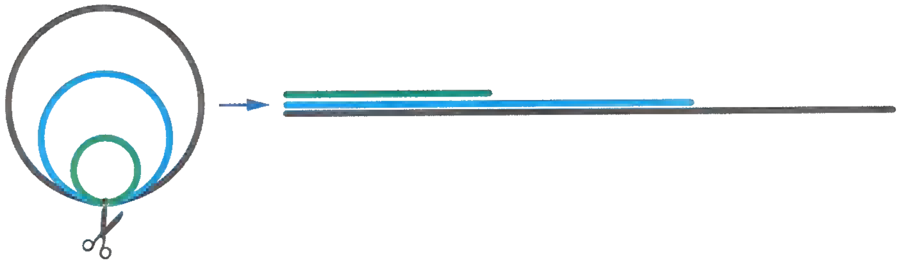
Observe também que a **medida do diâmetro** (**d**) é igual ao dobro da medida *r* do raio, ou seja:

$$\boxed{d = 2r}$$



O número π

Imagine que as três circunferências da figura a seguir foram cortadas no ponto indicado pela tesoura, e a linha horizontal representa que as circunferências foram esticadas, dando origem a segmentos de reta.


EDITORIA DE ARTE

A medida de cada segmento obtido representa o **comprimento** de suas respectivas circunferências.

Podemos estabelecer uma relação entre a medida do diâmetro e o comprimento da circunferência. Essa relação é obtida dividindo-se o comprimento da circunferência pela medida de seu diâmetro. Veja:


BANCO CENTRAL DO BRASIL

- Se medirmos uma moeda de 1 real, encontraremos, aproximadamente, 84,9 mm de comprimento da circunferência e 27 mm de diâmetro.

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \frac{84{,}9\,\text{mm}}{27\,\text{mm}} \simeq 3{,}1444$$

ROMAN SIGAEV/SHUTTERSTOCK.COM

- Se medirmos uma lata de suco, encontraremos, aproximadamente, 220 mm de comprimento da circunferência e 70 mm de diâmetro.

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \frac{220\,\text{mm}}{70\,\text{mm}} \simeq 3{,}1428$$

Nos dois exemplos, ao dividirmos o comprimento da circunferência pela medida do diâmetro (na mesma unidade), encontramos sempre um número maior que 3 (aproximadamente 3,14).

Pode-se verificar que esse fato se repete para qualquer circunferência, ou seja, dividindo-se a medida do comprimento de uma circunferência pela medida de seu diâmetro, obtém-se sempre o mesmo valor.

Esse valor constante representa um número muito importante em Matemática: o número **pi**, representado pela letra grega π.

Então:

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \pi$$

$$\pi = 3{,}14159265...$$

ATIVIDADES

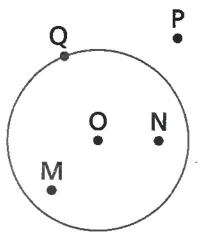
Responda às questões no caderno.

1. Usando régua e compasso, faça as construções a seguir:

a) uma circunferência de centro *O* e raio igual a 4 cm.

b) uma circunferência de centro *A* e diâmetro igual a 5 cm.

2. (Anresc) Na figura, estão representadas uma circunferência de centro *O* e raio *r* e quatro pontos *P*, *Q*, *M* e *N*. Entre esses quatro pontos, o ÚNICO cuja distância ao centro é igual à medida do raio é o ponto:



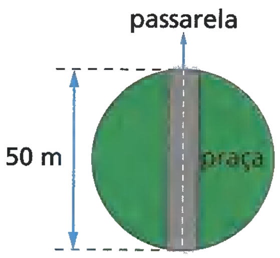
a) P

b) Q

c) M

d) N

3. (Anresc) No centro de uma cidade é construída uma praça circular com uma passarela central de 50 m de comprimento, como mostra a figura. O raio do círculo do contorno da praça é:



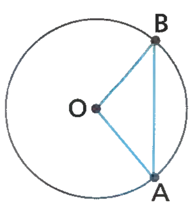
a) 25 m

b) 50 m

c) 100 m

d) 200 m

4. Considere a circunferência da figura a seguir:



a) Quais dos segmentos indicados são raios?

b) Quais dos segmentos indicados são cordas?

c) Algum dos segmentos indicados é um diâmetro?

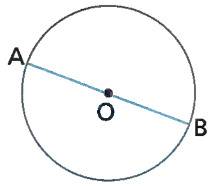
d) Você pode afirmar que os pontos *A*, *O* e *B* determinam um triângulo isósceles? Justifique a resposta.

5. Calcule o comprimento do diâmetro de uma circunferência quando o raio mede:

a) 25 cm **b)** 0,65 cm **c)** $\frac{5}{2}$ cm

6. Uma praça é circular e tem raio medindo 18,5 metros. Qual é o comprimento do diâmetro dessa praça?

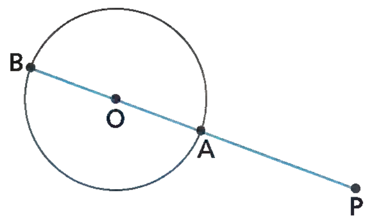
7. Considere a figura seguinte em que o segmento $\overline{AB}$ é um diâmetro. Qual é a medida *r* do raio quando:



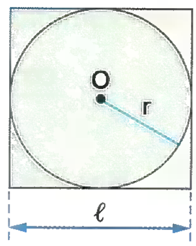
a) med $(\overline{AB}) = 57$ cm?

b) med $(\overline{AB}) = 11{,}6$ cm?

8. Na figura, a medida do segmento $\overline{PB}$ é 72 cm. Sabendo que a medida do segmento $\overline{PA}$ é 38 cm, determine o comprimento do raio da circunferência.



9. Considerando a figura, calcule o valor de:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

a) ℓ, medida do lado do quadrado, quando $r = 10{,}5$ cm.

b) *r*, comprimento do raio da circunferência, quando $\ell = 61$ cm.

10. Todo CD tem forma circular e sua capa, de modo geral, tem a forma quadrada. Se um CD tiver 6,5 cm de raio, qual deverá ser a medida mínima do lado de sua capa?

11. Um menino brinca com uma roda de 1 m de diâmetro. Que distância essa roda percorre ao dar 100 voltas? (Use: $\pi = 3{,}14$.)

CAPÍTULO 6

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Construção de uma circunferência

Para construir uma circunferência podemos utilizar um compasso.

Determinamos a abertura do compasso que corresponde ao raio da circunferência, podendo usar uma régua para isso. Depois, colocamos a ponta-seca onde será o centro da circunferência e giramos a ponta com grafite traçando a circunferência.

DOTTA2

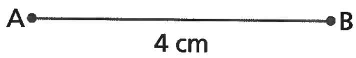
Circunferência sendo traçada com compasso.

Construção de um triângulo

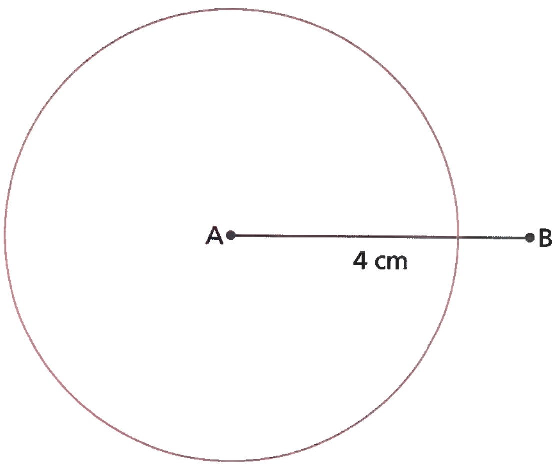
Com a ajuda de uma régua e um compasso, podemos construir triângulos conhecendo as medidas de três segmentos que serão os lados do triângulo, desde que as medidas cumpram com a condição de existência do triângulo.

1 Dados três segmentos de reta de medidas 4 cm, 3 cm e 2 cm, vamos construir um triângulo com essas medidas:

1º passo: Usando uma régua graduada, traçamos um dos lados. Nesse caso, traçaremos o segmento AB de 4 cm.

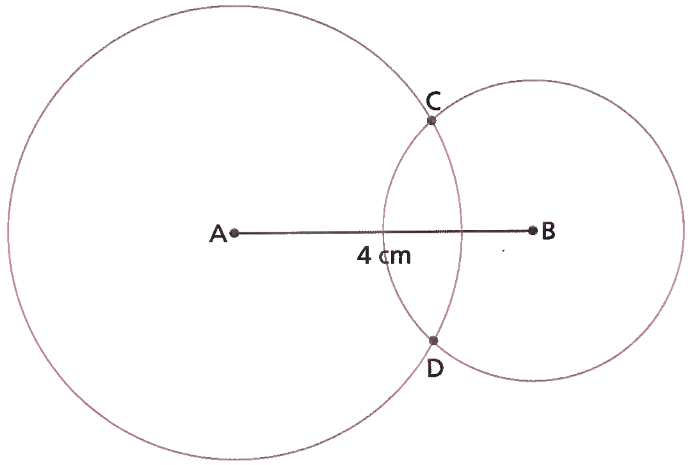


2º passo: Com a ponta-seca do compasso em *A* e uma abertura igual à medida de um dos outros dois lados, traçamos uma circunferência. No caso, faremos uma circunferência de raio 3 cm.

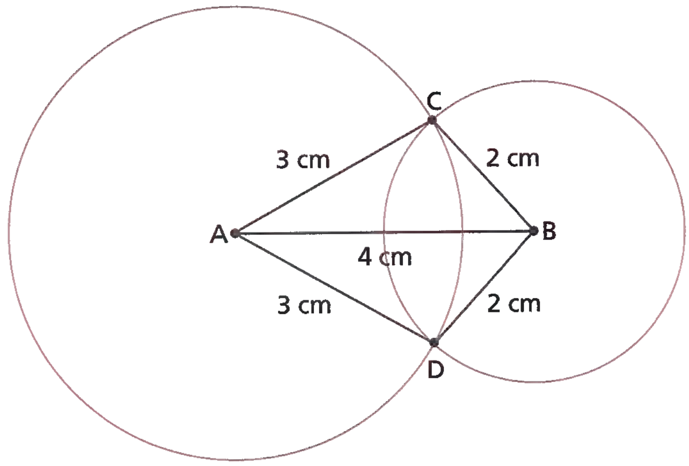


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

3º passo: Com a ponta-seca do compasso em *B* e uma abertura igual à medida do terceiro lado do triângulo, ou seja, 2 cm, traçamos outra circunferência e marcamos os pontos de intersecção entre as duas circunferências.



4º passo: Traçamos os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ e os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$.

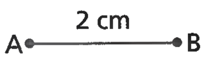


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

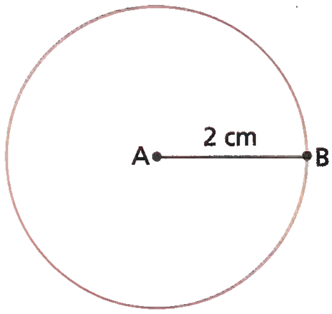
- O segmento AB tem 4 cm.
- Os segmentos AC e AD correspondem ao raio da primeira circunferência traçada (3 cm).
- Os segmentos BC e BD correspondem ao raio da segunda circunferência traçada (2 cm).
- Os segmentos AC e BC se cruzam em um dos pontos de intersecção das duas circunferências traçadas. O mesmo é valido para os segmentos AD e BD.

Construção de um polígono regular

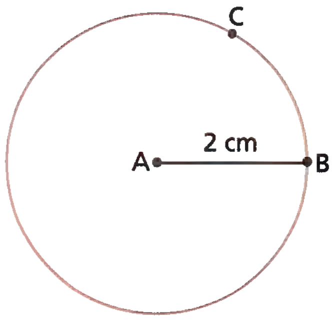
Utilizando régua e compasso, podemos construir um triângulo equilátero, conhecendo-se a medida de um dos lados, conforme descrito a seguir. Sabendo que a medida de um dos lados do triângulo é 2 cm, traçamos um segmento com medida igual a 2 cm.



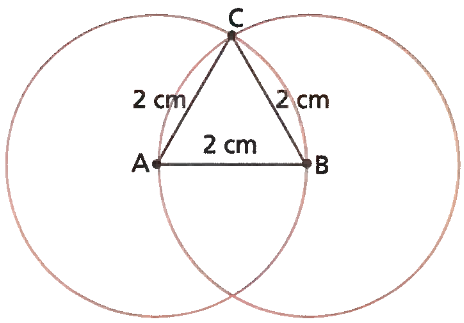
Depois, com a ponta-seca do compasso em *A* e abertura igual a AB, trace uma circunferência.



Com a ponta-seca do compasso no ponto *B* e abertura igual a AB, determinamos o ponto *C*.



Depois, traçamos os lados BC e AC, encontrando assim o triângulo equilátero.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Podemos descrever esse processo utilizando o esquema a seguir.

Traçar um segmento AB correspondente à medida de um dos lados do triângulo.

↓

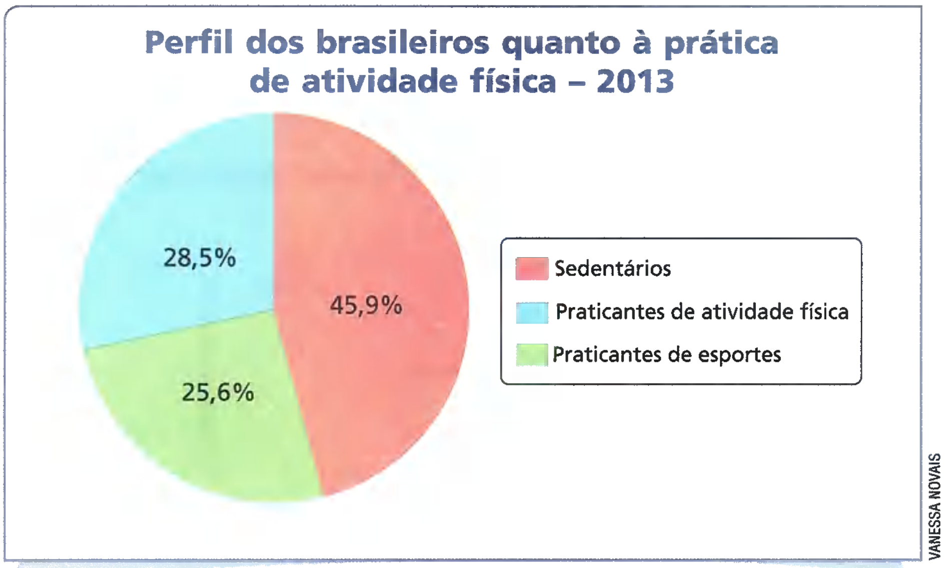
Com o compasso, traçar uma circunferência, com raio de mesma medida AB. → **Com a ponta-seca do compasso em B e mesma abertura AB, marcar o ponto *C* na circunferência.** → **Traçar semirretas ligando os pontos *A*, *B*, e *C*. Obtendo, assim, um triângulo equilátero.**

TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

Prática de atividade física

Um gráfico de setores é circular e mostra a frequência de cada um dos dados coletados em relação ao todo considerado. É conveniente utilizar esse tipo de gráfico quando queremos organizar ou agrupar dados quantitativos, considerando um total. Assim, o círculo representa o todo e é dividido de acordo com os números referentes ao tema em questão; esses números podem ser apresentados em forma de porcentagem ou não. Independentemente da forma que os números são apresentados, a soma dos setores (cada "fatia" do gráfico) deve corresponder ao número total dos dados envolvidos na pesquisa. No caso da porcentagem, a soma dos setores deve ser igual a 100%.

Veja um exemplo de gráfico de setores:



Fonte: IBGE. **A prática de esporte no Brasil**. Disponível em: <http://www.esporte.gov.br/diesporte/2.html>. Acesso em: 27 set. 2018.

Esse gráfico apresenta dados sobre o perfil dos brasileiros em relação à prática de atividades físicas. Essa pesquisa foi realizada pelo IBGE em 2013. Foram entrevistadas aproximadamente 146 748 000 pessoas de 14 a 75 anos de idade, separadas em três grupos – praticantes de atividade física, praticantes de esportes e sedentários. De acordo com essa pesquisa, 45,9% dos brasileiros eram sedentários, ou seja, não praticavam nenhum tipo de atividade física.

É comum as pessoas acharem que praticar atividade física e praticar esportes é a mesma coisa, mas esses dois termos não são sinônimos. Especialistas explicam que existem diferenças entre eles. Praticar atividade física é o mesmo que movimentar-se voluntariamente aumentando o gasto energético do organismo, por exemplo, fazer caminhada, dançar ou pedalar. Já a prática esportiva tem a ver com uma rotina organizada que segue regras e é realizada com o objetivo de competir.

ALEXANDRE CAPPI/PULSAR IMAGENS

Pessoas praticando atividade física no Parque Villa Lobos em São Paulo, SP. Foto tirada em 2016.

Analisando o gráfico dessa pesquisa, é possível perceber que o número de pessoas sedentárias é alto em comparação ao número de pessoas que praticam atividade física. Isso pode ser preocupante, pois estudos mostram que a prática regular de atividade física, aliada a bons hábitos alimentares, pode contribuir para melhorar a qualidade de vida e auxiliar na prevenção de diversos problemas de saúde, como diabetes, aumento da pressão arterial, infarto do miocárdio, entre outros.

Responda às questões no caderno.

1. **Você costuma praticar alguma atividade física? Com que frequência?**

2. **Faça uma pesquisa com um grupo de alunos da sua escola para saber a atividade física preferida deles e a frequência com que costumam praticá-la. Para facilitar a coleta de dados, é interessante listar algumas atividades e solicitar aos entrevistados que escolham apenas uma opção. Segue um exemplo para organizar os dados coletados:**

Atividade física preferida dos alunos

Atividade física	Basquetebol	Futebol	Natação	Voleibol	Handebol	Outros
Quantos dias na semana						
Número de alunos						

3. **Quantos alunos foram entrevistados?**

4. **Construa um gráfico de setores para representar a atividade preferida desses alunos.**

a) Qual atividade física recebeu menos votos?

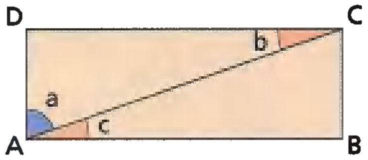
b) Qual atividade física recebeu mais votos? Qual a cor do setor que corresponde a essa atividade física?

5. **Construa um gráfico de setores para representar quantos dias na semana os alunos praticam cada tipo de atividade física.**

RETOMANDO O QUE APRENDEU

Responda às questões no caderno.

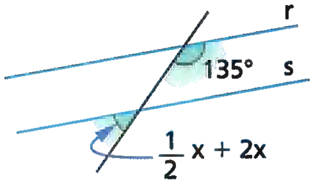
1. A figura a seguir é um retângulo no qual foi traçada a diagonal $\overline{AC}$.



Se b vale 32°, então a vale:

a) 58° **c)** 68° **e)** 60°
b) 48° **d)** 56°

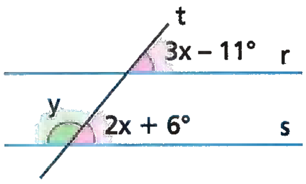
2. Na figura a seguir, temos que r e s são paralelas.



Determine qual é o valor de x:

a) 12° **c)** 16° **e)** 22°
b) 15° **d)** 18°

3. As retas r e s da figura são paralelas cortadas pela reta transversal t.

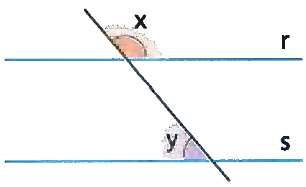


Nessas condições, y mede:

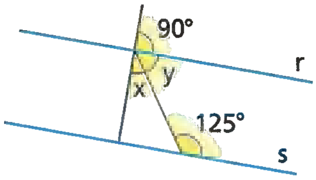
a) 120° **c)** 140° **e)** 152°
b) 135° **d)** 144°

4. Na figura a seguir, temos que r // s e $x = 3y$. Então, $x - y$ vale:

a) 90°
b) 85°
c) 80°
d) 75°
e) 60°

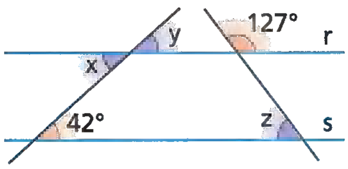


5. Com base na figura a seguir, calcule o valor de $y - x$, sabendo que r e s são retas paralelas.



a) 8° **c)** 16° **e)** 20°
b) 12° **d)** 18°

6. Na figura a seguir, sendo r // s, $x + y + z$ valem:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

a) 127° **c)** 137°
b) 131° **d)** 141°

7. Dois ângulos são congruentes e suas medidas são expressas por $7x + 31°$ e $9x - 43°$. Isso significa que o valor de x é:

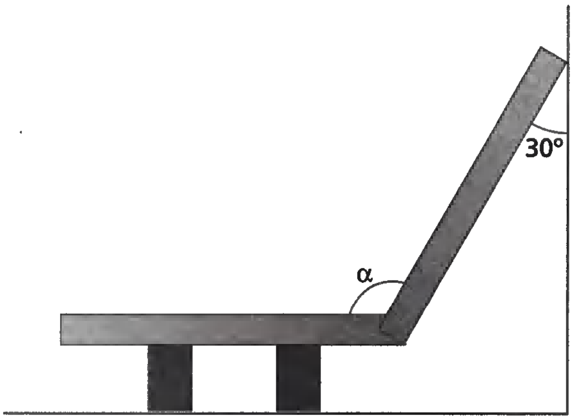
a) 35° **d)** 38°
b) 36° **e)** 39°
c) 37°

8. Dois ângulos são adjacentes suplementares e suas medidas são expressas por $5x$ e $2x + 68°$. O maior desses dois ângulos mede:

a) 80° **d)** 100°
b) 85° **e)** 110°
c) 92°

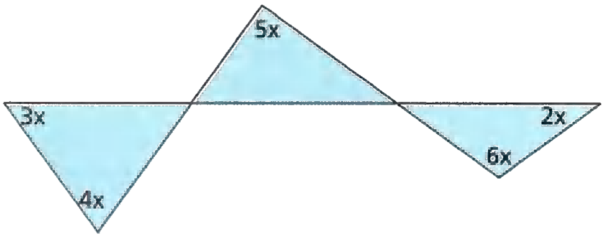
9. (Fatec-SP) O dobro da medida do complemento de um ângulo aumentado de 40° é igual à medida do seu complemento. Qual a medida do ângulo?

10. (Saresp-SP) O encosto da última poltrona de um ônibus, quando totalmente reclinado, forma um ângulo de 30° com a parede do ônibus (veja a figura a seguir). O ângulo α na figura mostra o maior valor que o encosto pode reclinar.



a) 50° **b)** 90° **c)** 100° **d)** 120°

11. (OBM) Na figura, quanto vale *x*?



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

O valor de *x* é:

a) 6° **b)** 12° **c)** 18° **d)** 20° **e)** 24°

UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, estudamos ângulos, retomamos o uso do transferidor e estudamos o que são ângulos adjacentes, ângulos opostos pelo vértice, ângulos complementares e ângulos suplementares.

Nas atividades que envolveram a reta transversal, estudamos os ângulos correspondentes e os ângulos adjacentes suplementares para retas transversais que cortam duas retas paralelas ou não.

Estudamos, ainda, ângulos internos e externos de triângulos, polígonos regulares e circunferência.

Agora, vamos refletir sobre as aprendizagens adquiridas nesta Unidade. Responda às questões no caderno.

- Quando dois ângulos são complementares? E suplementares?
- Quando três segmentos de retas de medidas *a*, *b* e *c* formam um triângulo?
- Qual é a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer?
- Como podemos calcular a medida de um ângulo interno de um polígono regular?

ATUALIDADES EM FOCO

Direitos dos idosos

O que é envelhecimento humano?

O envelhecimento humano é um processo biológico, psicológico, social e cultural. Envelhecer é uma conquista e essa fase deve ser vista com respeito.

Estima-se que a população idosa no mundo em 2025 será de 1 bilhão e 120 milhões de pessoas, das quais 72% estarão nos países em desenvolvimento, como o Brasil. O Japão é o país onde se vive por mais tempo, cerca de 83 anos.

A cada dia, em todo o mundo, o número de pessoas que chegam aos 60 anos aumenta. Segundo o IBGE, no Brasil, a expectativa de vida era de 75,8 anos em 2016, e isso significa que cada vez mais estamos convivendo com pessoas de várias gerações e que precisamos aprender a respeitar as diferenças.

O tempo de vida de uma pessoa está ligado a diversos fatores como genética, hábitos alimentares durante toda a sua vida, condições sanitárias individuais e coletivas, cultura, classe social a que pertence, hábito de praticar atividade física, entre outros.

Casal de idosos passeando na praia em Cabedelo, PB. Foto tirada em 2016.

KLEBER CORDEIRO/SHUTTERSTOCK.COM

Você conhece o Estatuto do Idoso?

O Estatuto do Idoso regulamenta os direitos assegurados a todas as pessoas do país que têm idade igual ou superior a 60 anos. De acordo com o Estatuto, quando internada ou em estado de observação, a pessoa idosa tem direito a um acompanhante em tempo integral, independentemente de ser um parente ou não. O acompanhante da pessoa idosa tem direito a condições adequadas para a permanência em tempo integral, segundo critério médico.

De acordo com as informações apresentadas, responda às questões a seguir.

1. Em sua opinião, é importante existirem leis que asseguram os direitos dos idosos? Justifique sua resposta.

2. Você já viu alguma das placas de sinalização a seguir? Você acha que elas são importantes? Por quê?

MICEKING/SHUTTERSTOCK.COM

Placa de estacionamento reservado para idosos.

ROGÉRIO REIS/PULSAR IMAGENS

Placa de trânsito indicando estacionamento exclusivo para idosos.

CARLA NICHIATA/SHUTTERSTOCK.COM

Placa de atendimento preferencial.

ALEXANDRE TOKITAKA/PULSAR IMAGENS

Placa de assento preferencial.

- Você sabia que as pessoas com mais de 60 anos têm direito a utilizar o transporte público de forma gratuita?

3. Você conhece outros direitos dos idosos? Se sim, quais?

4. Faça uma pesquisa sobre a expectativa de vida nos estados brasileiros e depois responda:

a) Qual dos estados apresenta maior expectativa de vida?

b) Qual é a expectativa de vida no estado onde você mora?

c) Existe diferença entre expectativa de vida entre homens e mulheres? Por quê?

5. Reúna-se com um colega e, juntos, criem uma cartilha com informações que ajudem a sensibilizar a população sobre a importância de respeitar os direitos dos idosos. Se possível, distribua alguns exemplares para os colegas de outras turmas ou para pessoas da comunidade em que vive.

7 GRANDEZAS PROPORCIONAIS

Veja as imagens ao lado. Cada uma delas mostra uma etapa da produção artesanal de vasos de cerâmica. A sequência de fotos apresenta o processo artesanal que é feito por um ceramista (oleiro), ou seja, a fabricação é feita peça a peça, usando um único torno.

MARCO ANTÔNIO SÁ/PULSAR IMAGENS

Responda às questões no caderno.

- O que você poderia dizer sobre as características dessa produção?
- Quais fatores você acredita que podem influenciar a quantidade de vasos produzidos por dia nesse processo?
- O que pode acontecer com a quantidade de vasos produzidos se aumentarmos a quantidade de pessoas na produção?
- Considerando que uma pessoa faça 10 vasos por dia, em quanto tempo duas pessoas, trabalhando no mesmo ritmo da primeira, farão os mesmos 10 vasos?

IRENA PEZIENE/SHUTTERSTOCK.COM

A produção artesanal de vasos de barro

DINODIA PHOTO LIBRARY/GLOW IMAGES

A fabricação manual de vasos é tradição em muitos lugares no Brasil. E nesses locais se mantêm os mesmos equipamentos há séculos, como a roda girada com os pés, conhecida como torno.

UGO RATTI/TIPS IMAGES/GLOW IMAGES

1 A massa de barro é lançada no prato que está ligado ao torno por um eixo, e a velocidade é definida pelo oleiro — como é chamado o artesão.

UGO RATTI/TIPS IMAGES/GLOW IMAGES

2 O vaso toma forma com a habilidade do oleiro.

UGO RATTI/TIPS IMAGES/GLOW IMAGES

3 Com a forma já quase concluída, o artesão diminui o ritmo de rotação do torno e, ao finalizar, retira o prato com o vaso e coloca o vaso para secar.

BENONIAS CARDOSO/FOLHAPRESS

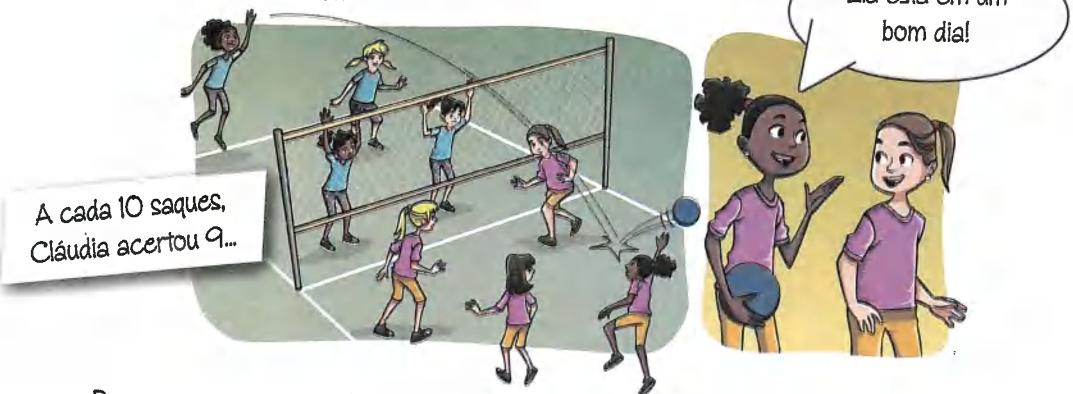
4 Por fim, em um dia de trabalho, o oleiro pode ter feito muitos vasos.

LESHA/SHUTTERSTOCK

CAPÍTULO 1 RAZÃO

Considere as situações a seguir.

1 No treino de vôlei.

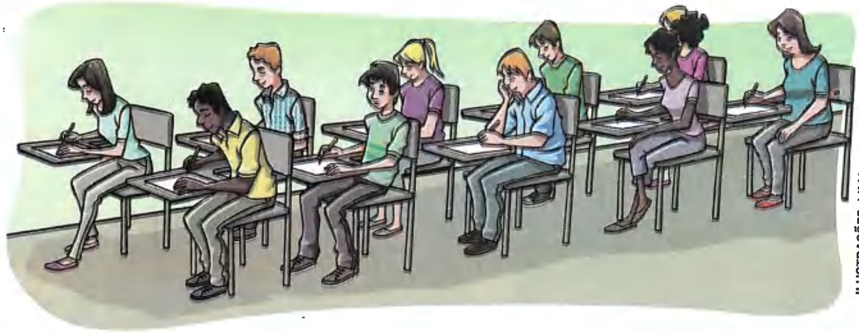


Para comparar o número de saques que deram certo com o total de saques de Cláudia, podemos usar uma fração:

$$\frac{\text{número de saques certos}}{\text{total de saques}} = \frac{9}{10}$$

Nesse caso, o número obtido mostra o rendimento de Cláudia nos saques.

2 Em um concurso, 240 candidatos disputam 120 vagas.



ILUSTRAÇÕES: LIMA

Vamos comparar esses dois números.

- Dividindo o número de candidatos pelo número de vagas:

$240 : 120 = \frac{240}{120} = \frac{2}{1}$ → **dizemos que há 2 candidatos para cada vaga ou que a razão entre o número de candidatos e o número de vagas é de 2 para 1**

ou

- Dividindo o número de vagas pelo número de candidatos:

$120 : 240 = \frac{120}{240} = \frac{1}{2}$ → **dizemos que para cada vaga há 2 candidatos ou que a razão entre o número de vagas e o número de candidatos é de 1 para 2**

Nas duas situações apresentadas, comparamos dois números usando uma divisão. O quociente obtido é a **razão** entre esses dois números, tomados na ordem considerada.

Sendo *a* e *b* dois números racionais, com $b \neq 0$, denomina-se **razão entre *a* e *b*** ou **razão de *a* para *b*** o quociente $\frac{a}{b}$ ou a : b.

A razão $\frac{a}{b}$ ou a : b pode ser lida de uma das seguintes maneiras:

razão de *a* para *b* ou ***a* está para *b*** ou ***a* para *b***.

Os termos de uma razão recebem nomes especiais: o primeiro número chama-se antecedente e o segundo número, consequente.

$$\frac{a}{b} \quad \begin{matrix} a \to \text{antecedente} \\ b \to \text{consequente} \end{matrix} \qquad \text{ou} \qquad a : b \quad \begin{matrix} a \to \text{antecedente} \\ b \to \text{consequente} \end{matrix}$$

PENSE E RESPONDA

Responda às questões no caderno.

1. O pudim de tapioca é um doce típico do Nordeste brasileiro e simples de fazer. Para um rendimento de 20 porções, a lista e a quantidade de ingredientes é a seguinte:

- 500 g de farinha de tapioca
- 1 vidro de leite de coco
- 2 pacotes de coco ralado
- 1 litro de leite
- 2 xícaras (chá) de açúcar

MARIA DO CARMO/FOLHAPRESS

Pudim de tapioca.

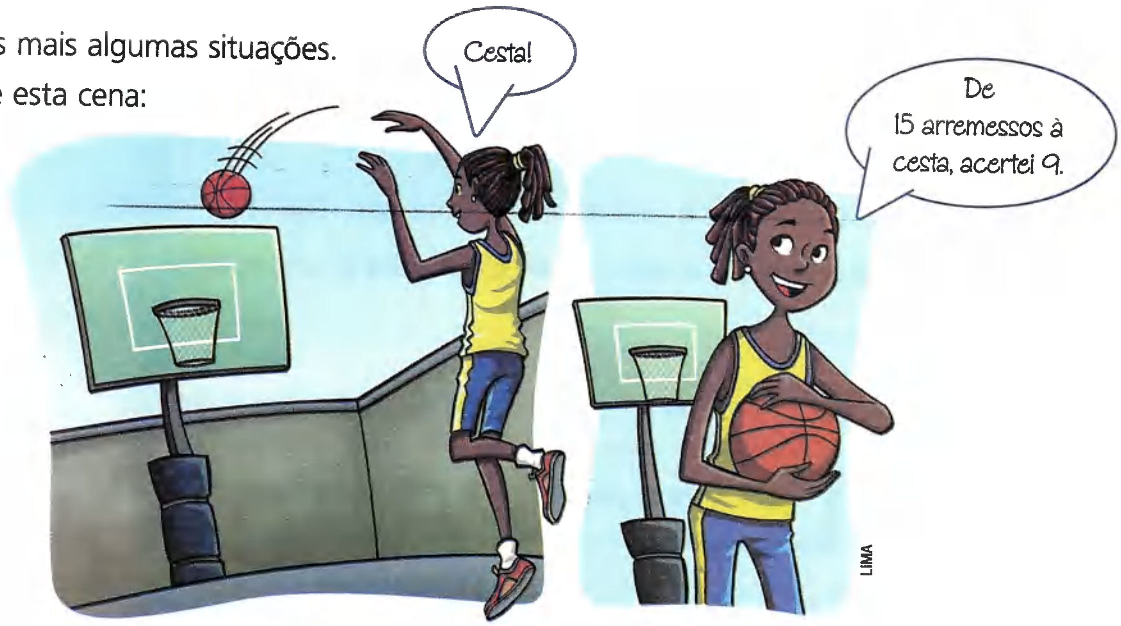
a) Para um rendimento de 40 porções, qual é a quantidade necessária de:
- farinha de tapioca?
- leite de coco?
- coco ralado?
- açúcar?

b) Se uma pessoa tem 1,5 kg (ou 1 500 g) de farinha de tapioca e quiser aproveitar tudo para fazer o pudim de tapioca, quantas porções ela vai obter?

c) Para ter um rendimento de 10 porções do pudim de tapioca, quantos gramas de farinha de tapioca serão necessários?

Vejamos mais algumas situações.

1 Observe esta cena:



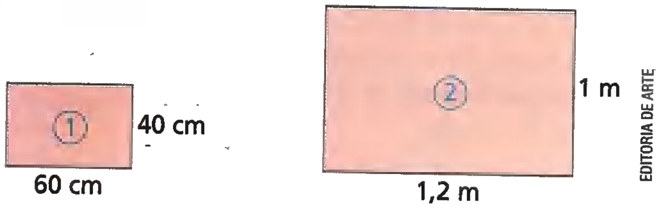
Qual é a razão entre o número de acertos e o número total de arremessos à cesta feitos por Susan?

acertos

$$9 : 15 = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \longrightarrow$$ **3 para 5, ou seja, para cada 5 arremessos à cesta, Susan acertou 3**

total

2 Qual é a razão entre a área da região retangular ① e a área da região retangular ②?



Para calcular a razão, devemos expressar as medidas na mesma unidade, ou seja:

$$\boxed{\begin{array}{c} 1 \text{ m} = 100 \text{ cm} \\ 1{,}2 \text{ m} = 120 \text{ cm} \end{array}}$$

Vamos, agora, calcular a área de cada região retangular:

$A_{①} = 60 \text{ cm} \times 40 \text{ cm} = 2\,400 \text{ cm}^2$

$A_{②} = 120 \text{ cm} \times 100 \text{ cm} = 12\,000 \text{ cm}^2$

Razão: $\frac{A_{①}}{A_{②}} = \frac{2\,400}{12\,000} = \frac{1}{5} \longrightarrow$ **1 para 5, ou seja, a área do retângulo ② equivale a cinco vezes a área do retângulo ①**

A razão entre duas grandezas de mesma espécie é o quociente dos números que exprimem as suas medidas, sempre tomadas na mesma unidade.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Em 2018, 800 pessoas participaram da Semana Cultural do Bairro. Em 2019, o número de participantes foi 960, no mesmo evento. Qual é a razão entre o número de participantes de 2019 e o número de participantes de 2018?

2. Determinado modelo de avião tem 80 metros de envergadura por 72 metros de comprimento. Calcule a razão entre o comprimento e a envergadura desse tipo de avião.

ASMITHERS/GETTY IMAGES

Air bus 380 decolando.

(Lembre-se de que a envergadura é a dimensão máxima transversal de uma ponta a outra das asas de um avião.)

3. A tabela a seguir mostra o número de alunos matriculados nos períodos da manhã, tarde e noite em uma escola de natação.

Número de alunos

Quantidade \ Período	Manhã	Tarde	Noite
Meninos	15	16	14
Meninas	21	20	25

Fonte: Dados fictícios.

Calcule a razão entre o número de meninos e o número de meninas:

a) da manhã.

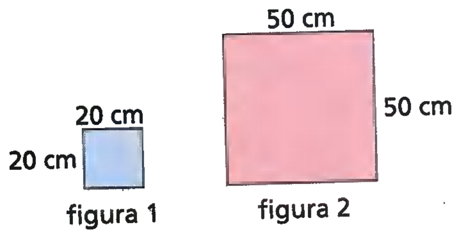
b) da tarde.

c) da noite.

d) dos três períodos.

4. São dadas as medidas 4 cm e 80 km. Qual é a razão entre a menor e a maior dessas medidas?

5. Gláucia recortou dois pedaços de cartolina, de formato quadrado:



EDITORIA DE ARTE

De acordo com as figuras, determine a razão entre:

a) a medida do lado do quadrado na figura 1 e a medida do lado do quadrado na figura 2.

b) o perímetro do quadrado na figura 1 e o perímetro do quadrado na figura 2.

c) a área do quadrado na figura 1 e a área do quadrado na figura 2.

Agora, compare as razões obtidas nos itens anteriores. O que você observa?

6. Quando colocadas em uma balança, uma caixa *A* pesou 800 g, e uma caixa *B* registrou 2 kg. Qual é a razão entre o valor obtido na pesagem da caixa *A* e o da caixa *B*? (Não se esqueça de transformar as medidas dadas para uma mesma unidade.)

Considere a seguinte situação:

1 Para esculpir uma obra de arte em bronze, um escultor fundiu 23 kg de cobre com 2 kg de estanho. Vamos calcular o teor de cada metal nessa liga de bronze.
A massa total do material é igual à soma das massas dos metais que compõem a liga. Logo:

$$\text{massa total} = 23\text{ kg} + 2\text{ kg} = 25\text{ kg}$$

Nos 25 kg de bronze, temos 23 kg de cobre, o que nos dá a razão de 23 para 25. Essa razão pode ser escrita na forma percentual:

$$\frac{23}{25} = 0{,}92 = \frac{92}{100} = 92\%$$

Nos 25 kg de bronze, temos 2 kg de estanho, o que nos dá a razão de 2 para 25. Representando na forma percentual, temos:

$$\frac{2}{25} = 0{,}08 = \frac{8}{100} = 8\%$$

Essas informações caracterizam, respectivamente, os teores de cobre e de estanho na liga metálica de bronze.

Teor de cobre: 92% **Teor de estanho: 8%**

Veja agora dois casos de como podemos representar uma razão $\frac{a}{b}$ na forma percentual.

1º caso: O consequente *b* é um fator natural de 100.

- $\frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 50\%$ ($\times 50$) — **razão equivalente de consequente igual a 100**

- $\frac{4}{5} = \frac{80}{100} = 80\%$ ($\times 20$) — **razão equivalente de consequente igual a 100**

2º caso: O consequente *b* não é um fator natural de 100.

- $\frac{3}{8} = \underbrace{0{,}375}_{\text{forma decimal de } \frac{3}{8}} = \frac{0{,}375 \cdot 100}{100} = \frac{37{,}5}{100} = 37{,}5\%$

- $\frac{7}{12} \simeq \underbrace{0{,}583}_{\text{forma decimal aproximada de } \frac{7}{12}} = \frac{0{,}583 \cdot 100}{100} = \frac{58{,}3}{100} = 58{,}3\%$

Uma razão escrita na forma percentual pode ser representada também na forma fracionária e na forma decimal. Veja:

- $35\% = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ → **forma fracionária**
- $160\% = \frac{160}{100} = \frac{8}{5}$ → **forma fracionária**
- $35\% = \frac{35}{100} = 0{,}35$ → **forma decimal**
- $160 = \frac{160}{100} = 1{,}60$ → **forma decimal**

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Expresse nas formas decimal e percentual cada uma das seguintes razões:

a) $\frac{63}{100}$ **c)** $\frac{7}{50}$

b) $\frac{11,2}{100}$ **d)** $\frac{11}{16}$

2. Os números seguintes estão escritos na forma decimal; escreva-os na forma percentual.

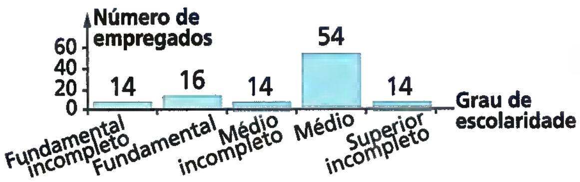
a) 0,42 **d)** 0,015
b) 0,08 **e)** 0,1125
c) 0,225 **f)** 0,007

3. Em um dia de verão foram coletados em uma praia 600 kg de lixo. Desse total, 450 kg eram itens de plástico. A quantidade de itens de plástico representa quantos por cento do total de lixo recolhido na praia?

4. Em um campeonato de futsal, uma equipe acumulou 26 pontos dos 80 disputados. Qual foi o aproveitamento desse time? Represente na forma percentual.

5. O gráfico seguinte mostra o grau de escolaridade dos 112 empregados de uma empresa:

Escolaridade dos empregados

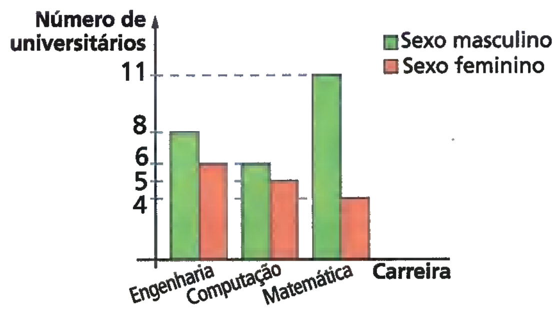


Fonte: Dados fictícios.

De acordo com esses dados, quantos por cento dos empregados dessa empresa concluíram o Ensino Médio?

6. Uma empresa aceitou inscrições de estudantes universitários para estagiar em seu setor técnico. O gráfico apresenta as carreiras dos universitários inscritos, por sexo.

Candidatos ao estágio (por carreira)



GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

Fonte: Dados fictícios.

Observe o gráfico anterior e responda:

a) Quantos universitários se inscreveram para fazer estágio?

b) O número de universitários que escolheram a carreira de Matemática representa quantos por cento do total de inscritos?

7. Observe, na tabela seguinte, o desempenho de Fernando em uma avaliação.

Resultado por componente curricular

Componente curricular	Número de questões propostas	Número de questões respondidas corretamente
Língua Portuguesa	40	34
Matemática	25	20
Física	15	9
Biologia	20	15

Fonte: Dados fictícios.

a) De quantos por cento foi o aproveitamento de Fernando em cada componente curricular?

b) Em qual componente curricular o candidato teve:

- melhor desempenho?
- pior desempenho?

CAPÍTULO 2

PROPORÇÃO

Acompanhe a situação.

A Organização Mundial da Saúde (OMS), órgão da ONU que trata dos temas ligados à saúde, recomenda **1 médico** para cada grupo de **1000 habitantes**. Nessas condições, quantos médicos deveria ter uma cidade com 50000 habitantes?

De acordo com a situação apresentada, organizamos a tabela:

Médicos por habitantes

Nº de habitantes	Nº de médicos
1000	1
2000	2
3000	3
4000	4
5000	5
6000	6
⋮	⋮
10000	10
⋮	⋮
50000	50

Fonte: Organização Mundial da Saúde (OMS).

razão entre o número de médicos e o número de habitantes: $\frac{1}{1000}$

razão entre o número de médicos e o número de habitantes: $\frac{50}{50\,000} = \frac{1}{1\,000}$

De acordo com a OMS, a cidade deveria ter 50 médicos.

Observe que as razões $\frac{1}{1000}$ e $\frac{50}{50000}$ são iguais.

Uma sentença matemática que expressa uma igualdade entre duas razões é chamada **proporção**.

> Proporção é uma igualdade entre duas razões.

Então, a sentença $\frac{1}{1000} = \frac{50}{50\,000}$ é uma proporção.

Note que essas razões são dadas por frações equivalentes.

PENSE E RESPONDA

Responda às questões no caderno.

1. Um posto de combustíveis oferece um desconto aos clientes de R$ 1,00 para cada 10 litros abastecidos com gasolina.

Litros	Desconto (em reais)
10	1
20	2
30	3
⋮	⋮


PHOTODISC/GETTY IMAGES

Bombas de combustíveis.

a) Relacione o desconto para cada 10 litros até alcançar 100 litros.

b) De quantos reais será o desconto para:

- 40 litros?
- 60 litros?
- 90 litros?

c) Um desconto de R$ 10,00 corresponde a quantos litros de gasolina?

d) Para 420 litros de gasolina, de quanto será o desconto?

e) Escreva todas as razões que podem ser estabelecidas a partir do quadro elaborado, ou seja:

- desconto de 1 real para 10 litros $\longrightarrow \frac{1}{10}$
- desconto de 2 reais para 20 litros $\longrightarrow \frac{2}{10}$
- desconto de 3 reais para 30 litros $\longrightarrow \frac{3}{30}$

E assim por diante.

f) Comparando as 10 razões obtidas, a que conclusão você pode chegar?

Considere, agora, os números 6, 9, 12 e 18. Nessa ordem, temos:

- A razão do 1º para o 2º: $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
- A razão do 3º para o 4º: $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

Observe que a razão do primeiro para o segundo é igual à razão do terceiro para o quarto.

Assim, podemos escrever:

$$6 : 9 = 12 : 18 \text{ ou } \frac{6}{9} = \frac{12}{18}$$

Nesse caso, dizemos que os números 6, 9, 12 e 18, nessa ordem, formam uma proporção.

Quatro números racionais *a*, *b*, *c* e *d*, diferentes de zero, tomados nessa ordem, formam uma proporção quando: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ou a : b = c : d.

Lê-se: *a* está para *b*, assim como *c* está para *d*.

Dessa forma, no exemplo dado, lemos: 6 está para 9, assim como 12 está para 18.

Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos:

- Os números *a*, *b*, *c* e *d* são denominados **termos** da proporção.
- O primeiro e o quarto termos são denominados **extremos**, enquanto o segundo e o terceiro são denominados **meios**.

$$\overbrace{a : \underbrace{b = c}_{\text{meios}} : d}^{\text{extremos}}$$

$$\frac{\overset{\text{extremo}}{a}}{\underset{\text{meio}}{b}} = \frac{\overset{\text{meio}}{c}}{\underset{\text{extremo}}{d}}$$

- Na proporção $\frac{1}{1000} = \frac{50}{50\,000}$, temos:

extremos: 1 e 50 000

meios: 1 000 e 50

- Na proporção $\frac{6}{9} = \frac{12}{18}$, temos:

extremos: 6 e 18

meios: 9 e 12

Propriedade fundamental das proporções

Voltando à proporção $\frac{1}{1000} = \frac{50}{50\,000}$, temos:

- produto dos extremos: $1 \cdot 50\,000 = 50\,000$
- produto dos meios: $1\,000 \cdot 50 = 50\,000$

$1 \cdot 50\,000 = 1\,000 \cdot 50$

Como vemos, nessa proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Vamos, agora, considerar a proporção $\frac{6}{9} = \frac{12}{18}$, na qual temos:

- produto dos extremos: $6 \cdot 18 = 108$
- produto dos meios: $9 \cdot 12 = 108$

$6 \cdot 18 = 9 \cdot 12$

Também, nessa proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Esse fato se repetirá sempre que tivermos uma proporção, que é conhecida como a **propriedade fundamental das proporções**:

> De modo geral, em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.
>
> $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \underbrace{a \cdot d}_{\text{produto dos extremos}} = \underbrace{b \cdot c}_{\text{produto dos meios}}$$

Veja algumas situações em que podemos aplicar a propriedade fundamental das proporções.

1 Usando a propriedade fundamental, verificar se os números 3, 7, 12 e 28 formam, nessa ordem, uma proporção.

Se considerarmos o primeiro e o quarto dos números (3 e 28) como extremos e o segundo e o terceiro números (7 e 12) como meios, temos:

- produto dos extremos: $3 \cdot 28 = 84$
- produto dos meios: $7 \cdot 12 = 84$

$$3 \cdot 28 = 7 \cdot 12 \Rightarrow \frac{3}{7} = \frac{12}{28}$$

Como o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, os números 3, 7, 12 e 28 formam, nessa ordem, uma proporção.

2 Sabendo que os números 6, 24, 5 e *x* formam, nessa ordem, uma proporção, determinar o valor de *x*.

$\frac{6}{24} = \frac{5}{x}$ → **os números 6, 24, 5 e *x*, nessa ordem, formam uma proporção**

$6x = 5 \cdot 24$ → **aplicando a propriedade fundamental das proporções**

$6x = 120$

$x = \frac{120}{6}$

O valor de *x* é 20.

3 Qual é o valor de *x* na igualdade $\frac{x + 1}{x - 2} = \frac{1}{2}$, com $x \neq 2$?

Na igualdade, temos:

- extremos: $x + 1$ e 2
- meios: $x - 2$ e 1

$\frac{x + 1}{x - 2} = \frac{1}{2}$

$2 \cdot (x + 1) = 1 \cdot (x - 2)$ → **aplicando a propriedade fundamental das proporções**

$2x + 2 = x - 2$

$2x - x = -2 - 2$

$x = -4$

O valor de *x* (raiz da equação) é -4.

4 Na Escola do Bairro, para cada 4 meninas há 5 meninos estudando. Se há 580 meninos matriculados, quantos alunos estudam na Escola do Bairro?

Se representarmos por *x* o número de meninas, podemos formar a proporção:

$\frac{4}{5} = \frac{x}{580}$

$5 \cdot x = 4 \cdot 580$ → **aplicando a propriedade fundamental das proporções**

$5x = 2\,320$

$x = \frac{2\,320}{5}$

$x = 464$ → **número de meninas que estudam na Escola do Bairro**

$464 + 580 = 1\,044$ → **total de alunos**

Na Escola do Bairro, estudam 1 044 alunos.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. São dados, em cada item, quatro números em uma determinada ordem. Use a propriedade fundamental das proporções e verifique se esses números, na ordem dada, formam uma proporção:

a) 8; 20; 32; 80
b) 150; 50; 12; 4
c) 1,2; 6; 7,2; 36
d) 5; 6; 1,5; 2,4

2. Os números *x*; 10,5; 24 e 15 formam, nessa ordem, uma proporção.

a) Qual é o valor do número *x*?
b) Elabore um problema cuja resolução envolva essa proporção.

3. Calcule o valor de *x* em cada uma das proporções:

a) $\frac{x}{3} = \frac{8}{12}$
b) $\frac{2{,}1}{7} = \frac{x}{10}$
c) $\frac{2}{15} = \frac{3}{2x}$
d) $\frac{x+6}{x-6} = \frac{2}{3}$
e) $\frac{1}{5} = \frac{x-6}{x+1{,}5}$
f) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{x}$

4. São dadas as igualdades:

$\boxed{\frac{x+1}{5} = \frac{2x+6}{15}}$ $\boxed{\frac{3y-10}{5y+2} = \frac{10}{5}}$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções, calcule o valor de x + y.

5. Sabendo que $\frac{2}{x+5} = 4$, calcule o valor de $\frac{3}{x+6}$.

6. Os números dados formam, nessa ordem, uma proporção. Determine o valor de x · y.

- 8, 20, 40, *x*
- 1,8; 0,6; 2,4; *y*

7. Em uma pequena comunidade constatou-se que, de cada 7 crianças, 2 possuíam olhos azuis. Sabendo que na comunidade havia 91 crianças, quantas possuíam olhos azuis?

8. Em determinada hora do dia, a razão entre a altura de um bastão, fixado verticalmente no chão, e a sombra que ele projeta é de 5 para 3. Se a sombra mede 72 cm, qual é a altura desse bastão em metros?


DANI MOTA

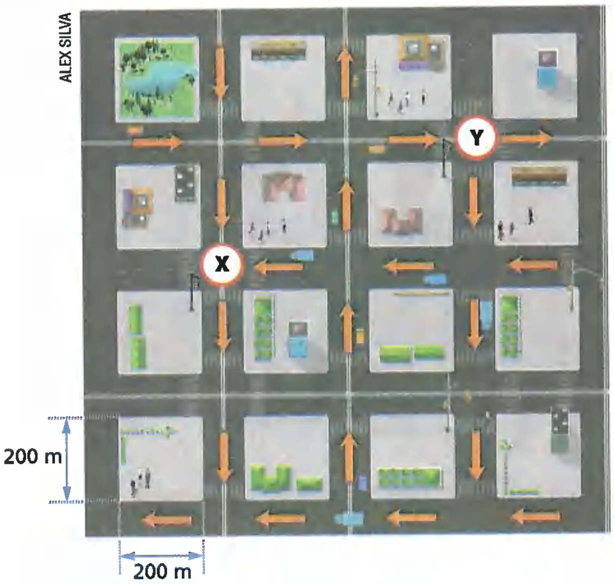
9. Uma pesquisa mostrou que na cidade *X* existe 1 médico para cada grupo de 1 600 habitantes. Se nessa cidade *X* há 30 médicos, quantos habitantes tem essa cidade?

10. Para fazer um refresco, mistura-se suco concentrado com água na razão de 3 para 5. Nessas condições, 9 copos de suco concentrado devem ser misturados a quantos copos de água?


MARCOS MACHADO

11. O desenho representa o esquema de um bairro de uma cidade que está sendo planejado. As flechas indicam o sentido das mãos do tráfego e cada quadra é um terreno quadrado onde cada lado mede 200 metros.

ALEX SILVA



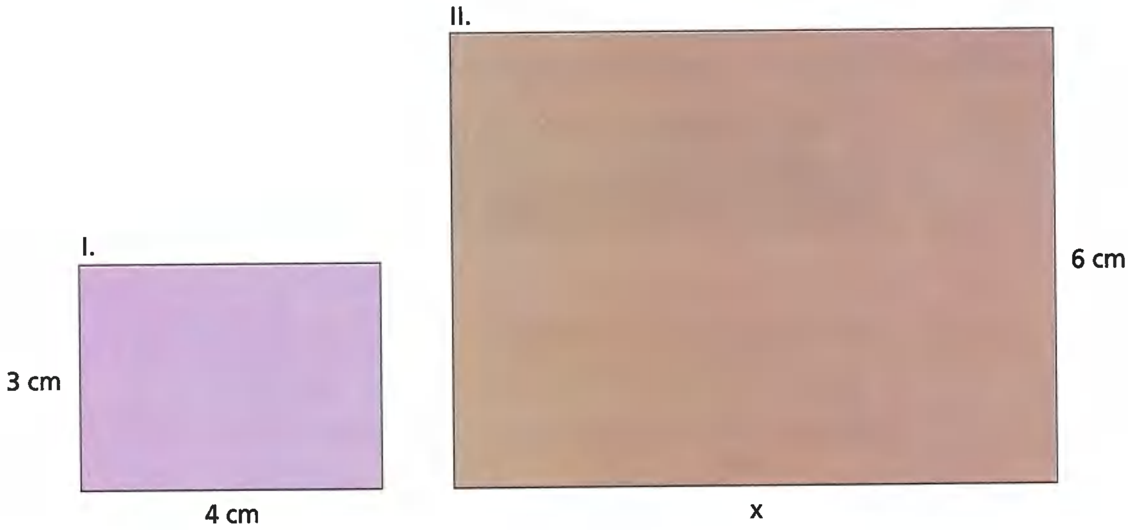
Considerando que tempo gasto = $= \dfrac{\text{distância percorrida}}{\text{velocidade média}}$, desconsiderando a largura das ruas, sabe-se que um ônibus demora, em média, 0,025 horas para ir, pelo caminho mais curto possível, do ponto *x* até o ponto *y*. De acordo com os dados, qual é a velocidade média do ônibus em km/h?

12. Em uma receita de bolo, são necessários 2 ovos para cada 0,5 kg de farinha utilizada. Quantos ovos serão necessários para 2 kg de farinha?

DAYANE RAVEN

DESAFIO

13. Observe os dois retângulos a seguir:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Sabendo que a razão entre as bases dos retângulos é igual à razão entre suas alturas, calcule:

a) a medida da base do retângulo II.

b) as áreas dos retângulos I e II em metros.

c) a razão entre as áreas dos retângulos. O que podemos concluir?

Números diretamente proporcionais

PENSE E RESPONDA

Responda às questões no caderno.

1. Em cada uma das cenas aparecem pessoas chegando em um chá de bebê. Cada pessoa convidada levou dois pacotes de fraldas. Observe:

ESTÚDIO ORNITORRINCO

a) É correto afirmar que, quanto maior for o número de pessoas no chá de bebê, maior será o número de pacotes de fraldas?

b) Chegaram 6 convidados. Quantos pacotes de fraldas eles levaram?

c) Se tivesse chegado o dobro de convidados, quantos pacotes de fraldas levariam? Comparando com a quantidade do item anterior, o que aconteceu?

Considere a situação a seguir:

1 Uma torneira é aberta para encher um reservatório. De tempos em tempos, a altura da água no reservatório é medida, e os resultados dessas medições encontram-se na tabela a seguir.

Enchendo um reservatório de água

Tempo (em min)	Altura da água (em cm)
10	12
15	18
20	24
25	30
30	36

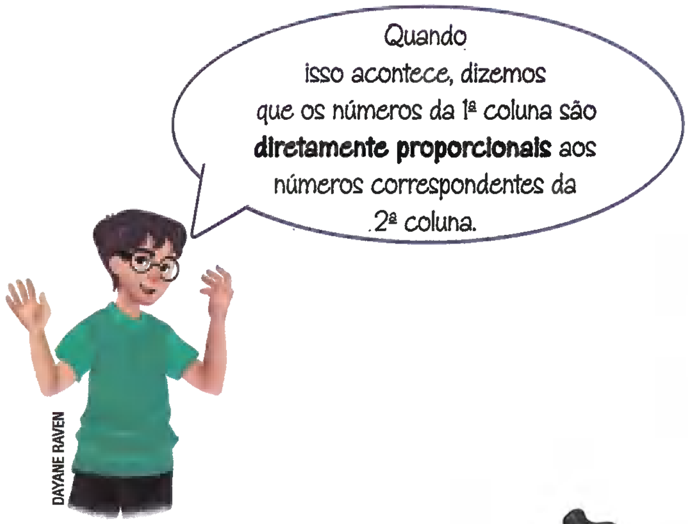
Fonte: Dados fictícios.

Vamos observar o que ocorre quando consideramos a razão entre um número da 1ª coluna e o seu correspondente na 2ª coluna da tabela:

$\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ $\frac{15}{18} = \frac{5}{6}$ $\frac{20}{24} = \frac{5}{6}$ $\frac{25}{30} = \frac{5}{6}$ $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$

Observe que todas essas razões são iguais:

$$\frac{10}{12} = \frac{15}{18} = \frac{20}{24} = \frac{25}{30} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$



Os números racionais *x*, *y* e *z* são **diretamente proporcionais** aos números racionais *a*, *b* e *c*, quando se tem: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

Veja alguns exemplos:

1 Os números 6, *x* e *y* são diretamente proporcionais aos números 4, 8 e 20. Nessas condições, vamos determinar os valores de *x* e *y*.

Para que 6, *x* e *y* sejam diretamente proporcionais a 4, 8 e 20, devemos ter:

$$\frac{6}{4} = \frac{x}{8} = \frac{y}{20}$$

Daí, temos:

- $\frac{6}{4} = \frac{x}{8} \Rightarrow 4x = 48 \Rightarrow x = \frac{48}{4} \Rightarrow$
  $\Rightarrow x = 12$
- $\frac{6}{4} = \frac{y}{20} \Rightarrow 4y = 120 \Rightarrow y = \frac{120}{4} \Rightarrow$
  $\Rightarrow y = 30$

Assim, x = 12 e y = 30.

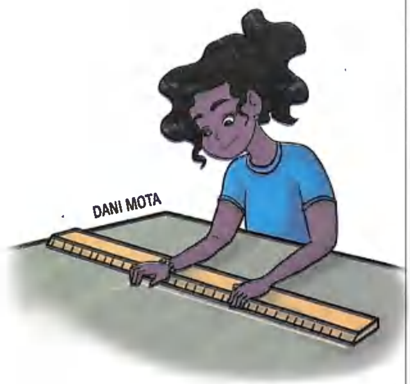
2 Um barbante com 200 cm de comprimento é dividido em três partes com comprimentos diretamente proporcionais aos números 3, 5 e 2. Qual o comprimento de cada pedaço?

Vamos representar os comprimentos dos pedaços por *a*, *b* e *c*, tais que:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{2} = x$$

Podemos escrever:

- $\frac{a}{3} = x \Rightarrow a = 3x$
- $\frac{b}{5} = x \Rightarrow b = 5x$
- $\frac{c}{2} = x \Rightarrow c = 2x$



Como a soma das três partes deve totalizar 200, temos:

$$\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 200 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 3x & + & 5x & + & 2x & = & 200 \end{array}$$

$$10x = 200 \Rightarrow x = \frac{200}{10} \Rightarrow x = 20$$

As partes procuradas são:

$$\begin{cases} a = 3x = 3 \cdot (20) = 60 \\ b = 5x = 5 \cdot (20) = 100 \\ c = 2x = 2 \cdot (20) = 40 \\ 60 + 100 + 40 = 200 \end{cases}$$

Os comprimentos dos pedaços de barbante são 60 cm, 100 cm e 40 cm.

SAIBA QUE

Precisão é o grau de variação de resultados de uma medição. Todo instrumento de medida tem um grau de precisão (maior ou menor, dependendo do tipo e de quem efetua a medida). Por isso, as medidas que realizamos são sempre aproximações da medida exata.

Grandezas diretamente proporcionais

Considere a seguinte situação:

Jaime trabalha organizando churrascos e a quantidade de carne, em quilogramas, que ele compra varia de acordo com a quantidade de convidados. Acompanhe na tabela a seguir.

Analisando a tabela, você pode notar que:

- se o número de convidados duplica, a quantidade de carne também duplica;
- se o número de convidados triplica, a quantidade de carne também triplica.

As duas grandezas aqui envolvidas (o número de convidados e a quantidade de carne) são chamadas **grandezas diretamente proporcionais**.

Quantidade de carne

Número de convidados	Carne comprada (em kg)
50	10
100	20
150	30

Fonte: Dados fictícios.

Duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando, dobrando uma delas, a outra também dobra; triplicando uma delas, a outra também triplica, e assim por diante.

Vejamos o que ocorre com os números da situação anterior, que expressam **duas grandezas diretamente proporcionais**:

- Quando o número de convidados passa de 50 para 100, dizemos que varia na razão $\frac{50}{100}$.
  Enquanto isso, a quantidade de carne comprada passa de 10 kg para 20 kg e varia na razão $\frac{10}{20}$.
  Você vai notar que as duas razões são iguais:
  $$\left.\begin{array}{l}\frac{50}{100} = \frac{1}{2} \\ \frac{10}{20} = \frac{1}{2}\end{array}\right] \frac{50}{100} = \frac{10}{20}$$

- Quando o número de convidados passa de 50 para 150, dizemos que varia na razão $\frac{50}{150}$.
  Enquanto isso, a quantidade de carne comprada passa de 10 kg para 30 kg e varia na razão $\frac{10}{30}$.
  Você vai notar que essas duas razões também são iguais:
  $$\left.\begin{array}{l}\frac{50}{150} = \frac{1}{3} \\ \frac{10}{30} = \frac{1}{3}\end{array}\right] \frac{50}{150} = \frac{10}{30}$$

Quando duas grandezas variam sempre na mesma razão, dizemos que essas grandezas são **diretamente proporcionais**.

Outra situação que envolve grandezas diretamente proporcionais é, por exemplo a quantidade de tinta que usamos para pintar uma parede. Ela é diretamente proporcional à área a ser pintada: duplicando-se a área, gasta-se o dobro de tinta; triplicando-se a área, gasta-se o triplo de tinta.

Grandezas inversamente proporcionais

Considere a seguinte situação:

Uma escola tem 48 livros para distribuir igualmente entre os vencedores de uma gincana escolar. Se os vencedores forem dois alunos, cada um deles receberá 24 livros. Se forem quatro alunos, cada um receberá 12 livros. E se forem seis alunos, cada um receberá 8 livros. Vamos colocar esses dados na tabela seguinte:

Distribuição dos livros

Número de alunos vencedores	Número de livros distribuídos a cada aluno
2	24
4	12
6	8

Fonte: Dados fictícios.

Analisando a tabela, você pode notar que:

- se o número de alunos vencedores duplica, o número de livros distribuídos para cada aluno cai para a metade;
- se o número de vencedores triplica, o número de livros distribuídos para cada aluno cai para a terça parte.

As duas grandezas aqui envolvidas (o número de alunos vencedores e o número de livros que serão distribuídos a cada aluno) são chamadas **grandezas inversamente proporcionais**.

> Duas grandezas são **inversamente proporcionais** quando, dobrando uma delas, a outra se reduz para a metade; triplicando uma delas, a outra se reduz para a terça parte, e assim por diante.

Vejamos o que ocorre com os números que expressam duas grandezas inversamente proporcionais:

- Quando o número de alunos passa de 2 para 4, dizemos que varia na razão $\frac{2}{4}$. Enquanto isso, o número de livros passa de 24 para 12 e varia na razão $\frac{24}{12}$.

Você vai notar que essas razões não são iguais; elas são inversas, ou seja:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{24}{12} = \frac{2}{1} \end{array}\right] \ \frac{1}{2} \text{ e } \frac{2}{1} \text{ são razões inversas.}$$

- Quando o número de alunos passa de 2 para 6, dizemos que varia na razão $\frac{2}{6}$. Enquanto isso, o número de livros passa de 24 para 8 e varia na razão $\frac{24}{8}$.

Você vai notar que essas razões também não são iguais; elas são inversas.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\\[4pt] \frac{24}{8}=\frac{3}{1}\end{array}\right] \frac{1}{3} \text{ e } \frac{3}{1} \text{ são razões inversas.}$$

> Quando duas grandezas variam uma na razão inversa da outra, dizemos que essas grandezas são **inversamente proporcionais**.

Outra situação que envolve grandezas inversamente proporcionais é, por exemplo, o tempo que se leva para encher um tanque, que é inversamente proporcional à vazão da água na torneira: dobrando-se a vazão da água, o tempo gasto para encher o tanque diminui pela metade.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. **A tabela a seguir relaciona a produção (em unidades) de uma mercadoria com o tempo de funcionamento da máquina que a produz.**

Produção industrial

Produção	Tempo
600	4 horas
1 500	10 horas

Fonte: Dados fictícios.

Observe a tabela e responda:

a) Quando a produção passa de 600 unidades para 1 500 unidades, varia em que razão?

b) Quando o tempo passa de 4 horas para 10 horas, varia em que razão?

c) Como são as razões obtidas?

d) Essas grandezas (produção e tempo) são diretamente proporcionais ?

2. **Observe a tabela e responda às questões.**

Fertilização da plantação

Área do pomar	Quantidade de fertilizante
15 000 m^2	30 kg
20 000 m^2	40 kg

Fonte: Dados fictícios.

A tabela relaciona a área de um pomar e a quantidade utilizada de determinado fertilizante orgânico.

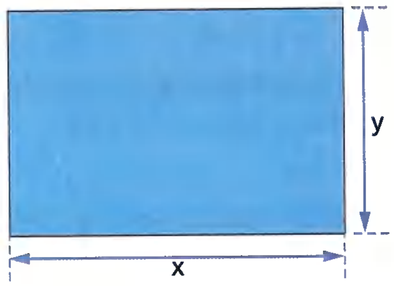
a) Quando a área passa de 15 000 m^2 para 20 000 m^2, varia em que razão?

b) Quando a quantidade de fertilizante passa de 30 kg para 40 kg, varia em que razão?

c) Qual a quantidade (em kg) de fertilizantes necessária para um pomar com área de 30 000 m²? E para um pomar de 40 000 m²?

d) Como podemos classificar as grandezas envolvidas nesse problema?

3. **A área de um retângulo é obtida multiplicando-se o valor que expressa o comprimento pelo valor que expressa a largura. Responda aos itens a seguir.**



$A = x \cdot y$

Em um retângulo com 40 cm de comprimento:

a) Qual a área desse retângulo, se a largura for 8 cm?

b) Qual a área desse retângulo, se a largura for 6 cm?

c) Quando a largura passa de 8 cm para 6 cm, varia em que razão?

d) As áreas obtidas nos itens **a** e **b** variam em que razão?

e) As razões obtidas entre os comprimentos e as áreas são iguais ou inversas?

f) Se dois retângulos têm o mesmo comprimento, a largura e a área são grandezas diretamente ou inversamente proporcionais?

4. **Um ônibus faz o percurso da Praça Central até a praça de um bairro. Um fiscal registrou as velocidades do ônibus e o tempo gasto nos percursos de ida e volta:**

Registro dos percursos

Velocidade	Tempo
50 km/h	96 min
60 km/h	80 min

Fonte: Dados fictícios.

a) Quando a velocidade passou de 60 km/h para 50 km/h, variou em que razão?

b) Quando o tempo gasto no percurso passou de 80 min para 96 min, variou em que razão?

c) Se a velocidade média do ônibus fosse de 30 km/h, qual seria o tempo gasto no percurso de ida e volta?

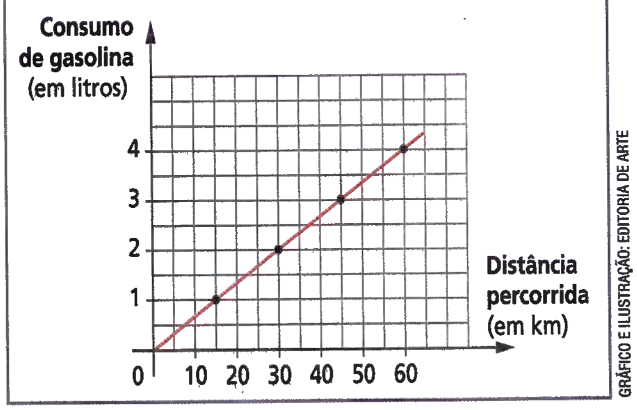
d) A velocidade do ônibus e o tempo gasto nos percursos são grandezas diretamente ou inversamente proporcionais?

DESAFIO

5. **Reúna-se com um colega e resolva o problema a seguir.**

Fabrício comprou um carro popular cuja principal característica é o baixo consumo de gasolina por quilômetro rodado. Observe o gráfico que relaciona o consumo de gasolina com as distâncias percorridas.

Consumo por quilômetro rodado



Fonte: Dados fictícios.

Analisem o gráfico e respondam:

a) Quais as grandezas envolvidas?

b) Essas grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais? Por quê?

c) Quantos quilômetros o carro de Fabrício percorre em uma viagem consumindo 7 litros de gasolina?

d) Depois de percorrer 90 quilômetros, qual o consumo de combustível?

e) Organizem uma tabela com valores diferentes, relacionando as duas grandezas envolvidas.

CAPÍTULO 3

REGRA DE TRÊS

O primeiro uso sistemático da regra de três ocorreu, provavelmente, na China antiga. Depois, alcançou a Arábia através da Índia, onde os matemáticos a tratavam pela mesma designação.

Veja como dois grandes matemáticos hindus abordavam a regra de três:

- Aryabhata (476-550), no seu livro intitulado **Aryabhatiya**, escreve a respeito de como encontrar o quarto termo de uma proporção simples.

> Na regra de três, multiplique-se o fruto pelo desejo e divida-se pela medida. O resultado será o fruto do desejo.
>
> Fonte: BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. p. 154.

Assim, temos: $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ então $x = \frac{bc}{a}$ em que *a* é a "medida", *b* é o "fruto", *c* é o "desejo", e *x* é o "fruto do desejo".

- Brahmagupta (c. 598-670) dizia que:

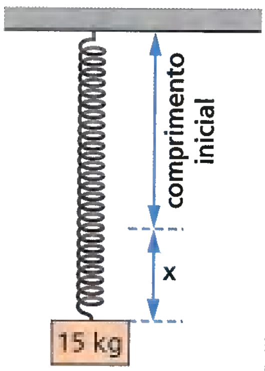
> Na regra de três, os nomes dos termos são Argumento, Fruto e Requisito. O primeiro e último termos devem ser semelhantes. Requisito multiplicado por Fruto e dividido por Argumento é o Produto.
>
> Fonte: EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 1997. p. 263.

Durante séculos, a regra de três mereceu grande consideração por parte dos mercadores. Seus vínculos com as proporções só foram reconhecidos no fim do século XIV.

Regra de três simples

Agora, acompanhe as situações a seguir.

1 Na extremidade de uma mola, presa a um suporte, é colocada uma peça com massa de 10 kg, verificando-se, então, que seu comprimento inicial aumenta em 42 cm. Se colocarmos uma peça com massa de 15 kg na extremidade dessa mola, qual será o aumento do comprimento de sua deformação?



EDITORIA DE ARTE

Vamos representar por *x* o aumento do comprimento da deformação da mola.

Para isso, organizamos o quadro a seguir.

Massa	Aumento do comprimento
10 kg	42 cm
15 kg	*x*

A lei de Hooke é uma lei da Física a qual garante que, se duplicarmos a massa de um corpo suspenso em uma extremidade da mola, o aumento na deformação da mola também duplicará. Logo, essas grandezas (massa da peça e deformação da mola) são diretamente proporcionais. Assim, os números 10 e 15 são diretamente proporcionais aos números 42 e *x*.

Daí, temos:

$$\frac{10}{15} = \frac{42}{x} \Rightarrow 10x = 15 \cdot 42 \Rightarrow x = \frac{15 \cdot 42}{10} \Rightarrow x = 3 \cdot 21 \Rightarrow x = 63$$

O aumento do comprimento da mola passará a ser de 63 cm.

2 Em um treino de automobilismo, um piloto fez parte do percurso em 18 segundos, registrados pelo cronômetro, com uma velocidade média de 200 km/h. Se a velocidade média fosse de 240 km/h, qual seria o tempo gasto nessa parte do percurso?

Vamos representar por *x* o tempo procurado.

Se duplicarmos a velocidade inicial do carro, o tempo gasto no percurso cairá pela metade, e assim por diante. Logo, as grandezas são inversamente proporcionais. Assim, os números 200 e 240 são inversamente proporcionais aos números 18 e *x*.

Para isso, organizamos o quadro a seguir.

Velocidade	Tempo
200 km/h	18 s
240 km/h	x

Daí, temos:

$$\frac{200}{240} = \frac{x}{18} \Rightarrow 200 \cdot 18 = 240 \cdot x \Rightarrow 3\,600 = 240x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 240x = 3\,600 \Rightarrow x = \frac{3\,600}{240} \Rightarrow x = 15$$

NÓS

Medição do tempo

Atividades humanas como agricultura e navegação, que permitiram o surgimento, o desenvolvimento e a expansão das civilizações, foram motivadoras para a criação de métodos e instrumentos de contagem de tempo, por exemplo, os relógios.

Desde o relógio de sol, o mais antigo de que se tem conhecimento, até os relógios atômicos, muitas contribuições foram necessárias para evoluir de um relógio capaz de medir somente as horas, sem muita precisão, para um relógio com precisão de 0,000000001 segundo.

- Discuta com seus colegas qual a importância de se fazerem medições precisas de tempo.
- Em quais situações você precisa medir o tempo?

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Diagramar é determinar a disposição de textos e imagens em uma página de um livro, jornal ou revista, por exemplo. Para diagramar um livro que tem 45 linhas em cada página, são necessárias 280 páginas. Quantas páginas com 30 linhas seriam necessárias para diagramar o mesmo livro?

2. Para construir a cobertura de uma quadra de basquete, 25 operários levaram 48 dias. Se fosse construída uma cobertura idêntica em outra quadra e fossem contratados 40 operários com as mesmas qualificações que os primeiros, em quantos dias a cobertura estaria pronta?

3. Para azulejar uma parede retangular que tem 19,5 m² de área foram usados 585 azulejos. Quantos azulejos iguais a esses seriam usados para cobrir uma parede que tem 15 m² de área?

4. Um pequeno avião voando a 450 km/h leva 4 horas para ir da cidade *A* à cidade *B*. Que tempo gastaria outro avião para percorrer o mesmo trajeto se sua velocidade média fosse de 750 km/h?

5. Com o auxílio de uma corda, que julgava ter 2 metros de comprimento, medi a extensão de um fio elétrico e encontrei 80 metros. Descobri, mais tarde, que a corda media, na realidade, 2,05 metros. Qual a extensão verdadeira do fio?

FÓRUM

Vias congestionadas são um dos problemas atuais que mais afetam as grandes cidades do mundo. O trânsito é responsável, entre outras coisas, por ser um dos fatores que pioram a qualidade de vida da população, pois aumenta o estresse e diminui o tempo para descanso e lazer e para se dedicar à saúde.

Uma pesquisa divulgada em 2018, que estudou o padrão de tráfego de 1 360 cidades em 38 países nos cinco continentes do planeta, concluiu que a cidade de São Paulo tem o pior trânsito do nosso país, ocupando o quarto lugar no *ranking* mundial (2017).

O resultado dessa combinação, tráfego intenso com estresse, resulta em um dado divulgado pela Associação Brasileira de Medicina do Tráfego (Abramet) de que entre 13% e 17% dos motoristas brasileiros apresentam algum distúrbio comportamental no trânsito.

Desse modo, os Departamentos Estaduais de Trânsito (Detran) buscam conscientizar os motoristas para a prática da gentileza no trânsito, já que as ruas são um espaço coletivo.

Informações obtidas em: DETRAN dá dicas de como evitar o estresse no trânsito. **Semana On.** Disponível em: <http://www.semanaon.com.br/conteudo/4135/detran-da-dicas-de-como-evitar-o-estresse-no transito>; OS PIORES trânsitos do mundo em 2017. **R7.** Disponível em: <https://autopapo.com.br/noticia/os-piores-transitos-do-mundo-em-2017/>. Acessos em: 9 out. 2018.

- Proponha possíveis soluções para a redução dos tráfegos das grandes cidades.
- Faça uma pesquisa sobre o estresse, suas causas e consequências e maneiras de como tratar esse problema no cotidiano.

Valor nutricional das frutas

Responda às questões no caderno.

1. Na tabela a seguir, temos os valores nutricionais de algumas frutas consideradas de origem brasileira.

Tabela de valor nutricional

Fruta (em 100 gramas de polpa)	Valor energético (em quilocalorias)	Carboidratos (em gramas)	Proteínas (em gramas)	Gorduras totais (em gramas)
Abacaxi	50	13,1	0,54	0,12
Abacate	160	8,53	2	14,66
Banana	89	22,84	1,09	0,33
Morango	32	7,68	0,67	0,3
Goiaba	68	14,32	2,55	0,95
Laranja	47	11,75	0,94	0,12

Fonte: ESCOLA PAULISTA DE MEDICINA. **Grupo de alimentos:** frutas e sucos. Disponível em: <http://tabnut.dis.epm.br/grupo/0900/frutas-e-sucos?ac=pequi&lr=>. Acesso em: 10 out. 2018.

a) Joana ingeriu no café da manhã 50 gramas de abacate. Quantas quilocalorias de energia ela ingeriu?

b) Entre as frutas apresentadas na tabela, quais contêm a **menor** quantidade de:
- carboidratos?
- proteínas?
- valor energético?
- gorduras?

ESTÚDIO ORNITORRINCO

c) Uma pessoa consumiu em um dia 120 gramas de polpa de abacaxi e 80 gramas de polpa de morango. Quantos gramas de carboidratos essa pessoa consumiu com a ingestão dessas frutas?

d) Quantos miligramas de proteínas ingeriu uma pessoa que consumiu 78 gramas de banana?

e) Uma pessoa fez um suco usando água e 35 gramas de polpa de goiaba. Quantos gramas de gordura continha esse suco?

f) Um atleta precisa ingerir cerca de 1,5 grama de proteína diariamente para cada quilograma de massa do seu corpo. Se um atleta pesa 65 kg, quantos gramas de proteína precisa ingerir diariamente? Quantos gramas de polpa de abacate seriam necessários para suprir essa necessidade de proteína, aproximadamente?

Regra de três composta

Considere as seguintes situações:

1 Trabalhando 6 dias, 5 operários produzem 400 peças. Quantas peças desse mesmo tipo serão produzidas por 7 operários em 9 dias de trabalho?
Vamos organizar os dados do problema no quadro seguinte, indicando com a letra *x* o número de peças procurado:

Número de operários	Número de dias	Número de peças
5	6	400
7	9	x

- Fixando a grandeza "número de operários", vamos relacionar as grandezas "número de dias" e "número de peças".
Dobrando-se o número de dias, o número de peças também dobrará, e assim por diante. Logo, as grandezas "número de dias" e "número de peças" são diretamente proporcionais.
- Fixando a grandeza "número de dias", vamos relacionar as grandezas "número de operários" e "número de peças".
Dobrando-se o número de operários, o número de peças também dobrará, e assim por diante. Logo, as grandezas "número de operários" e "número de peças" também são diretamente proporcionais.
Então, a grandeza "número de peças" é diretamente proporcional às grandezas "número de operários" e "número de dias". Logo, seus valores serão diretamente proporcionais aos produtos dos valores das grandezas "número de operários" e "número de dias", ou seja:

$$\underbrace{\frac{5}{7}}_{\text{operários}} \cdot \underbrace{\frac{6}{9}}_{\text{dias}} = \underbrace{\frac{400}{x}}_{\text{peças}}$$

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{6}{9} = \frac{400}{x} \Rightarrow \frac{30}{63} = \frac{400}{x} \Rightarrow 30x = 63 \cdot 400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30x = 25\,200 \Rightarrow x = \frac{25\,200}{30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 840$$

Em 9 dias de trabalho, 7 operários produzirão 840 peças.

2 Um ciclista percorre, em média, 200 km em dois dias, pedalando durante 4 horas por dia. Em quantos dias esse ciclista percorrerá 500 km se pedalar 5 horas por dia?
Indicando o número de dias pela letra *x*, organizamos os dados no quadro a seguir:

Distância (em km)	Número de horas por dia	Número de dias
200	4	2
500	5	x

EUGENE ONISCHENKO/ SHUTTERSTOCK.COM

Ciclista.

- Fixando a grandeza "número de km", vamos relacionar as grandezas "número de horas/dia" e "número de dias".
  Dobrando-se o número de horas que ele pedala por dia, o número de dias cairá para metade. Logo, as grandezas "número de horas/dia" e "número de dias" são inversamente proporcionais.
- Fixando a grandeza "número de horas/dia", vamos relacionar as grandezas "número de km" e "número de dias".
  Dobrando-se o número de quilômetros percorridos, o número de dias também dobrará. Logo, as grandezas "número de km" e "número de dias" são diretamente proporcionais.
  Então, a grandeza "número de dias" é diretamente proporcional à grandeza "número de km" e inversamente proporcional à grandeza "número de horas/dia". Isso nos leva a escrever a razão inversa dos valores que representam a grandeza "número de horas/dia".
  Daí, temos:

$$\underbrace{\frac{200}{500}}_{\text{distância}} \cdot \underbrace{\frac{5}{4}}_{\text{horas por dia}} = \underbrace{\frac{2}{x}}_{\text{dias}}$$

$$\frac{200}{500} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{1000}{2000} = \frac{2}{x} \Rightarrow 1000x = 4000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4000}{1000} \Rightarrow x = 4$$

O ciclista levará 4 dias para percorrer 500 km, se pedalar 5 horas por dia.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Em 30 dias, uma frota de 25 táxis consome 100 000 L de combustível. Em quantos dias uma frota de 36 táxis consumiria 240 000 L de combustível?

2. Um folheto informa que uma torneira pingando 20 gotas por minuto, em 30 dias, ocasiona um desperdício de 100 L de água. Na casa de Helena, uma torneira esteve pingando 30 gotas por minuto durante 50 dias. Calcule quantos litros de água foram desperdiçados nesse período.

3. Para construir um muro com 2,5 m de altura e 30 m de comprimento, certo número de operários levou 24 dias. Em quantos dias esse mesmo grupo de operários construiria um muro de 2 m de altura e 25 m de comprimento?

4. Em determinada fábrica de calçados, 16 operários produzem 240 pares de calçados por dia, trabalhando 8 horas diárias. Quantos operários, com a mesma qualificação dos primeiros, conseguiriam produzir 600 pares de calçados por dia, trabalhando 10 horas diárias?

5. Um grupo com 12 digitadores digita 720 páginas em 18 dias. Em quantos dias 8 digitadores, com a mesma qualificação dos primeiros, digitariam 800 páginas?

6. Elabore uma situação envolvendo três grandezas, que possa ser resolvida com regra de três composta. Em seguida, troque com um colega e resolva o problema elaborado por ele.

7. Dois carregadores transportam caixas de um depósito para um caminhão. Um deles leva 4 caixas por vez e demora 3 minutos para ir e voltar. O outro leva 6 caixas por vez e demora 5 minutos para ir e voltar. Enquanto o mais rápido leva 240 caixas, quantas caixas leva o outro?

DESAFIO

8. O engenheiro responsável pela obra sabe que para construir uma laje de 6 cm de espessura são gastos 30 sacos de cimento com 40 kg cada um.

Troque ideias com um colega e responda:

a) Quanto de cimento a menos se usa para construir uma laje de 5 cm de espessura?

b) Nesse caso, quantos sacos de cimento eles gastariam para fazer essa laje se cada saco contivesse 50 kg de cimento?

EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Mesada

A mesada pode cumprir algumas finalidades importantes: mostrar que o dinheiro é limitado, passar valores e princípios da família e estimular a criança a praticar a autonomia. [...]

[...] "A mesada tem de ser justa nos dois sentidos. Deve ser suficiente para a criança arcar com os gastos que ficaram sob a responsabilidade dela e também limitada, de modo que ela aprenda, desde cedo, a estabelecer prioridades e a fazer escolhas" [...]

Desde o início, a mesada deve ser dada com critério, para que tenha realmente um caráter educativo. Assim, os pais precisam estabelecer o que a criança vai comprar com o dinheiro que recebe e o que ainda ficará sob a responsabilidade deles. [...]

A mesada é uma excelente ferramenta, mas sozinha não ensina educação financeira. Deve ser tratada como mais um recurso educativo, em um universo em que há outros pontos de contato com a realidade do orçamento da família. [...]

Fonte: UNIVERSA. **7 erros comuns na hora de dar mesada aos filhos.** Disponível em <https://universa.uol.com.br/listas/7-erros-comuns-na-hora-de-dar-mesada-aos-filhos.htm/>. Acesso em: 10 out. 2018.

Agora, responda às questões no caderno.

1. **Para negociar uma mesada com seus pais, Rodrigo fez uma tabela dos seus gastos. Observe como ele organizou seus gastos.**

Gastos mensais

	Valor médio diário (em R$)	Dias por mês em que ocorre esse gasto	Valor total mensal (em R$)
Compras na cantina	3,50	8	28,00
Saída com amigos	10,00	3	30,00
Livro/revista	15,00	1	15,00
Extra	5,00	1	5,00

Fonte: Dados fictícios.

a) Qual é o total das despesas estimadas de Rodrigo?

b) Considerando os valores previstos, se no primeiro dia Rodrigo pagou R$ 6,00 em um sorvete e, no dia seguinte, gastou R$ 4,00, quanto deverá gastar em média nos outros 6 dias do mês para se manter dentro do orçamento para compras na cantina?

c) Rodrigo pensou que podia deslocar despesas e valores para itens não listados, se necessário. No mês seguinte, por exemplo, ele gostaria de ir a um *show*, cujo ingresso custará 20 reais. Sugira de quais itens da lista ele poderia obter esse dinheiro.

d) Faça você também uma tabela como a de Rodrigo, considerando seus gastos mensais.

ESTÚDIO ORNITORRINCO

TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

Construindo de um gráfico de setores

Para construir um gráfico de setores, vamos considerar a tabela que expressa, em porcentagem, a população aproximada de cada região brasileira em relação à população total do Brasil, segundo o Censo 2010 do IBGE.

População de cada região brasileira (Censo 2010)

Região	Porcentagem (%)
Norte	8,3
Nordeste	27,8
Centro-Oeste	7,4
Sudeste	42,1
Sul	14,4
Total	**100**

Informações obtidas em: IBGE. **Sinopse de Censo Demográfico 2010.** Disponível em: <http://www.censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?dados=5&uf=00>. Acesso em: 10 out. 2018.

SAIBA QUE

Em um gráfico de setores, as frequências de cada categoria estatística representada são proporcionais às respectivas medidas dos ângulos centrais que determinam cada setor.

A população de cada região será representada por um setor cuja medida do ângulo central é obtida por meio de uma regra de três simples.

1º passo: Determinamos a medida do ângulo central do setor correspondente a cada região.

Medida (em graus)		**População (em %)**
360°	—	100% (população total do Brasil)
medida do ângulo central	—	% da população de cada região

Ou seja, medida do ângulo central $= \dfrac{\text{\% da população da região} \times 360°}{100}$

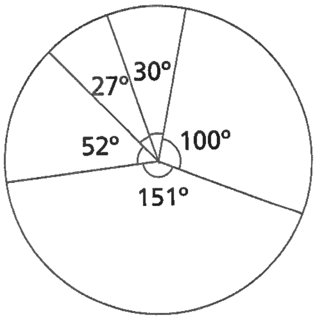
Por exemplo, para o setor que representa a população da região Norte, temos:

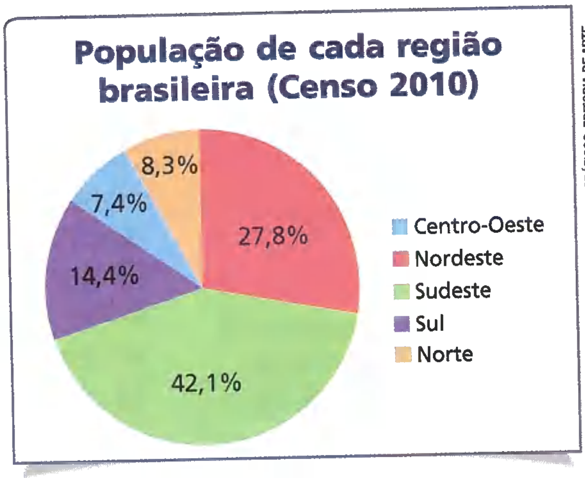
$$x = \frac{8{,}3 \cdot 360°}{100} \Rightarrow x \simeq 30°$$

Usando esse mesmo raciocínio, calcula-se a medida do ângulo central dos demais setores. Região Sul: 52°; região Nordeste: 100°; região Centro-Oeste: 27°; região Sudeste: 151°.

Observe que, assim como a soma das porcentagens correspondente às regiões é 100% (8,3% + 27,8% + 7,4% + 42,1% + 14,4%), a soma das medidas dos ângulos centrais deve ser 360°.

2º passo: Construímos uma circunferência e, usando o transferidor, representamos os setores circulares de acordo com as medidas dos ângulos centrais calculadas no 1º passo. Depois, colorimos cada setor, indicando essa informação em uma legenda; por fim, indicamos o título e a fonte do gráfico construído.





GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

Informações obtidas em: IBGE. **Sinopse de Censo Demográfico 2010.** Disponível em: <http://www.censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?dados=5&uf=00>. Acesso em: 10 out. 2018.

Responda às questões no caderno.

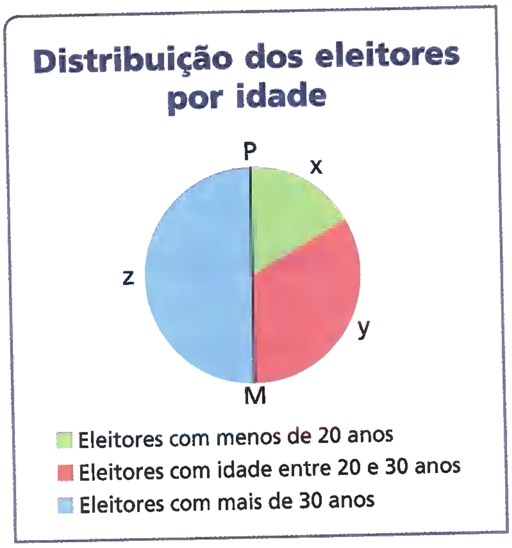
1. Na tabela é apresentado o resultado de uma pesquisa sobre a preferência esportiva dos alunos de uma escola. Construa um gráfico de setores para representar o resultado dessa pesquisa.

Preferência esportiva dos alunos da escola X

Esporte	Percentual
Basquete	20%
Futebol	35%
Vôlei	45%
Total	**100%**

Fonte: Alunos da escola X.

2. O gráfico de setores a seguir representa a distribuição dos eleitores de uma cidade quanto às idades.



EDITORIA DE ARTE

Fonte: Dados fictícios.

- O setor *x* representa todos os eleitores com menos de 20 anos: 8 600 eleitores.
- O setor *y* representa todos os eleitores com idade entre 20 e 30 anos: 16 800 eleitores.
- O setor *z* representa todos os eleitores com mais de 30 anos.

Com base nas informações apresentadas e sabendo que o segmento PM na figura é um diâmetro, quantos eleitores o setor *z* representa? Quantos eleitores há nessa cidade?

RETOMANDO O QUE APRENDEU

Responda às questões no caderno.

1. Em uma empresa trabalham 80 pessoas, das quais 25 usam óculos. A razão entre o número de empregados que usam óculos e o total de empregados dessa empresa, na forma decimal, é:

a) 0,3175 **b)** 0,3150 **c)** 0,3125 **d)** 3,25 **e)** 3,2

2. Sabe-se que os termos da sequência *a*, 12, 15 são diretamente proporcionais aos termos da sequência 28, *b*, 20. Então, a + b vale:

a) 27 **b)** 31 **c)** 37 **d)** 39 **e)** 47

3. Uma estrada com 420 km de extensão foi asfaltada por três empresas, *A*, *B* e *C*, cada uma atuando em um trecho diretamente proporcional aos números 2, 5 e 3. O trecho da estrada asfaltado pela empresa *C* foi de:

a) 126 km **b)** 84 km **c)** 145 km **d)** 210 km **e)** 180 km

4. Quando você divide R$ 34 000,00 entre 3 pessoas, de modo que a divisão seja feita em parcelas inversamente proporcionais aos números 5, 2 e 10, a maior quantia paga é de:

a) R$ 4 250,00 **b)** R$ 21 250,00 **c)** R$ 21 500,00 **d)** R$ 8 500,00 **e)** R$ 12 500,00

5. Um professor de Matemática desafiou seus alunos a descobrir as idades *a*, *b* e *c* de seus três filhos. Para isso, ele forneceu duas informações:

I. A soma das idades dos três é 33 anos.

II. As idades são diretamente proporcionais aos números 5, 4 e 2.

A idade do filho mais velho é:

a) 12 anos. **b)** 11 anos. **c)** 14 anos. **d)** 15 anos. **e)** 16 anos.

6. Uma lâmpada de 40 watts pode funcionar por 15 horas, a certo custo. Por quanto tempo poderá funcionar uma lâmpada de 60 watts, para que o custo permaneça o mesmo?

a) 8 horas. **b)** 10 horas. **c)** 11 horas. **d)** 12 horas. **e)** 14 horas.

7. Certa quantidade de óleo foi colocada em latas de 2 litros cada uma, obtendo-se 60 latas cheias de óleo. Se fossem usadas latas de 3 litros cada uma, quantas seriam necessárias para colocar a mesma quantidade de óleo?

a) 50 **b)** 45 **c)** 42 **d)** 40 **e)** 36

8. Para fazer uma geleia, dona Helena usou 3 kg de açúcar e 2,5 kg de frutas. Se ela tem 4 kg de frutas, quantos quilogramas de açúcar deverá usar para fazer a mesma geleia?

a) 4,5 **b)** 4,8 **c)** 5 **d)** 1,875 **e)** 5,4

9. Com velocidade média de 60 km/h, fui de carro de uma cidade *A* para uma cidade *B* em 16 minutos. Se o percurso de volta foi feito em 12 minutos, qual a velocidade média na volta?

a) 90 km/h **b)** 85 km/h **c)** 80 km/h **d)** 75 km/h **e)** 72 km/h

10. O ponteiro menor de um relógio percorre um ângulo de 30 graus em 60 minutos. Então, para percorrer um ângulo de 42 graus, o ponteiro menor levará:

a) 64 minutos.
b) 65 minutos.
c) 72 minutos.
d) 80 minutos.
e) 84 minutos.

11. Com 7 pacotes de pão de forma, Cristina faz 105 sanduíches. Quantos pacotes de pão de forma ela vai usar para fazer 150 sanduíches do mesmo tamanho que os anteriores?

a) 10
b) 12
c) 14
d) 15
e) 18

12. Em um recenseamento, chegou-se à seguinte conclusão: para visitar 102 residências, é necessário contratar 9 recenseadores. Em certa região, onde existem 3 060 residências, quantos recenseadores precisam ser contratados?

a) 180
b) 200
c) 250
d) 240
e) 270

13. (PUC-SP) Um motorista de táxi, trabalhando 6 horas por dia durante 10 dias, gasta R$ 1 026,00 de gás. Qual será o seu gasto mensal, se trabalhar 4 horas por dia?

a) R$ 1 026,00
b) R$ 2 052,00
c) R$ 3 078,00
d) R$ 4 104,00

14. (PUCCamp-SP) Operando 12 horas por dia, 20 máquinas produzem 6 000 peças em 6 dias. Com 4 horas a menos de trabalho diário, 15 daquelas máquinas produzirão 4 000 peças em:

a) 8 dias
b) 9 dias
c) 9 dias e 6 horas
d) 8 dias e 12 horas

UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, estudamos o conceito de razão, proporção e grandezas proporcionais com base em situações cotidianas. Ao explorar o tema, verificamos que as razões podem ser expressas por números racionais nas formas de fração, decimal e percentual. Além disso, observamos quando duas grandezas são proporcionais e o que são números diretamente proporcionais, números inversamente proporcionais, grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais. Elaboramos também um trabalho com regra de três simples e regra de três composta, bem como suas aplicações.

Na abertura desta Unidade, você teve oportunidade de conhecer o processo artesanal de produção de vasos e algumas de suas características.

Será que todas as pessoas produzem um mesmo modelo de vaso em um mesmo intervalo de tempo?

Vamos agora refletir sobre as aprendizagens que tivemos nesta Unidade. Com base nas informações obtidas na abertura e ao longo da Unidade, responda às questões.

- Indique uma medida que você conhece na forma de razão.
- Como você definiria grandezas diretamente proporcionais? E inversamente proporcionais?
- Há dois tipos de grandezas que são utilizadas no estudo de fenômenos físicos: as grandezas escalares e as grandezas vetoriais. Por meio de uma pesquisa, aponte a diferença entre esses dois tipos de grandezas e dê um exemplo de cada uma. Registre sua pesquisa no caderno.

8 PORCENTAGEM, PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Utilizamos a ideia de favoritismo em vários momentos de nosso cotidiano, principalmente na área de esportes. Por exemplo, um time é tido como favorito quando a maioria das pessoas acredita que a chance de ele ganhar um campeonato é maior que a dos outros, mas geralmente mais de um time entra em um campeonato como favorito, por isso é importante traduzir essa chance em números. Para essa situação, podemos calcular a probabilidade e expressá-la em porcentagem.

Responda às questões no caderno.

- De acordo com os dados apresentados, quais clubes você diria que teriam maior chance de ganhar a Copa Libertadores da América? Quais critérios você considerou?
- Em que outras situações de seu cotidiano você estima chances?

COPA LIBERTADORES DA AMÉRICA

PAÍS	TÍTULOS	VICES
Argentina	24	10
Brasil	18	15
Uruguai	8	8
Paraguai	3	5
Colômbia	3	7
Chile	1	5
Equador	1	3
Peru	0	2
México	0	3
Bolívia	0	0
Venezuela	0	0

PERU

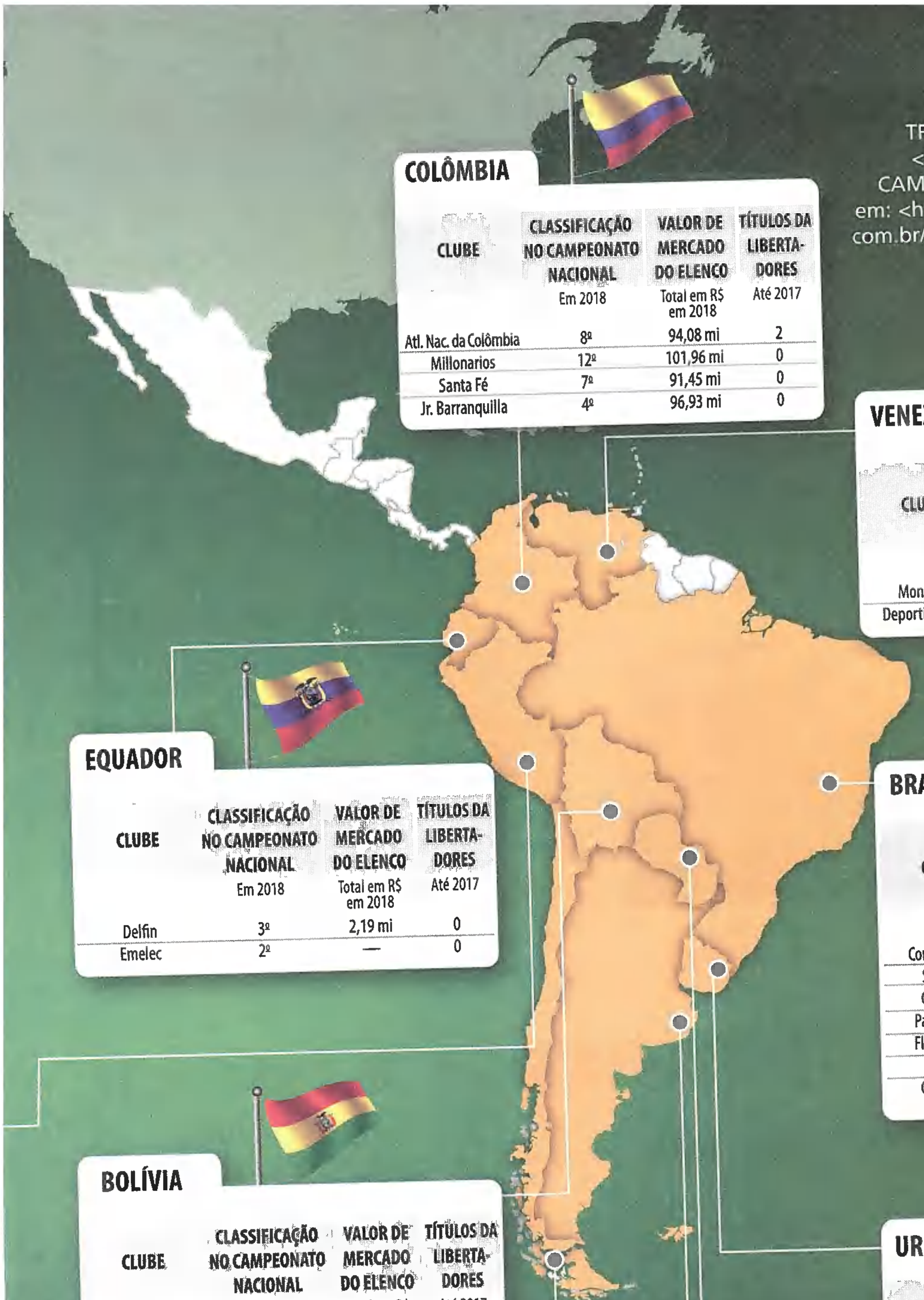
CLUBE	CLASSIFICAÇÃO NO CAMPEONATO NACIONAL Em 2018	VALOR DE MERCADO DO ELENCO Total em R$ em 2018	TÍTULOS DA LIBERTA-DORES Até 2017
Real Garcilaso	8º	38,46 mi	0
Alianza Lima	5º	20,04 mi	0

CHILE

CLUBE	CLASSIFICAÇÃO NO CAMPEONATO NACIONAL Em 2018	VALOR DE MERCADO DO ELENCO Total em R$ em 2018	TÍTULOS DA LIBERTA-DORES Até 2017
Univ. de Chile	4º	67,80 mi	0
Colo Colo	6º	78,18 mi	1

DIMEG/SHUTTERSTOCK.COM

Informações obtidas em: TRANSFERMARKT. Disponível em: <https://www.transfermarkt.pt/>; CAMPEÕES DO FUTEBOL. Disponível em: <https://www.campeoesdofutebol.com.br/libertadores.html>. Acessos em: 12 out. 2018.



ALEX SILVA

COLÔMBIA

CLUBE	CLASSIFICAÇÃO NO CAMPEONATO NACIONAL Em 2018	VALOR DE MERCADO DO ELENCO Total em R$ em 2018	TÍTULOS DA LIBERTA-DORES Até 2017
Atl. Nac. da Colômbia	8º	94,08 mi	2
Millonarios	12º	101,96 mi	0
Santa Fé	7º	91,45 mi	0
Jr. Barranquilla	4º	96,93 mi	0

VENEZUELA

CLUBE	CLASSIFICAÇÃO NO CAMPEONATO NACIONAL Em 2018	VALOR DE MERCADO DO ELENCO Total em R$ em 2018	TÍTULOS DA LIBERTA-DORES Até 2017
Monagas	1º	21,24 mi	0
Deportivo Lara	3º	25,10 mi	0

EQUADOR

CLUBE	CLASSIFICAÇÃO NO CAMPEONATO NACIONAL Em 2018	VALOR DE MERCADO DO ELENCO Total em R$ em 2018	TÍTULOS DA LIBERTA-DORES Até 2017
Delfin	3º	2,19 mi	0
Emelec	2º	—	0

BRASIL

CLUBE	CLASSIFICAÇÃO NO CAMPEONATO NACIONAL Em 2018	VALOR DE MERCADO DO ELENCO Total em R$ em 2018	TÍTULOS DA LIBERTA-DORES Até 2017
Corinthians	11º	226,45 mi	1
Santos	7º	268,06 mi	3
Grêmio	5º	292,80 mi	3
Palmeiras	1º	336,95 mi	1
Flamengo	3º	333,76 mi	1
Vasco	15º	131,84 mi	1
Cruzeiro	9º	247,03 mi	2

BOLÍVIA

CLUBE	CLASSIFICAÇÃO NO CAMPEONATO NACIONAL Em 2018	VALOR DE MERCADO DO ELENCO Total em R$ em 2018	TÍTULOS DA LIBERTA-DORES Até 2017
Bolívar	5º	30,35 mi	0
The Strongest	1º	17,87 mi	0

URUGUAI

CLUBE	CLASSIFICAÇÃO NO CAMPEONATO NACIONAL Em 2018	VALOR DE MERCADO DO ELENCO Total em R$ em 2018	TÍTULOS DA LIBERTA-DORES Até 2017
Defensor	4º	32,98 mi	0
Peñarol	1º	60,00 mi	5
Nacional	2º	64,39 mi	3

ARGENTINA

CLUBE	CLASSIFICAÇÃO NO CAMPEONATO NACIONAL Em 2018	VALOR DE MERCADO DO ELENCO Total em R$ em 2018	TÍTULOS DA LIBERTA-DORES Até 2017
Racing	1º	232,36 mi	1
Estudiantes	23º	84,97 mi	4
Atl. Tucumán	2º	53,44 mi	0
Independiente	12º	377,34 mi	7
River Plate	7º	327,19 mi	3
Boca Juniors	6º	506,55 mi	6

PARAGUAI

CLUBE	CLASSIFICAÇÃO NO CAMPEONATO NACIONAL Em 2018	VALOR DE MERCADO DO ELENCO Total em R$ em 2018	TÍTULOS DA LIBERTA-DORES Até 2017
Cerro Porteño	1º	57,60 mi	0
Libertad	3º	31,54 mi	0

CAPÍTULO 1

PORCENTAGEM

Provavelmente você já se deparou com a expressão **por cento** em seu dia a dia. Essa expressão pode estar nas notícias veiculadas em jornais, TV ou internet, em ofertas comerciais e nos bate-papos diários com a família ou com os amigos.

Significa que de 1 000 ventiladores encomendados, 800 foram enviados.

ILUSTRAÇÕES: MW EDITORA E ILUSTRAÇÕES

Isso significa que a cada 100 reais gastos nesta loja, há um desconto de 40 reais.

Relacionando a expressão **por cento** (%) com as frações de denominador 100 e as respectivas formas decimais, temos, por exemplo:

Taxa percentual	Fração percentual	Forma decimal
80%	$\frac{80}{100}$	0,80
40%	$\frac{40}{100}$	0,40

Resolvendo problemas com porcentagem

Veja, a seguir, algumas situações de aplicação do conceito de porcentagem.

1 Em uma classe do 7º ano de uma escola, com 28 alunos, 8 usam óculos. Qual é a porcentagem de alunos que usam óculos em relação ao número total de alunos da classe?

Dos 28 alunos da classe, 8 usam óculos. Assim, podemos escrever a razão:

$$\frac{8}{28} \simeq 0{,}286 = \frac{0{,}286 \times 100}{100} = \underbrace{\frac{28{,}6}{100}}_{\text{razão percentual}} = 28{,}6\%$$

Aproximadamente 28,6% (vinte e oito vírgula seis por cento) dos alunos da classe usam óculos.

2 Em uma cidade, cuja população é de aproximadamente 110 000 habitantes, verificou-se que 12,5% desses habitantes têm mais de 60 anos. Quantos habitantes dessa cidade têm 60 anos ou menos?


MW EDITORA E ILUSTRAÇÕES

Vamos encontrar o número de habitantes da cidade que têm mais de 60 anos:

$$12{,}5\% \text{ de } 110\,000 \longrightarrow \frac{12{,}5}{100} \cdot 110\,000 = 13\,750$$

Como queremos descobrir o número de habitantes que têm 60 anos ou menos, subtraímos do total de habitantes:

$$110\,000 - 13\,750 = 96\,250$$

Então, nessa cidade, 96 250 habitantes têm 60 anos ou menos.

Podemos resolver esse problema de outro modo. Sabemos que 12,5% dessa população tem mais de 60 anos. Então, podemos encontrar a taxa percentual da população que tem 60 anos ou menos:

$$100\% - 12{,}5\% = 87{,}5\%$$

→ **taxa percentual de habitantes com 60 anos ou menos**

Assim, podemos determinar o número de habitantes que essa taxa percentual representa:

$$87{,}5\% \text{ de } 110\,000 \longrightarrow \frac{87{,}5}{100} \cdot 110\,000 = 96\,250$$

Note que obtivemos o mesmo número de habitantes, ou seja, 96 250 habitantes.

3 Uma camiseta custava R$ 40,00 e sofreu um acréscimo de 5%. Qual o novo preço dessa camiseta?

Vamos calcular o valor do acréscimo: 5% de 40,00 $\longrightarrow \frac{5}{100} \cdot 40{,}00 = 2{,}00$

Para calcular o novo preço, adicionamos o valor do acréscimo ao preço inicial da camiseta. Assim:

$$40{,}00 + 2{,}00 = 42{,}00$$

A camiseta passou a custar R$ 42,00.

4 Um anúncio em uma livraria diz o seguinte:

EDITORIA DE ARTE

Carol queria comprar um livro que custava R$ 32,00. Qual o valor do livro com o desconto?

Vamos calcular 25% de 32,00 $\longrightarrow \frac{25}{100} \cdot 32{,}00 = 8{,}00$

Assim, o desconto foi de R$ 8,00. Agora, precisamos subtrair R$ 8,00 dos R$ 32,00 (valor sem o desconto):

32,00 − 8,00 = 24,00

O valor do livro com o desconto é de R$ 24,00.

FÓRUM

Nós já consumimos 30% mais recursos naturais do que a capacidade de renovação da Terra. Se os padrões de consumo e produção se mantiverem no mesmo ritmo, em menos de 50 anos serão necessários dois planetas Terra para atender às nossas necessidades de água, energia e alimentos. Uma das maneiras para mudar isso pode ser rever nossas escolhas de consumo.

Um consumidor consciente é aquele que equilibra as satisfações pessoais com a sustentabilidade e por isso procura adquirir produtos de procedência ética e de empresas comprometidas com a saúde humana e animal, a preservação do meio ambiente, com as relações justas de trabalho, com a sociedade e o bem-comum. Ele também sabe o valor do dinheiro, equilibra a relação custo-benefício de suas compras e conhece seus direitos como consumidor.

Informações obtidas em: BRASIL. Ministério do Meio Ambiente. **Quem é o consumidor consciente?** Disponível em: <http://www.mma.gov.br/responsabilidade-socioambiental/producao-e-consumo-sustentavel/consumo-consciente-de-embalagem/quem-e-o-consumidor-consciente>. Acesso em: 9 out. 2018.

- Com os colegas, elaborem uma lista de perguntas que podem ser feitas no momento da compra de algum produto para ajudá-los a consumir de maneira consciente. Depois, mostrem essa lista a seus familiares e amigos e os ajudem a ser, também, consumidores conscientes.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Em um campeonato de voleibol, a equipe *A* ganhou 24 jogos dos 30 que disputou; e a equipe *B* ganhou 21 jogos dos 28 que disputou.

a) Expresse a taxa percentual de vitórias de cada equipe.

b) Qual dos clubes apresentou o melhor desempenho? Por quê?

2. Em uma competição esportiva, uma equipe ganhou 80 medalhas, sendo 25% de ouro, 35% de prata e o restante de bronze. Qual o número de medalhas de bronze que essa equipe ganhou?

3. Um comerciante ofereceu um desconto em sua loja de 20% nas compras para o pagamento à vista. Mariana gostou de uma calça que custa R$ 135,00. Quanto Mariana pagará à vista pela calça?

4. Um produto que custava R$ 78,00 sofreu um acréscimo e passou a custar R$ 83,85.

a) Qual foi o valor do acréscimo, em reais?

b) Qual foi a taxa percentual do acréscimo?

5. O rádio ainda é um meio de comunicação de muita abrangência e cobertura do Brasil, além de continuar sendo um veículo de comunicação de muita credibilidade. De acordo com o censo de 2010, o IBGE recenseou cerca de 68 milhões de domicílios particulares permanentes do Brasil, perto de 69% possuíam rádio. Quantos desses domicílios, aproximadamente, possuíam rádio no Brasil nesse ano?

Informações obtidas em: IBGE. **Domicílios particulares permanentes, por posse de rádio.** Disponível em: <https://seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?vcodigo=PD281>. Acesso em: 13 out. 2018.

Educação financeira para crianças influencia famílias e professores

Cerca de um milhão de estudantes no Brasil já têm contato com o tema, segundo associação; para especialistas, poupar promove atitude sustentável.

A escola faz parte de um universo que cresceu nos últimos anos. Cerca de um milhão de alunos no País já têm aulas de educação financeira na escola básica atualmente, segundo estimativa da Associação Brasileira de Educadores Financeiros (Abefin). [...]

De acordo com uma pesquisa da Abefin, feita em parceria com o Instituto Axxus e o Núcleo de Economia Industrial e da Tecnologia (NEIT) do Instituto de Economia da Unicamp, 71% dos alunos que têm aulas sobre educação financeira ajudam os pais a fazerem compras conscientes. Já nas famílias que não têm filhos educados para o tema, a cooperação na hora da compra não existe, segundo a pesquisa apresentada em fevereiro.

Para o estudo, foram entrevistados 752 pais e mães, com filhos entre quatro e 12 anos, em cinco capitais: São Paulo, Rio de Janeiro, Recife, Goiânia e Vitória. Cerca de metade dos entrevistados tinha filhos em escolas que oferecem educação financeira. Os entrevistados cujos filhos recebem educação financeira também responderam que conseguiriam manter seu padrão de vida por mais tempo caso ficassem sem salário. Nesse caso, 73% respondem que poderiam manter o padrão por até seis meses. Entre famílias que não têm filhos estudando o assunto, só 53% têm uma avaliação tão otimista. Outros 44% das famílias sem educação financeira dizem que o padrão de vida duraria um mês em caso de desemprego – enquanto só 2% do outro grupo tem avaliação tão pessimista. [...]

Fonte: EDUCAÇÃO financeira para crianças influencia famílias e professores. **Estadão.** Disponível em: <https://sustentabilidade.estadao.com.br/noticias/geral,educacao-financeira-para-criancas-influencia-familias-e-professores,70002042823>. Acesso em: 13 out. 2018.

De acordo com os trechos da notícia, e com base nos seus conhecimentos sobre porcentagens, responda às questões no caderno.

1. De acordo com a pesquisa, de que forma os alunos que têm aulas sobre educação financeira ajudam os pais?
2. Dos 752 pais e mães entrevistados, cerca de quantos conseguiriam manter seu padrão de vida por mais tempo caso ficassem sem salário?
3. Por volta de quantos pais e mães disseram que o padrão de vida duraria um mês em caso de desemprego?
4. Comparando os pais e as mães entrevistados que têm filhos que não recebem educação financeira e os que têm filhos que recebem educação financeira, o que você pode concluir?

CAPÍTULO 2

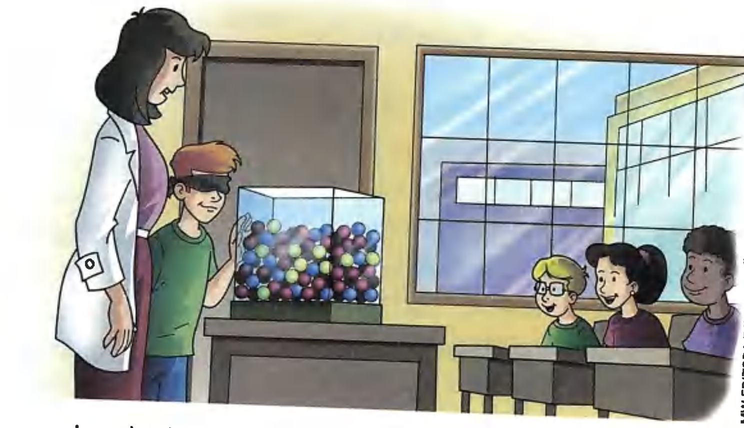
PROBABILIDADE

Acompanhe a situação a seguir:

A professora Leila colocou em uma urna 15 bolinhas azuis, 25 bolinhas vermelhas e 10 bolinhas amarelas, todas de mesmo tamanho. Ela pediu que Artur retirasse, sem olhar, uma bolinha da urna, mas antes perguntou para a sala qual cor de bolinha ele teria a maior chance de retirar da urna: azul, vermelha ou amarela.

Os alunos responderam que a chance de Artur retirar uma bolinha vermelha era maior, pois havia mais bolinhas vermelhas na urna do que cada uma das outras cores.

Depois, a professora perguntou qual era a probabilidade de Artur retirar uma bolinha amarela.



MW EDITORA E ILUSTRAÇÕES

Para conseguir calcular a probabilidade de Artur retirar uma bolinha amarela, precisamos determinar a quantidade de bolinhas que há na urna. Ao todo são 50 bolinhas ($25 + 15 + 10 = 50$).

Então Artur tem 10 possibilidades em 50 de retirar uma bolinha amarela.

$\frac{10}{50}$ → **dez em cinquenta**

A probabilidade (P) é dada pela razão entre o número de possibilidades favoráveis e o número total de possibilidades:

$$P = \frac{\text{número de possibilidades favoráveis}}{\text{número total de possibilidades}}$$

Essa probabilidade pode ser representada das seguintes maneiras:

- $\frac{10}{50} = \frac{1}{5} = 0{,}2$
- $\frac{10}{50} = \frac{20}{100} = 20\%$

As 10 bolinhas amarelas são os casos favoráveis, e o número total de possibilidades é 50 bolinhas.

Portanto, a probabilidade de Artur retirar uma bolinha amarela da urna é de 20%.

Para calcular a probabilidade de Artur retirar uma bolinha azul, primeiro temos de determinar o número de possibilidades favoráveis, que é a quantidade de bolinhas azuis na urna, e o número total de possibilidades, que é a quantidade de bolinhas na urna. Logo, 15 possibilidades em 50, ou seja:

$$P_{\text{bolinha azul}} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 30\%$$

Como a quantidade de bolinhas vermelhas é 25, esse é o número de possibilidades favoráveis de Artur retirar uma bolinha vermelha da urna, e sua probabilidade é dada por:

$$P_{\text{bolinha vermelha}} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Como o número de possibilidades favoráveis a um determinado evento pode ser, no máximo, igual ao número total de possibilidades, temos que a probabilidade de esse evento acontecer pode ser no máximo 1, ou seja, 100%.

Retomando o caso das bolinhas, notamos que Artur só pode retirar uma bolinha amarela, azul ou vermelha. Se somarmos cada uma das probabilidades calculadas anteriormente, temos:

$$P_{\text{bolinha amarela}} + P_{\text{bolinha azul}} + P_{\text{bolinha vermelha}} = 20\% + 30\% + 50\% = 100\%$$

SAIBA QUE

Chamamos de dado honesto aquele cuja probabilidade de ocorrência de qualquer face é a mesma.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Qual a probabilidade de sair cara no lançamento de uma moeda ao ar?

2. Calcule a probabilidade de obter um número menor que 3 no lançamento de um dado honesto.

3. Cláudia irá lançar um dado honesto. Calcule a probabilidade de ela obter:

a) um número par.

b) um número maior que 2.

c) um número menor que 4.

4. Na classe de Patrícia há 12 meninas e 18 meninos. Duas meninas se chamam Juliana, e três dos meninos são ruivos. Serão sorteados um menino e uma menina para representar a turma na escola.

a) Qual a probabilidade de Patrícia ser sorteada?

b) Qual a probabilidade de ser sorteada uma Juliana?

c) Qual a probabilidade de ser sorteado um dos meninos ruivos?

5. (Saresp-SP) As cartas abaixo serão colocadas numa caixa e uma será retirada ao acaso.

MW EDITORA E ILUSTRAÇÕES

A probabilidade de a carta retirada ter a figura de uma pessoa é

a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** $\frac{2}{5}$

TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

Experimento aleatório

Você já notou que, mesmo conhecendo todos os possíveis resultados de um determinado experimento, não podemos saber com exatidão qual de fato será o resultado antes de executá-lo?

Por exemplo, ao lançarmos uma moeda honesta, conhecemos todos os resultados possíveis (cara ou coroa), mas não sabemos qual será o resultado antes do lançamento. Esse tipo de experimento, que, mesmo repetido várias vezes sob as mesmas condições, apresenta resultados imprevisíveis, é chamado de **experimento aleatório.**

Todos os resultados possíveis de um experimento aleatório formam um conjunto chamado **espaço amostral**, e cada subconjunto do espaço amostral é chamado de **evento**.

Um exemplo de experimento aleatório é o jogo de cara ou coroa. Esse jogo consiste em lançar uma moeda para o ar e, então, verificar qual de seus lados ficou voltado para cima, após sua queda.

Em uma partida de futebol, é comum jogar cara ou coroa para decidir quem iniciará a partida ou quem escolherá o campo, pois, utilizando uma moeda honesta, teoricamente, a probabilidade de sair cara é a mesma de sair coroa, ou seja, 50% para cada.

Mas, será que, se lançarmos uma moeda e registrarmos a quantidade de vezes que cada lado ficou voltado para cima, o resultado será exatamente meio a meio, ou seja, 50%?

SAIBA QUE

Dizemos que uma moeda é **"honesta"** se, em um experimento aleatório, as faces têm a mesma probabilidade de ocorrer, ou seja, 50%; caso contrário, a moeda é considera **viciada.**

Lançamento de uma moeda.

Para responder à questão da página anterior, vamos observar os resultados do lançamento de uma moeda honesta, repetido inúmeras vezes por um grupo de alunos, descritos a seguir.

Os alunos começaram o experimento com 10 lançamentos, e foram registrados 4 caras e 6 coroas. Em seguida, resolveram aumentar o número total para 50 lançamentos e registraram 23 caras e 27 coroas. A partir daí compararam o resultado dos dois experimentos e concluíram que a probabilidade de se obter cara ou coroa era diferente nos dois conjuntos.

Diante disso, eles fizeram vários experimentos, com diferentes quantidades de lançamentos, e registraram as informações no quadro:

Repetições	Resultado	
	Cara	Coroa
10	4	6
50	23	27
100	53	47
200	97	103
300	146	154
400	191	209
500	261	239
600	323	277
700	346	354
800	401	399
900	454	446
1000	498	502

Observe que em nenhum caso os resultados obtidos nas repetições foram iguais. Em algumas situações ocorre um número maior de caras e em outras, um número maior de coroas. Isso evidencia a imprevisibilidade de um experimento aleatório.

Responda às questões no caderno.

1. **Determine a probabilidade de caras e coroas de cada repetição observada no quadro. O que você pode concluir sobre os resultados?**

2. **Vamos fazer um experimento com uma moeda. Junte-se com um colega, e lancem uma moeda 50 vezes, anotando se o lado voltado para cima após a queda é cara ou coroa. Para isso, construam um quadro como o apresentado nesta página. Em seguida, comparem os resultados com os dos demais colegas e respondam:**

a) Os resultados foram iguais?

b) Se ocorresse um resultado muito distante do previsto, o que poderíamos supor?

CAPÍTULO 3

MEDIDAS EM ESTATÍSTICA

A Estatística utiliza várias medidas para investigar características de um conjunto de dados observados em determinado estudo. Algumas dessas medidas são as de tendência central, das quais a média aritmética é a mais conhecida e utilizada no cotidiano.

Uma situação muito comum no mundo dos esportes, como vôlei ou basquete, por exemplo, é destacar a altura média dos jogadores de cada equipe.

Acompanhe as situações a seguir.

1 A tabela a seguir mostra a altura, em metro, dos cinco jogadores titulares de um time de basquete.

Altura dos jogadores de basquete

Jogador	Altura (em metro)
Pedro	1,90
Antônio	1,99
Carlos	2,01
Sérgio	2,08
João	2,12

Fonte: Dados fictícios.


MONKEY BUSINESS IMAGES/SHUTTERSTOCK.COM

Jogadores de basquete com o treinador.

Para sabermos a altura média dos jogadores titulares do time de basquete, devemos calcular a média aritmética das alturas desses jogadores:

$$\frac{1{,}90 + 1{,}99 + 2{,}01 + 2{,}08 + 2{,}12}{5} = \frac{10{,}1}{5} = 2{,}02$$

Então, a altura média dos jogadores titulares do time de basquete é de 2,02 m.

Observe que esse valor não aparece no conjunto das alturas desses jogadores.

A média nem sempre é um dos valores observados dentro de um conjunto de dados, mas ela sempre está entre o menor e o maior valor do conjunto. Nesse caso, podemos dizer que a altura 2,02 m é um valor representativo dos valores observados, ou seja, a altura dos jogadores titulares do time.

Outra medida estatística que podemos utilizar é a **amplitude** do conjunto de dados. Ela é a diferença entre o maior e o menor valor observado e mostra a variação dos valores do conjunto.

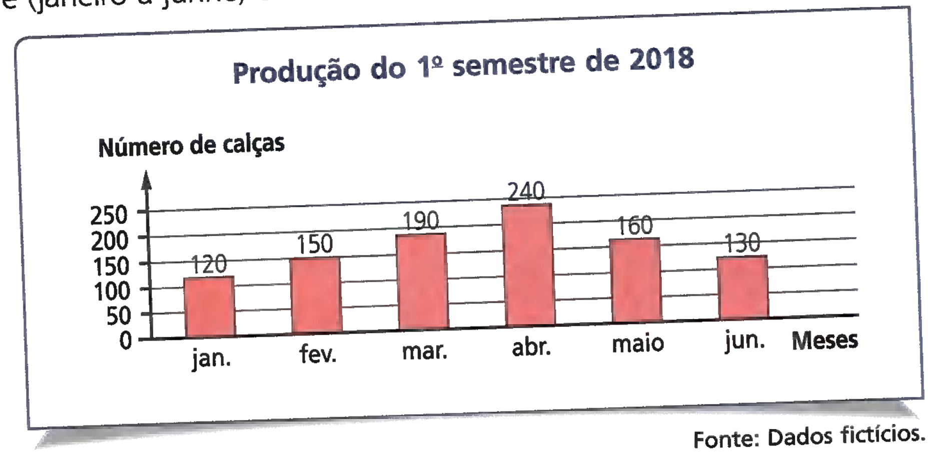
Os jogadores de maior e menor alturas do time são João e Pedro, e a amplitude é dada por:

$$2{,}12 \text{ m} - 1{,}90 \text{ m} = 0{,}22 \text{ m}$$

Logo, a amplitude das alturas dos jogadores do time de basquete é de 22 cm.

Outra situação em que podemos avaliar a média de um conjunto de dados numéricos é na observação de um gráfico.

2 O gráfico abaixo representa a produção de uma fábrica de calças *jeans* no primeiro semestre (janeiro a junho) de 2018.



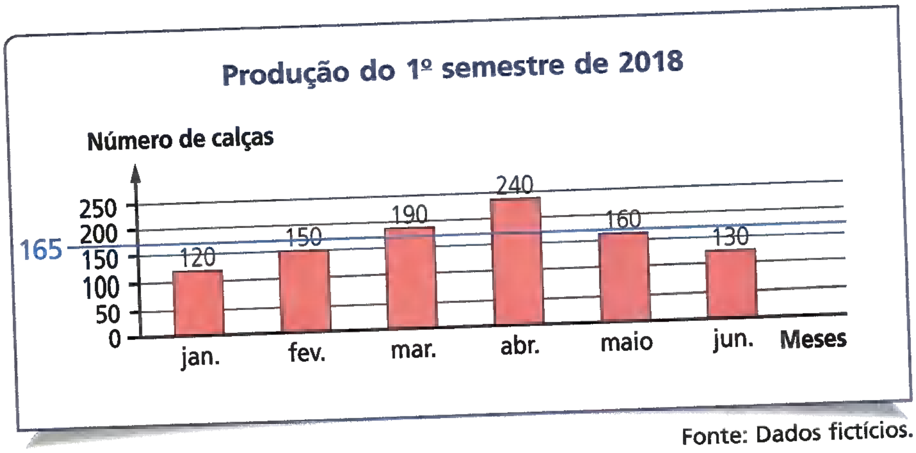
Fonte: Dados fictícios.

Vamos determinar a média mensal do número de calças *jeans* produzidas:

$$\frac{120 + 150 + 190 + 240 + 160 + 130}{6} = \frac{990}{6} = 165$$

Então, a média mensal de calças *jeans* produzidas é de 165 calças.

Observando o gráfico abaixo, podemos verificar os meses em que a produção ficou acima ou abaixo da média:



Fonte: Dados fictícios.

Note que, nos meses de janeiro, fevereiro, maio e junho, a fabricação de calças *jeans* ficou abaixo da média, e, nos meses de março e abril, a fabricação ficou acima da média.

Agora, vamos calcular a amplitude desse conjunto de dados. A partir do gráfico, observamos que o mês de maior produção foi abril (240) e o de menor produção foi janeiro (120).

$$240 - 120 = 120$$

Logo, a amplitude da produção de calças *jeans* no primeiro semestre de 2018 foi de 120 calças.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. O quadro a seguir mostra o número de alunos matriculados nos períodos da manhã, tarde e noite em uma escola de línguas:

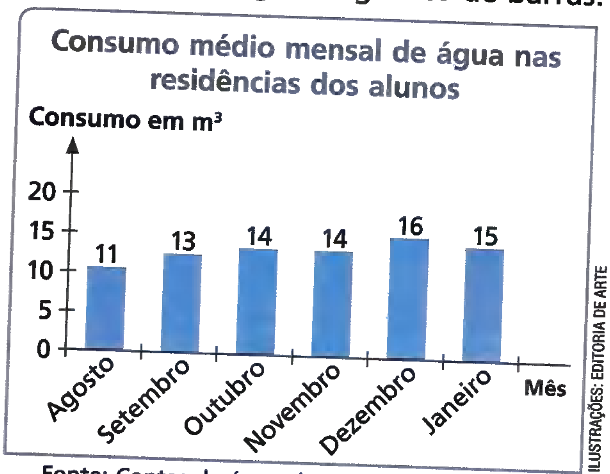
Curso \ Período	Manhã	Tarde	Noite
Inglês	15	16	14
Espanhol	21	20	25

Calcule a média de alunos matriculados:

a) Por curso.

b) Por período.

2. Os alunos do 7º ano de uma escola calcularam a média do consumo de água de cada mês (em m³) na residência de todos os 20 alunos. Em seguida construíram o seguinte gráfico de barras.



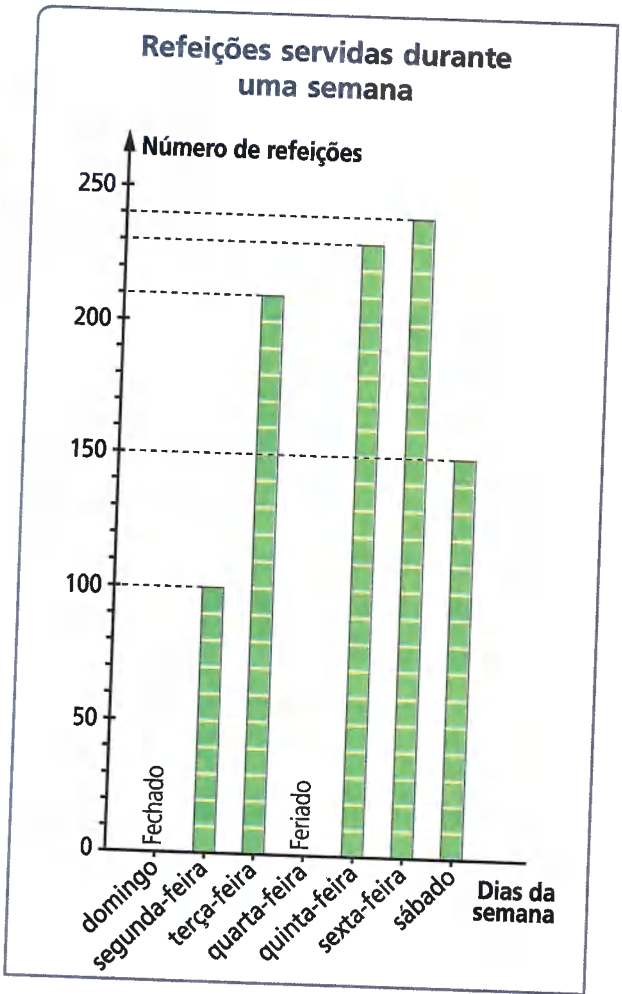
Fonte: Contas de água das residências dos alunos.

Com base nas informações apresentadas no gráfico, responda às perguntas:

a) Calcule o consumo médio mensal de água nas residências dos alunos. Use uma calculadora, caso seja necessário.

b) Considerando meses com 30 dias, qual é o consumo médio diário nas residências desses alunos?

3. O gráfico mostra o número de refeições servidas em um restaurante de domingo a sábado durante uma semana.



Fonte: Dados fictícios.

a) Por dia, qual foi a média de refeições servidas pelo restaurante nessa semana nos dias em que ele funcionou? Esse valor está presente no gráfico?

b) Em quais dias dessa semana o número de refeições servidas ultrapassou a média?

c) Qual a amplitude do número de refeições servidas nos dias de funcionamento?

d) A média está mais próxima do valor mínimo ou do valor máximo de refeições servidas?

POR TODA PARTE

Os aparelhos domésticos e o consumo de energia

Podemos estimar o consumo de energia elétrica em nossa residência considerando suas principais fontes. A seguir você encontra a relação de alguns eletrodomésticos e sua potência média, além do consumo médio mensal de cada aparelho.

Os aparelhos domésticos e o consumo de energia

Aparelhos elétricos	Potência média (watts)	Dias estimados uso/mês	Média utilização/dia	Consumo médio mensal (quilowatts-hora)
Aspirador de pó	500	30	20 min	5,0
Chuveiro	3 500	30	30 min	52,5
Computador/impressora/ estabilizador	180	30	3 h	16,2
Ferro automático	1 000	15	1 h	5,0
Forno micro-ondas	1 200	30	20 min	12,0
Geladeira 2 portas	300	30	10 h	90
Lavadora de roupas	500	15	1 h	4,0
Liquidificador	300	15	15 min	0,6
Secador de cabelo	900	30	5 min	2,25
TV em cores de 32 polegadas	200	30	5 h	30

Fonte: ENEL. **Simulador de consumo**. Disponível em: <https://enel-ce.simuladordeconsumo.com.br/>. Acesso em: 16 out. 2018.

1. Com base nos dados da tabela, responda às questões a seguir no caderno.

a) Qual o consumo médio mensal de 3 chuveiros elétricos? E de 2 computadores com impressora e estabilizador em cada um?

b) De acordo com a tabela, qual é o consumo mensal médio de todos os aparelhos juntos?

c) Supondo que o custo de 1 quilowatt-hora já com os impostos inclusos seja de R$ 0,55, qual é o valor aproximado, em reais, do consumo de energia elétrica mensal de todos os aparelhos?

d) Uma família composta de 4 pessoas utiliza os aparelhos que possui em casa, conforme os dados da tabela. Nessa residência há duas TVs em cores de 32 polegadas, uma lavadora de roupas, dois banheiros com chuveiro elétrico, dois secadores de cabelo, um ferro elétrico automático, um aspirador de pó, um liquidificador e três computadores com impressora e estabilizador em cada um. Qual é o consumo médio mensal de energia elétrica relativa ao uso desses aparelhos nessa residência?

e) Qual será o valor aproximado da conta que a família do item anterior vai pagar? Considere o valor de 1 quilowatt-hora do item c.

f) Pesquise o consumo de energia elétrica do último mês do lugar onde você reside.

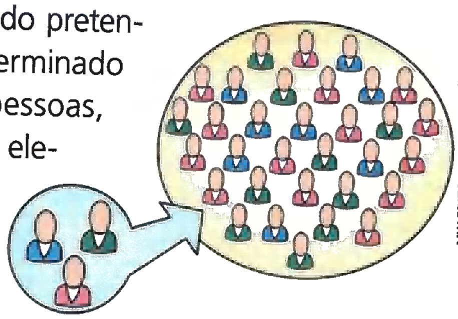
g) Você acredita que é possível reduzir esse consumo? Em caso afirmativo, apresente alguns hábitos que ajudarão nessa redução de consumo.

CAPÍTULO 4

PESQUISA ESTATÍSTICA

População e amostra

Realizamos uma pesquisa estatística quando pretendemos estudar alguma característica de determinado conjunto de elementos, que podem ser pessoas, resultados, objetos etc. O conjunto de todos os elementos, que tem a característica do interesse da pesquisa, é chamado de **população**.



MW EDITORA E ILUSTRAÇÕES

Quando temos muitos elementos na população que queremos estudar, podemos realizar a pesquisa com uma **amostra** que represente essa população. Uma amostra é um subconjunto dos elementos da população.

Vamos observar duas situações para entender melhor a diferença entre população e amostra.

1 Uma empresa farmacêutica é responsável pela produção de um medicamento vendido em cápsulas. O controle de qualidade dessa empresa precisa fazer uma pesquisa para verificar se as 10 000 cápsulas produzidas diariamente têm o mesmo tamanho.
Nessa situação, temos:
Objetivo da pesquisa: fazer o controle de qualidade da produção de um medicamento.
Característica pesquisada: tamanho das cápsulas de um medicamento.
População: 10 000 cápsulas do medicamento produzidas diariamente.
Amostra: 150 cápsulas do medicamento produzidas diariamente.

2 A prefeitura de uma cidade quer saber se as crianças e os adolescentes, que são aproximadamente 1 000 pessoas, frequentariam as escolas nos fins de semana para usar o espaço de forma recreativa (quadra e biblioteca).
Nessa situação, temos:
Objetivo da pesquisa: estudar a possibilidade de abrir as escolas nos fins de semana.
Característica pesquisada: se frequentariam ou não o espaço da escola de forma recreativa nos fins de semana.
População: 1 000 crianças e adolescentes que moram na cidade.
Amostra: 30 crianças e adolescentes que moram na cidade.

Nas duas situações apresentadas, foi selecionada uma amostra para a realização da pesquisa. Note que é importante atentar para o objetivo da pesquisa, pois é ele que vai ajudar a determinar a característica e a população a ser estudada.

Veja no material audiovisual o vídeo sobre a história do censo.

Pesquisa censitária e amostral

Em Estatística, temos dois tipos de pesquisa, a censitária e a amostral.

Na pesquisa **censitária**, todos os elementos de determinada população são pesquisados. As pesquisas censitárias de grande porte, em geral, são mais demoradas e há um custo maior em pesquisar todos os elementos da população de interesse. Um exemplo de pesquisa censitária de grande porte é o Censo Demográfico no Brasil, realizado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), que acontece a cada 10 anos e tem como objetivo constituir a principal fonte de referência para o conhecimento das condições de vida da população em todos os municípios do país.

Acompanhe a situação a seguir

A prefeitura de um município do interior do estado de Alagoas deseja verificar a carteira de vacinação das crianças de até 6 anos de idade para realizar uma nova campanha de vacinação. Desse modo, será necessário analisar as carteiras de vacinação de todas essas crianças. Então, a prefeitura irá realizar uma pesquisa censitária para colher essas informações junto aos pais ou responsáveis.

Note que, com a pesquisa, a prefeitura saberá quais e quantas vacinas deverá aplicar nas crianças durante a campanha.

Criança no colo da mãe tomando vacina.

ADRIANO KIRIHARA/PULSAR IMAGENS

Formigas na areia.

Há casos em que não é possível observar toda a população de interesse, em geral por questões econômicas e por prazos menores. Por exemplo, uma livraria pode não ter recursos financeiros suficientes para saber fazer uma pesquisa de opinião com todos seus clientes, ou levaria muito tempo para ter os resultados. Para resolver essas dificuldades, existe a pesquisa **amostral**. Ela é feita com uma parte predeterminada da população de interesse.

Por outro lado, a escolha da amostra deve ser feita segundo critérios rigorosos para que o resultado da pesquisa represente, o mais próximo possível, a opinião ou característica de toda população de interesse.

Acompanhe a situação a seguir.

Um pesquisador deseja estudar o comportamento de um tipo específico de formiga na cidade de Belo Horizonte. Para isso, não seria possível pesquisar todas as formigas da cidade, ou seja, a população de interesse. Dessa maneira, o pesquisador define uma amostra, delimitando uma área para fazer essa observação, além de considerar um número predeterminado de formigas a serem estudadas.

Para definir uma amostra adequada é importante estabelecer alguns critérios, tais como:

- Definir um perfil da amostra para saber quais características serão pesquisadas. Por exemplo: idade, sexo, região de domicílio etc.
- Entender que, mesmo definindo um perfil e um questionário adequado, há uma margem de erro que deve ser considerada porque estamos trabalhando com estimativas e não valores absolutos. Para isso, devemos assumir uma margem de erro adequada para a pesquisa. Por exemplo: em pesquisas eleitorais as margens de erro variam entre 2% e 5%, dependendo do instituto que realiza a pesquisa.
- Definir o tamanho da amostra com base na população total e na margem de erro estabelecida como aceitável. Quanto maior a população e menor o erro estabelecido, maior deverá ser o tamanho da amostra. Por exemplo: realizar uma pesquisa envolvendo as crianças de até 6 anos em um município com 30 000 habitantes é diferente de realizar essa pesquisa em território nacional.

ATIVIDADES

1. Em uma pesquisa censitária, foram entrevistados todos os médicos de um hospital, a fim de identificar as universidades que eles cursaram. Os dados levantados estão apresentados a seguir:

Universidade cursada	Total de médicos
A	34
B	45
C	21

a) Observando os dados apresentados no quadro, quantos médicos trabalham nesse hospital?

b) Qual a porcentagem de médicos que estudou na Universidade A?

2. Deseja-se pesquisar o estilo musical preferido por uma turma do 7º ano de uma escola. Qual o tipo de pesquisa mais indicada: a censitária ou a amostral? Justifique sua resposta.

3. Junte-se com um colega e respondam quais características devem ser levadas em consideração na construção de uma amostra que pretende pesquisar as intenções de voto de eleitores em uma eleição presidencial.

ERNESTO REGHRAN/PULSAR IMAGENS

Urna eletrônica.

4. O clube de que Antônio faz parte decidiu sortear 5 sócios para responderem a uma pesquisa de satisfação. A escolha da amostra de sócios, nesse caso, pode representar a opinião da maior parte dos sócios desse clube? Explique sua resposta.

5. Reúnam-se em grupos para planejar e realizar uma pesquisa. As etapas descritas a seguir podem orientá-los no desenvolvimento desse trabalho.

ROBERTO ZOELLNER

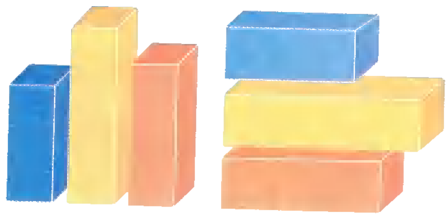
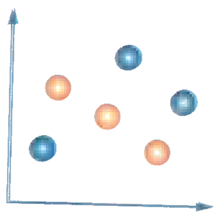
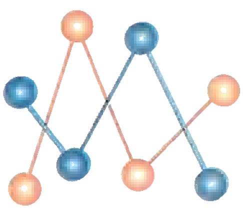
- Escolham um tema relevante para a comunidade escolar.
- Decidam se a pesquisa será censitária ou amostral.
- Elaborem um questionário para a coleta dos dados.
- Apliquem o questionário e tabelem os dados.
- Analisem os dados e apresentem um relatório escrito, contendo tabelas e gráficos que ilustrem os resultados obtidos.

TECNOLOGIAS

Construindo gráficos no computador

A utilização de gráficos é um recurso muito interessante na apresentação de informações e resultados de uma pesquisa, principalmente quando a quantidade de dados a ser tabulada é muito grande. Geralmente as agências de divulgação de pesquisas oficiais utilizam os gráficos para auxiliar a população a compreender os resultados dos dados coletados.

Observe este quadro com um resumo dos principais gráficos que utilizamos.

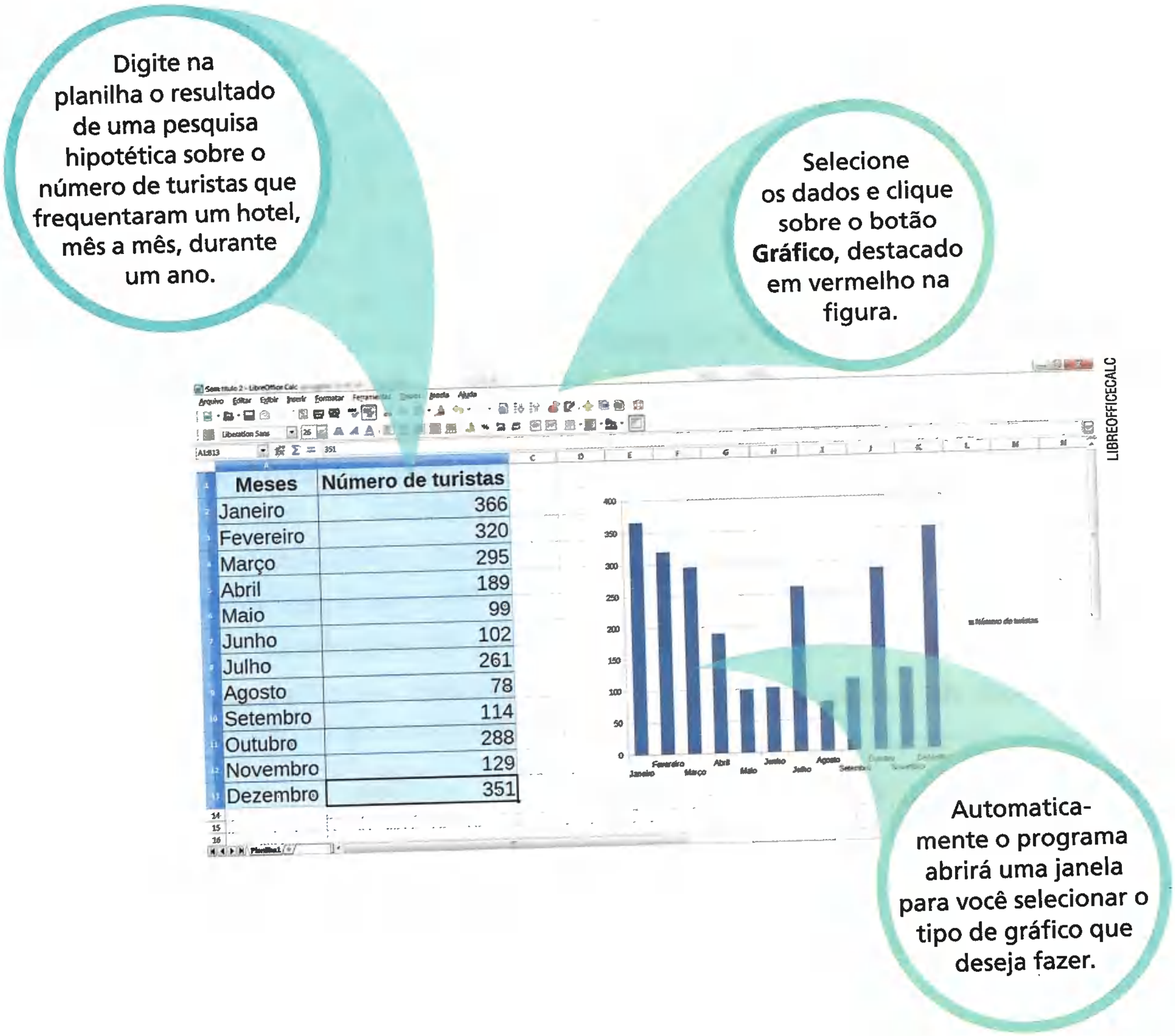
Colunas e barras 	Pode ser utilizado para comparar valores de diferentes séries. A diferença entre um gráfico de colunas e de barras está na disposição da representação gráfica dos dados.
Setores ou *pizza* 	Normalmente utilizado para visualizar a pesquisa no geral, possibilitando comparar cada categoria envolvida. Cada setor determina uma proporção do total dos resultados.
Dispersão 	É comum na representação de várias séries de dados. É usualmente utilizado para mostrar como as séries podem ser parecidas e então agrupadas de acordo com o interesse.
Linhas 	Esse tipo de gráfico pode favorecer a leitura de pesquisas que representam sequências cronológicas.

ILUSTRAÇÕES: FORMATO

Todos os gráficos apresentados no quadro podem ser feitos à mão, mas, dependendo dos valores e das variáveis disponíveis, isso se torna uma tarefa trabalhosa.

Para facilitar esse trabalho existem diversos *softwares* livres de planilhas eletrônicas que criam gráficos estatísticos. Vamos aprender um pouco sobre um deles. Para isso, siga estes passos:

- Entre no endereço <http://livro.pro/bixzay> e baixe o pacote do LibreOffice.
- Depois de instalado, abra o programa LibreOffice Calc, de planilha eletrônica.



Chegou a hora de você conhecer um pouco mais sobre os tipos de gráfico.

1. Usando dados hipotéticos sobre o número de turistas que frequentaram um hotel, mês a mês (como no exemplo anterior), preencha a planilha e construa outros tipos de gráficos apresentados pelo programa.

2. Qual deles representou melhor as informações da sua tabela? Como você chegou a essa conclusão?

3. Utilizando o próprio programa ou uma calculadora, determine a média mensal de turistas e a amplitude do seu conjunto de dados.

RETOMANDO O QUE APRENDEU

Responda às questões no caderno.

1. A América do Sul tem uma superfície de cerca de 18 milhões de quilômetros quadrados. O Brasil, que é o maior país da América do Sul, tem uma superfície aproximada de 8,5 milhões de quilômetros quadrados. Isso significa que o Brasil ocupa, aproximadamente, quantos por cento da América do Sul?

a) 42%
b) 44%
c) 45%
d) 47%
e) 49%

2. (Enem/MEC) Três alunos, X, Y e Z, estão matriculados em um curso de inglês. Para avaliar esses alunos, o professor optou por fazer cinco provas. Para que seja aprovado nesse curso, o aluno deverá ter a média aritmética das notas das cinco provas maior ou igual a 6. Na tabela, estão dispostas as notas que cada aluno tirou em cada prova.

Notas da prova de inglês

Aluno	1ª Prova	2ª Prova	3ª Prova	4ª Prova	5ª Prova
X	5	5	5	10	6
Y	4	9	3	9	5
Z	5	5	8	5	6

Fonte: Dados fictícios.

Com base nos dados da tabela e nas informações dadas, ficará(ão) reprovado(s)

a) apenas o aluno Y.
b) apenas o aluno Z.
c) apenas os alunos X e Y.
d) apenas os alunos X e Z.
e) os alunos X, Y e Z.

3. Por aquecimento, o comprimento de uma barra de ferro aumenta $\frac{7}{200}$ em relação ao valor inicial. Isso significa que o aumento do comprimento é de:

a) 1%
b) 0,7%
c) 0,62%
d) 0,55%
e) 3,5%

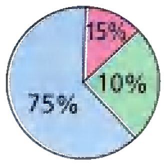
4. (Saresp-SP) Luís comprou uma bicicleta por R$ 180,00 e deseja vendê-la com um lucro de 5% para compensar alguns gastos que teve com a manutenção da bicicleta. O preço de venda será:

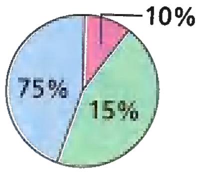
a) R$ 171,00
b) R$ 185,00
c) R$ 189,00
d) R$ 270,00

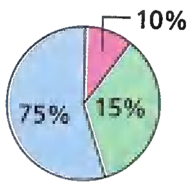
5. (Saresp-SP) Duas mil pessoas foram entrevistadas sobre o controle externo na programação da televisão. O resultado obtido foi:

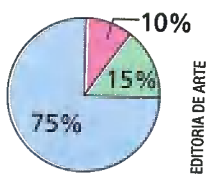
- 75% foram favoráveis;
- 10% não responderam;
- 15% discordaram.

Indique o gráfico que representa o resultado dessa pesquisa.

a)


c)


b)


d)


EDITORIA DE ARTE

6. Uma escola de artes marciais consultou todos os alunos que têm entre 7 e 16 anos, para colher informações de satisfação com as aulas e com as instalações físicas da escola. Essa pesquisa é censitária ou amostral? Justifique sua resposta.

7. (Enem/MEC) Em uma cidade, o número de casos de dengue confirmados aumentou consideravelmente nos últimos dias. A prefeitura resolveu desenvolver uma ação contratando funcionários para ajudar no combate à doença, os quais orientarão os moradores a eliminarem criadouros do mosquito *Aedes aegypti*, transmissor da dengue. A tabela apresenta o número atual de casos confirmados, por região da cidade.

Região	Casos confirmados
Oeste	237
Centro	262
Norte	158
Sul	159
Noroeste	160
Leste	278
Centro-Oeste	300
Centro-Sul	278

A prefeitura optou pela seguinte distribuição dos funcionários a serem contratados:
10 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja maior que a média dos casos confirmados.
7 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja menor ou igual à média dos casos confirmados.
Quantos funcionários a prefeitura deverá contratar para efetivar a ação?

a) 59 **b)** 65 **c)** 68 **d)** 71 **e)** 80

UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, estudamos porcentagens e suas aplicações no conceito de probabilidade, na análise de dados e na Educação financeira. Trabalhamos ainda com medidas estatísticas, como média e amplitude, e pesquisas estatísticas, explorando o conceito de população e amostra em pesquisas censitárias e amostrais. Na abertura desta Unidade, tivemos a oportunidade de explorar e refletir sobre os fatores que influenciam na definição do favoritismo, das chances e das probabilidades.

Responda no caderno.

- Como o conceito de porcentagem se relaciona com o conceito de razão?
- Como a porcentagem se aplica no seu cotidiano?
- A porcentagem é importante em uma boa organização financeira?
- Elabore um quadro com seus gastos semanais e mensais. Para isso, copie o modelo a seguir:

Tipo de gasto	Valor (em reais)	Valor percentual
Alimentação		
Diversão		
Roupas		

Você pode trocar ou acrescentar itens à vontade no seu quadro. Determine a média mensal dos seus gastos. Você consegue identificar algum excesso ou alguma possível economia?

- As pesquisas amostrais são mais vantajosas com relação às censitárias em quais situações?

9 ÁREA E VOLUME

COLEÇÃO PARTICULAR © TARSILA DO AMARAL EMPREENDIMENTOS.

A artista: Tarsila do Amaral (1886-1973) foi pintora e desenhista brasileira. Junto dos escritores Oswald de Andrade e Raul Bopp, lançou o movimento "Antropofagia", que foi o mais radical de todos os movimentos do período Modernista.

Tarsila do Amaral foi uma artista brasileira que se inspirou em figuras geométricas para criar a composição de formas diferentes. Nestas obras é possível identificar desenhos que lembram algumas figuras geométricas planas como triângulos, quadriláteros, círculos e um traçado muito harmônico de curvas. Há também a percepção de construções parecidas com sólidos geométricos em algumas de suas obras, como é o caso da torre na obra **A Gare**.

MARCOS GUILHERME

Observe as obras expostas e responda às questões no caderno:

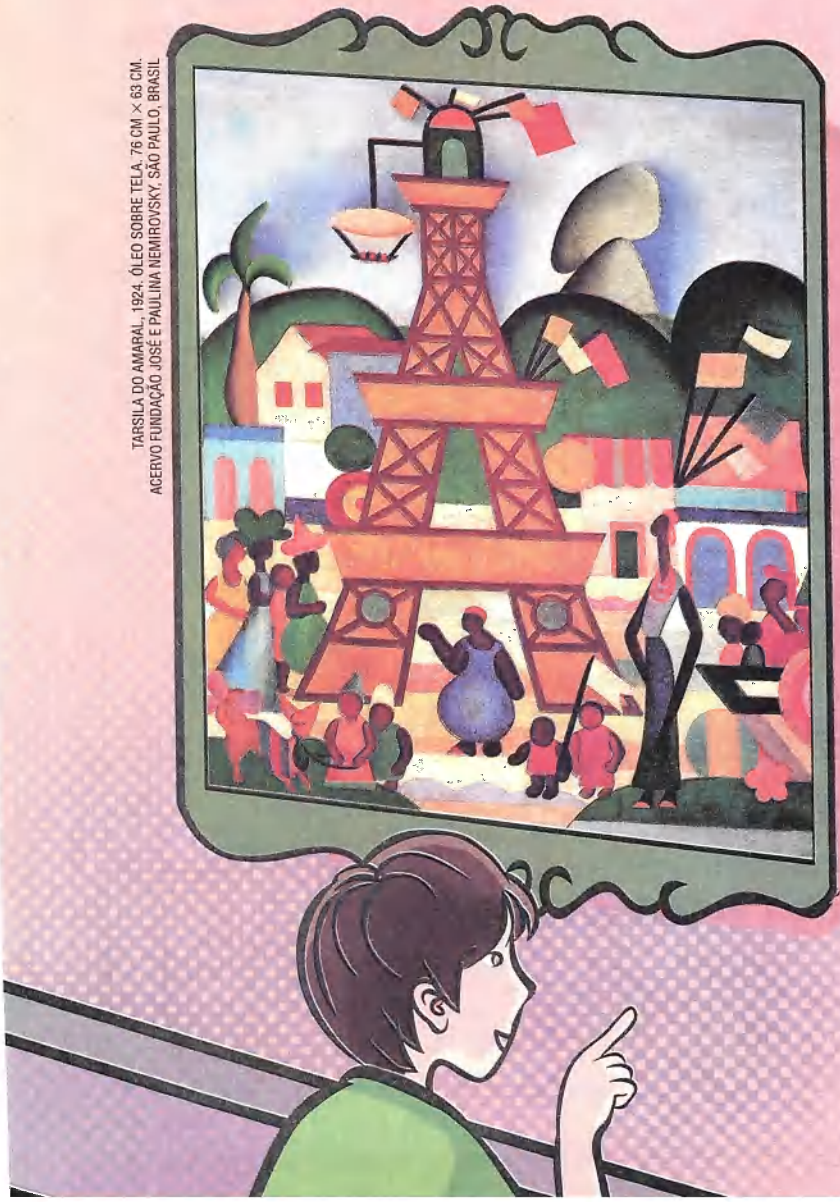
- Há desenhos parecidos com quais figuras geométricas planas?
- Observe as dimensões da obra **Carnaval em Madureira** indicadas em sua descrição. Qual é a área, em cm², dessa pintura?

TARSILA DO AMARAL, 1924. ÓLEO SOBRE TELA. 67 CM × 90 CM. ACERVO DA PINACOTECA DO ESTADO DE SÃO PAULO

Sem título
Tarsila do Amaral, 1924.
Óleo sobre tela.
67 cm × 90 cm.

TARSILA DO AMARAL, 1925. ÓLEO SOBRE TELA. 84,5 CM × 65 CM. COLEÇÃO PARTICULAR

A Gare
Tarsila do Amaral, 1925.
Óleo sobre tela.
84,5 cm × 65 cm.



TARSILA DO AMARAL, 1924. ÓLEO SOBRE TELA. 76 CM × 63 CM. ACERVO FUNDAÇÃO JOSÉ E PAULINA NEMIROVSKY, SÃO PAULO, BRASIL

Carnaval em Madureira
Tarsila do Amaral, São Paulo, 1924.
Óleo sobre tela.
76 cm por 63 cm.

CAPÍTULO 1

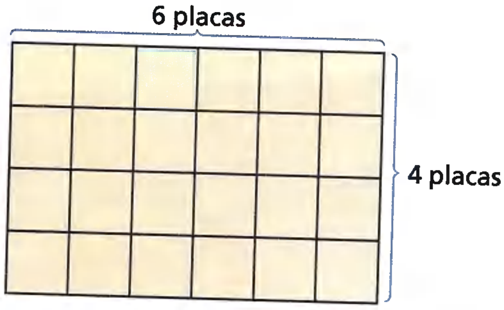
ÁREA DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS

Área de um retângulo

Zildo quer fazer um gramado retangular de 6 m por 4 m no jardim de sua casa. De quantas placas quadradas de grama, com lados de 1 m, ele vai precisar?

Zildo desenhou um esquema do gramado e pensou:

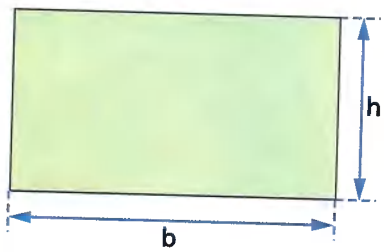
MW EDITORA E ILUSTRAÇÕES



Então, ao todo cabem 24 placas ($6 \cdot 4$) com lados de 1 m.

Em um retângulo, é costume chamar um dos lados de **comprimento** (ou base) e o outro de **largura** (ou altura). No retângulo a seguir indicamos por:

- *b* o comprimento ou medida da base.
- *h* a largura ou medida da altura.

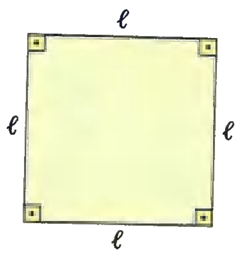


Escrevemos a área do retângulo A_r como:

$$A_r = b \cdot h$$

Área de um quadrado

Sendo o quadrado um caso particular de retângulo, em que a medida da base é igual a medida da altura ($b = h$), chamamos a medida do lado de ℓ e reescrevemos a área do quadrado A_q como:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

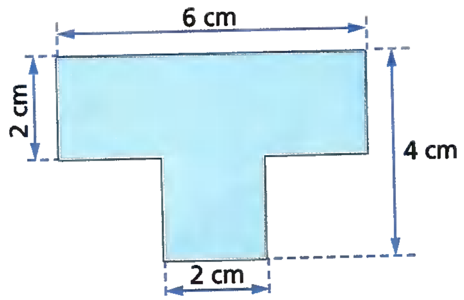
$$A_q = \ell \cdot \ell = \ell^2$$

Equivalência entre áreas

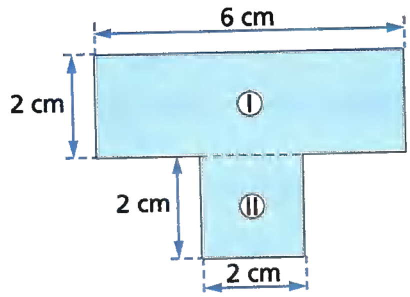
Decompondo figuras para calcular a área

Acompanhe a situação a seguir.

Uma folha de zinco tem a forma da figura ao lado. Quantos centímetros quadrados de área tem essa folha de zinco?



Nesse caso, convém decompor a figura dada em duas figuras conhecidas:



A figura I é um retângulo de base 6 cm e altura 2 cm, cuja área é:

6 cm · 2 cm = 12 cm²

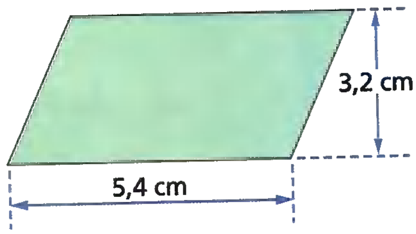
A figura II é um quadrado de lado 2 cm, cuja área é:

2 cm · 2 cm = 4 cm²

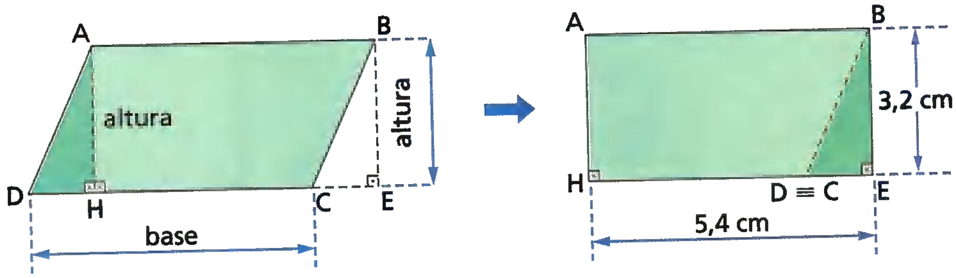
Área da figura = 12 cm² + 4 cm² = 16 cm²

Área do paralelogramo

A figura ao lado foi recortada de uma folha de cartolina. Qual é a área dessa figura?



Para saber qual é a área dessa figura podemos "transformar" o paralelogramo ABCD em um retângulo, cuja área já sabemos calcular.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Área = 5,4 cm · 3,2 cm = 17,28 cm²

A área da figura é 17,28 cm².

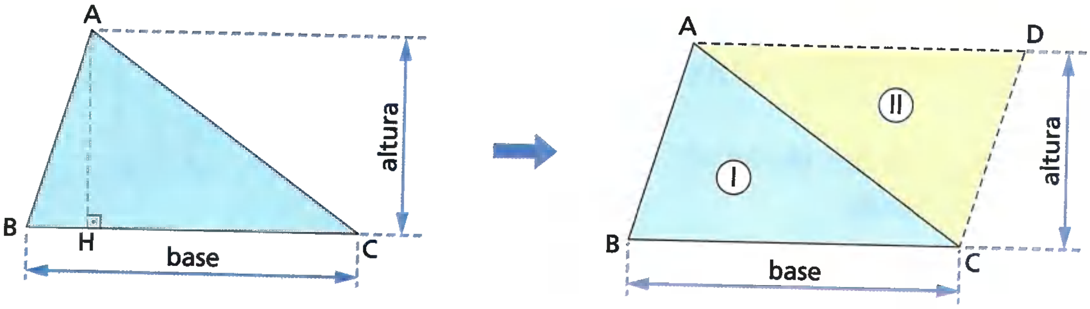
Observe que a área do paralelogramo ABCD é equivalente à área do retângulo ABEH.

área do paralelogramo = medida da base · medida da altura

Área do triângulo

No triângulo ABC, o segmento BC é a base, e o segmento AH é a altura relativa a essa base. Qual é a área desse triângulo?

A partir do triângulo ABC vamos construir o paralelogramo ABCD, cuja área já sabemos calcular.



Note que, na segunda figura, que os triângulos (I) e (II) possuem áreas equivalentes e, juntos, formam o paralelogramo ABCD.

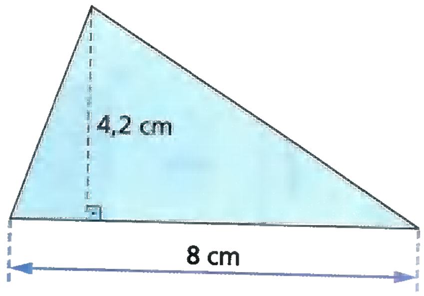
Então, a área do triângulo ABC é igual à metade da área do paralelogramo ABCD, ou seja:

$$\text{Área do triângulo ABC} = \frac{\text{Área do paralelogramo ABCD}}{2}$$

Como a área do paralelogramo é igual à medida da base multiplicada pela medida da altura, podemos escrever:

$$\text{Área do triângulo} = \frac{\text{medida da base} \cdot \text{medida da altura}}{2}$$

Para compor um vitral, recortei uma peça de vidro na forma triangular, como mostra a figura a seguir. Quantos centímetros quadrados de vidro há nessa peça?



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Dados:

- medida da base = 8 cm
- medida da altura = 4,2 cm

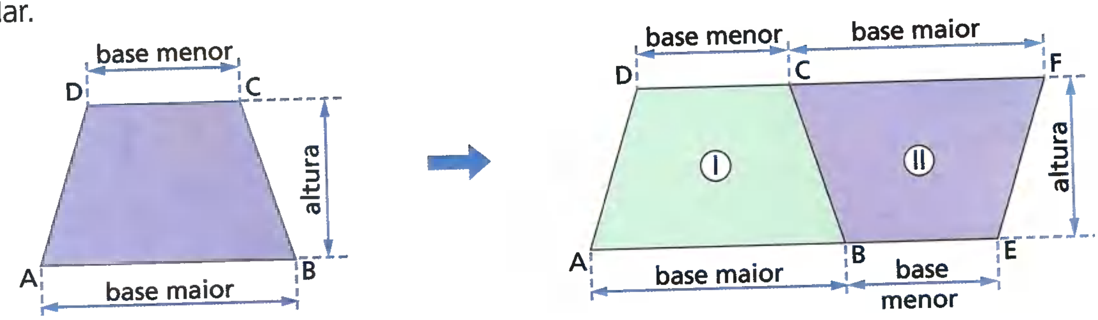
$$\text{Área} = \frac{8\text{ cm} \cdot 4{,}2\text{ cm}}{2} = \frac{33{,}6\text{ cm}^2}{2} = 16{,}8\text{ cm}^2$$

Na peça há 16,8 cm² de vidro.

Área do trapézio

Como calcular a área do trapézio ABCD, em que o segmento AB é a base maior, o segmento CD é a base menor, e a distância entre as bases é a medida da altura?

A partir do trapézio ABCD vamos construir o paralelogramo AEFD, cuja área já sabemos calcular.



Note que, na segunda figura, os trapézios I e II possuem áreas equivalentes e, juntos, formam o paralelogramo AEFD.

Então, a área do trapézio ABCD é igual à metade da área do paralelogramo AEFD, ou seja:

$$\text{Área do trapézio ABCD} = \frac{\text{Área do paralelogramo AEFD}}{2}$$

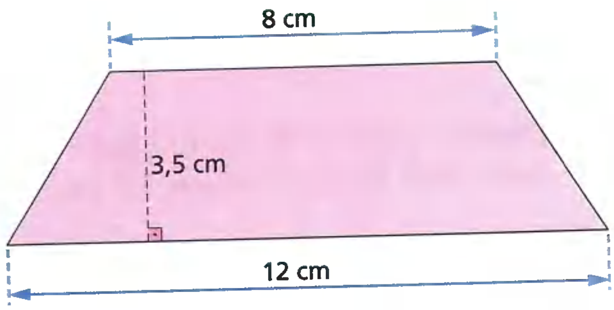
O paralelogramo e o trapézio dados têm alturas de mesma medida, e a medida da base do paralelogramo é a soma das medidas das bases maior e menor do trapézio. Então, podemos escrever:

$$\text{Área do trapézio ABCD} = \frac{\left(\begin{array}{c}\text{medida da}\\ \text{base maior}\end{array} + \begin{array}{c}\text{medida da}\\ \text{base menor}\end{array}\right) \times \begin{array}{c}\text{medida da}\\ \text{altura}\end{array}}{2}$$

A figura ao lado tem a forma de um trapézio. Quantos centímetros quadrados há nessa figura?

Dados:

- medida da base maior = 12 cm
- medida da base menor = 8 cm
- medida da altura = 3,5 cm



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$$\text{Área} = \frac{(12\text{ cm} + 8\text{ cm}) \cdot 3{,}5\text{ cm}}{2}$$

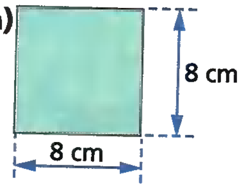
$$\text{Área} = \frac{20\text{ cm} \cdot 3{,}5\text{ cm}}{2} = 35\text{ cm}^2$$

Nessa figura há 35 cm².

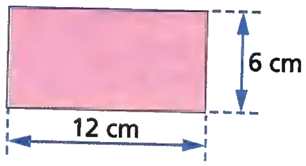
ATIVIDADES

1. Determine a área de cada figura geométrica representada a seguir.

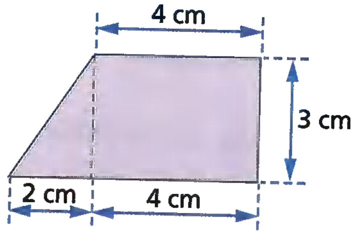
a)



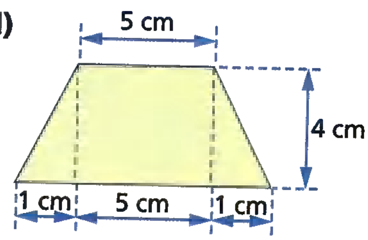
b)



c)



d)



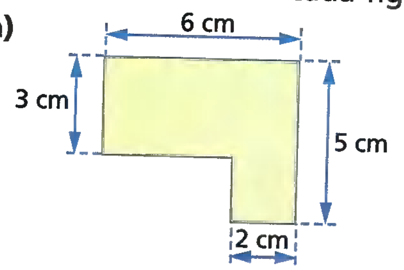
2. Determine a área de um triângulo cuja base mede 8 cm e a altura, 5,2 cm.

3. Em um paralelogramo, a base mede 10 cm. Sabendo que a medida da altura é a metade da medida da base, determine a área desse paralelogramo.

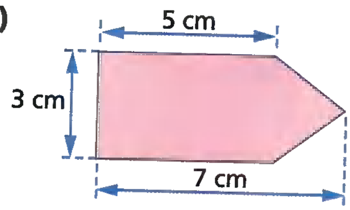
4. A base de um triângulo mede 18 cm. A medida da altura é igual a $\frac{2}{3}$ da medida da base. Qual é a área desse triângulo?

5. Determine a área de cada figura.

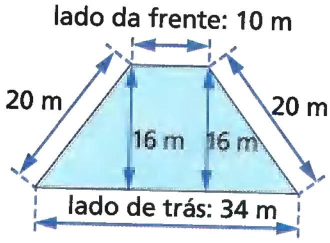
a)



b)



6. (Saresp-SP) A figura mostra a planta de um terreno, com a indicação de algumas medidas. Qual é a área desse terreno?



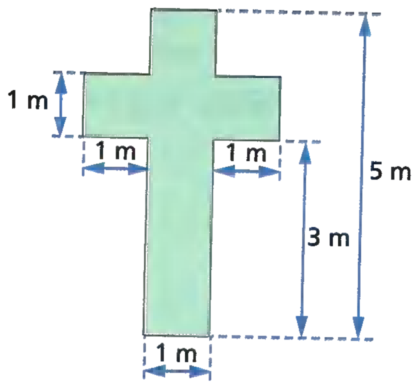
a) 84 m²

b) 160 m

c) 300 m²

d) 352 m²

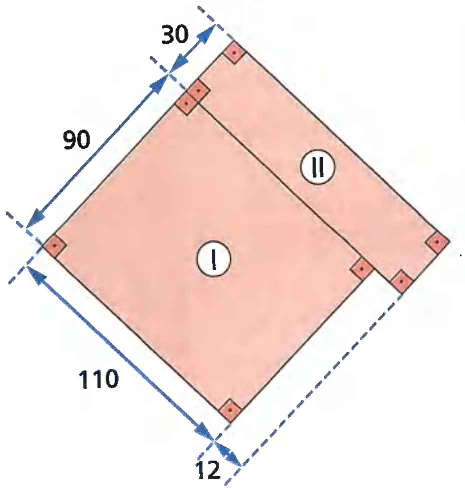
7. Um marceneiro deve fazer uma cruz como a da figura. Quantos metros quadrados de madeira serão necessários para realizar o trabalho?



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

8. As medidas oficiais de uma quadra de basquete são 20 m por 12 m. O pátio de uma escola tem a forma retangular e suas dimensões são 40 m por 32 m. Nesse pátio, foi construída uma quadra de basquete seguindo os padrões oficiais. Qual a área livre que restou nesse pátio?

9. Um terreno foi dividido em dois lotes, (I) e (II), como mostra a figura. Suas medidas estão indicadas em metros.



a) Qual é a área de cada lote?

b) Qual é a área total do terreno?

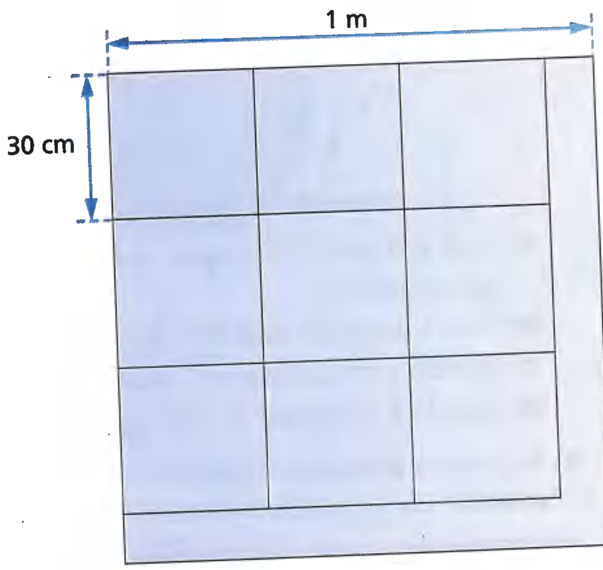
10. Em toda a extensão de um muro de 18,25 m de comprimento, devem ser aplicadas duas faixas de ladrilhos, paralelas entre si. A primeira faixa terá 1,25 m de altura, e a segunda terá 0,75 m. Se cada ladrilho ocupa uma área de 0,0625 m², quantos ladrilhos serão colocados nesse muro?

11. Eduardo precisa cercar, com arame, um terreno de forma retangular. Sem trena para fazer a medição, ele cortou uma vara de comprimento igual à sua altura (1,80 m) e mediu 55 varas no comprimento e 35 varas na largura do terreno. Qual é, em metros quadrados, a área desse terreno?

12. Vânia comprou um terreno retangular, conforme a figura a seguir. Ele está dividido em quatro regiões quadradas, e a garagem tem 20 m de perímetro. Qual é a área desse terreno?

13. Uma parede foi revestida com azulejos quadrados de 40 cm de lado. Sabendo que foram colocadas 7 fileiras de azulejos e que em cada fileira há 12 azulejos, quantos metros quadrados tem a área revestida?

14. Uma metalúrgica utiliza chapas de aço quadradas de 1 m de lado para recortar quadrados de 30 cm de lado. Ao sair da máquina, sobra uma parte da chapa original que é reaproveitada posteriormente. Quantos centímetros quadrados de cada chapa são reaproveitados?



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

ATIVIDADES

1. Transforme em centímetros cúbicos:

a) 1,7 m³

b) 15 600 mm³

c) 12 dm³

d) 30 L

2. Determine a unidade de medida de volume adequada em cada caso:

a) 3,5 m³ = 3500 ______

b) 124 cm³ = 0,124 ______

c) 4562,1 dm³ = 4,5621 ______

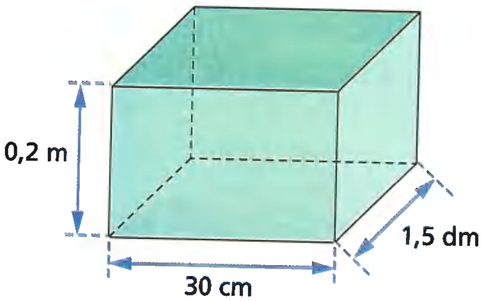
d) 750 L = 750 ______

3. Qual é o volume, em decímetros cúbicos, de um cubo cuja aresta mede 2 m?

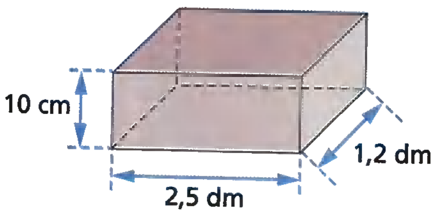
4. Um cubo tem volume igual a 27 m³. Qual é a medida da aresta desse cubo, em cm?

5. Calcule os volumes das figuras a seguir, indicando o resultado em cm³.

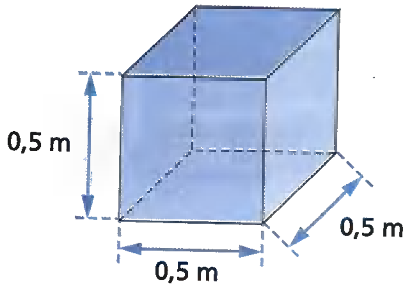
a)



b)



c)

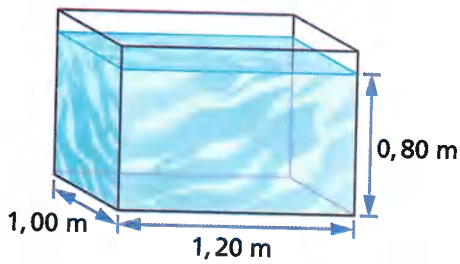


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

6. Calcule a medida da aresta de um cubo, sabendo que seu volume é igual a 64 m³.

7. Uma caixa retangular tem volume igual a 2 700 cm³. Seu comprimento mede 25 cm e sua largura é igual a 12 cm. Determine a medida da altura da caixa.

8. (Saresp-SP) Observe a figura.



O volume de água na caixa é de:

a) 0,96 L

b) 96 L

c) 960 L

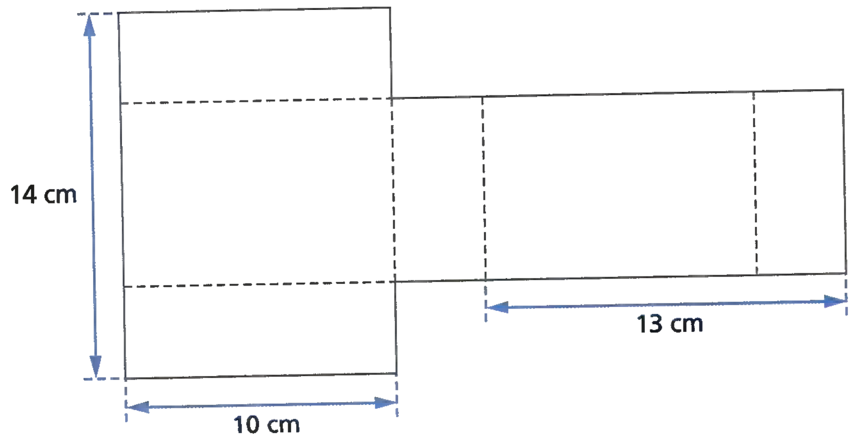
d) 9 600 L

9. Quantos baldes de 30 L serão necessários para encher uma caixa-d'água com capacidade de 0,6 m³. (Lembre-se de que 1 L = 1 dm³)

Balde de uso doméstico.

ILYA ANDRIYANOV/SHUTTERSTOCK.COM

10. (UFF-RJ) Uma caixa de papelão, na forma de paralelepípedo retângulo, é obtida dobrando-se o molde nas linhas tracejadas. O volume da caixa, em cm^3, é:



a) 120 **b)** 180 **c)** 240 **d)** 480 **e)** 540

11. (Enem/MEC) Um casal realiza sua mudança de domicílio e necessita colocar numa caixa de papelão um objeto cúbico, de 80 cm de aresta, que não pode ser desmontado. Eles têm à disposição cinco caixas, com diferentes dimensões, conforme descrito:

Caixa 1: 86 cm × 86 cm × 86 cm

Caixa 2: 75 cm × 82 cm × 90 cm

Caixa 3: 85 cm × 82 cm × 90 cm

Caixa 4: 82 cm × 95 cm × 82 cm

Caixa 5: 80 cm × 95 cm × 85 cm

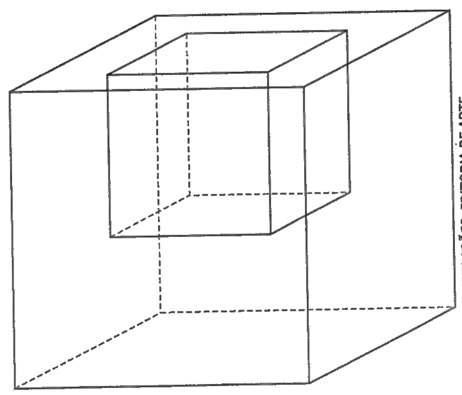
O casal precisa escolher uma caixa na qual o objeto caiba, de modo que sobre o menor espaço livre em seu interior.

A caixa escolhida pelo casal deve ser a de número

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

12. (Enem/MEC) Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm. O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de:

a) 12 cm^3
b) 64 cm^3
c) 96 cm^3
d) 1 216 cm^3
e) 1 728 cm^3



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

13. Elabore uma questão envolvendo o cálculo do volume dos sólidos geométricos estudados, oferecendo as dimensões e as unidades de medida desse sólido e em seguida troque-o com os colegas da classe.

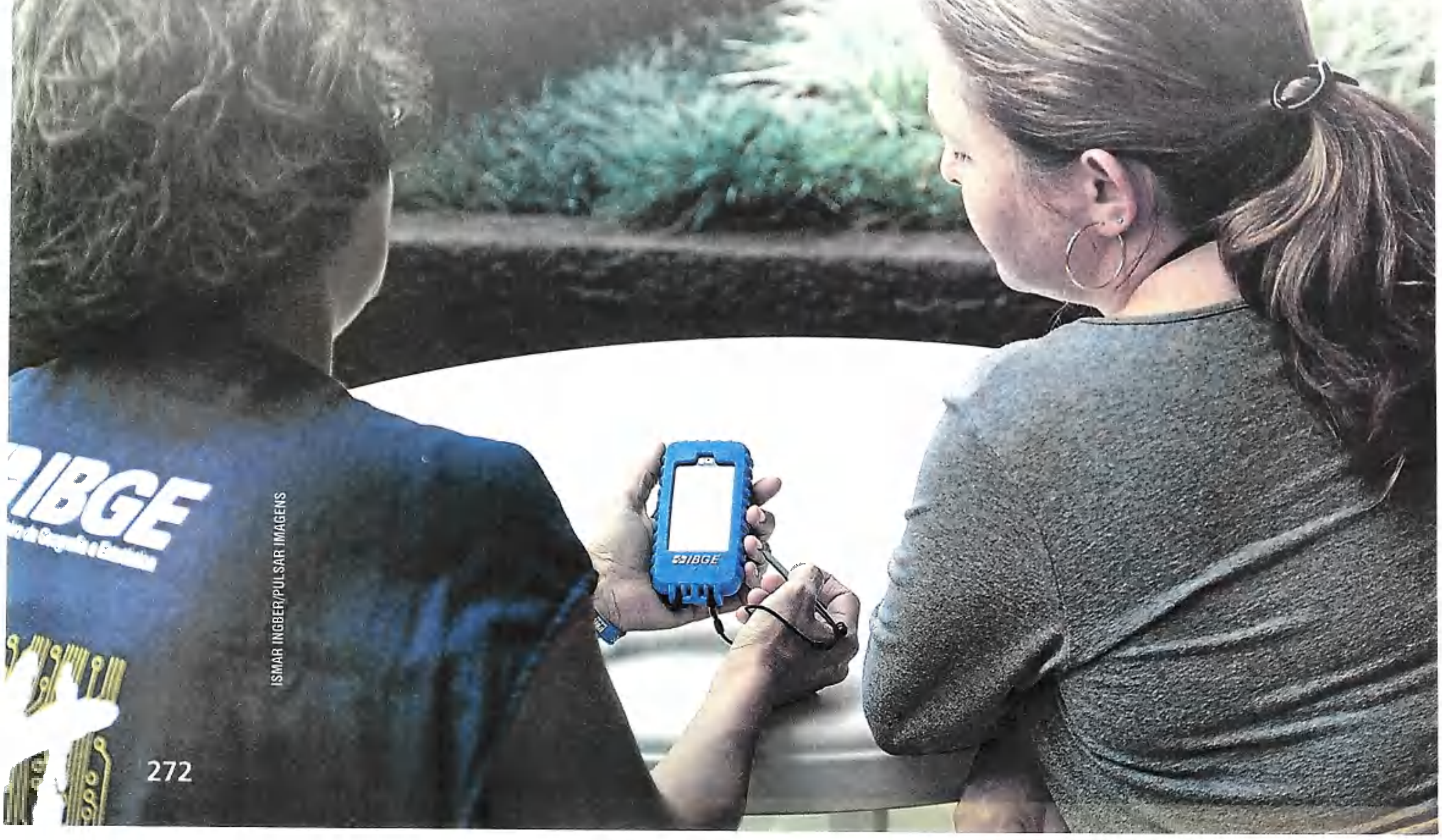
TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

Pesquisa por amostragem na coleta de dados do Censo Demográfico

O Censo Demográfico de 1960 foi o primeiro a utilizar amostragem na coleta de dados relativos a um conjunto selecionado de características de pessoas, famílias e domicílios. Foram usados dois tipos de questionários: um questionário pequeno aplicado a todos os domicílios e seus moradores, não selecionados para a amostra (chamado questionário básico); e um questionário longo (chamado questionário da amostra) aplicado a todos os domicílios selecionados para a amostra, bem como seus moradores. Nos Censos de 1960, 1970 e 1980, foi utilizada uma única fração amostral de 25% dos domicílios.[...]

No Censo 2010, para a parte do levantamento pesquisada por amostragem, foram aplicadas cinco frações de amostragem, considerando os tamanhos dos municípios em termos da população estimada em 1º de julho de 2009, tal como apresentada a seguir: 50% para os municípios com até 2500 habitantes; 33% para os municípios com mais de 2500 e até 8000 habitantes; 20%, para os municípios com mais de 8000 e até 20000 habitantes; 10% para os municípios com mais de 20000 e até 500000 habitantes; e 5% para os municípios com população superior a 500000 habitantes.[...]

Fonte: ALBIERI, S.; BIANCHINI, Z. M. **Principais Aspectos de Amostragem das Pesquisas Domiciliares do IBGE**: Revisão 2015. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv94403.pdf>. Acesso em: 22 out. 2018.



ISMAR INGBER/PULSAR IMAGENS

Faça o que se pede no caderno.

1. Elabore uma tabela com as informações sobre a distribuição das frações de amostragem de acordo com a população estimada em 2009, começando pelos municípios com até 2500 habitantes. Depois, construa um gráfico de sua preferência com os dados da tabela. Justifique a escolha do gráfico.

2. Veja a tabela a seguir com o *ranking* das capitais com maior número de domicílios particulares do Brasil:

Ranking das 10 capitais com maior número de domicílios particulares permanentes – Censo 2010 IBGE

Nome do município	Domicílios particulares permanentes	População
São Paulo – SP	3573509	11 253 503
Rio de Janeiro – RJ	2145379	6320446
Salvador – BA	858496	2675656
Brasília – DF	774037	2570160
Belo Horizonte – MG	762136	2375151
Fortaleza – CE	709952	2452185
Curitiba – PR	576190	1751907
Porto Alegre – RS	508098	1409351
Recife – PE	470896	1537704
Manaus – AM	460767	1802014

Fonte: IBGE.

- De acordo com os dados da tabela, determine a média de habitantes por domicílios particulares permanentes em cada capital.

3. Determine a amplitude do conjunto de dados dos domicílios particulares permanentes e a amplitude da população.

4. Pesquise a população e o número de domicílios particulares permanentes, no Censo de 2010, do seu município, e responda às questões a seguir:

a) De acordo com a tabela que você fez na primeira questão, qual o percentual de domicílios que foram pesquisados pelo IBGE no Censo 2010 no seu município?

b) Quantos domicílios foram pesquisados no seu município?

c) Qual é a média de habitantes por domicílios no seu município?

RETOMANDO O QUE APRENDEU

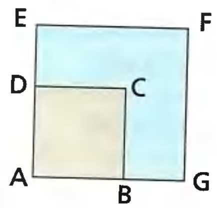
IMAGENS FORA DE PROPORÇÃO.

Responda às questões no caderno.

1. (Saresp-SP) Amélia deseja ladrilhar sua cozinha retangular de 3,45 m por 4,2 m com ladrilhos quadrados de 30 cm de lado. Qual é o número de ladrilhos necessários?

a) 49 **b)** 51 **c)** 161 **d)** 483

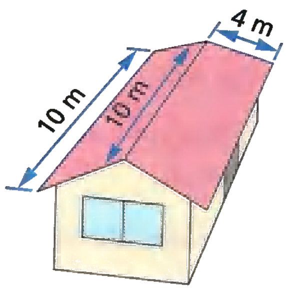
2. (Saresp-SP) Na figura há dois quadrados. A área do quadrado maior é 25 m² e $\overline{BG}$ mede 2 m.



A área da região pintada de azul é:

a) 16 m² **b)** 21 m² **c)** 9 m² **d)** 18 m²

3. (Saresp-SP) Se para cobrir cada m² de telhado são usadas 20 telhas francesas, então, para cobrir um telhado com as dimensões indicadas na figura, serão necessárias:



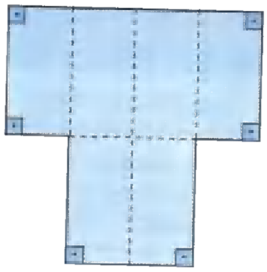
a) 1000 telhas. **c)** 1600 telhas.

b) 1200 telhas. **d)** 1800 telhas.

4. Um retângulo tem 15 cm de comprimento por 8 cm de largura. Vamos aumentar as medidas dos lados desse retângulo em 50%. Qual é a razão entre a área do novo retângulo e a área do retângulo inicial?

a) $\frac{4}{9}$ **b)** $\frac{9}{4}$ **c)** $\frac{2}{9}$ **d)** $\frac{9}{2}$ **e)** 4

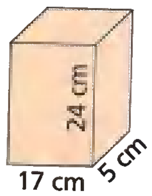
5. A figura a seguir mostra um terreno em forma de T e uma maneira de dividi-lo em retângulos de lados medindo *x* metros e 24 metros. Se a área do terreno é 2160 m², qual é o valor de *x*?



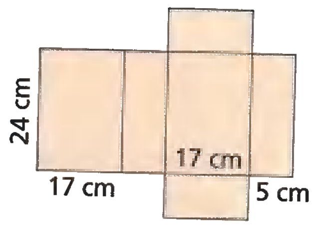
a) 90 m **c)** 15 m **e)** 18 m

b) 30 m **d)** 32 m

6. (Saresp-SP) Observe as figuras a seguir. Sabendo-se que a caixa tem 17 cm de comprimento, 5 cm de largura e 24 cm de altura, o papelão necessário para montar essa embalagem terá:



Caixa.



Caixa planificada.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

a) 2040 cm² **c)** 1106 cm²

b) 1226 cm² **d)** 1056 cm²

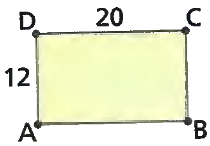
7. (Vunesp-SP) O menor país do mundo em extensão é o estado do Vaticano, com uma área de 0,4 km². Se o território do Vaticano tivesse a forma de um quadrado, então a medida de seus lados estaria entre:

a) 200 m e 201 m.
b) 220 m e 221 m.
c) 401 m e 402 m.
d) 632 m e 633 m.
e) 802 m e 803 m.

8. Uma faixa retangular de tecido medindo 7 m por 1,05 m deverá ser totalmente recortada em quadrados, sem deixar sobras. Todos os quadrados devem ter o mesmo tamanho, e cada quadrado deverá ter 0,35 m de lado. Nessas condições, quantos quadrados deverão ser obtidos?

a) 70
b) 60
c) 54
d) 50
e) 45

9. *A*, *B*, *C* e *D* são os vértices de uma região retangular, conforme mostra a figura.

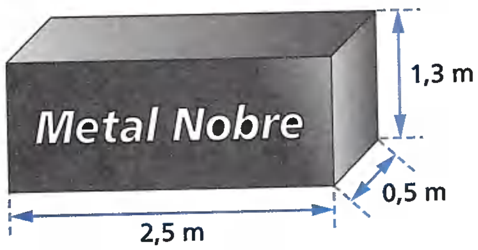


Considere que as medidas indicadas são dadas em quilômetros.

Se a densidade demográfica dessa região é de 72 habitantes por km², qual é a população dessa região?

a) 17 100 habitantes.
b) 17 200 habitantes.
c) 17 280 habitantes.
d) 17 300 habitantes.
e) 17 380 habitantes.

10. (Enem/MEC). A siderúrgica "Metal Nobre" produz diversos objetos maciços utilizando o ferro. Um tipo especial de peça feita nessa companhia tem o formato de um paralelepípedo retangular, de acordo com as dimensões indicadas na figura que segue.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

O produto das três dimensões indicadas na peça resultaria na medida da grandeza

a) massa.
b) volume.
c) superfície.
d) capacidade.
e) comprimento.

UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, retomamos e aprofundamos o estudo das áreas de algumas figuras geométricas planas, considerando a equivalência entre as áreas, e deduzimos as fórmulas das áreas do paralelogramo, do triângulo e do trapézio por meio da decomposição dessas figuras em outras figuras cujo cálculo da área é conhecido. Em seguida, revisamos o conceito de volume, determinando as fórmulas para calcular o volume do paralelepípedo e do cubo. Trabalhamos, também, com três importantes unidades de medida de volume: metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico.

Vamos retomar e refletir sobre as aprendizagens da Unidade 4:

- Descreva como você faria para calcular a área de uma figura geométrica plana sem sua fórmula.
- Como podemos definir o volume dos sólidos que estudamos?
- Qual deve ser o procedimento para transformar m³ em dm³. E dm³ em cm³?
- Você se recorda quanto vale 1 L em dm³?

Família e vida social

Família: não apenas um grupo, mas um fenômeno social

Considerando-se que a vida social é algo fundamental à existência e sobrevivência dos seres humanos enquanto indivíduos, é na família que se dá início ao processo de socialização, educação e formação para o mundo. [...]

[...] a família é um grupo informal, no qual as pessoas estão ligadas por afeto e afinidade, e que por conta deste sentimento criam vínculos que garantem a convivência (em um mesmo local de residência, por exemplo), além da cooperação econômica.

Fonte: RIBEIRO, P. S. **Família**: não apenas um grupo, mas um fenômeno social. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/sociologia/familia-nao-apenas-um-grupo-mas-um-fenomeno-social.htm>. Acesso em: 18 out. 2018.

De um modo geral, podemos dizer que os grupos familiares diferem em muitos aspectos, e é muito importante consideramos a cultura local e os costumes da sociedade em que esses indivíduos estão inseridos.

É importante compreender que as pessoas têm diferentes hábitos e costumes. Com as famílias isso não muda, cada família tem uma dinâmica, um jeito de se organizar para que as tarefas do cotidiano se tornem mais práticas de acordo com a realidade e com a necessidade daquele grupo.

Além disso, as famílias têm passado por algumas transformações em relação a sua estrutura e formação, e podemos atribuir parte delas às mudanças que aconteceram e estão acontecendo na sociedade. Por exemplo, atualmente a mulher tem conquistado mais espaço no mercado de trabalho, deixando assim, de ser a pessoa que se dedica exclusivamente à casa e aos filhos.

> Desde a década de 80 vem crescendo de maneira regular a proporção de domicílios com chefes mulheres. Em 1981 e 1985, esta proporção era, respectivamente, de 16,9% e 18,2%; em 1990 e 1995, era de 20,3% e 22,9%.
>
> Fonte: IBGE. **Indicadores sociais mínimos**: ISM. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas-novoportal/sociais/populacao/17374-indicadores-sociais-minimos.html?=&t=notas-tecnicas>. Acesso em: 23 out. 2018.

Responda às questões no caderno.

1. Discuta com os colegas e com o professor a importância de respeitar os diferentes costumes das pessoas, tanto no convívio familiar, como no convívio social.
2. Faça uma pesquisa para coletar informações acerca de sua cidade ou de cidades vizinhas. Primeiro, descubra o número da população, em seguida, calcule qual o percentual dessa população em relação à população brasileira.
3. Ainda a respeito de sua cidade, pesquise informações sobre a quantidade de homens e mulheres, ou outro dado que julgue interessante. Reúna-se com um colega e, juntos, elaborem gráficos com as informações coletadas. Para finalizar, compartilhe os dados com a turma.

FERNANDO FAVORETTO/CRIAR IMAGEM

Três gerações: avó, mãe e filha.

RESPOSTAS

UNIDADE 1

Números naturais e operações

Atividades p. 15

1. 1, 4, 7, 10, 13
2. A partir do 1, adiciona-se 5 a cada elemento para obter o número.
3. Alternativa *e*.
4. a) 124
   b) 86
   c) 100
   d) 1 000
   e) 5 209 010
   f) 1 002
5. a) 322
   b) 11
   c) 2
   d) 1 001
   e) 10 000
   f) 47 002
6. 101, 150, 197, 200, 207, 555, 700
7. Alternativa *c*.
8. *A* é igual a *B*.

Atividades p. 18

1. a) 15
   b) 22
   c) 30
   d) 12
   e) 27
2. 3 e 6, 4 e 5.
3. 23 282
4. a) 77
   b) 292
   c) 9 163
5. a) 39
   b) 70
   c) 71
   d) 36
6. 5 reais.
7. a) $4 \times 11 = 44$
   b) $7 \times 7 = 49$
   c) $7 \times 14 = 98$
8. a) 320
   b) 960
   c) 972
   d) 4 298
9. 450 biscoitos.
10. a) 70 reais.
    b) Eram uma cédula de 50 reais e uma de 20 reais.
11. 800 pessoas.
12. a) 11 com resto 1.
    b) 25 com resto 3.
    c) 16 com resto 7.
13. 5 ovos.
14. a) 0
    b) 0
    c) 0
    d) 93

Por toda parte p. 19

1. a)

População da cidade de Palmas (TO)

Ano	Habitantes em 2010	Habitantes em 2018	Habitantes em 2025
População	228 332	291 855	340 000

b) 2010/2018: 63 523 habitantes e 2018/2025: 48 145 habitantes; subtração.
c) Aproximadamente 153 hab./km²; a densidade demográfica de 2025 será maior que a de 2010.

Atividades p. 24

1. Alternativas *a*, *c* e *e*.
2. Alternativas *b*, *d* e *e*.
3. 6
4. 112
5. 302
6. 60
7. 9
8. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 e 47.
9. Alternativa *c*.
10. Quatro números: 53, 59, 61 e 67.
11. a) $2 \times 3 \times 3$
    b) $2 \times 5 \times 7$
    c) $2 \times 2 \times 3 \times 7$
    d) $2 \times 2 \times 5 \times 5$
    e) $2 \times 11 \times 11$
12. 81
13. $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$
14. 60 minutos.
15. 120 segundos.
16. 420 anos terrestres.
17. 20 dias.
18. 120 minutos.
19. 240 anos.
20. 18 centímetros.
21. 9 horas e 30 minutos.
22. 55 moedas.
23. 10 horas.
24. 13

Tratamento da informação p. 26

1. Ele mostra quantas pessoas desembarcaram no mês de abril de 2016, 2017 e 2018 em cada um dos três terminais rodoviários da cidade de São Paulo.
2. 1 262 456
3. O número de desembarques diminuiu ano a ano.
4. Para o terminal Barra Funda sim, mas para o terminal Jabaquara não, pois, para este terminal, o número de desembarques foi aumentando ano a ano.
5. Terminal Barra Funda; 15 415.
6. Resposta pessoal.
7. a) Ele mostra o número de chegadas de ônibus no mês de abril de 2016, 2017 e 2018 em cada um dos três terminais rodoviários da cidade de São Paulo.
   b) 52 107
   c) Terminal Jabaquara; 738
   d) Nota-se que, no terminal rodoviário do Tietê, o número de chegadas de ônibus vem diminuindo ano a ano no mês de abril. No terminal rodoviário Barra Funda, esse número diminuiu de 2016 para 2017 e aumentou de 2017 para 2018. Já no terminal Jabaquara, esse número vem sempre aumentando.

Retomando o que aprendeu p. 28

1. 4 338 342 000 km
2. Quando $a = 1$ e b é um número primo.
3. a) 996
   b) 12
   c) 0, 19, 38, 57, 76, 95, 114,133, 152, 171, 190
   d) 1, 3, 5, 7, 11, 15, 21, 33, 35, 55, 77, 105, 165, 231, 385, 1 155
4. 180
5. 18
6. a) 14
   b) 45
   c) 84
   d) 13
   e) 72
7. a) 1 260
   b) 1 125
   c) 1 440
8. 27
9. 1 024
10. 40
11. Alternativa *b*.
12. 960 copos.
13. 60, 81, 102, 123, 144
14. Alternativa *b*.
15. 84.
16. a) 6 minutos.
    b) 9 voltas completas.

UNIDADE 2

O conjunto dos números inteiros

Pense e responda p. 32

1. a) Internacional e Corinthians.
   b) Fluminense, América-MG, Bahia e Ceará.
   c) Os saldos positivos foram indicados com o sinal "+", e os saldos negativos, com o "−".
   d) −10

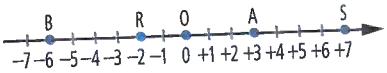
Atividades p. 35

1. a) +25
   b) −15
   c) −2 500
   d) −10
   e) +1 600
   f) +4
   g) −5
   h) −600
2. −484
3. a) 0 (zero).
   b) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10.
   c) −1, −2, −3 e −4.
   d) Resposta pessoal.
4. −400; negativos.
5. a) −50 reais.
   b) −1 700

Atividades p. 38

1. a) +4
   b) −2
   c) +6
   d) +9
   e) −5

2. Cidade *B*: -200 km; cidade *C*: $+600$ km.
3. a) 200 km
   b) 500 km
   c) 600 km
   d) 300 km
   e) 1 100 km
   f) 900 km
4. Avião *A*: -50 km; avião *B*: $+150$ km.
5. a) O ponto *S*.
   b) O ponto *Q*.
6.



7. Alternativa *a*.
8. Alternativa *c*.

Atividades p. 40

1. a) 5 b) 8 c) 3 d) 7 e) 7 f) 8 g) 5 h) 8
2. a) $|+25| = 25$ b) $|-40| = 40$
3. $+20$ e -20.
4. $-2, -1, 0, +1$ e $+2$.
5. $+36$
6. -2
7. a) 140 quilômetros.
   b) 15 graus Celsius.
   c) 110 metros.

Pense e responda p. 41

1. a) Rio de Janeiro.
   b) Montevidéu.
   c) Tóquio.
   d) Londres.
   e) Montevidéu.
   f) Rio de Janeiro.
2. Oslo (Noruega).

Atividades p. 43

1. a) $a > 0$
   b) $b < 0$
   c) $c > 0$
   d) $0 > d$
   e) $a > b$
   f) $a > c$
   g) $d < a$
   h) $b < c$
   i) $b > d$
2. a) $0 < +9$
   b) $+13 > 0$
   c) $0 > -7$
   d) $-20 < 0$
   e) $+1 > -10$
   f) $-25 < +9$
   g) $+11 < +30$
   h) $-11 > -30$
   i) $-20 < +4$
   j) $+20 > -4$
3. Bonito.
4. $+12, +7, +1, -100, -160, -300, -500$
5. a) $+28$
   b) -21
   c) $+75$
   d) -96
6. a) $+90$
   b) -100
7. a) $-14, -11, 0, +12, +16$
   b) $0, -11, -14, -17, -30$
8. a) $A = \{-19, -18, -17, -16, -15, -14, ...\}$
   b) $B = \{..., -13, -12, -11, -10, -9, -8\}$
   c) $C = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2\}$
9. a) Três. b) Quatro.

Por toda parte p. 44

1. $-6{,}6 < -3$ °C < 25 °C < 30 °C
2. -14 °C < -11 °C; -11 °C > -14 °C

Pense e responda p. 46

1. 28 °C
2. 5 °C
3. -1 °C
4. 38 °C

Atividades p. 50

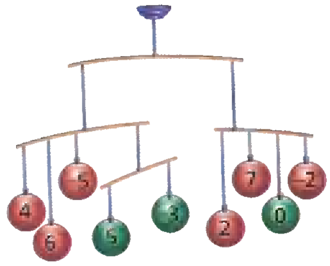
1. Lucro de 50 reais.
2. Zero.
3. Em -82 ou em 82 a.C.
4. Não
5. a) $+12$
   b) -92
   c) -32
   d) $+17$
   e) -10
   f) -13
   g) $+18$
6. a) -17 b) $+9$ c) $+18$ d) -26 e) -173 f) -8
7. a) 2º andar.
   b) 1º andar.
   c) Térreo.
   d) 3º andar.
8. a) $31 - 27 = 4$
   b) $-50 + 45 = -5$
   c) $-20 - 11 = -31$
   d) $47 + 23 = 70$
   e) $-21 + 55 - 29 = 5$
9. a) 24 b) -10 c) 5 d) -8 e) -4 f) -51 g) 46 h) 29 i) -23 j) 34
10. O número que aparece em cada bloco corresponde à soma dos números dos blocos que o apoiam.
11. a) $+23$ b) Zero. c) $+1$ d) -86 e) $+115$ f) -16 g) $+10$ h) -37
12. Alternativa *b*.
13. a) $+2\,100$ reais.
    b) -900 reais.
14. Caio deve depositar pelo menos 400 reais.
15. -37, -22 e $+19$, respectivamente.
16. a) $+6$ b) -8 c) -20 d) $+18$ e) $+14$
17. -30 °C

Atividades p. 54

1. a) -25 b) $+15$ c) -43 d) -7 e) $+63$ f) $+12$ g) -37 h) -40 i) $+104$ j) $+14$
2. $A \neq B$
3. 31 °C
4. 77 m
5. 440 pontos.
6. a) 19 °C b) 5 °C c) 5 °C d) 7 °C e) 10 °C
7. 74 anos.
8. a) -8
   b) -2

Atividades p. 57

1. a) -9
   b) $+11$
   c) -13
   d) $+21$
   e) $3 + 2$
   f) $+1 - 10$
   g) $7 + 6 - 3$
   h) $1 + 1 - 5$
   i) $9 - 4 - 2$
   j) $-1 - 1 + 4$
2. a) $+4$ b) -8 c) $+2$ d) -13 e) -2
3. a) $+23$ b) $+63$ c) -8 d) -18
4. a) Na sexta-feira ($+116$).
   b) Na quinta-feira ($+3$).
   c) Aumentou; 233.
5. a) $+250$ pontos.
   b) $+380$ pontos.
   c) A dupla de Bia.
   d) 130 pontos.
6. a) $+90, -27, -40, 0, +32$ e -25.
   b) $-32, +60, +50, -19, -36$ e $+27$.
7. $+9970$
8. a) $+11$ b) -16 c) -33 d) $+59$
9. a) Zero. b) -2 c) $+3$ d) Zero.
10. a) -9 °C.
    b) -5 °C.
11. Uma resposta possível:



BENTINHO

Atividades p. 63

1. a) -35 b) $+72$ c) $+30$ d) -99 e) -42 f) $+66$
2. a) -2 b) -5 c) $+3$ d) $+4$
3. a) $+216$ b) -350 c) $+245$ d) -960
4. $+18$
5. $x = y$
6. a) Em oito.
   b) Em oito.
7. $-12\,000$
8. -2 e -3; $+5$ e -2.

Atividades p. 65

1. a) -3 b) $+8$ c) $+1$ d) -9 e) -1 f) $+22$ g) -5 h) Zero. i) $+15$ j) -16 k) $+4$ l) -3 m) $+6$ n) -8 o) $+5$ p) -6
2. a) Negativo. b) Zero. c) Positivo. d) Zero.
3. $x \neq y$
4. a) $+40$ b) -8 c) $+30$ d) Zero.
5. As divisões *c*, *d* e *f*.
6. Se o quociente exato é 1, temos $x = y$. Se o quociente exato é -1, *x* e *y* são números inteiros opostos.
7. • $+2$
   • -2
   • -2
   • 2
   • $+200$
   • $+20$
   • $+20$
   • -20
8. a) -9 b) $+73$ c) -41
9. -4

Pense e responda p. 66

1. a) +1 b) +1 c) +1 d) +1 e) +1 f) +1 g) +1 h) −1 i) +1 j) −1 k) +1 l) −1
2. a) A potência é sempre um número inteiro positivo.
   b) O sinal do resultado vai depender do sinal da base (não nula): base positiva, potência positiva; base negativa, potência negativa.

Atividades p. 68

1. Positivo.
2. Negativo.
3. a) +64 b) +64 c) +512 d) −512 e) +1 f) +1 = 1 g) −100 h) +1 i) −1 j) +1 k) +1 l) +1 000 000
4. a) $(-8)^{10}$ b) $(+2)^{12}$ c) $(-10)^{3}$ d) $(+9)^{20}$ e) $(-13)^{6}$ f) $(+7)^{12}$ g) $(+10)^{14}$ h) $(+20)^{1}$
5. a) +81 e +80
   b) +16 e −16
   c) +36 e +50
   d) +25, −27 e +16
   e) −121 e +20
   f) +36, +4 e −1
   g) +28 e +25
6. +64
7. Negativo.
8. +2
9. a) −1 000 b) Zero.
10. a) 16 cartões.
    b) Um cartão cujo resultado da operação é um número inteiro positivo.
    c) 9 em 16.

Atividades p. 69

1. a) 5 b) 8 c) Não existe em $\mathbb{Z}$. d) 1
2. Os números $\sqrt{37}$ e $\sqrt{80}$ não são inteiros.
3. a) 6 b) −8 c) 10 d) −7 e) 20 f) −30 g) −50 h) 12
4. Não, pois não existe em $\mathbb{Z}$ raiz quadrada de número negativo.

Atividades p. 71

1. a) +1 b) −2 c) −5 d) Zero. e) +39 f) +11 g) +46 h) −17
2. a) +4 b) +6 c) +73 d) Zero. e) −2 f) +4 g) −8 h) −19
3. Alternativa e.
4. x = 1 024; 32
5. y = −1; −1
6. a) +11 b) −15 c) −11 d) −2 e) Zero. f) −10 g) +21 h) −24
7. a) +1 b) −1 c) −12 d) +68 e) −100 f) +22 g) +41 h) −32
   Diferença 168.
8. +11
9. −1
10. 12
11. a) −8 b) 134 c) 625

Tratamento da informação p. 72

1. a) Na quarta-feira. 33 kg.
   b) Na quinta-feira. 98 kg.
   c) 131 kg.
   d) Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.

Retomando o que aprendeu p. 74

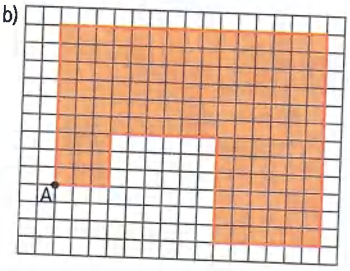
1. Alternativa *e*.
2. Alternativa *b*.
3. Alternativa *c*.
4. Alternativa *a*.
5. Soma 36.
6. Alternativa *a*.
7. Alternativa *b*.
8. Alternativa *c*.
9. Alternativa *c*.
10. Alternativa *b*.
11. Alternativa *a*.
12. Alternativa *d*.
13. Alternativa *b*.
14. Alternativa *c*.

UNIDADE 3

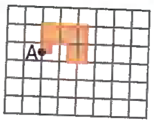
Transformações geométricas e simetria

Pense e responda p. 80

1. a) A partir do ponto *A*, para cima: 3, 5, 4, 2, 2, 2, 1 e 1.
   b)

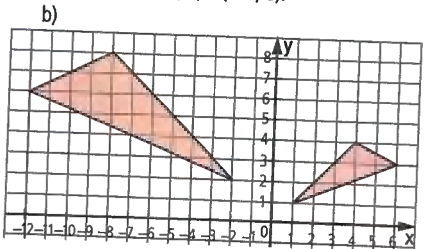


   c)

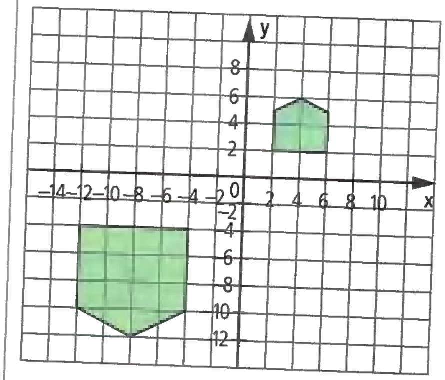


Atividades p. 82

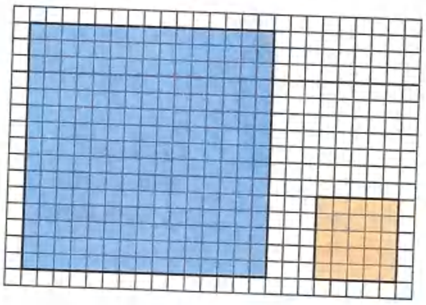
1. a) (2, 3), (8, 3), (8, 6), (6, 4) e (4, 6).
   b) Fator 2.
2. a) (−2, 2), (−12, 6) e (−8, 8).
   b)



   c) Ele é uma ampliação de fator 2 do original, mas localizado no 2º quadrante do plano cartesiano.
3. a) Uma possível resposta: multiplicar por −1 apenas a coordenada do eixo vertical (*y*) de todos os pontos e, depois, por 2 todos os valores das coordenadas obtidas. (4, −2), (12, −2), (14, −8), (12, −14), (4, −14) e (2, −8).
4. a) (−4, −4), (−12, −4), (−12, −10), (−8, −12) e (−4, −10).
   b)



5. Multiplicar por −1 apenas a coordenada do eixo horizontal dos pontos do polígono.
6.



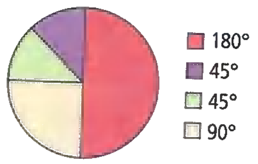
7. O retângulo B, que é uma redução do retângulo original, pois é o único que teve as medidas dos lados multiplicadas por um mesmo valor, ou seja, não sofreu deformação.

Por toda parte p. 83

1. Por 25.
2. Altura: 50 m; dimensões da base: 45 m por 22 m.
3. 225 mm por 85 mm por 59 mm.

Tratamento da informação p. 84

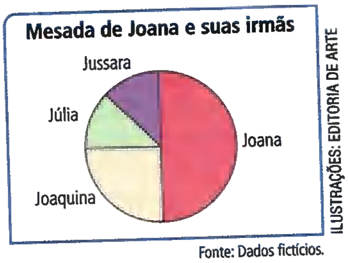
1. a) 180° b) 50% c) 90° d) 25% e) 45° f) 12,5%
2. Uma possível resposta:



3. a) 4 dobras.
   b) 22,5°
   c) 6,25%
4.

Número de partes em que o círculo foi dividido	Medida do ângulo que cada parte representa	Percentual que cada setor representa
2	180°	50%
4	90°	25%
8	45°	12,5%
16	22,5° ou 22°30′	6,25%

5. Uma resposta possível:



Fonte: Dados fictícios.

Pense e responda p. 87

1. a) As duas figuras têm mesma forma e mesmo tamanho.
   b) As duas figuras estão em posições opostas em relação à linha vermelha, viradas ao contrário uma em relação à outra e a uma mesma distância da linha.

Pense e responda p. 88

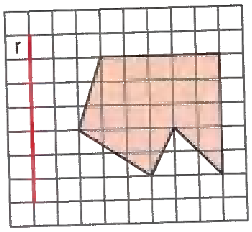
1. Todos os pontos da Figura 1 estão a cinco lados de quadradinho de distância de seu correspondente na Figura 3.

Pense e responda p. 89

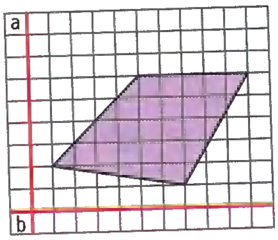
1. a) Os dois segmentos têm a mesma medida.
   b) A medida do comprimento de um segmento de reta é sempre igual quando comparada à do segmento formado pelo ponto correspondente e o ponto indicado pela tachinha.

Atividades p. 90

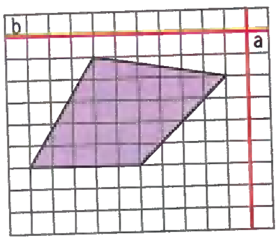
1. As figuras *A*, *C* e *E*.
2. a) 1
   b) 4
   c) 6
   d) 0
   e) 2
3. II e III.
4.



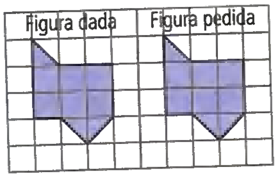
5. a)



b)



6. I e III.
7. Resposta pessoal.
8.



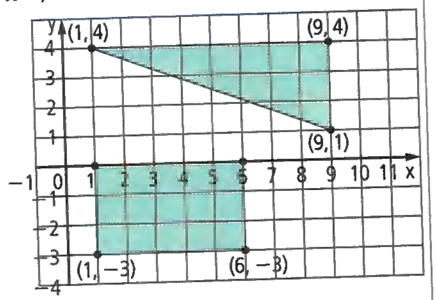
9. a) 180° no sentido horário ou anti-horário.
   b) Não, pois o ângulo de rotação entre essas figuras é de 120° no sentido anti-horário considerando a figura 4 obtida como rotação da figura 2.
10. É uma simetria de rotação com centro de rotação no ponto de encontro das nadadeiras desses dois peixes e um ângulo de rotação de 180°, no sentido horário ou no sentido anti-horário.

Tecnologias p. 92

1. A distância entre um vértice e a reta, bem como a distância entre a reta e seu vértice correspondente, são iguais.
2. As medidas se alteram, mas é mantida a igualdade observada anteriormente.
1. Todas as medidas são iguais.
2. Resposta pessoal; o comprimento do vetor é igual à distância entre os vértices da primeira figura e seus correspondentes na segunda figura.
3. A segunda imagem se movimenta na mesma direção do vetor; a relação permanece a mesma: o comprimento do vetor é igual à distância entre os vértices da primeira figura e seus correspondentes na segunda figura.
1. As duas medidas são iguais.
2. Todos os ângulos formados possuem a mesma medida, a do ângulo de rotação.

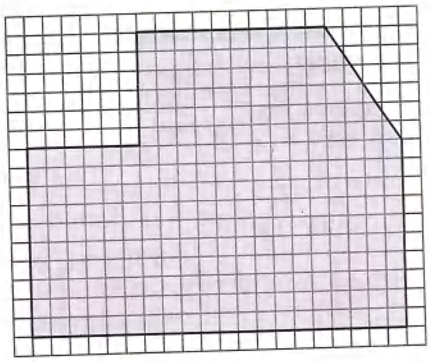
Retomando o que aprendeu p. 94

1. a)

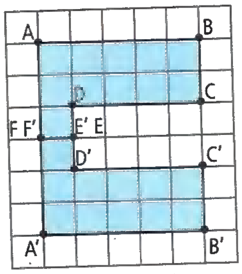


   b) Multiplicar por −1 a coordenada do eixo vertical (y) de cada vértice.
   c) Construção do aluno.
   d) Triângulo: (1, −4), (9, −4) e (9, −1).
      Retângulo: (2, 6), (12, 6), (2, 0) e (12, 0).
2. a) No 3º quadrante.
   b) O quadrado transformado fica desenhado no 1º quadrante com o dobro da medida do lado do quadrado original.

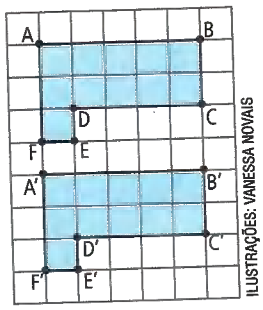
3. Uma resposta possível: com fator de ampliação 2:



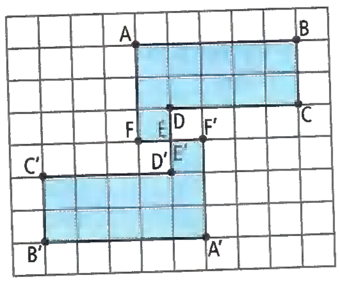
4. Alternativa *d*.
5. Como o polígono original está representado no 1º quadrante e a figura obtida está no 4º quadrante, podemos concluir que as coordenadas de todos os pontos do polígono original foram multiplicadas por um número negativo. Além disso, sabendo que os lados da figura obtida têm o dobro das medidas dos lados correspondentes do polígono original, podemos concluir que esse número, ou fator, é −2.
6. Uma translação na direção horizontal da direita para a esquerda de 15 cm de distância.
7. Reflexão em relação à superfície do lago.
8. a)



b)



c)



9. Resposta pessoal.

Atualidades em foco p. 96

1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.
3. Resposta pessoal.

Educação financeira p. 241

1. Ajudam os pais a fazerem compras mais conscientes.
2. Aproximadamente 275 pais e mães.
3. Por volta de 165 pais e mães.
4. Resposta pessoal.

Atividades p. 243

1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{1}{3}$

3. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{2}$

4. a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{6}$

5. Alternativa *d*.

Tratamento da informação p. 244

1.

Repetições	Resultado			
	Cara	Probabilidade (cara)	Coroa	Probabilidade (coroa)
10	4	$\frac{4}{10} = 0,4 = 40\%$	6	$\frac{6}{10} = 0,6 = 60\%$
50	23	$\frac{23}{50} = 0,46 = 46\%$	27	$\frac{27}{50} = 0,54 = 54\%$
100	53	$\frac{53}{100} = 0,53 = 53\%$	47	$\frac{47}{100} = 0,47 = 47\%$
200	97	$\frac{97}{200} = 0,485 = 48,5\%$	103	$\frac{103}{200} = 0,515 = 51,5\%$
300	146	$\frac{146}{300} = 0,486 = 48,6\%$	154	$\frac{154}{300} = 0,513 = 51,3\%$
400	191	$\frac{191}{400} = 0,4775 = 47,75\%$	209	$\frac{209}{400} = 0,5225 = 52,25\%$
500	261	$\frac{261}{500} = 0,522 = 52,2\%$	239	$\frac{239}{500} = 0,478 = 47,8\%$
600	323	$\frac{323}{600} = 0,5383 = 53,8\%$	277	$\frac{277}{600} = 0,461 = 46,1\%$
700	346	$\frac{346}{700} = 0,494 = 49,4\%$	354	$\frac{354}{700} = 0,505 = 50,5\%$
800	401	$\frac{401}{800} = 0,50125 = 50,1\%$	399	$\frac{399}{800} = 0,49875 = 49,8\%$
900	454	$\frac{454}{900} = 0,5044 = 50,4\%$	446	$\frac{446}{900} = 0,4955 = 49,5\%$
1000	498	$\frac{498}{1000} = 0,498 = 49,8\%$	502	$\frac{502}{1000} = 0,502 = 50,2\%$

À medida que aumentamos o número de lançamentos, a tendência é que os resultados obtidos se aproximem mais da probabilidade calculada.

2. a) Resposta pessoal.
   b) Resposta possível: A moeda poderia ser viciada.

Atividades p. 248

1. a) Inglês: 15; Espanhol: 22.
   b) Manhã: 18; tarde: 18; noite: 19,5.
2. a) O consumo médio mensal é aproximadamente 13,83 m³.
   b) Aproximadamente 0,46 m³.
3. a) 186 refeições; não.
   b) Terça-feira, quinta-feira e sexta-feira.
   c) 140 refeições.
   d) O valor médio está mais próximo do valor máximo.

Por toda parte p. 249

1. a) 157,5 kWh; 32,4 kWh
   b) 217,55 kWh
   c) R$ 119,65
   d) 232,7 kWh
   e) R$ 127,99
   f) Resposta pessoal.
   g) Resposta pessoal.

Atividades p. 253

1. a) 100 médicos. b) 34%
2. A censitária, pois o tamanho da população é suficientemente pequeno para que todos os elementos sejam pesquisados.
3. Resposta possível: a amostra deve conter pessoas de ambos os sexos, de diferentes idades, com diferentes rendas e de vários lugares do país.
4. Não, pois não foi informada a quantidade de sócios e a amostra pode não representar a população, ou seja, todos os sócios do clube.
5. Resposta pessoal.

Tecnologias p. 254

1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.
3. Resposta pessoal.

Retomando o que aprendeu p. 256

1. Alternativa *d*.
2. Alternativa *b*.
3. Alternativa *e*.
4. Alternativa *c*.
5. Alternativa *d*.
6. Censitária, pois a escola contatou todos os alunos entre 7 e 16 anos.
7. Alternativa *d*.

UNIDADE 9

Área e volume

Atividades p. 264

1. a) 64 cm² c) 15 cm²
   b) 72 cm² d) 24 cm²
2. 20,8 cm²
3. 50 cm²
4. 108 cm²
5. a) 22 cm² b) 18 cm²
6. Alternativa *d*.
7. 7 m²
8. 1 040 m²
9. a) (I): 9 900 m²; (II): 3 660 m²
   b) 13 560 m²
10. 584 ladrilhos.
11. 6 237 m²
12. 375 m²
13. 13,44 m²
14. 1 900 cm².

Por toda parte p. 266

1. a) Aproximadamente 24,8 hab./km².
   b) Aproximadamente 3 861 hab./km².
2. a) Rio Grande do Sul; 281 731 km².
   b) Rio Grande do Sul; 10 693 929 habitantes.
   c) Aproximadamente 37,9 hab./km².
   d) Aproximadamente 65,3 hab./km².
3. Resposta pessoal.

Pense e responda p. 267

3 m

Atividades p. 270

1. a) 1 700 000 cm³ c) 12 000 cm³
   b) 15,6 cm³ d) 30 000 cm³
2. a) dm³ c) m³
   b) dm³ d) dm³
3. 8 000 dm³
4. 300 cm
5. a) 9 000 cm³ c) 125 000 cm³
   b) 3 000 cm³
6. 4 m
7. 9 cm
8. Alternativa *c*.
9. 20 baldes.
10. Alternativa *c*.
11. Alternativa *c*.
12. Alternativa *d*.
13. Resposta pessoal.

Tratamento da informação p. 272

1. Frações de amostragem utilizadas no Censo 2010

População dos municípios (hab.)	Fração de amostra dos domicílios (%)
Até 2 500	50
Mais de 2 500 até 8 000	33
Mais de 8 000 até 20 000	20
Mais de 20 000 até 500 000	10
Mais de 500 000	5

Fonte: ALBIERI, S.; BIANCHINI, Z. M. **Principais Aspectos de Amostragem das Pesquisas Domiciliares do IBGE**: Revisão 2015. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv94403.pdf>. Acesso em: 22 out. 2018.

Resposta pessoal.

2. Valores aproximados: São Paulo: 3,15; Rio de Janeiro: 2,95; Salvador: 3,12; Brasília: 3,32; Belo Horizonte: 3,12; Fortaleza: 3,45; Curitiba: 3,04; Porto Alegre: 2,77; Recife: 3,27; Manaus: 3,91.
3. 3 112 742; 9 844 152.
4. Respostas pessoais.

Retomando o que aprendeu p. 274

1. Alternativa *c*.
2. Alternativa *a*.
3. Alternativa *c*.
4. Alternativa *b*.
5. Alternativa *c*.
6. Alternativa *b*.
7. Alternativa *d*.
8. Alternativa *b*.
9. Alternativa *c*.
10. Alternativa *b*.

Atualidades em foco p. 276

1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.
3. Resposta pessoal.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASOCIACIÓN DE MAESTROS ROSA SENSAT. **Didáctica de los números enteros**. Madrid: Nuestra Cultura, 1980.

BERLOQUIN, Pierre. **100 jogos geométricos**. Tradução Luís Filipe Coelho e Maria do Rosário Pedreira. Lisboa: Gradiva, 1991.

BORDENAVE, Juan Díaz; PEREIRA, Adair Martins. **Estratégias de ensino-aprendizagem**. 7. ed. Petrópolis: Vozes, 1985.

BORIN, Júlia. **Jogos e resolução de problemas**: uma estratégia para as aulas de Matemática. v. 6. São Paulo: CAEM-USP, 1995. (Coleção Ensino Fundamental.)

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 2. ed. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria do Ensino Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais – Matemática**. Brasília, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação; Conselho Nacional de Educação. **Base Nacional Comum Curricular – Ensino Fundamental**. Brasília: MEC, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes curriculares nacionais gerais da educação básica**. Brasília, DF: SEB: Dicei, 2013.

BRUNER, Jerome S. **O processo da educação**. Tradução Lobo L. de Oliveira. 4. ed. São Paulo: Nacional, 1974.

CAGGIANO, Angela et al. **Problema não é mais problema**. v. 4. São Paulo: FTD, 1996.

CAMPOS, Tânia Maria Mendonça (Coord.). **Transformando a prática das aulas de Matemática**: textos preliminares. São Paulo: Proem, 2001.

CAZOLA, Irene; SANTANA, Eurivalda (Org). **Do tratamento ao levantamento estatístico**. Itabuna: Via Litterarum, 2010.

CENTURIÓN, Marília. **Conteúdo e metodologia da Matemática**: números e operações. São Paulo: Scipione, 1994.

COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (Org.). **As ideias da álgebra**. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação**: reflexões sobre educação e Matemática. São Paulo: Summus; Campinas: Ed. da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

D'AMBROSIO, Ubiratan (execução do projeto); BASTOS, Almerindo Marques (Coord.). **Geometria experimental**: livro do professor. Rio de Janeiro: PREMEN – MEC/IMECC – UNICAMP, 1985.

______. **Geometria experimental**: 5ª série. Rio de Janeiro: PREMEN – MEC/IMECC – UNICAMP, 1985.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas**. São Paulo: Ática, 1989.

DIENES, Zoltan P. **As seis etapas do processo de aprendizagem em Matemática**. São Paulo: EPU, 1975.

______. **Frações**. São Paulo: Helder, 1971.

______. **Lógica y juegos lógicos**. Madrid: Distein, 1975.

DIENES, Zoltan P.; GOLDING, E. W. **Conjuntos, números e potências**. São Paulo: EPU, 1974.

______. **Exploração do espaço e prática da medição**. São Paulo: EPU, 1984.

DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira; SMOLE, Kátia Cristina Stocco. **O conceito de ângulo e o ensino de geometria**. v. 3. São Paulo: CAEM-USP, 1993. (Coleção Ensino Fundamental.)

FUNBEC/CAPES. **Revista do Ensino de Ciências**. São Paulo, março de 1985.

HAYDT, Regina Cazaux. **Avaliação do processo ensino aprendizagem**. São Paulo: Ática, 1988.

HOFFMANN, Jussara Maria Lerch. **Avaliação mediadora**: uma prática em construção da pré-escola à universidade. Porto Alegre: Educação & Realidade, 1993.

IFRAH, Georges. **Os números**: a história de uma grande invenção. Tradução Stella M. de Freitas Senra. 4. ed. São Paulo: Globo, 1992.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA – UFRJ. **Tratamento da informação**: explorando dados estatísticos e noções de probabilidade a partir das séries iniciais. Rio de Janeiro, 1997.

LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Org.). **Aprendendo e ensinando geometria**. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e língua materna**. São Paulo: Cortez, 1990.

MATAIX, Mariano Lorda. **Divertimentos lógicos y matemáticos**. Barcelona: Marcombo, 1979.

———. **El discreto encanto de las matemáticas**. Barcelona: Marcombo, 1988.

———. **Nuevos divertimentos matemáticos**. Barcelona: Marcombo, 1982.

OCHI, Fusako Hori et al. **O uso de quadriculados no ensino de geometria**. v. 1. São Paulo: CAEM--USP, 1992. (Coleção Ensino Fundamental.)

PERELMÁN, Y. **Matemáticas recreativas**. Tradução F. Blanco. 6. ed. Moscou: Mir, 1985.

PIAGET, Jean. **Fazer e compreender Matemática**. São Paulo: Melhoramentos, 1978.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Tradução Heitor Lisboa de Araujo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. **Revista do Professor de Matemática 33**. Rio de Janeiro, 1977.

RATHS, Louis E. et al. **Ensinar a pensar**. São Paulo: Herder/Edusp, 1972.

ROCHA-FILHO, Romeu C. **Grandezas e unidades de medida**: o sistema internacional de unidades. São Paulo: Ática, 1988.

SOUZA, Eliane Reame et al. **A Matemática das sete peças do tangram**. São Paulo: CAEM-USP, 1995. (Coleção Ensino Fundamental.).

VYGOTSKY, Lev S. **A formação social da mente**. Lisboa: Antídoto, 1979.

ZARO, M.; HILLEBRAND, V. **Matemática instrumental e experimental**. Porto Alegre: Fundação para o Desenvolvimento de Recursos Humanos, 1984.